

# **ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LA PRESIÓN EN UNA RED DE DISTRIBUCIÓN DE GAS NATURAL**

**CRISTIAN ANTONIO PEDRAZA YEPES**

**FUNDACIÓN UNIVERSIDAD DEL NORTE  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA  
BARRANQUILLA**

**2012**

**ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LA PRESIÓN EN UNA RED DE  
DISTRIBUCIÓN DE GAS NATURAL**

**CRISTIAN ANTONIO PEDRAZA YEPES**

**Proyecto de grado para optar al título de  
Magíster en Ingeniería Mecánica**

**DIRECTOR**

**MSc NÉSTOR DURANGO PADILLA**

**FUNDACIÓN UNIVERSIDAD DEL NORTE  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA  
BARRANQUILLA**

**2012**

Nota de aceptación:

---

---

---

---

---

Firma del presidente del jurado

---

Firma del jurado

---

Firma del jurado

Agradezco a Dios por estar vivo y permitirme alcanzar de su mano esta meta, por iluminar mi sendero, darme sabiduría y seguridad, por ayudarme a no desfallecer en los momentos difíciles y por perdonarme los errores cometidos.

A mis padres Rosa y William por su apoyo incondicional, por su paciencia y sabios consejos, ya que sin ellos este triunfo no hubiera sido posible.

A mis hermanas Dayanna y Michelle, apoyo, comprensión y Por hacerme sonreír, alegrarme la vida con sus ocurrencias y en hacerme más llevaderos los momentos de tensión.

A mi abuela Esilda aunque ya no está en este mundo desde el cielo me acompaña y desea lo mejor.

A mis hijas Luciana y Nicolle que es lo más maravilloso que me ha sucedido en la vida y la razón de mi existir.

A mi esposa Deyanira por su paciencia, consejos, ánimo, cariño, comprensión y por alegrarse de mis triunfos y sentirlos como propios.

A los compañeros de la maestría por sus apoyos y sabios consejos.

A Néstor Durango y Antonio Bula por poner a mi servicio su paciencia, comprensión, sabiduría y experiencia.

Cristian

## **AGRADECIMIENTOS**

ING. NÉSTOR DURANGO PADILLA, por sus contribuciones, apoyo y guía en este proyecto.

ING. ANTONIO BULA SILVERA, Por haber aportado sus conocimientos, experiencia para orientar esta investigación

ING. MARCO SANJUAN PACHECO, por su cooperación, confianza y apoyo durante mis estudios de maestría.

ING. RAFAEL RAMIREZ, ING. JORGE GONZALEZ, HANSEL ROJANO y al ING. WILLIAM ROMERO por sus colaboraciones y su apoyo incondicional en los momentos difíciles de mi vida.

ING. RICARDO VASQUEZ, por su apoyo en la recta final de este proyecto.

A todos mis compañeros de las diferentes promociones que de alguna u otra forma colaboraron en la realización de este proyecto.

A todo el cuerpo de profesores de la maestría en ingeniería mecánica por ayudarme a que todos los días creciera profesionalmente.

## NOMENCLATURA

A:	Área Transversal del Flujo
C:	Velocidad del sonido
CFL:	Criterio de Estabilidad para Esquemas de Solución Explícitos
$C_p$ :	Calor específico a Presión Constante
$C_{po}$ :	Calor Especifico a Presión Constante Ideal
$C_v$ :	Calor Especifico a Volumen Constante
$C_w$ :	Constante de Conversión de Unidades Ecuación de Weymouth
d:	Diámetro
e:	Rugosidad Absoluta
f:	Factor de Fricción de Moody
g:	Aceleración de la Gravedad
$g_c$ :	Factor de Corrección que Relaciona Masa y Peso
h:	Entalpia
K:	Relación de Calores Específicos
L:	Longitud de la Tubería
$L_w$ :	Término que Representa las Irreversibilidades
M:	Peso Molecular del Fluido
$\dot{m}$ :	Flujo Másico
$\dot{m}_D$ :	Flujo Másico Adimensional
N:	Número Total de Bloques en Los que se Divide la Tubería
NRe:	Número de Reynolds
P:	Presión
$\bar{P}$ :	Presión Promedio
$P_D$ :	Presión Adimensional
Q:	Caudal
R:	Constante Universal de Gases
S:	Entropía

T:	Temperatura de Flujo
t:	tiempo de Flujo
t <sub>D</sub> :	Tiempo Adimensional
U:	Energía Interna
U <sub>t</sub> :	Derivada del vector $\vec{U}$ con Respecto al Tiempo
U <sub>x</sub> :	Derivada del vector $\vec{U}$ con Respecto a la Distancia
V:	Volumen
V <sub>w</sub> :	velocidad del Fluido
W <sub>s</sub> :	Trabajo Hecho por el Fluido sobre los alrededores
x:	Distancia (m)
x <sub>D</sub> :	Distancia Adimensional
Y <sub>i</sub> :	Fraccion del componente i
Z:	Factor de Comprensibilidad
Z <sub>m</sub> :	Factor de Comprensibilidad Promedio
z:	Dirección del Flujo
ϕ:	Velocidad del Sonido Isotérmica
∂:	Deflexión del fluido
Υ:	Gravedad Específica
α:	Inclinación de la Tubería
ρ:	Densidad
v:	Velocidad de Flujo
μ:	Viscosidad
$\left(\frac{dP}{d\rho}\right)$ :	Variación de la Presión con Respecto a la densidad Isentrópica

## TABLA DE CONTENIDO

1	INTRODUCCION	1
1.1	MOTIVACION DEL TRABAJO	3
1.2	¿PORQUE LA NECESIDAD DE UN ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LAS PRESIONES EN UNA RED DE DISTRIBUCIÓN DE GAS?	4
1.3	OBJETIVOS	5
1.3.1	Objetivos Generales	6
1.3.2	Objetivos Específicos	6
1.4	METODOLOGIA	6
2	ESTADO DEL ARTE	9
3	ECUACIONES GENERAL PARA EL FLUJO DE GAS EN TUBERIAS ESTADO ESTABLE	14
3.1	ECUACIONES COMUNES PARA FLUJO DE GAS EN TUBERÍAS	17
3.1.1	Ecuación de Weymouth	17
3.1.2	Ecuación de Panhandle	18
3.1.3	Ecuación de Spitzglass	18
3.1.4	Ecuación de Mueller	20
3.1.5	Ecuación de Mueller para baja presión	20
3.2	SELECCIÓN CORRECTA DE LAS ECUACIONES	21
4	ECUACIÓN DE FLUJO DE GAS EN TUBERÍAS BAJO CONDICIONES DE ESTADO NO ESTABLE	23
4.1	ECUACIONES FUNDAMENTALES	24
4.1.1	Ecuación de estado	24
4.1.2	Ecuación de Continuidad	25
4.1.3	Ecuación de Movimiento	25
4.2	DESARROLLO DE LAS ECUACIONES PARA CONVERTIR VARIABLES ADIMENSIONALES	31
4.2.1	Presión	31
4.2.2	Posición	31
4.2.3	Tiempo	32
4.2.4	Flujo Másico	32
4.3	HIPOTESIS DEL CÁLCULO	34
4.3.1	Flujo Unidimensional	35
4.3.2	Flujo Isotérmico	35
4.3.3	Tubería de Pendiente Uniforme	35
4.3.4	Manejo de Propiedades	35
4.4	Método de las líneas	36
4.4.1	El Método de las líneas	36
5	SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL MODELO	41
5.1	BALANCE DE MASA	41
5.2	BALANCE DE MOMENTUM	41
5.4	DEFINICIÓN DE LOS NÚMEROS ADIMENSIONALES	42
5.5	BALANCE DE MASA ADIMENSIONAL.	43
5.6	BALANCE DE MOMENTUM ADIMENSIONAL	44
5.7	DISCRETIZACIÓN	45
5.8	CONDICIONES INICIALES	47
5.8.1	Ejemplo	48
5.9	VALIDACIÓN DEL MODELO PROPUESTO	52
6	ANÁLISIS Y RESULTADOS	57
6.1	Para un tramo de tubería	53
6.1.1	Proceso de Despresurización o vaciado	58
6.1.2	Proceso de presurización o empaquetamiento	61
6.2	TRANSIENTE LENTO	63 <sup>iii</sup>
6.3	PROPIEDADES QUE VARIAN CON LA PRESIÓN	66
6.3.1	Factor de Comprensibilidad	66

6.3.2	Relación de calores específicos	67
6.3.3	Viscosidad	68
6.4	RED DE GAS NATURAL	69
6.4.1	Composición de la mezcla	69
6.4.2	Tramos de Tuberías	69
6.4.4	Caso 1. Perturbación paso, aumento del 10% en el flujo de estado estacionario	71
6.4.5	Integración y análisis. Caso 1. Perturbación paso del 10 % en el flujo de estado estacionario	78
6.4.6	Caso 2. Perturbación paso, disminución del 10% en el flujo de estado estacionario	80
6.4.7	Integración y análisis. Caso 2. Perturbación paso del 10 % en el flujo de estado estacionario	87
6.4.8	Caso 3. Perturbación paso variable en el tiempo	89
6.4.9	Integración y análisis. Caso 3. Perturbación paso del 10 % en el flujo de estado estacionario	96
6.4.10	Análisis del compresor en la línea de alimentación de la red	97
7	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	99
8	BIBLIOGRAFÍA	102
9	ANEXOS	105
9.1	APENDICE A: SOLUCIÓN DE UN TRAMO DE TUBERÍA	105
9.2	APENDICE B: RED DE GAS NATURAL EN ESTADO NO ESTABLE	109
9.3	APENDICE C: COMPRESOR	116
9.4	APENDICE D: BALANCE DE MOMENTOS	119

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Tramo de tubería	7
Figura 2	Esquema de red, conformada por tramos de tuberías	7
Figura 3	Respuesta en gráfica cartesiana y de superficie	40
Figura 4	Distribución de presión VS Longitud – nodo [7] en estado estacionario	49
Figura 5	Validación del modelo con el caso 2 [4], p. 19	52
Figura 6	Demanda senoidal y comportamiento de la presión [13]	52
Figura 7	Demanda senoidal y comportamiento de la presión. Modelo propuesto	53
Figura 8	Demanda y presión nodo 2 y 3 [26] y [27]	54
Figura 9	Demanda y presión modelo propuesto	56
Figura 8	Tramo de Tubería	58
Figura 9	Presión Vs Distancia, proceso de despresurización	58
Figura 10	Presión Vs Tiempo	59
Figura 11	Demanda a la salida de la tubería Vs tiempo	60
Figura 12	Presión Vs Distancia, a diferentes tiempos	61
Figura 13	Presión Vs Tiempo	61
Figura 14	Flujo Vs Tiempo	62
Figura 15	Variación de la presión con la distancia y el tiempo	63
Figura 16	Demanda senoidal	64
Figura 17	Comportamiento de la presión frente una demanda senoidal	64
Figura 18	Variación de presión con el tiempo y la distancia de la tubería	65
Figura 19	Factor de compresibilidad Vs Presión a diferentes temperaturas	66
Figura 20	Factor de Compresibilidad Vs Presión, a diferentes temperaturas	67
Figura 21	Viscosidad Vs Presión, a diferentes temperaturas	68
Figura 22	Diagrama de la red.	70
Figura 23	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en El segundo tramo de La red	71
Figura 24	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el tercer tramo de la red.	72
Figura 25	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el cuarto tramo de la red	73
Figura 26	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el quinto tramo de la red.	74
Figura 27	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el sexto tramo de la red	75
Figura 28	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el septimo tramo de la red	76
Figura 29	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el octavo tramo de la red.	77
Figura 30	Variación de la presión al final de cada tramo de la red. Caso 1. a. ramal 1, b. ramal 2	79
Figura 31	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en El segundo tramo de la red	80
Figura 32	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el tercer tramo de la red	81
Figura 33	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el cuarto tramo de la red.	82
Figura 34	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el quinto	83

	tramo de la red.	
Figura 35	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el sexto tramo de la red.	84
Figura 36	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el séptimo tramo de la red	85
Figura 37	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el octavo tramo de la red	86
Figura 38	Figura 30. Variación de la presión al final de cada tramo de la red. Caso 1. a.ramal 1, b. ramal 2	88
Figura 39	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el segundo tramo de la red.	89
Figura 40	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el tercer tramo de la red	90
Figura 41	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el cuarto tramo de La red.	91
Figura 42	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el quinto tramo de la red	91
Figura 43	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el sexto tramo de la red.	92
Figura 44	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el séptimo tramo de la red	93
Figura 45	Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el octavo tramo de la red	94

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1	Sistema de ODEs obtenido para el ejercicio propuesto	40
Tabla 2	Números adimensionales	42
Tabla 3	Derivadas Implícitas Resumidas	55
Tabla 4	datos del ejemplo	48
Tabla 5	Datos de Presión Vs distancia	50
Tabla 6	Composición de la mezcla	50
Tabla 7	Propiedades de la mezcla	51

## RESUMEN

El comportamiento de la presión en un gasoducto depende básicamente de los esquemas de demanda y entrega dados en el tiempo, cuando la demanda excede la entrega, el gasoducto se despresuriza y cuando es la entrega la que excede la demanda, el gasoducto se presuriza, por lo anterior en el diseño de redes de gaseoductos se debe tener un control estado transitorio de las variables, tales como la presión, el caudal, las caída de presión, dado que la variabilidad incontrolada de la presión puede generar problemas de golpe de ariete e incumplir con la demanda.

El estudio del comportamiento del flujo de un gas en un sistema de distribución, permite determinar y dimensionar las unidades de generación, distribución, control y los aditamentos mediante los modelos y simulaciones antes de realizar la instalación requerida, haciendo que se reduzcan los costos reales.

El diseñar modelos a escala del prototipo, es decir, construir plantas pilotos en las cuales se puede ensayar el comportamiento de redes de distribución con el propósito de construir gaseoductos reales, que cumplan con todos los protocolos y además reducir los costos de implementación.

Con el propósito de seleccionar adecuadamente las estaciones compresoras, se requiere aumentar gradualmente la presión mediante etapas, evitando con esto un aumento súbito en la temperatura

El presente trabajo simula los procesos de presurización (empaquetamiento) y despresurización (vaciado) en un gasoducto ramificado, por medio de la

sistematización de procedimientos derivados de las ecuaciones que describen el flujo de gas en estado no estable a través de tuberías y la utilización de una solución por el método de las líneas, considerando un conjunto de condiciones iniciales y de frontera. Con el modelo propuesto se estudiará primero el comportamiento de la presión y la demanda con respecto a la posición y el tiempo. Luego se analizará una red ramificada, figura 22, obtenida por tramos de tuberías, donde se predice lo que ocurre en la red ante variaciones significativas del consumo en puntos localizados de la misma; también se le integrará un compresor a la entrada, para suplir las caídas de presión por consumo y pérdidas en tuberías. El modelo simula el comportamiento de la presión en la red ante cualquier tipo de perturbación del estado estacionario. El modelo propuesto sirve para el diseño de redes de gas natural en estado transitorio, estimar los componentes de la misma (diámetro y longitud de la tubería, números de clientes, compresor) y tener un presupuesto general básico de los costos de inversión inicial.

Primero se calculan las presiones y tasas máxicas en función del tiempo y la distancia y después se grafica el comportamiento de la presión con respecto al tiempo. En la red ramificada, se estudiarán tres tipos de casos de perturbación en el flujo del estado estacionario:

Perturbación paso, aumento del 10% en el flujo de estado estacionario.

Perturbación paso, disminución del 10% en el flujo de estado estacionario.

Perturbación paso variable.

Finalmente se presentan los resultados, análisis, conclusiones y recomendaciones.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las necesidades energéticas del momento han impulsado notablemente el uso generalizado del gas natural como fuente de energía primaria, por ser más económico, más limpio y abundante, pero se generan costos para trasegarlo. Para resolver el problema de su transporte desde los puntos de suministros a los de consumo, se utiliza fundamentalmente los gasoductos, ya que el suministro a través de este medio es más seguro y económico para el abastecimiento.

El diseño de redes de transporte y distribución de gas natural, así como los enormes costos de inversión y operación que conlleva, exigen un análisis riguroso del comportamiento en servicio de la red, para así poder diseñar, de la manera más eficiente y eficaz, el gasoducto que la alimentará.

Las demandas de gas en una red de distribución no son estables, se presentan alternadamente periodos de demandas altas y de demandas bajas, mientras que los aportes al gasoducto son normalmente constantes. Cuando la demanda es baja, el gasoducto se presuriza y cuando la demanda es alta la tubería se despresuriza.

Es necesario entonces, predecir el comportamiento del volumen almacenado en la tubería durante los periodos de demandas altas y bajas, para unas condiciones dadas de flujo de tal manera que al diseñar la red, esta pueda prestar un servicio confiable, especialmente en los periodos de demandas altas. Así mismo, el

excedente de gas que queda dentro de la tubería durante el periodo de empaquetamiento se necesita para el vaciado donde la demanda de gas es mayor que los aportes.

En el presente trabajo, se pretende desarrollar un procedimiento para estudiar el comportamiento de la presión interior del gasoducto cuando el fluye a través de está, durante los procesos de presurización y despresurización, bajo determinadas condiciones de flujo. Para ello se consideran condiciones de flujo en estado no estable, debido a que se requiere la precisa determinación de la caída de presión.

Lo anterior permite verificar si una tubería con gas a unas condiciones dadas puede satisfacer una demanda, con valores máximos y mínimos y un esquema de variación en un tiempo dado.

## 1.1 MOTIVACIÓN DEL TRABAJO

El Comportamiento de la presión en una red de gas natural ha sido abordado por diversos, como: Day [2], Kumar [3], Zhou [4], Buitrago [7], Gato [10], Gjerde [14] quienes han propuesto diferentes modelos analíticos, numéricos y experimentales para tratar de predecir el comportamiento de la red bajo el diferente escenario de demanda (empaquetamiento- despresurización), que tienen validez dentro de ciertos rangos y bajo ciertos supuestos. Sin embargo, a pesar de los diferentes enfoques y el uso de diversos tipos de tecnologías para el análisis de estos procesos, no existe un consenso general sobre el uso de las mismas. Algunas de las soluciones son con modelos muy simplificados y con limitaciones que predicen el comportamiento de la red, pero con la incertidumbre de cómo sería el verdadero comportamiento si esos términos se tuvieran en cuenta.

Este trabajo pretende ofrecer un modelo numérico, con base en el método de las líneas que permita predecir el comportamiento de la presión en una red de distribución de gas natural, ante variaciones significativas del consumo en puntos localizados de la misma

## **1.2 ¿PORQUE LA NECESIDAD DE UN ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LAS PRESIONES EN UNA RED DE DISTRIBUCIÓN DE GAS?**

La industria en general ha experimentado un crecimiento exponencial en el consumo de gas, especialmente en el área de generación de energía y el sector automotriz, [20]. En un mercado tan dinámico como lo es el transporte de gas, donde la necesidad de disponer de capacidad de mover producto se convierte en el objetivo primario, las organizaciones transportadoras requieren conocer continuamente la cantidad de capacidad disponible, la presión y su correspondiente ubicación en sus redes de ductos. Sin embargo, aquello que está disponible no necesariamente está accesible. La accesibilidad es una función del empaquetamiento de la línea, disponibilidad de compresión y facilidad en la utilización, por lo tanto para la organización transportadora es clave conocer la accesibilidad hoy, mañana y el día siguiente, tener esta capacidad disponible representa altos beneficios para las organizaciones transportadoras, entre los cuales podemos mencionar los siguientes:

- Capacidad de confirmar la disponibilidad para cumplir con el gas nominado.
- Permitir al grupo de operaciones trabajar a un margen máximo y seguro.
- Determinar la capacidad para cumplir con las obligaciones adquiridas.
- Capacidad para distribuir adecuadamente los volúmenes entregados a los clientes.
- Facilidad de publicar capacidad para ser vendida.
- Facilidades para minimizar los costos operacionales de la red. [20]

La función principal de un sistema de modelamiento es la de suministrar información detallada acerca de cada una de las variables de interés a lo largo de la red, teniendo como base el modelo matemático y determinada información leída del campo, el modelo representa al operador una visión completa en tiempo real del estado actual de la red, con una descripción gráfica y tabulada de los perfiles

de presión, flujo y composición a lo largo de cada una de las tuberías de la red y un análisis completo de dichas condiciones:

El modelo requiere de los siguientes datos:

- Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los fluidos (Ecuaciones de estado y conservación de masa, momentum y energía).
- Las condiciones de frontera correspondiente a los datos leídos de la instrumentación de campo.
- Información referente al ducto y su operación. Configuración de la red.

Con estos elementos el modelo está en capacidad de simular las condiciones operativas dentro de la red, ya sea en estado estable o transitorio, esta característica es muy importante, dado que las redes de transporte son sistemas dinámicos que operan bajo frecuentes cambios en las condiciones de trabajo.

### **1.3. OBJETIVOS**

Con este trabajo se propone desarrollar un modelo matemático e implementar una solución numérica para predecir el comportamiento de la presión en una red de gas natural ante variaciones significativas del consumo en un punto de la misma. Para poder cumplir con estos se han formulado los siguientes objetivos:

### **1.3. 1 Objetivo General:**

Estudiar el Comportamiento de la Presión en una Red de Distribución de Gas Natural

### **1.3.2 Objetivos Específicos**

- Desarrollar una solución numérica para un flujo transitorio en un tramo y una red de gas natural
- Analizar el comportamiento de los perfiles de presión y de flujo en un tramo de tubería.
- Deducir la respuesta de la red ante diferentes variaciones de consumo, teniendo en cuenta presión, flujo, números de clientes, longitud de tubería.
- Realizar los análisis y resultados del comportamiento de la presión en diferentes puntos de la red, ante variaciones significativas del consumo.

## **1.4 METODOLOGÍA**

Para el desarrollo de este trabajo y atendiendo los objetivos trazados se han formulado cuatro etapas que permiten la formulación de un modelo para predecir el comportamiento de la presión en una red de distribución de gas natural, ante variaciones significativas de consumo en puntos localizados de la red.

La primera etapa es la revisión del estado del arte, con el fin de establecer los trabajos precursores en el área, sus características, ventajas y limitaciones. Esta etapa permitirá conocer los diferentes modelos numéricos para simular tramos de tuberías, figura 1 y redes de gas natural bajo flujo dinámico o transitorio, figura 2.

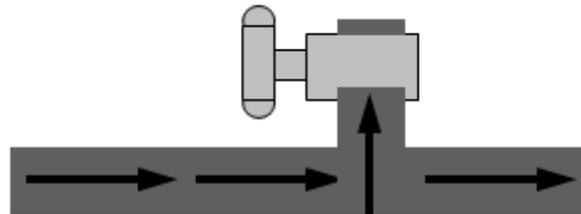


Figura 1. Tramo de Tubería

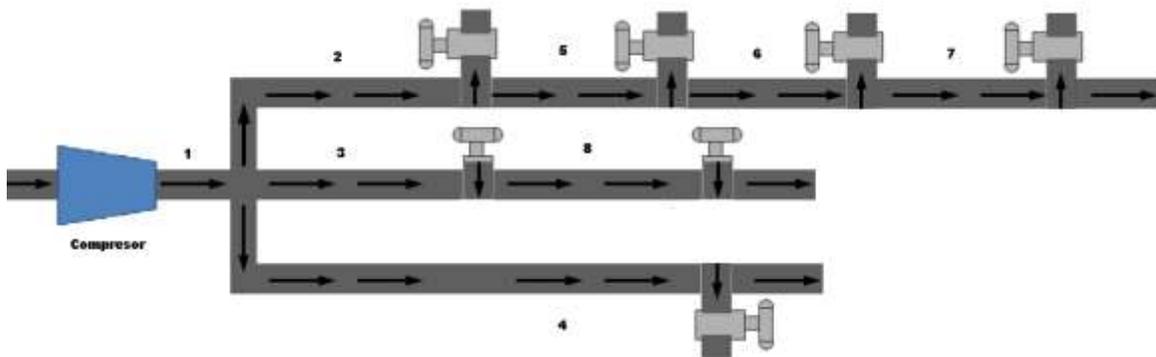


Figura 2. Esquema de una red, conformada por tramos de tuberías

La segunda etapa es formular un modelo numérico para predecir el comportamiento de la presión en un tramo de tubería y en una red en estado no estable, por el método de las líneas [19]; teniendo en cuenta el término de inercia y la variación de varias propiedades, como el factor de compresibilidad, relación de calores específicos.

En la tercera etapa, con trabajos anteriores, en simulación de redes de gas natural en estado transitorio, se verificará si el modelo propuesto se ajusta; además ofrece la ventaja de poder variar en la red ciertos parámetros como: el diámetro y la longitud de la tubería, composición de la mezcla, la demanda.

La cuarta y última etapa busca integrar los resultados de las etapas anteriores. A partir de una red obtenida por la unión de tramos de tuberías, se deduce o indaga sobre comportamiento del perfil de presión en la red, ante variaciones significativas del consumo en puntos localizados de la misma y finalmente realizar los análisis, conclusiones y recomendaciones.

Se espera contribuir con la formulación de una metodología que tendrá en cuenta los factores que afectan a la red de distribución de gas natural en estado dinámico. Ante variaciones significativas del consumo en puntos localizados de la red.

## 2. ESTADO DEL ARTE

Se estudiará el comportamiento de la presión en una red de distribución de gas natural en estado transitorio, donde el factor de compresibilidad y la relación de calores específicos varían, se resolverá un sistema de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas no lineales de primer orden, cuya solución numérica se hará mediante el método de la líneas; el sistema se desarrollará de forma adimensional, para generalizar la solución, se observará el proceso de presurización y despresurización de la red, las variaciones que tiene el flujo a lo largo de la tubería, teniendo en cuenta la variación de la presión, longitud, caudal y tiempo. Muchos autores trabajan solución numérica despreciando el factor de inercia (variación de la masa con respecto a la longitud), como [4], [5], [14], [15] [22], sin embargo, en el presente trabajo se analizará dicho factor y se obtendrá una solución más precisa, adicionalmente sobre la línea se colocará un compresor y se estudiará el comportamiento del fenómeno con esta máquina.

Los autores más representativos que han y siguen trabajado en esta temática se describen a continuación en orden cronológico:

[1] Weymouth, (1912) propone una primera definición para la capacidad de almacenaje de una tubería de gas la cual, junto con la ecuación de flujo de gas de Clinedinst, permite obtener una expresión para calcularla a partir de la variación de la compresibilidad del gas con la presión, en una tubería horizontal, bajo condiciones de flujo isotérmico y considerando gas ideal

[2] De Nevers y Day (1983), estudiaron el incremento y el decremento del volumen de fluido almacenado en una tubería de gas natural, lo que es comúnmente utilizado para evaluar la variación con el tiempo de la demanda, considerando un caudal de entrada más o menos constante. Aunque ellos no trabajan un algoritmo que permita sistematizar el modelo propuesto. En su artículo exponen métodos simples para estimar tanto la cantidad de gas almacenado durante los procesos de presurización y despresurización, como la velocidad a la cual dichos procesos debieran analizarse. Todo lo anterior bajo condiciones de flujo de gas en estado no estable.

[3] Kumar (1987), presenta un estudio general para el flujo de gas a través de tuberías, tanto en condiciones de estado estable como en estado no estable y propone soluciones analíticas y numéricas.

[4] Adewumi (1994), basado en balances de masa y de momentos, desarrolla una condición analítica para el flujo de gas en estado estable a través de una tubería, la cual relaciona la rata de flujo, la presión de entrada y de salida. Adicionalmente, compara datos reales con los cálculos obtenidos a partir de dicha ecuación obteniendo resultados favorables.

[5] Reddy Prasdhanth (1995), compara la solución numérica del flujo transiente de diferencia explícito con las funciones de transferencia y demuestra que es 25 veces más rápido.

[6] Adewumi (1996), Simula el proceso de flujo transitorio de gas natural a través de una tubería, sin despreciar el término de la inercia en la deducción de la ecuación de balance de momento, lo cual resume en un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales, no homogéneas, hiperbólicas de primer orden.

[7] Buitrago (2001) presenta una breve descripción del modelo de flujo de gas en tuberías bajo condiciones no estables. Las ecuaciones del modelo se resuelven utilizando diferencias finitas, un esquema implícito y se implementa un método iterativo tipo Picard

[8] Guang - Yan Zhu (2001) simulan un modelo dinámico y de control predictivo lineal, para grandes redes de tuberías para gas natural

[9] Evangelos Tentis (2002) Este estudio simula el flujo de gas en no estado estacionario, utilizando un método de adaptación de las líneas pero no tienen en cuenta el termino de inercia.

[10] Gato (2005) Este trabajo es sobre el comportamiento dinámico de alta presión del flujo de gas en tuberías. La simulación numérica se realizó mediante la solución de las ecuaciones de conservación, para flujo compresible unidimensional, utilizando el método de Galerkin apoyado en Runge-Kutta, con aproximación de tercer orden en el espacio y el tiempo.

[11] Hans Aalto (2008), Estudian el fenómeno en estado no estacionario del flujo de gas a través de tubería, resuelven el sistema de ecuaciones diferenciales con funciones de transferencia y desprecian el factor de inercia.

[12] Yingjun Ruan (2009) Realizan un procedimiento para diseñar el sistema de la línea principal en redes de gas natural y teniendo en cuenta las estaciones compresoras

[13] Marc C. Steinbach (2009) Estudian del fenómeno dinámico de flujo en tuberías de gas, utilizando un algoritmo de solución de proyecciones dispersas a nivel local en el tiempo

[14] Joachim Dyrstad (2011) Propone un modelo para la predicción de las presiones y caudales en los casos transitorios, por medio del método de las características y se centra en la solución de la ecuación de la energía.

[15] Edris Ebrahimzadeha (2012) Realizan la simulación de flujo de gas en estado transitorio, utilizando el método de colocación ortogonal.

[16] Naranjo. Presenta la deducción de la ecuación general para flujo de gas en estado estable y sus variantes a partir del cambio de suposiciones establecidas en términos de presión, tasas de flujo, diámetro de tubería y unidades utilizadas para las variables. Finalmente, presenta un conjunto de recomendaciones para la utilización de cada una de las ecuaciones presentadas.

[17] Joffe (1949), basado en la definición propuesta por Weymount , desarrolla expresiones, para calcular la capacidad de almacenaje de una tubería de gas, teniendo en cuenta diferentes suposiciones para gases ideales.

### 3. ECUACIONES GENERALES PARA EL FLUJO DE GAS EN TUBERÍAS ESTADO ESTABLE

Para determinar las ecuaciones generales para el flujo de gas en tuberías primero hay que tener en cuenta las siguientes suposiciones.

- Flujo horizontal.
- El fluido no realiza trabajo ni sobre él se realiza trabajo.
- Los cambios en energía cinética son despreciables.
- Las pérdidas por irreversibilidades se calculan con la ecuación de Darcy-Weysbach que involucran el factor de fricción de Moody.

Con base en lo anterior queda la siguiente expresión:

$$q_h = C * \frac{T_b}{P_b} * \left( \frac{d^5}{\gamma_g L f} \right)^{0.5} * \int_{P_2}^{P_1} \frac{P}{Z T} * dp \quad (1)$$

Donde,

$q_h$ , es la tasa volumétrica de flujo de gas medida a condiciones base  $P_b$  y  $T_b$ .

$P_b$  y  $T_b$ , condiciones de presión y temperatura tomadas como base o referencia.

$P_1$  y  $P_2$ , presiones de entrada y salida del gas en la tubería.

$T$ , temperatura de flujo.

$\gamma_g$  y  $Z$ , es gravedad específica y factor de supercompresibilidad del gas (adimensional).

$L$  y  $d$ , longitud y diámetro de la tubería.

$f$ , factor de fricción de Moody.

$C$ , constante cuyo valor depende de las unidades en que se den las variables de la ecuación (1). Para el sistema S.I., el valor de  $C$  es 18.89 y para el sistema Inglés, 46.16. La ecuación (1) se conoce como la ecuación de Clinedinst  
Integrando la ecuación (1) y suponiendo  $Z$  y  $T$  como valores promedios y constantes, y la ecuación se puede escribir así:

$$q_h = C_g * \frac{T_b}{P_b} * \left( \frac{d^5}{\gamma_g Z T L f} \right)^{0.5} * (P_1^2 - P_2^2)^{0.5} \quad (2)$$

$C_g$ , es una constante cuyo valor depende de las unidades empleadas para las variables.

La ecuación (2) es la forma más conocida de la ecuación general para flujo de tuberías.

El factor  $\frac{1}{\sqrt{f}}$  es el factor de transmisibilidad.

La temperatura  $\bar{T}$  es la temperatura de flujo y se considera constante a lo largo de toda la línea, por el supuesto de que la tubería es horizontal.

El factor  $\bar{Z}$ , es el factor de compresibilidad del gas, evaluado a  $\bar{P}$  y  $\bar{T}$

\*  $\bar{P}$ , Presión promedio en la tubería, se puede determinar de la siguiente manera:

$$\bar{P} = \frac{2}{3} \left( \frac{P_1^3 - P_2^3}{P_1^2 - P_2^2} \right) \quad (3). \text{ Pág. 37, [21]}$$

Para aplicar la ecuación (2), requiere calcular  $f$  y para ello es necesario definir el régimen de flujo que se está presentando lo cual se puede hacer evaluando el parámetro conocido como número de Reynolds, para flujo de gas se expresa de la siguiente manera:

$$N_{Re} = C * \frac{P_b}{T_b} * q_h * \frac{\gamma_g}{\mu_g d} \quad (4). \text{ Pág. 43, [21] – Pág. 41 [16]}$$

Donde

$N_{Re}$ , es el número de Reynolds.

$\mu_g$ , es la viscosidad del gas calculadas a las condiciones promedias de flujo en tubería.

C, es una constante que depende de las unidades de las variables

El número de Reynolds es un parámetro adimensional y de acuerdo a su valor se habla de flujo laminar o turbulento. Si  $N_{Re} \leq 2000$  se habla laminar y en este caso

$\frac{1}{\sqrt{f}}$  se calcula de:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.125 N_{Re}^{0.5} \quad (5), \text{ Pág. 42, [16]}$$

Cuando  $N_{Re} > 2000$  se considera que el flujo pasa por diferentes regímenes (transición y crítico), en la zona de flujo parcialmente turbulento el factor de fricción depende del número de Reynolds y en la zona totalmente turbulento depende de la rugosidad relativa de la tubería y para un valor dado esta variable se mantiene constante con el número de Reynolds, el régimen parcialmente turbulento está asociado con tuberías lisas y la expresión  $\frac{1}{\sqrt{f}}$  está dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4 \log \frac{N_{Re}}{\sqrt{1/f}} \quad (6), \text{ Pág. 42, [16]}$$

Para flujo totalmente turbulento está asociado con tuberías rugosas y la expresión

$\frac{1}{\sqrt{f}}$  está dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4 \log \left( \frac{3.7}{\varepsilon} \right) \quad (7), \text{ Pág. 42 [16]}$$

Donde  $\varepsilon$  es la rugosidad relativa de la tubería. Para aplicar la ecuación (6) y (7) es necesario saber si se tiene un flujo parcialmente turbulento o totalmente turbulento, existe un criterio aproximado para  $N_{Re}$  entre 4000 y 500000 se puede

considerar flujo parcialmente turbulento y para valores mayores de 500000 se considera flujo totalmente turbulento.

### 3.1 ECUACIONES COMUNES PARA FLUJO DE GAS EN TUBERÍAS

El flujo de gas se presenta normalmente en la zona turbulenta, y puede ser parcialmente o totalmente turbulento, se puede hacer uso de la ecuación (2), la (6) y (7), pero la primera hay que realizarla por ensayo y error y en la segunda es necesario conocer la rugosidad de la tubería. Se han desarrollado ecuaciones donde se plantean ecuaciones más sencillas para el factor de transmisión, quedando solo en función del diámetro de la tubería.

