

**DISEÑO DE UN MODELO MARKOVIANO CON ESTADOS ABSORBENTES
PARA EL COSTEO A PRIORI DE PROCESOS DE PRODUCCIÓN EN SERIE Y
SU EVALUACIÓN EN DIFERENTES ESCENARIOS PARA MEJORAR LA
TOMA DE DECISIONES.**

RICK KEEVIN ACOSTA VEGA



**UNIVERSIDAD DEL NORTE
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS
PROGRAMA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
BARRANQUILLA
2018**

**DISEÑO DE UN MODELO MARKOVIANO CON ESTADOS ABSORBENTES
PARA EL COSTEO A PRIORI DE PROCESOS DE PRODUCCIÓN EN SERIE Y
SU EVALUACIÓN EN DIFERENTES ESCENARIOS PARA MEJORAR LA
TOMA DE DECISIONES.**

RICK KEEVIN ACOSTA VEGA

**PROYECTO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO
DE MAGÍSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL**

**DIRECTOR
ING. RODRIGO BARBOSA C Ph.D.**



**UNIVERSIDAD DEL NORTE
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS
PROGRAMA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
BARRANQUILLA
2018**

NOTA DE ACEPTACIÓN

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Barranquilla, 31 de mayo de 2018

AGRADECIMIENTOS

Al Ingeniero RODRIGO BARBOSA CORREA PhD por ser el guía en el desarrollo en todo lo referente a este trabajo. “QUE DIOS LO BENDIGA”

A la ingeniera GUISELLE GARCIA PhD, Coordinadora de la maestría y Doctorado en Ingeniería Industrial de la Universidad del Norte, por su motivación y valiosa colaboración. “BENDICIONES”

A los Ingenieros ALVIN HENAO PhD Y CARLOS PATERNINA PhD por sus recomendaciones. “BENDICIONES”

A la UNIVERSIDAD DEL NORTE y a todas las personas que me apoyaron durante mi proceso de formación.

Atentamente,
RICK ACOSTA VEGA

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	10
1. TÍTULO DE PROYECTO	11
2. DESCRIPCIÓN	11
2.1 PLANTEAMIENTO DE LA PREGUNTA O PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y SU JUSTIFICACIÓN	11
3. OBJETIVOS	14
3.1 OBJETIVO GENERAL	14
3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	14
3.3 ALCANCES Y LIMITACIONES	15
4. MARCO DE REFERENCIA	16
4.1 ANTECEDENTES	16
4.2 MARCO TEÓRICO	19
4.2.1 TEORÍA DE CADENAS DE MARKOV	19
4.2.1.1. CONCEPTOS BÁSICOS	20
4.2.2.1 ESTADOS RECURRENTE Y TRANSITORIOS	25
4.2.2.2 PERIODICIDAD	35
4.2.3 DISTRIBUCIÓN LÍMITE DE UNA CADENA DE MARKOV	36
4.2.4 CADENAS DE MARKOV CON ESTADO ABSORBENTES	54
5. METODOLOGÍA PROPUESTA	62
6. FORMULACIÓN DEL MODELO	58
6.1 SUPUESTOS DEL MODELO	59
7. PARAMETRIZACIÓN DEL PROCESO	59
8. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO	60
8.1. CASOS DE APLICACIÓN	60
8.1.1 CASO PRODUCCIÓN DE GASEOSA	60
8.1.1.1 FASE I: CARACTERIZACIÓN DEL PROCESO	60

8.1.1.2 FASE II: DESARROLLO DEL DIAGRAMA Y MATRIZ DE TRANSICIÓN DEL MODELO MARKOVIANO.....	64
8.1.1.3 FASE III: EVALUACIÓN DEL IMPACTO DE LOS CAMBIOS EN LAS PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN.....	65
8.1.1.3.1 CÁLCULO DEL COSTO PROMEDIO EQUIVALENTE POR UNIDAD CONFORME OBTENIDA.....	68
8.1.1.4 FASE IV: ESCENARIOS OPTIMISTAS, INTERMEDIOS Y PESIMISTAS CON SUS RESPECTIVOS INTERVALOS DE CONFIANZA CON PROBABILIDAD $1-\alpha$ DESEADOS PARA LA TOMA DE DECISIONES.....	70
8.1.2 CASO: ENVASES DE METANOL.....	71
8.1.3 CASO: DIVISIÓN DE REFINERÍA.....	76
8.1.4 CASO: LABORATORIO RK.....	81
8.1.5 CASO: LABORATORIO QUÍMICO CLÍNICO, EXAMEN MÉDICO OCUPACIONAL PARA MANIPULACIÓN DE ALIMENTOS.....	84
8.1.6 CASO: APLICADA AL PROCESO DE FACTURACIÓN D.C.....	87
9. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	92
10. BIBLIOGRAFÍA.....	94

TABLA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 0. Matriz de Probabilidad de Transición	21
Ilustración 1. Grafo genérico modelo de Markov	58
Ilustración 2. Diagrama de flujo del proceso	61
Ilustración 3. Diagrama de flujo del proceso.....	62
Ilustración 4. Diagrama de transición del proceso de producción	64
Ilustración 5. Estados del proceso de producción	64
Ilustración 6. Matriz de transición de Markov del proceso de producción	65
Ilustración 7. Matriz de transición de Markov reagrupada	65
Ilustración 8. Matriz transitoria	66
Ilustración 9. Matriz Identidad	66
Ilustración 10. Matriz (I-N).	66

Ilustración 11. Inversa de la Matriz (I-N)	66
Ilustración 12. Matriz de estados absorbentes	67
Ilustración 13. Probabilidad de los estados absorbentes del proceso	67
Ilustración 14. N° de veces que una unidad entra y sale en el centro productivo. .	68
Ilustración 15. Matriz fundamental	69
Ilustración 16. Vector Unitario	69
Ilustración 17. Vector r	69
Ilustración 18. Costos total esperado de mover a las unidades de los estados no absorbentes.	69
Ilustración 19. Costo esperado por unidad en cada estación de trabajo	70
Ilustración 20. Escenarios con un nivel de confianza del 95% para el caso producción de gaseosa.	70
Ilustración 21. Escenarios con un nivel de confianza del 99% para el caso producción de gaseosa.	71
Ilustración 22. Estados del proceso de producción de envases.	71
Ilustración 23. Diagrama de transición del proceso de producción de envases.	72
Ilustración 24. Matriz de transición de Markov del proceso de producción de envases.	72
Ilustración 25. Matriz transitoria.	73
Ilustración 26. Inversa de la Matriz I-N.	73
Ilustración 27. Matriz de estados absorbentes.	73
Ilustración 28. Probabilidad de los estados absorbentes del proceso de producción de envases.	73
Ilustración 29. Escenarios con un nivel de confianza del 95% para el caso botellas de Metanol.	75
Ilustración 30. Escenarios con un nivel de confianza del 99% para el caso botellas de Metanol.	75
Ilustración 31. Estados del proceso de embotellado de la oleína de palma ...77	

Ilustración 32. Diagrama de transición del proceso de embotellado de la oleína de palma.....	77
Ilustración 33. Matriz de transición de Markov del proceso de embotellado de la oleína de palma.....	78
Ilustración 34. Probabilidad de los estados absorbentes del proceso de embotellado de la oleína de palma.....	78
Ilustración 35. Costos asociados al proceso de embotellado de la oleína de palma.....	78
Ilustración 36. Costos asociados al proceso de embotellado de la oleína de palma.....	79
Ilustración 37. Escenarios con un nivel de confianza del 95% para el caso refinería de aceite.....	80
Ilustración 38. Escenarios con un nivel de confianza del 99% para el caso refinería de aceite.....	80
Ilustración 39. Estados caso Laboratorio RK.....	81
Ilustración 40. Diagrama de transición caso Laboratorio RK.....	81
Ilustración 41. Matriz de transición de Markov caso Laboratorio RK.....	81
Ilustración 42. Probabilidad de los estados absorbentes del caso Laboratorio RK.....	82
Ilustración 43. Escenarios con un nivel de confianza del 95% para el caso laboratorio RK.....	82
Ilustración 44. Escenarios con un nivel de confianza del 99% para el caso laboratorio RK.....	83
Ilustración 45. Estados del caso Laboratorio químico clínico.....	83
Ilustración 46. Diagrama de transición caso Laboratorio químico clínico.....	84
Ilustración 47. Matriz de transición de Markov caso Laboratorio químico clínico.....	84
Ilustración 48. Probabilidad de los estados absorbentes del caso Laboratorio químico clínico.....	85
Ilustración 49. Costo promedio equivalente / costo de servicio conformes... 	85
Ilustración 50. Escenarios con un nivel de confianza del 95% para el caso laboratorio químico clínico.....	86

Ilustración 51. Escenarios con un nivel de confianza del 99% para el caso laboratorio químico clínico.....	86
Ilustración 52. Estados del caso D.C.....	87
Ilustración 53. Diagrama de transición caso D.C.....	88
Ilustración 54. Matriz de transición de Markov caso D.C.....	88
Ilustración 55. Probabilidad de los estados absorbentes del caso D.C.....	88
Ilustración 56. Escenarios con un nivel de confianza del 95% para el caso proceso de facturación D.C.....	91
Ilustración 57. Escenarios con un nivel de confianza del 99% para el caso proceso de facturación D.C.....	91

INTRODUCCIÓN.

El proyecto se encuentra enfocado al diseño de un modelo estocástico, el cual se centra en la aplicación de cadenas de Markov para calcular la eficiencia de una línea de producción, los costos promedios equivalentes por cada etapa y el costo promedio final. Esta aplicación nace de la necesidad de estimar a priori el costo de una tanda de producción dada, ya que, a lo largo de las últimas décadas, las empresas han venido incurriendo en costos y gastos que en su mayoría no son recuperables, debido a la obtención de porcentajes de productos no conformes.

En el trabajo se presenta un modelo de Markov con estados absorbentes con diferentes escenarios, optimista, intermedio y pesimista basándose en datos históricos y niveles de significancia con los cuales se construyen intervalos de confianza para cada probabilidad de transición en cada una de las operaciones (Estados). El modelo muestra la probabilidad de no conformidad en estado estable en las unidades producidas, las probabilidades de transición y el número promedio de visitas a cada operación antes de terminar en uno cualquiera de los estados absorbentes. En este marco, cada etapa de producción está representada por un estado en la cadena de Markov.

Se trabajará con dos estados absorbentes: (1) producto No conforme (PNC) y (2) producto Terminado conforme (PC). También se derivan varios costos previstos en cada una de las etapas del proceso.

Se muestra cómo el modelo puede ser utilizado para evaluar mediante un análisis de sensibilidad, el impacto de los cambios en las probabilidades de transición en las distintas etapas del Proceso. El modelo puede ser utilizado en cualquier Sistema de Producción con etapas secuenciales (en serie) como una herramienta para costear a priori una tanda de producción y mejorar la toma de decisiones y lograr el máximo beneficio en términos de los costos y el rendimiento del sistema.

1. TÍTULO DE PROYECTO

DISEÑO DE UN MODELO MARKOVIANO CON ESTADOS ABSORBENTES PARA EL COSTEO A PRIORI DE PROCESOS DE PRODUCCIÓN EN SERIE Y SU EVALUACIÓN EN DIFERENTES ESCENARIOS PARA MEJORAR LA TOMA DE DECISIONES.

2. DESCRIPCIÓN

2.1 PLANTEAMIENTO DE LA PREGUNTA O PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y SU JUSTIFICACIÓN

En la actualidad las industrias se desenvuelven en un entorno altamente dinámico y competitivo, por lo tanto, estas deben responder cada vez más eficiente y rápidamente a los cambios del entorno y las exigencias de los clientes, pero en muchas empresas la eficiencia y la capacidad de respuesta no es la adecuada para el mercado en el cual se encuentran.

El área de producción como parte vital de las empresas tiene como uno de sus objetivos principales responder de manera oportuna a la demanda (Everett E. Adam, 1991), punto importante para sobrevivir y destacar en el medio, brindando una mejor satisfacción a sus clientes; es importante mencionar que dentro de sus exigencias los clientes buscan productos con altos estándares de calidad, lo que conlleva a que a que el área de producción enfatice sus políticas de producción a la minimización de los costos sin descuidar la calidad del producto en las distintas etapas del sistema.

Las empresas manufactureras se constituyen, organizan y operan para satisfacer las necesidades de sus clientes. Para producir diversos productos incurren en los denominados costos de no calidad, como por ejemplo: Reprocesos, desperdicios,

devoluciones, reparaciones, reemplazos, gastos por atención de quejas y exigencias de cumplimiento de garantías, entre otros.

En este contexto, la prevalencia estadística es que las empresas manufactureras están costeadando a posteriori, con los históricos quitándole capacidad de respuesta para evaluar oportunamente diferentes escenarios para sus clientes, además que están omitiendo la estimación a priori de cantidad de productos defectuosos y su incidencia en la estructura de costos.

Por otra parte se ha determinado falta de sinceramiento en la determinación del costo de producción de las empresas en cada uno de sus elementos como la materia prima directa, mano de obra directa y costos indirectos de fabricación.

Considere entonces un sistema de producción de etapas secuenciales donde se examina cada etapa para determinar la proporción de producto conforme y no conforme. Si la unidad en proceso no cumple con las especificaciones, se toma la decisión de reprocesar o desechar el producto.

La mayoría de los modelos estudiados en la literatura se ocupan de un sistema de producción de una sola etapa. En los entornos industriales del mundo real, los productos se procesan a menudo a través de sistemas de producción en varias etapas.

El objetivo principal de esta investigación es crear y desarrollar un modelo para la estimación a priori de cantidad de productos no conformes en procesos de producción en serie (etapas secuenciales) y su efecto en la estimación del costo promedio equivalente por unidad conforme obtenida. El modelo permite evaluar con anticipación diferentes escenarios (Optimista, intermedio y pesimista), basándose en datos históricos y niveles de significancia con el fin de encontrar intervalos de confianza con parámetros estimados con una probabilidad específica $1-\alpha$, para mejorar la toma de decisiones en la línea de producción.

Para la construcción de los intervalos de confianza se realiza a partir de las probabilidades de producto conforme de cada estado del sistema de producción, se toma como escenario optimista el límite superior del intervalo, lo que indica la mejor probabilidad de producto conforme, es decir la posibilidad de lograr más de lo que

se proyecta, este escenario normalmente es el que se presenta para motivar a los inversionistas a correr el riesgo. Se presenta como escenario pesimista el límite inferior lo que muestra la menor probabilidad de obtener un producto conforme o el peor panorama de la inversión en dicho estado y como escenario intermedio, el valor promedio a partir de la probabilidad de la proporción de producto conforme, lo que sería el resultado más probable de obtener una unidad en buen estado.

Lo anterior se relaciona con la Teoría de la Utilidad: Amante al riesgo, indiferente al riesgo, indiferente al riesgo que son los tres escenarios clásicos básicos que se estilan en estos menesteres.

El modelo será validado en diferentes sistemas de producción en serie para proporcionar información detallada sobre el estado de los costos asociados al proceso y así mismo da a conocer cuáles son los aspectos que más inciden dentro de las fases de producción para que la organización concentre sus esfuerzos en mejorar el sistema a partir del control o fortalecimiento de los puntos críticos.

Cabe señalar que las Cadenas de Markov son herramientas poderosas para la toma de decisiones en entornos dinámicos probabilísticos y es importante que se garantice la validez y confiabilidad de sus parámetros para la toma de decisiones.

El planteamiento del modelo requerirá de un análisis minucioso del sistema de producción, además del uso de herramientas estadísticas, las cuales si no se emplean de manera adecuada generarán complicaciones en cuanto al diseño del modelo.

Los anteriores planteamientos, permiten formular el siguiente interrogante:

¿De qué manera la omisión de productos no conformes incide en la reasignación de costos directos e indirectos sobre las unidades conformes?

De esta pregunta general se desprenden otras que permite desglosar el problema, tales como:

- ¿Cuántas unidades se necesitan al inicio del proceso estudiado para obtener un número definido de unidades conformes del lote de producción?
- ¿Cómo se determinaría el costo unitario de un producto conforme?

- ¿Cuál sería el protocolo (procedimiento estadístico) para determinar los parámetros del proceso que permitan estimar las probabilidades de avance o de transición de las unidades en las etapas secuenciales?
- ¿Cuáles son las probabilidades de los estados absorbentes (producto conforme PN y producto no conforme PNC) en cada etapa del sistema de producción?
- ¿Qué beneficios se tendría en el sistema si se logra estimar a priori el costo promedio equivalente para una tanda de producción?

El modelo puede ser utilizado para evaluar los cambios en el rendimiento del sistema, los costos, y las cantidades causadas por: (1) los cambios en las probabilidades de transición de una fase de producción y (2) cambios en varios parámetros asociados con cada etapa de producción, tales como el tiempo medio de una etapa de transición a otra dentro del proceso estocástico o el costo mientras se encuentra en una etapa en específico.

3. OBJETIVOS:

3.1 OBJETIVO GENERAL:

Diseñar un modelo Markoviano con estados absorbentes para el costeo a priori de procesos de producción en serie y estimar el costo promedio equivalente por unidad conforme obtenida, permitiendo evaluar diferentes escenarios para mejorar la toma de decisiones.

3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Generar el modelo de Markov genérico con estados Absorbente para su aplicación en los distintos sistemas de producción con etapas secuenciales, definiendo los estados en cada uno de los procesos a estudiar.
- Caracterizar y parametrizar los procesos de producción en serie, para la definición de la proporción de producto conforme y no conforme de cada etapa,

los factores de avance de las unidades en proceso, así como la estimación de los costos y tiempos asociados a los sistemas.

- Estimar los costos directos e indirectos sobre las unidades conformes de cada etapa del proceso para calcular el costo promedio equivalente por unidad conforme obtenida.
- Determinar los escenarios optimista, intermedio y pesimista basándose en datos históricos con el fin de encontrar una región de confianza con parámetros estimados con una probabilidad específica $1-\alpha$.

3.3 ALCANCES Y LIMITACIONES

- El modelo es aplicable a cualquier sistema de producción en serie (etapas secuenciales), donde sea posible estimar la fracción de producto no conforme en cada etapa del sistema y los factores de avance entre los estados.
- Para la aplicación del modelo, se debe realizar un procedimiento para el muestreo y estimación de los parámetros, con el fin de determinar la probabilidad con que una unidad en curso se mueve de un estado a otro o se reprocese.
- La parametrización del proceso permite generar un modelo completo para estimar o calcular el costo promedio equivalente para una tanda de producción.
- Se trabajara con niveles de significancia dados por el investigador con base en el cual se construye un intervalo de confianza para cada probabilidad de transición en cada una de las operaciones (Estados) incluidos también los estados absorbentes finales.

4. MARCO DE REFERENCIA

4.1 ANTECEDENTES

Existen algunos sistemas de producción que siguen una configuración en serie. Algunos ejemplos de sistemas de producción en serie incluyen sistemas de ensamblaje electrónico y automotriz, instalaciones de fabricación de semiconductores, procesos químicos, procesamiento de alimentos, bebidas, y sistemas de embalaje.

La mayoría de la literatura que hace referencia a los sistemas de producción en serie se ha enfocado en problemas de control de la producción donde se enmarca un rendimiento al azar en cada etapa del proceso productivo, el objetivo es determinar la política de producción óptima que minimice los distintos costos de operación; el desarrollo de las tecnologías que permitan un mejor desempeño en las empresas de producción son una constante necesidad, teniendo en cuenta la exigencia y competencia en el mercado. De ahí que diversos autores evalúen los distintos problemas de control de la producción y rendimiento en cada una de las etapas de este, con el objetivo de determinar métodos de producción que reduzcan los costos operativos.

