



David José dos Santos Henriques

Mestre em Engenharia Civil

**Análise e modelação avançada de vigas mistas
aço-betão utilizando a
Teoria Generalizada de Vigas**

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em
Engenharia Civil

Orientador: Rodrigo de Moura Gonçalves, Professor Associado,
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade
Nova de Lisboa

Co-orientador: Dinar Reis Zamith Camotim, Professor Catedrático,
Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa

Júri

Presidente: Prof. Doutor Fernando Manuel Anjos Henriques

Arguentes: Prof. Doutor Luís Manuel Calado de Oliveira Martins
Prof. Doutor João Rocha de Almeida

Vogais: Prof. Doutor Paulo Jorge de Melo Matias Faria de Vila Real
Prof. Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves
Prof. Doutor Corneliu Cismasiu
Prof. Doutor Carlos Filipe Ferreira de Sousa

Análise e modelação avançada de vigas mistas aço-betão utilizando a Teoria Generalizada de Vigas

Copyright © David José dos Santos Henriques, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Esta tese é o culminar de toda a investigação que foi feita durante o doutoramento. Foram vários os anos entre a vida académica e profissional, cuja conciliação nem sempre foi fácil, sendo apenas possível graças aos incentivos e bons conselhos de várias pessoas, que merecem o meu maior agradecimento.

Neste último ano, a importância da vida académica no meu percurso profissional e pessoal tornou-se evidente. Ter trabalhado diariamente com alguém cujas capacidades intelectuais e pedagógicas são extraordinárias, foi das maiores oportunidades que me foram proporcionadas. Por esta razão, deixo o meu maior agradecimento ao meu orientador, o Professor Rodrigo de Moura Gonçalves, sem o qual este trabalho não seria possível. Espero continuar a ter o privilégio de trabalhar consigo durante muito tempo.

Agradeço ao Professor Dinar Camotim as suas preciosas ajudas na revisão dos artigos e tese.

Aos professores Carlos Sousa e Mário Pimentel, gostaria de agradecer a sua ajuda e orientação, nomeadamente na introdução ao complexo mundo nos modelos de fenda distribuída. Em particular, agradeço ao professor Carlos, cuja paciência, conhecimento e disponibilidade na elaboração dos modelos no *DIANA*, tornaram possível a validação do elemento finito do Capítulo 6.

Agradeço à Fundação para a Ciência e a Tecnologia o apoio financeiro através da bolsa de doutoramento SFRH/BD/139585/2018.

Não existem palavras suficientes para expressar a minha gratidão a ti, Vanessa, por toda a tua paciência, resiliência e apoio.

Aos meus queridos pais e irmão obrigado pelos vossos conselhos, incentivos e ajuda.

Agradeço a companhia, a enorme ajuda e os bons momentos aos meus colegas de doutoramento David Manta, Guilherme Coelho, Hugo Rebelo e Nuno Peres.

Finalmente, agradeço ainda ao Engenheiro Carlos Batista a compreensão da importância que a investigação tem para mim. Ao Sr. José Matos agradeço todos os seus bons conselhos e fantásticas conversas que tanto me influenciaram profissionalmente e pessoalmente.

Resumo

Neste trabalho mostra-se que os elementos finitos de barra baseados na Teoria Generalizada de Vigas (GBT, *Generalised Beam Theory*), constituem uma alternativa viável e vantajosa — *i.e.*, conduzem a resultados precisos com reduzido esforço computacional — face aos elementos de volume e de casca, para modelar o comportamento linear e não-linear de vigas mistas aço-betão. Para o efeito, desenvolvem-se, implementam-se e validam-se três elementos finitos com diferentes âmbitos de aplicação e níveis de complexidade.

O primeiro elemento destina-se a modelar o comportamento fisicamente não-linear de vigas mistas, incluindo as fases de pré- e pós-colapso, tendo em conta a fendilhação e esmagamento do betão, a plastificação do aço e o efeito de *shear lag*. O segundo elemento finito permite determinar cargas de bifurcação e modos de instabilidade locais/distorcionais de vigas mistas, tendo em conta a fendilhação e a deformação da secção transversal (incluindo o efeito de *shear lag*). A fluência do betão e o faseamento construtivo podem também ser considerados, muito embora de maneira simplificada. Finalmente, o terceiro elemento finito tem em conta a fluência e a fendilhação (modelo de fenda fixa distribuída) de uma forma rigorosa, para além da deformação da secção, incluindo o efeito de *shear lag*.

Os exemplos numéricos apresentados mostram claramente que os elementos finitos propostos, para além de serem muito precisos, envolvem um custo computacional bastante reduzido. Para além disso, as características únicas de decomposição modal da GBT permitiram retirar algumas conclusões significativas sobre o comportamento estrutural de vigas mistas aço-betão e obter, por exemplo, fórmulas analíticas para quantificar o efeito de *shear lag* elástico.

Palavras-chave: Vigas mistas aço-betão. Teoria generalizada de vigas (GBT). Elementos finitos de barra. Análises fisicamente não-lineares. Deformação da secção transversal.

Abstract

Analysis and advanced modelling of steel-concrete composite beams using Generalized Beam Theory

In this work it is shown that beam finite elements based on Generalized Beam Theory (GBT) constitute a viable and advantageous alternative — *i.e.*, they lead to accurate results with a reduced computational effort — to volume and shell elements, to model the linear and non-linear behaviour of steel-concrete composite beams. For this purpose, three finite elements with different application fields and levels of complexity are developed, implemented and validated.