#### 3.1.1 Ecuación de Weymouth

Reemplazando  $\frac{1}{f} = C * d^{1/6}$  en la ecuación (2).

Donde d, es el diámetro de la tubería y C es una constante que depende de las unidades de d, cuando d está en pulgadas, C=5.59 y cuando d está en centímetros, C=4.784

$$q_h = C_w * \frac{T_b}{P_b} * \left( \frac{d^{16/3}}{\gamma_g ZTL} \right)^{0.5} * (P_1^2 - P_2^2)^{0.5} \quad (8)$$

Donde  $C_w$ , es la constante de la ecuación de Weymouth y depende de las unidades usadas para las variables.

### 3.1.2 Ecuación de Panhandle

La ecuación de Weymouth se aplica a condiciones de presiones media y diámetros medios y la Panhandle se recomienda para presiones y diámetros altos, tomando como referencia la ecuación B de Panhandle, que es la más reciente. La expresión propuesta para Panhandle para  $f$  es la siguiente:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.67 N_{\text{Re}}^{0.1961} \quad (9)$$

El número de Reynolds se puede calcular con la expresión (4)

Reemplazando la ecuación (4) a la (9) y luego esta a la 2 tenemos la siguiente expresión.

$$q_h = C_p * \frac{T_b}{P_b} * \frac{d^{2.53}}{\gamma_g^{0.49}} * \left( \frac{P_1^2 - P_2^2}{ZTL} \right)^{0.5} * \frac{1}{\mu_g^{0.02}} \quad (10)$$

Donde  $C_p$ , es la constante de la ecuación de Panhandle y su valor depende de las unidades utilizadas para las variables.

### 3.1.3 Ecuación de Spitzglass

Usada para caídas de presión baja (menores de 207 Kpa) y tamaños de tuberías bajo (10.2 mm), la expresión para  $f$  es la siguiente:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \left( \frac{100}{1 + \frac{C_1}{d} + C_2 d} \right)^{0.5} \quad (11)$$

$C_1$  y  $C_2$ , son constante que dependen de las unidades utilizadas para el diámetro.

Inglés  $C_1=3.6$   $C_2=0.03$  diámetro en pulgadas

Inglés  $C_1=0.3$   $C_2=0.0025$  diámetro en pies

SI  $C_1=91.44$   $C_2=0.762$  mm

SI  $C_1=0.09144$   $C_2=0.00762$  m

Suposiciones que hace Spitzglass

$$(P_1^2 - P_2^2) = (P_1 + P_2)(P_1 - P_2) = (P_1 + P_2) * \Delta P \quad (12)$$

$P_2 = 0.9P_1$ , Por lo tanto

$$(P_1^2 - P_2^2) \approx 1.9P_1^2$$

$T=520$  °R en el sistema inglés y  $298.8$  K S.I

$\Delta P = \rho_w g h_w$ , donde  $h_w$  es la altura de la columna de agua que ejerce una presión igual a  $\Delta P$ ,  $\rho_w$  es la densidad del agua,  $g$  es la aceleración de gravedad.

Aplicando las suposiciones anteriores y la ecuación (12) a la ecuación (2) se obtiene la siguiente expresión conocida como la ecuación de Spitzglass:

$$q_h = C_s * \frac{T_b}{P_b} * \left( \frac{h_w P_1 d^5}{\gamma_g L \left( 1 + \frac{C_1}{d} + C_2 d \right)} \right)^{0.5} \quad (13)$$

$h_w$ , es la caída de presión ( $P_1 - P_2$ ) equivalente a una columna de agua.

$C_s$ , es la constante de 3 Spitzglass y su valor depende de las unidades para las variables.

### 3.1.4 Ecuación de Mueller

Es parecida a la Panhandle, ya que considera el factor de fricción de Moody (f) como una función del número de Reynolds, pero se aplica a presión baja y diámetros pequeños, el factor de transmisión es la siguiente:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.67 N_{Re}^{0.13} \quad (14)$$

Reemplazando (4) en la ecuación (14) y el resultado en la ecuación (2) tenemos la siguiente expresión.

$$q_h = C_M * \frac{T_b}{P_b} * \frac{d^{2.725}}{\gamma_g^{0.425} \mu_g^{0.15}} * \left( \frac{P_1^2 - P_2^2}{ZTL} \right)^{0.575} \quad (15)$$

$C_M$ : es una constante que depende del sistema de unidades usado

### 3.1.5 Ecuación de Mueller para baja presión

Las anteriores ecuaciones se pueden modificar para llevarla a una ecuación para presiones bajas de la siguiente forma:

$(P_1^2 - P_2^2)$ , este término se puede escribir de la siguiente manera:

$$(P_1^2 - P_2^2) = (P_1 + P_2)(P_1 - P_2)$$

$$(P_1^2 - P_2^2) = \frac{2(P_1 + P_2)}{2}(P_1 - P_2)$$

$$(P_1^2 - P_2^2) = 2\bar{P}(P_1 - P_2) \quad (16)$$

Donde el término  $(P_1 - P_2)$ , se puede expresar en términos de la altura de una columna de agua que ejerce una presión igual de la siguiente forma:

$$(P_1 - P_2) = \rho_w g h_w \quad (17)$$

Reemplazando la ecuación (17) en la ecuación (16) se tiene:

$$(P_1^2 - P_2^2) = C \bar{P} h_w \quad (18)$$

La ecuación (18) se reemplaza en la (15) quedando la siguiente expresión:

$$q_h = C_M * \frac{T_b}{P_b} * \frac{d^{2.725}}{\gamma_g^{0.425} \mu_g^{0.15}} * \left( \frac{\bar{P} h_w}{TL} \right)^{0.575} \quad (19)$$

Está es una ecuación para presiones bajas, el valor de  $z=1$ , por ser una ecuación para presiones bajas.

### 3.2 SELECCIÓN CORRECTA DE LAS ECUACIONES

#### Primer Procedimiento

Al realizar los cálculos del flujo de gas en tuberías es necesario conocer el tipo de flujo existente: laminar o turbulento y donde podemos tener parcial o totalmente turbulento. Cuando  $N_{Re} < 2000$ , se tiene flujo laminar y el factor de transmisión se determina por la ecuación (6), cuando  $N_{Re} > 2000$ , se dice que el flujo es turbulento parcial o total, si  $N_{Re} < 400000$ , se considera parcialmente turbulento y para  $N_{Re} > 400000$ , se tiene flujo totalmente turbulento. Definido se pueden usar la ecuación (6) para flujo parcialmente turbulento y la (7) para flujo totalmente turbulento y después se utiliza la ecuación (2).

Segundo procedimiento

Para flujo parcialmente turbulento Panhandle, mueller y para flujo totalmente turbulento (Weymount, spitzaglass)

#### **4. ECUACIÓN DE FLUJO DE GAS EN TUBERÍAS BAJO CONDICIONES DE ESTADO NO ESTABLE**

Se dice que existe flujo bajo condiciones de estado no estable o flujo transitorio cuando se considera la resistencia al flujo y la caída de presión como funciones del tiempo. El flujo a través de sistemas de transmisión de gas es generalmente transitorio; esto se debe, principalmente, a las variaciones en la demanda. Es decir que el caudal de salida de gas de la línea es diferente al de entrada.

Si el fluido que fluye por una tubería es incompresible, cualquier cambio es transmitido instantáneamente a lo largo de ésta y por lo tanto las condiciones de flujo son iguales en cualquier sección de la tubería, incluyendo la entrada y la salida.

El gas es un fluido altamente compresible y por lo tanto cualquiera cambio que se genere a lo largo de la tubería tarda en ser transmitido hasta cualquiera de los puntos de referencia de la tubería como son la entrada y salida de la misma. Sin embargo, se puede asumir flujo en estado estable para este sistema si se toman secciones infinitesimales de la tubería.

## 4.1 ECUACIONES FUNDAMENTALES

El flujo en estado no estable para un gas puede ser descrito usando tres ecuaciones fundamentales. Ecuación de estado, ecuación de continuidad, ecuación de movimiento y relaciones que tengan en cuenta la desviación del gas del comportamiento ideal.

El flujo a través de tuberías se asume generalmente, como isotérmico, la fricción se calcula bajo estado estable, la pendiente de sección de tubería se considera uniforme y la expansión de las paredes de la tubería debido a los cambios en presión se desprecia

### 4.1.1 Ecuación de estado

$$\rho = \frac{PM}{ZRT} \quad (20)$$

Para la aplicación de la ecuación (20) se asume que la temperatura y la composición son constantes y se toma valores promedios (constantes) para el factor de compresibilidad (Z).

La ecuación (20) puede ser simplificada (Kumer,, 1987) [3] de la siguiente forma

$$\frac{P}{\rho} = \frac{ZRT}{M} = \frac{\beta^2}{g_c}$$

$$\rho = \frac{Pg_c}{\beta^2} \quad (21)$$

#### 4.1.2 Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial x} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

Sustituyendo la ecuación (21) en la ecuación (22), se obtiene

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{PAg_c}{\beta^2} \right)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\beta^2}{Ag_c} \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (23)$$

#### 4.1.3 Ecuación de Movimiento

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho}{g_c} \left[ v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \right] + \frac{\rho g}{g_c} \text{sen} \alpha + \frac{fv|v|\rho}{2dg_c} = 0 \quad (24)$$

En la ecuación (24) se utiliza  $v|v|$ , en lugar de  $v^2$ , para considerar la dirección de flujo dentro del término de fricción.

La velocidad de flujo y el caudal másico se relaciona mediante la siguiente expresión:

$$v = \frac{\dot{m}}{A\rho}$$

Reemplazando las ecuaciones (21) en la ecuación anterior, tenemos:

$$v = \frac{\beta^2 \dot{m}}{APg_c} \quad (25)$$

Sustituyendo las ecuaciones (21) y (25) en la ecuación (24), se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{P}{\beta^2} \left[ \frac{\dot{m}\beta^2}{APg_c} \frac{\partial \left( \frac{\dot{m}\beta^2}{APg_c} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{\dot{m}\beta^2}{APg_c} \right)}{\partial t} \right] + \frac{Pg}{g_c} \text{sen}\alpha + \frac{f\dot{m}|\dot{m}|\beta^4}{2dg_c(APg_c)^2} \frac{Pg_c}{\beta^2} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{P\beta^2}{\beta^2} \left[ \frac{\dot{m}\beta^2}{AP^2g_c} \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} - \frac{\dot{m}^2\beta^2}{AP^3g_c} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{P} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} - \frac{\dot{m}}{P^2} \frac{\partial P}{\partial t} \right] + \frac{Pg}{g_c} \text{sen}\alpha + \frac{f\dot{m}|\dot{m}|\beta^2}{2dg_cA^2g_cP} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{P}{Ag_c} \frac{\dot{m}^2\beta^2}{AP^3g_c} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{P}{Ag_c} \frac{\dot{m}}{P^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{P\dot{m}\beta^2}{A^2P^2g_c^2} \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} + \frac{P}{Ag_c} \frac{1}{P} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{Pg}{\beta^2} \text{sen}\alpha + \frac{f\dot{m}|\dot{m}|\beta^2}{2dA^2g_c^2P}$$

$$= 0$$

Sustituyendo  $\frac{\partial P}{\partial t}$  en la ecuación (23) y reagrupando se tiene:

$$\left[ 1 - \frac{\dot{m}^2\beta^2}{(APg_c)^2} \right] \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2\dot{m}\beta^2}{A^2Pg_c^2} \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} + \frac{1}{Ag_c} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{Pg}{\beta^2} \text{sen}\alpha + \frac{f\dot{m}|\dot{m}|\beta^2}{2dA^2g_c^2P} = 0 \quad (26)$$

En la anterior ecuación el término  $\frac{\dot{m}^2\beta^2}{(APg_c)^2}$  en el coeficiente de  $\frac{\partial P}{\partial x}$  es muy pequeño con respecto a la unidad y por lo tanto despreciable, igualmente, el término  $\frac{\partial \dot{m}}{\partial x}$  es despreciable en comparación con los otros términos (kumar 1987) [3] aplicando estas simplificaciones, la ecuación (7) se reduce de la siguiente forma:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Ag_c} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{Pg}{\beta^2} \text{sen}\alpha + \frac{f\dot{m}|\dot{m}|\beta^2}{2dA^2g_c^2P} = 0 \quad (27)$$

La ecuación (27) describe el flujo transitorio de gas a través de una tubería, frecuentemente es usada en la siguiente manera:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial P^2}{\partial x} + \frac{P}{Ag_c} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{P^2 g}{\beta^2} \text{sen} \alpha + \frac{f \dot{m} |\dot{m}| \beta^2}{2dA^2 g_c^2} = 0 \quad (28)$$

Otra forma de presentar las ecuaciones que describen el flujo de gas a través de tuberías bajo condiciones de estado no estable, resulta al desarrollar el siguiente procedimiento, (De Never y Day) [2] y [7]

Partimientó de la ecuación de Balance de Materia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

Y la ecuación de Balance de Momentos:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{f}{2d} \rho v^2 = 0 \quad (30)$$

Para un gas ideal se tiene:

$$\rho = \frac{PM}{ZRT}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial P} x \frac{\partial P}{\partial t} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{M}{ZRT} - \frac{M}{Z^2 RT} \frac{\partial Z}{\partial P}$$

El término  $\frac{\partial Z}{\partial P}$  se puede despreciar, debido a que la variación del factor de compresibilidad con respecto a la presión es muy pequeña. Por lo tanto la ecuación 12 queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{M}{ZRT} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (32)$$

$$\rho v A = \dot{m} \quad (33)$$

Si reemplazamos las ecuaciones 32 y 33 en 29 y 30

$$\frac{M}{ZRT} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\dot{m}}{A} \right) = 0 \quad (34)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{m}}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho^2 v^2}{\rho} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{f}{2d} \frac{\rho^2 v^2}{\rho} = 0$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{ZRT}{MA^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\dot{m}^2}{P} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{f}{2d} \frac{ZRT}{MA^2} \left( \frac{\dot{m}^2}{P} \right) = 0$$

De donde,

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} = - \frac{ZRT}{MA} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\dot{m}^2}{P} \right) + A \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{f}{2d} \frac{ZRT}{MA} \left( \frac{\dot{m}^2}{P} \right) \quad (35)$$

Las ecuaciones 34 y 35 describen, al igual que las condiciones 27 o 28, el flujo de un gas real en una tubería bajo condiciones de estado no estable, teniendo como variables dependientes el caudal másico y la presión y como variables independientes la distancia y el tiempo. Sin embargo, las ecuaciones 34 y 35 permiten observar, en forma más directa, el comportamiento de la variación de la presión y el caudal con respecto al tiempo y el espacio. Estas ecuaciones ya incluyen el comportamiento del gas real. Por lo anterior se optó por utilizar dichas ecuaciones en el modelamiento del problema planteado.

Para convertir variables dimensionales a variables adimensionales existen diversas formas, se utilizará las siguientes.

## 4.2 DESARROLLO DE LAS ECUACIONES PARA CONVERTIR VARIABLES ADIMENSIONALES

Para transformar un valor de una variable en adimensional, ésta se divide por valor considerado estándar.

### 4.2.1 Presión

Para la presión se utiliza como valor estándar el de las presiones a condiciones normales, esto es 14.7 psi o 101.3 kPa, dependiendo del sistema de unidades, cuando la presión esta en kPa se tiene:

$$P_D = \frac{P}{P_o} = \frac{P}{101.3 \text{ kPa}} \quad (36)$$

### 4.2.2 Posición

Para la distancia se utiliza la longitud total de la tubería

$$x = \frac{x}{L}, \text{ o lo que es lo mismo } \Delta x = \frac{\Delta x}{L} \quad (37)$$

### 4.2.3 Tiempo

Partiendo de la definición de tiempo como distancia sobre la velocidad, se toma como distancia base la longitud total de la tubería y como la velocidad estándar la del sonido en un gas real  $\left(\sqrt{\frac{KRT}{M}}\right)$ ,

esto es:

$$t_o = \frac{L}{c} = \frac{L}{\sqrt{\frac{KRT}{M}}} = L \sqrt{\frac{M}{KRT}}$$

$$t_D = \frac{t}{t_o} = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{KRT}{M}} \quad (38)$$

#### 4.2.4 Flujo Másico

Por definición

$$\dot{m} = \rho v A$$

De donde

$$\dot{m}_o = \rho_o v_o A$$

$$\rho_o = \frac{P_o M}{ZRT}$$

$$v_o = c = \sqrt{\frac{KRT}{M}}$$

$$\dot{m}_o = \frac{P_0 M A}{Z R T} \sqrt{\frac{K R T}{M}} = \frac{P_0 A}{Z} \sqrt{\frac{K M}{R T}}$$

De donde:

$$\dot{m}_D = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_o} = \frac{\dot{m} Z}{P_0 A} \sqrt{\frac{R T}{K M}} \quad (39)$$

Sustituyendo las ecuaciones (36) a la (39) en la (34) y (35)

$$\frac{\partial(P_D X P_o)}{\partial\left(L t_D \sqrt{\frac{M}{K R T}}\right)} = -\frac{Z R T}{A M} \frac{\partial\left(\frac{\dot{m}_D A P_o}{Z} \sqrt{\frac{K M}{R T}}\right)}{\partial(x_D L)}$$

$$\frac{\partial P_D}{\partial t_D} = -\frac{\partial \dot{m}_D}{\partial x_D} \quad (40)$$

y

$$\frac{\partial\left(\frac{\dot{m}_D A P_o}{Z} \sqrt{\frac{K M}{R T}}\right)}{\partial\left(L t_D \sqrt{\frac{M}{K R T}}\right)} = -A \frac{\partial(P_D P_o)}{\partial(x_D L)} - \frac{Z R T}{M A} \frac{\partial}{\partial(x_D L)} \left( \frac{\dot{m}_D^2 A^2 P_o^2 K M}{Z^2 P_D P_o} \right) - \frac{f Z R T}{2 d M A} \left( \frac{\dot{m}_D^2 A^2 P_o^2 K M}{Z^2 R T P_D P_o} \right)$$

$$\frac{\partial \dot{m}_D}{\partial t_D} = -\frac{Z}{K} \frac{\partial P_D}{\partial x_D} - \frac{\partial}{\partial x_D} \left( \frac{\dot{m}_D^2}{P_D} \right) - \frac{f L}{2 d} \left( \frac{\dot{m}_D^2}{P_D} \right) \quad (41)$$

Observando la diferencia entre las ecuaciones (40) y (41) con respecto a las ecuaciones (34) y (35), se justifica la utilización de las variables adimensionales ya que éstas, el comportamiento de un gas fluyendo a través de una tubería, lo definen únicamente dos factores:  $\frac{z}{K}$  y  $\frac{fL}{2d}$ . El primer cociente depende básicamente de las condiciones de presión y como dichas condiciones no varían mucho en un gasoducto a otro, esto hace que el segundo cociente sea determinante sobre el comportamiento del flujo en estado no estable en una tubería dada.

### **4.3 HIPOTESIS DEL CÁLCULO**

**4.3.1 Flujo Unidimensional.** Se justifica al ser el régimen de flujo muy turbulento, ya que el número de Reynolds es elevado (viscosidad baja y rango de velocidades alto en gasoductos), lo que comporta un perfil de velocidades prácticamente uniforme, además de considerar que el diámetro de la tubería es demasiado pequeño con respecto a las longitudes de la misma. Solo hay, una dirección significativa en el estudio del problema.

**4.3.2 Flujo Isotérmico.** La longitud de los gasoductos, generalmente está por encima de los 10 Km, entre dos estaciones de compresión y la elevada conductividad de las tuberías metálicas permitan considerar la evolución del gas a temperatura constante, la cual será la temperatura del medio circundante.

**4.3.3 Tubería de Pendiente Uniforme.** Si el trazado es, sin embargo, irregular, la solución consiste en subdividir la tubería en tantos tramos como sea preciso, con el objeto de obtener una serie de tramos de pendiente constante.

**4.3.4 Manejo de Propiedades.** Propiedades tales como el factor de compresibilidad, la relación de calores específicos son variables y el factor de fricción de Moody, las cuales son calculadas a partir de las condiciones de entrada y salida de cada uno de los tramos en los que se divide la tubería, por ser un flujo totalmente turbulento.

#### 4.4 Método de las líneas

**4.4.1 El Método de las líneas.** Es una técnica que se utiliza para convertir una Ecuación Diferencial Parcial (PDE) en un sistema acoplado de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODEs) [23]. El método se apoya en la *discretización* o aproximación por diferencias finitas de las derivadas parciales espaciales, utilizando las fórmulas clásicas que se utilizan en el cálculo diferencial para tal fin. Por ejemplo, para aproximar la primera derivada de  $y$  con respecto a  $x$ , siendo  $y = f(x)$ , se tiene que:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \quad (42)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \quad (43)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \quad (44)$$

Donde (42), (43) y (44) representan respectivamente la aproximación por diferencias finitas hacia delante, hacia atrás y diferencias finitas centrales de la primera derivada con respecto a  $x$ . Por otra parte, la fórmula para aproximar la segunda derivada es:

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_i \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (45)$$

No está de más decir que entre menor sea el valor de  $\Delta x$  más exactas serán las aproximaciones dadas por las expresiones (42)-(45), y es precisamente allí donde radica la eficiencia de los métodos numéricos. Se puede encontrar información más detallada acerca de los fundamentos de las diferencias finitas en la literatura especializada [24].

En este trabajo sólo se aprovechan los conceptos de discretización por diferencias finitas para simplificar las derivadas espaciales y expresar las PDEs en términos de las derivadas respecto al tiempo. Para ello, el eje espacial ( $x$ ) se divide en  $N$  puntos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$  donde cada punto tiene una correspondencia en la variable dependiente  $y$ . Por lo tanto, si hay  $N$  puntos en  $x$ , habrá, por tanto,  $N$  valores correspondientes en  $y$ , a saber,  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$ . Obviamente, cada valor de  $y_i = f(x_i, t)$  depende del tiempo y se relaciona con él, mediante las derivadas temporales.

Para calcular los valores de la variable dependiente se debe fijar los puntos o *grids* en el eje espacial, se discretizan las derivadas con respecto a él y se resuelve el sistema de ODEs resultante. Habiendo  $N$  valores de  $y_i$  habrá  $N$  derivadas temporales respecto a  $y_i$  y la Ecuación Diferencial Parcial (PDE) se reduce, entonces, a un sistema acoplado de  $N$  número de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODEs), que puede ser resuelto por Runge-Kutta, Euler u otro método pertinente para ello. Como ya se dijo,  $\Delta x$  debe ser muy pequeño ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), para que la técnica funcione. La misma dice que por definición  $\Delta x = 1/N$

y para que  $\Delta x$  tienda a 0,  $N$  debe ser muy grande, lo que lleva a obtener un nutrido set de ODEs. Resolver un sistema acoplado de 50 o más ODEs, sin la ayuda de un ordenador programado para ello, no solo es una tarea difícil y dispendiosa; también es innecesaria porque en la actualidad existen programas de matemáticas como MATLAB® que tienen una librería especializada para llevar a cabo esa aplicación. Para entrar en más detalles, se va a considerar un ejemplo de aplicación.

*Ejercicio [25].* Supóngase que se desea resolver la siguiente ecuación de calor:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (46)$$

Por existir una derivada con respecto al tiempo, se requiere una condición inicial de la variable  $T(x,t)$  en cualquier punto del eje espacial  $x$ . Ahora bien, puesto que existe una derivada de segundo orden respecto al eje espacial  $x$ , se deben especificar dos condiciones de frontera. Las condiciones son las siguientes:

Condición inicial.

$$T(x,0) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \forall x \geq 0 \quad (46)$$

Condiciones de frontera:

$$T(0,t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (47)$$

$$T(1,t) = 1 \quad \forall t \geq 0 \quad (48)$$

Solución. Este problema se puede resolver fácilmente por el Método de las Líneas (MOL). Para ello se procede de la siguiente manera:

1. Se discretizan todas las derivadas espaciales. En la ecuación (46), se tiene una derivada de segundo orden, la cual se aproxima utilizando el principio expuesto por la expresión (45).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (49)$$

2. Se divide el eje  $x$  en un *grid* de  $i$  puntos, en los cuales  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , siendo  $\Delta x = 1/N$ . Ahora, reemplazando (49) en (46), la derivada parcial con respecto al tiempo ya no es parcial sino ordinaria, por lo que se tiene que:

$$\frac{dT_i}{dt} = \left[ \frac{1}{\Delta x^2} \right] (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \quad (50)$$

3. Para cada valor de  $i$  se va obteniendo una ecuación diferencial ordinaria. Si  $i = 1$ , la ecuación (50) queda:

$$\frac{dT_1}{dt} = \left[ \frac{1}{\Delta x^2} \right] (T_2 - 2T_1 + T_0) \quad (51)$$

En el punto  $i = 0$ , el valor de la variable  $T$  se determina usando la primera condición de frontera, dada por la expresión (46). En este caso,  $T_0 = 0$  y la ecuación (51) queda entonces:

$$\frac{dT_1}{dt} = \left[ \frac{1}{\Delta x^2} \right] (T_2 - 2T_1) \quad (52)$$

4. En el punto donde  $i = N$ , la ecuación (50) queda:

$$\frac{dT_N}{dt} = \left[ \frac{1}{\Delta x^2} \right] (T_{N+1} - 2T_N + T_{N-1}) \quad (53)$$

En este punto, el valor de la temperatura se determina usando la segunda condición de frontera, dada por la expresión (48). En este caso,  $T_{N+1} = 1$ , y la ecuación (53) queda entonces:

$$\frac{dT_N}{dt} = \left[ \frac{1}{\Delta x^2} \right] (1 - 2T_N + T_{N-1}) \quad (54)$$

En la Tabla 1, se resume el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver. El sistema de ODEs allí presentado se resolvió en MATLAB® 7.0 utilizando el comando *ode15s* para un *grid* de 1000 puntos. Los resultados se muestran en la Figura 4.

$\frac{dT_1}{dt} = \left[ \frac{1}{\Delta x^2} \right] (T_2 - 2T_1)$	$i = 1$
$\frac{dT_i}{dt} = \left[ \frac{1}{\Delta x^2} \right] (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1})$	$1 < i < N$
$\frac{dT_N}{dt} = \left[ \frac{1}{\Delta x^2} \right] (1 - 2T_N + T_{N-1})$	$i = N$

Tabla 1. Sistema de ODEs obtenido para el ejercicio propuesto.

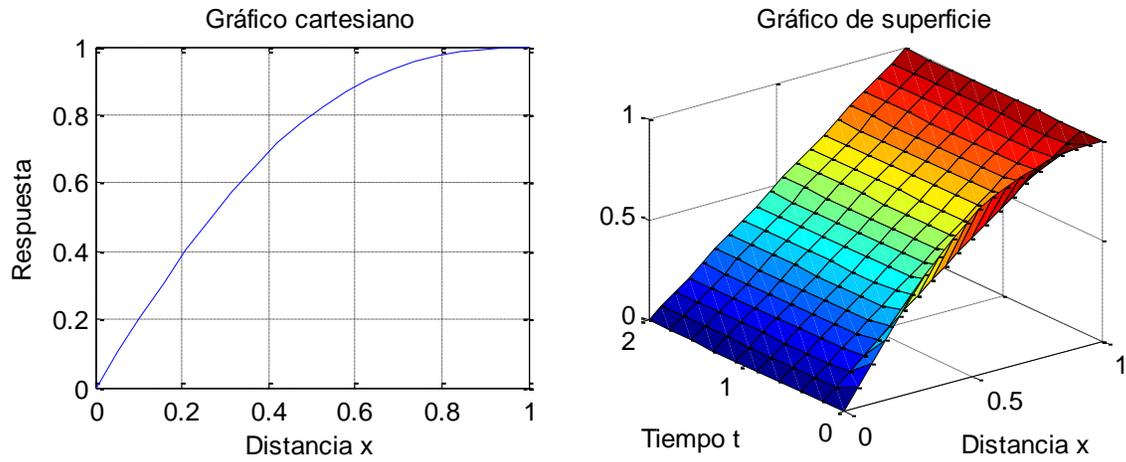


Figura 1. Respuesta en gráfica cartesiana y de superficie. En la primera se muestra la respuesta en función de la distancia  $x$  cuando  $t = 0$ , siendo  $N = 1000$ . La segunda representa el plano de la respuesta en función del tiempo y la distancia.

## 5. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL MODELO

Las ecuaciones seleccionadas para determinar el comportamiento de la presión y el caudal con respecto al tiempo y al espacio (40) y (41), constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas no lineales de primer orden unidimensionales, el cual no puede ser resuelto analíticamente. Cualquier solución de este tipo debe admitir algunas simplificaciones, o asumir un grupo específico de condiciones iniciales y de frontera. Por lo tanto la ecuación de flujo transiente de gas a través de tuberías debe ser resuelta numéricamente

**5.1 BALANCE DE MASA.** *La ecuación de balance de masa para la tubería es la siguiente:*

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{ZRT}{MA} \frac{\partial m}{\partial x} \quad (55)$$

**5.2 BALANCE DE MOMENTUM.** *Ecuación de balance de momentum más empelada es la siguiente:*

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} = - \frac{ZRT}{MA} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\dot{m}^2}{P} \right) - A \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{f}{2d} \frac{ZRT}{MA} \left( \frac{\dot{m}^2}{P} \right) \quad (56)$$

Desarrollando, la derivada del primer término de la derecha, se tiene,

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} = -\frac{ZRT}{MA} \left[ \frac{2\dot{m}}{P} \frac{\partial m}{\partial x} - \left( \frac{m}{P} \right)^2 \frac{\partial P}{\partial x} \right] - A \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{f}{2d} \frac{ZRT}{MA} \left( \frac{\dot{m}^2}{P} \right) \quad (57)$$

**5.4 DEFINICIÓN DE LOS NÚMEROS ADIMENSIONALES.** Los números adimensionales del modelo se dan en la Tabla 2.

$\hat{t}$	$\hat{m}$	$\hat{p}$	$\hat{x}$
$\frac{t}{L} \sqrt{\frac{KRT}{M}}$	$\frac{mZ}{AP_o} \sqrt{\frac{RT}{KM}}$	$\frac{P}{P_o}$	$\frac{x}{L}$

Tabla 2. Números adimensionales

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial \hat{m}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{x}}; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial \hat{p}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}}; \quad \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial \hat{m}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{t}}; \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial \hat{p}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{t}}$$

Las derivadas implícitas están resumidas en la Tabla 3.

$\frac{\partial m}{\partial \hat{m}}$	$\frac{\partial \hat{t}}{\partial t}$	$\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}$	$\frac{\partial P}{\partial \hat{p}}$
$\frac{AP_o}{Z} \left( \frac{RT}{KM} \right)^{-1/2}$	$\frac{1}{L} \left( \frac{KRT}{M} \right)^{1/2}$	$\frac{1}{L}$	$P_o$

Tabla 3. Derivadas implícitas resumidas

Por lo tanto:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{AP_o}{Z} \left( \frac{RT}{KM} \right)^{-1/2} \frac{1}{L} \left( \frac{KRT}{M} \right) \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{t}} \quad (58)$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{AP_o}{Z} \left( \frac{RT}{KM} \right)^{-1/2} \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{x}} \quad (59)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = P_o \frac{1}{L} \left( \frac{KRT}{M} \right)^{1/2} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{t}} \quad (60)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = P_o \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \quad (61)$$

**5.5 BALANCE DE MASA ADIMENSIONAL.** Reemplazando las derivadas (59) y (60) en la expresión (55), se obtiene,

$$P_o \frac{1}{L} \left( \frac{KRT}{M} \right)^{1/2} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{t}} = - \frac{ZRT}{MA} \frac{AP_o}{Z} \left( \frac{RT}{KM} \right)^{-1/2} \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{x}}$$

Dividiendo entre  $P_o \frac{1}{L} \left( \frac{KRT}{M} \right)^{1/2}$  y desarrollando, se obtiene la ecuación de balance de masa en forma adimensional,

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{t}} = - \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{x}} \quad (62)$$

**5.6 BALANCE DE MOMENTUM ADIMENSIONAL.** Reemplazando las derivadas

(58) – (61) en la ecuación (57), se tiene que,

$$\frac{AP_o}{Z} \left( \frac{RT}{KM} \right)^{-1/2} \frac{1}{L} \left( \frac{KRT}{M} \right)^{1/2} \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{t}} = - \frac{ZRT}{MA} \left[ \begin{aligned} & 2 \left( \frac{\hat{m} AP_o}{Z} \left( \frac{RT}{KM} \right)^{-1/2} \right) \left( \frac{1}{P_o \hat{p}} \right) \frac{AP_o}{Z} \left( \frac{RT}{KM} \right)^{-1/2} \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{x}} - \dots \\ & \cdot \frac{\hat{m}^2 A^2 P_o^2}{Z^2} \left( \frac{RT}{KM} \right)^{-1} \left( \frac{1}{P_o^2 \hat{p}^2} \right) P_o \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \\ & \dots AP_o \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - \frac{f}{2d} \frac{ZRT}{AM} \cdot \frac{\hat{m}^2 A^2 P_o^2}{Z^2} \left( \frac{RT}{KM} \right)^{-1} \left( \frac{1}{P_o \hat{p}} \right) \end{aligned} \right] -$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} \frac{AP_o K}{ZL} \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{t}} = - \frac{ZRT}{MA} \left[ 2 \left( \frac{\hat{m}}{\hat{p}} \right) \frac{A^2 P_o}{Z^2 L} \left( \frac{RT}{KM} \right)^{-1} \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{x}} - \left( \frac{\hat{m}^2}{\hat{p}^2} \right) \frac{A^2 P_o}{Z^2 L} \left( \frac{RT}{KM} \right)^{-1} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \right] - AP_o \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \dots \\ \dots - \frac{f}{2d} \left( \frac{\hat{m}^2}{\hat{p}} \right) \frac{AP_o K}{Z} \end{aligned} \quad (63)$$

Factorizando el término entre corchetes y arreglando, la expresión (63) queda,

$$\frac{AP_o K}{ZL} \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{t}} = - \frac{AP_o K}{ZL} \left[ 2 \left( \frac{\hat{m}}{\hat{p}} \right) \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{x}} - \left( \frac{\hat{m}^2}{\hat{p}^2} \right) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \right] - AP_o \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - \frac{f}{2d} \left( \frac{\hat{m}^2}{\hat{p}} \right) \frac{AP_o K}{Z} \quad (64)$$

Dividiendo por  $\frac{AP_o K}{ZL}$  ambos miembros de (51), se obtiene finalmente la ecuación

de balance de momentum en forma adimensional.

$$\frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{t}} = - \left[ 2 \left( \frac{\hat{m}}{\hat{p}} \right) \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{x}} - \left( \frac{\hat{m}^2}{\hat{p}^2} \right) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \right] - \frac{Z}{K} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - \frac{fL}{2d} \left( \frac{\hat{m}^2}{\hat{p}} \right) \quad (65)$$

Arreglando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{t}} &= -2 \left( \frac{\hat{m}}{\hat{p}} \right) \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{x}} + \left( \frac{\hat{m}^2}{\hat{p}^2} \right) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - \frac{Z}{K} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - \frac{fL}{2d} \left( \frac{\hat{m}^2}{\hat{p}} \right) \\ \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{t}} &= \left[ \left( \frac{\hat{m}}{\hat{p}} \right)^2 - \frac{Z}{K} \right] \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - 2 \left( \frac{\hat{m}}{\hat{p}} \right) \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{x}} - \frac{fL}{2d} \left( \frac{\hat{m}^2}{\hat{p}} \right) \end{aligned} \quad (66)$$

## 5.7 DISCRETIZACIÓN

El sistema de PDE (Partial Differential Equation) en forma adimensional es el siguiente:

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{t}} = - \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{x}} \quad (67)$$

$$\frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{t}} = - \frac{Z}{K} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( \frac{\hat{m}^2}{\hat{p}} \right) - \frac{fL}{2d} \left( \frac{\hat{m}^2}{\hat{p}} \right) \quad (68)$$

Diferenciando el segundo término a la derecha de (68), se obtiene

$$\frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{t}} = - \frac{Z}{K} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - \left[ \frac{2\hat{m}}{\hat{p}} \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{x}} - \left( \frac{\hat{m}}{\hat{p}} \right)^2 \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \right] - \frac{fL}{2d} \left( \frac{\hat{m}^2}{\hat{p}} \right)$$

$$\frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{t}} = -\frac{Z}{K} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - \frac{2\hat{m}}{\hat{p}} \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{x}} + \left(\frac{\hat{m}}{\hat{p}}\right)^2 \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - \frac{fl}{2d} \left(\frac{\hat{m}^2}{\hat{p}}\right) \quad (69)$$

Aplicando diferencias finitas

Puesto que:

$$\frac{d\hat{m}}{d\hat{x}} = \left(\frac{\hat{m}_{i+1} - \hat{m}_i}{\Delta x}\right) = \left(\frac{\hat{m}_{i+1} - \hat{m}_i}{h}\right)$$

$$\frac{d\hat{p}}{d\hat{x}} = \left(\frac{\hat{p}_i - \hat{p}_{i-1}}{\Delta x}\right) = \left(\frac{\hat{p}_i - \hat{p}_{i-1}}{h}\right)$$

Arreglando (68)

$$\frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{t}} = \left[-\frac{Z}{K} + \left(\frac{\hat{m}}{\hat{p}}\right)^2\right] \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - \frac{2\hat{m}}{\hat{p}} \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{x}} - \frac{fl}{2d} \left(\frac{\hat{m}^2}{\hat{p}}\right) \quad (70)$$

Discretización

$$\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \hat{t}} = -\left(\frac{\hat{m}_{i+1} - \hat{m}_i}{h}\right)$$

$$\frac{\partial \hat{m}_i}{\partial \hat{t}} = \left[-\frac{Z}{K} + \left(\frac{\hat{m}_i}{\hat{p}_i}\right)^2\right] \left(\frac{\hat{p}_i - \hat{p}_{i-1}}{h}\right) - 2\frac{\hat{m}_i}{\hat{p}_i} \left(\frac{\hat{m}_{i+1} - \hat{m}_i}{h}\right) - \dots \frac{fl}{2d} \left(\frac{\hat{m}_i^2}{\hat{p}_i}\right)$$

Arreglando

$$\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \hat{t}} = -\frac{1}{h} (\hat{m}_{i+1} - \hat{m}_i)$$

$$\frac{\partial \hat{m}_i}{\partial \hat{t}} = \left[-\frac{Z}{K} + \left(\frac{\hat{m}_i}{\hat{p}_i}\right)^2\right] \left(\frac{1}{h}\right) (\hat{p}_i - \hat{p}_{i-1}) - \left(\frac{2}{h}\right) \left(\frac{\hat{m}_i}{\hat{p}_i}\right) (\hat{m}_{i+1} - \hat{m}_i) - \dots \frac{fl}{2d} \left(\frac{\hat{m}_i^2}{\hat{p}_i}\right) \quad (57)$$

**5.8 CONDICIONES INICIALES.** Las condiciones iniciales más usadas para las ecuaciones (42) y (44) son las dadas por el estado estacionario. En tal caso, las derivadas de  $\hat{m}$  y  $\hat{p}$  respecto al tiempo son cero.