Las estrategias que giran en torno a la calidad, flexibilidad e innovación de los últimos años priorizan que los clientes son cada vez más diferentes entre sí y que, gracias a que la abundancia y la enorme competitividad de los mercados lo permiten, ejercen con independencia su derecho y su capacidad para elegir y decidir sobre lo que necesitan y lo que estos deseen adquirir. Los conceptos de fidelidad, lealtad, repetición de compra, retención del cliente adquieren importancia porque ahora lo escaso no es el producto, sino el cliente. (Montgomery, 1980); De este modo garantizar un producto idóneo que cumpla con las expectativas de los clientes es la mejor carta de presentación ante el mercado, esto sin dejar de lado los costos operativos que conllevan a la realización del producto final.

La literatura acerca de determinar los niveles óptimos de proceso de producción probablemente empezó con Springer (1951), quien consideró el problema de determinar un objetivo de proceso óptimo con límites de especificación superior e inferior especificados. Golhar (1987) desarrolló un modelo para el objetivo óptimo del proceso bajo los supuestos de que los productos que no alcanzan los resultados pueden ser reprocesados. Schmidt (1991) amplió los modelos de Golhar (1987) al considerar limitada la capacidad del proceso. Das (1995) utilizó la maximización de los beneficios esperados como criterio para seleccionar un objetivo de proceso óptimo cuando se da un límite inferior de especificación.

AlSultan (2000) propuso un modelo considerando un sistema de fabricación con dos etapas en serie para encontrar los valores objetivo óptimo con un límite de especificación más bajo y la aplicación de una política de inspección al 100%.

Chih-Hsiung Wang (2003) desarrolla un modelo matemático que representa el costo promedio esperado utilizando una cadena de Markov para determinar conjuntamente el ciclo de producción, los intervalos de inspección del proceso y el nivel de mantenimiento. Shannon R. (2004) analiza un sistema de producción con varias etapas dándole un enfoque Markoviano para niveles óptimos del proceso. Madhusudanan Pillai (2008) modela el flujo de material a través del sistema de producción como una cadena de Markov absorbente que caracteriza la incertidumbre debido al desmontaje y reproceso, además estima con precisión la cantidad de materia prima requerida.

Naoufel Cheikhrouhou (2009) presenta una comparación de los métodos clásicos de planificación y control de la producción (PPC), el método de planificación y control de la producción híbrida, Línea de Producción Única de Doble Velocidad (DSSPL), mediante el uso de un modelo Markoviano y estudio de colas de un sistema de producción de una sola etapa y dos productos, analizando el comportamiento y el comportamiento del concepto básico de DSSPL y se compara con los conceptos clásicos de MRP.

Por otro lado, otros estudios recientes acerca de procesos Markovianos Ugene A. Feinberg y Yan Liang (2017) trabajan cadenas de Markov para proporcionar

condiciones suficientes para la validez de la ecuación de optimización de costo promedio para un problema de estado infinito.

Behnamian (2017) considera un enfoque Markoviano en un problema de dimensionamiento de lotes multinivel con múltiples periodos con tiempos de preparación, retraso en la configuración e incertidumbre. Calculan el número esperado de veces asociado con la visita de cada nivel de cada producto, así como la cantidad de materias primas y desarrolla un modelo de programación lineal entero mixto con un ejemplo numérico y un análisis de sensibilidad.

Seyedshams Feyzabadi y Stefano Carpin (2017) plantean que los procesos de decisión de Markov ofrecen un método para determinar políticas para problemas de decisión estocásticos secuenciales donde se consideran simultáneamente múltiples costos. Es importante mencionar que los costos son de particular interés para la gestión de empresas que operan en un sistema de producción en serie. Tales costos esperados y las cifras a las que ascienden estos, terminan por convertirse en gastos para las empresas, al no ser identificados oportunamente. Ejemplos de estos costos son: el tiempo y el dinero invertido en el proceso por cada producto, el número de etapas de producción visitado, y el tiempo requerido por cada producto para su realización; son problemáticas que vienen afectando durante décadas a las empresas que trabajan líneas de producción sistemática.

Como se ha visto hasta el momento se han propuesto una serie de modelos en la bibliografía para determinar un objetivo de procedimiento óptimo y que la mayoría de las metodologías reportadas en la comunidad de investigación tratan de determinar el objetivo óptimo del proceso dentro de un sistema de producción de una sola etapa y muy pocos trabajos en múltiples etapas. Se sabe que los productos considerados no conformes pueden ser desechados o reprocesados, mientras que los artículos conformes pueden continuar a través del sistema.

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un modelo con un enfoque Markoviano con estados absorbentes para para el costeo a priori de procesos de producción en serie y estimar el costo promedio equivalente por unidad conforme obtenida, además el modelo permite evaluar con anticipación diferentes escenarios

optimista (se toma límite superior del intervalo de confianza), intermedio (el valor promedio) y pesimista (el límite inferior del intervalo).

.

Un modelo estocástico con estados absorbentes es generalizable y se puede aplicar a cualquier sistema de producción en serie. Esto se logra mediante el establecimiento de las probabilidades de transición apropiadas según la línea de producción específica que se implemente.

Se muestra cómo el modelo puede ser utilizado para evaluar el impacto de los cambios en las probabilidades de transición en los distintos costos previstos y las cantidades. El modelo puede ser utilizado como una herramienta de toma de decisiones para ayudar a la administración a identificar la etapa de producción que mejora, produciendo el máximo beneficio en términos de los costos y el rendimiento del sistema de producción en serie.

4.2 MARCO TEORICO

En este capítulo se brindan las bases teóricas sobre las que se soportará este trabajo, se citan de manera concisa los conceptos que le permitirán al lector entender el contenido de este trabajo. Para su elaboración se consultaron varias fuentes bibliográficas con el fin de tomar en cuenta los criterios de varios autores así como de complementar el contenido.

4.2.1 TEORÍA DE CADENAS DE MARKOV

Una clase muy importante de procesos estocásticos la constituyen los procesos de Markov. Estos tienen la característica general de que las observaciones futuras sólo dependen del presente y no del pasado.

En esta sección se analizarán las cadenas de Markov desde el punto de vista probabilístico, en donde los resultados fueron tomados del trabajo de Palafox (2009), el cual se fundamentó de las referencias de Caballero (2004), Hoel (1972) y Karlin (1975).

Se iniciará en la sección definiendo tales procesos, así como algunas de sus características. En particular, se analizará una cadena de Markov conocida como caminata aleatoria.

En las secciones posteriores se hablará de la clasificación de los estados en una cadena de Markov ya que con ello se podrá analizar el comportamiento límite del sistema, y poder concluir características y propiedades del proceso.

4.2.1.1. CONCEPTOS BÁSICOS

Sea (Ω, A, P) un espacio de probabilidad y T un conjunto no vacío, finito ó numerable. Considere una sucesión de variables aleatoria (v.a) $X_n \rightarrow T$. esto es para cada $n \in N$ y $w \in \Omega$, tenemos que $X_n(w)$ es un elemento del conjunto T . por lo que es usual decir que “el proceso se encuentra en el estado i al tiempo n ” cuando $X_n(w) = i$. El conjunto T es llamado el espacio de estados del proceso y cabe mencionar que la mayoría de las situaciones se trabaja con $T = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Definición 1.1 *Un proceso estocástico $\{X_n\}_{n \in N}$ es una cadena de Markov si satisface la ecuación,*

$$\Pr\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} = \Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\} \quad (1.1)$$

para toda $i_0, i_1, \dots, i, j \in T$ y $n \in N$.

A la condición (1.1) se le conoce como la *propiedad de Markov*. Una cadena de Markov, entonces, es una sucesión de variables aleatoria tal que para cualquier n , la distribución de X_{n+1} es condicionalmente independiente de X_0, \dots, X_{n-1} dado X_n . Las probabilidades $\Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$ son llamadas *Probabilidades de transición* en un paso para la cadena de Markov $\{X_n\}_{n \in N}$. Si las probabilidades de transición son independientes de n se dice que la *cadena de Markov es homogénea* y en este caso se denota

$$P_{ij} = \Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\} \quad (1.2)$$

para cada $i, j \in T$ y $n \in N$.

Las cantidades P_{ij} satisfacen las siguientes propiedades:

$$P_{ij} \geq 0 \text{ para toda } i, j \in T$$

$$\sum_{j \in T} P_{ij} = 1, \quad i \in T.$$

Si el espacio de estados $T = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ es finito, las probabilidades P_{ij} pueden ser representadas en una matriz cuadrada conocida como la *Matriz de Markov* o *Matriz de Probabilidad de Transición* del proceso y se denota como $P = [P_{ij}]$, esto es:

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0n} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n0} & P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

Ilustración 1. Matriz de Probabilidad de Transición

El i -ésimo renglón de P , $i=0, 1, 2, \dots, n$, es la distribución de probabilidad de X_{n+1} dado que $X_n = i$.

La distribución X_0 se le llama distribución inicial de la cadena y se denotará por $\Pr\{X_0 = i\} = \pi_0(i)$, $i \in T$. Esta satisface las siguientes propiedades:

$$\pi_0(i) \geq 0, i \in T$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_0(i) = 1.$$

La distribución conjunta de las variables aleatorias X_0, \dots, X_n se puede expresar en términos de las probabilidades de transición y la distribución inicial, lo cual se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 1.1 Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov con $i_0, i_1, \dots, i_n \in T$ y $\Pr\{X_0 = i_0\} = \pi_0(i_0)$, entonces

$$\Pr\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = \pi_0(i_0) P_{i_0, i_1} \cdots P_{i_{n-2}, i_{n-1}} P_{i_{n-1}, i_n} \quad (1.3)$$

Demostración. Palafox (2009), Se realizará por inducción. Nótese que

$$\Pr\{X_0 = i_0, X_1 = i_1\} = \Pr\{X_0 = i_0\} \Pr\{X_1 = i_1 | X_0 = i_0\} = \pi_0(i_0) P_{i_0, i_1}$$

Supóngase que (1.3) se cumple para $n-1$, es decir,

$$\Pr\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = \pi_0(i_0) P_{i_0, i_1} \dots P_{i_{n-2}, i_{n-1}}$$

Se demostrará que se cumple para n. Por definición de Probabilidad Condicional

$$\Pr\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} = \Pr\{X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\} \cdot \Pr\{X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\}.$$

Aplicando la propiedad de Markov dada en (1.1) en la expresión anterior se obtiene que $\Pr\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} = \Pr\{X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\} \cdot P_{i_{n-1}, i_n}$

Luego, por hipótesis de inducción, se obtiene que

$$\Pr\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = \pi_0(i_0) P_{i_0, i_1} \dots P_{i_{n-2}, i_{n-1}} P_{i_{n-1}, i_n}$$

Con lo anterior, se observa que la distribución conjunta está completamente definida una vez que se tiene la matriz de probabilidad de transición y la distribución inicial π_0 del proceso.

Corolario 1.2 Sea $n \in N$ y con $i_0, i_1, \dots, i_n \in T$, entonces

$$\Pr\{X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n | X_0 = i_0\} = P_{i_0, i_1} \dots P_{i_{n-1}, i_n}.$$

Demostración. Palafox (2009), Por definición de probabilidad condicional se tiene que

$$\Pr\{X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n | X_0 = i_0\} = \frac{\Pr\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\}}{\Pr\{X_0 = i_0\}}$$

Nótese que el numerador en la expresión anterior es la distribución conjunta. Por lo tanto, de la proposición 1.1 se tiene que

$$\Pr\{X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n | X_0 = i_0\} = \frac{\pi_0(i_0) P_{i_0, i_1} \dots P_{i_{n-2}, i_{n-1}} P_{i_{n-1}, i_n}}{\pi_0(i_0)} = P_{i_0, i_1} \dots P_{i_{n-1}, i_n}.$$

Definición 1.2 Dada una cadena de Markov $\{X_n\}_{n \in N}$ y probabilidades de transición (función de transición) en un paso P_{ij} , se define la **probabilidad de transición de orden n**, $n \in N$, $P_{ij}^{(n)}$, como la probabilidad de que el proceso vaya del estado i al estado j en n transiciones:

$$P_{ij}^{(n)} = \Pr\{X_{m+n} = j | X_m = i\}, \forall i, j \in T \text{ y } m \in N \quad (1.4)$$

Y

$$P_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (1.5)$$

Cuando el espacio d estados T es finito entonces se denotara $P^{(n)} = [P_{ij}^{(n)}]$ como la matriz de transición en n-pasos. A continuación se verán algunas propiedades para las probabilidades de transición de orden $n, P_{ij}^{(n)}$.

Teorema 1.3 Las probabilidades de transición de orden n satisfacen que

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj}^{(n-1)}$$

Demostración. Palafox (2009), Se tiene la siguiente cadena de igualdad:

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n)} &= \Pr\{X_n = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr\{X_n = j, X_1 = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Pr\{X_n = j, X_1 = k, X_0 = i\}}{\Pr\{X_0 = i\}} \cdot \frac{\Pr\{X_1 = k, X_0 = i\}}{\Pr\{X_1 = k, X_0 = i\}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr\{X_1 = k | X_0 = i\} \cdot \Pr\{X_n = j | X_1 = k, X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj}^{(n-1)} \end{aligned}$$

Cuando el espacio de estados T es finito, se tiene que P es la matriz de las probabilidades de transición de un paso, mientras que $P^{(n)}$ es la matriz de las probabilidades de transición de orden n. se denotará por P^n al producto n-veces de P, que significa n-factores es decir, $P^n = PPP \dots P$

Lema 1.4 El producto n-veces de P contiene en sus entradas a las probabilidades de transición de orden n, es decir, $P^{(n)} = P^n$.

Demostración. Se realizara por inducción matemática. Para $n=2$,

$P^{(2)} = [P_{ij}^{(2)}]$, donde $P_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj}$ con $i, j \in T$. De la definición de productos de matrices se tiene que

$$P^2 = PP = \left[\sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj} \right]$$

Entonces $P^{(2)} = P^2$. Ahora, supóngase que se cumple para $n-1$,

$$P^{(n-1)} = [P_{ij}^{(n-1)}] = P^{n-1}$$

Donde $P_{ij}^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj}^{(n-2)}$. Se demostrara que es válido para n -pasos, es decir que

$P^{(n)} = [P_{ij}^{(n)}] = P^n$. Por el Teorema 1.3 se cumple que

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj}^{(n-1)}$$

Así,

$$P^n = PP^{(n-1)} = P[P_{ij}^{(n-1)}] = [P_{ij}][P_{ij}^{(n-1)}] = [\sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj}^{(n-1)}] = P^{(n)}$$

Por lo tanto, en la matriz P^n se encuentran las probabilidades de transición de orden n .

Teorema 1.5 (Chapman-Kolmogorov): Para una cadena de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Con espacio de estados T y para todo $n, m \in \mathbb{N}$ y toda pareja $i, j \in T$ se cumple que

$$P_{ij}^{(n+m)} = \Pr\{X_{n+m} = j | X_0 = i\} = \sum_{k \in T} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}$$

Demostración. Palafox (2009) Se tiene que

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n+m)} &= \Pr\{X_{n+m} = j | X_0 = i\} \\ &= \frac{\Pr\{X_{n+m} = j | X_0 = i\}}{\Pr\{X_0 = i\}} \\ &= \Pr(X_{n+m} = j, \cup \{X_n = k\}, X_0 = i) \cdot \frac{1}{\Pr\{X_0 = i\}}, \text{ donde } k \in T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in T} \frac{\Pr\{X_{n+m} = j, X_n = k, X_0 = i\}}{\Pr\{X_0 = i\}} \\ &= \sum_{k \in T} \frac{\Pr\{X_{n+m} = j, X_n = k, X_0 = i\} \cdot \Pr\{X_n = k, X_0 = i\}}{\Pr\{X_0 = i\}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k \in T} \Pr\{X_{n+m} = j | X_n = k\} \cdot \Pr\{X_n = k, X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k \in T} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}$$

4.2.2 Clasificación de estados de una cadena de Markov

Se enunciarán algunas definiciones básicas para el estudio de cadenas de Markov como: estados comunicantes, estados recurrentes, transitorios, conjuntos irreducibles, entre otros. Estos conceptos serán de gran importancia en el estudio del comportamiento límite de una cadena de Markov, que también se abordará en este capítulo.

4.2.2.1 ESTADOS RECURRENTE Y TRANSITORIOS

Definición 1.3 Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados T y probabilidades de transición P_{ij} , donde $i, j \in T$. se dice que

Un estado i se comunica al estado j si existe algún entero $n \geq 0$, tal que $P_{ij}^n > 0$ y se denota $i \rightarrow j$.

- (i) Los i y j son comunicantes entre sí, si $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow i$, lo cual se denota $i \leftrightarrow j$.

Es decir que un estado i se comunica con un estado j , indica que existe probabilidad positiva de pasar del estado i al j en un número finito de pasos.

Definición 1.4 Una cadena de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es irreducible si todos sus estados son comunicantes.

Uno de los conceptos principales que se ocupa al momento de estudiar cadenas de Markov es el primer tiempo de entrada que se introducirá a continuación.

Definición 1.5 Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov, con espacio de estados T . el primer tiempo de entrada al estado i se define como

$$R_i = \inf\{n \geq 1: X_n = i\} \quad (1.6)$$

$$R_i = \infty \text{ si } X_n \neq i \text{ para todo } n > 0 \quad (1.7)$$

En el siguiente resultado se verá una ecuación que relaciona el primer tiempo de entrada con las probabilidades de transición.

Proposición 1.6 Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados T y probabilidades de transición P . entonces se cumple que

$$P_{ij}^n = \sum_{m=1}^n \Pr\{R_j = m | X_0 = i\} \cdot P_{jj}^{n-m} \text{ con } n \geq 1 \text{ y } i, j \in T.$$

Demostración. Palafox (2009), Nótese que los eventos $\{R_j = m | X_n = j\}$ con $1 \leq m \leq n$ son disjuntos y que $\{X_n = j\} = \cup_{m=1}^n \{R_j = m | X_n = j\}$. Entonces

$$\begin{aligned} P_{ij}^n &= \sum_{m=1}^n \Pr\{R_j = m, X_n = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_{m=1}^n \Pr\{R_j = m | X_0 = i\} \Pr\{X_n = j | X_0 = i, R_j = m\} \\ &= \sum_{m=1}^n \Pr\{R_j = m | X_0 = i\} \Pr\{X_n = j | X_0 = i, X_1 \neq j, \dots, X_{m-1} \neq j, X_m = j\} \\ &= \sum_{m=1}^n \Pr\{R_j = m | X_0 = i\} \cdot P_{jj}^{n-m} \end{aligned}$$

Definición 1.6 Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov, con espacio de estados T y probabilidades de transición P . Sea

$$f_{ij} = \Pr\{R_j < \infty | X_0 = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{R_j = n | X_0 = i\}, \quad i, j \in T. \quad (1.8)$$

Entonces f_{ij} denota la probabilidad de que una cadena de Markov iniciando en i vaya a un estado j en un tiempo positivo. En particular, f_{ii} denota la probabilidad de regresar al estado i .