The first element is intended to model the physically non-linear behaviour of composite beams, including pre- and post-collapse stages, considering concrete cracking and crushing, steel plasticity and shear lag. The second finite element makes it possible to determine local/distortional bifurcation loads and buckling modes of composite beams, taking into account cracking and cross-section deformation (including shear lag). Concrete creep and the sequence of construction can also be considered, although in a simplified manner. Finally, the third finite element considers creep and cracking (fixed smeared crack model) in a rigorous manner, in addition to cross-section deformation, including the shear lag effect.

The numerical examples presented clearly show that the proposed finite elements, besides being very precise, involve a very low computational cost. In addition, the unique modal decomposition features of GBT made it possible to draw some significant conclusions concerning the structural behaviour of steel-concrete composite beams and to obtain, for example, analytical formulas that quantify the elastic shear lag effect.

Keywords: Steel-concrete composite beams. Generalized Beam Theory (GBT). Beam finite elements. Physically non-linear analyses. Cross-section deformation.

Índice

Lista de figuras	xv
Lista de tabelas	xxi
Lista de abreviaturas, acrónimos, siglas e símbolos	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Considerações gerais	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Organização da Tese	4
1.4 Publicações	4
2 Conceitos fundamentais	5
2.1 Introdução	5
2.2 Notação	5
2.3 Teoria Generalizada de Vigas (GBT)	6
2.3.1 Equações fundamentais	8
2.3.2 Formulação de elementos finitos	17
2.4 Implementação computacional	22
3 Análise fisicamente não-linear de vigas mistas aço-betão	29
3.1 Introdução	29
3.2 Revisão da literatura	30
3.3 Especificidades do elemento finito proposto	39
3.3.1 Lei constitutiva para o aço	44
3.3.2 Lei constitutiva para o betão	46
3.3.3 Formulação do elemento finito	48
3.4 Exemplos de aplicação e validação	49
3.4.1 <i>Shear lag</i> elástico em vigas mistas simplesmente apoiadas	49
3.4.2 Soluções analíticas para <i>shear lag</i> elástico	55
3.4.3 Vigas mistas aço-betão com laje curta	57
3.4.4 Placa de aço com reforço longitudinal	61
3.4.5 Viga mista simplesmente apoiada com laje larga	66

3.5	Sumário	72
4	Encurvadura de vigas mistas aço-betão	75
4.1	Introdução	75
4.2	Revisão da literatura	85
4.3	Especificidades do elemento finito proposto	86
4.3.1	Generalidades	86
4.3.2	Análise de pré-encurvadura	87
4.3.3	Análise de bifurcação	91
4.4	Exemplos de aplicação e validação	96
4.4.1	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a momento negativo . . .	98
4.4.2	Placa simplesmente apoiada sujeita ao corte puro	100
4.4.3	Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído	101
4.5	Sumário	117
5	Fluência do betão em vigas mistas aço-betão	119
5.1	Introdução	119
5.2	Revisão da literatura	119
5.3	Especificidades do elemento finito proposto	121
5.3.1	Lei constitutiva para o aço	121
5.3.2	Lei constitutiva para o betão	121
5.3.3	Formulação do elemento finito	123
5.4	Exemplos de aplicação e validação	124
5.4.1	Consola de betão sujeita a flexão-torção	126
5.4.2	Viga mista simplesmente apoiada	130
5.4.3	Viga mista simplesmente apoiada com duplo caixão de aço	135
5.5	Sumário	141
6	Fluência e fendilhação em vigas mistas aço-betão	143
6.1	Introdução	143
6.2	Especificidades do elemento finito proposto	143
6.2.1	Lei constitutiva para o aço	144
6.2.2	Combinação da fluência e da fendilhação	144
6.2.3	Formulação do elemento finito	148
6.3	Exemplos de aplicação e validação	150
6.3.1	Placa de betão simples	151
6.3.2	Flexão de uma viga mista em consola	153
6.3.3	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica .	164
6.4	Sumário	177
7	Conclusões e desenvolvimentos futuros	179
7.1	Conclusões	179

7.2 Desenvolvimentos futuros	181
Referências	185

Lista de figuras

2.1	Primeiros quatro modos de deformação (modos clássicos) para secções mistas aço-betão: (a) secção com uma viga de aço em I e (b) secção com dois caixões de aço.	7
2.2	Primeiros seis modos de deformação para uma secção em C com reforços, obtidos com o programa GBTUL.	8
2.3	Secção arbitrária de parede fina com três paredes (os eixos locais de cada parede são indicados na figura).	9
2.4	Ilustração da hipótese de Kirchhoff (neste caso $w_{,x} < 0$).	10
2.5	Parcela de membrana u e de flexão $-zw_{,x}$ de U_x (adaptado de Schardt, 1989).	11
2.6	Funções de interpolação cúbicas de Hermite.	18
2.7	Funções de interpolação de Lagrange quadráticas hierárquicas.	19
2.8	Método de Newton-Raphson para sistemas com um grau de liberdade.	24
2.9	Montagem da matriz global \mathbf{K}_t e dos vetores globais $\mathbf{F}, \mathbf{Q}, \mathbf{g}$	26
3.1	Determinação largura efetiva tendo em conta a variação na espessura das tensões longitudinais (Chiewanichakorn et al., 2004).	31
3.2	Modelo de elementos finitos utilizado por Chen et al. (2007).	32
3.3	Variação do efeito de <i>shear-lag</i> com: (a) a espessura da laje, (b)-(d) o aumento da carga, (c) tipo de carga aplicada. (Castro et al., 2007).	34
3.4	Modelo de Sun e Bursi (2005) e função de empenamento.	35
3.5	Funções de empenamento adotadas por Gara et al. (2011a).	35
3.6	Função de empenamento para a laje (Gara et al., 2014).	36
3.7	Secção transversal considerada por Hu et al. (2017).	36
3.8	Modelos considerados por Zona e Ranzi (2011): (a) duas vigas de Euler-Bernoulli (laje-viga), (b) viga de Euler-Bernoulli (laje) e viga de Timoshenko (perfil de aço) e (c) duas vigas de Timoshenko (laje e perfil de aço).	39
3.9	Vigas simplesmente apoiadas estudadas por Zona e Ranzi (2011).	40
3.10	Vigas contínuas estudadas por Zona e Ranzi (2011).	40
3.11	Secção-tipo adotada e respetiva discretização.	41
3.12	Modos de deformação considerados para a análise fisicamente não-linear.	43
3.13	Modos de deformação “combinados” — <i>shear lag</i> linear e quadrático.	44