A partir de ello, la velocidad de flujo a través de la tubería es constante y a partir de la presión inicial, se puede calcular la distribución de presiones partiendo de la ecuación de Weymouth,

$$\dot{Q}_o = C_w \frac{T_o}{P_o} \left[ \frac{(P_1^2 - P_2^2)}{\gamma T Z L} \right]^{1/2} D^{8/3} \quad (71)$$

Donde  $P$  es la presión (Pa),  $T$  es la temperatura (K),  $L$  es la longitud de la tubería (m),  $D$  es el diámetro de la tubería (m);  $\dot{Q}_o$  es el flujo volumétrico ( $m^3s^{-1}$ ),  $T_o$  la temperatura (K) y  $P_o$  la presión (Pa) a condiciones normales. Por su parte,  $C_w$  para el SI, es igual a 137.2364.

En condiciones de estado estacionario, casi siempre se especifica el flujo volumétrico y la presión a la entrada ( $P_1$ ). En tal caso, para calcular la presión a la salida ( $P_2$ ), se utiliza la expresión (54).

$$P_2(x) = \sqrt{P_1^2 - \left( \frac{\dot{Q}_o P_o}{C_w T_o} \right)^2 \frac{Z T \gamma x}{D^{16/3}}} \quad (72)$$

En la ecuación (72),  $x$  representa el eje axial de la tubería ( $0 \leq x \leq L$ ). A continuación se muestra un ejemplo del uso de esta ecuación.

Se requiere un ejemplo para determinar la distribución de presión en estado estacionario, el cual se valida con la grafica obtenida en [7] página 7, la cual se reproduce aquí en la figura 4. A continuación se explica detalladamente el proceso

**5.8.1 Ejemplo.** Una línea de transmisión de gas natural transporta 30 millones  $m^3/día$ , de una planta de procesamiento a una estación de compresión situada a 100 Km. La tubería puede ser asumida totalmente recta (no inclinada). Calcule la distribución de presiones en dicha tubería si: la presión máxima de operación se limita a 8500 kPa y el diámetro de la tubería 811 mm. La gravedad específica del gas es 0.65 y su temperatura  $18^\circ C$ . Use la ecuación de Weymouth, considerando una temperatura y una presión base de  $15^\circ C$  y 101 kPa, respectivamente. El factor de compresibilidad es de 0.92.

$P_o(Pa)$	$T_o(K)$	$T(K)$	$L(m)$	$Q_o(m^3 / s)$
101325	288,15	291,15	1,00E+05	347,22

$Z$	$\gamma$	$D(m)$	$P_m(Pa)$	$R(atmL / molK)$
0.92	0.65	0.811	8,5E+06	137,24

Tabla 4 datos del ejemplo.

Reemplazando los datos de la Tabla 4. En la ecuación (72), se obtiene el perfil mostrado en la Figura 1. Los datos de la solución se muestran en la Tabla 5.

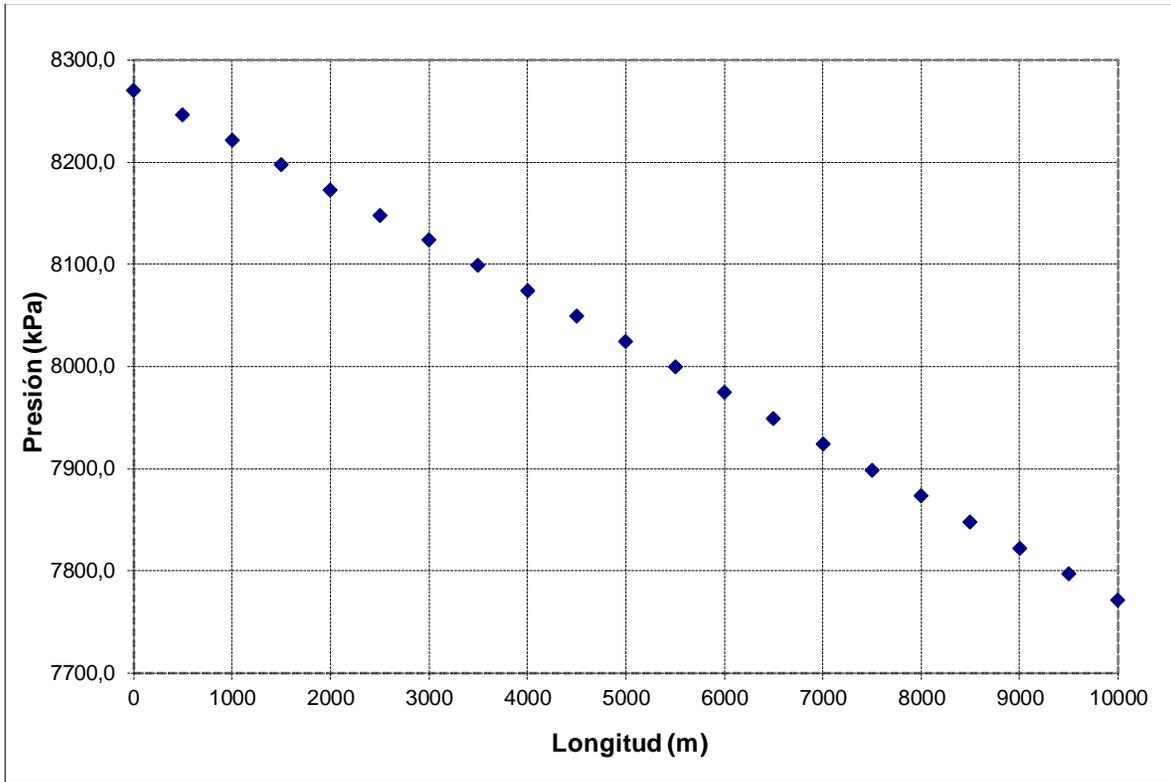


Figura 3. Distribución de presión VS Longitud, en estado estacionario.

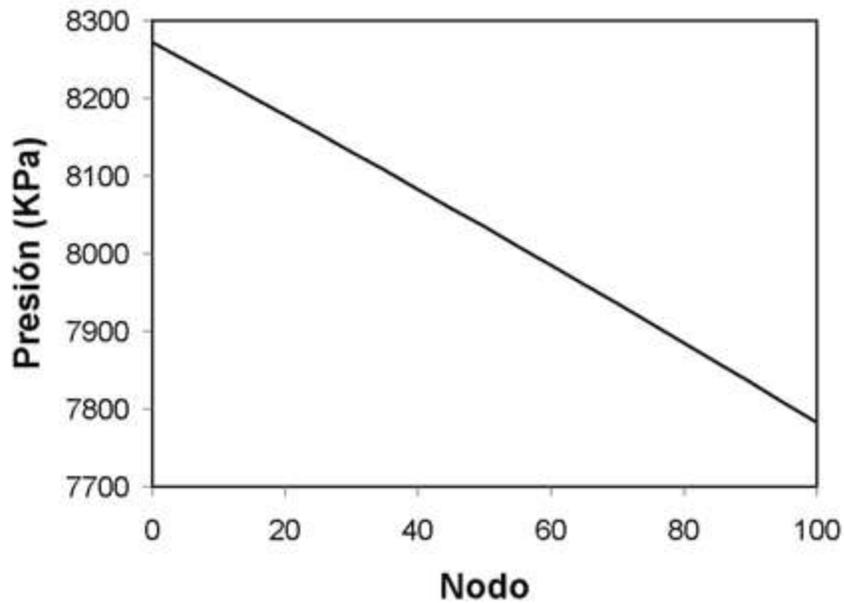


Figura 4. Distribución de presión Vs nodo [7]

De esta forma se valida el modelo para la distribución de presiones en el estado estacionario que es una condición inicial para un tramo de tubería

$x(m)$	$p(x)[kPa]$
0,0E+00	8270,0
5,0E+02	8245,8
1,0E+03	8221,5
1,5E+03	8197,1
2,0E+03	8172,6
2,5E+03	8148,1
3,0E+03	8123,5
3,5E+03	8098,8
4,0E+03	8074,1
4,5E+03	8049,3
5,0E+03	8024,4
5,5E+03	7999,4
6,0E+03	7974,3
6,5E+03	7949,2
7,0E+03	7924,0
7,5E+03	7898,7
8,0E+03	7873,3
8,5E+03	7847,8
9,0E+03	7822,3
9,5E+03	7796,7
1,0E+04	7771,0

Tabla 5. Datos de Presión Vs distancia

*Cálculo del peso molecular promedio.* El peso molecular promedio ( $\bar{M}$ ) se calcula haciendo uso de los datos de la Tabla 6.y la relación 6.

$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
16,043	30,07	44,097	58,124

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0,74	0,21	0,05	0,00

Tabla 6. Composición de la mezcla

$$\bar{M} = \sum_i M_i x_i \quad (73)$$

*Cálculo de la densidad.* Para el calcular la densidad de la fase fluida, se hace uso de la ecuación (73) y los datos de la Tabla 7. El resultado aparece en la última columna de dicha tabla.

$$\rho = \frac{P\bar{M}}{ZRT} \quad (74)$$

$P(atm)$	$T(K)$	$R \left[ \frac{atmL}{molK} \right]$	$Z$	$\bar{M}$	$\rho(Kg / m^3)$
84	291,15	0,082	0,92	20,39	77.97

Tabla 7. Propiedades de la mezcla

*Calculo del flujo másico.* El flujo másico se calculo a partir de la densidad y el valor del flujo volumétrico, así:

$$\dot{m} = \rho \dot{Q} \quad (75)$$

## 5.9 VALIDACIÓN DEL MODELO PROPUESTO.

El modelo desarrollado se compara contra los datos de la referencia [4], en la cual se estudia redes de gas natural en estado en estado transitorio.

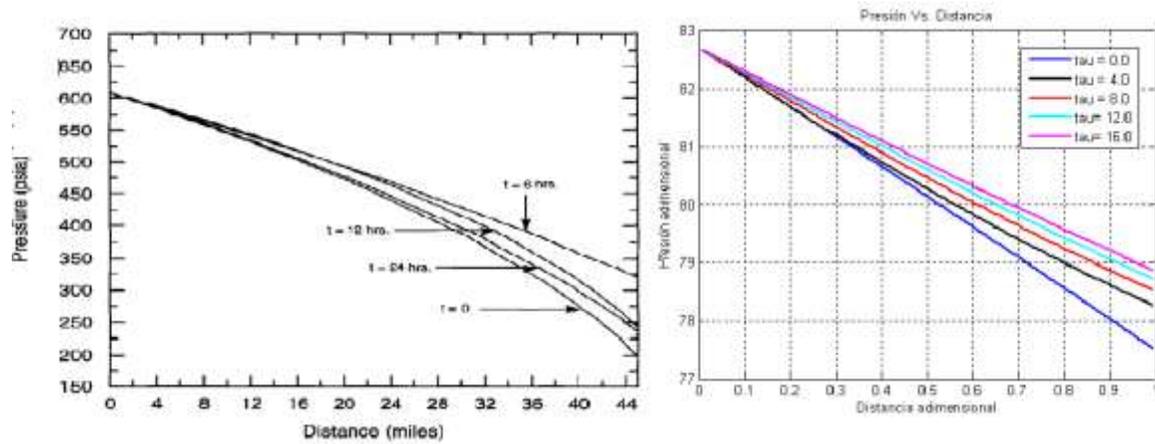


Figura 5. Validación del modelo con el caso 2 [4], p. 19

Para una demanda senoidal: se utiliza este comportamiento para facilitar el proceso de comparación contra la referencia [13] p.261

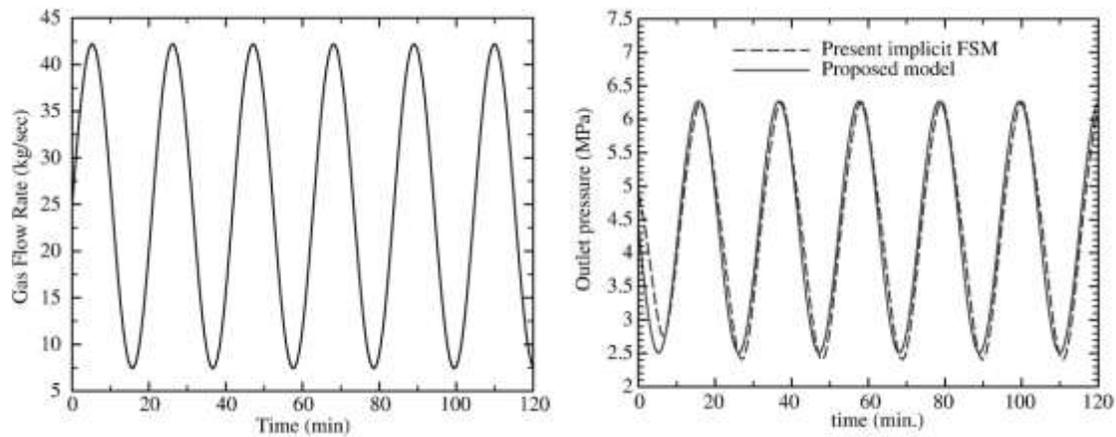


Figura 6. Demanda senoidal y comportamiento de la presión [13]

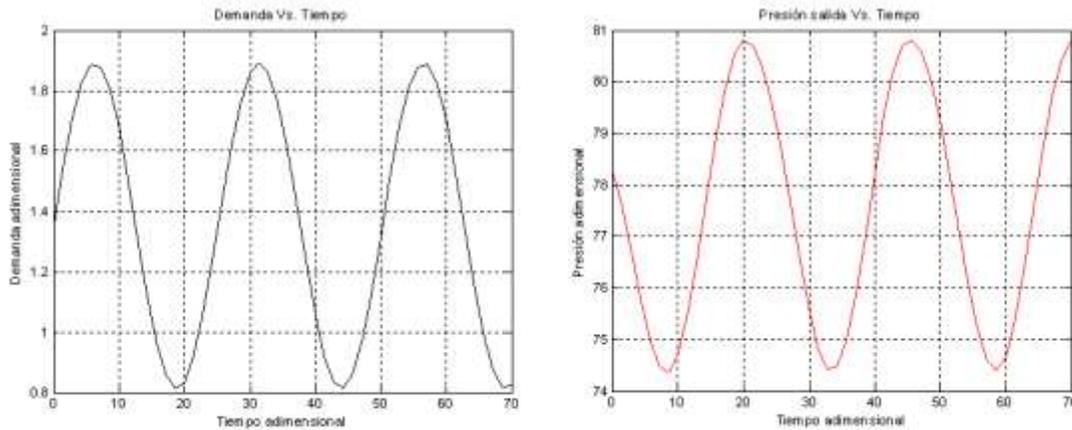
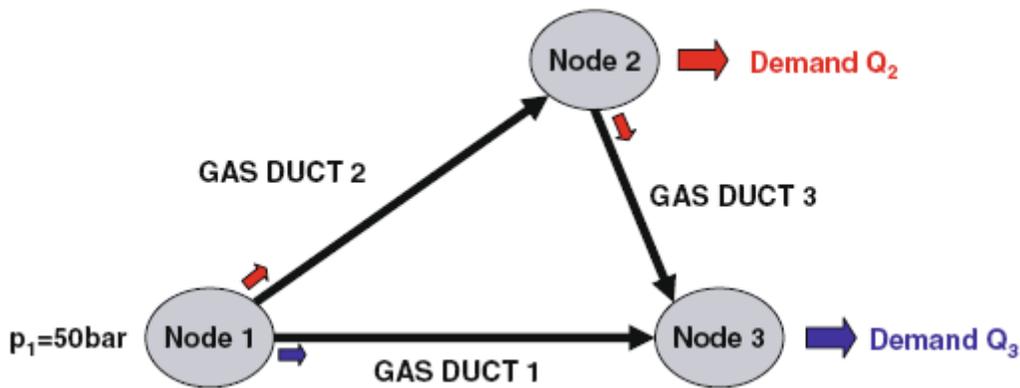


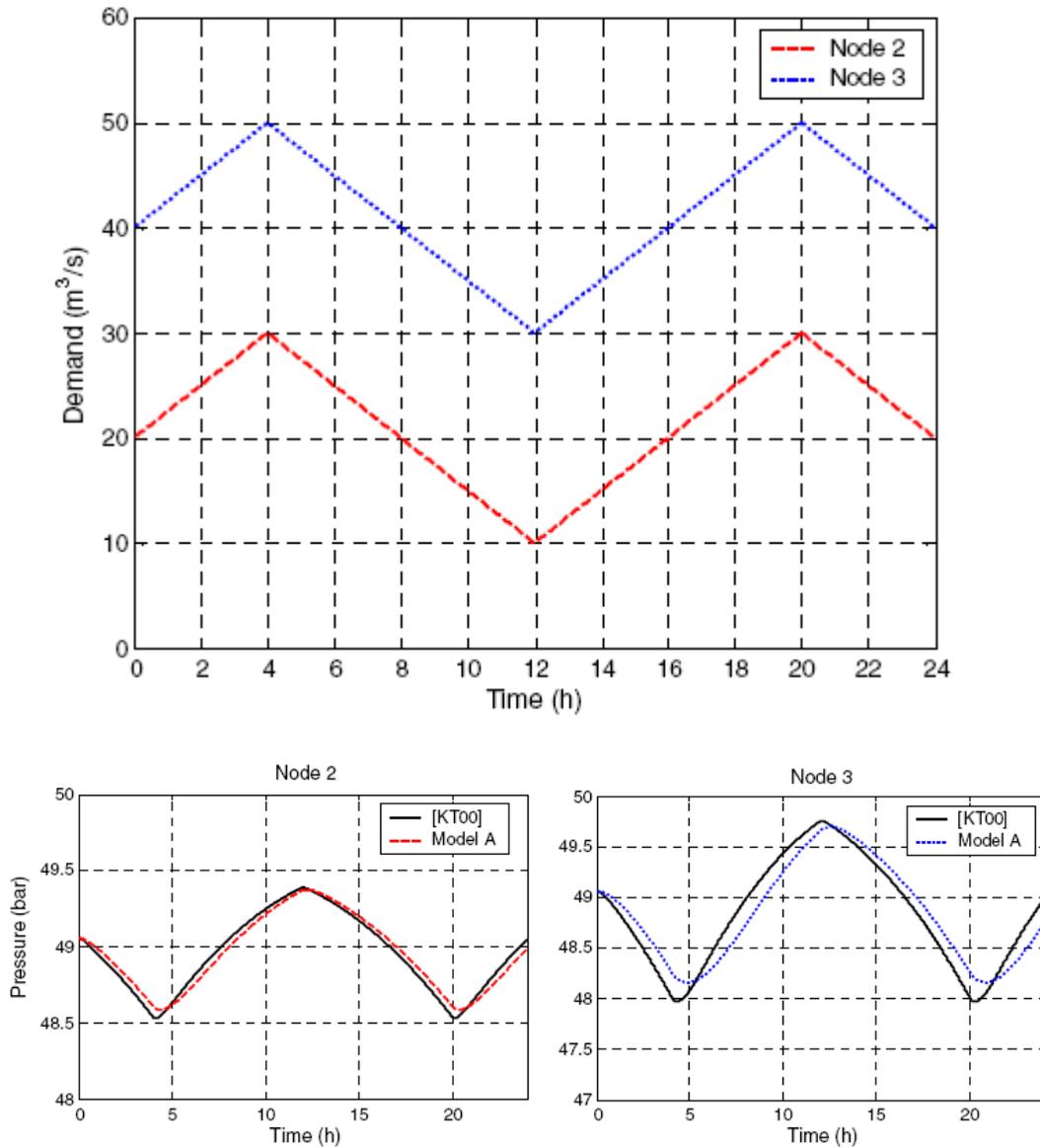
Figura 7. Demanda senoidal y comportamiento de la presión. Modelo propuesto

De esta forma se valida la solución numérica propuesta para un tramo de tubería y una red de gas natural en estado transiente. Con el modelo propuesto se puede predecir el comportamiento de la presión, con cualquier tipo de demanda.

### 5.9.1 Validación de una red [26], [2]

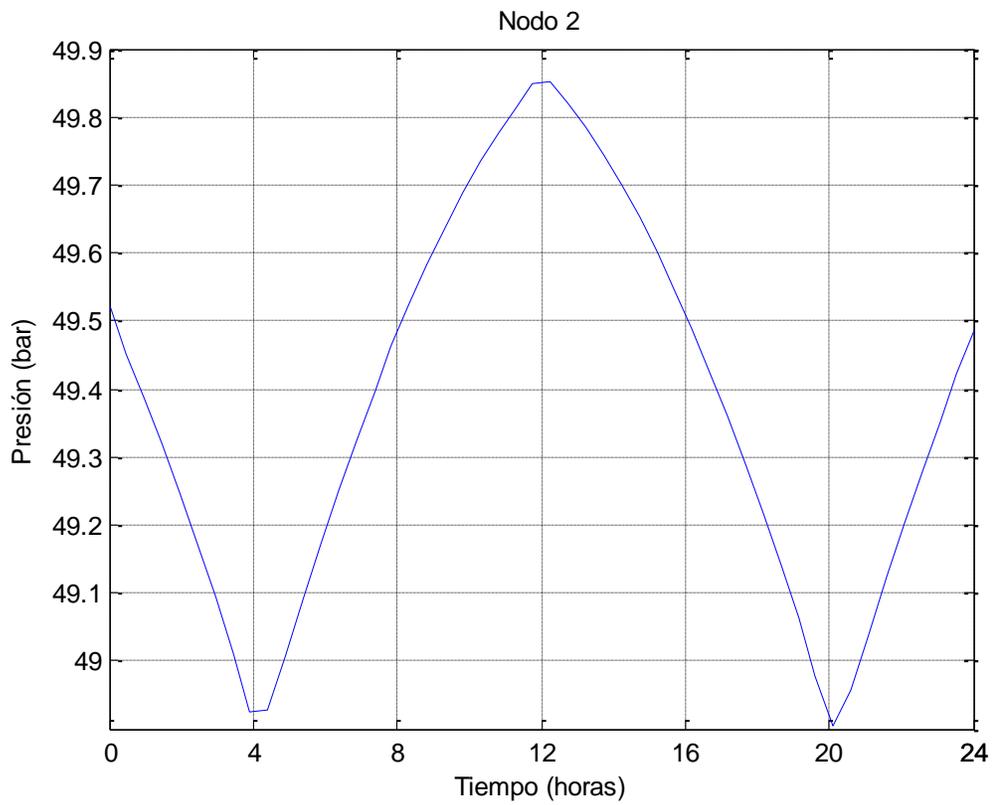
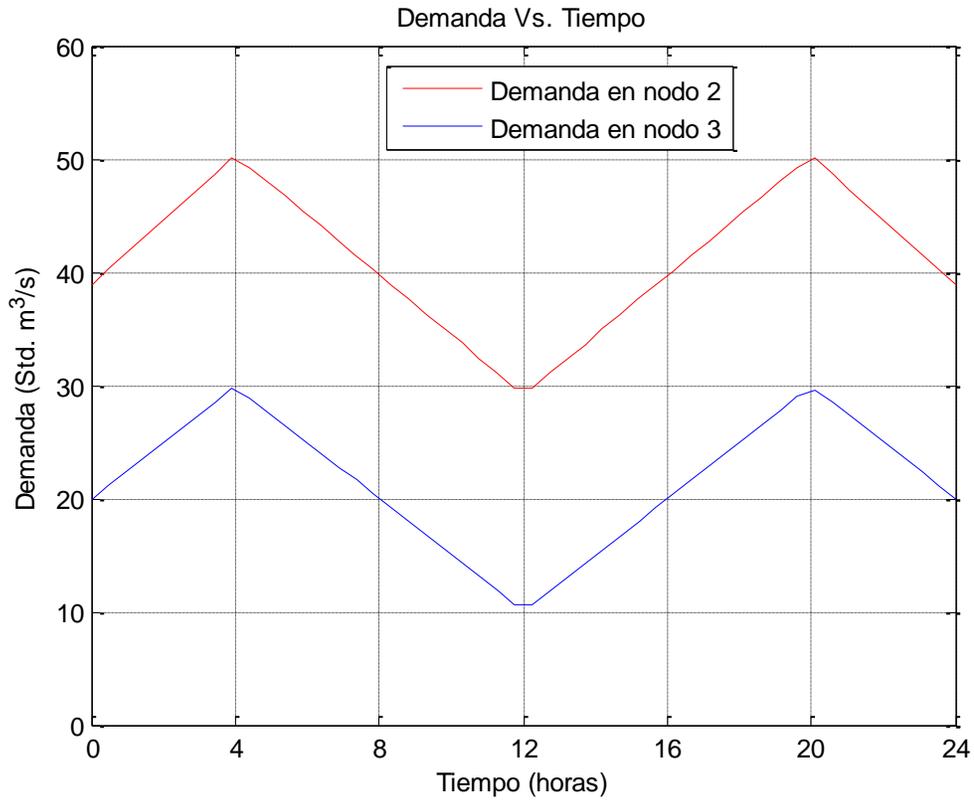


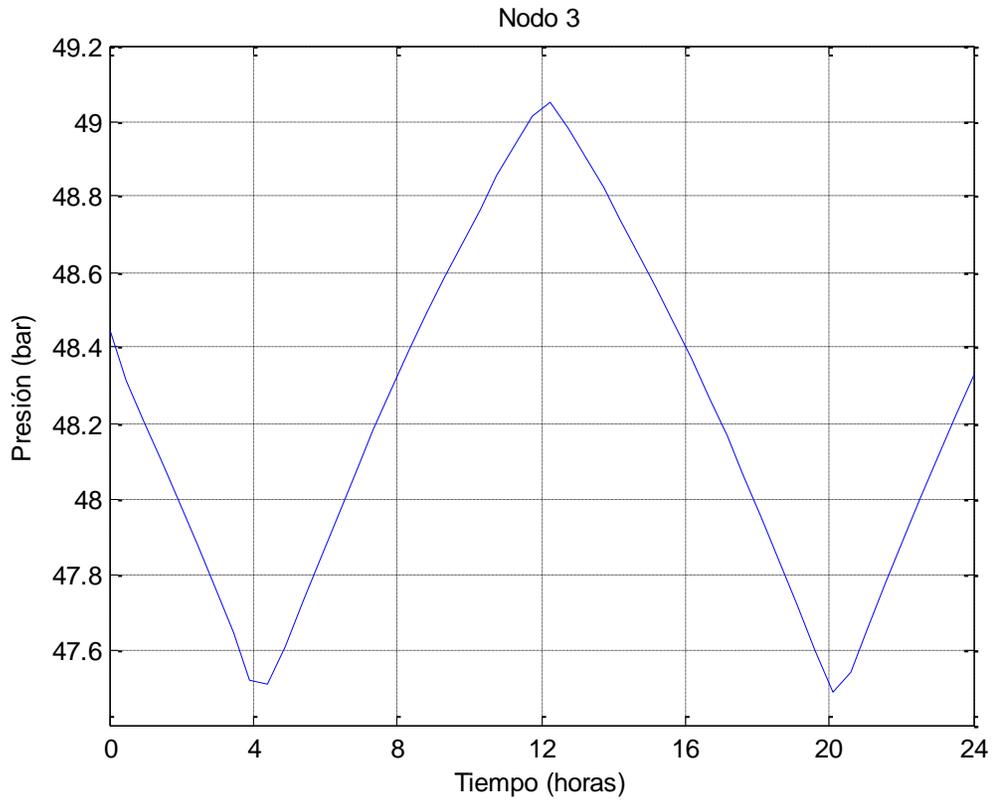
Gas duct	Start node	End node	Diameter (m)	Length (m)
1	1	3	0.6	80,000
2	1	2	0.6	90,000
3	2	3	0.6	100,000



**Figura. 8. Demanda y presión nodo 2 y 3 [26] , [27]**

La red se valida con los trabajos de [26] y [27], es una forma de demostrar que el modelo propuesto tiene validez. En la figura 8. Se observa la forma de una red sencilla, con sus demandas de caudal y el comportamiento de las presiones, con respecto a dichas demandas





**Figura No. 10 Demanda y Presion modelo propuesto nodo 2 y 3**

El modelo propuesto se valida con trabajos precursores, dando excelentes trabajos, los resultados son confiables.

## 6. ANALISIS Y RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados que arroja el modelo numérico realizado por el método de la líneas, primero se estudiará el comportamiento de la presión en un tramo de tubería, realizando perturbaciones del estado estacionario, estas perturbaciones de la demanda son de tipo paso, y senoidal, para un transitorio rápido y uno lento, la segunda parte consiste en analizar la red propuesta, y observar el comportamiento de la presión en estado dinámico, la ecuación de un tramo de tubería es fundamental para formar la red, la presión de salida de un tramo es la de entrada del otro tramo y así sucesivamente, se tienen consumidores, que son los representativos, para demandas altas, medias y bajas.

El tramo de tubería en estado dinámico y la red de gas natural se valida con que trabajo realizado por Zhou [ 4], con base en este trabajo se han hecho y se siguen haciendo investigaciones.

Se estudiara cuando hay un proceso de presurización o empaquetamiento y cuando hay un proceso de despresurización o vaciado, en el tramo de tubería y la red, bajo varios tipos de demanda.

### 6.1 Para un tramo de tubería

Las condiciones iniciales y de frontera es la presión a la entrada y el caudal, con una perturbación paso, con un cierre de la válvula, lo que quiere decir que sale menos flujo que el que entra a la tubería, sufriendo un proceso de presurización o

empaquetamiento. La composición de la mezcla es la misma del ejemplo 1, longitud de la tubería 10000 m, diámetro 0.508 m.