Definición 1.7 un estado $i \in T$ se le llama

Estado recurrente si $f_{ii} = 1$

- (i) Estado **transitorio** si $f_{ii} < 1$
- (ii) Estado **absorbente** si $P_{ii} = 1$

Se puede observar en esta definición que cuando el estado es recurrente, con probabilidad uno la cadena se regresa al mismo estado, mientras que si el estado es transitorio se tiene probabilidad positiva de no regresar. Es importante señalar que no solo es de interés conocer si la cadena regresa o no al mismo estado sino también saber el número esperado de visitas, y se puede intuir que el número esperado de visitas para un estado transitorio es finito, en contraste cuando un estado es recurrente.

Definición 1.8 Sea una cadena de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con espacio de estados T . se define

- (i) El número total de visitas al estado i como

$$N(i) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\{X_n = i\}, \text{ donde } \varphi\{X_n = i\} = \begin{cases} 1, & X_n = i \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (1.9)$$

- (ii) El número esperado de visitas a j , dado el estado inicial i como

$$G_{ij} = E[N(j)|X_0 = i] \quad (1.10)$$

puesto que el evento $\{N(j) \geq 1\}$ es equivalente a $\{R_j < \infty | X_0 = i\}$, entonces

$$\Pr\{N(j) \geq 1 | X_0 = i\} = \Pr\{R_j < \infty | X_0 = i\} = f_{ij} \quad (1.11)$$

Lema 1.7 Sean $i, j \in T$, entonces se cumple que:

$$\Pr\{N(j) = 0 | X_0 = i\} = 1 - f_{ij}$$

- (i) $\Pr\{N(j) \geq m | X_0 = i\} = f_{ij} f_{jj}^{m-1}$
(ii) $\Pr\{N(j) = m | X_0 = i\} = f_{ij} f_{jj}^{m-1} (1 - f_{ij})$

Demostración. Palafox (2009) Para demostrar (i) se utilizará la expresión dada en (1.11)

$$\Pr\{N(j) = 0 | X_0 = i\} = 1 - \Pr\{N(j) \geq 1 | X_0 = i\} = 1 - f_{ij} \quad (1.12)$$

Ahora se denotará (ii). La probabilidad de que una cadena de Markov que inicio en un estado i , su primera visita al estado j sea en un tiempo m y la siguiente visita a j sea en un tiempo n más tarde, con $1 \leq m \leq n$, se puede denotar como

$$\begin{aligned} & \Pr\{X_1 \neq j, \dots, X_{m-1} \neq j, X_m = j, X_{m+1} \neq j, \dots, X_{m+n} = j | X_0 = i\} \\ &= \Pr\{X_{m+1} \neq j, \dots, X_{m+n-1} \neq j, X_{m+n} = j | X_0 = i, X_1 \neq j, \dots, X_{m-1} \neq j, X_m = j\} \\ & \quad \Pr\{X_1 \neq j, \dots, X_{m-1} \neq j, X_m = j | X_0 = i\} \\ &= \Pr\{X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j | X_0 = i\} \cdot \Pr\{X_1 \neq j, \dots, X_{m-1} \neq j, X_m = j | X_0 = i\} \\ &= \Pr\{R_j = m | X_0 = i\} \cdot \Pr\{R_j = n | X_0 = j\} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Pr\{N(j) \geq 2 | X_0 = i\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{R_j = m | X_0 = i\} \cdot \Pr\{R_j = n | X_0 = j\}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \Pr\{R_j = m | X_0 = i\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{R_j = n | X_0 = j\} = f_{ij} f_{jj}$$

De manera similar se tiene que la probabilidad de que la cadena de Markov con estado inicial i visite al estado j por primera vez en un tiempo K_1 , y la siguiente visita sea K_2 unidades después, y la tercera visita un K_3 unidades después de la segunda, y así sucesivamente la m -ésima visita sea un K_m unidades después de la $(m-1)$ -ésima visita, está dada por:

$$\Pr\{R_j = k_1 | X_0 = i\} \cdot \Pr\{R_j = k_2 | X_0 = j\} \dots \Pr\{R_j = k_m | X_0 = j\}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & \Pr\{N(j) \geq m | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \dots \sum_{k_m=1}^{\infty} \Pr\{R_j = k_1 | X_0 = i\} \dots \Pr\{R_j = k_m | X_0 = j\} \\ &= \sum_{k_1=1}^{\infty} \Pr\{R_j = k_1 | X_0 = i\} \sum_{k_2=1}^{\infty} \Pr\{R_j = k_2 | X_0 = j\} \dots \sum_{k_m=1}^{\infty} \Pr\{R_j = k_m | X_0 = j\} \\ &= f_{ij} f_{jj} \dots f_{jj} = f_{ij} f_{jj}^{m-1} \end{aligned}$$

Así de lo anterior se cumple que

$$\Pr\{N(j) \geq m | X_0 = i\} = f_{ij} f_{jj}^{m-1} \quad (1.13)$$

Para la demostración (iii), nótese que

$$\begin{aligned} \Pr\{N(j) = m | X_0 = i\} &= \Pr\{N(j) \geq m | X_0 = i\} - \Pr\{N(j) \geq m + 1 | X_0 = i\} \\ &= f_{ij} f_{jj}^{m-1} - f_{ij} f_{jj}^m = f_{ij} f_{jj}^{m-1} (1 - f_{jj}) \quad (1.14) \end{aligned}$$

Con esto queda demostrado el Lema.

En el siguiente resultado se mostrará que el número esperado de visitas a un estado puede ser expresado en términos de las probabilidades de transición.

Lema 1.8 Sea una cadena de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con espacio de estados T y matriz de transición P . se tiene que

$$G_{ij} = E[N(j) | X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n$$

Demostración. De la definición 1.8 (i) y (ii) se tiene que

$$\begin{aligned}
E[N(j)|X_0 = i] &= E \left[\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\{X_n = j\} | X_0 = i \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E[\varphi\{X_n = j\} | X_0 = i] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} Pr\{X_n = j | X_0 = i\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n
\end{aligned}$$

Proposición 1.9 Sea una cadena de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con espacio de estados T y matriz de transición P .

(a) Sea j un estado transitorio. Entonces

(i) $Pr\{N(j) < \infty | X_0 = i\} = 1$ para todo $i \in T$.

(ii) $G_{ij} = \frac{f_{ij}}{1-f_{jj}} < \infty$ para toda $i \in T$.

(b) Sea j un estado recurrente. Entonces

(i) $Pr\{N(j) = \infty | X_0 = i\} = Pr\{R_j < \infty | X_0 = i\} = f_{ij}, i \in T$

(ii) $Pr\{N(j) = \infty | X_0 = j\} = 1$ y $G_{ij} = \infty$.

(iii) Si $f_{ij} = 0$, entonces $G_{ij} = 0$, mientras que si $f_{ij} > 0$, entonces $G_{ij} = \infty$.

Si j es un estado transitorio, entonces no importa donde inicia la cadena, con probabilidad uno el número de visitas al estado j es finito, y el número esperado de visitas también es finito. Por el contrario, si j es recurrente con probabilidad uno la cadena regresa al estado j una infinidad de veces.

Demostración. Palafox (2009), (a) Suponga que j es un estado transitorio. Entonces, $0 \leq f_{ij} \leq 1$. se sigue de (1.13) que

$$Pr\{N(j) = \infty | X_0 = i\} = \lim_{m \rightarrow \infty} Pr\{N(j) \geq m | X_0 = i\} = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{ij} f_{jj}^{m-1} = 0$$

Lo cual implica que

$$Pr\{N(j) < \infty | X_0 = i\} = 1$$

De la definición 1.8, G_{ij} representa el número esperado de visitas al estado j si $X_0 = i$,

$$G_{ij} = E[N(j) | X_0 = i]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} m \Pr\{N(j) = m | X_0 = i\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m f_{ij} f_{jj}^{m-1} (1 - f_{jj}) \\
&= f_{ij} (1 - f_{jj}) \sum_{m=1}^{\infty} m f_{jj}^{m-1}
\end{aligned}$$

Donde la tercera igualdad se sigue de (1.14). Luego sustituyendo $t = f_{jj}$ en la serie de potencias

$$\sum_{m=1}^{\infty} m t^{m-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

Se tiene que,

$$G_{ij} = f_{ij} (1 - f_{jj}) \frac{1}{(1 - f_{jj})^2} = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}}$$

Por lo tanto,

$$G_{ij} = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} < \infty$$

(b) Ahora sea j un estado recurrente. Entonces $f_{jj} = 1$ y de (1.13) se obtiene que

$$\Pr\{N(j) = \infty | X_0 = i\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \Pr\{N(j) \geq m | X_0 = i\} = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{ij} f_{jj}^{m-1} = f_{ij}$$

En particular si $i=j$, $\Pr\{N(j) = \infty | X_0 = i\} = 1$. si una variable aleatoria no negativa tiene probabilidad positiva de ser infinita, su esperanza es finita. Entonces,

$$G_{jj} = E[N(j) | X_0 = j] = \infty$$

Si $f_{ij} = 0$ entonces $\Pr\{R_j = m | X_0 = i\} = 0$ para todos los enteros positivos m . Así, por la proposición 1.6 se tiene que

$$P_{ij}^n = \sum_{m=1}^n \Pr\{R_j = m | X_0 = i\} P_{jj}^{n-m} \text{ con } n \geq 1 \text{ y } i, j \in T.$$

por tanto

$$P_{ij}^n = \sum_{m=1}^n 0 = 0$$

Entonces por el lema 1.8,

$$G_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n = 0$$

Ahora, si $f_{ij} > 0$ entonces $Pr\{N(j) = \infty | X_0 = i\} = f_{ij} > 0$ y por tanto $G_{ij} = E[N(j) | X_0 = i] = \infty$.

Proposición 1.10 Sea i un estado recurrente tal que i se comunica con j , entonces j es recurrente y $f_{ij} = f_{ji} = 1$.

La proposición anterior implica que la probabilidad de ser recurrente en una propiedad de clase, es decir, en una cadena irreducible, si un estado es recurrente entonces todos los estados son recurrentes.

Demostración. Palafox (2009), Supóngase que $i \neq j$, pues caso contrario no hay nada que demostrar. Puesto que $i \rightarrow j$

$$Pr\{R_j < \infty | X_0 = i\} = f_{ij} > 0,$$

Entonces se verá que

$$Pr\{R_j = n | X_0 = i\} > 0$$

Para algún entero positivo n . Sea

$$n_0 = \min\{n \geq 1: Pr\{R_j = n | X_0 = i\} = 0\}$$

Se sigue de lo anterior y de la proposición 1.6 que $P_{ij}^{n_0} > 0$ y

$$P_{ij}^m = 0, \quad 1 \leq m \leq n_0 \quad (1.15)$$

Como $P_{ij}^{n_0} > 0$, entonces existen estados $j_1, \dots, j_{n_0-1} > 0$ tales que

$$Pr\{X_1 = j_1, \dots, X_{n_0-1} = j_{n_0-1}, X_{n_0} = j | X_0 = i\} = P_{ij_1} \dots P_{j_{n_0-1}j} > 0$$

Ninguno de los estados j_1, \dots, j_{n_0-1} es igual a i o j , pues si fueran iguales existiría probabilidad positiva de ir de i a j en menos de n_0 pasos, lo que contradice a (1.15). Se demostrará por contradicción que $f_{ji} = 1$, es decir suponemos que $f_{ji} < 1$. Entonces una cadena de Markov que comienza en j tiene probabilidad positiva $1-f_{ji}$ de nunca alcanzar el estado i . Más aun, una cadena de Markov que comienza en i tiene la probabilidad positiva de visitar los estados j_1, \dots, j_{n_0-1} , j sucesivamente en las primeras n_0 transiciones y nunca regresar a i después de ese tiempo. Entonces

$$\begin{aligned} & Pr\{X_1 = j_1, \dots, X_{n_0-1} = j_{n_0-1}, X_{n_0} = j, X_{n_0+k} \neq i \forall k \geq 1 | X_0 = i\} \\ &= Pr\{X_{n_0+k} \neq i \forall k \geq 1 | X_0 = i, X_1 = j_1, \dots, X_{n_0-1} = j_{n_0-1}, X_{n_0} = j\}. \\ & \quad Pr\{X_1 = j_1, \dots, X_{n_0-1} = j_{n_0-1}, X_{n_0} = j | X_0 = i\} \\ &= Pr\{R_j = \infty | X_0 = j\} \cdot Pr\{X_1 = j_1, \dots, X_{n_0-1} = j_{n_0-1}, X_{n_0} = j | X_0 = i\} \\ & \quad = P_{ij_1} \dots P_{j_{n_0-1}j} (1 - f_{ji}) > 0 \end{aligned}$$

Si lo anterior sucede, la cadena de Markov nunca regresa a i para cualquier $n \geq 1$, lo cual es una contradicción pues se supone que i es recurrente, por lo tanto $f_{ji} = 1$. Entonces, existe un entero positivo n_1 tal que $P_{ji}^{n_1} > 0$

Ahora,

$$\begin{aligned} P_{jj}^{n_1+n+n_0} &= Pr\{X_{n_1+n+n_0} = j | X_0 = j\} \geq Pr\{X_{n_1} = i, X_{n_1+n} = i, X_{n_1+n+n_0} = j | X_0 = j\} \\ &= P_{ji}^{n_1} P_{ii}^n P_{ij}^{n_0} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} G_{jj} &\geq \sum_{n=n_1+1+n_0}^{\infty} P_{jj}^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{n_1+n+n_0} \geq P_{ji}^{n_1} P_{ij}^{n_0} \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^n \\ &= P_{ji}^{n_1} P_{ij}^{n_0} G_{jj} = \infty, \end{aligned}$$

Lo cual indica que j es un estado recurrente. Puesto que j es recurrente y como j se comunica con i entonces por la primera parte de la demostración se tiene que

$$f_{ij} = 1.$$

Definición 1.9 Una cadena de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es llamada una **cadena de tránsito** si todos sus estados son transitorios y una **cadena recurrente** si todos sus estados son recurrentes.

Lema 1.11 En una cadena de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con espacio de estados T finito existe al menos un estado recurrente y por lo tanto no puede ser una cadena de tránsito.

Demostración. Palafox (2009), Nótese que si j es un estado transitorio, del lema 1.8 y de la proposición 1.9a (ii), se tiene que

$$G_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n < \infty \text{ para } i \in T.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n = 0, i \in T \quad (1.16)$$

Supóngase que todos los estados son transitorios. Puesto que T es finito y de (1.16) se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \in T} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in T} P_{ij}^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1, \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto no todos los estados son transitorios.

Corolario 1.12 si la cadena de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es irreducible, entonces todos los estados son recurrentes o todos son transitorios.

Demostración. Palafox (2009), Sea j un estado recurrente, entonces por ser la cadena irreducible los estados i y j son comunicantes ($i \leftrightarrow j$). Luego por la proposición 1.10 se tiene que i es un estado recurrente.

Ahora sea j un estado transitorio y suponga que i es un estado recurrente. Además ($i \leftrightarrow j$), de la proposición 1.10, se tiene que j es un estado recurrente lo cual es una contradicción. Por lo tanto i es necesariamente un estado transitorio.

Corolario 1.13 Si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cadena de Markov irreducible con un número finito de estados, entonces cada estado es recurrente.

Demostración. Palafox (2009), Del lema 1.11 se tiene que existe al menos un estado i recurrente. Entonces por el corolario anterior todos los estados son recurrentes.

Sean i, j estados de la cadena, entonces por hipótesis todos los estados se comunican y, del lema 1.11, existe al menos un estado i recurrente. Como i se comunica con j , por la proposición 1.10 tenemos que j es recurrente. De manera similar se realiza para cada uno de los estados, por lo tanto cada estado es recurrente.

Entonces una cadena de Markov irreducible con un número finito de estados no puede ser transitoria.

Definición 1.10 Sea i un estado recurrente de una cadena de Markov. El **tiempo medio de retorno** se define como,

$$m_i = E\{R_j | X_0 = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^n$$

Es importante mencionar que el tiempo medio de retorno a un estado puede ser infinito, aún cuando este sea recurrente. Por lo que a partir de esto, los estados recurrentes son clasificados como se muestra a continuación.

Definición 1.11 A un estado recurrente i se le llama:

- (i) **Recurrente nulo** si $m_i = \infty$.
- (ii) **Recurrente positivo** si $m_i < \infty$.

Definición 1.12 una cadena de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es llamada:

Cadena Recurrente Nula si cada uno de los estados son recurrentes nulos.

- (i) Cadena Recurrente Positiva si cada estado es recurrente positivo.

Hasta aquí se ha hablado de estados recurrentes y transitorios, del número de visitas esperado, del tiempo que tarda en regresar la cadena a un estado, entre otros. Ahora, se verá en cuantos pasos la cadena regresa a un estado dado que ya estuvo en él.

4.2.2.2 PERIODICIDAD.

Otra de las características importantes para el estudio de las cadenas de Markov es la periodicidad de los estados.

Definición 1.13 se define el **período** $d(i)$ de un estado i como el máximo común divisor de todos los enteros $n \geq 1$ tal que $P_{ii}^n > 0$, y se denota como

$$d(i) = m. c. d\{n \geq 1: P_{ii}^n > 0\}$$

Si $d(i) > 1$ se dice que i es un estado periódico con período $d(i)$. Mientras que si $d(i) = 1$, se dice que i es **Aperiódico**.

Proposición 1.14 sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacios en estados T y matriz de transición P . Si $i, j \in T$ son comunicantes ($i \leftrightarrow j$) entonces $d(i) = d(j)$.

Demostración. Palafox (2009), Si $i \leftrightarrow j$, existen n_1 y n_2 enteros positivos tales que

$$P_{ij}^{n_1} > 0 \text{ y } P_{ji}^{n_2} > 0$$

Entonces

$$P_{ii}^{n_1+n_2} \geq P_{ij}^{n_1} P_{ji}^{n_2} > 0.$$

Como $d(i) = m. c. d\{n \geq 1: P_{ii}^n > 0\}$, se tiene que $d(i)$ es un divisor de $n_1 + n_2$.

Si $P_{jj}^n > 0$, entonces

$$P_{ii}^{n_1+n+n_2} \geq P_{ij}^{n_1} P_{jj}^n P_{ji}^{n_2} > 0.$$

Así $d(i)$ es divisor de $n_1 + n + n_2$, y como $d(i)$ también es divisor de $n_1 + n_2$ entonces $d(i)$ es divisor de n . Por lo tanto $d(i)$ es divisor de todos los números en el conjunto $\{n \geq 1: P_{jj}^n > 0\}$. Pero como $d(j)$ es el *m. c. d* del mismo conjunto, entonces se concluye que $d(i) \leq d(j)$. De manera análoga se cumple que

$$d(j) \leq d(i),$$

Por tanto

$$d(i) = d(j).$$

Entonces el período es una propiedad de clase, es decir, en una cadena irreducible, todos los estados tienen el mismo periodo.

4.2.3 Distribución límite de una cadena de Markov

La parte central de esta sección es el estudio del comportamiento límite de cadenas de Markov. Estos son, para cada par de estados i, j se desea encontrar condiciones para la existencia de límites de la forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n = \pi(j) \quad (1.18)$$

Y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^k = \pi(j). \quad (1.19)$$

Donde π es una distribución.

El límite (1.18) se cumple bajo condiciones muy restrictivas, en cambio, el límite (1.19) siempre existe como se verá en esta sección.

Para el estudio de estos límites se introducirán los siguientes conceptos.

Definición 1.14 sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacios de estados T y probabilidades de transición. $P_{ij}, i, j \in T$.