3.14	Lei constitutiva para o betão:(a) tensões normais de compressão e (b) tensões de corte.	47
3.15	Graus de liberdade do elemento finito com 17 GDL (são representadas as funções de interpolação associadas a cada GDL).	49
3.16	<i>Shear lag</i> elástico em vigas mistas simplesmente apoiadas: (a) geometria da secção transversal, carregamento e propriedades dos materiais, (b) modelos de elementos <i>brick</i> e (c) superfície neutra obtida com o modelo mais refinado de elementos <i>brick</i>	50
3.17	<i>Shear lag</i> elástico em vigas mistas simplesmente apoiadas: funções de amplitude da GBT.	51
3.18	<i>Shear lag</i> elástico em vigas mistas simplesmente apoiadas: distribuição de tensões normais longitudinais (σ_{xx}) no meio-vão e a meia altura da laje.	53
3.19	<i>Shear lag</i> elástico em vigas mistas simplesmente apoiadas: distribuição de tensões σ_{xx} e σ_{xy} na superfície média da laje.	54
3.20	Soluções analíticas: variação (a) do parâmetro de deformação $\bar{\epsilon}$ e (b) da relação das funções de amplitude modais SQ/SL com o parâmetro α	56
3.21	Lei constitutiva uniaxial para o betão no programa <i>ATENA</i> (Cervenka et al., 2013).	57
3.22	Vigas mistas aço-betão com laje curta: (a) geometria da secção transversal e propriedades dos materiais, (b) modelo de elementos <i>brick</i> mais refinado (modelo 2).	58
3.23	Vigas mistas aço-betão com laje curta: (a-b) gráficos carga-deslocamento para a viga simplesmente apoiada, (c) gráfico carga-deslocamento para a viga em consola e (d) deformação plástica equivalente na consola, no colapso (modelo de elementos <i>brick</i>).	59
3.24	Placa de aço com reforço longitudinal: (a) geometria da placa e propriedades do material, (b) gráfico carga-deslocamento.	62
3.25	Placa de aço com reforço longitudinal: funções de amplitude modais da GBT.	63
3.26	Placa de aço com reforço longitudinal: (a) configurações deformadas e evolução da plastificação na superfície média, e (b) deformada e tensões efetivas.	65
3.27	Viga mista simplesmente apoiada com laje larga: (a) geometria da secção transversal e parâmetros dos materiais, (b) modelo de elementos <i>brick</i> e (c) gráficos carga-deslocamento.	67
3.28	Viga mista simplesmente apoiada com laje larga: gráficos carga-deslocamento.	68
3.29	Viga mista simplesmente apoiada com laje larga: deformações longitudinais ϵ_{xx} na superfície média de um quarto da laje e deslocamentos verticais a meio vão iguais a (a) 20,05 mm e (b) 41,13 a 153,9 mm.	70
3.30	Viga mista simplesmente apoiada com laje larga: (a) 153,9 a 273,8 mm e (b) 41,13 a 273,8 (neste último caso os resultados da GBT são obtidos sem limitação de tensões tangenciais).	71