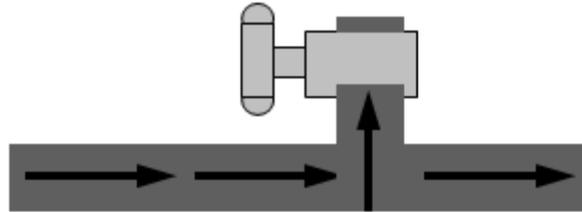


Figura 8. Tramo de tubería

### 6.1.1 Proceso de despresurización o Vaciado

**Transitorio rápido.** Respuesta paso a un aumento del 50% en el flujo de salida.

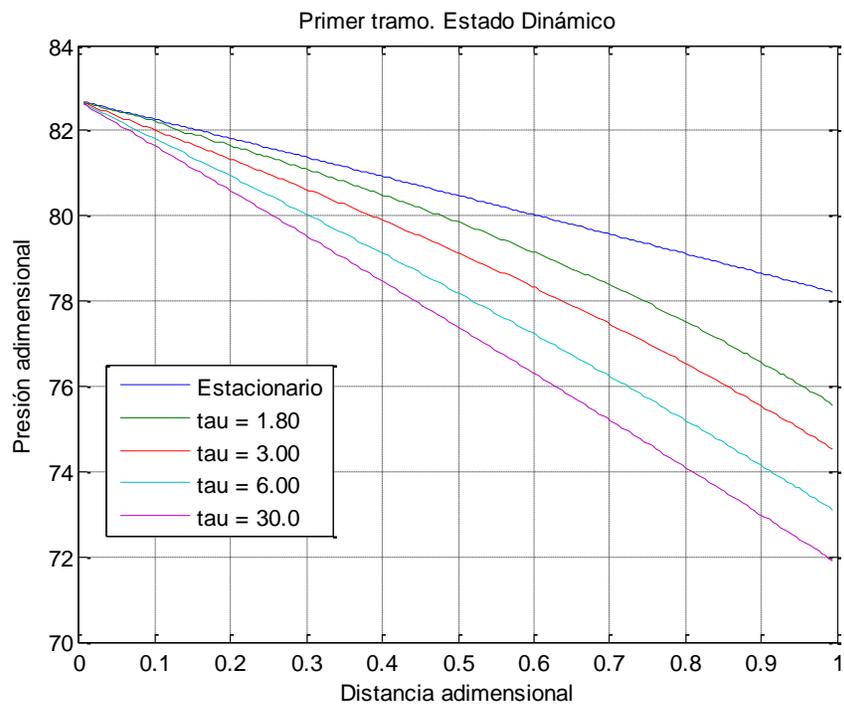


Figura 9. Presión Vs Distancia, proceso de despresurización

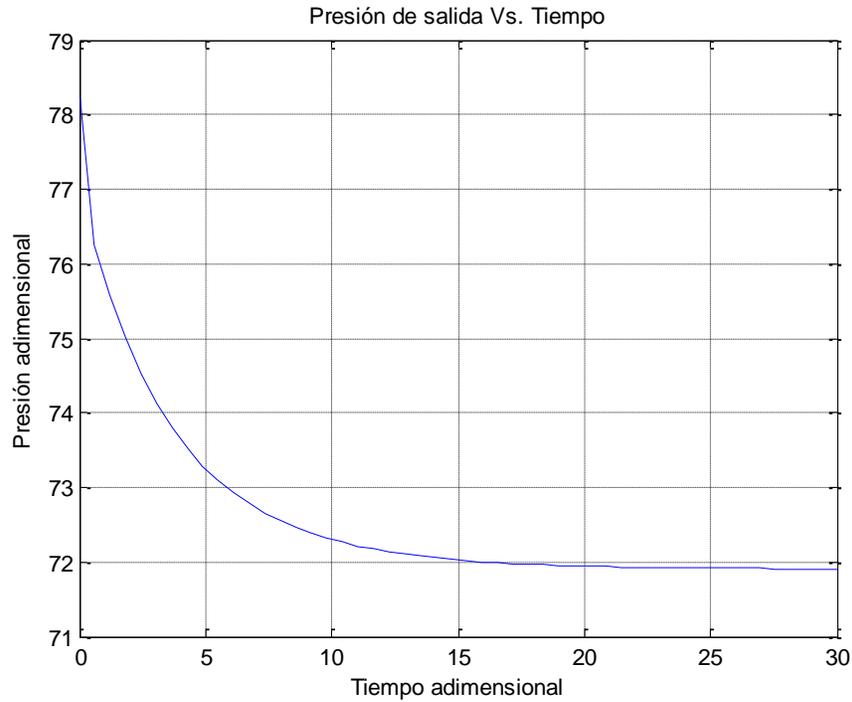


Figura 10. Presión Vs Tiempo

En la figura 9, se observa que con una perturbación paso de la demanda al final de la tubería, la válvula final se abre, el estado estable o de referencia es el azul, a medida que el tiempo va transcurriendo la presión va cayendo, debido al proceso de vaciado que está experimentando el tramo de tubería, en la grafica 10, se observa el perfil de caída de presión, tomando como referencia la presiones finales que se muestran en la figura 9. Se observa el proceso de vaciado

## Flujo a la salida

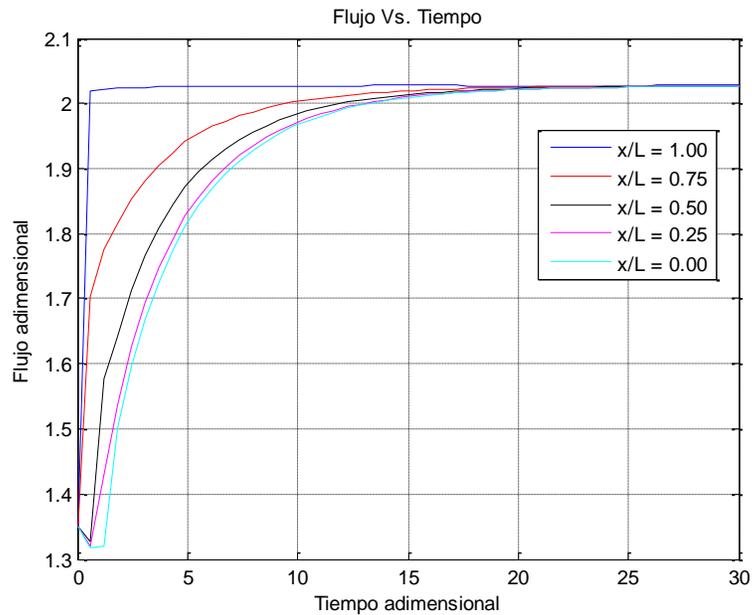


Figura 11. Demanda a la salida de la tubería Vs tiempo

En esta grafica No 11. Se observa que el flujo a la salida de la tubería es mayor comparado con el de entrada, sufriendo un proceso de vaciado, observando el comportamiento en distintas posiciones o puntos del tramo de tubería, se alcanza el nuevo estado estable en aproximadamente 11 unidades de tiempo adimensional.

### 6.1.2 Proceso de presurización o empaquetamiento.

Transitorio rápido. Respuesta paso a una disminución del 25% en el flujo de salida.

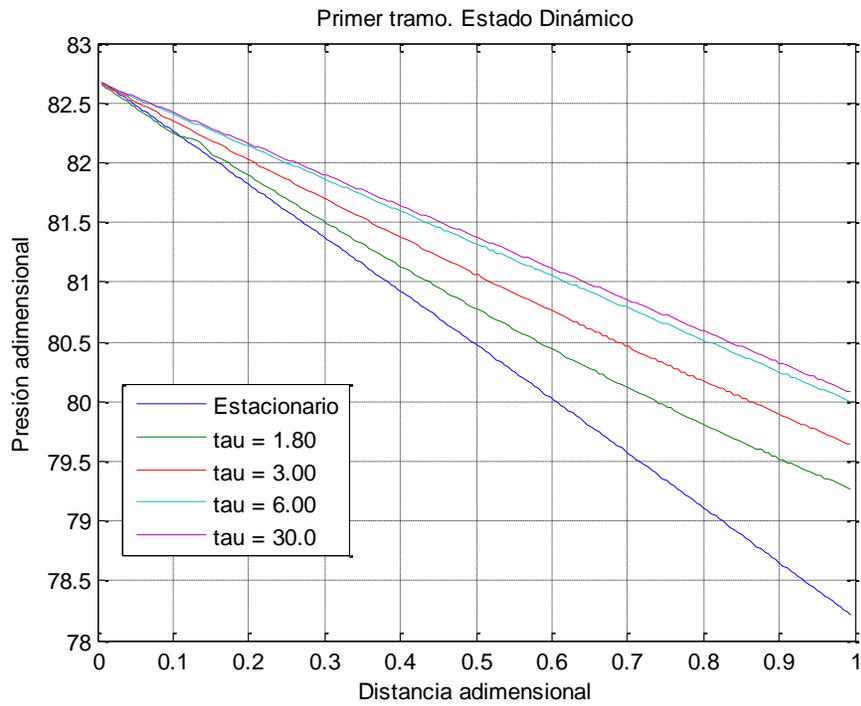


Figura 12. Presión Vs Distancia, a diferentes tiempos

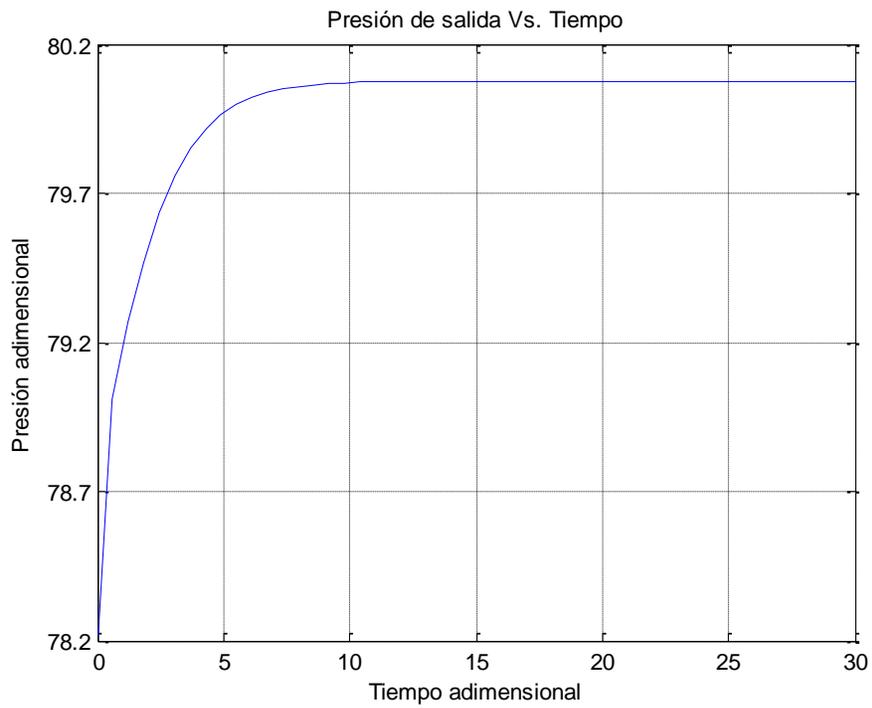


Figura 13. Presión Vs Tiempo

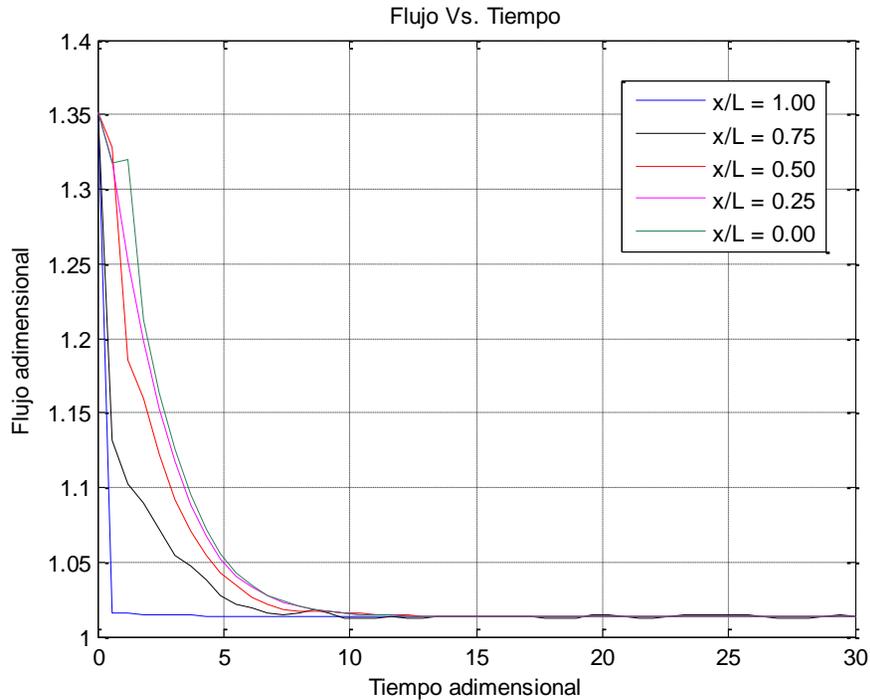


Figura No 14. Flujo Vs Tiempo

En La figura No. 12, cuando hay una perturbación paso del 25%, cerrando la válvula, el tramo de tubería experimenta un proceso de presurización, tomando como referencia la de estado estable la de color, azul, se observa que a medida que va pasando el tiempo la presión al final de tramo aumenta, experimentando un proceso de presurización o empaquetamiento. En la grafica 13, observa el perfil de presión con el tiempo en el proceso de presurización y en la figura 14, que es la flujo Vs tiempo, al final de la tubería el consumo disminuye, por el cierre parcial de la válvula, en las distintas posiciones de la tubería se alcanza el nuevo estado estable en 9 unidades de tiempo adimensional.

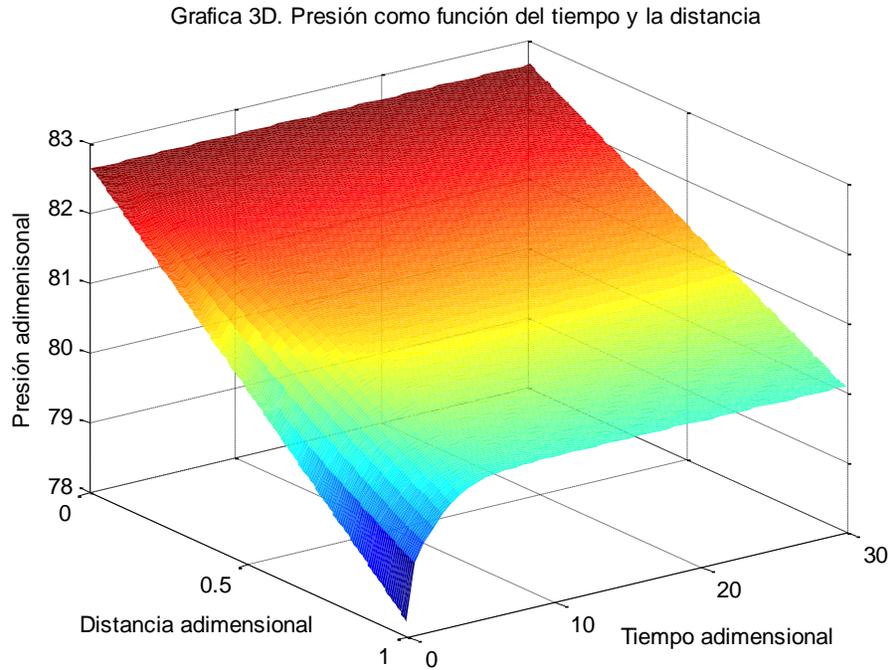


Figura 15. Variación de la presión con la distancia y el tiempo

En la figura 15, se aprecia el perfil de presión variando con el tiempo y la distancia, se observa el mismo proceso de empaquetamiento, a medida que el tiempo va transcurriendo, lo que involucra bajo consumo por parte de los clientes.

## 6.2. TRANSITORIO LENTO

**Transitorio lento.** Perturbación armónica de la demanda. Amplitud = 0.4  
 Frecuencia = 0.25, Flujo máx. =  $1.2 \dot{m}_{in}$ , Flujo min. =  $0.8 \dot{m}_{in}$

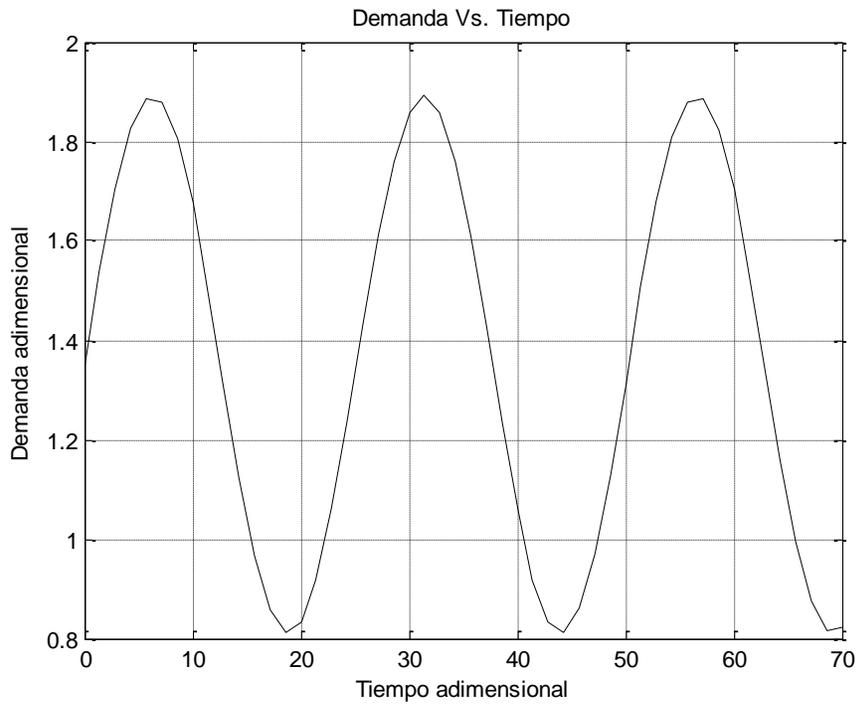


Figura 16. Demanda senoidal

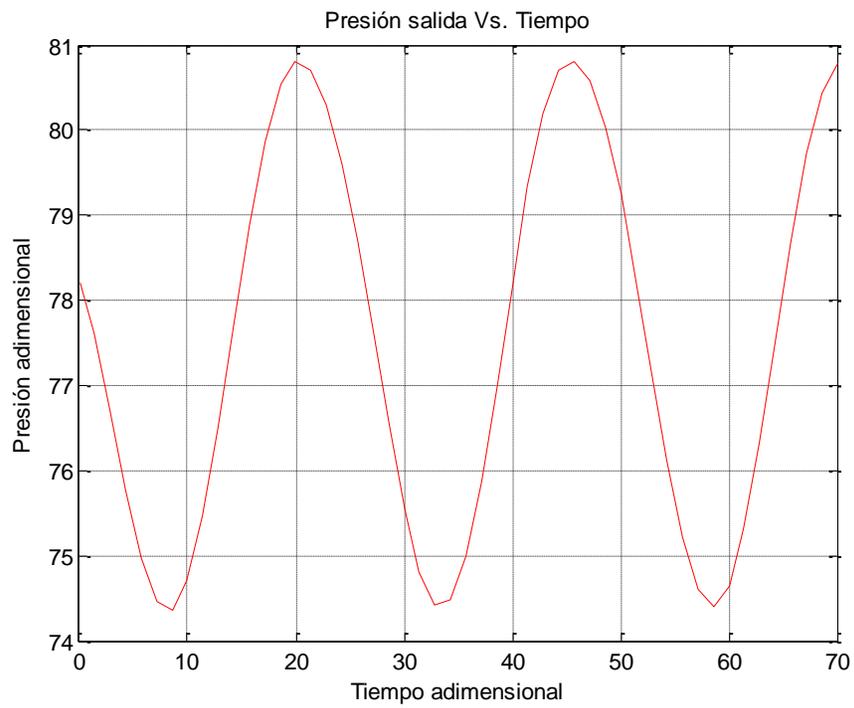


Figura 17. Comportamiento de la presión frente una demanda senoidal

Grafico 3D. Presión como función del tiempo y la distancia.

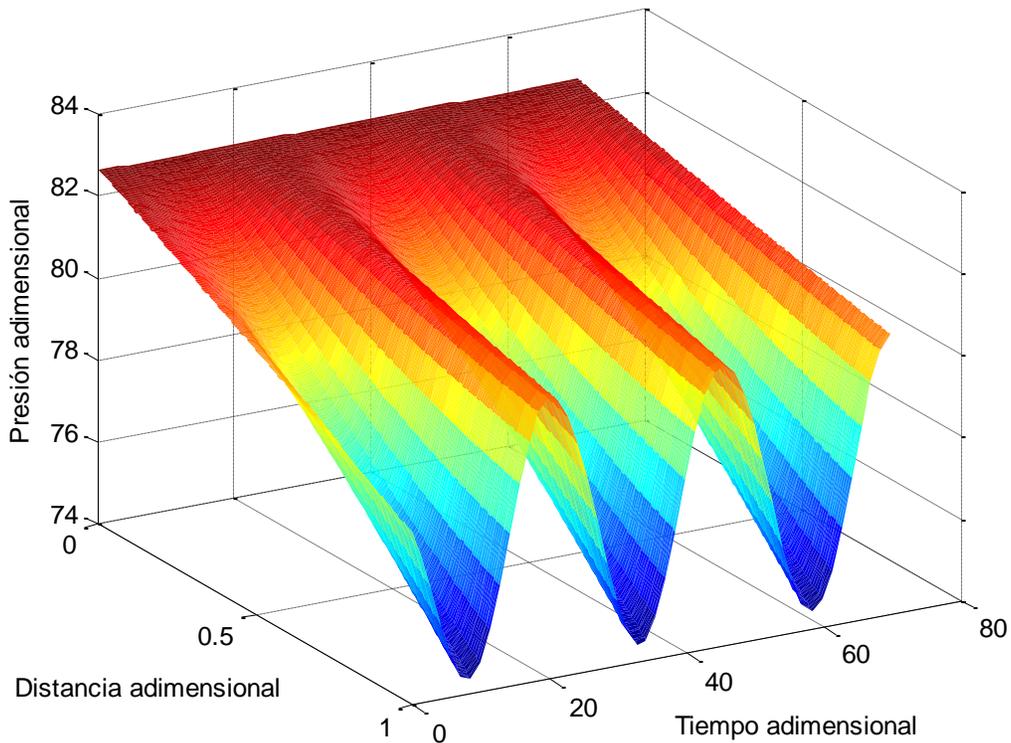


Figura 18. Variación de presión con el tiempo y la distancia de la tubería

En la figura 16 se ve una demanda senoidal para un transitorio lento, comparado con un cambio paso, es más suave el cambio, se observa que para pico altos de demanda la presión cae y para picos bajos de demanda la presión aumenta, este comportamiento de la presión se aprecia en la figura 17, comprobando lo que se encontró en la literatura consultada, el modelo propuesto es validado y funcional. [4]. En la figura 18, se puede apreciar mejor el comportamiento de la presión con la distancia y el tiempo.

## 6.3 PROPIEDADES QUE VARIAN CON LA PRESIÓN

### 6.3.1 Factor de compresibilidad.

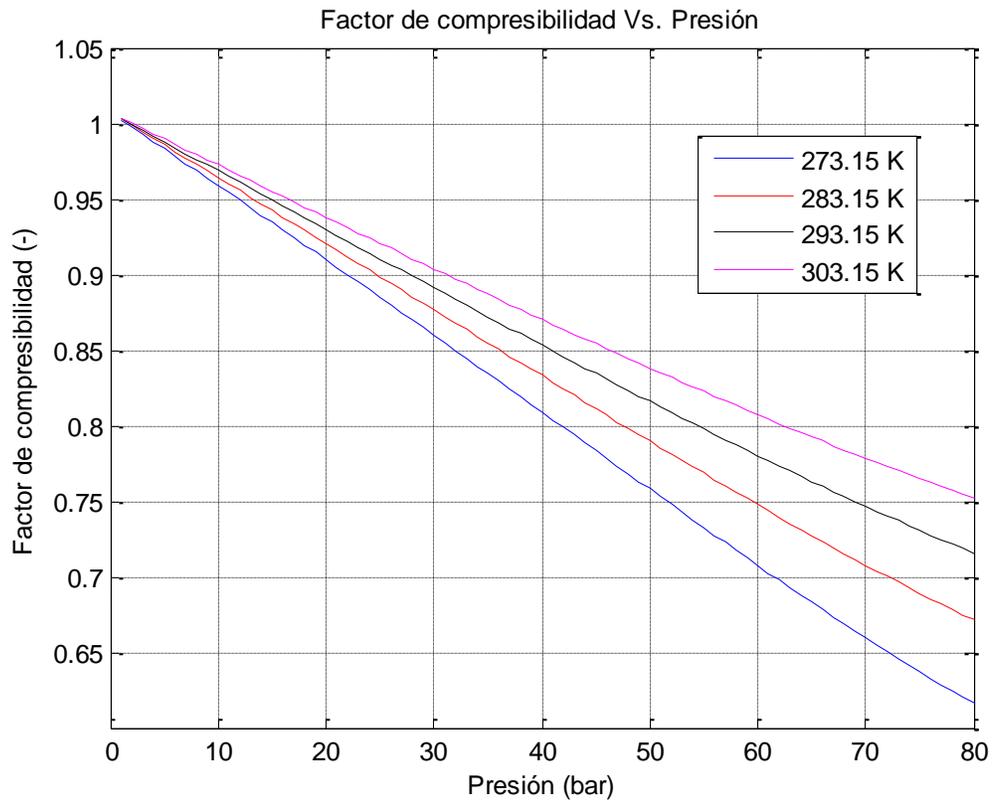


Figura 19. Factor de compresibilidad Vs Presión a diferentes temperaturas

### 6.3. 2 Relación de calores específicos

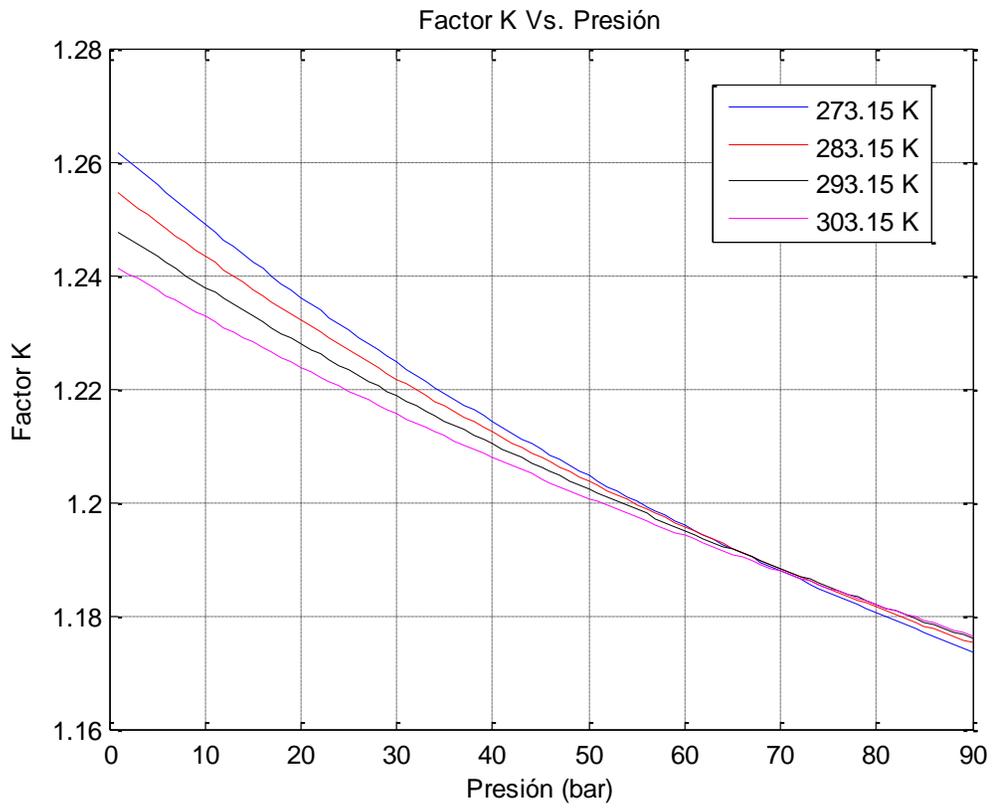


Figura 20. Factor de Compresibilidad Vs Presión, a diferentes temperaturas

### 6.3.3 Viscosidad

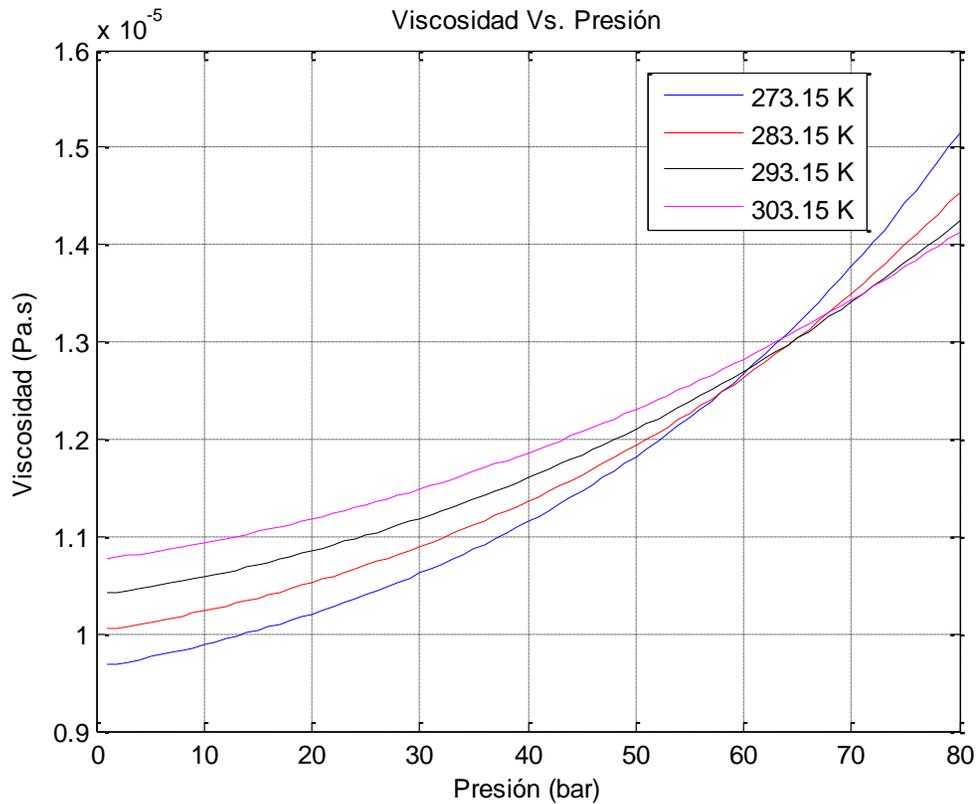


Figura 21. Viscosidad Vs Presión, a diferentes temperaturas

Ya se realizó un análisis del comportamiento de la presión en un tramo de tubería, con diferentes escenarios y tipos de demanda (transitorio rápido y lento), se observó el proceso de presurización y despresurización. Se apreció cuando se alcanza el nuevo estado estacionario. Ahora se evaluará una red de gas natural en estado dinámico, la estrategia es, que la presión de salida de un tramo es la inicial del próximo tramo, se propone una red, general con tres tramos y diferentes clientes, que son como los más representativos, de un grupo de clientes, existen

grande consumidores, las termoeléctricas, medianos consumidores, las empresas y estaciones de gas vehicular y bajos consumidores, bajo este esquema se propone una red, para estudiar el comportamiento de la presión. El caudal de salida de un tramo es el de entrada en el próximo tramo.

#### **6.4. RED DE GAS NATURAL**

La red propuesta está conformada por una línea de alimentación la cual está conectada a un compresor y a la salida de este alimenta a la red, la red se divide en tres ramas, cada rama tiene consumidores o clientes representativos (grandes consumidores, medios consumidores, bajos consumidores), se analizará el proceso de presurización y despresurización bajo diferentes escenarios de demandas. (paso ascendente, paso descendente, paso variable)

##### **6.4.1 Composición de la mezcla**

Metano:  $X_1 = 0.74$ .  $M_1=16.143$

Etano:  $X_2 = 0.21$ .  $M_2=30.070$

Butano:  $X_3 = 0.05$ .  $M_3=44.097$

Pentano:  $X_4 = 0.00$ .  $M_4=58.123$

Rugosidad:  $6.17E-4$  m

##### **6.4.2 Tramos de Tuberías**

Datos de entrada

$D_1 = 0.508$  m       $Q_{N1} = 131$  kg/s       $L_1 = 1e4$  m

$D_2 = 0.508$  m       $Q_{N2} = Q_{N1} * 0.375$  kg/s       $L_2 = 1e4$  m

$D_3 = 0.508$  m       $Q_{N3} = Q_{N1} * 0.375$  kg/s       $L_3 = 1e4$  m

$D4 = 0.508 \text{ m}$	$QN3 = QN1 * 0.375 \text{ kg/s}$	$L4 = 1e4 \text{ m}$
$D5 = 0.408 \text{ m}$	$QN5 = QN2 * (1 - 0.10) \text{ kg/s}$	$L5 = 1e4 \text{ m}$
$D6 = 0.408 \text{ m}$	$QN6 = QN5 * (1 - 0.20) \text{ kg/s}$	$L6 = 1e4 \text{ m}$
$D7 = 0.408 \text{ m}$	$QN7 = QN6 * (1 - 0.10) \text{ kg/s}$	$L7 = 1e4 \text{ m}$
$D8 = 0.408 \text{ m}$	$QN8 = QN3 * (1 - 0.15) \text{ kg/s}$	$L8 = 1e4 \text{ m}$

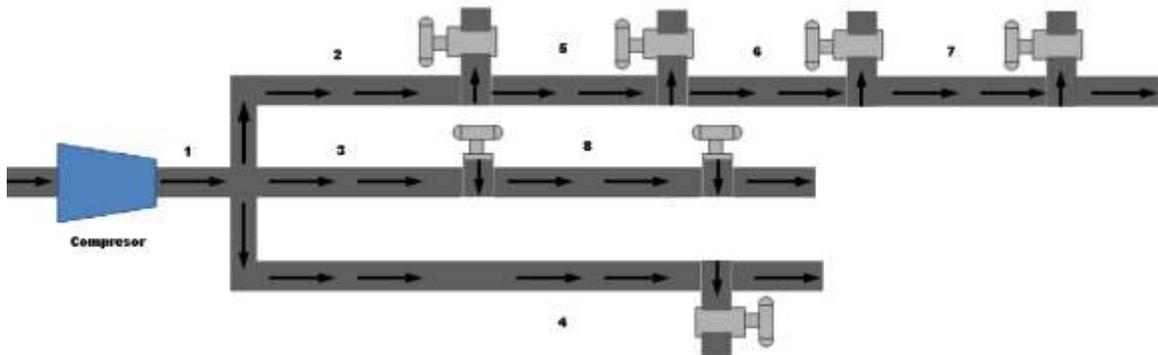


Figura 22. Diagrama de la red.

### 6.4.3 Caso 1. Perturbación paso, aumento del 10% en el flujo de estado estacionario.

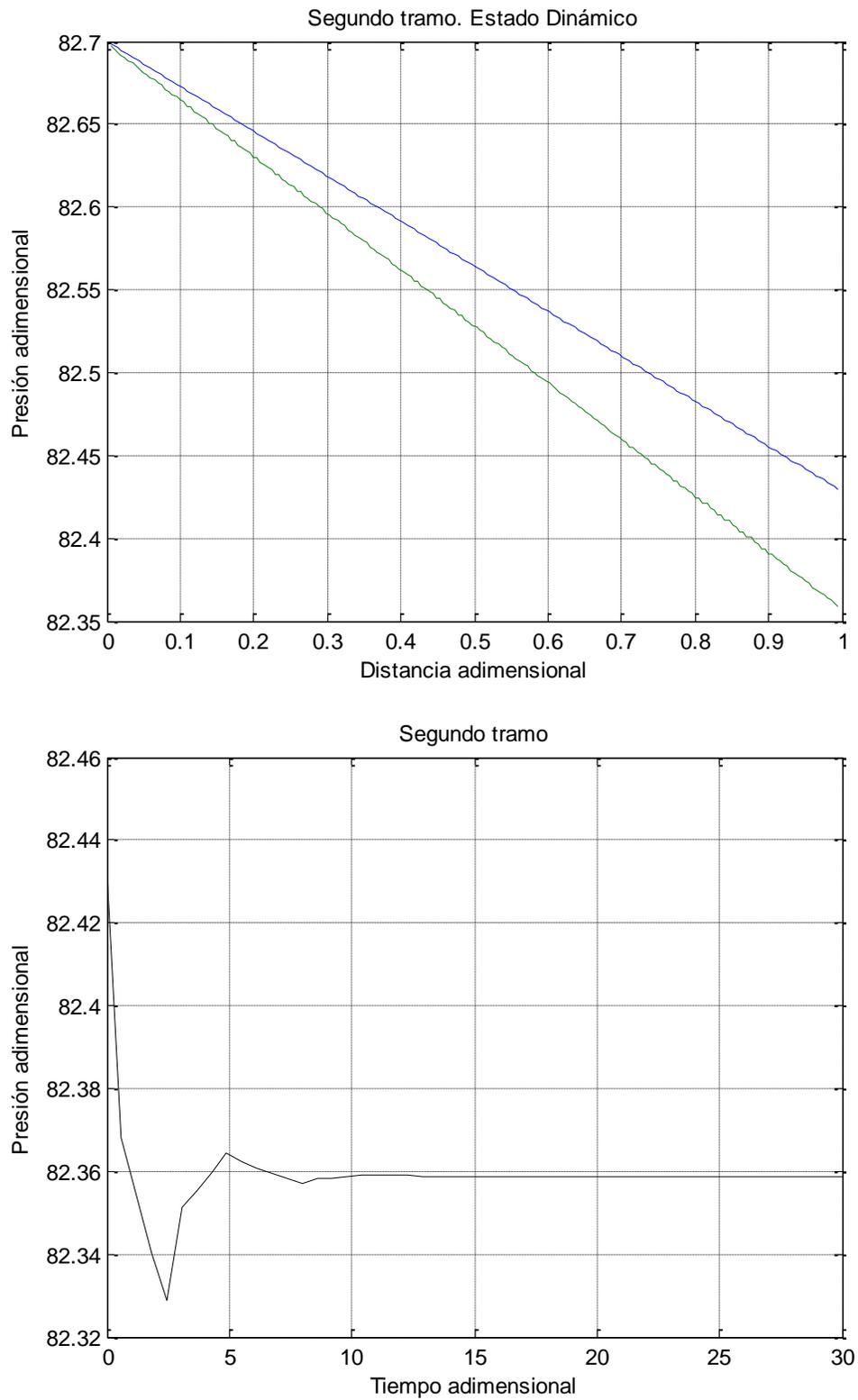


Figura 23. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el segundo tramo de la red..