Una distribución de probabilidad $\pi(i)$ es una **distribución estacionaria o distribución invariante** para la cadena de Markov si $\pi P = \pi$, es decir

$$\sum_i \pi(i) P_{ij} = \pi(j), \quad j \in T. \quad (1.20)$$

(ii) Una distribución de probabilidad π es una **distribución límite** si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n = \pi(j), \quad \text{para todo } i, j \in T. \quad (1.21)$$

Proposición 1.15 Si π es una distribución estacionaria entonces se cumple que

$$\sum_i \pi(i) P_{ij}^{(n)} = \pi(j), \quad j \in T.$$

Demostración. Palafox (2009), Se hará por inducción matemática. Sea π una distribución estacionaria. Entonces,

$$\sum_i \pi(i) P_{ij}^{(2)} = \sum_i \pi(i) \sum_k P_{ik} P_{kj}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_k \left(\sum_i \pi(i) P_{ik} \right) P_{kj} \\
&= \sum_k \pi(k) P_{kj} = \pi(j), \quad j \in T.
\end{aligned}$$

Se supone para n ,

$$\sum_i \pi(i) P_{ij}^{(n)} = \pi(j).$$

Y se demuestra para $n + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_i \pi(i) P_{ij}^{(n+1)} &= \sum_i \pi(i) \sum_k P_{ik}^{(n)} P_{kj} \\
&= \sum_k \left(\sum_i \pi(i) P_{ik}^{(n)} \right) P_{kj} \\
&= \sum_k \pi(k) P_{kj} \\
&= \pi(j), \quad j \in T.
\end{aligned}$$

El nombre de distribución invariante se debe a que si la distribución inicial π_0 de la cadena es invariante entonces la distribución de X_n es π_0 para todo $n = 0, 1, \dots$, es decir π_0 - invariante implica $P_r\{X_n = j\} = \pi_0(j)$ con $j \in T$, para toda $n \geq 0$.

Proposición 1.16 Si la distribución inicial π_0 es estacionaria entonces,

$$P_r\{X_n = j\} = \pi_0(j), \quad j \in T.$$

Demostración. Palafox (2009), Sea π_0 una distribución inicial y estacionaria. Entonces,

$$\begin{aligned}
P_r\{X_n = j\} &= \sum_i P_r\{X_0 = i, X_n = j\} \\
&= \sum_i P_r\{X_0 = i\} \cdot P_r\{X_n = j | X_0 = i\} \\
&= \sum_i \pi_0(i) P_{ij}^{(n)} = \pi_0(j).
\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de la proposición anterior.

A continuación se introduce la notación para el número total de visitas y el número esperado de visitas de la cadena a un estado al tiempo n .

Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov para cada $n = 1, 2, \dots$, sea $N_n(j)$ el número total de visitas de la cadena al estado j hasta el tiempo n ,

$$N_n(j) = \sum_{m=1}^n \varphi\{X_m = j\}.$$

Nótese que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(j) = N(j),$$

Con $N(j)$ como en la Definición 1.8 (i).

Sea G_{ij}^n el número esperado de visitas al estado j hasta el tiempo n , dado que $X_0 = i$,

$$G_{ij}^n = E\{N_n(j) | X_0 = i\} = \sum_{m=1}^n P_{ij}^m.$$

Proposición 1.17 Sea j un estado transitorio. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(j)}{n} = 0 \text{ con probabilidad 1}$$

Y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{ij}^n}{n} = 0, \quad i \in T.$$

Obsérvese que $N_n(j)/n$ es la proporción de veces que la cadena está en el estado j en las primeras n – transiciones, y $G_{ij}^n/n = \sum_{k=0}^n P_{ij}^k/n$ es el valor esperado de esta proporción cuando la cadena inicia en el estado i .

Demostración. Palafox (2009), Sea j un estado transitorio, entonces de la proposición 1.9a (i) se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(j) = N(j) < \infty \text{ con probabilidad 1.}$$

Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(j)}{n} = 0 \text{ con probabilidad } 1.$$

De la proposición 1.9a (ii), $G_{ij} < \infty$ para todo $i \in T$, cuando j es transitorio.

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{ij}^n = G_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^n < \infty, \quad i \in T.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{ij}^n}{n} = 0, \quad i \in T.$$

Proposición 1.18 Sea j un estado recurrente. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(j)}{n} = \frac{\varphi_{\{R_j < \infty\}}}{m_j} \quad \text{con probabilidad } 1 \quad (1.22)$$

Y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{ij}^n}{n} = \frac{f_{ij}}{m_j}, \quad i \in T. \quad (1.23)$$

Si $m_j = \infty$ el lado derecho de las igualdades es igual a cero.

Demostración. Palafox (2009), Considérese una cadena de Markov que inicia en un estado recurrente j . Con probabilidad 1, la cadena regresa a j una infinidad de veces. Esta propiedad nos garantiza que la variable aleatoria R_j^k , que representa el tiempo de la k – esima visita al estado j , es finita con probabilidad 1. Es decir,

$$P_r\{R_j^k < \infty\} = 1.$$

Ahora se definen las variables aleatorias

$$W_j^1 = R_j^1 \text{ y } W_j^k = R_j^k - R_j^{k-1}, \text{ para } k \geq 2.$$

Nótese que W_j^k representa el tiempo de espera entre la $(k - 1)$ y k -ésima visita al estado j .

Entonces se cumple

$$R_j^k = W_j^1 + \dots + W_j^k.$$

Las variables aleatorias W_j^1, W_j^2, \dots son independientes e idénticamente distribuidas (Hoel 1972) y por tanto tienen media común

$$E\{W_j^1 | X_n = j\} = E\{R_j^1 | X_n = j\}mj.$$

Luego, por la Ley de los Grandes Números se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_j^1 + \dots + W_j^n}{n} = mj \text{ con probabilidad } 1,$$

Esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_j^n}{n} = mj \text{ con probabilidad } 1. \quad (1.24)$$

Sea $k = N_n(j)$, el número de visitas al estado j en las primeras n transiciones. Entonces la k -ésima visita a j ocurre antes del tiempo n y la $(k + 1)$ -ésima visita a j ocurre después del tiempo n ; esto es,

$$R_j^{N_n(j)} \leq n < R_j^{N_n(j)+1},$$

Por lo tanto

$$\frac{R_j^{N_n(j)}}{N_n(j)} \leq \frac{n}{N_n(j)} < \frac{R_j^{N_n(j)+1}}{N_n(j)}. \quad (1.25)$$

Puesto que j es un estado recurrente se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(j) = \infty \text{ con probabilidad } 1.$$

Luego de (1.24) y de la desigualdad dada en (1.25) se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{N_n(j)} = m_j \text{ con probabilidad } 1.$$

Equivalente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(j)}{n} = \frac{1}{m_j} \text{ con probabilidad } 1.$$

Cuando X_0 tiene distribución arbitraria, la cadena puede no alcanzar al estado j , pero si lo alcanza, el argumento anterior también es válido, y por lo tanto

$$\frac{N_n(j)}{n} \rightarrow \frac{\varphi_{\{R_j < \infty\}}}{m_j}, \text{ con probabilidad } 1, \text{ donde } n \rightarrow \infty \quad (1.26)$$

Y con esto queda demostrado (1.22).

Por otra parte como $0 \leq N_n(j) \leq n$, se tiene que

$$0 \leq \frac{N_n(j)}{n} \leq 1. \quad (1.27)$$

El teorema de convergencia dominada, permite concluir en (1.26) y (1.27) que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{N_n(j)}{n} \mid X_0 = i\right) &= E\left(\frac{\varphi_{\{R_j < \infty\}}}{m_j} \mid X_0 = i\right) \\ &= \frac{P_r\{R_j < \infty \mid X_0 = i\}}{m_j} \\ &= \frac{f_{ij}}{m_j}. \end{aligned}$$

Recuerde que

$$G_{ij}^n = E\{N_n(j)|X_0 = i\} = \sum_{m=1}^n P_{ij}^m.$$

Representa el número esperado de visitas al estado j hasta el tiempo n , dado $X_0 = i$.

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{ij}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^k$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{G_{ij}^n}{n} \middle| X_0 = i\right) \\ = \frac{f_{ij}}{m_j}. \end{aligned}$$

Con esto queda demostrado (1.23).

Corolario 1.19

De la proposición anterior puede observar que cuando un estado j es

(i) Recurrente nulo, es decir $1/m_j = 0$, se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{ij}^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^k = 0, i \in T.$$

(ii) Recurrente Positivo, es decir $1/m_j > 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{jj}^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{jj}^k = \frac{1}{m_j} > 0.$$

De la Proposición 1.18 y corolario 1.19, se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^k$ siempre existe y satisface, para cada $i \in T$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^k = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ si } j \text{ transitorio o recurrente nulo,} \\ \frac{1}{m_j}, \text{ si } i = j, j \text{ recurrente positivo,} \\ \frac{f_{ij}}{m_j}, \text{ si } j \text{ es recurrente.} \end{array} \right\}$$

Proposición 1.20

Sea i un estado recurrente positivo y suponga que i se comunica con j . entonces j es un estado recurrente positivo.

Demostración. Palafox (2009), Se sigue de la Proposición 1.10 que j se comunica con i , con $i \in T$. Entonces existen enteros positivos n_1 y n_2 tal que

$$P_{ij}^{n_1} > 0 \text{ y } P_{ji}^{n_2} > 0.$$

Del teorema de Chapman-Kolmogorov se obtiene que

$$P_{jj}^{n_1+m+n_2} \geq P_{ji}^{n_2} P_{ii}^m P_{ij}^{n_1}.$$

Sumando sobre $m = 1, \dots, n$ y dividiendo n , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P_{jj}^{n_1+m+n_2} &\geq \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P_{ji}^{n_2} P_{ii}^m P_{ij}^{n_1} \\ \sum_{m=1}^{n_1+m+n_2} \frac{P_{jj}^m}{n} - \sum_{m=n_1+m+n_2}^{n_1+n_2} \frac{P_{jj}^m}{n} &\geq P_{ji}^{n_2} P_{ij}^{n_1} \sum_{m=1}^n \frac{P_{ii}^m}{n} \\ \frac{G_{jj}^{n_1+n+n_2}}{n} - \frac{G_{jj}^{n_1+n_2}}{n} &\geq P_{ji}^{n_2} P_{ij}^{n_1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P_{ii}^m \\ &= P_{ji}^{n_2} P_{ij}^{n_1} \frac{G_{ii}^n}{n}. \end{aligned}$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, del corolario 1.19 (ii) tenemos que la desigualdad anterior converge

a

$$\frac{1}{m_j} \geq \frac{P_{ji}^{n_2} P_{ij}^{n_1}}{m_i} > 0,$$

Y consecuentemente $m_j < \infty$. esto demuestra que j es recurrente positivo.

De la Proposición 1.10 y del corolario 1.12 se observa que si la cadena es irreducible, entonces cada estado se comunica, es decir, cada estado es recurrente nulo o recurrente positivo.

Proposición 1.21 Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacios de estado T finito, entonces se tiene al menos un estado recurrente positivo.

Demostración. Palafox (2009), Nótese que para cada $m = 1, 2, \dots$, se cumple que

$$\sum_{j \in T} P_{ij}^m = 1, i \in T.$$

Sumando sobre $m = 1, \dots, n$ y dividiendo por n se tiene que

$$\sum_{m=1}^n \sum_{j \in T} \frac{1}{n} P_{ij}^m = \sum_{j \in T} \frac{G_{ij}^n}{n} = 1, i \in T.$$

Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in T} \frac{G_{ij}^n}{n} = 1, i \in T$$

Por otra parte si cada estado es transitorio o recurrente nulo entonces por el Corolario 1.19 (i) se tiene que

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in T} \frac{G_{ij}^n}{n} = \sum_{j \in T} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{ij}^n}{n} = 0, i \in T.$$

Esto es una contradicción, por lo tanto se tiene al menos un estado recurrente positivo.

Corolario 1.22 Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov finita e irreducible. Entonces cada estado es recurrente positivo.

Demostración. Puesto que la cadena es finita se tiene al menos un estado recurrente positivo, entonces existe al menos un estado recurrente positivo. Como $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es irreducible, de la Proposición 1.20 tenemos que cada estado es recurrente positivo.

Corolario 1.23 Una cadena de Markov irreducible con un número finito de estados es recurrente positivo.

Corolario 1.24 una cadena de Markov con un número finito de estados no tiene estados recurrentes nulos.

Proposición 1.25 Sea π una distribución estacionaria. Si j es un estado transitorio o recurrente nulo entonces $\pi(j) = 0$.

Demostración. Palafox (2009), Si j es un estado transitorio o recurrente nulo. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{ij}^n}{n} = 0, j \in T.$$

Sea π una distribución estacionaria. Por la Proposición 1.15 se tiene que

$$\sum_i \pi(i) P_{ij}^k = \pi(j), k \geq 1. \quad (1.28)$$

Sumando $k = 1, \dots, n$ y dividido por n , se obtiene que

$$\sum_i \pi(i) \frac{G_{ij}^n}{n} = \pi(j), j \in T. \quad (1.29)$$

Se sigue de (1.28), (1.29) y del teorema de convergencia Acotada que

$$\pi(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \pi(i) \frac{G_{ij}^n}{n} = 0.$$

Por lo tanto, $\pi(j) = 0$

En consecuencia, una cadena de Markov que no tenga estados recurrentes positivos no tendrá distribución estacionaria.

Proposición 1.26 Una cadena de Markov $X_n, n \geq 0$ irreducible y recurrente positiva tiene una única distribución estacionaria π , dada por

$$\pi(j) = \frac{1}{m_j}, j \in T.$$

Demostración. Palafox (2009), Se sigue de la Proposición 1.18 y de la hipótesis de esta proposición que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{ij}^n}{n} = \frac{1}{m_j}, i, j \in T. \quad (1.30)$$

Suponga π es una distribución estacionaria. De (1.29), (1.30) y del Teorema de Convergencia Acotada se tiene que

$$\begin{aligned} \pi(j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \pi(i) \frac{G_{ij}^n}{n} \\ &= \frac{1}{m_j} \sum_i \pi(i) = \frac{1}{m_j}. \end{aligned}$$

Entonces si existe una distribución estacionaria debe estar dada por $\pi(j) = 1/m_j, j \in T$.

Para completar la demostración falta ver que $\pi(j) = 1/m_j, j \in T$. es una distribución estacionaria. Puesto que j es recurrente positivo, se tiene que $m_j \geq \infty$, entonces $\pi(j) > 0$. falta verificar que

$$\sum_j \frac{1}{m_j} = 1$$

Y que

$$\sum_j \frac{1}{m_j} P_{jk} = \frac{1}{m_k}, k \in T.$$

Obsérvese que

$$\sum_j P_{ij}^m = 1.$$

Sumando $m = 1, \dots, n$ y dividiendo entre n la expresión anterior, se puede concluir que

$$\sum_j \frac{G_{ij}^n}{n} = 1, k \in T.$$

Por el Teorema de Chapman-Kolmogorov se obtiene que

$$\sum_j P_{ij}^m P_{jk} = P_{ik}^{m+1}.$$

Nuevamente, sumando $m = 1, \dots, n$ y dividiendo por n la última expresión, se tiene que

$$\sum_j \frac{G_{ij}^n}{n} P_{jk} = \frac{G_{ik}^{n+1}}{n} - \frac{P_{ik}}{n} \quad (1.34)$$

Si T es finito, se tiene de (1.30) y de (1.33) que

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j \frac{G_{ij}^n}{n} = \sum_j \frac{1}{m_j},$$

Entonces se cumple (1.31). Ahora al tomar limite en (1.34) cuando $n \rightarrow \infty$ se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in T} \frac{1}{m_i} P_{ij} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in T} \frac{G_{ki}^n}{n} P_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{kj}^{n+1}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{kj}}{n} = \frac{1}{m_j}. \end{aligned}$$

Por lo tanto (1.32) se cumple. Entonces π es una distribución estacionaria cuando el espacio de estados finito.

Ahora se verá el caso donde T es infinito ya que la argumentación anterior no es adecuada pues en general, el Teorema de la Convergencia Dominada no es aplicable. Sea T_1 Un subconjunto finito de T . De (1.33) se tiene que

$$\sum_{j \in T_1} \frac{G_{ij}^n}{n} \leq 1, i \in T.$$

Puesto que T_1 es finito, cuando $n \rightarrow \infty$ en la última desigualdad y por (1.30), se tiene que

$$\sum_{j \in T_1} \frac{1}{m_j} \leq 1$$

La cual se cumple para cualquier subconjunto finito T_1 de T . Por lo tanto

$$\sum_{j \in T} \frac{1}{m_j} \leq 1, \quad (1.35)$$

Ya que de lo contrario la suma sobre algún conjunto finito T_1 de T también excederá a uno.

Similarmente se concluye de (1.35) que si T_1 es un subconjunto finito de T , entonces

$$\sum_{j \in T_1} \frac{G_{ij}^n}{n} P_{jk} = \frac{G_{ik}^{n+1}}{n} - \frac{P_{ik}}{n}.$$

Al tomar límite cuando $n \rightarrow \infty$ en esta desigualdad y usando (1.30), se obtiene que

$$\sum_{j \in T_1} \frac{1}{m_j} P_{jk} \leq \frac{1}{m_k}$$

Al igual que la demostración de (1.35), se concluye que

$$\sum_j \frac{1}{m_j} P_{jk} \leq \frac{1}{m_k}, \quad k \in T \quad (1.36)$$

Observe que se cumple la igualdad en (1.36). Si no es así, entonces de (1.31) se cumple la suma sobre k ,

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{1}{m_k} &> \sum_k \left(\sum_j \frac{1}{m_j} P_{jk} \right) \\ &= \sum_j \frac{1}{m_j} \left(\sum_k P_{jk} \right) \\ &= \sum_j \frac{1}{m_j} \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto la igualdad se cumple en (1.36), esto es

$$\sum_j \frac{1}{m_j} P_{jk} = \frac{1}{m_k}, \quad k \in T. \quad (1.37)$$

Sólo falta demostrar que

$$\sum_j \frac{1}{m_j} = 1$$

Sea

$$c = \frac{1}{\sum_j \frac{1}{m_j}}$$

Entonces por (1.37)

$$\pi(j) = \frac{c}{m_j}, j \in T,$$

Define una distribución estacionaria. Entonces por la primera parte de la demostración

$$\frac{c}{m_j} = \frac{1}{m_j},$$

Y por tanto $c=1$. Esto prueba que se cumple

$$\sum_j \frac{1}{m_j} = 1$$

Corolario 1.27 una cadena de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ irreducible es recurrente positivo si y solo si tiene una distribución estacionaria.

Demostración. Palafox (2009), Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov irreducible y recurrente positivo. Entonces de la Proposición 1.26 se tiene una única distribución estacionaria dada por

$$\pi(j) = \frac{1}{m_j}, j \in T$$

Ahora suponga que π es una distribución estacionaria. Entonces si j es un estado transitorio o recurrente nulo, de la Proposición 1.25, tenemos que $\pi(j) = 0$.

Por lo tanto cada $j \in T$ debe ser recurrente positivo y así la cadena será recurrente positivo.

Proposición 1.28 Si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cadena de Markov irreducible, recurrente positiva y con distribución estacionaria π . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(j)}{n} = \pi(j), \quad j \in T.$$

Este resultado se conoce como la Ley Fuerte de los Grandes Números para cadenas de Markov.

Demostración. Palafox (2009), De la proposición 1.18 se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(j)}{n} = \frac{1}{m_j} \quad j \in T.$$

De la Proposición 1.26, se tiene que una cadena de Markov irreducible y recurrente positiva tiene una única distribución dada por $\pi(j) = \frac{1}{m_j}$.