3.31	Viga mista aço-betão simplesmente apoiada com banzo de betão largo: evolução da fendilhação com o aumento do deslocamento vertical a meio-vão (modelo de elementos <i>brick</i>)	73
4.1	Modo de instabilidade de vigas mistas sujeitas a momento negativo (a) modo distorcional e (b) modo local; (c) modelo da “estrutura em U invertido”.	75
4.2	Coefficientes C4 (CEN, 1992).	77
4.3	Modelos de cálculo da rigidez da laje k_1 e determinação dos parâmetros α	78
4.4	Modelo de Hanswille (2002) para determinar o momento crítico distorcional de vigas mistas.	79
4.5	Comparação entre os modelos: (a) de viga em fundação elástica e (b) de encurvadura distorcional de vigas mistas (Hanswille, 2002).	80
4.6	Fatores β , α e A para: vigas (a) sujeitas a momentos de extremidade e (b) com cargas uniformemente distribuídas e momentos de extremidade (Hanswille, 2002).	82
4.7	Modo de deformação distorcional: (a) perspectiva, (b) alçado frontal e (c) vista em planta do empenamento do banzo superior (a laje não está representada).	83
4.8	Viga simplesmente apoiada sujeita a momento uniforme: (a) geometria da secção transversal e propriedades dos materiais, e (b) variação do momento crítico com o comprimento da viga (Gonçalves e Camotim, 2010).	83
4.9	Encurvadura de vigas mistas aço-betão: (a) geometria da secção transversal, (b) discretização da secção (os eixos locais são representados) e (c) modos de deformação usados na análise de pré-encurvadura.	88
4.10	Estados de tensão para (a) $\varepsilon_{xx} \geq 0$ e (b) $\varepsilon_{xx} < 0$ com $\varepsilon_{xy} \neq 0$	90
4.11	Encurvadura de vigas mistas aço-betão: (a) graus de liberdade no plano da secção para a análise de bifurcação, (b) respetivos modos de deformação, (c) modo de deformação distorcional “ortogonal” e (d) modos locais na alma do perfil.	92
4.12	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a momento negativo: (a) geometria, carregamento e propriedades do material, (b) gráfico momento crítico - comprimento e (c) participação modal.	97
4.13	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a momento negativo: discretização da secção para aplicação do método das faixas finitas.	98
4.14	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a momento negativo: modos de instabilidade para $L = 2$, $L = 10, 5$ e $L = 16$ m.	99
4.15	Placa simplesmente apoiada sujeita ao corte puro.	100
4.16	Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: geometria, carregamento e propriedades dos materiais.	101
4.17	Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: modelação “iterativa”.	103

LISTA DE FIGURAS

4.18	Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: cargas críticas e participações modais para a análise não-fendilhada ($t_w = 15$ mm).	104
4.19	Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: modos de instabilidade obtidos na análise não-fendilhada ($t_w = 15$ mm).	105
4.20	Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: cargas críticas e participações modais para a análise não-fendilhada ($t_w = 30$ mm).	107
4.21	Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: modos de instabilidade obtidos na análise não-fendilhada ($t_w = 30$ mm).	108
4.22	Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: cargas críticas e participações modais para a variação da espessura da alma.	110
4.23	Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: modos de instabilidade resultantes da variação da espessura da alma.	111
4.24	Fendilhação na superfície média da viga mista contínua da figura 4.16 (apenas se representa um vão).	113
4.25	Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: cargas críticas, participações modais e modos de instabilidade para a análise fendilhada ($t_w = 15$ mm).	114
4.26	Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: cargas críticas, participações modais e modos de instabilidade para a análise fendilhada ($t_w = 30$ mm).	115
4.27	Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: variação da carga crítica com a relação entre o carregamento de curto/longo prazo.	117
5.1	Tensão normal longitudinal na laje de betão a 28 e 20000 dias numa ponte atirantada (Gara et al., 2011b).	120
5.2	Cadeia de elementos de Kelvin.	122
5.3	Função exata, série de Dirichlet obtida e pontos de amostragem para a (a) função de fluência e (b) função de relaxação.	125
5.4	Consola de betão sujeita a flexão-torção: (a) geometria e carregamento, (b) modos de deformação e (c) evolução do deslocamento vertical com o tempo.	128
5.5	Consola de betão sujeita a flexão-torção: configurações deformadas, para $t = 10^{-8}$ e $t = 10^6$ dias, (a) perspetiva, (b) alçado lateral e (c) alçado frontal.	129
5.6	Viga mista em consola: (a) geometria da secção transversal, (b) discretização da secção (os eixos locais são representados) e (c) modos de deformação.	131
5.7	Viga mista em consola: (a) modelo de elementos de casca e modelo estrutural, (b) evolução no tempo do deslocamento vertical a meio-vão.	132
5.8	Viga mista em consola: configurações deformadas obtidas com os modelos de elementos finitos da GBT (8 elementos) e de casca.	133
5.9	Viga mista em consola: (a)-(b) funções de amplitude modais, (c) deformação longitudinal de membrana a meio-vão e (d) tensões normais longitudinais nos pontos de integração mais próximos do meio-vão e da face superior da laje.	136

5.10	Viga mista simplesmente apoiada com duplo caixão de aço: (a) geometria da secção transversal, (b) discretização da secção (os eixos locais são representados) e (c) modos de deformação.	137
5.11	Viga mista simplesmente apoiada com duplo caixão de aço: (a) modelo de elementos de casca e modelo estrutural, (b) evolução no tempo do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga.	138
5.12	Viga mista simplesmente apoiada com duplo caixão de aço: deslocamento vertical do alinhamento longitudinal do ponto de aplicação da carga.	139
5.13	Viga mista simplesmente apoiada com duplo caixão de aço: alçado frontal das configurações deformadas para $t = 10^{-8}$ e $t = 10^6$	140
6.1	Modelo de decomposição de deformação considerando fendilhação e fluência.	145
6.2	Eixos globais e locais para uma fenda.	145
6.3	Lei constitutiva uniaxial da fenda.	147
6.4	Casos possíveis para duas fendas ortogonais (adaptado de Póvoas, 1991).	148
6.5	Placa de betão simples: (a) geometria, carregamento e propriedades do material e (b) modos de deformação.	151
6.6	Placa de betão simples: gráfico carga-deslocamento obtido com o elemento da GBT e o elemento CQ18M.	152
6.7	Placa de betão simples: evolução da fendilhação com o deslocamento, obtida com o elemento da GBT e o elemento CQ18M.	154
6.8	Placa de betão simples: análise no tempo para um deslocamento de (a) $d_0 = 0, 1$ mm e (b) $d_0 = 0,4$ mm.	155
6.9	Flexão de uma viga mista em consola: (a) geometria, carregamento e propriedades dos materiais, (b) modos de deformação da GBT e (c) modelo de elementos de casca CQ40S.	156
6.10	Flexão de uma viga mista em consola: gráfico carga-deslocamento.	157
6.11	Flexão de uma viga mista em consola: evolução da fendilhação nos modelos de elementos finitos da GBT e de casca CQ40S.	159
6.12	Flexão de uma viga mista em consola: funções de amplitude dos modos de deformação para $d = 4,0$ mm.	160
6.13	Flexão de uma viga mista em consola: funções de amplitude dos modos de deformação para $d = 30$ mm.	161
6.14	Flexão de uma viga mista em consola (análise no tempo): (a) evolução do deslocamento vertical d com o tempo t e (b)-(d) funções de amplitude dos modos de deformação ao longo do comprimento para $t = 0$ dias e $t = 1000$ dias.	162
6.15	Flexão de uma viga mista em consola (análise no tempo): configurações deformadas iniciais e finais obtidas com os elementos finitos da GBT e de casca CQ40S.	163
6.16	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: geometria, carregamento e propriedades dos materiais.	164