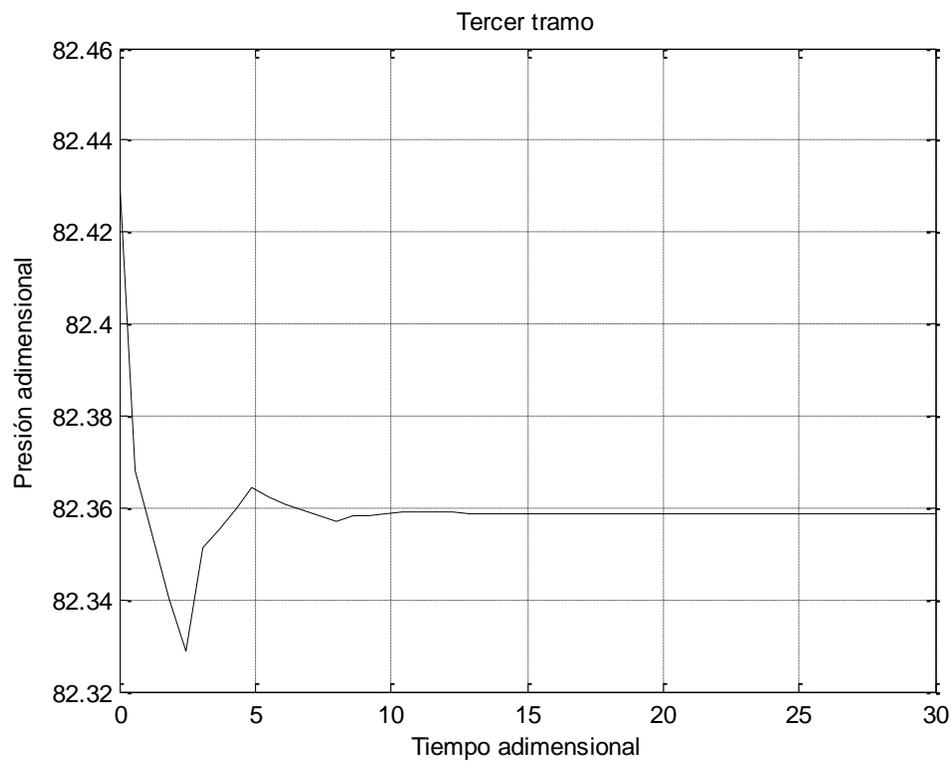
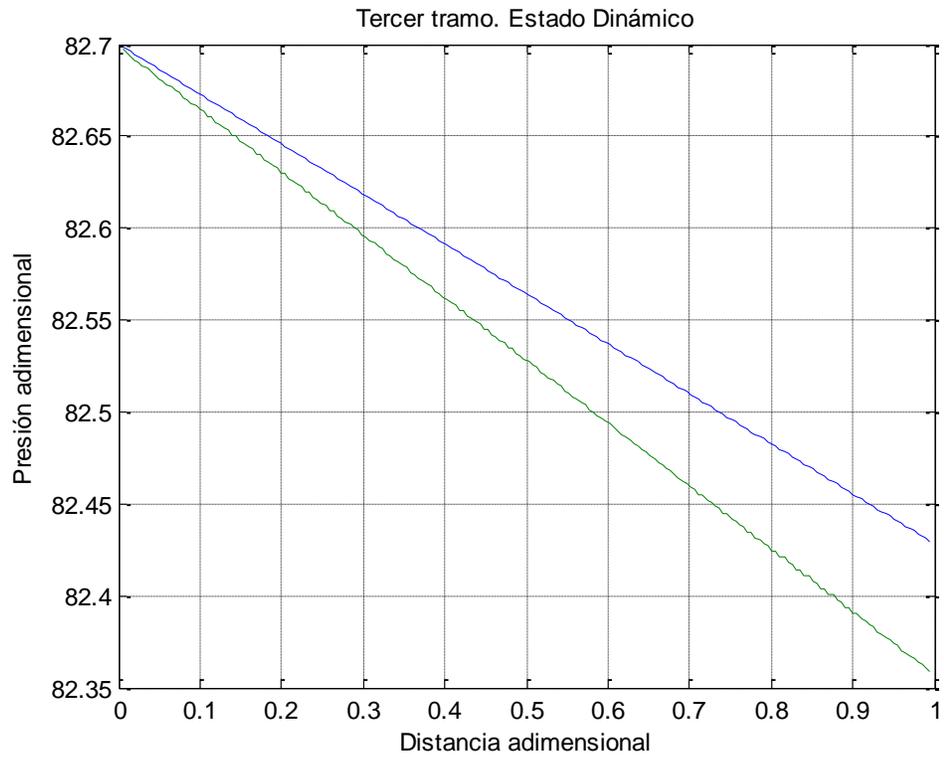


Figura 24. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el tercer tramo de la red..

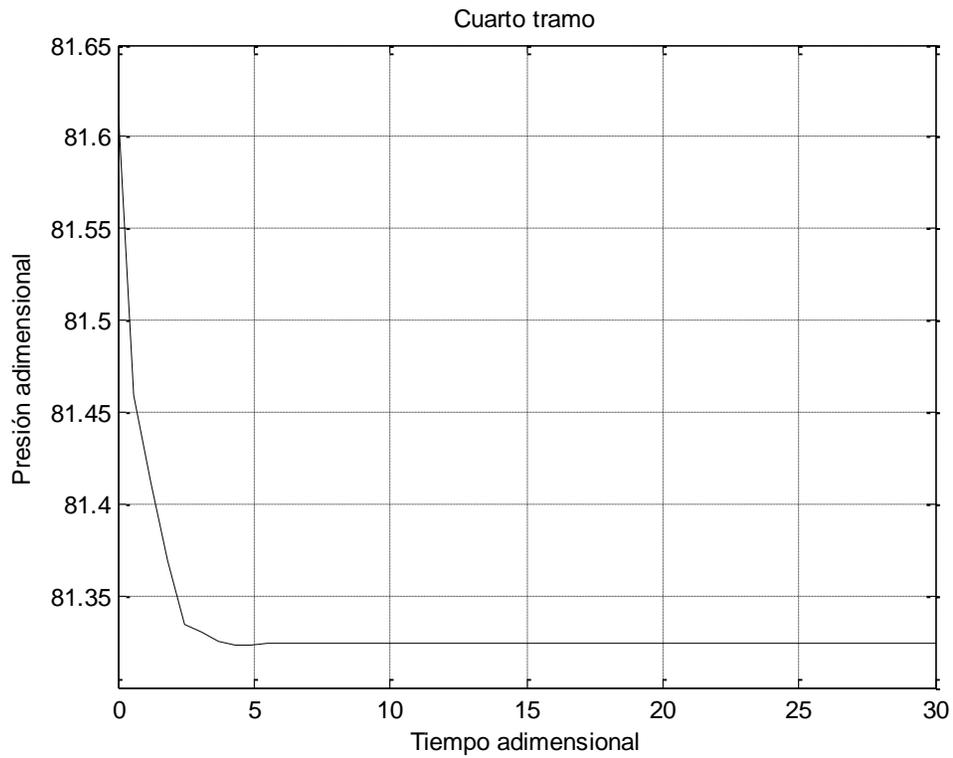
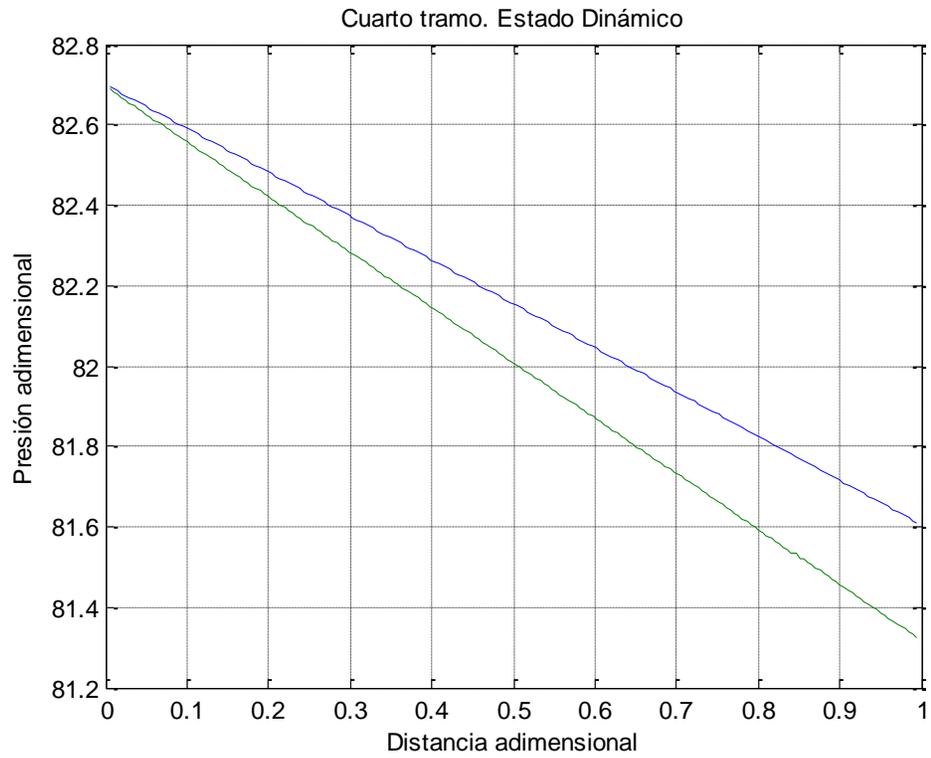


Figura 25. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el cuarto tramo de la red..

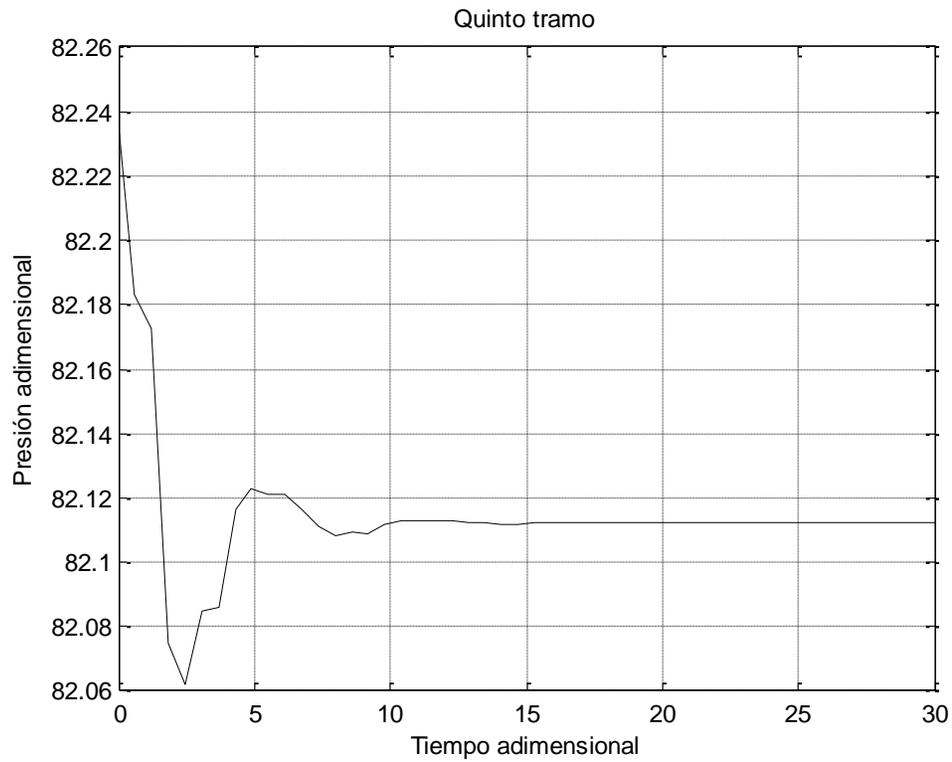
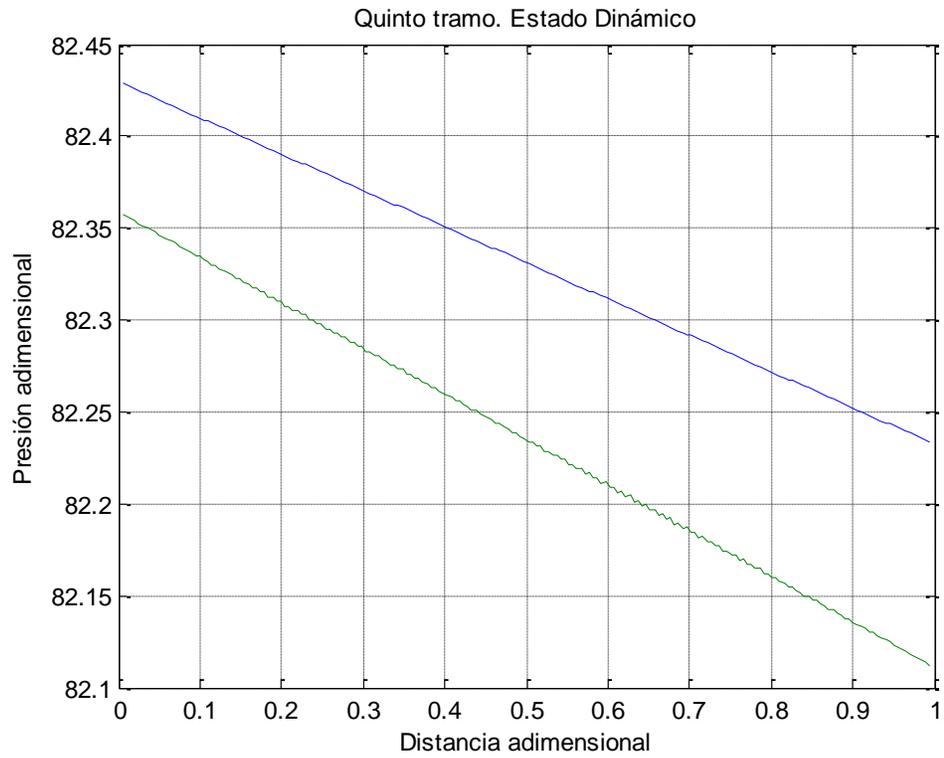


Figura 26. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el quinto tramo de la red..

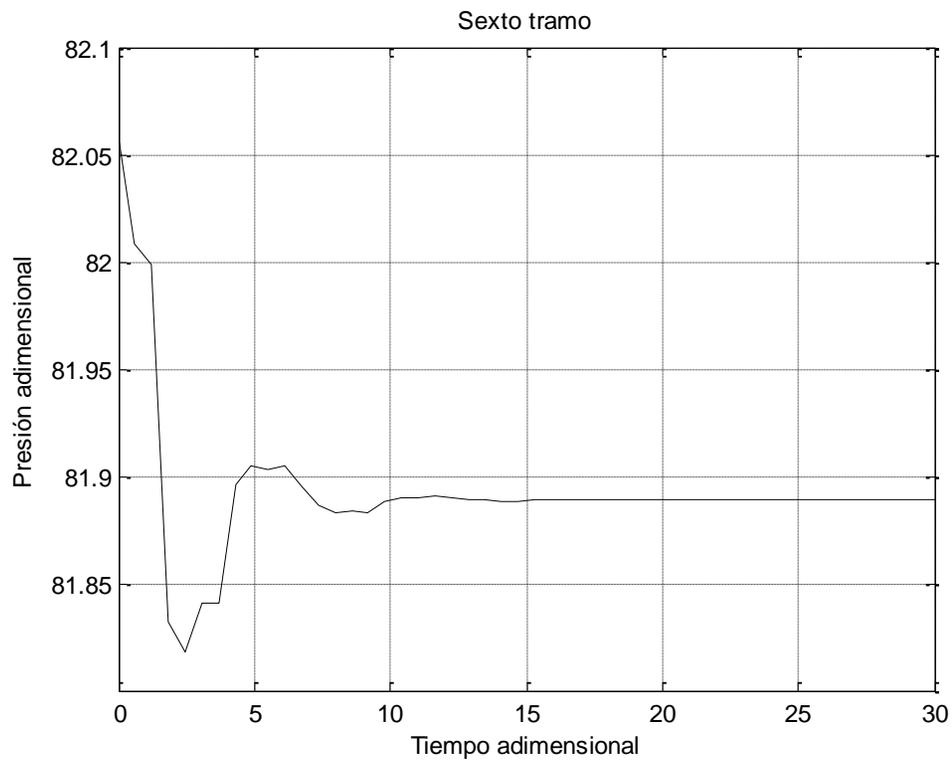
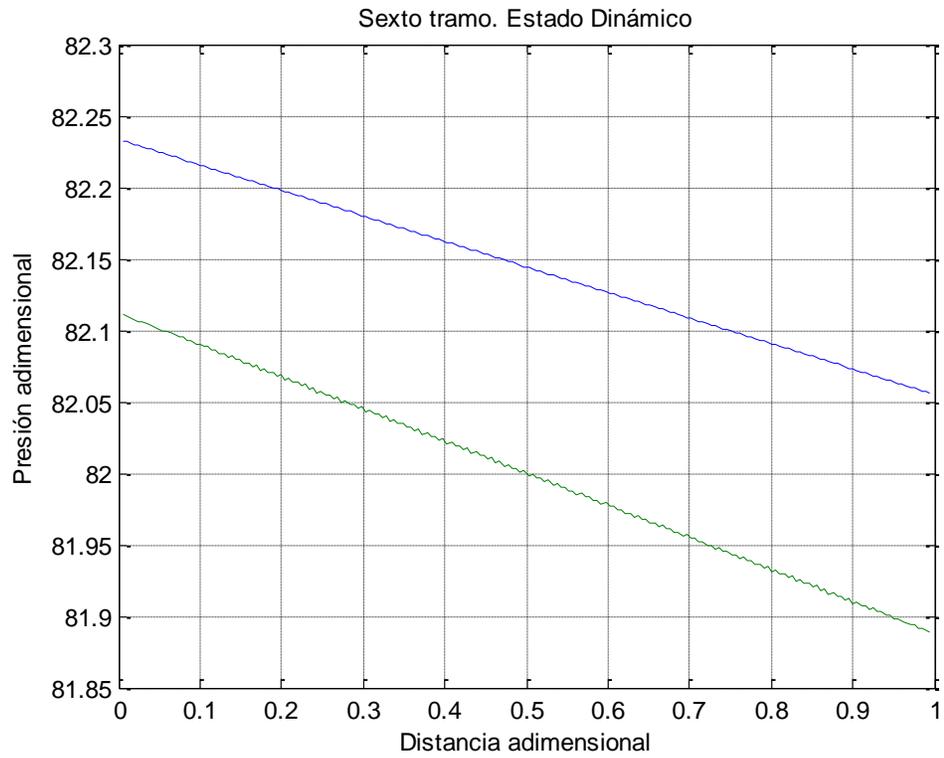


Figura 27. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el sexto tramo de la red..

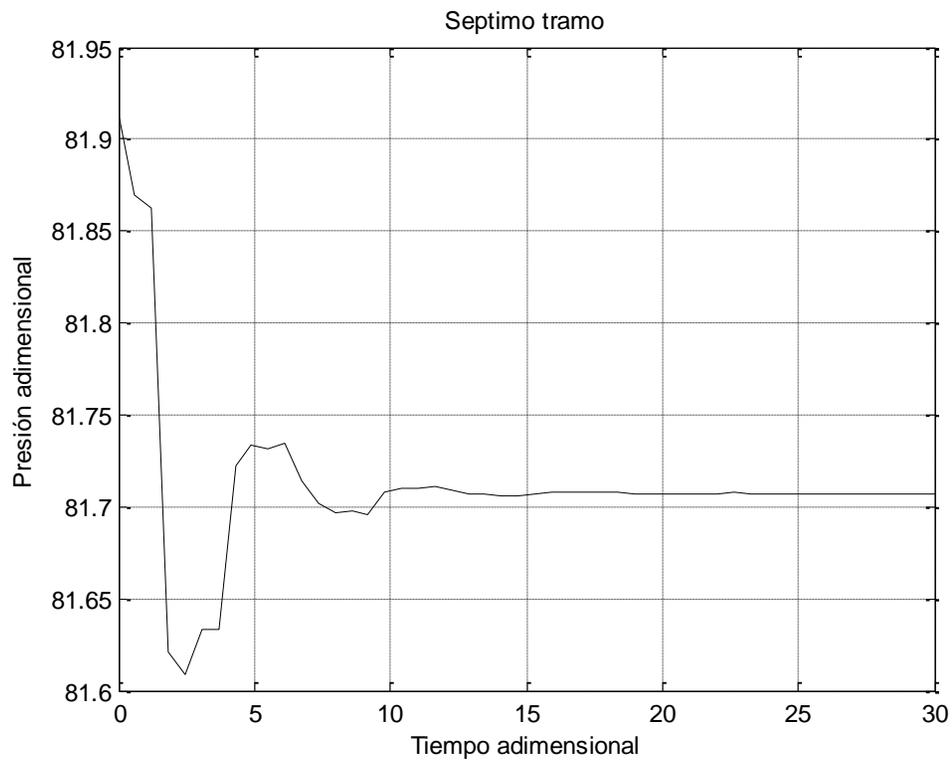
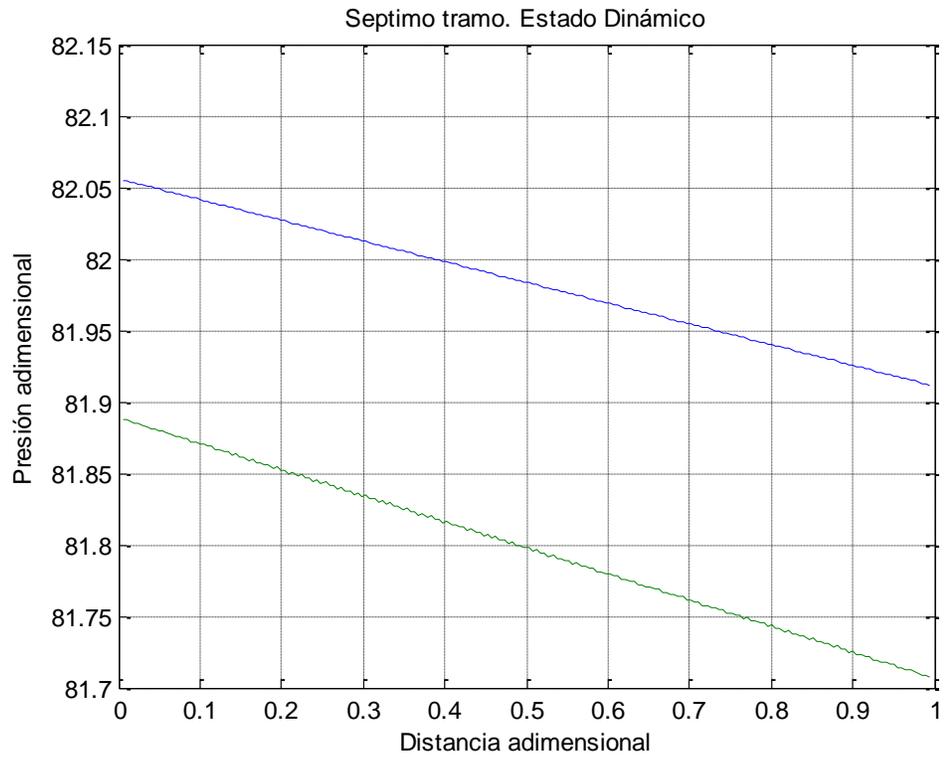


Figura 28. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el séptimo tramo de la red..

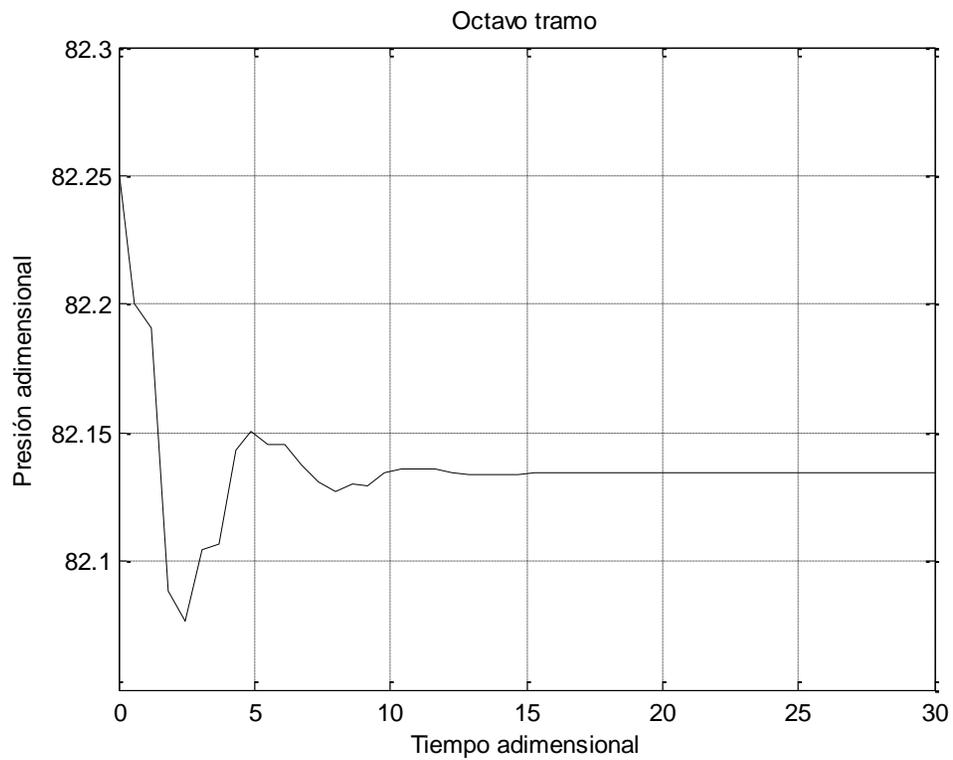
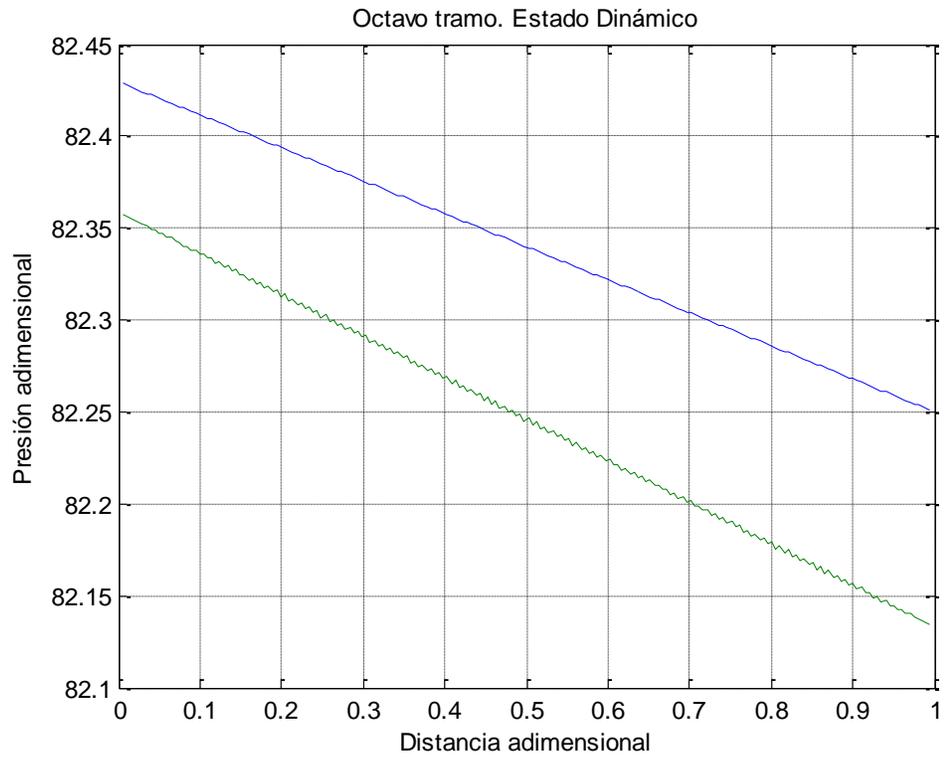


Figura 29. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el cuarto tramo de la red..

#### **6.4.5 Integración y análisis: caso 1. Perturbación paso, aumento del 10% en el flujo de estado estacionario.**

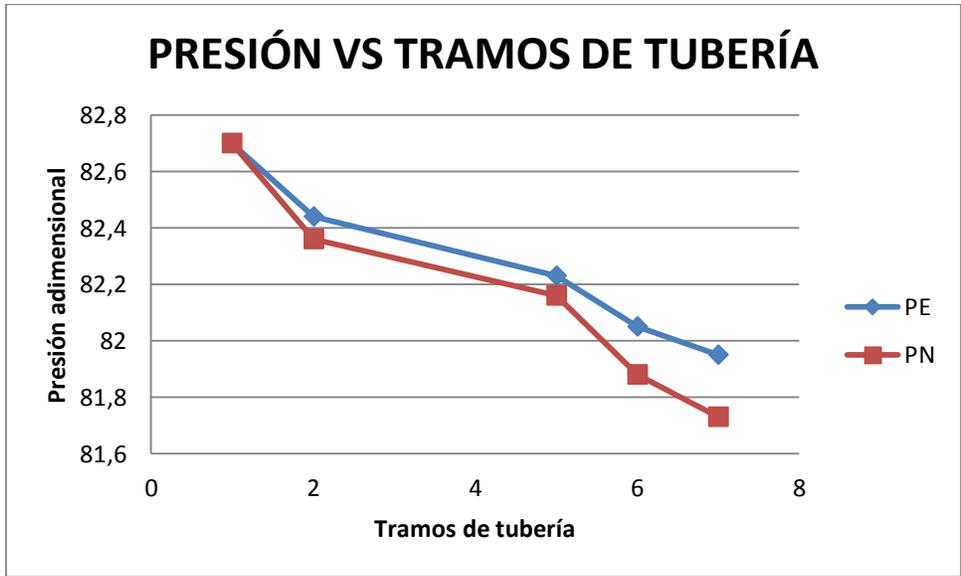
La red ramificada de la figura 22, está conformada por tres ramales, cada ramal esta unidos por tramos de tuberías y al final de estos hay un cliente.

En la figura 30, se observa el comportamiento de la presión al final de cada tramo de tubería, ante variaciones significativas del consumo. Para el caso 1, la red experimenta un proceso de despresurización. El tiempo en que en que la presión se estabiliza en cada ramal de la red se menciona a continuación:

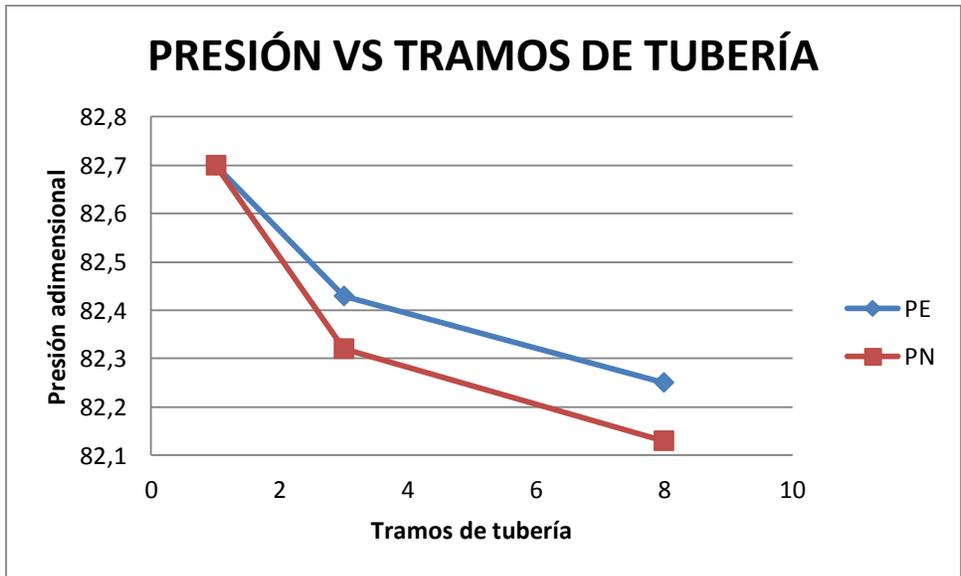
Ramal 1, constituidos por tramos 2, 5, 6,7, en la figura 23, 26, 27,28 se observa el comportamiento de la presión con la posición y la presión con el tiempo, la presión se estabiliza en cada tramo del ramal 1, en promedio 11.5 unidades de tiempo adimensional.

Ramal 2, constituidos por tramos 3, 8, en la figura 24, 29, se observa el comportamiento de la presión con la posición y la presión con el tiempo, la presión se estabiliza en cada tramo del ramal 2, en promedio 11 unidades de tiempo adimensional.

Ramal 3, constituidos por el tramo 2, en la figura 25, se observa el comportamiento de la presión con la posición y la presión con el tiempo, la presión se estabiliza en 6 unidades de tiempo adimensional.



a.



b.

Figura 30. Variación de la presión al final de cada tramo de la red. Caso 1. a. ramal 1, b. ramal 2

**6.4.6 Caso 2.** Perturbación paso, disminución del 10% en el flujo de estado estacionario.

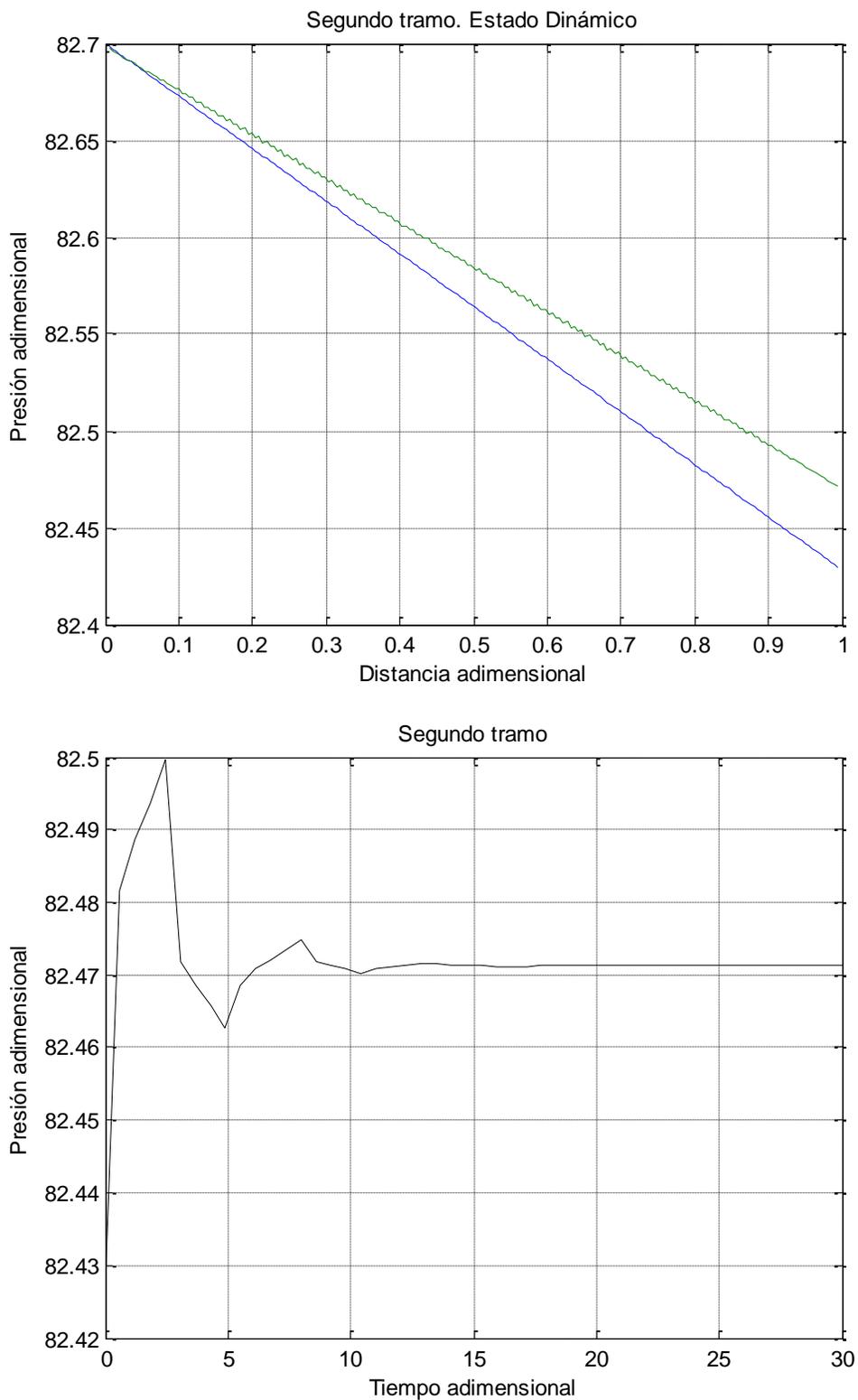


Figura 31. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en El segundo tramo de la red..