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(j)}{n} = \pi(j), \quad j \in T.$$

Corolario 1.29 Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov irreducible. Si el espacio de estados T es finito entonces tiene única distribución estacionaria π .

Demostración. Palafox (2009), Del corolario 1.23, se tiene que si una cadena de Markov es irreducible con espacio de estados finito entonces la cadena es recurrente positiva. Por lo tanto, de la Proposición 1.26 se tiene una única distribución estacionaria.

Si la cadena no tiene estados recurrentes positivos entonces no tiene distribución estacionaria, si tiene estados recurrentes positivos y son comunicantes entonces tiene una única distribución estacionaria, y si no son comunicantes entonces tiene infinidad de distribuciones estacionarias, Hoel (1972).

Teorema 1.30 (básico de convergencia) sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov irreducible, recurrente positiva y con distribución estacionaria π . Si la cadena es aperiódica entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n = \frac{1}{m_j} = \pi(j) \quad i, j \in T$$

Demostración. Palafox (2009), Se considerará una cadena de Markov aperiódica, irreducible y recurrente positiva con función de transición P , espacio de estados T y distribución estacionaria π .

Sea $a \in T$. Se define el conjunto I por:

$$I = \{n > 0: P_{aa}^n > 0\}.$$

Entonces

m.c.d. $I = 1$

(i) Si $m \in I$ y $n \in I$ entonces $m + n \in I$.

La propiedad (ii) se sigue de la desigualdad

$$P_{aa}^{m+n} \geq P_{aa}^m P_{aa}^n$$

Las propiedades (i) y (ii) implican que existe un entero positivo n_1 tal que $n \in I$ para toda $n \geq n_1$. Por lo que se cumple que

$$P_{aa}^n > 0 \text{ para } n \geq n_1$$

Sean $i, j \in T$. Como la cadena es irreducible, existen enteros positivos k, l tal que

$$P_{ia}^k > 0 \text{ y } P_{aj}^l > 0$$

Entonces para $n \geq n_1$ se tiene que

$$P_{ij}^{k+n+l} \geq P_{ia}^k P_{aa}^n P_{aj}^l > 0$$

Así, para cada $i, j \in T$, existe un entero positivo $n_0 = k + l + n_1$ tal que

$$P_{ij}^n > 0 \text{ para } n \geq n_0 \quad (1.38)$$

Ahora, sea

$$T^2 = \{(i, j) : i, j \in T\}$$

Entonces T^2 es el conjunto de las parejas ordenadas de elementos en T . se considerara una cadena de Markov (X_n, Y_n) con espacio de estados T^2 y función de transición P_2 definida por

$$P_2((i_0, j_0), (i, j)) = P(i_0, i)P(j_0, j)$$

Se sigue que $\{X_n, n \geq 0\}$ y $\{Y_n, n \geq 0\}$ son cadenas de Markov con función de transición P y las transiciones X_n y Y_n son independientemente una de otra.

Ahora se demostrará que la cadena de Markov (X_n, Y_n) es aperiódica, irreducible y recurrente positiva.

Sean (i_0, j_0) y $(i, j) \in T^2$. Por (1.38) existe n_0 tal que

$$P_{i_0 i}^n > 0 \text{ y } P_{j_0 j}^n > 0, \quad n \geq n_0$$

Entonces

$$P_2^n((i_0, j_0), (i, j)) = P^n(i_0, i)P^n(j_0, j) > 0, \quad n \geq n_0$$

Por tanto, la cadena (X_n, Y_n) es irreducible y aperiódica.

La distribución π_2 en T^2 definida por $\pi_2(i_0, j_0) = \pi(i_0)\pi(j_0)$ es una distribución estacionaria,

$$\begin{aligned} & \sum_{(i_0, j_0) \in T^2} \pi_2(i_0, j_0) P_2((i_0, j_0), (i, j)) \\ &= \sum_{i_0 \in T} \sum_{j_0 \in T} \pi(i_0)\pi(j_0)P_{i_0 i} P_{j_0 j} \\ &= \left(\sum_{i_0 \in T} \pi(i_0) P_{i_0 i} \right) \left(\sum_{j_0 \in T} \pi(j_0) P_{j_0 j} \right) \\ &= \pi(i)\pi(j) = \pi_2(i, j) \end{aligned}$$

Por lo tanto π_2 es una distribución estacionaria para la cadena (X_n, Y_n) . Luego del Corolario 1.27 se sigue que es recurrente positiva. En particular, es recurrente.

Sea

$$L = \min\{n \geq 0: X_n = Y_n\}$$

Sea $a \in T$. Puesto que la cadena (X_n, Y_n) es recurrente,

$$L_{aa} = \min\{n \geq 0: (X_n, Y_n) = (a, a)\}$$

Es finito con probabilidad uno y además $L \leq L_{aa}$. Por lo tanto L es finito con probabilidad uno.

4.2.4 CADENAS DE MARKOV ABSORBENTES

Una cadena de Márkov con espacio de estados finito se dice absorbente si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. La cadena tiene al menos un estado absorbente.
2. De cualquier estado no absorbente se accede a algún estado absorbente.

Si denotamos como A al conjunto de todos los estados absorbentes y a su complemento como D , tenemos los siguientes resultados:

- Su matriz de transición siempre se puede llevar a una de la forma

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & N \end{pmatrix}$$

Donde,

I = una matriz de identidad que indica que uno siempre permanece en estado de absorción una vez que se alcanza.

0 = Matriz cero que representa 0 probabilidad de Transición de los estados absorbentes a la Estados no absorbentes.

A = Las probabilidades de transición de los estados no absorbentes a los estados absorbentes.

N = Las probabilidades de transición entre los estados no absorbentes.

METODOLOGÍA PROPUESTA

Para llevar a cabo el proyecto de investigación, se propone un estudio de tipo exploratorio y descriptivo.

En la primera etapa del proyecto se revisará a profundidad los fundamentos teóricos de los procesos de Markov así como también se realizará una búsqueda exhaustiva de artículos científicos en bases de datos que traten del tema a investigar.

Para llevar a cabo este estudio de una forma operativa se hace necesario describir las fases que permitirán obtener el producto final de este trabajo de investigación

Primera y segunda fase

Se propondrá un modelo genérico y se validará con una aplicación en distintos sistemas de producción en serie. Para realizar la caracterización, se definen las etapas de los procesos, luego se calculan el número de unidades que entran a cada etapa, el número de unidades conformes que avanzan de una etapa a otra, el número de unidades que se reprocesan o se desechan por etapa, en un intervalo de tiempo. También se determinará la cantidad promedio de unidades por unidad de tiempo, la estimación de los costos y tiempos asociados al sistema. Para lo anterior se realizarán entrevistas con los jefes de producción de las empresas, se observará el proceso en lo posible y se solicitarán los datos necesarios para realizar el estudio. Con la parametrización se definirán la proporción de producto conforme y no conforme de cada etapa, así como las probabilidades de avance de un estado a otro.

Tercera fase

Para estimar los costos de cada etapa se propone el siguiente procedimiento:

Se reúne la información del producto fabricado, el volumen de materias primas y materiales consumidos en dicho proceso, los promedios mensuales de ventas de artículos terminados. En la entrevista con el gerente de la empresa se decretan los

objetivos que se deben obtener al implementar el sistema de costeo para la determinación del costo unitario, por ejemplo precio de venta, políticas de operación, determinación del costo de producción de lo vendido, así como las utilidades. Una vez realizados los estudios generales de la empresa y reunidos los datos suficientes, se procede a la implementación del sistema de costeo del proceso para la determinación del costo unitario del producto, en este caso se adopta el método de costos promedios.

Luego se construye las matrices y los diagramas de transición. Como se mencionó en la fase anterior, la parametrización permite determinar las probabilidades de transición y su capacidad de avance en las etapas sucesivas permitiendo evaluar el impacto de los cambios en las probabilidades de transición, los distintos costos previstos y las cantidades. Para la construcción de la matriz de transición se debe tener en cuenta las probabilidades de cada estado del proceso en estudio, además de conocer que todos los elementos $p_{ij} > 0$ y la suma de los elementos de cada fila es igual a 1, por lo tanto, $\sum p_{ij} > 0$ para todo i .

A continuación en el análisis se determina la probabilidad de completar satisfactoriamente que una pieza entra en el proceso (esta probabilidad la define unos de los estados absorbentes llamado producto terminado o área de almacenamiento), el número esperado de piezas que deben entrar al proceso para producir una unidad en buen estado y se analizan los costos del sistema, además se obtendrán el número de unidades no conforme producidas, el número de unidades no conforme detectadas y el número de no conforme despachadas.

Cuarta fase

Se generan los escenarios optimistas, intermedios y pesimistas además de los intervalos de confianza con probabilidad $1-\alpha$ deseados para la toma de decisiones. Se toma como escenario optimista el límite superior del intervalo de confianza, como pesimista el límite inferior y como intermedio el valor promedio. Lo anterior se relaciona con la Teoría de la Utilidad: Amante al riesgo, indiferente al riesgo, indiferente al riesgo que son los tres escenarios clásicos básicos que se estilan en

estos menesteres. α se define como el nivel de significancia con base en el cual se construye los intervalos de confianza y no se puede confundir con el riesgo tipo I, ya que no se trata de prueba de hipótesis si no de teoría de la estimación.

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

6. FORMULACIÓN DEL MODELO

En el contexto que será objeto nuestro estudio se considera un sistema de producción en serie que se tiene **S-m** estados de transición y m estados absorbentes, ejemplificados con los conjuntos **S= {E1, E2 Y E3}** representan etapas del proceso y **m = {producto conforme (PN), producto no conforme (PNC)}**.

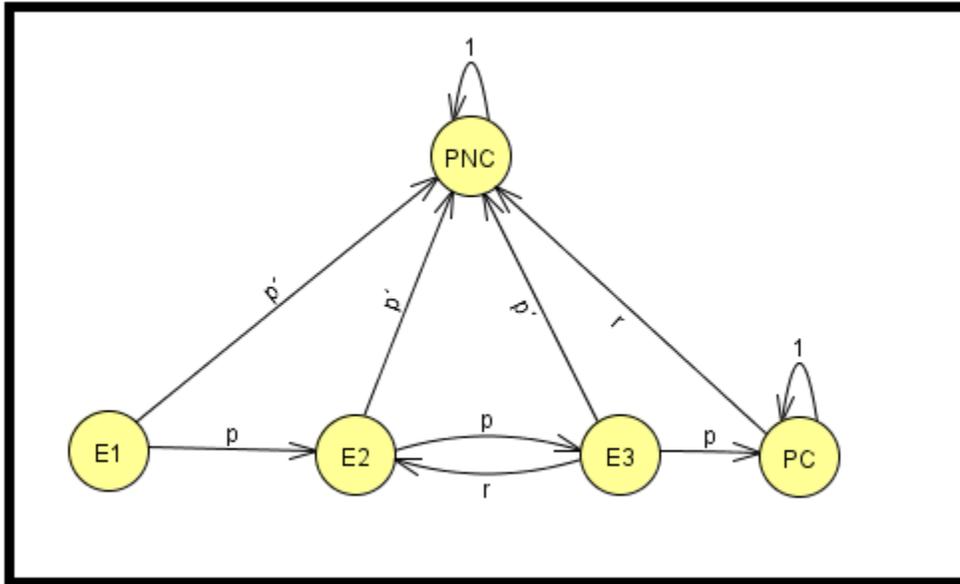


Ilustración 1. Grafo genérico modelo de Markov.

La fracción disconforme muestral se define como el cociente del número de unidades no conforme en la muestra D y el tamaño de la muestra n ; es decir,

$$\hat{p} = \frac{D}{n}$$

Para la comprensión del modelo se utilizara la siguiente notación:

\hat{p} : Producto No conforme.

p : Producto conforme.

r : Producto para reprocesar.

PC : Producto terminado.

PNC :: Desechos.

6.1 SUPUESTOS DEL MODELO

- El modelo es aplicable a cualquier sistema de producción en serie con un número finito de estados.
- De acuerdo con el teorema del límite central \hat{p} tiene una distribución aproximadamente normal, con media p y varianza $p(1 - p)/n$.
- Si tamaño de la muestra $n \geq 30$, la distribución binomial puede aproximarse a la distribución normal.
- El modelo es válido para los casos en los cuales el sistema se encuentra en estado estable según la Ley de los grandes números.
- Los valores de costos solicitados a las empresas en los casos de estudio presentados corresponden a los costos de una unidad conforme obtenida que se ajustan a lo que el modelo requiere para desarrollar los cálculos.

7. PARAMETRIZACIÓN DEL PROCESO.

Para determinar los parámetros del proceso se debe seguir el siguiente procedimiento:

- Se establece la frecuencia con la cual los datos serán tomados. Los intervalos cortos entre tomas de muestras permitirán una rápida retroalimentación al proceso ante la presencia de puntos atípicos. Se recomienda tomar tamaños de muestras iguales, aunque no necesariamente debe darse esa situación, el tamaño de muestra deberá ser mayores a 50. Los estados estarán determinados por cada proceso.
- Calcule el porcentaje de defectuoso \hat{p} para cada estación mediante.

$$\hat{p} = \frac{D}{n}$$

- Encuentre los límites de control mediante las formulas:

$$\hat{p} \pm 3 \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

- Realice la prueba de consistencia interna para cada estación. Si encuentra datos atípicos, descarte esas muestras. Vuelva a calcular el porcentaje de defectos y los nuevos límites de control. Repita los pasos hasta que todas las

estaciones de las muestras sean consistentes. Los límites elegidos de esta manera son basados en la distribución normal. En general esta aproximación es válida para la mayoría de procesos industriales en los cuales la proporción de producto no conforme se puede estimar en partes por cien. En aquellos otros procesos industriales que se habla de defectos por mil, se utiliza la aproximación a la ley Poisson.

8. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO

8.1 CASOS REALES DE APLICACIÓN EN LA INDUSTRIA

Los siguientes casos son aplicaciones desarrolladas por estudiantes de la especialización en Gerencia de la Calidad bajo el acompañamiento del Ing. Rodrigo Barbosa Ph.D y el Ing. Rick Acosta Vega. Los Nombres de las empresas no se revelarán en el documento por acuerdo de confidencialidad. El primer caso es una empresa de producción de gaseosa de la ciudad de santa marta.

8.1.1 Caso producción de gaseosa.

8.1.1.1 Fase I: Caracterización del proceso: En esta fase se describe los estados del sistema de producción con el cual se desarrollara el modelo de Markov para su respectivo análisis. El estudio se llevó a cabo en una fábrica productora de gaseosas en la ciudad de Santa Marta, en la cual llegan envases sucios para someterse a un procedimiento de limpieza para luego ser llenado con el producto. Se toma como referencia el envase de producto manzana 350 ml de vidrio tapa corona. Las etapas que comprende el proceso son:

- **Desempaque:** El envase es extraído de las canastas para ser ingresado a la línea de producción por acción de la maquina Desempacadora.
- **Despitillado:** Se retiran los pitillos dentro de los envase por acción de la maquina despitilladora.
- **Lavado de Envase:** Se realiza el lavado de envase por acción de la lavadora central.

- **Inspección electrónica del Envase:** Al terminar el lavado se inspecciona que el lavado haya sido el adecuado haciendo uso del FILTEC (máquina de inspección electrónica).
- **Llenado de Envase con producto:** Se llena el envase con la cantidad requerida del producto por acción de la maquina llenadora.
- **Coronado de Envase:** El envase es sellado con una tapa corona que impide la salida del producto por acción de la maquina coronadora.
- **Codificado de Envase:** El envase es codificado por acción de la maquina codificadora con su lote y fecha de vencimiento respectiva.
- **Empacado de Envase:** El envase es introducido dentro de la canasta de producto final por acción de la empacadora para ser transportado a la bodega de producto terminado.

La secuencia de fabricación del refresco se muestra en el siguiente diagrama de flujo.

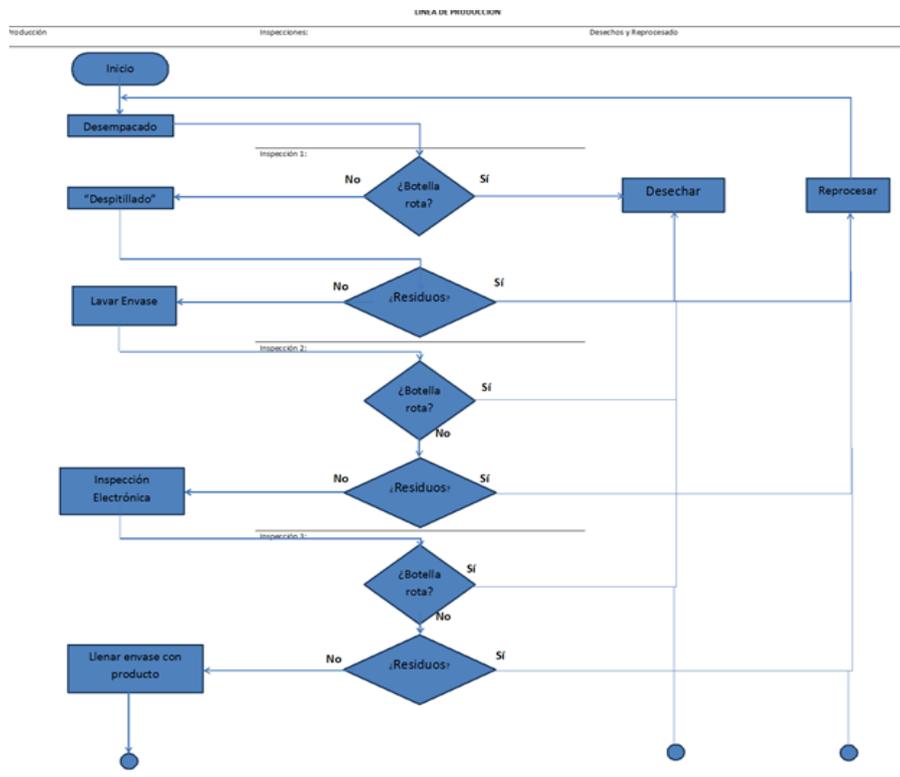


Ilustración 2. Diagrama de flujo del proceso. Parte 1.