6.17	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: GDL da secção transversal.	165
6.18	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: modos de deformação da GBT utilizados nas análises.	166
6.19	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: modos de deformação ortogonalizados.	167
6.20	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: gráfico carga-deslocamento.	168
6.21	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: evolução da fendilhação nos pontos de integração superiores e inferiores.	169
6.22	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: funções de amplitude modal da GBT para $d = 4$ mm.	171
6.23	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: funções de amplitude modal da GBT para $d = 18$ mm.	172
6.24	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: evolução do deslocamento no tempo.	173
6.25	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: funções de amplitude modal da GBT para $t = 0$ dias.	174
6.26	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: funções de amplitude modal da GBT para $t = 1000$ dias.	175
6.27	Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: configurações deformadas, a $t = 0$ e 1000 dias, obtidas com seis elementos da GBT e o modelo de elementos de casca CQ40S.	176

Lista de tabelas

3.1	Vigas mistas aço-betão com laje curta.	61
5.1	Parâmetros E_α da expansão em série de Dirichet da função de fluência (5.17).	126
5.2	Parâmetros E_α da expansão em série de Dirichet da função de relaxação (5.18).	127

Lista de abreviaturas, acrónimos, siglas e símbolos

Abreviaturas, acrónimos e siglas

ALE	Análise linear de estabilidade
EF	Elemento(s) finito(s)
EC2	Eurocódigo 2
EC3	Eurocódigo 3
EC4	Eurocódigo 4
GBT	Generalized Beam Theory (Teoria Generalizada de Vigas)
GDL	Grau(s) de liberdade

Índices e operadores especiais

$\ \cdot \ $	norma de um vetor
$()^{-1}$	matriz inversa
$()_a$	relativo ao aço
$()_s$	relativo às armaduras
$()_c$	relativo ao betão
$()_{co}$	relativo betão intacto (com/sem fluência) quando combinado com um modelo de fenda
$(\dot{\cdot})$	derivada em relação ao tempo
$()_{,i}$	derivada em ordem a i
$()_e$	relativo ao elemento finito
$()_{cr}$	relativo à fenda
$()^F$	parcela de flexão
$()^L$	relativo aos referenciais locais da fenda
$()^M$	parcela de membrana

$()_{pe}$	previsão elástica
$()_t$	tangente
$()^T$	matriz (vetor) transposta (transposto)
$d()$	variação
$\Delta()$	variação incremental-iterativa
$\delta()$	variação virtual
$\text{diag}()$	matriz cujas componentes na diagonal principal são os escalares indicados
$P()$	primitiva

Letras latinas maiúsculas

B	uma das matrizes da teoria generalizada de vigas
C	matriz constitutiva
C	uma das matrizes da teoria generalizada de vigas
C_{cr}	matriz constitutiva da fenda
C_c^{cr}	matriz constitutiva do betão fendilhado
C_{nn}	módulo constitutivo tangente na direção normal à fenda
C_{nt}	módulo constitutivo tangente na direção tangente à fenda
C_t	matriz constitutiva tangente
D₁	uma das matrizes da teoria generalizada de vigas
D₂	uma das matrizes da teoria generalizada de vigas
D_f	rigidez de flexão de uma parede
D	gradiente de deslocamento
E	módulo de elasticidade
E_α	módulo de elasticidade do elemento α da cadeia de Kelvin
E_{rel}	função de relaxação
E	tensor de deformação de Green-Lagrange
F	vetor das forças exteriores
$\bar{\mathbf{F}}$	vetor das forças exteriores, para um carregamento de referência
F_k	função de interpolação de Lagrange k
G	módulo de distorção
G_f	energia de fratura
H_k	função de interpolação de Hermite k

I	momento de inércia
J	função de fluência
\mathbf{K}	matriz de rigidez
L	comprimento
$M_{b,Rd}$	valor de cálculo do momento resistente à encurvadura lateral
M_{cr}	momento crítico
M_{Rd}	valor de cálculo do momento resistente à flexão
M_{Rk}	valor característico do momento resistente à flexão
N	número de modos de deformação
N_w	número de modos de deformação de empenamento
P_k	participação do modo k
\mathbf{Q}	vetor das forças internas
\mathbf{S}	segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff
\mathbf{T}	matriz de transformação de coordenadas
\mathbf{U}	Campo de deslocamentos de uma parede
V	Volume
W_{ext}	trabalho das forças exteriores
W_{int}	trabalho das forças interiores
\mathbf{X}_1	uma das matrizes da teoria generalizada de vigas
\mathbf{X}_2	uma das matrizes da teoria generalizada de vigas
\mathbf{X}_3	uma das matrizes da teoria generalizada de vigas