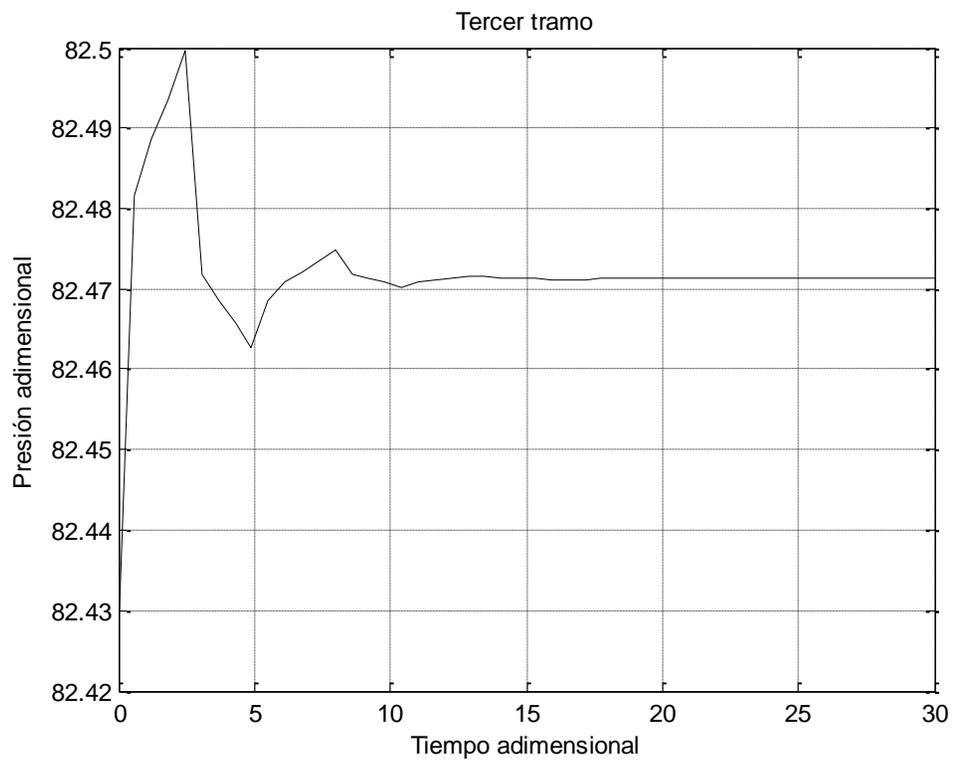
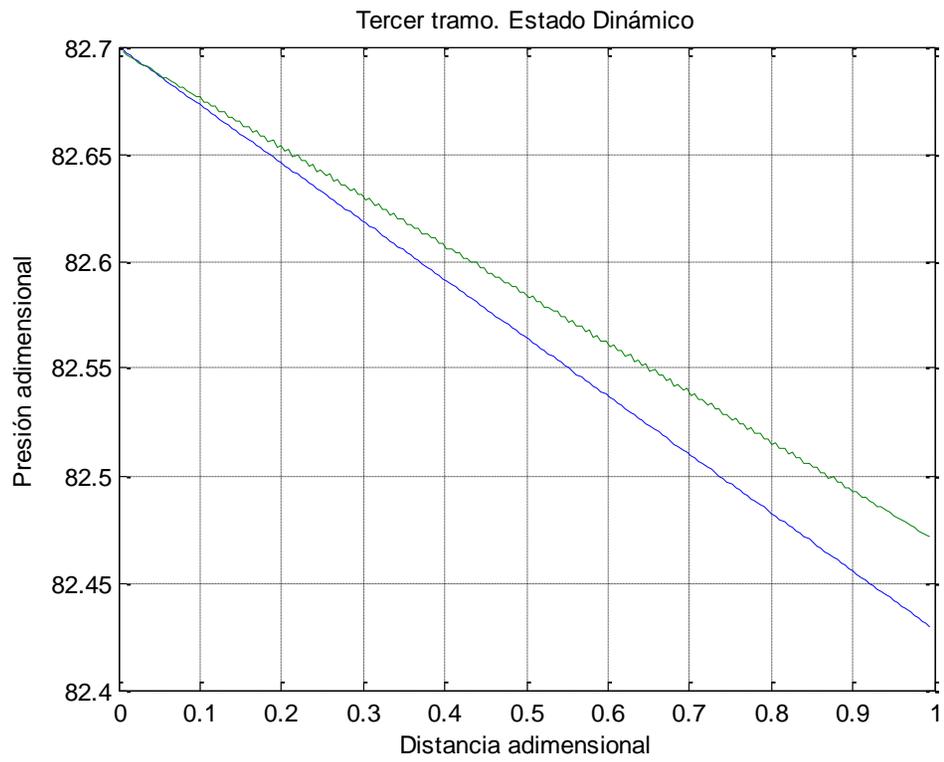


Figura 32. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el tercer tramo de la red..

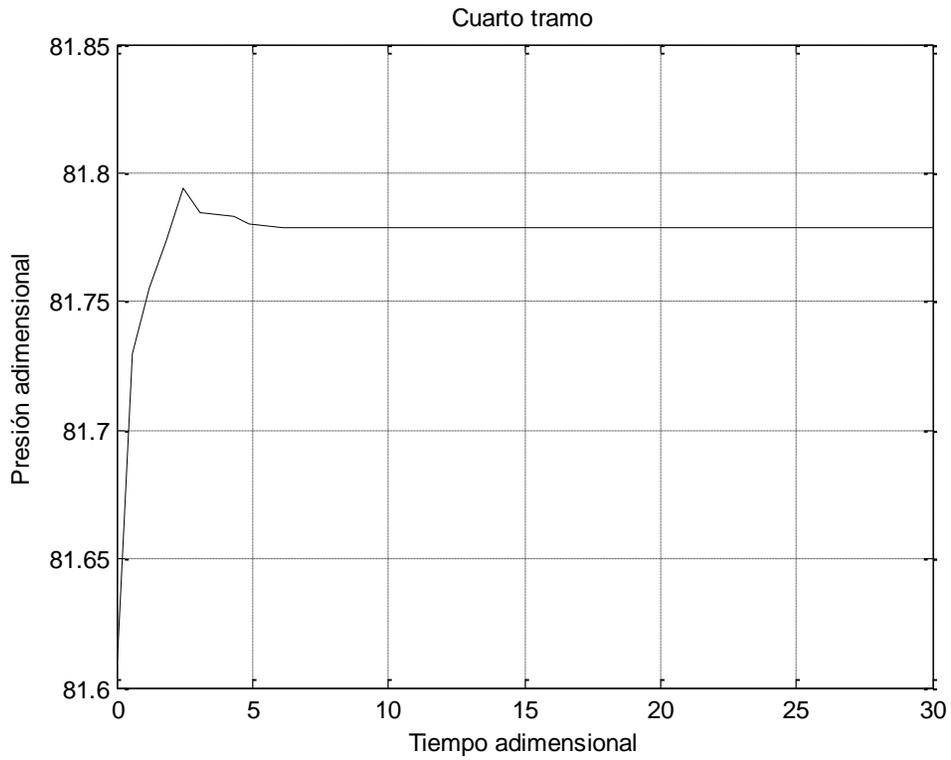
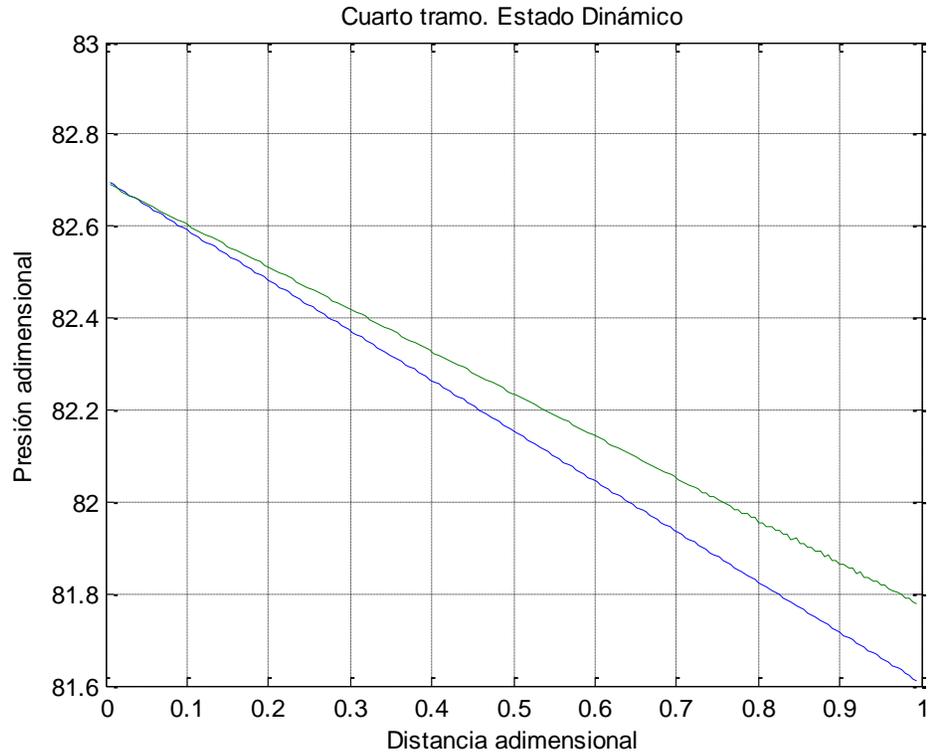


Figura 33 Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el cuarto tramo de la red..

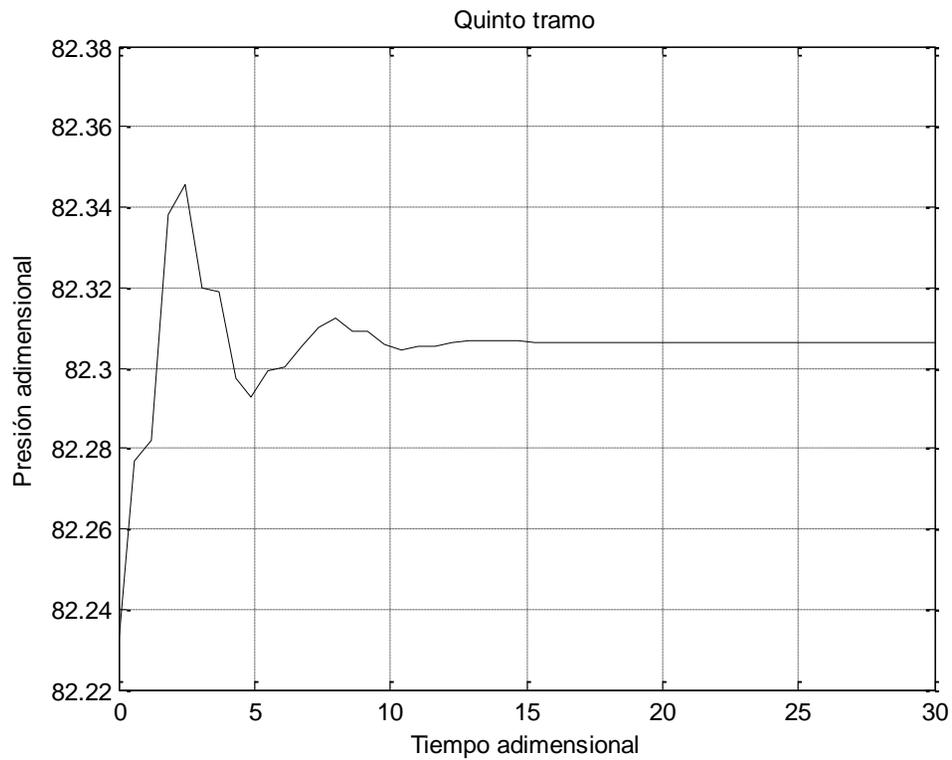
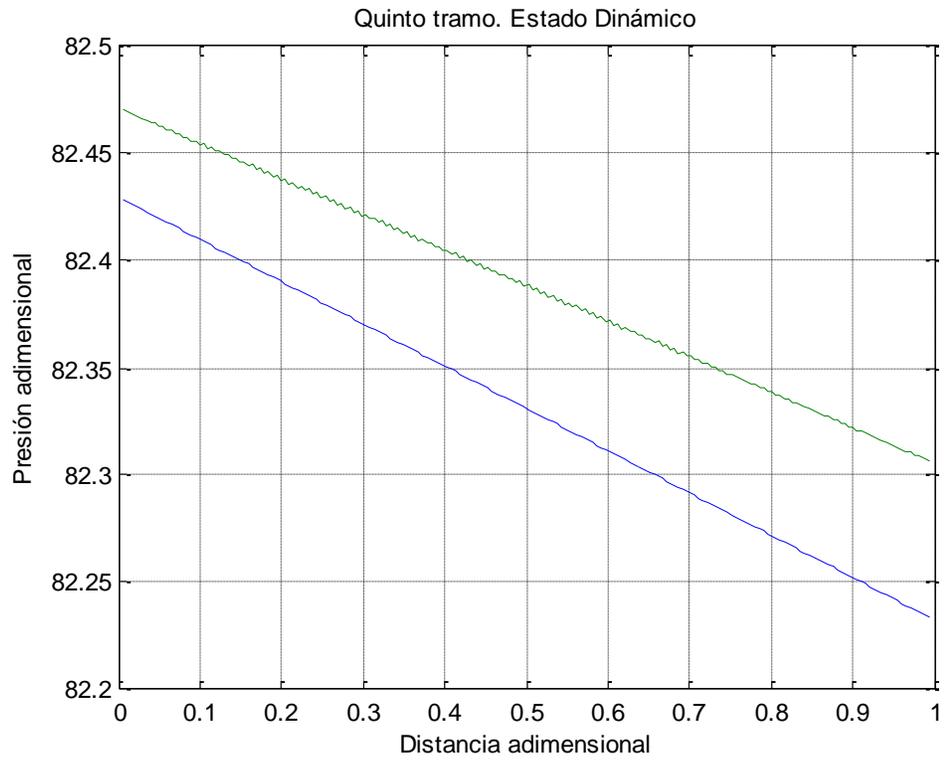


Figura 34. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el quinto tramo de la red..

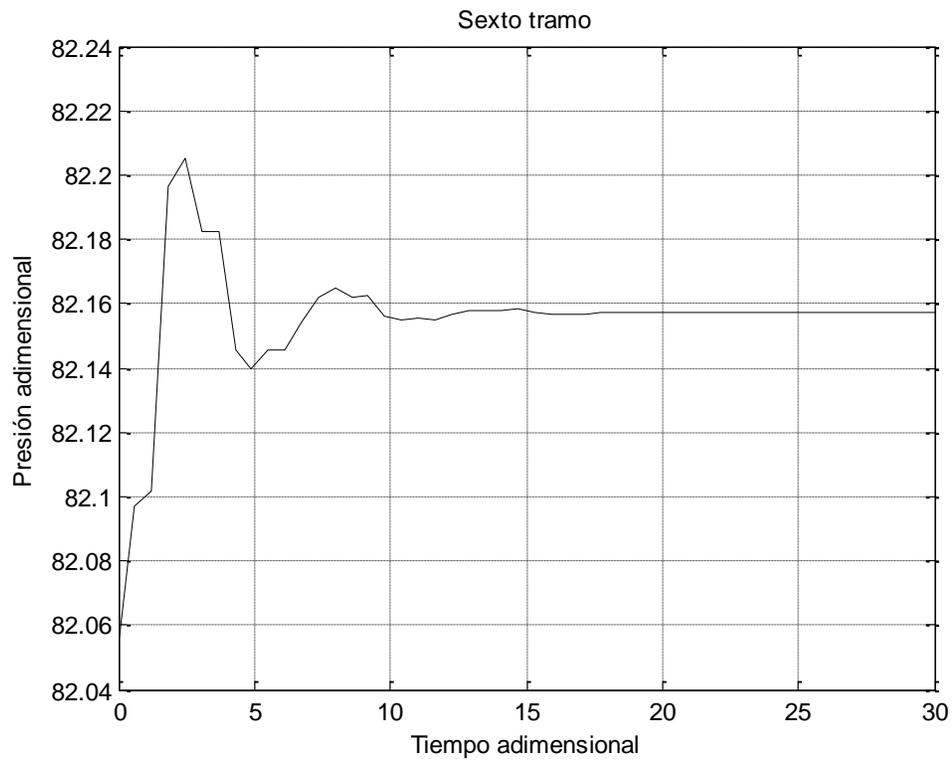
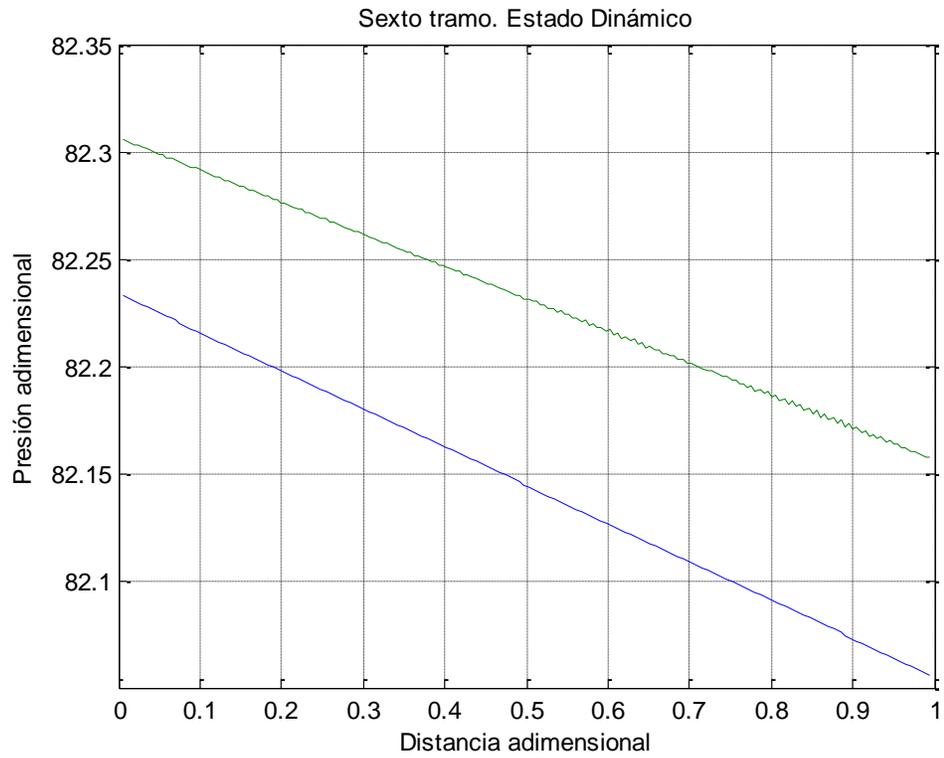


Figura 35. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el sexto tramo de la red..

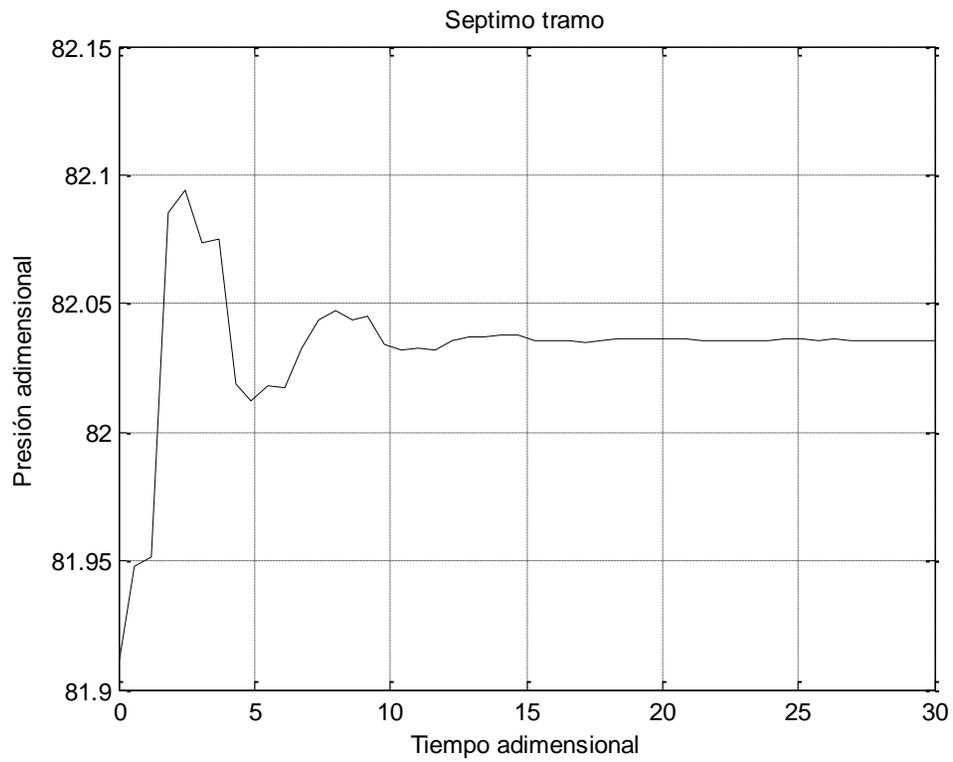
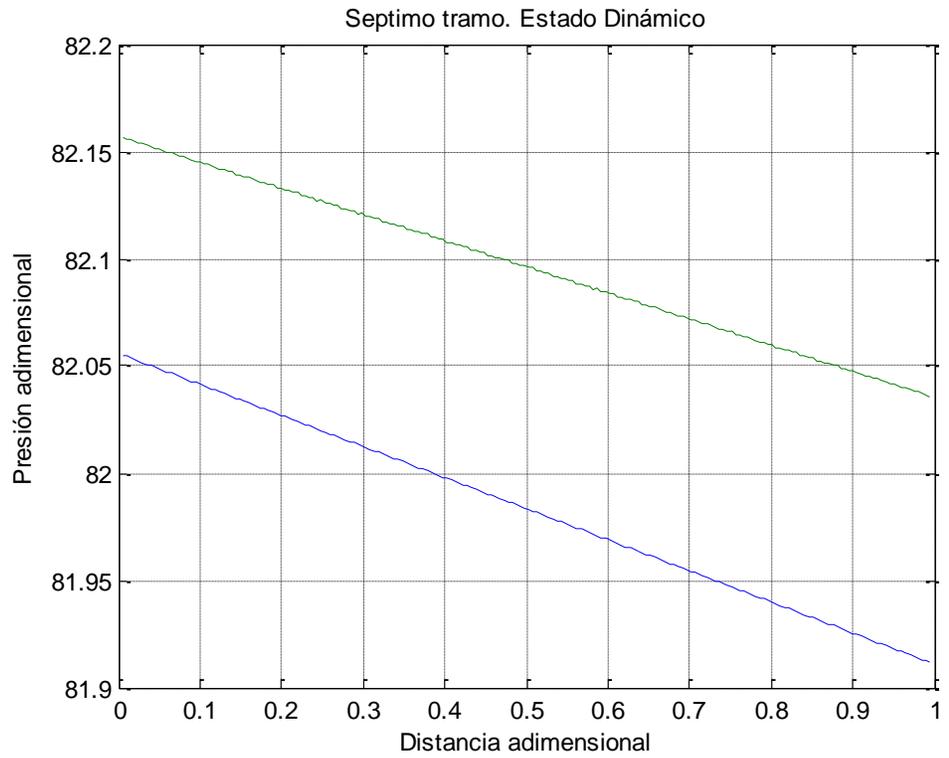


Figura 36. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el séptimo tramo de la red..

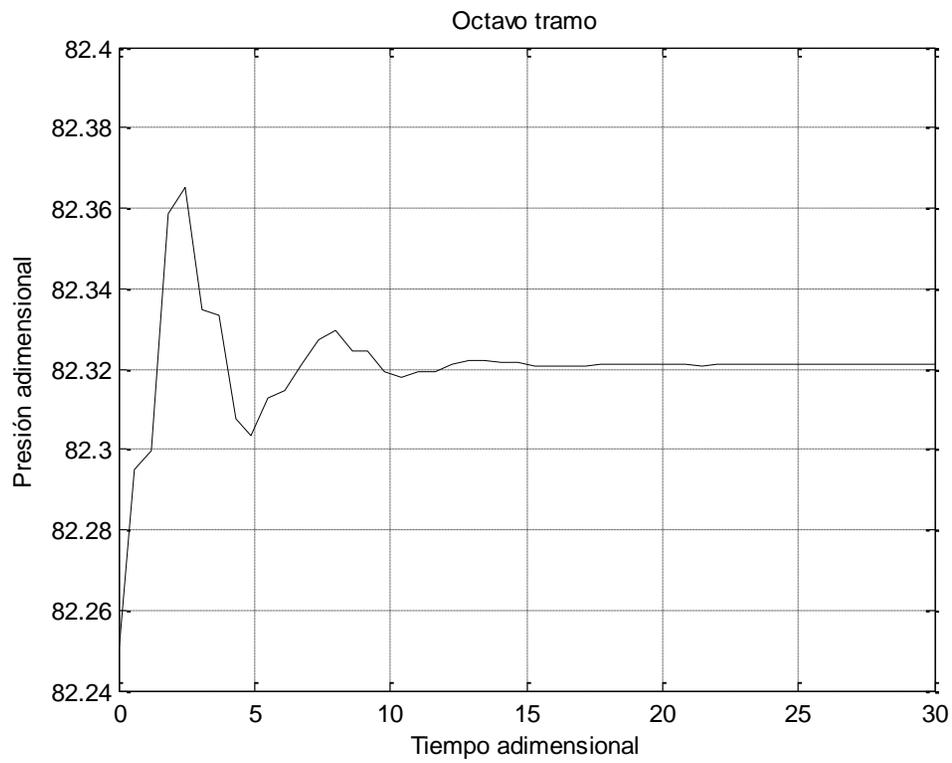
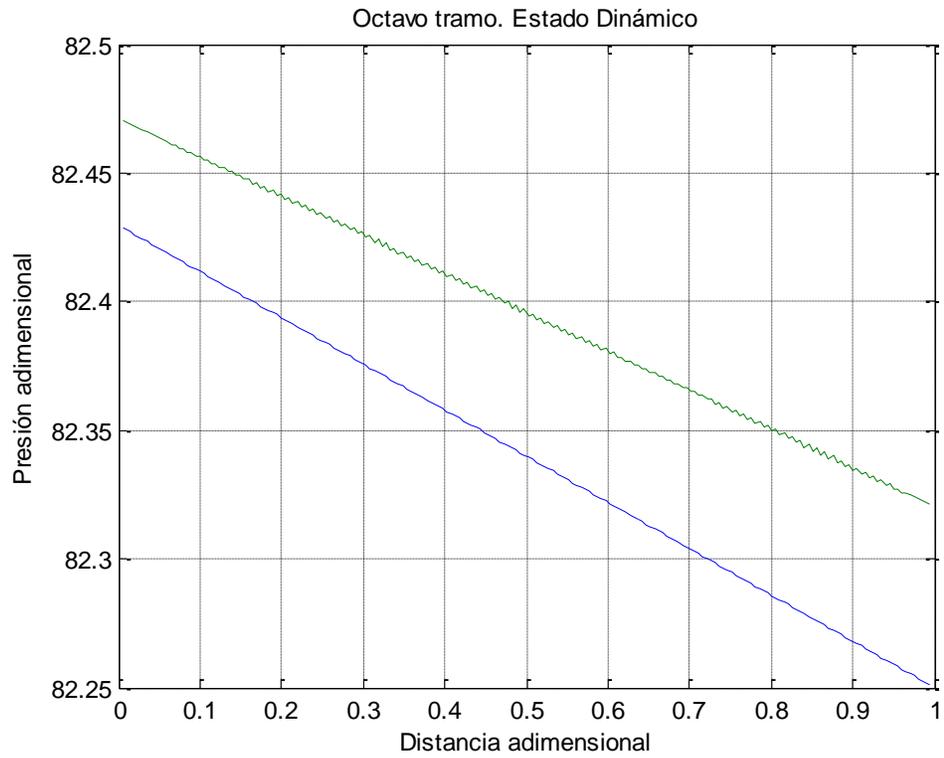


Figura 37. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el octavo tramo de la red..

#### **6.4.7 Integración y análisis: caso 1. Perturbación paso, aumento del 10% en el flujo de estado estacionario.**

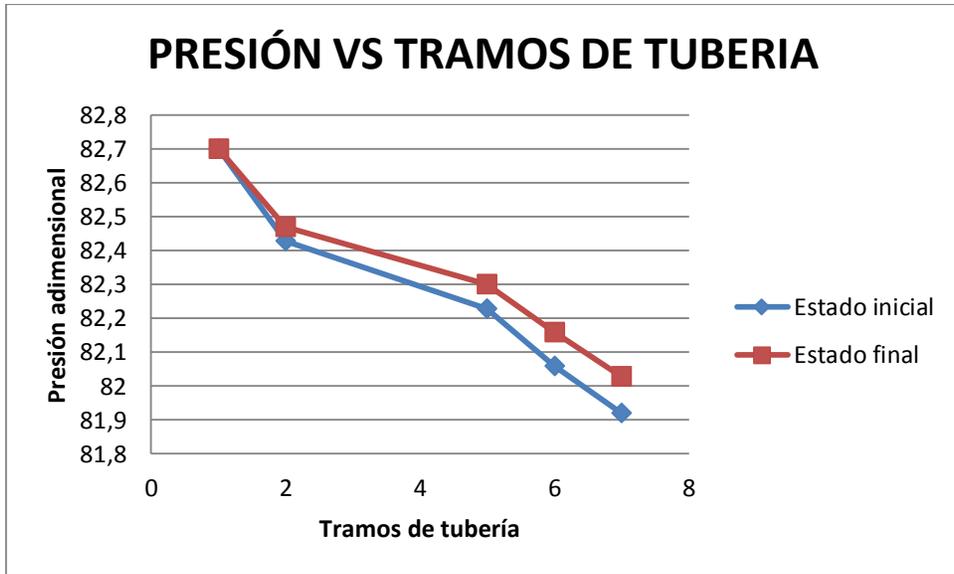
La red ramificada de la figura 22, está conformada por tres ramales, cada ramal esta unidos por tramos de tuberías y al final de estos hay un cliente.

En la figura 38, se observa el comportamiento de la presión al final de cada tramo de tubería, ante variaciones significativas del consumo. Para el caso 2, la red experimenta un proceso de presurización. El tiempo en que en que la presión se estabiliza en cada ramal de la red se menciona a continuación:

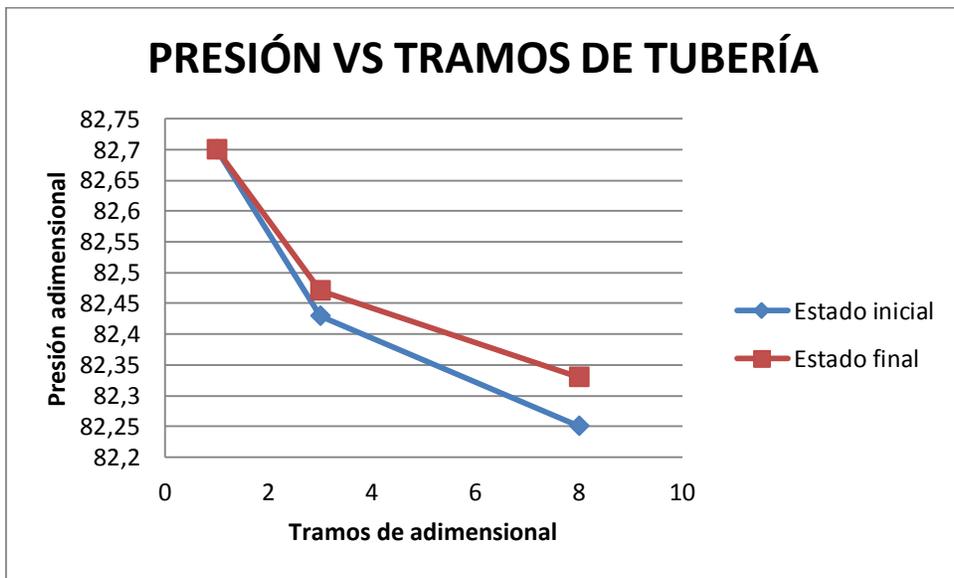
Ramal 1, constituidos por tramos 2, 5, 6,7, en la figura 31, 34, 35, 36 se observa el comportamiento de la presión con la posición y la presión con el tiempo, la presión se estabiliza en cada tramo del ramal 1, en promedio 8 unidades de tiempo adimensional.

Ramal 2, constituidos por tramos 3, 8, en la figura 32, 37, se observa el comportamiento de la presión con la posición y la presión con el tiempo, la presión se estabiliza en cada tramo del ramal 2, en promedio 6 unidades de tiempo adimensional.