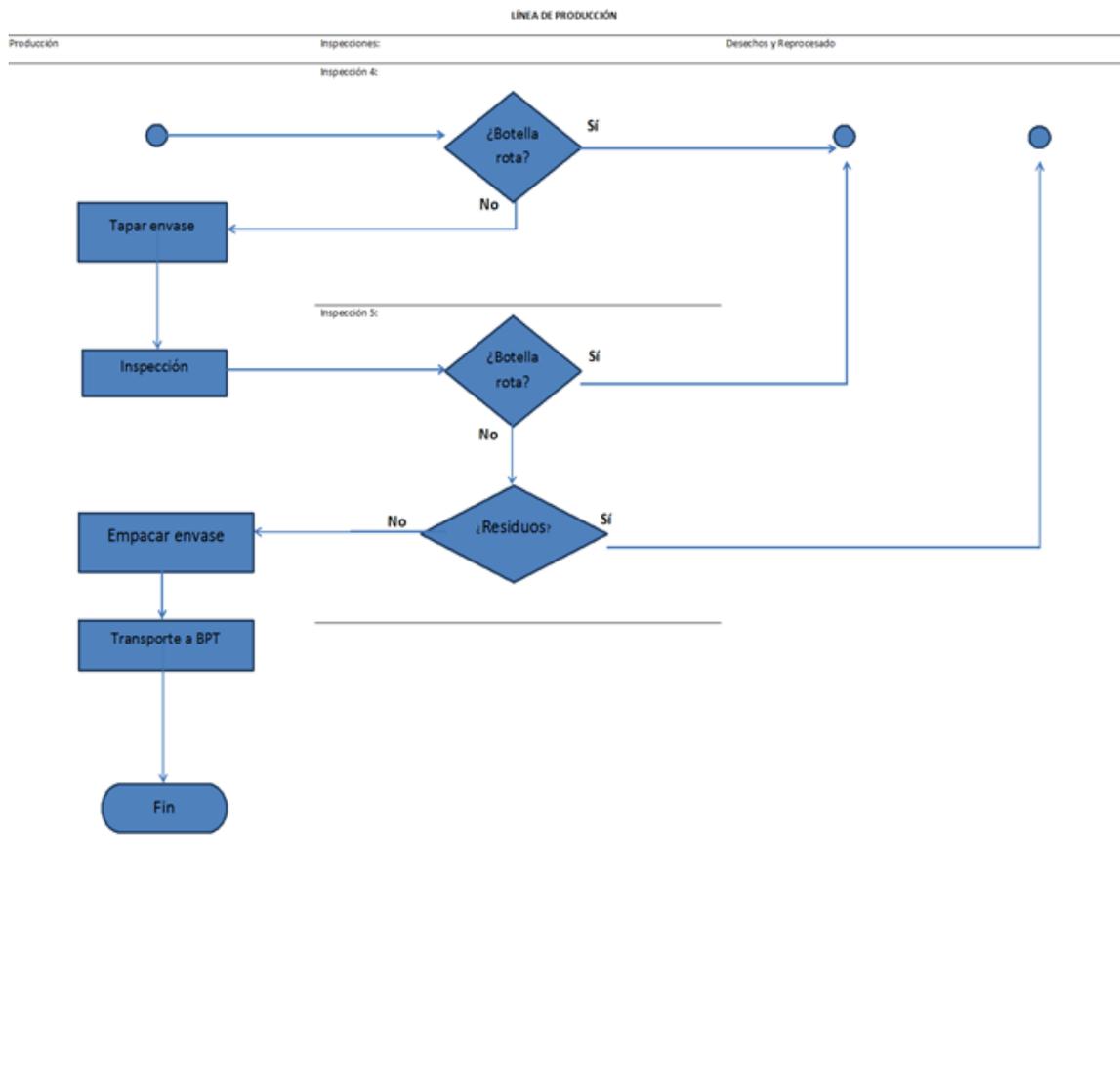


Ilustración 3. Diagrama de flujo del proceso. Parte2.

Si durante el proceso de producción un envase se quiebra o “despica”, se le desecha inmediatamente sin importar la etapa en donde se encuentre. En los procesos de inspección, si la botella está sucia pero en buen estado se regresa al estado anterior para ser reprocesada. Las probabilidades se estimaron a partir de la información suministrada por jefe de producción. Estas probabilidades se verán

en el diagrama de transición de la siguiente fase del proyecto. Otros datos importantes del proceso de producción son:

Cada hora se procesan 2527 botellas en promedio.

- El tiempo esperado para para producir un lote de 24.000 unidades es aproximadamente 9.5 horas.
- Cada caja contiene 30 botellas, lo que en una jornada de 9.5 horas se tienen 800 cajas.
- El costo de producir una caja de 30 unidades es \$6350 pesos, es decir que una unidad a todo coste equivale a \$212 pesos.
- Velocidad de la línea de producción: 42.12 bpm (botellas por minuto)

8.1.1.2 Fase II: Desarrollo del diagrama y matriz de transición del modelo Markoviano.

En esta fase se describe el proceso a través de un diagrama de transición con estados absorbentes, en la cual cada etapa tiene la probabilidad de que el producto conforme siga a la siguiente etapa o la probabilidad de que el producto no conforme sea rechazado o reprocesado, según el estado del proceso.

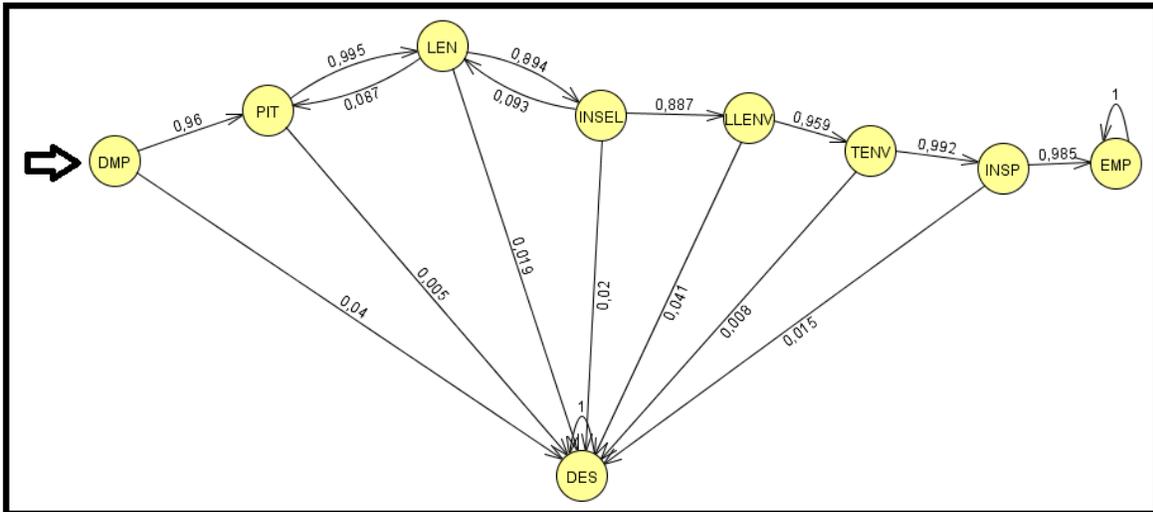


Ilustración 4. Diagrama de transición del proceso de producción de gaseosa.

A continuación se definen los estados para construir la matriz de transición.

ESTADO	OPERACIÓN
DMP	Desempacado
PIT	Despitillado
LEN	Lavado de Envase
INSEL	Inspección electrónica
LLENV	Llenado de envase
TENV	Tapado de envase
INS	Muestreo
EMP	Empacado
DES	Desechos

Ilustración 5. Estados del proceso de producción de gaseosa.

Realizando la matriz de transición en la cual los estados empacado y desechos son absorbentes.

	Estados	DMP	PIT	LEN	INSEL	LLENV	TENV	INS	EMP	DES	
MATRIZ	DMP	0	0,96	0	0	0	0	0	0	0,04	
	PIT	0	0	0,995	0	0	0	0	0	0,005	
	Identidad=I	LEN	0	0,087	0	0,894	0	0	0	0,019	
	Transitoria =N	INSEL	0	0	0,093	0	0,887	0	0	0,02	
	Cero=0	LLENV	0	0	0	0	0	0,959	0	0,041	
	Absorbente=A	TENV	0	0	0	0	0	0	0,992	0,008	
		INS	0	0	0	0	0	0	0	0,985	0,015
		EMP	0	0	0	0	0	0	0	1	0
		DES	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Ilustración 6. Matriz de transición de Markov del proceso de producción de gaseosa.

8.1.1.3 Fase III: Evaluación del impacto de los cambios en las probabilidades de transición.

En la tercera fase se realiza el análisis del modelo de Markov propuesto para el proceso de producción de gaseosa. En la siguiente ilustración se presenta la matriz reagrupada.

	Estados	DES	EMP	DMP	PIT	LEN	INSEL	LLENV	TENV	INS
P=	DES	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	EMP	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	DMP	0,04	0	0	0,96	0	0	0	0	0
	PIT	0,005	0	0	0	0,995	0	0	0	0
	LEN	0,019	0	0	0,087	0	0,894	0	0	0
	INSEL	0,02	0	0	0	0,093	0	0,887	0	0
	LLENV	0,041	0	0	0	0	0	0	0,959	0
	TENV	0,008	0	0	0	0	0	0	0	0,992
	INS	0,015	0,985	0	0	0	0	0	0	0

Ilustración 7. Matriz de transición de Markov reagrupada.

Ahora se procede a la identificación de las matrices para su análisis.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0,96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,995 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,087 & 0 & 0,894 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,093 & 0 & 0,887 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,959 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,992 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ilustración 8. Matriz transitoria.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ilustración 9. Matriz Identidad.

$$(I - N) = \begin{bmatrix} 1 & -0,96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,09 & 1 & -0,89 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,09 & 1 & -0,89 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,96 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,99 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ilustración 10. Matriz I-N.

$$(I - N)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,000 & 1,060 & 1,150 & 1,028 & 0,912 & 0,875 & 0,868 \\ 0,000 & 1,104 & 1,198 & 1,071 & 0,950 & 0,911 & 0,904 \\ 0,000 & 0,105 & 1,204 & 1,077 & 0,955 & 0,916 & 0,909 \\ 0,000 & 0,010 & 0,112 & 1,100 & 0,976 & 0,936 & 0,928 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,959 & 0,951 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,992 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 1,000 \end{bmatrix}$$

Ilustración 11. Inversa de la Matriz I-N.

A=	0,04	0
	0,005	0
	0,019	0
	0,02	0
	0,041	0
	0,01	0
	0,015	0,985

Ilustración 12. Matriz de estados absorbentes.

Finalmente la probabilidad de llegar a un estado absorbente está dada en la siguiente matriz.

$(I - N)^{-1} * A=$		DES	EMP
	DMP	0,147	0,855
	PIT	0,111	0,89
	LEN	0,107	0,895
	INSEL	0,087	0,914
	LLENV	0,065	0,937
	TENV	0,025	0,977
	INS	0,015	0,985

Ilustración 13. Probabilidad de los estados absorbentes del proceso de producción de gaseosa manzana 350 ml

Luego de los cálculos se puede realizar el siguiente análisis

- De la ilustración 17 se puede ver que, la probabilidad de completar satisfactoriamente una unidad que entra al proceso (probabilidad de absorción en el estado EMP) es 0,985 (98,5%), mientras que la probabilidad que una unidad sea rechazada es de 0,015 (1,5%).
- El número esperado de botellas que deben entrar al proceso para producir una gaseosa es $\left(\frac{1}{0,985}\right) = 1,015$. Luego, se necesitarán 1015 botellas para producir 1000 gaseosas.
- De la matriz $(I - N)^{-1}$ se obtiene el número de veces que una botella que entra al centro productivo para por cada operación.

ESTADO	N° de veces (por botella que entra) (a)	N° de veces (por botella que sale) (b)= (a)*1,170
Desempacado	1,000	1,169794
Despitillado	1,060	1,240085
Lavado de Envase	1,150	1,345775
Inspección electrónica	1,028	1,203123
Llenado de envase	0,912	1,067170
Tapado de envase	0,875	1,023416
Muestreo	0,868	1,015228

Ilustración 14. N° de veces que una botella que entra y sale en el centro productivo.

8.1.1.3.1 Cálculo del costo promedio equivalente por unidad conforme obtenida.

Dada una cadena de Markov con probabilidad de estado estable π_i , entonces el costo promedio esperado por unidad de tiempo está dado por

$$E(C) = \sum_{i=0}^{S-m} \pi_i * c(j)$$

Donde el costo de producir una unidad es \$ 212 pesos, entonces:

El número total de unidades que deben completarse en cada estado antes de que una unidad caiga en estado absorbente está dada por la siguiente expresión.

$$r = (I - N)^{-1} * \epsilon$$

Donde $(I - N)^{-1}$ es la matriz fundamental y ϵ es un vector columna unitario

$$(I - N)^{-1} =$$

1,000	1,060	1,150	1,028	0,912	0,875	0,868
0,000	1,104	1,198	1,071	0,950	0,911	0,904
0,000	0,105	1,204	1,077	0,955	0,916	0,909
0,000	0,010	0,112	1,100	0,976	0,936	0,928
0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,959	0,951
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,992
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000

Ilustración 15. Matriz fundamental

$$\epsilon =$$

1
1
1
1
1
1
1

Ilustración 16. Vector Unitario.

$$r = (I - N)^{-1} * \epsilon =$$

6,9
6,1
5,2
4,1
2,9
2,0
1,0

Ilustración 17. Vector r

$$C = c * r$$

$$C = (212) *$$

6,9	=	1462
6,1		1302
5,2		1095
4,1		861
2,9		617
2,0		422

$$\frac{1,0}{212}$$

Ilustración 18. Costos total esperado de mover a las unidades de los estados no absorbentes.

Luego el costo promedio equivalente por unidad de producción está dado por:

$$(181+189+190+194+199+207+209)/7 = \$195$$

$$C_{prom} = 212 * \begin{matrix} 0,8549 \\ 0,8905 \\ 0,8949 \\ 0,9144 \\ 0,9371 \\ 0,9771 \\ 0,9850 \end{matrix} = \begin{matrix} 181 \\ 189 \\ 190 \\ 194 \\ 199 \\ 207 \\ 209 \end{matrix}$$

Ilustración 19. Costo esperado por unidad en cada estación de trabajo.

8.1.1.4 Fase IV: Escenarios optimistas, intermedios y pesimistas además de los intervalos de confianza con probabilidad $1-\alpha$ deseados para la toma de decisiones.

		Escenarios ($1-\alpha=95\%$)			
		Pesimista	Intermedio	Optimista	
n	50	Límite inferior	\hat{p}	Límite Superior	ESTADO
$Z_{\alpha/2}$	1,96	0,906	0,960	1,000	DMP
		0,975	0,995	1,000	PIT
		0,973	0,994	1,000	LEN
		0,799	0,887	0,975	INSEL
		0,904	0,959	1,000	LLENV
		0,967	0,992	1,000	TENV
		0,951	0,985	1,000	INS

Ilustración 20. Escenarios con un nivel de confianza del 95% para el caso producción de gaseosa.

		Escenarios (1- α =99%)			
		Pesimista	Intermedio	Optimista	
n	50	Límite inferior	\hat{p}	Límite Superior	ESTADO
Z$_{\alpha/2}$	2,58	0,889	0,960	1,000	DMP
		0,969	0,995	1,000	PIT
		0,966	0,994	1,000	LEN
		0,771	0,887	1,000	INSEL
		0,887	0,959	1,000	LLENV
		0,959	0,992	1,000	TENV
		0,941	0,985	1,000	INS

Ilustración 21. Escenarios con un nivel de confianza del 99% para el caso producción de gaseosa.

8.1.2 CASO: ENVASES DE METANOL

La meta mensual en la empresa es vender \$ 100.000.000 mensualmente de la marca MB, representados en la venta de 300 botellas de Metanol mensual, para esto se solicitan cada mes esta cantidad de botellas a la fábrica.

Al momento de recibirlos se nota que 1% de las que llegan están vencidas, por lo que deben ser devueltas y solicitadas nuevamente. Luego, por malos manejos durante el almacenamiento, el 2% de las botellas se quiebran y estas no pueden ser recuperadas.

A continuación, las almacenadas son inspeccionadas, donde se evidencia que el 10% de estas están próximas a vencerse, las cuales son separadas del resto de las botellas y calificadas como reactivos fecha corta. Las demás son etiquetadas como producto conforme para la venta.

Las botellas con fecha corta son vendidas a un precio menor (\$ 100.000), los costos de importación son 54.228 \$/unidad: recepción 50.895 \$/unidad, almacenamiento 52.283 \$/unidad e inspección 54.366\$/unidad. El costo por cada devolución es 55.228 \$/unidad.

ESTADO	OPERACIÓN
E1	Solicitud de botellas
E2	Recepción
E3	Devolución
E4	Almacenamiento
E5	Inspección
E6	Fecha corta
E7	No Conforme
E8	Producto Conforme

Ilustración 22. Estados del proceso de producción de envases.

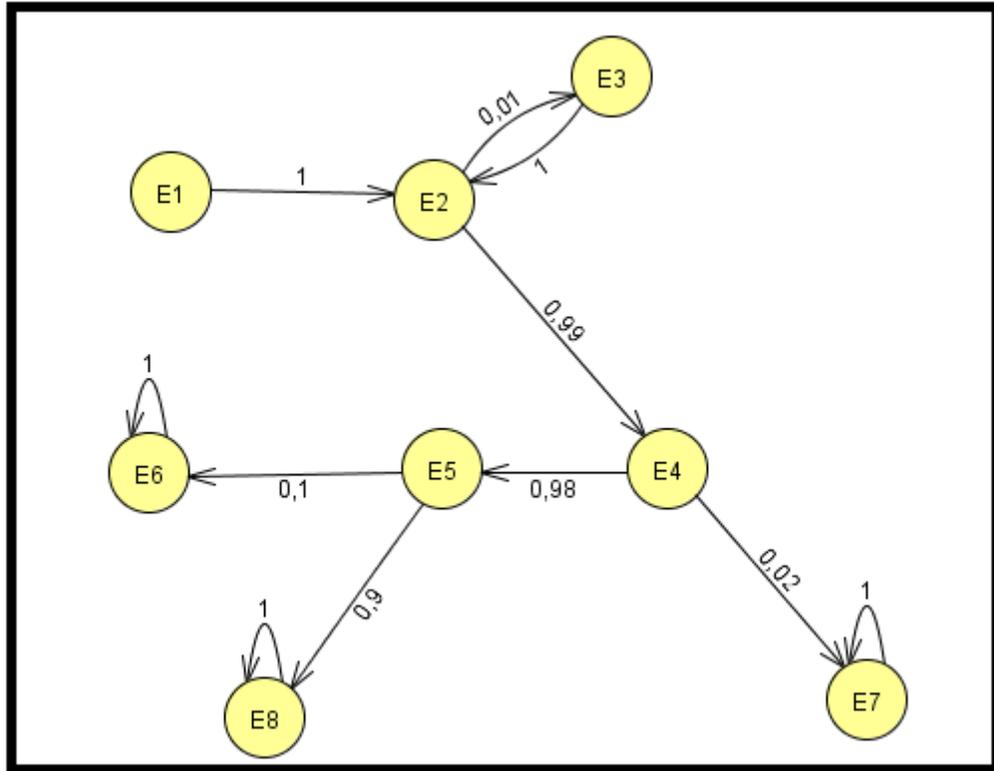


Ilustración 23. Diagrama de transición del proceso de producción de envases.

Estados	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8
E1	0	1	0	0	0	0	0	0
E2	0	0	0,01	0,99	0	0	0	0
E3	0	0	0	0	0	0	0	0
E4	0	0	0	0	0,98	0	0,02	0
E5	0	0	0	0	0	0,1	0	0,9
E6	0	0	0	0	0	1	0	0
E7	0	0	0	0	0	0	1	0
E8	0	0	0	0	0	0	0	1

Ilustración 24. Matriz de transición de Markov del proceso de producción de envases.

		E1	E2	E3	E4	E5
N=	E1	0	1	0	0	0
	E2	0	0	0,01	0,99	0
	E3	0	1	0	0	0
	E4	0	0	0	0	0,98
	E5	0	0	0	0	0

Ilustración 25. Matriz transitoria.

	1	-1	0	0	0
$(I - N)^{-1} =$	0	1	-0,01	-0,99	0
	0	-1	1	0	0
	0	0	0	1	-0,98
	0	0	0	0	1

Ilustración 26. Inversa de la Matriz I-N.

A=	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	0	0,02	0
	0,1	0	0,9

Ilustración 27. Matriz de estados absorbentes.

		E6	E7	E8
$(I - N)^{-1} * A =$	E1	0,098	0,02	0,882
	E2	0,098	0,02	0,882
	E3	0,098	0,02	0,882
	E4	0,098	0,02	0,882
	E5	0,1	0	0,9

Ilustración 28. Probabilidad de los estados absorbentes del proceso de producción de envases.