Letras latinas minúsculas

b_{eff}	largura efetiva
b_f	largura do banzo
b_i	largura da parede i

\bar{d}	parâmetro de controlo da dependência de malha
\mathbf{d}	vetor dos graus de liberdade
$\bar{\mathbf{f}}$	cargas aplicadas na superfície média das paredes
f_c	tensão máxima à compressão uniaxial do betão
f_{ct}	tensão máxima à tração uniaxial do betão
\bar{f}_x	cargas aplicadas na superfície média das paredes segundo x
\bar{f}_y	cargas aplicadas na superfície média das paredes segundo y
f_y	tensão de cedência do aço
\bar{f}_z	cargas aplicadas na superfície média das paredes segundo z
\mathbf{g}	vetor das forças desequilibradas
h_c	espessura da laje
h_w	altura da alma, medida entre as linhas médias dos banzos
l	comprimento do elemento finito
n_e	número de elementos finitos
t_f	espessura do banzo
t_w	espessura da alma
u	componente do deslocamento do plano médio da parede segundo x
\bar{u}_k	deslocamento u relativo ao modo de deformação k
v	componente do deslocamento do plano médio da parede segundo y
\bar{v}_k	deslocamento v relativo ao modo de deformação k
w	componente do deslocamento do plano médio da parede segundo z
\bar{w}_k	deslocamento w relativo ao modo de deformação k
x	eixo local de uma parede paralelo ao eixo da barra
y	eixo local de uma parede coincidente com a sua linha média na secção transversal
z	eixo local de uma parede perpendicular à sua superfície média

Letras gregas

α	deslocamento objetivo
β	fator de redução da rigidez de corte (<i>shear retention factor</i>)
γ_{ij}	distorção entre as direções i e j
$\mathbf{\Gamma}$	vetor das deformações viscoelásticas
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tensor das deformações infinitesimais
$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^*$	vetor das variáveis de estado
ε_{c1}	deformação no betão correspondente a f_c
ε_f	deformação no betão (ramo de compressão) correspondente a tensão nula
ε_{ij}	componente ij de $\boldsymbol{\varepsilon}$
ε_{ult}	deformação na fenda correspondente à tensão nula
θ	ângulo entre o eixo normal à fenda e o eixo x
Θ	matriz auxiliar que relaciona os modos de deformação com as funções de interpolação e o vetor de graus de liberdade elementar
λ	parâmetro de carregamento
$\bar{\lambda}_{LT}$	esbelteza normalizada
ν	coeficiente de Poisson
$\boldsymbol{\sigma}$	tensor das tensões
τ_α	tempo de retardação associado ao termo α
τ_c	tensão tangencial máxima no betão
τ_{cr}	tensão de corte crítica em placas simplesmente apoiadas sujeitas ao corte puro
ϕ_k	função de amplitude do modo k
$\boldsymbol{\phi}$	vetor das funções de amplitude
Ξ_ε	matriz auxiliar na determinação do vetor de deformações que relaciona as componentes dos modos de deformação $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{v}}$ e $\bar{\mathbf{w}}$ com as funções de amplitude $\boldsymbol{\phi}$
Ξ_E	matriz auxiliar na determinação do vetor de deformações de Green-Lagrange que relaciona as componentes dos modos de deformação $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{v}}$ e $\bar{\mathbf{w}}$ com as tensões de pré-encurvadura
Ξ_U	matriz auxiliar na determinação do vetor de deslocamentos que relaciona as componentes dos modos de deformação $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{v}}$ e $\bar{\mathbf{w}}$ com as funções de amplitude $\boldsymbol{\phi}$
χ_{LT}	fator de redução do momento fletor devido à encurvadura lateral
Ψ	matriz que contém as funções de interpolação
Ω	área da secção transversal

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações gerais

Hoje em dia, a competitividade e a relevância das soluções estruturais mistas aço-betão, no setor da construção de edifícios e pontes, são amplamente reconhecidas: a natureza complementar e compatível dos dois materiais permite obter elementos estruturais com elevada resistência, rigidez e ductilidade, com secção transversal de dimensões reduzidas, e possibilita a adoção de métodos de construção rápidos e eficientes (ver, por exemplo, Johnson e Buckby, 1975; Brozzetti, 2000; Calado e Santos, 2010).

Na Europa, as regras de verificação da segurança de estruturas mistas aço-betão são fornecidas no Eurocódigo 4 (doravante designado apenas por “EC4”), o qual reflete o atual estado-da-arte e as melhores práticas (CEN, 2004b). Contudo, é reconhecido que o EC4, ao contrário dos seus congéneres para betão e aço (os Eurocódigos 2 e 3, CEN, 2004a; CEN, 2005), contém restrições relativamente rígidas à tipologia das soluções, por falta de conhecimento consolidado (Johnson e Anderson, 2004). De facto, a investigação nesta área é dificultada por requerer a modelação de fenómenos altamente complexos, que no caso das vigas mistas são: *shear lag* em banzos largos, comportamento diferido e não-linear dos materiais (incluindo da sua conexão), encurvadura local/distorcional da viga de aço em zonas de momento negativo e o faseamento construtivo. De facto, mesmo ao nível de projeto, o EC4 exige a contabilização (aproximada) de alguns destes efeitos diretamente no de rigidez variável.