Ramal 3, constituidos por el tramo 2, en la figura 33, se observa el comportamiento de la presión con la posición y la presión con el tiempo, la presión se estabiliza en 4 unidades de tiempo adimensional.



a



b

Figura 38. Variación de la presión al final de cada tramo de la red. Caso 1. a. ramal 1, b. ramal 2

### 6.4.8 Caso 3. Perturbación paso variable en el tiempo.

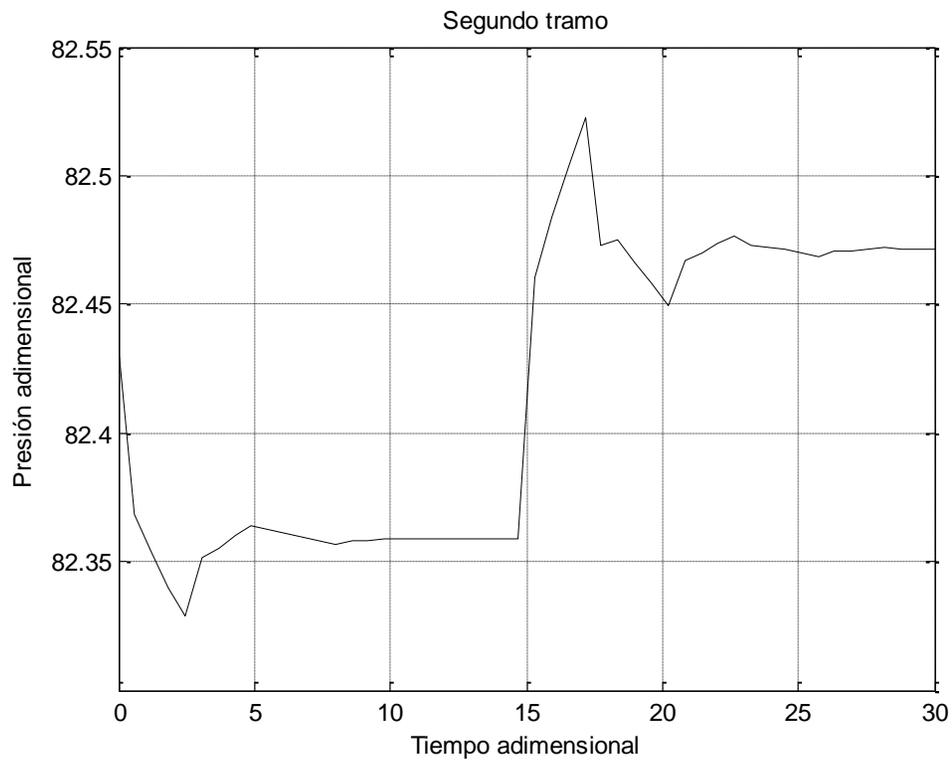
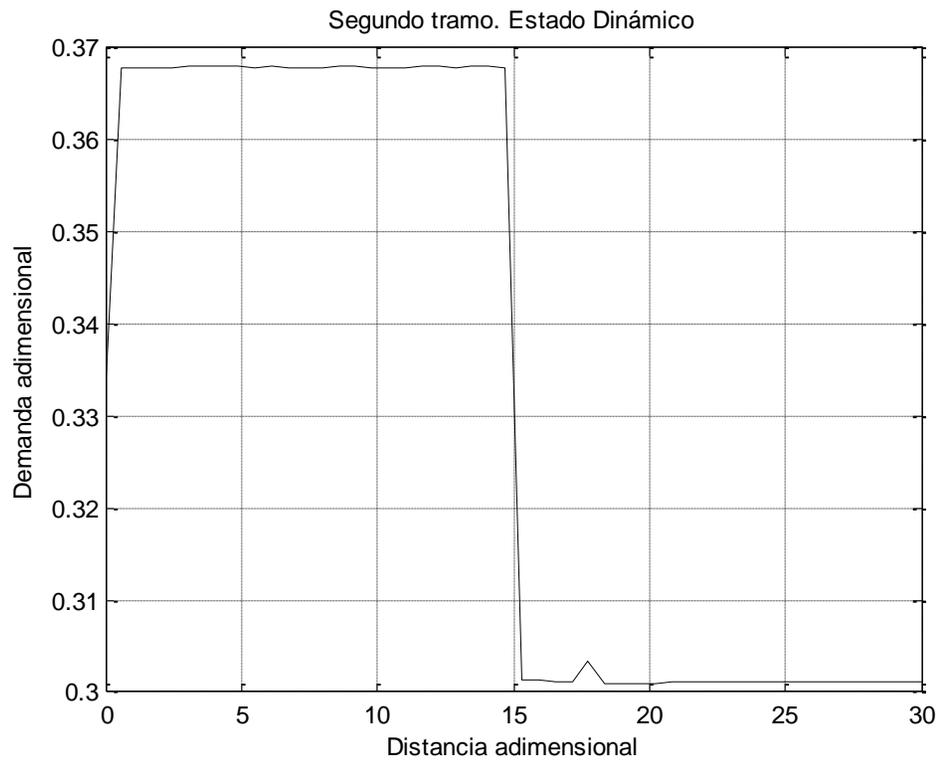


Figura 39. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el segundo tramo de la red..

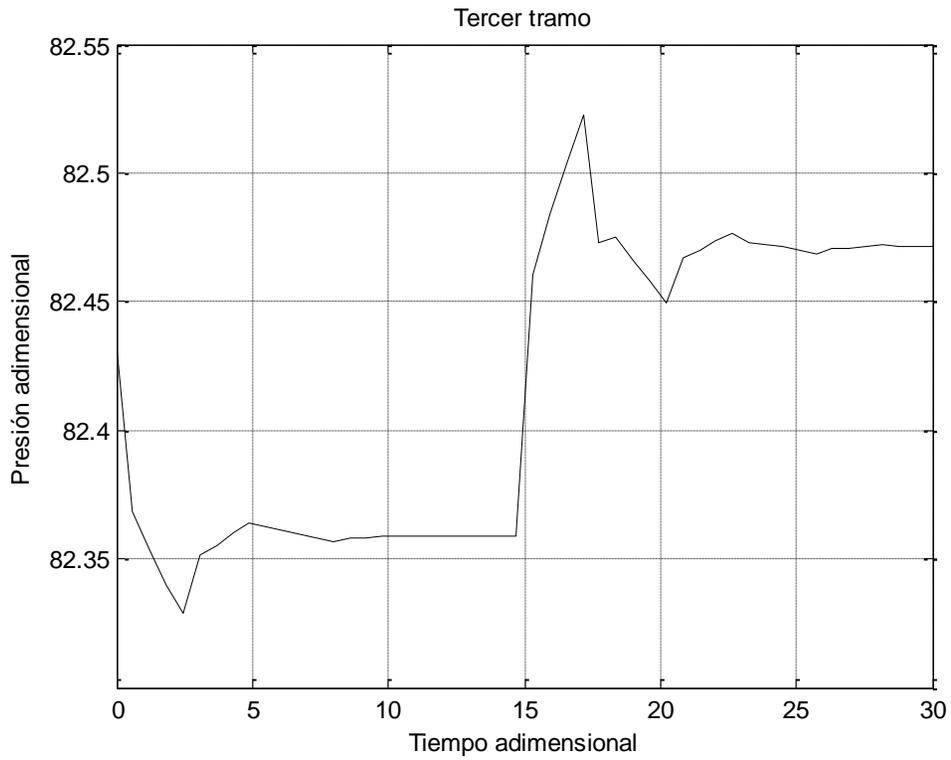
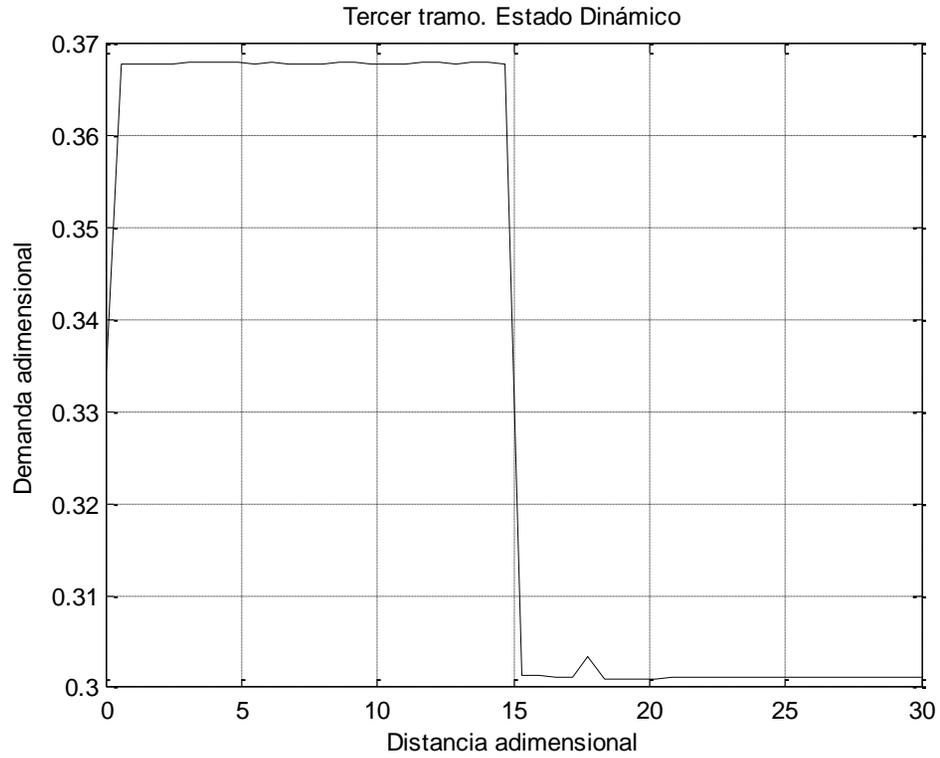


Figura 40. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el tercer tramo de la red..

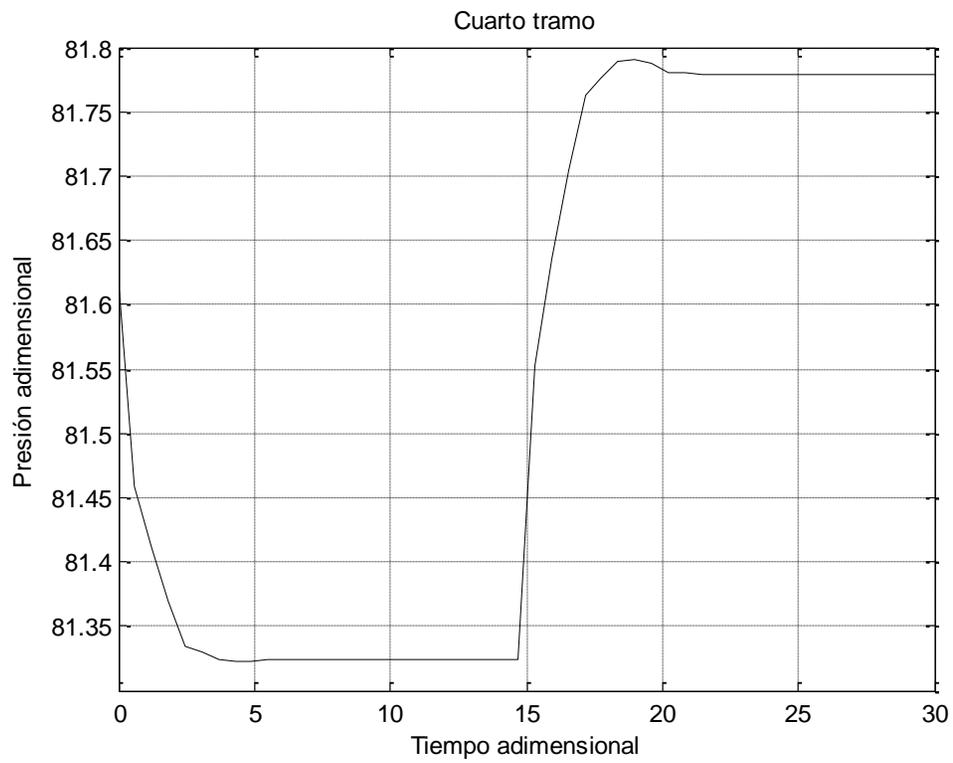
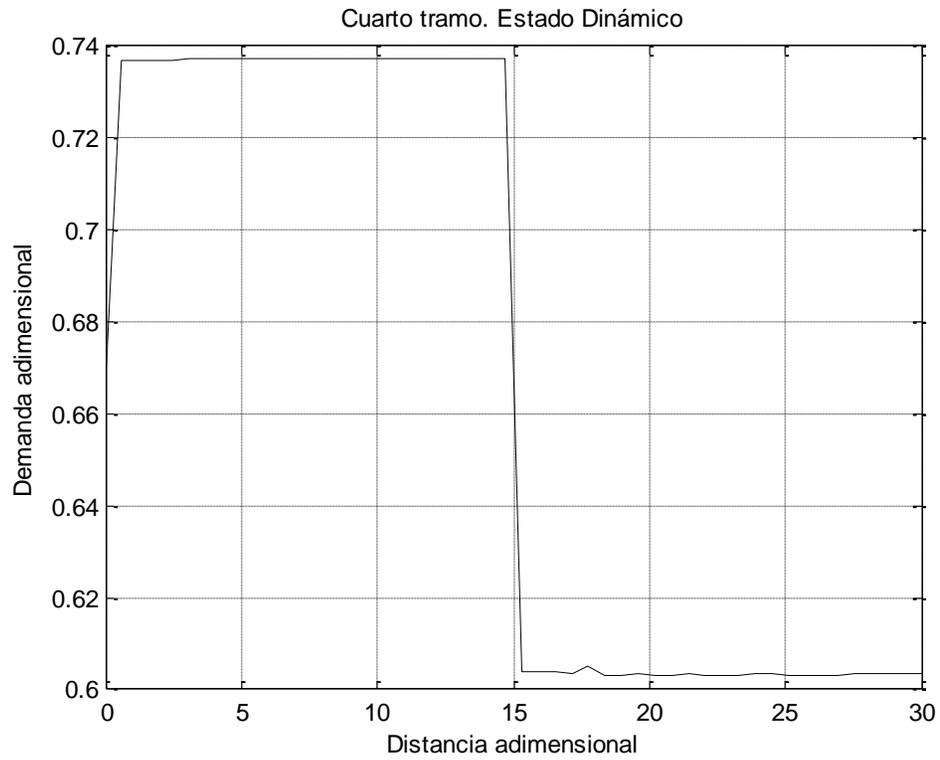


Figura 42. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el cuarto tramo de La red..

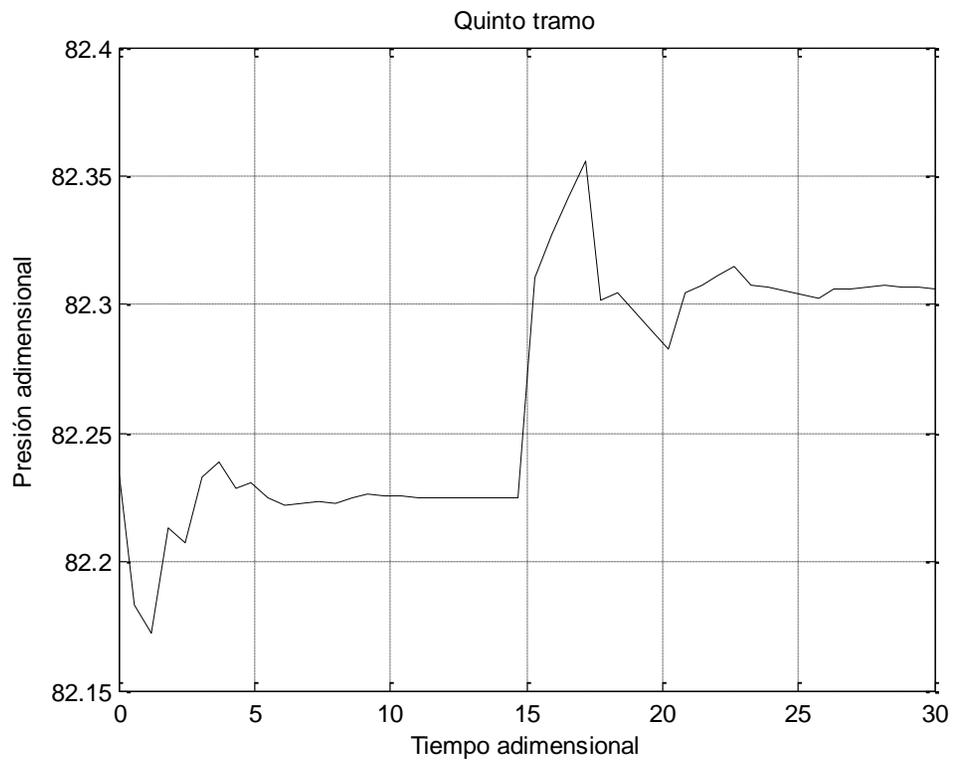
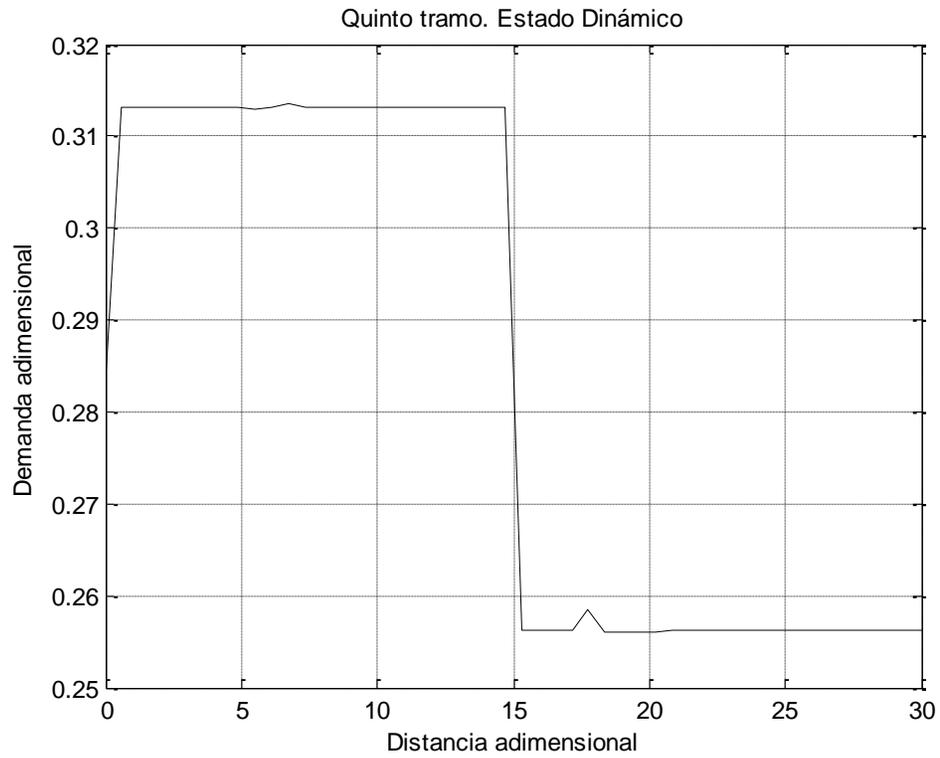


Figura 43. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el quinto tramo de la red..

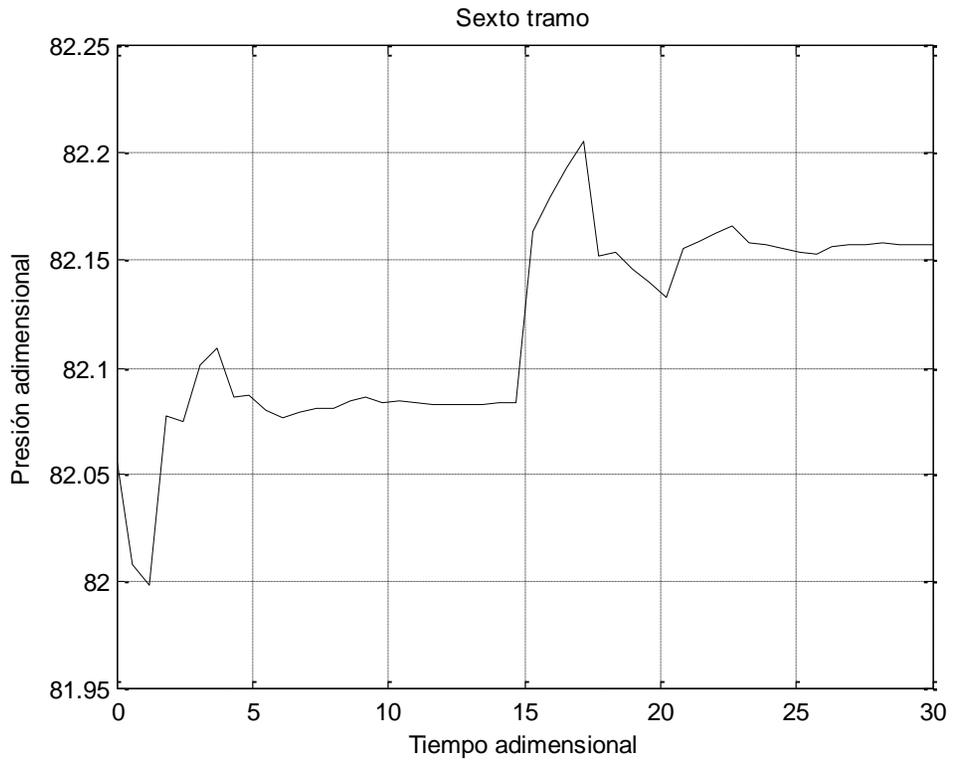
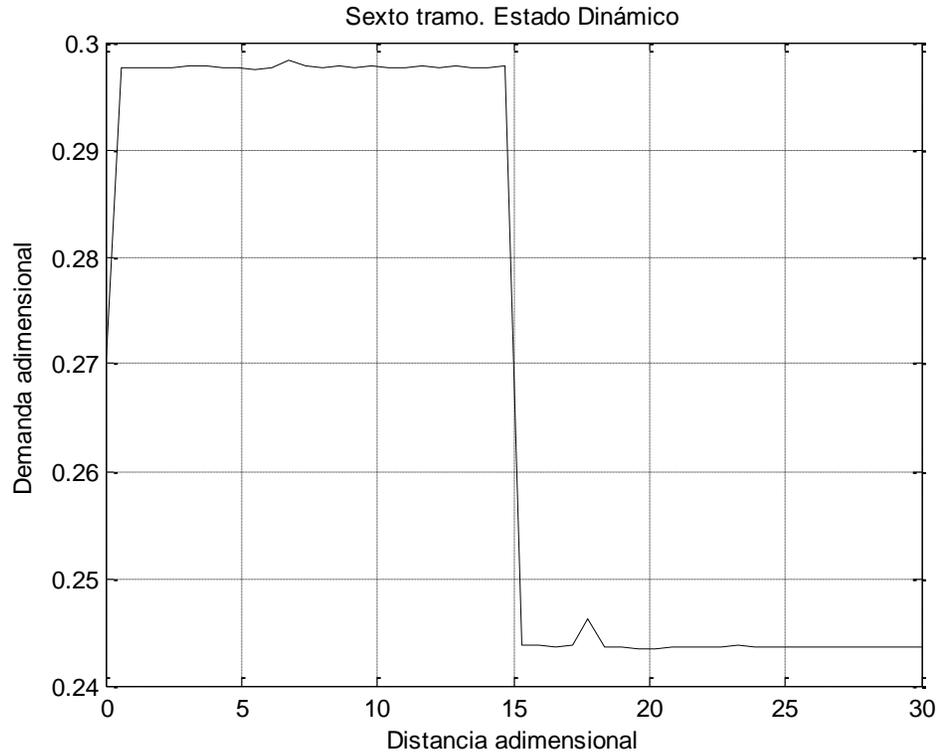


Figura 44. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el sexto tramo de la red..

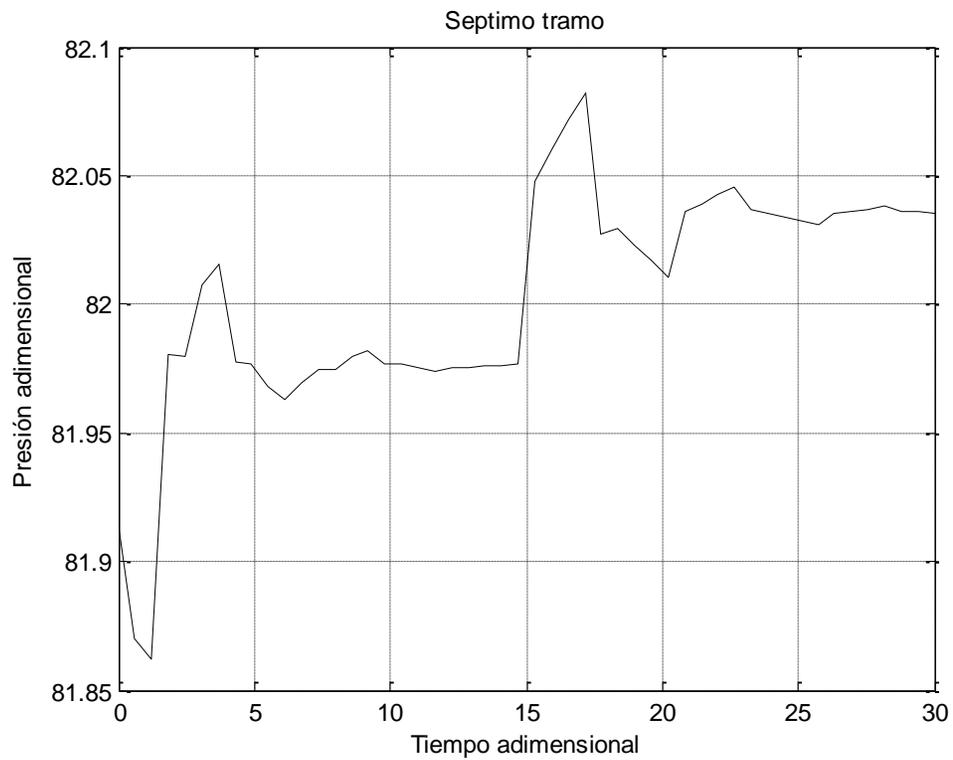
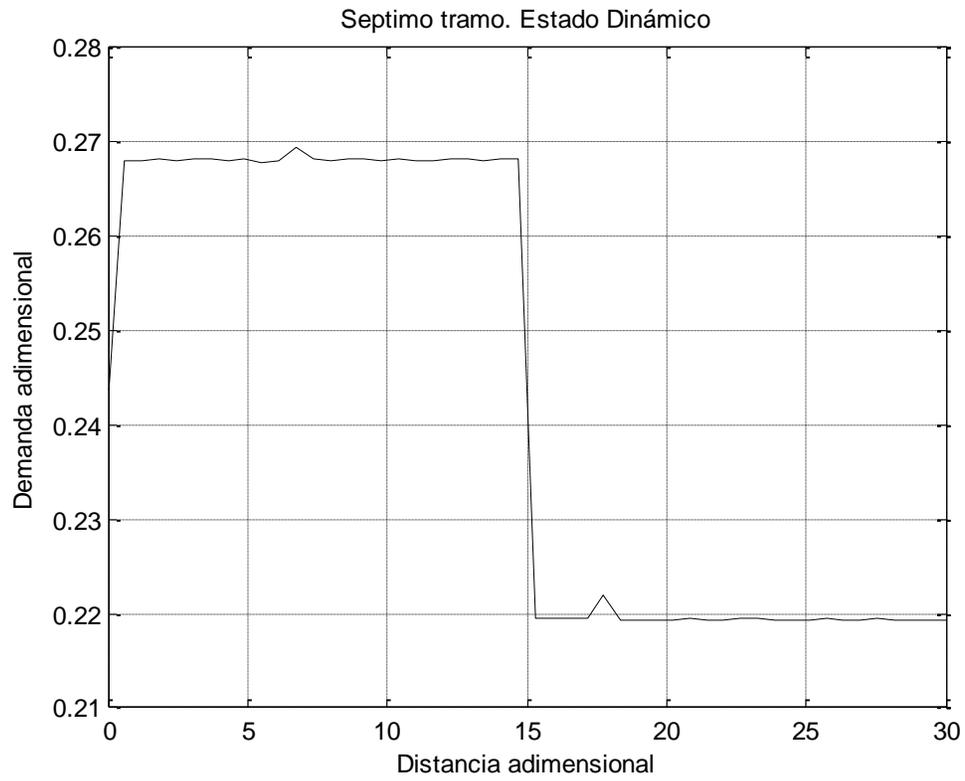


Figura 45. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el séptimo tramo de la red..

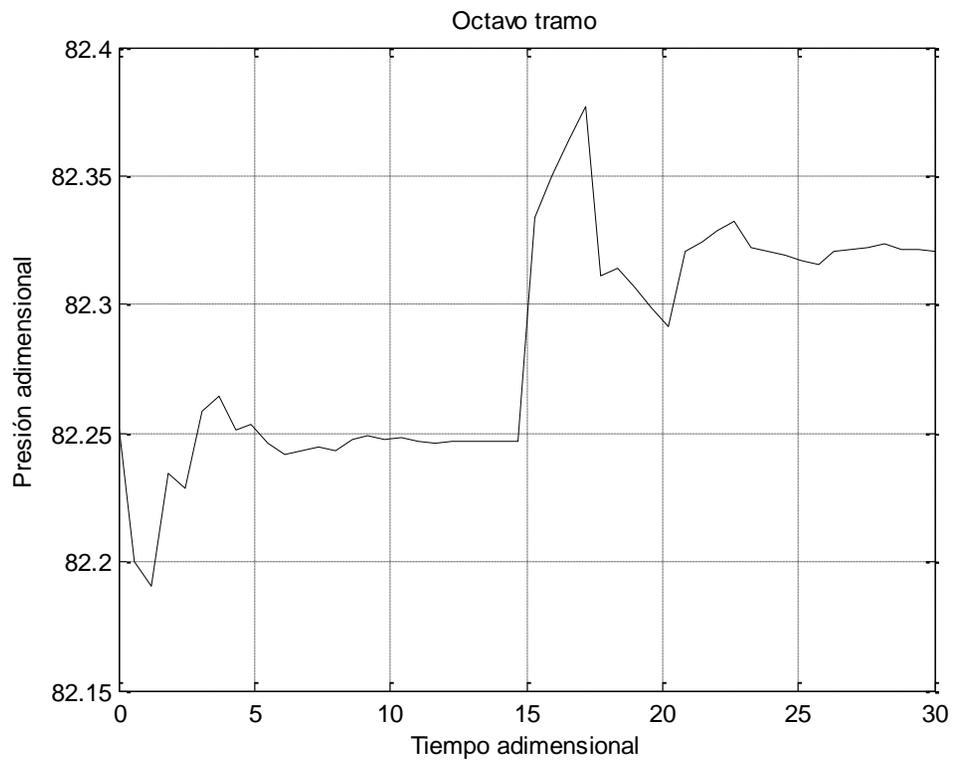
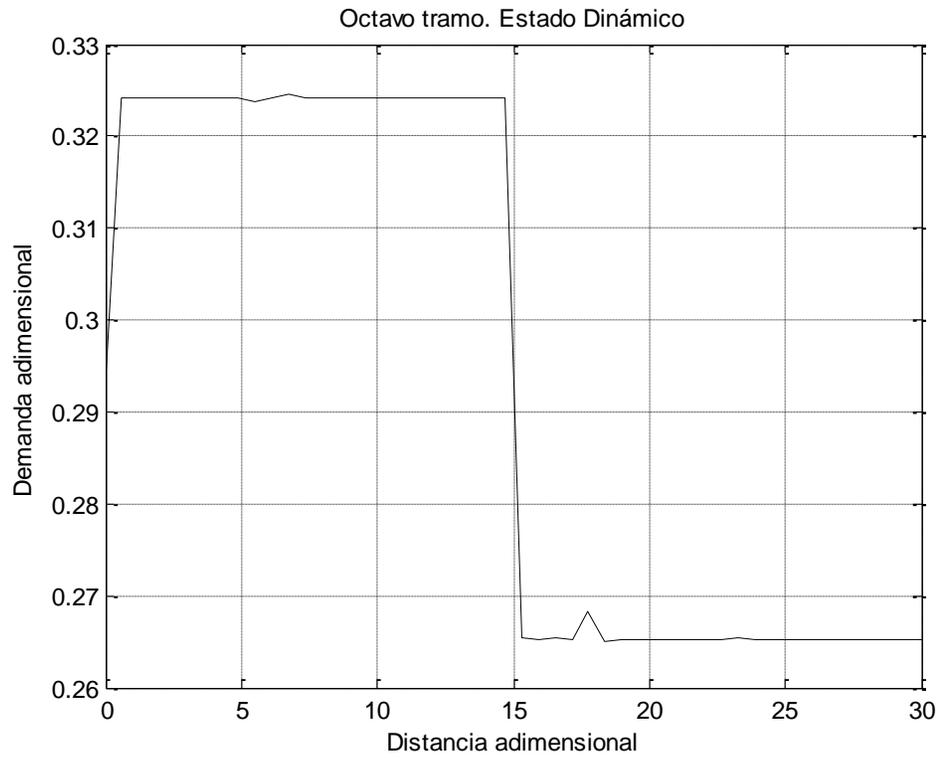


Figura 46. Comportamiento de la presión con la posición y tiempo, en el octavo tramo de la red..

#### **6.4.9 Integración y análisis: caso 3. Perturbación paso, aumento del 10% en el flujo de estado estacionario.**

La red ramificada de la figura 22, está conformada por tres ramales, cada ramal de la red, está conformado por tramos de tuberías.

Para el caso 3, la red experimenta un proceso variable de despresurización y despresurización simultaneo. El tiempo en que en que la presión se estabiliza en cada ramal de la red se menciona a continuación:

Ramal 1, constituidos por tramos 2, 5, 6,7, en la figura 39, 43, 44, 45 se observa el comportamiento de la presión con la posición y la presión con el tiempo, la presión se estabiliza en cada tramo del ramal 1, en promedio 6 unidades de tiempo adimensional cuando se despresuriza y 12 unidades de tiempo adimensional, cuando se presuriza

Ramal 2, constituidos por tramos 3, 8, en la figura 40, 46, se observa el comportamiento de la presión con la posición y la presión con el tiempo, la presión se estabiliza en cada tramo del ramal 2, en promedio 7 unidades de tiempo adimensional cuando se despresuriza y 11 unidades de tiempo adimensional, cuando se presuriza

Ramal 3, constituidos por el tramo 2, en la figura 42, se observa el comportamiento de la presión con la posición y la presión con el tiempo, la presión se estabiliza en promedio 5 unidades de tiempo adimensional cuando se despresuriza y 10 unidades de tiempo adimensional, cuando se presuriza

#### 6.4.10 Análisis del compresor en la línea de alimentación de la red

Compresor a la entrada de la red, es capaz de suplir las perdidas por consumo y longitud de tuberías, con los datos de entrada de la red, figura 22, se determinará el trabajo del compresor y la eficiencia de segunda ley de la termodinámica.

##### Datos

Metano = 0.74;

Etano = 0.21;

Propano = 0.05;

Butano = 0;

Presión de entrada = 70 bar

Presión de salida= 82.7 bar

Temperatura de entrada = 10°C

Temperatura de salida= 23°C (Obtenida por iteración)

Flujo másico = 131 Kg/s (6.4 Kmol/s)

Temperatura ambiente = 25°C

##### Gas ideal

Cambio de entalpía de gas ideal = -514,96 KJ/Kmol

Cambio de entropía de gas ideal = 0.3923 KJ/Kmol K

##### Datos entrada de compresor

Factor de compresibilidad = 0.707

Entalpia residual =  $2.45 \times 10^3$  KJ/Kmol

Entropia residual = 6.1677 KJ/Kmol K

##### Datos salida del compresor

Factor de compresibilidad = 0.7194

Entalpía residual =  $2.45 \times 10^3$  KJ/Kmol

Entropía residual = 6.1677 KJ/Kmol K

### Resultados

Cambio de entalpía total = -358.47 KJ/Kmol

Cambio de entropía total = 0.5316 KJ/Kmol K

Entropía generada = 3.4026 KW/ K

Trabajo reversible = 1280.6 KW

Trabajo real = 2294.6 KW

Eficiencia de segunda ley = 55.81 %

Para hacer estos cálculos se utilizó el código que se venía trabajando, excepto que se hizo cambios en el archivo "Factor Z" y se creó otro modulo llamado "Compresor". El código "Solución" ejecuta los cálculos del compresor. Los mismos se muestran en los anexos. El programa para calcular el trabajo real y la eficiencia de segunda ley se encuentra en el apéndice C, en los anexos de este trabajo

## 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Existen diversos enfoques que se han utilizado para el estudio del comportamiento de la presión en una red de distribución de gas natural en estado no estable, existen varios tipos de soluciones numéricas, como diferencias finitas, elementos finitos, el método propuesto es una solución numérica que se resolvió por el métodos de las líneas, dando como resultado con base en la bibliografía consultada, es más robusto y exacto ya que no se despreciaron términos, como el de la inercia, el tiempo computacional en converger es corto, 2 minuto, pero si se cuenta con un procesador de mayor capacidad de memoria RAM, este tiempo disminuye.