Costos por etapa.

	Costos	Costos*340,14
Costo etapa 1 (\$/Unidad)	\$54.366	\$18.492.051
Costo etapa 2 (\$/Unidad)	\$50.895	\$17.311.425
Costo etapa 3 (\$/Unidad)	\$55.228	\$18.785.252
Costo etapa 4 (\$/Unidad)	\$52.283	\$17.783.540
Costo etapa 5 (\$/Unidad)	\$54.366	\$18.492.051

Costo total el servicio ideal (\$/unidad)	\$211.910
---	-----------

# De unidades que se requieren solicitar para que al final del proceso	340
--	-----

Unidades que se requieren vender	300
Eficiencia del proceso	0,882

- El 100% de la proporción de unidades que salen de la Etapa 1, llegan a la etapa 2.
- El valor esperado de unidades que salen de la Etapa 1 y llegan a la Etapa 2, son 340.
- El 1% de la proporción de unidades que salen de la Etapa 1, llegan a la etapa 3.
- El valor esperado de unidades que salen de la Etapa 1 y llegan a la Etapa 3, son 3,40.
- El 100% de la proporción de unidades que salen de la Etapa 1, llegan a la etapa 4.
- El valor esperado de unidades que salen de la Etapa 1 y llegan a la Etapa 4, son 340.
- El 98% de la proporción de unidades que salen de la Etapa 1, llegan a la etapa 5.
- El valor esperado de unidades que salen de la Etapa 1 y llegan a la Etapa 5, son 333,33.

Unidades producto no conforme	33,333
costo de ventas Unidades no conformes	3333333
Costo total de fabricación	68562912
Costo promedio equivalente por unidad conforme	228543

Costo promedio equivalente/Costo de servicio ideal	1,0785
En proporción	0,07879
En porcentaje	7,85%

Por cada unidad no conforme se gasta un 13, 09% adicional.

A continuación se presentan los escenarios optimistas, intermedios y pesimistas de cada etapa con su respectivos los intervalos de confianza con probabilidad $1-\alpha$ deseados para la toma de decisiones.

		Escenarios ($1-\alpha=95\%$)			ESTADO
		Pesimista	Intermedio	Optimista	
		Límite inferior	\hat{p}	Límite Superior	
n	50	1,000	1	1,000	E1
$Z_{\alpha/2}$	1,96	0,962	0,99	1,018	E2
		1,000	1	1,000	E3
		0,941	0,98	1,019	E4
		0,817	0,9	0,983	E5

Ilustración 29. Escenarios con un nivel de confianza del 95% para el caso botellas de Metanol.

		Escenarios ($1-\alpha=99\%$)			ESTADO
		Pesimista	Intermedio	Optimista	
		Límite inferior	\hat{p}	Límite Superior	
n	50	1,000	1	1,000	E1
$Z_{\alpha/2}$	2,58	0,954	0,99	1,000	E2
		1,000	1	1,000	E3
		0,929	0,98	1,000	E4
		0,791	0,9	1,000	E5

Ilustración 30. Escenarios con un nivel de confianza del 99% para el caso botellas de Metanol.

8.1.3 CASO: DIVISIÓN REFINERÍA

División Refinería, es una unidad de negocio del sector aceitero perteneciente a una empresa en Santa Marta, Colombia.

En particular, es una empresa dedicada a la refinación de aceite crudo de Palma y Palmiste, tanto orgánica como convencional, enfocada en la consecución de productos inocuos y de alta calidad, cumpliendo los principios de cadena de custodia/suministro para los productos provenientes de cultivos certificados por agricultura sostenible (Rainforest Alliance/ Roundtable of Sustainable Palm Oil (RSPO) Y Fair Trade), promoviendo la protección del medio ambiente y el desarrollo y seguridad de sus trabajadores, y además, velando por la seguridad de los procesos y productos a través de la cadena de suministros.

DESCRIPCION DEL PROCESO

La línea de embotellado de la oleína de palma, es un proceso relativamente nuevo en la organización (menos de un año de instalación), dentro del cual actualmente se hace el embotellado de la presentación de 900 ml.

Actualmente se realizan corridas de 7200 unidades, lo que representa el llenado de 600 cajas (12 unidades/caja).

El proceso empieza por el llenado y tapado de las botellas, éste se realiza por medio de una máquina, la cual es manipulada por el Operador de Empaque con el apoyo de un Auxiliar de Empaque. En ésta etapa se produce un porcentaje de desecho del 2%, debido al deterioro en la botella o por maltrato en la rosca al momento del tapado.

Posterior al llenado, se realiza la inspección y pesaje de las unidades, las cuales que se realizan por el Controlador de procesos, de esta etapa, se sacan no conformes por peso inferior al neto, en una proporción del 1%.

En la etapa de etiquetado, el 2% de ellas son retiradas para reproceso, en donde manualmente el auxiliar retira la etiqueta y asigna una nueva, y pasa a la siguiente etapa.

Posteriormente se continúa con el proceso de codificación, dentro del cual se le asigna el número de lote y la fecha de vencimiento al producto. El 3% de las impresiones salen erróneas, por lo tanto se reprocesan en esta etapa.

Finalmente pasa a la etapa de embalaje para posterior despacho.

ESTADO	OPERACIÓN
E1	Embotellado
E2	Inspección y pesaje PT
E3	Etiquetado
E4	Codificación (lote/Fecha venc.)
E5	Embalaje y despacho
E6	Reproceso
E7	Producto NC

Ilustración 31. Estados del proceso de embotellado de la oleína de palma.

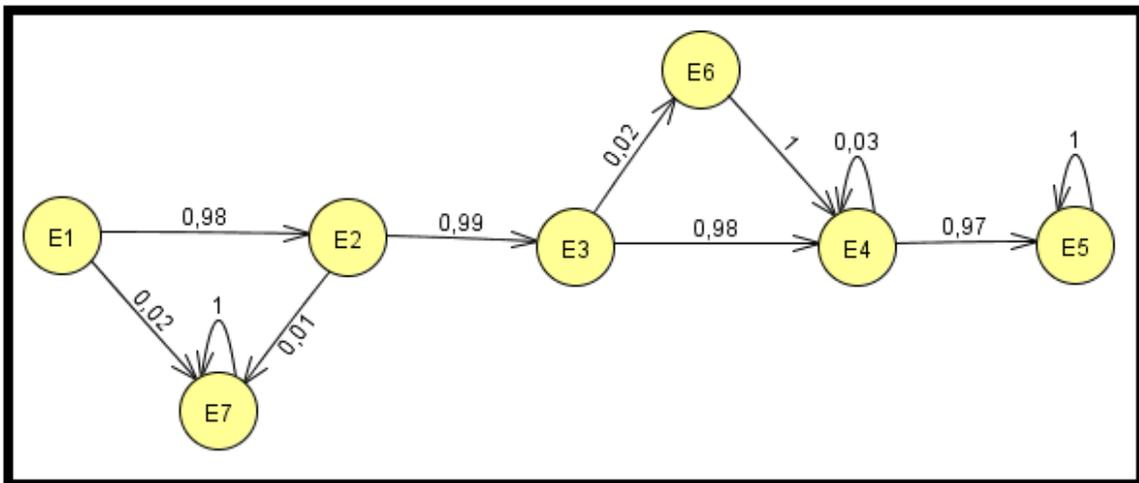


Ilustración 32. Diagrama de transición del proceso de embotellado de la oleína de palma.

Estados	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
E1	0	0,98	0	0	0	0	0,02
E2	0	0	0,99	0	0	0	0,01
E3	0	0	0	0,98	0	0,02	0
E4	0	0	0	0,03	0,97	0	0
E5	0	0	0	0	1	0	0
E6	0	0	0	1	0	0	0
E7	0	0	0	0	0	0	1

Ilustración 33. Matriz de transición de Markov del proceso de embotellado de la oleína de palma.

	E5	E7
E1	0,9702	0,0298
E2	0,99	0,01
E3	1	0
E4	1	0
E6	1	0

$(I - N)^{-1} * A =$

Ilustración 34. Probabilidad de los estados absorbentes del proceso de embotellado de la oleína de palma.

La eficiencia del proceso es del 97,02%

A continuación se presentan las unidades que llegan a cada etapa y el costo asociado a cada una de ellas.

	# Unidades	Costo Asociado (COP)
E1	7422	280,16
E2	7273	177.28
E3	7201	103.034
E4	7201	43.034
E5	-	173.02
E6	144	173.02

Ilustración 35. Costos asociados al proceso de embotellado de la oleína de palma.

A partir de la información definida de los costos, se calculó cada uno de los costos en las etapas de acuerdo a las unidades que visitan dicha etapa.

Estado	# Unidades	Costo Asociado	Costo Etapa
E1	7422	277	\$2.079.348
E2	7273	177,28	\$1.289.357
E3	7201	103	\$741.948
E4	7201	43	\$309.952
E5	7200	173,02	\$1.245.744
E6	144	173,02	\$24.915
COSTO TOTAL			\$5.691.264

Ilustración 36. Costos asociados al proceso de embotellado de la oleína de palma.

El costo total está dado por:

$$CT = CE1 + CE2 + CE3 + CE4 + CE5 + CE6$$

Para el ejercicio el costo total para una producción de 7200 unidades conformes es de \$ 5.691.264

El costo total promedio por unidad es:

$$C_{total \text{ promedio por unidad}} = \frac{5.691.264}{7200} = 790,453$$

Teniendo en cuenta el costo ideal de 776,528

El porcentaje de incremento por no conforme es:

$$\% \text{ de incremento} = \frac{790,453}{776,528} = 1,01793$$

Lo cual indica que debido a reproceso y desechos cada unidad conforme incrementa el costo en 1,793%

El factor de amplificación está dado por:

$$\% \text{ de incremento} = \frac{7422}{7200} = 1,030$$

Lo cual indica que por cada unidad conforme debo programar 1,030 unidades de más.

Luego se tienen los escenarios optimistas, intermedios y pesimistas además de los intervalos de confianza con probabilidad $1-\alpha$ deseados para la toma de decisiones.

		Escenarios ($1-\alpha=95\%$)			
		Pesimista	Intermedio	Optimista	
		Límite inferior	\hat{p}	Límite Superior	ESTADO
n	50	1,000	1	1,000	E1
$Z_{\alpha/2}$	1,96	0,962	0,99	1,018	E2
		1,000	1	1,000	E3
		0,941	0,98	1,019	E4
		0,817	0,9	0,983	E5

Ilustración 37. Escenarios con un nivel de confianza del 95% para el caso refinería de aceite.

		Escenarios ($1-\alpha=99\%$)			
		Pesimista	Intermedio	Optimista	
		Límite inferior	\hat{p}	Límite Superior	ESTADO
n	50	1,000	1	1,000	E1
$Z_{\alpha/2}$	2,58	0,954	0,99	1,000	E2
		1,000	1	1,000	E3
		0,929	0,98	1,000	E4
		0,791	0,9	1,000	E5

Ilustración 38. Escenarios con un nivel de confianza del 99% para el caso refinería de aceite.

8.1.4 CASO: LABORATORIO RK

El Laboratorio RK realiza análisis de mercurio por Absorción Atómica a diferentes matrices (Aguas, suelos, materias primas, insumos, alimentos, medicamentos, cosméticos, entre otros). En la etapa de muestreo un 1% de las muestras tomadas se desechan por daños en la muestra, el resto pasa a la etapa dos. En la etapa dos (Recepción) el 2% de las muestras son desechadas por mala toma de muestra, el resto pasa a análisis, donde hay un reproceso del 2%, debido a resultados atípicos, un 0,5% de muestras se desechan por posibles errores en la toma de muestras, solicitándose un nuevo muestre para confirmar el dato.

Los costos unitarios en cada etapa son:

Etapa1:\$10.000 Etapa2:\$45 Etapa3:\$70.000 Reproceso: \$ 50.000

ESTADO	OPERACIÓN
E1	Muestreo
E2	Recepción
E3	Análisis
E4	Desecho
E5	Reporte

Ilustración 39. Estados caso Laboratorio RK

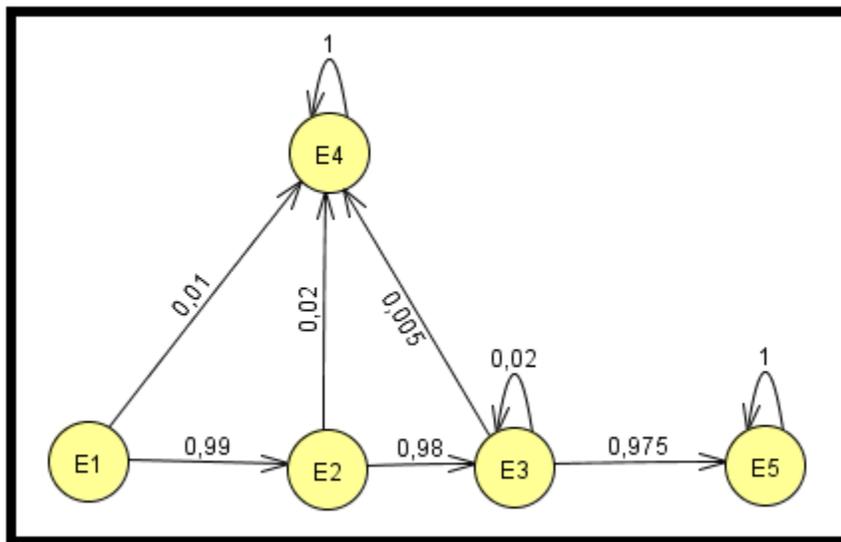


Ilustración 40. Diagrama de transición caso Laboratorio RK

Estados	E1	E2	E3	E4	E5
E1	0	0,99	0	0,01	0
E2	0	0	0,98	0,02	0
E3	0	0	0,02	0,005	0,975
E4	0	0	0	1	0
E5	0	0	0	0	1

Ilustración 41. Matriz de transición de Markov caso Laboratorio RK

$$(I - N)^{-1} * A =$$

Estados	E4	E5
E1	0,077	0,923
E2	0,068	0,932
E3	0,049	0,951

Ilustración 42. Probabilidad de los estados absorbentes del caso Laboratorio RK

Para un Q= 100 (Análisis)

Número de unidades que se deben programar = $100/0.923 = 108.342$

Número de unidades E1-E2= $108.342 * 0.990 = 107.258$

Número de unidades E1-E3= $(0.989/ 1.019) * 108.342 = 105.152$

Número de unidades reprocesadas en E3= $105.152 * 0.01 = 1.997$

Número de unidades E1-E5= $108.342 * 0.923 = 100$

MODELO DE COSTOS

$\$CTE1 = (108.342 * 10.000) = 1,083.420$

$\$CTE2 = (107.258 * 45) = 4826.61$

$\$CTE3 = (105.152 * 70.000) + (1.997 * 50.000) = 7,360.640$

$\$CT = 8, 448,886.61$

$\$CX \text{ por unidad conforme} = 8, 448,886.61/100 = 84,488.866$

Factor de ampliación= $108.342/100 = 1.083$

También se presentan escenarios optimistas, intermedios y pesimistas además de los intervalos de confianza con probabilidad $1-\alpha$ deseados para la toma de decisiones.

		Escenarios ($1-\alpha=95\%$)			
		Pesimista	Intermedio	Optimista	
		Límite inferior	\hat{p}	Límite Superior	ESTADO
n	50	0,962420355	0,99	1,000	E1
$Z_{\alpha/2}$	1,96	0,94119398	0,98	1,000	E2
		0,931724372	0,975	1,000	E3

Ilustración 43. Escenarios con un nivel de confianza del 95% para el caso laboratorio RK.

		Escenarios (1- α =99%)			
		Pesimista	Intermedio	Optimista	
		Límite inferior	\hat{p}	Límite Superior	ESTADO
n	50	0,953696182	0,99	1,000	E1
Z$_{\alpha/2}$	2,58	0,928918606	0,98	1,000	E2
		0,918035142	0,975	1,000	E3

Ilustración 44. Escenarios con un nivel de confianza del 99% para el caso laboratorio RK.

8.1.5 CASO: LABORATORIO QUÍMICO CLÍNICO, EXAMEN MÉDICO OCUPACIONAL PARA MANIPULACIÓN DE ALIMENTOS.

En el laboratorio químico clínico se presta el servicio de médico ocupacional, en donde se oferta exámenes para manipuladores de alimentos los cuales se realizan exámenes paraclínicos, luego exámenes médicos y posteriormente se envía los resultados a la empresa cliente.

De acuerdo con los datos estadísticos muestran que en los exámenes paraclínicos el 20% debe repetirse los exámenes, para los exámenes médicos el 40% debe regresar para la consulta médica por segunda vez, además para la consulta médica, de los resultados que se reciben de paraclínicos en la consulta médica el 10% deben repetirse los exámenes.

ESTADO	OPERACIÓN
E1	Recepción
E2	Paraclínicos
E3	Servicio médico ocupacional
E4	Auxiliar para reproceso desde médicos - paraclínicos
E5	Auxiliar para el mismo proceso paraclínicos
E6	Auxiliar para reproceso de servicio medico
E7	Entrega de resultado al cliente

Ilustración 45. Estados del caso Laboratorio químico clínico.

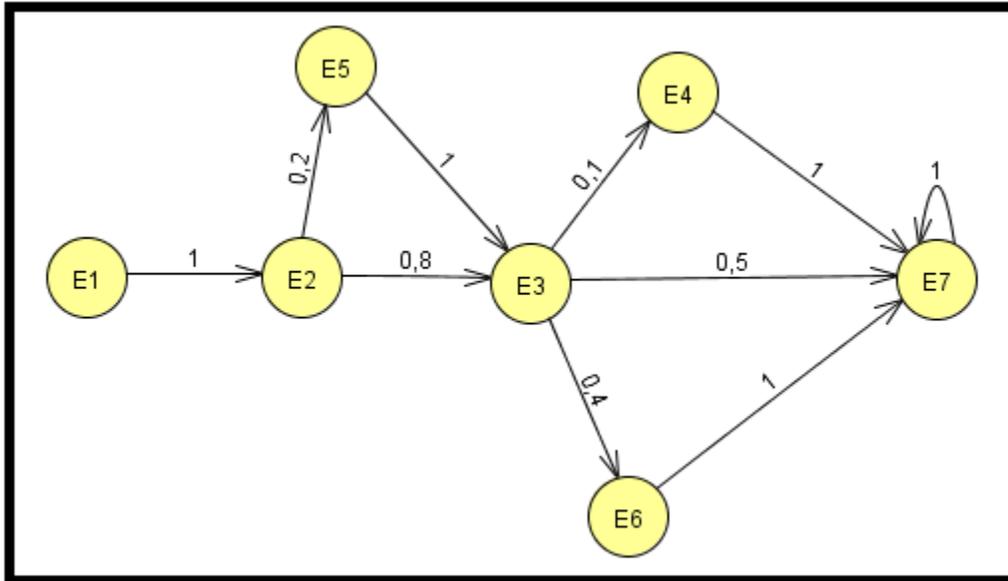


Ilustración 46. Diagrama de transición caso Laboratorio químico clínico.

Estados	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
E1	0	1	0	0	0	0	0
E2	0	0	0,8	0	0,2	0	0
E3	0	0	0	0,1	0	0,4	0,5
E4	0	0	0	0	0	0	1
E5	0	0	1	0	0	0	0
E6	0	0	0	0	0	0	1
E7	0	0	0	0	0	0	1

Ilustración 47. Matriz de transición de Markov caso Laboratorio químico clínico.

$$(I - N)^{-1} * A =$$

	E7
E1	1
E2	1
E3	1
E4	1
E5	1
E6	1

Ilustración 48. Probabilidad de los estados absorbentes del caso Laboratorio químico clínico.