En un tramo de tubería se realizó el proceso de presurización y despresurización con un transitorio rápido y lento, en las graficas analizadas, se observaron los tiempos en alcanzar nuevamente su estado estable.

La solución numérica es flexible, otra ventaja que tiene es que unas propiedades como la viscosidad, el factor de compresibilidad y la relación de calores específicos es variable, una gran ventaja comparada con otros trabajos donde se asumen constante. Además se puede variar el diámetro de la tubería, la longitud y trabajar con cualquier tipo de demanda, paso, senoidal, rampa, paso variable.

Se estudió una red con tres tramos y consumidores representativos y el modelo es capaz de pronosticar o predecir el comportamiento de la presión en la red.

Se incluye una máquina en la red, se trata de un compresor que se encuentra en la línea de alimentación de la red, se realizó un programa para determinar la entalpía residual y calcular, potencia del compresor y su eficiencia, se analizaron dos enfoques, se le da la temperatura de descarga y el te arroja la eficiencia o lo contrario, se le suministra la eficiencia y arroja la temperatura de descarga, las correlaciones usadas tiene una desviación del 5% comparadas con el software Haysys, para este tipo de modelo es un error muy bajo, dado que no es fácil, de predecir por ser una mezcla y no una sustancia pura.

Se recomienda para trabajos posteriores, realizar el algoritmo en Fortran, el tiempo de cómputo disminuye, hacer una red cerrada y tener en cuenta la temperatura es decir incluir la ecuación de energía y por último variar el ángulo de inclinación de la tubería.

Queda una excelente herramienta computacional para seguir avanzando, tiene sus limitaciones, es un modelo que predice con mayor precisión el comportamiento de la presión en una red, ante variaciones significativas del consumo en diferentes puntos de la misma.

De acuerdo a la revisión del estado del arte, se encontró que los métodos numéricos, requieren de un gran gasto computacional para arrojar valores fiables. Requieren del uso de software especializado y personal entrenado para su utilización.

Una ventaja del modelo propuesto es que no hay que preocuparse por la estabilidad del sistema, si la red es más compleja solo hay que tener un procesador con suficiente memoria RAM. Predice el comportamiento de la presión, con cualquier tipo de demanda, el diámetro, la composición de la mezcla, longitud de la tubería, son variables de entradas que pueden ser modificados. No presenta problemas con delta tiempo, los métodos implícitos no tienen este problema, es una gran ventaja.

## 8. BIBLIOGRAFIA

- [1] T. A. Adeosun, O. A. Olatunde, J. O. Aderohunmu, y T. O. Ogunjare, «Development of unsteady-state Weymouth equations for gas volumetric flow rate in horizontal and inclined pipes», *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, vol. 1, n.º. 4–5, pp. 113–117, nov. 2009.
- [2] de Noel y A. Day, «Packing and Drafting in Natural Gas Pipelines», *Journal of Petroleum Technology*, vol. 35, n.º. 3, mar. 1983.
- [3] S. Kumar, *Gas production engineering*, vol. 4. Gulf Professional Publishing, 1987.
- [4] M. A. Adewumi y J. A. Zhou, «Simulation of Transient Flow In Natural Gas Pipelines», in *PSIG Annual Meeting*, 1995.
- [5] H. P. Reddy, S. Narasimhan, y S. M. Bhallamudi, «Simulation and state estimation of transient flow in gas pipeline networks using a transfer function model», *Industrial & engineering chemistry research*, vol. 45, n.º. 11, pp. 3853–3863, 2006.
- [6] M. A. Adewumi y J. A. Zhou, «The Development And Testing of a New Flow Equation», in *PSIG Annual Meeting*, 1995.
- [7] A. BUITRAGO y H. QUIROGA, «FLUJO DE GAS EN TUBERIAS BAJO CONDICIONES NO ESTABLES».
- [8] G.-Y. Zhu, M. A. Henson, y L. Megan, «Dynamic modeling and linear model predictive control of gas pipeline networks», *Journal of Process Control*, vol. 11, n.º. 2, pp. 129–148, abr. 2001.
- [9] E. Tentis, D. Margaris, y D. Papanikas, «Transient gas flow simulation using an Adaptive Method of Lines», *Comptes Rendus Mecanique*, vol. 331, n.º. 7, pp. 481–487, 2003.
- [10] L. M. C. Gato y J. C. C. Henriques, «Dynamic behaviour of high-pressure natural-gas flow in pipelines», *International Journal of Heat and fluid flow*, vol. 26, n.º. 5, pp. 817–825, 2005.

- [11] H. Aalto, «Transfer Functions for Natural Gas Pipeline Systems», in *Proceedings of the IFAC 17th World Congress*, 2008.
- [12] Y. Ruan, Q. Liu, W. Zhou, B. Batty, W. Gao, J. Ren, y T. Watanabe, «A procedure to design the mainline system in natural gas networks», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 33, n<sup>o</sup>. 7, pp. 3040–3051, 2009.
- [13] M. C. Steinbach, «On PDE solution in transient optimization of gas networks», *Journal of computational and applied mathematics*, vol. 203, n<sup>o</sup>. 2, pp. 345–361, 2007.
- [14] J. D. Gjerde, *Transient Flow in Gas Transport*. Institutt for energi- og prosessteknikk, 2011.
- [15] E. Ebrahimzadeh, M. N. Shahrak, y B. Bazooyar, «Simulation of transient gas flow using the orthogonal collocation method», *Chemical Engineering Research and Design*, no. 0, mar. 2012.
- [16] Naranjo, A. Ecuaciones Para Flujo de Gas Bajo Condiciones Estables.  
Universidad Nacional de Colombia. Departamento de Recursos Mineros
- [17] Joffe, J. Storage Capacity Of Long Pipelines. Chemical Engineering.  
November 1949. 112 p
- [18] Smith, J.M Van Ness, H.C. Introducción a la Termodinámica en Ingeniería Química. México, Mac. Graw – Hill, 1989
- [19] Domínguez, F.V.El Metodo de las Lineas y sus Aplicaciones en Problemas Ingeniería de Alimentos Secado en Lechos Fluidizados.. Facultada de Ciencia y Tecnología. Diciembre 2006. 43-50 p.. Volumen 5.
- [20] Varón, Rene, Bryant, Mike. Aplicaciones Avanzadas para Asistencia en la Operación y Administración de Gasoductos. Congreso Internacional de Ductos. Mérida, Yucatán. 14 -16 de Noviembre 2001.

- [21] Menon, Shashi. E. Gas Pipeline Hydraulics. Taylor & Francis Group, 2005
- [22] Isehunwa S. O., Adesuyi E., An Analytical Model for Predicting Partial Blockage in Natural Gas Pipeline, European Journal of Scientific Research. ISSN 1450- 216X, Vol. 70 No 4 (2012), pp. 533-538.
- [23] Pamks., Erdem A. Applied Mathematics and Computation 186 (2007). pp 831-835.
- [24] Rice R.G., DO D. Applied Mathematics and Modelling for Chemical Engineers. John Wiley & Sons. Pp. 572.
- [25] Tomado de Partial Differential Equations in MATLAB 7.0. by P. Howard. Spring 2005.
- [26] WangHai, Liu Xiaojing, Zhou Weiguo. Transient Flow Simulation of Municipal Gas Pipelines and Networks Using Semi Implicit Finite Volume Method. Conference on Engineering Modelling and Simulation (CEMS 2011).
- [27] Herrán – González A., De La Cruz J.M, De Andrés-Toro B., Risco-Martín. Modeling and Simulation of a Gas Distribution Pipeline Network. Applied Mathematical Modelling. 2009.

## 9. ANEXOS

### 9.1 APENDICE A : SOLUCIÓN DE UN TRAMO DE TUBERÍA

```
function Transient (N)

global P1 f d L MN T Xi

%Grid      Time span      x-axis
N=200; tspan=linspace(0,16,50); x=(1:N)./(N+1);

%Parameters

%Weymouth equation
% P(Pa); To(k), Qo(m3/s), M(g/mol), Tin(K), Pin (Pa);
% d(m), L(m), GM(-), Z(-), K(-), f(-), PW(Pa), P0(bar);

Po=101325; To=273.15; Qo=152.78; Cw=137.24;
M=20.39; GM=M/29; Z=0.663; T=283.15; Pin=8.27E6;
d=0.508; f=0.034; L=1e4;

%Composition
Xi = [0.74; 0.21; 0.05; 0.00];

term1=((Qo*Po)/(Cw*To))^2; term2=((Z*T*GM)/(d^(16/3)));
Pw=((Pin^2)-(term1*term2*x*L)).^0.5; P0=Pw/1e5;

%Boundary conditions
M0=1.367; MN=0.5*M0; P1=82.70;

%Initial conditions
```

```

y0 = [P0; repmat(M0,1,N)];

%Solver ODEs
options = odeset ('Vectorized','on');
[t,y] = ode23(@pdes, tspan, y0,...
    options, N);

% plot(t,y(:,2*N-1),'b');
% grid on; hold on;
% title('Presión Vs. Tiempo')
% xlabel('Tiempo adimensional')
% ylabel('Presión adimensional')

s=y(2,2:2:2*N);
plot(x,s,'k');
grid on; hold on
title('Presión Vs. Distancia')
xlabel('Distancia adimensional')
ylabel('Presión adimensional')

%-----
function z=pdes(t,y,N)

global P1 f d L MN

%Intervale
hx=1/(N-1);

l(1)=1/hx; l(2)=-1; l(3)=-2/hx;
l(4)=-(f*L)/(2*d);

%preallocate
z=zeros(2*N,size(y,2));

%PDEs

%First point
i=1;

z(i,:) = -l(1)*(y(i+3,:)-y(i+1,:));

z(i+1,:) = l(1)*l(2)*(feval('FactorZ',y(i,:))./feval('FactorK',y(i,:)))+...
(y(i+1,:)./y(i,:)).^2.*(y(i,:)-P1)+...
l(3)*(y(i+1,:)./y(i,:)).*(y(i+3,:)-y(i+1,:))+...
l(4)*((y(i+1,:).^2)./y(i,:));

%Middle points

```

```

i=3:2:2*N-3;

z(i,:) = -l(1)*(y(i+3,:)-y(i+1,:));

z(i+1,:) = l(1)*l(2)*(feval('FactorZ',y(i,:))./feval('FactorK',y(i,:)))+...
(y(i+1,:)./y(i,:)).^2.*(y(i,:)-y(i-2,:))+...
l(3)*(y(i+1,:)./y(i,:)).*(y(i+3,:)-y(i+1,:))+...
l(4)*((y(i+1,:)).^2)./y(i,:);

```

```

%Final points

```

```

i=2*N-1;

z(i,:) = -l(1)*(MN-y(i+1,:));

z(i+1,:) = l(1)*l(2)*(feval('FactorZ',y(i,:))./feval('FactorK',y(i,:)))+...
(y(i+1,:)./y(i,:)).^2.*(y(i,:)-y(i-2,:))+...
l(3)*(y(i+1,:)./y(i,:)).*(MN-y(i+1,:))+...
l(4)*((y(i+1,:)).^2)./y(i,:);

```

```

function Z =FactorZ(y)

```

```

global T Xi

```

```

%Metano

```

```

M1=16.043; w1=0.012; Tc1=190.6; Pc1=45.99;

```

```

%Etano

```

```

M2=30.070; w2=0.100; Tc2=305.3; Pc2=48.72;

```

```

%Propano

```

```

M3=44.097; w3=0.152; Tc3=369.8; Pc3=42.48;

```

```

%n-Butano

```

```

M4=58.123; w4=0.200; Tc4=425.1; Pc4=37.96;

```

```

Mi = [M1; M2; M3; M4];

```

```

wi = [w1; w2; w3; w4];

```

```

Tci = [Tc1; Tc2; Tc3; Tc4];

```

```

Pci = [Pc1; Pc2; Pc3; Pc4];

```

```

R = 83.14;

```

```

alphai=(0.45724*((R*Tci).^2))./Pci; bi=(0.0778*R*Tci)./Pci;

```

```

fwi=0.3764+1.5422*wi-(0.2699*(wi.^2)); Tri=T./Tci;

```

```

aci=(1+fwi.*(1-(Tri.^0.5))).^2; ai=alphai.*aci;

```

```

am=(sum(Xi.*(ai.^0.5))).^2; bm=sum(Xi.*bi);

```

```

Am=(am.*y)/(R*T)^2; Bm=(bm.*y)/(R*T);

```

```

P1=-(1-Bm);

```

```

Q1=Am-2*Bm-(3*Bm.^2);
R1=-(Am.*Bm-(Bm.^2)-(Bm.^3));

M=Q1-((P1.^2)/3);
N=2*((P1/3).^3)-Q1.*(P1/3)+R1;
D=((M/3).^3)+((N/2).^2);

Z=(((N/2)+(D.^0.5)).^0.33)+(((N/2)-(D.^0.5)).^0.33)-(P1/3);

```

---

```
function K= FactorK(y)
```

```
global T Xi
```

```

Ao=[2.2769; 6.152; 5.88; 11.92];
Ci=[1.28E5; 2.27E2; 9.00E5; 1.22E7];
AB=[1.702; 1.131; 1.213; 1.935];
BB=[9.801; 19.225; 28.785; 36.915];
CB=[2.164; 5.561; 8.824; 11.402];

R=1.9875;

Am=sum((Ao.*Xi).^2); Cm=sum(Xi.*Ci);
C=0.2391*(((24.3724*Am)/(T^2))+((12*Cm)/(T^4)));
ABEA=sum(AB.*Xi); BBEA=(sum(BB.*Xi))*0.001;
CBEA=-((sum(CB.*Xi))*1E-6); CPO=(ABEA+(BBEA*T)+...
(CBEA*(T^2)))*1.98752; CP=CPO+(C.*y*100);

K=CP./(CP-R);

```

## 9.2 APENDICE B. RED DE GAS NATURAL EN ESTADO NO ESTABLE

clc

%Numero de nodos    x-axis dimensionless

N=200;                x=(1:N)./(N+1);

%Condiciones normales

Po=101325; To=273.15;

%Metano

X1 = 0.74; M1=16.143;

%Etano

X2 = 0.21; M2=30.070;

%Butano

X3 = 0.05; M3=44.097;

%Pentano

X4 = 0.00; M4=58.123;

%Constante gas ideal

R=0.082; Rg=8.314;

%Composicion

Xi = [X1; X2; X3; X4];

Mi = [M1; M2; M3; M4];

M = sum( Mi.\* Xi);

%-----  
%                            TRAMOS DE TUBERIA  
%-----

%Datos de entrada

T1 = 283.15; D1 = 0.508; QN1 = 152.78;    L1 = 1e4; rug = 6.17E-4;

T2 = 283.15; D2 = 0.308; QN2 = QN1\*0.375;    L2 = 1e4;

T3 = 283.15; D3 = 0.308; QN3 = QN1\*0.375; L3 = 1e4;  
T4 = 283.15; D4 = 0.308; QN4 = QN1\*0.250; L4 = 1e4;

T5 = 283.15; D5 = 0.308; QN5 = QN2\*(1-0.10); L5 = 1e4;  
T6 = 283.15; D6 = 0.308; QN6 = QN5\*(1-0.20); L6 = 1e4;  
T7 = 283.15; D7 = 0.308; QN7 = QN6\*(1-0.10); L7 = 1e4;

T8 = 283.15; D8 = 0.308; QN8 = QN3\*(1-0.15); L8 = 1e4;  
T9 = 283.15; D9 = 0.308; QN9 = QN8\*(1-0.20); L9 = 1e4;

P1=82.7;

### % Evalua el estado estacionario

[P1, Q1] = Stationary (T1, P1, QN1, N, D1, L1, Xi, Mi);  
P2 = P1(1,length(P1)); [P2, Q2] = Stationary (T2, P2, QN2, N, D2, L2, Xi, Mi);  
P3 = P1(1,length(P1)); [P3, Q3] = Stationary (T3, P3, QN3, N, D3, L3, Xi, Mi);  
P4 = P1(1,length(P1)); [P4, Q4] = Stationary (T4, P4, QN4, N, D4, L4, Xi, Mi);  
  
P5 = P2(1,length(P2)); [P5, Q5] = Stationary (T5, P5, QN5, N, D5, L5, Xi, Mi);  
P6 = P5(1,length(P5)); [P6, Q6] = Stationary (T6, P6, QN6, N, D6, L6, Xi, Mi);  
P7 = P6(1,length(P6)); [P7, Q7] = Stationary (T7, P7, QN7, N, D7, L7, Xi, Mi);  
  
P8 = P3(1,length(P3)); [P8, Q8] = Stationary (T8, P8, QN8, N, D8, L8, Xi, Mi);  
P9 = P8(1,length(P8)); [P9, Q9] = Stationary (T9, P9, QN9, N, D9, L9, Xi, Mi);

%-----

### % Evalua las condiciones de la tubería

[f1, Flujo1] = ducto(P1, T1, Xi, M, Q1, D1, rug);  
[f2, Flujo2] = ducto(P2, T2, Xi, M, Q2, D2, rug);  
[f3, Flujo3] = ducto(P3, T3, Xi, M, Q3, D3, rug);  
[f4, Flujo4] = ducto(P4, T4, Xi, M, Q4, D4, rug);  
[f5, Flujo5] = ducto(P5, T5, Xi, M, Q5, D5, rug);  
[f6, Flujo6] = ducto(P6, T6, Xi, M, Q6, D6, rug);  
[f7, Flujo7] = ducto(P7, T7, Xi, M, Q7, D7, rug);  
[f8, Flujo8] = ducto(P8, T8, Xi, M, Q8, D8, rug);  
[f9, Flujo9] = ducto(P9, T9, Xi, M, Q9, D9, rug);

### %Condiciones de frontera

M01= Flujo1; MB1=M01; PB1 = P1(1,1);  
M02= Flujo2; MB2=M02; PB2 = P2(1,1);  
M03= Flujo3; MB3=M03; PB3 = P3(1,1);  
M04= Flujo4; MB4=M04; PB4 = P4(1,1);  
M05= Flujo5; MB5=M05; PB5 = P5(1,1);  
M06= Flujo6; MB6=M06; PB6 = P6(1,1);

```

M07= Flujo7;      MB7=M07;      PB7 = P7(1,1);
M08= Flujo8;      MB8=M08;      PB8 = P8(1,1);
M09= Flujo9;      MB9=M09;      PB9 = P9(1,1);

```

```
%Evalua el estado dinamico
```

```

Y1 = Transient (N, P1, M01, PB1, MB1, f1, D1, L1, T1, Xi);
Y2 = Transient (N, P2, M02, PB2, MB2, f2, D2, L2, T2, Xi);
Y3 = Transient (N, P3, M03, PB3, MB3, f3, D3, L3, T3, Xi);
Y4 = Transient (N, P4, M04, PB4, MB4, f4, D4, L4, T4, Xi);
Y5 = Transient (N, P5, M05, PB5, MB5, f5, D5, L5, T5, Xi);
Y6 = Transient (N, P6, M06, PB6, MB6, f6, D6, L6, T6, Xi);
Y7 = Transient (N, P7, M07, PB7, MB7, f7, D7, L7, T7, Xi);
Y8 = Transient (N, P8, M08, PB8, MB8, f8, D8, L8, T8, Xi);
Y9 = Transient (N, P9, M09, PB9, MB9, f9, D9, L9, T9, Xi);

```

```

%-----
%PLOTS
%-----

```

```
h=[1 5 10 25 50];
```

```
%Primer tramo
```

```
s=Y1(h,1:2:2*N-1);
```

```
%Grafica estado dinamico
```

```
figure (1)
```

```
plot(x,s);
```

```
grid on; hold on
```

```
xlabel('Distancia adimensional')
```

```
ylabel('Presión adimensional')
```

```
title('Primer tramo. Estado Dinámico')
```

```
-----
function [f, Flujo] = ducto(P, T, Xi, M, Q, D, rug)
```

```
%Condiciones normales
```

```
Po=101325; To=273.15;
```

```
%Constantes gas ideal
```

```
R=0.082; Rg=8.314;
```

```
%Calcula presion promedio
```

```
P = mean(P);
```

```

%Calculo de funciones
Z = feval('FactorZ',P, T, Xi);
K = feval('FactorK',P, T, Xi);
vis = feval('viscosity',P, T, M, Xi);

```

```

%Calculo de parametros
ro = (P*M)/(R*T*Z); FM=Q*ro;
C = ((Rg*T)/(K*(M/1000)))^0.5;
A = (pi*(D^2))/4;

```

```

Flujo = ((FM*Z)/(Po*A))*C;
Re = (FM*D)/(vis*A);

```

```

if Re>5E5
    f = 1/(16*((log10((37*rug)/D))^2));
end

```

---

```

function K= FactorK(y, T, Xi)

```

```

Ao=[2.2769; 6.152; 5.88; 11.92];
Ci=[1.28E5; 2.27E2; 9.00E5; 1.22E7];
AB=[1.702; 1.131; 1.213; 1.935];
BB=[9.801; 19.225; 28.785; 36.915];
CB=[2.164; 5.561; 8.824; 11.402];

```

```

R=1.9875;

```

```

Am=sum((Ao.*Xi).^2); Cm=sum(Xi.*Ci);
C=0.2391*(((24.3724*Am)/(T^2))+((12*Cm)/(T^4)));
ABEA=sum(AB.*Xi); BBEA=(sum(BB.*Xi))*0.001;
CBEA=-(sum(CB.*Xi))*1E-6; CPO=(ABEA+(BBEA*T)+...
(CBEA*(T^2)))*1.98752; CP=CPO+(C.*y*100);

```

```

K=CP./(CP-R);

```

---

```

function Z =FactorZ(y, T, Xi)

```

```

%Metano
w1=0.012; Tc1=190.6; Pc1=45.99;
%Etano

```

```

w2=0.100; Tc2=305.3; Pc2=48.72;
%Propano
w3=0.152; Tc3=369.8; Pc3=42.48;
%n-Butano
w4=0.200; Tc4=425.1; Pc4=37.96;

wi = [w1; w2; w3; w4];
Tci = [Tc1; Tc2; Tc3; Tc4];
Pci = [Pc1; Pc2; Pc3; Pc4];
R = 83.14;

alphai=(0.45724*((R*Tci).^2))./Pci; bi=(0.0778*R*Tci)./Pci;
fwi=0.3764+1.5422*wi-(0.2699*(wi.^2)); Tri=T./Tci;
aci=(1+fwi.*(1-(Tri.^0.5))).^2; ai=alphai.*aci;
am=(sum(Xi.*(ai.^0.5))).^2; bm=sum(Xi.*bi);
Am=(am.*y)/((R*T)^2); Bm=(bm.*y)/(R*T);

P1=-(1-Bm);
Q1=Am-2*Bm-(3*Bm.^2);
R1=-(Am.*Bm-(Bm.^2)-(Bm.^3));

M=Q1-((P1.^2)/3);
N=2*((P1/3).^3)-Q1.*(P1/3)+R1;
D=((M/3).^3)+((N/2).^2);

Z=(((N/2)+(D.^0.5)).^0.33)+(((N/2)-(D.^0.5)).^0.33)-(P1/3);
-----

function [Pss, Qss] = Stationary (T, P, QN, N, D, L, Xi, Mi)

%Constantes
Po=101325; To=273.15; Cw=137.24;
P = P * 1E5; x=(1:N)/(N+1);

%Calculos
M = sum(Mi.*Xi); GM = M/29;

%Condiciones de iteracion
Z=1; era = 100; nit=0; maxit=30;

while era>0.00001 && nit<maxit

nit=nit+1;

Term1 = ((QN*Po)/(Cw*To)).^2;
Term2 = ((Z*T*GM)/(D^(16/3)));
Pss = ((P^2)-(Term1*Term2*x*L)).^0.5;

```

```

Pavg = mean(Pss)/1e5;

%Recalcula el factor Z
Z_new = feval('FactorZ',Pavg, T, Xi);

%Define el error
era = (abs(Z-Z_new)/Z)*100;

if era <= 0.00001
    Zss = Z_new;
end

Z = Z_new;
end

%Calcula el caudal
Qss = QN*(Po/P)*(T/To)*Zss;

%Presion de salida
Pss = Pss/1e5;

-----

function y = Transient (N, P0, M0, PB, MB, f, D, L, T, Xi)

%Time span simulation
tspan=linspace(0,16,50);

%Initial conditions
y0 = [P0; repmat(M0,1,N)];

%Solver ODEs
options = odeset ('Vectorized','on');
[t,y] = ode23(@pdes, tspan, y0,...
    options, N, PB, MB, f, D, L, T, Xi);

%-----
function z=pdes(t, y, N, PB, MB, f, D, L, T, Xi)

%Intervale
hx=1/(N-1);

l(1)=1/hx; l(2)=-1; l(3)=-2/hx;
l(4)=-((f*L)/(2*D));

%preallocate

```

```
z=zeros(2*N,size(y,2));
```

```
%PDEs
```

```
%First point
```

```
i=1;
```

```
z(i,:) = -l(1)*(y(i+3,:)-y(i+1,:));
```

```
z(i+1,:) = l(1)*l(2)*(feval('FactorZ',y(i,:), T, Xi)./feval('FactorK',y(i,:), T, Xi))+...  
    (y(i+1,:)./y(i,:)).^2).*(y(i,:)-PB)+...  
    l(3)*(y(i+1,:)./y(i,:)).*(y(i+3,:)-y(i+1,:))+...  
    l(4)*((y(i+1,:).^2)./y(i,:));
```

```
%Middle points
```

```
i=3:2:2*N-3;
```

```
z(i,:) = -l(1)*(y(i+3,:)-y(i+1,:));
```

```
z(i+1,:) = l(1)*l(2)*(feval('FactorZ',y(i,:), T, Xi)./feval('FactorK',y(i,:), T, Xi))+...  
    (y(i+1,:)./y(i,:)).^2).*(y(i,:)-y(i-2,:))+...  
    l(3)*(y(i+1,:)./y(i,:)).*(y(i+3,:)-y(i+1,:))+...  
    l(4)*((y(i+1,:).^2)./y(i,:));
```

```
%Final points
```

```
i=2*N-1;
```

```
z(i,:) = -l(1)*(MB-y(i+1,:));
```

```
z(i+1,:) = l(1)*l(2)*(feval('FactorZ',y(i,:), T, Xi)./feval('FactorK',y(i,:), T, Xi))+...  
    (y(i+1,:)./y(i,:)).^2).*(y(i,:)-y(i-2,:))+...  
    l(3)*(y(i+1,:)./y(i,:)).*(MB-y(i+1,:))+...  
    l(4)*((y(i+1,:).^2)./y(i,:));
```

---

```
function V = viscosity(y, T, M, Xi)
```

```
AVI = ((T*1.8)^1.5)*(9.379+(0.01607*M));
```

```
AV2 = (209.2 + (19.26*M)) + (T*1.8);
```

```
BV = 3.448+(986.4/(T*1.8))+ (0.01009*M);
```

```
CV = 2.447-(0.2224*BV);
```

```
AV = (AVI/AV2)*0.0001;
```

```
Z = feval('FactorZ',y, T, Xi);
```

```
ro = ((y*M)/(0.082*T*Z))/1000;
```

```
% Entrega la viscosidad en Pa.s
```

```
V = (AV*(exp(BV*(ro^CV))))/1000;
```

### 9.3 Apendice C: COMORESOR

```
function [Z, hR, sR] =FactorZ(y, T, Xi)
```

```
%Metano
```

```
w1=0.012; Tc1=190.6; Pc1=45.99;
```

```
%Etano
```

```
w2=0.100; Tc2=305.3; Pc2=48.72;
```

```
%Propano
```

```
w3=0.152; Tc3=369.8; Pc3=42.48;
```

```
%n-Butano
```

```
w4=0.200; Tc4=425.1; Pc4=37.96;
```

```
wi = [w1; w2; w3; w4];
```

```
Tci = [Tc1; Tc2; Tc3; Tc4];
```

```
Pci = [Pc1; Pc2; Pc3; Pc4];
```

```
R = 83.14;
```

```
alphai=(0.45724*((R*Tci).^2))./Pci; bi=(0.0778*R*Tci)./Pci;
```

```
fwi=0.3764+1.5422*wi-(0.2699*(wi.^2)); Tri=T./Tci;
```

```
aci=(1+fwi.*(1-(Tri.^0.5))).^2; ai=alphai.*aci;
```

```
am=(sum(Xi.*(ai.^0.5))).^2; bm=sum(Xi.*bi);
```

```
Am=(am.*y)/((R*T)^2); Bm=(bm.*y)/(R*T);
```

```
P1=-(1-Bm);
```

```
Q1=Am-2*Bm-(3*Bm.^2);
```

```
R1=-(Am.*Bm-(Bm.^2)-(Bm.^3));
```

```
M=Q1-((P1.^2)/3);
```

```
N=2*((P1/3).^3)-Q1.*(P1/3)+R1;
```

```
D=((M/3).^3)+((N/2).^2);
```

```
Z=(((N/2)+(D.^0.5)).^0.33)+(((N/2)-(D.^0.5)).^0.33)-(P1/3);
```

```

Tdiffam=-((sum(Xi.*fwi.*((alpha.*Tri).^0.5)))/(am^0.5));

hR=-R*T*0.1*(Z-1-(Am/(2*(2^0.5)*Bm))*(1-Tdiffam)*log((Z+2.4142*Bm)/(Z-0.4142*Bm)));

sR=-R*0.1*(log(Z-Bm)+(Am/(2*(2^0.5)*Bm))*(Tdiffam)*log((Z+2.4142*Bm)/(Z-0.4142*Bm)));

%-----
function [Ws, Eficiencia] = Compresor(T0, TF, P0, PF, To, Xi, FMC)

% Constantes de capacidad calorifica
%Metano
A1 = 1.702; B1 = 9.081E-3; C1 = -2.164E-6; D1 = 0;
%Etano
A2 = 1.131; B2 = 19.225E-3; C2 = -5.561E-6; D2 = 0;
%Propano
A3 = 1.213; B3 = 28.785E-3; C3 = -8.824E-6; D3 = 0;
%Butano
A4 = 1.935; B4 = 36.915E-3; C4 = -11.402E-6; D4 = 0;

%Relacion temperaturas
tau = TF/T0; R = 8.314;

Ai = [A1 A2 A3 A4];
Bi = [B1 B2 B3 B4];
Ci = [C1 C2 C3 C4];
Di = [D1 D2 D3 D4];

AM = (Ai*Xi);
BM = (Bi*Xi);
CM = (Ci*Xi);
DM = (Di*Xi);

Cpm = R*( AM + (BM/2)*T0*(tau+1) + (CM/3)*(T0^2)*(tau^2 + tau + 1) + ...
    DM/(tau*(T0^2)));

% Cambio de entalpia de gas ideal (kJ/kmol)
dH_gi = Cpm*(T0-TF)

%Cambio de entropía de un gas ideal (kJ/kmolK)
Cps = AM + (BM*T0 + ((CM*(T0^2)) + ...
    (DM/((tau^2)*(T0^2))))*((tau+1)/2)) * ((tau-1)/log(tau));

dS_gi = R * (Cps*log(tau) - log(PF/P0))

```

```
[Z1, hR1, sR1] = FactorZ(P0, T0, Xi)
[Z2, hR2, sR2] = FactorZ(PF, TF, Xi)
```

```
dH = dH_gi + hR2 - hR1
dS = dS_gi + sR2 - sR1
```

```
Sgen = FMC * dS
```

```
I = 298 * Sgen
Ws = FMC*dH
Wrev = Ws + I
Eficiencia = 1 + I/Ws;
```

```
%-----
```

## Solución

```
clc; clear all; clf
```

```
%Numero de nodos    x-axis dimensionless
N=200;              x=(1:N)./(N+1);
```

```
%Condiciones normales
Po=101325; To=273.15;
```

```
%Metano
X1 = 0.74; M1=16.143;
%Etano
X2 = 0.21; M2=30.070;
%Propano
X3 = 0.05; M3=44.097;
%Butano
X4 = 0.00; M4=58.123;
```

```
%Composicion
Xi = [X1; X2; X3; X4];
Mi = [M1; M2; M3; M4];
M = sum( Mi.* Xi);
```

```
rug = 6.17E-4;
```

```
%-----
%                TRAMOS DE TUBERIA
%-----
```

```
%Datos de entrada
T1 = 283.15; D1 = 0.508; FM1 = 131.0; L1 = 1.0e4;
```

$$T_0 = T_1; \quad T_F = 296; \quad P_0 = 70; \quad P_F = 82.7; \quad FMC = FM_1/M$$

%Sentencia de solución

[Ws, Eficiencia] = Compresor (T0, TF, P0, PF, To, Xi, FMC)

### 9. Balance de Momentos Kummar [3]

$$\begin{aligned} & \{Cambio de Energía Interna\} + \{Cambio de Energía Cinética\} \\ & + \{Cambio de Energía Potencial\} + \{Trabajo sobre el Fluido\} \\ & + \{Calor agregado al Fluido\} \\ & + \{Trabajo hecho por el Fluido sobre los Alrededores\} \\ & = \{Acumulado en \Delta t\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{Cambio de Energía Interna\} + \{Cambio de Energía Cinética\} \\ & + \{Cambio de Energía Potencial\} + \{Trabajo sobre el Fluido\} \\ & + \{Calor agregado al Fluido\} \\ & + \{Trabajo hecho por el Fluido sobre los Alrededores\} \\ & = \{Acumulado en \Delta t\} \end{aligned}$$

$$(U\Delta t) - (U\Delta t)_{x+\Delta t} + \frac{1}{2g_c} [(v^2\Delta t)_x - (v^2\Delta t)_{x+\Delta t}] + \frac{g}{g_c} [(z\Delta t)_x - (z\Delta t)_{x+\Delta x}] + (PV\Delta t)_x - (PV\Delta t)_{x+\Delta t} +$$

$$(Calor\Delta t)_x - (Calor \Delta t)_{x+\Delta t} - (w_s\Delta t)_x + (w_s\Delta t)_{x+\Delta t} = (\Delta x\rho v)^{n+1} - (\Delta x\rho v)^n$$

$$\frac{(U) - (U)_{x+\Delta t} + \frac{1}{2g_c} [(v^2)_x - (v^2)_{x+\Delta t}] + \frac{g}{g_c} [(z)_x - (z)_{x+\Delta x}] + (PV)_x - (PV)_{x+\Delta t}}{\Delta x} +$$

$$\frac{(Calor)_x - (Calor)_{x+\Delta t} - (w_s)_x + (w_s)_{x+\Delta t}}{\Delta x} = \frac{(\rho v)^{n+1} - (\rho v)^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2g_c} \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{g}{g_c} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial(PV)}{\partial x} + \frac{\partial(Calor)}{\partial x} - \frac{\partial w_s}{\partial x} = - \frac{\partial(\rho v)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial(PV)}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{T\partial S}{\partial x} + \frac{V\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{T\partial S}{\partial x} + \frac{V\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2g_c} \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{g}{g_c} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial(\text{Calor})}{\partial x} - \frac{\partial w_s}{\partial x} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}$$

$$\frac{T\partial S}{\partial x} = -\frac{\partial(\text{Calor})}{\partial x} - \frac{\partial L_w}{\partial x}$$

$$\frac{V\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2g_c} \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{g}{g_c} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial L_w}{\partial x} - \frac{\partial w_s}{\partial x} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho}{2g_c} \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\rho g}{g_c} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\rho \partial L_w}{\partial x} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho}{2g_c} \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\rho g}{g_c} \frac{\partial z}{\partial x} + \Delta P_f = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho}{2g_c} \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\rho g}{g_c} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{fL\rho v|v|}{2dg_c} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}$$

Considerando flujo horizontal y reagrupando

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho}{2g_c} \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\rho g}{g_c} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{fL\rho v|v|}{2dg_c} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = 0$$