Costos asociados

Costo Recepción de pacientes Etapa 1 (\$/Unidad) 5%= \$ 6.000

Costo Exámenes paraclínicos Etapa 2 (\$/Unidad) 30%=\$ 36.000

Costo Exámenes médicos Etapa 3 (\$/Unidad) 60 %= \$ 72.000

Costo Entrega de Resultados Etapa 7(\$/Unidad) 5 %= \$ 6.000

Costo Total de Producción Si todo fuese perfecto (\$/Unidad)=\$ 120.000

ESTADO	OPERACIÓN	\$
E1	Recepción	\$ 2.400.000
E2	Exámenes paraclínicos	\$ 14.400.000
E3	Exámenes médicos Ocupacional	\$ 28.800.000
E4	Repetir paraclínicos por recomendación del médico	\$ 1.440.000
E5	Repeticiones en paraclínicos x condición del paciente	\$ 2.880.000
E6	Repetición de examen médico	\$ 11.520.000
E7	Entrega de resultado al cliente	\$ 2.400.000

Ilustración 49. Costo promedio equivalente / costo de servicio conformes

\$120.000 a \$159.600 la diferencia \$36.900 equivalente a 1.33.

Del mismo modo que en los casos anteriores se generan los escenarios optimistas, intermedios y pesimistas además de los intervalos de confianza con probabilidad $1-\alpha$ deseados para la toma de decisiones.

		Escenarios			
		Pesimista	Intermedio	Optimista	
n	50	Límite inferior	\hat{p}	Límite Superior	ESTADO
$Z_{\alpha/2}$	1,96	1,000	1,000	1,000	E1
		0,689	0,800	0,911	E2
		0,361	0,500	0,639	E3
		1,000	1,000	1,000	E4
		1,000	1,000	1,000	E5
		1,000	1,000	1,000	E6

Ilustración 50. Escenarios con un nivel de confianza del 95% para el caso laboratorio químico clínico.

		Escenarios			
		Pesimista	Intermedio	Optimista	
n	50	Límite inferior	\hat{p}	Límite Superior	ESTADO
$Z_{\alpha/2}$	2,58	1,000	1,000	1,000	E1
		0,654	0,800	0,946	E2
		0,318	0,500	0,682	E3
		1,000	1,000	1,000	E4
		1,000	1,000	1,000	E5
		1,000	1,000	1,000	E6

Ilustración 51. Escenarios con un nivel de confianza del 99% para el caso laboratorio químico clínico.

8.1.6 CASO: APLICADA AL PROCESO DE FACTURACIÓN D.C

D.C es una organización que brinda servicios de desinfección de baños y distribución de productos de aseo. Actualmente maneja un proceso de facturación centrado en la sucursal principal ubicada en la ciudad de Barranquilla, con el fin de establecer controles en la elaboración de las mismas. Cabe resaltar que las facturas se realizan previo a la prestación del servicio y de una factura por producto así vayan al mismo cliente.

Mensualmente la organización debe generar un número estimado de 1.007 facturas que generan un ingreso de \$130.000.000. Para ello, el proceso de facturación sigue un grupo de etapas secuenciales, en la primera etapa, de elaboración e impresión de facturas, se genera una pérdida del 8% representadas en facturas anuladas y un 8% de reproceso de las mismas para elaborar las acordes al servicio.

Seguido a esta etapa, se realiza la Revisión de la facturación en la cual a través de un proceso exhaustivo se genera un 95% de facturas conformes, las cuales se proceden a despachar a las distintas ciudades.

Una vez dicho envío llega a la sucursal respectiva, se procede a realizar una segunda revisión con el fin de verificar que lo solicitado inicialmente corresponda con la cantidad y especificación recibida, generándose a pesar de los controles anteriores, un 2% de facturas anuladas, radicándose al final a los clientes el 98% de lo que inicialmente se requería facturar, lo que genera retraso en los pagos a la organización.

Lastimosamente, a pesar que se están siguiendo los controles y que se programa mensualmente la solicitud de facturas en blanco al proveedor, de acuerdo con los estimados calculados para la facturación de los servicios, se genera un faltante de materia prima para proceder a cumplir con la facturación ya que el número de cajas de facturas solicitadas no dan abasto para todo lo que al final se requiere, por lo que se presenta pérdida de tiempo.

ESTADO	OPERACIÓN
E1	Elaboración e Impresión de Facturas
E2	Reproceso de Factura Apoyo a E1
E3	Revisión Facturas
E4	Despacho a Ciudades
E5	Revisión de Facturas Recibidas
E6	Radicación
E7	Desecho (Facturas Anuladas)

Ilustración 52. Estados del caso D.C

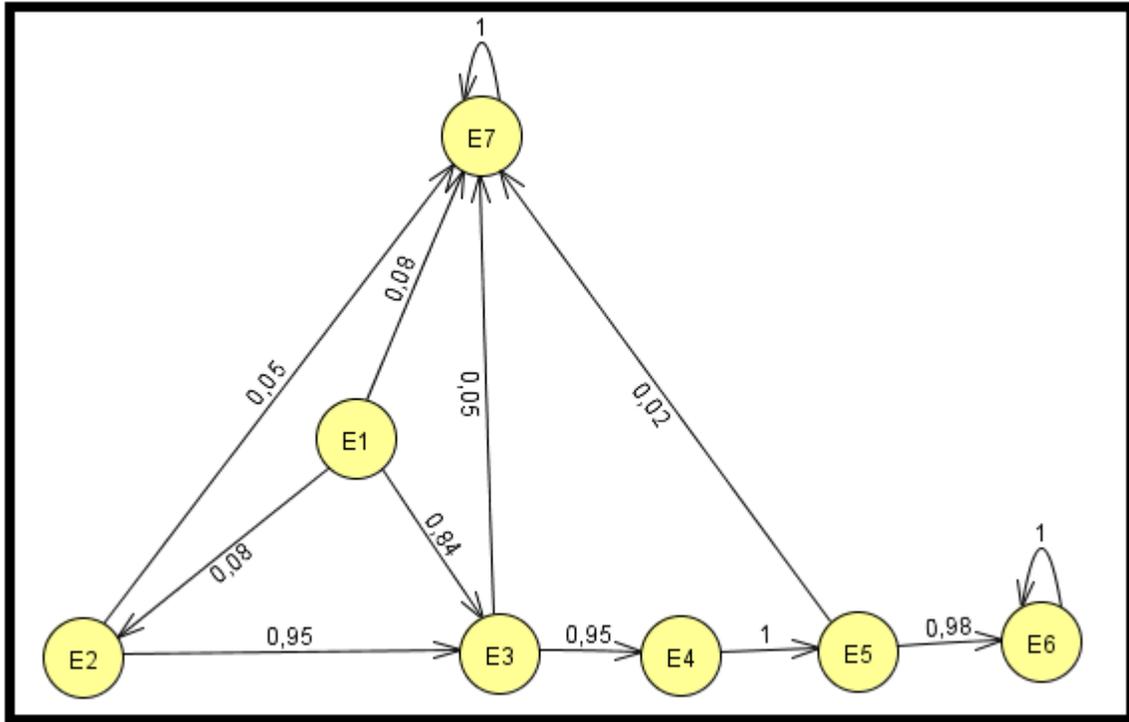


Ilustración 53. Diagrama de transición caso D.C

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
E1	0	0,08	0,84	0	0	0	0,08
E2	0	0	0,96	0	0	0	0,04
E3	0	0	0	0,95	0	0	0,05
E4	0	0	0	0	1	0	0
E5	0	0	0	0	0	0,98	0,02
E6	0	0	0	0	0	1	0
E7	0	0	0	0	0	0	1

Ilustración 54. Matriz de transición de Markov caso D.C

$$(I - N)^{-1} * A =$$

	E6	E7
E1	0,854	0,146
E2	0,894	0,106
E3	0,931	0,069
E4	0,98	0,02
E5	0,98	0,02

Ilustración 55. Probabilidad de los estados absorbentes del caso D.C

Datos de costos

DESCRIPCIÓN	VALOR
Horas - Hombre	\$96
Energía	\$500
Materia Prima	\$200
Envío	\$192

	VALOR
Costos Etapa 1	\$796
Costos Etapa 3	\$96
Costos Etapa 4	\$192
Costos Etapa 5	\$96
Costo Reproceso	\$996

Dado que la **Etapa 2** representa Reproceso de Facturas como apoyo a la **Etapa 1**, Elaboración e Impresión de Facturas, el costo de esta etapa es el de Reproceso.

Datos Iniciales

- Número de Facturas Conformes Requeridas al final de la línea de Producción **1.007**
- El costo del proceso ideal, es decir, sin reproceso ni pérdidas es igual a \$ **1.180,31**
- La eficiencia del proceso de facturación es del **85,4%**

ETAPA 1: (ELABORACIÓN E IMPRESIÓN DE FACTURAS)

- Se requieren programar o tener disponible **1.028** Facturas para que Puedan obtenerse 1.007 Facturas Conformes radicadas
- El costo de elaboración de las facturas que se requieren para generar al final del proceso 1.007 (**1.028 Unid.**) es de \$ **801.572**

ETAPA 2: REPROCESO DE FACTURA APOYO A LA ETAPA 1

- La Proporción de Unidades que salen de la etapa de elaboración y que llegan a la etapa de apoyo de reproceso es de 0,080000006
- El número de facturas que llegan a esta etapa para ser reprocesadas es de **82,20** generando un costo de \$ **81.875**

ETAPA 3: REVISIÓN FACTURAS

- La Proporción de Unidades que llegan a la etapa de revisión es de 0,91700006
- El Número de facturas que llegan a esta etapa para ser revisadas por la asistente de facturación es de **981,52** generando un costo de \$ **90.457,38**

ETAPA 4: DESPACHO A CIUDADES

- La Proporción de Unidades que son despachadas a las ciudades es de 0,87100005
- El Número de facturas que son despachadas a las ciudades es de **894,99** generando un costo de **\$ 172.114,81**

ETAPA 5: REVISIÓN DE FACTURAS RECIBIDAS

- La Proporción de Unidades que llegan a la etapa de revisión en cada ciudad es de 0,87100005
- El Número de facturas que llegan a esta etapa para ser revisadas por la asistente de facturación es de **894,99** generando un costo de **\$ 85.919,71**

COSTOS REALES

	MONTO
Costo Real Etapa 1	\$801.572,00
Costo Real Etapa 2	\$81.875,27
Costo Real Etapa 3	\$90.457,38
Costo Real Etapa 4	\$172.114,81
Costo Real Etapa 5	\$85.919,71

Costo real total de fabricación = \$ 1.231.939,17

Costo promedio equivalente por unidad conforme (\$/factura) = \$ 1.223,38

FACTOR DE AMPLIFICACIÓN

$$\frac{\text{No. Facturas a programar}}{\text{No. Facturas Requeridas}} = \frac{1,028}{1,007}$$

Igualmente en este caso se generan los escenarios optimistas, intermedios y pesimistas además de los intervalos de confianza con probabilidad $1-\alpha$ deseados para la toma de decisiones.

		Escenarios (1- α =95%)			
		Pesimista	Intermedio	Optimista	
n	50	Límite inferior	\hat{p}	Límite Superior	ESTADO
$Z_{\alpha/2}$	1,96	0,738	0,840	0,942	E1
		0,890	0,950	1,000	E2
		0,890	0,950	1,000	E3
		1,000	1,000	1,000	E4
		0,941	0,980	1,000	E5

Ilustración 56. Escenarios con un nivel de confianza del 95% para el caso proceso de facturación D.C.

		Escenarios (1- α =99%)			
		Pesimista	Intermedio	Optimista	
n	50	Límite inferior	\hat{p}	Límite Superior	ESTADO
$Z_{\alpha/2}$	2,58	0,706	0,840	0,974	E1
		0,870	0,950	1,000	E2
		0,870	0,950	1,000	E3
		1,000	1,000	1,000	E4
		0,929	0,980	1,000	E5

Ilustración 57. Escenarios con un nivel de confianza del 99% para el caso proceso de facturación D.C.

9. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- El modelo propuesto busca determinar los costos de no calidad por desperdicios y reproceso en cada una de las estaciones de trabajo, así como los costos por unidades no conformes detectadas, los costos incurridos en la retención de productos debido a un error humano y los costos por despacho de productos con no conformes.
- Se puede decir que las cadenas de Markov son una herramienta para analizar el comportamiento de determinados tipos de procesos estocásticos, procesos que evolucionan de forma no determinística a lo largo del tiempo en torno a un conjunto de estados, por tal razón el modelo desarrollado es aplicable a cualquier sistema que cumpla con estas características.
- El modelo propuesto es genérico y se puede adaptar a muchos escenarios que cumplan con las necesidades de los usuarios.
- El modelo permite evaluar previamente diferentes escenarios y mejorar así la toma de decisiones en la planeación, programación y monitoreo de su(s) línea(s) de producción.
- Se observa que con los valores de estado estable de la matriz Markoviana se puede calcular el rendimiento del Proceso y encontrar el factor de amplificación para la previa programación de los recursos y los costos totales asociados a cada operación y al costo total final unitario.
- Los intervalos de confianza muestran el rango en el cual se encuentra la proporción de producto conforme de cada operación de los sistemas estudiados. Se presentan como escenario optimista el límite superior del intervalo de confianza (muestra la mejor opción posible dentro del intervalo) como pesimista el límite inferior (muestra la peor opción posible dentro del intervalo) y como intermedio el valor promedio.
- Se recomienda en investigaciones futuras, desarrollar un modelo de decisión Markoviano dinámico con estados finitos, además desarrollar una metodología para la obtención de los costos directos e indirectos de producción, también se propone hacer un estudio de calidad directamente sobre la línea de producción, es decir, estudiar la variabilidad y capacidad del

proceso, hacer un seguimiento del mismo para mirar su comportamiento a través del tiempo.

10. BIBLIOGRAFÍA.

1. Barbosa y Galindo (2013) ANALYSIS OF CSP-1 UNDER INFALLIBLE AND FALLIBLE INSPECTION SYSTEMS.
2. Barbosa, R y Llinas H.(2014) Procesos estocásticos con aplicaciones.
3. Barbosa, R. (2017) Monitoreo y control estadístico de procesos.
4. Bertrand L. Hansen, P. M. (1990). Control de calidad: Teoría y aplicaciones. Madrid: Diaz de Santos.
5. Bessent, W. (1980). Student Education Flow in a University Department Results. Pag:8. Journal of Management Science.
6. BESTERFIELD Dale, Control de calidad, Capitulo 9.
7. Caballero. (2004). Cadenas de Markov: Un enfoque elemental. Sociedad Matematica Mexicana.
8. Caicedo y Mahecha (2015) Método de evaluación de las reglas de cambio entre planes de inspección normal y reducida con base en tablas Military Standard 105e
9. Chakraborty, S. and Rathie, U. K. (1989) Analysis of inspection error through GERT. Sankhyā, 51, Ser. B, Pt. I, 125-133.
10. Cohen, J. (2009). Diseño de un modelo matemático-estadístico bajo los lineamientos de las teorías bayesianas y markovianas de estados probabilísticos aplicados a los planes csp de muestreo por aceptación en producción continua y por lotes. Barranquilla.
11. Dodge, F. (1943). A sampling plan for continuous production. Ann. Math. Statist. 14, 3, 264-279.
12. Duncan J. Acheson. "Control de Calidad y Estadística Industrial"
13. Everett E. Adam, R. J. (1991). Administración de la producción y las operaciones: conceptos, modelos y funcionamiento. Pearson Educación.
14. Galindo-Pacheco, G. M., Paternina-Arboleda, C. D., Barbosa-Correa, R. A., & Llinás-Solano, H. (2012). Non-linear programming model for cost minimization in a supply chain, including non-quality and inspection costs. Int. J. Operational Research, Vol. 14.

15. Ghosh, D. T. (1988). A continuous sampling plan that minimizes the amount of inspection. *Sankhyā*, 50, Ser. B, Pt. 3, 412-427.
16. Govindaraju, K. (1989). Procedures and tables for the selection of CSP - 1 plans. *Jour. Quality Technology*, 21, 1, 46-50.
17. Heßler A., Schwindt C. (2018) Markov Models for System Throughput Analysis in Warehouse Design. In: Fink A., Fügenschuh A., Geiger M. (eds) *Operations Research Proceedings 2016. Operations Research Proceedings (GOR (Gesellschaft für Operations Research e.V.))*. Springer, Cham
18. Hoel, (1972). *Introducción a los procesos estocásticos*. Universidad de California.
19. Karlin, S. (1975). *Un primer curso de procesos estocásticos*.
20. Madrid E. (2012). *Aplicación de modelos markoviano a los sistemas de producción en serie*
21. Montgomery, D C. *Control estadístico de la calidad*. Grupo editorial Iberoamericana.
22. Montgomery, D. C. (1980). The Economic Design of control Charts: A Renewal and Literature Survey. Pag:75-87. *Journal of Quality Technology*.
23. Ohta, H. And Kase, S. (1984). GERT analysis of economic design of Dodge's CSP-1 continuous sampling plan under inspection error. *Frontiers in Quality Control*, 2, Ed. by Lenz et al., 247-260. Physica-Verlag.
24. Palafox Martha (2009). *Inferencia estadística para cadenas de Markov*.
25. Perez, P. (2000). *CSP I*. BOGOTA: PANAMERICANA.
26. R. Sampath Kumar, S. S. (2012). Selection Of Mixed Sampling Plan With CSP-1 (C=2) Plan As Attribute Plan Indexed Through MAPD AND MAAOQ . *International Journal of Scientific & Engineering Research*, Volume 3.
27. Rios (2011) *DESIGN OF A SINGLE SAMPLING ATTRIBUTES IN SEARCH OF A SOCIAL OPTIMUM*.
28. ROSS, S., 1996. *Stochastic Processes 2da. Ed. B. Wiley, ed., John Wiley & sons, Inc.*
29. Seyedshams Feyzabadi y Stefano Carpin (2017) *Planning using hierarchical constrained Markov decision processes*.

30. SHANKAR, G. AND MOHAPATRA, B. N. (1994). GERT Analysis of Dodge's CSP-1 continuous sampling plan. Sankhya: The Indian Journal of Statistics 1994, Volumen 56,3, 468 - 478
31. STEPHENS, K. S. (1981). CSP - 1 for consumer protection. Jour. Quality Technology, 13, 4, 249-253.
32. Ugene A. Feinberg y Yan Liang (2017) Reliability Assessment of Production Process Markov Modelling Approach.
33. WALPOLE & MYERS, "Probabilidad y Estadística", McGraw-Hill 1992.
34. WINSTON, W.L., 2008. Investigación de operaciones, aplicaciones y algoritmos 4a. ed. J. Arellano, ed., México D.F.: Cengage Learnin
35. J. Behnamian (2017). A Markovian approach for multi-level multi-product multi-period capacitated lot-sizing problem with uncertainty in levels.
36. V. Madhusudanan Pillai (2008) An absorbing Markov chain model for production systems with rework and scrapping
37. Chih-Hsiung Wang (2003) Determining the optimal production–maintenance policy with inspection errors: using a Markov chain.
38. Naoufel Cheikhrouhou (2009) A Markovian model for the hybrid manufacturing planning and control method 'Double Speed Single Production Line
39. Arellano, ed., México D.F.: Cengage Learnin