Naturalmente, tem sido despendido um esforço considerável para desenvolver elementos de barra para vigas mistas, considerando o comportamento não-linear dos materiais, incluindo o comportamento diferido do betão, e da conexão (*e.g.* Fragiacomio et al., 2004; Nguyen et al., 2010; Ranzi e Bradford, 2009). Em geral, estes elementos utilizam leis constitutivas uniaxiais e não consideram os efeitos de *shear lag* e da deformação da secção no seu próprio plano e para fora deste (empenamento), os quais são relevantes tanto no caso geometricamente linear — por exemplo, o efeito da distorção em pontes pode ser significativo (Chen e Yen, 1980; Pedro, 1995; Schlaich e Scheef, 1982); o efeito de *shear lag*

em banzos largos deve ser sempre considerado — como não-linear — *e.g.*, a encurvadura distorcional é condicionante para vigas de aço esbeltas, nas zonas de momentos negativos.

Em alternativa, pode recorrer-se a modelos com elementos finitos de casca/volume, bastante mais versáteis. Contudo, as dificuldades inerentes à modelação não-linear, nomeadamente do betão, requerem a utilização de programas muito especializados, como por exemplo o *ATENA* (Cervenka et al., 2013) e o *DIANA* (DIANA FEA BV, 2019). Estes programas são bastante exigentes para o utilizador, dado que requerem o domínio de conceitos teóricos avançados, e necessitam de meios computacionais adequados, o que inviabiliza a execução de estudos paramétricos alargados (no contexto de investigação) e a sua utilização corrente em projeto.

É ainda de referir que o método das faixas finitas também pode ser utilizado para modelar vigas mistas, mas são muito poucos os estudos que recorrem a esta abordagem, provavelmente devido às suas inerentes limitações (Uy e Bradford, 1996; Vrceelj e Bradford, 2009).

Existe ainda uma alternativa aos métodos atrás referidos: a Teoria Generalizada de Vigas (ou GBT, da sua designação em língua inglesa, *Generalized Beam Theory*). Desde o seu desenvolvimento inicial, devido a Schardt (1966, 1989), a GBT tem vindo a afirmar-se como uma ferramenta muito eficiente para analisar barras de parede fina, tanto no campo linear como não-linear (Camotim et al., 2004, 2010). Na GBT, a configuração da barra exprime-se através de “modos de deformação” da secção transversal, pré-determinados, o que permite reduzir o problema à determinação das respetivas funções de amplitude ao longo do comprimento da barra. Em acréscimo, os modos de deformação são subdivididos em várias famílias com significado físico claro (por exemplo, modos que não envolvem a deformação por corte) e, dentro de cada família, os modos encontram-se hierarquizados, no sentido em que os primeiros são os que mais participam na solução e, em geral, é necessário considerar poucos modos para obter resultados muito precisos. Esta natureza modal permite interpretar a resposta estrutural do problema em causa com grande clareza e, simultaneamente, obter uma precisão semelhante à de modelos refinados de elementos de casca, mas com muito menos graus de liberdade (GDL). Em particular, é possível obter soluções semi-analíticas ou mesmo analíticas em vários casos com interesse prático (ver, por exemplo, Gonçalves e Camotim, 2010; Schardt, 1989).

Apesar de todas as vantagens inerentes à GBT, a sua aplicação a vigas mistas é bastante limitada. Em particular, o único trabalho nesta área deve-se a Gonçalves e Camotim (2010), onde se mostrou que a GBT tem grande potencial para estudar o comportamento linear, de estabilidade (cargas críticas e modos de instabilidade) e de vibração (frequências próprias e modos de vibração) de pontes e vigas mistas, incluindo a deformação da secção, o efeito de *shear lag* e a flexibilidade da conexão. No entanto, neste trabalho não foi considerado o comportamento não-linear dos materiais. Refere-se ainda o trabalho de Taig e Ranzi (2015), razoavelmente mais simples que o apresentado anteriormente — são unicamente realizadas análises elásticas lineares e os modos de deformação são obtidos de forma distinta.

1.2 Objetivos

Tendo em conta o que foi referido na Secção anterior, neste trabalho desenvolvem-se, implementam-se e validam-se elementos finitos (EF) de barra baseados na GBT, de vários graus de complexidade, capazes de modelar eficazmente (com precisão e, simultaneamente, eficiência computacional) o comportamento não-linear de vigas mistas aço-betão. Para além disso, pretende-se contribuir para a compreensão do comportamento estrutural deste tipo de elementos. Em particular, desenvolvem-se três elementos finitos:

- (i). Um elemento para modelar o comportamento fisicamente não-linear de vigas mistas, até ao colapso, considerando os efeitos de *shear lag*, fendilhação/esmagamento do betão (de forma simplificada) e da plastificação do perfil e das armaduras. Este elemento é concebido com o objetivo de permitir efetuar análises com um tempo de execução muito reduzido, pelo que incorpora várias hipóteses simplificativas — por exemplo, não é considerada a torção e a deformação da secção no seu plano. Apesar das hipóteses simplificativas adotadas, o elemento tem a capacidade de calcular cargas de colapso de vigas mistas contínuas com grande precisão e rapidez.
- (ii). Um elemento para calcular cargas críticas e modos de instabilidade de vigas mistas, incluindo os efeitos da fendilhação e *shear lag*. Neste caso considera-se a possibilidade de a encurvadura ocorrer em modos locais e/ou distorcionais, o que quer dizer que a deformação da secção no seu plano é permitida. À semelhança do caso anterior, este elemento permite efetuar análises (neste caso análises lineares de estabilidade) com um tempo de execução muito reduzido, muito embora considere mais modos de deformação que o elemento anterior.
- (iii). Um elemento para modelar o comportamento em serviço de vigas mistas. Considera-se a deformação arbitrária da secção (o que inclui os efeitos de *shear lag*, da fluência e da fendilhação). O modelo de fendilhação adotado é significativamente mais sofisticado do que o considerado no ponto (i), sendo um modelo de fenda fixa distribuída com decomposição de deformações. Este elemento finito é o mais complexo e, consequentemente, é também o mais exigente do ponto de vista computacional. Ainda assim, mostra-se que se conduz a excelentes resultados com menos GDL que um modelo típico de elementos finitos de casca.

Os elementos finitos que acabaram de ser enumerados constituem contribuições originais significativas, mas não deve deixar de se salientar que, naturalmente, o trabalho apresentado nesta tese não esgota completamente o tópico em que se insere. No entanto, é importante frisar que se procurou desenvolver elementos com interesse prático e, simultaneamente, grande eficiência computacional — um aspeto sem o qual não existe vantagem em utilizar a GBT em vez de modelos de elementos finitos de casca.

1.3 Organização da Tese

A tese encontra-se dividida em sete Capítulos, o primeiro dos quais é a presente introdução.

O segundo capítulo aborda os conceitos fundamentais da Teoria Generalizada de Vigas, necessários para desenvolver os assuntos abordados nos capítulos subsequentes da tese, procurando desta forma contribuir para melhorar a sua compreensão e minimizar a necessidade de recorrer a outros textos. Para além de se apresentar detalhadamente a formulação clássica (linear) da GBT, explanam-se as modificações necessárias para permitir efetuar análises lineares de estabilidade e análises fisicamente não-lineares. São ainda deduzidas todas as expressões necessárias para formular elementos finitos com interpolação direta das funções de amplitude dos modos de deformação.

Os Capítulos 3 a 6 apresentam as contribuições originais do trabalho efetuado, sendo essencialmente dedicados ao desenvolvimento e validação dos elementos finitos apresentados nos pontos (i) a (iii) da Secção 1.2. Assim, os elementos referidos nos pontos (i) e (ii) são objeto de análise nos Capítulos 3 e 4, respetivamente. Tendo em conta a complexidade do elemento finito do ponto (iii), optou-se por apresentá-lo em dois capítulos: o Capítulo 5 aborda a consideração dos efeitos da fluência e o Capítulo 6 combina os modelos de fluência e de fenda fixa distribuída. Em cada um destes quatro capítulos é apresentada uma revisão da literatura mais estreitamente relacionada com o tópico em causa e apresentam-se vários exemplos que demonstram a precisão e a eficiência computacional dos elementos finitos desenvolvidos.

Finalmente, no sétimo e último capítulo, resumem-se as principais conclusões do trabalho desenvolvido e apresentam-se o que se considera serem os desenvolvimentos futuros mais relevantes.

1.4 Publicações

A quase totalidade do trabalho desenvolvido no âmbito desta tese já se encontra publicado em artigos de revistas internacionais e conferências. Assim, o trabalho correspondente ao Capítulo 3 pode ser encontrado em Henriques et al. (2015a, 2015b, 2015c, 2015d). O conteúdo do Capítulo 4 foi publicado em Henriques et al. (2016a, 2016b, 2017), e o do Capítulo 5 em Henriques et al. (2018, 2019a). Finalmente, o elemento finito que combina fluência, fendilhação e a deformação da secção pode ser encontrado em Henriques et al. (2019b, 2019c).

Capítulo 2

Conceitos fundamentais

2.1 Introdução

Neste capítulo são abordados os aspetos fundamentais relativos à formulação e implementação, pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), da Teoria Generalizada de Vigas (GBT). Muito embora o presente trabalho concirna a aplicação da GBT ao caso de vigas mistas aço-betão, esta particularização não é abordada no presente Capítulo, sendo deixada para os Capítulos subsequentes da Tese. Em particular, no presente Capítulo, para além de se apresentar uma breve revisão da GBT, aborda-se a sua implementação nos casos de análises (i) lineares, (ii) fisicamente não-lineares (geometricamente lineares) e (iii) lineares de estabilidade, tendo como base os elementos finitos propostos em Gonçalves e Camotim (2010, 2011, 2012).

A GBT aplica-se essencialmente a barras prismáticas de parede fina e permite considerar a deformação da secção no seu plano e para fora deste (empenamento). Conforme já referido, foi inicialmente proposta e desenvolvida por Richard Schardt e colaboradores, durante a segunda metade do século XX — uma lista das publicações deste grupo de investigação está disponível em <http://vtb.info>, sendo de referir que o livro de Schardt (1989) constitui ainda hoje a principal referência relativa aos fundamentos da GBT. Mais recentemente, a GBT tem vindo a ser desenvolvida por outros autores, nomeadamente pelo grupo de investigação liderado por Dinar Camotim (ver, por exemplo, Camotim et al., 2004, 2006, 2010 e a bibliografia disponível em <http://www.civil.ist.utl.pt/gbt/>).

2.2 Notação

A notação segue a utilizada por Gonçalves et al. (2010a) e Gonçalves e Camotim (2011, 2012), onde as letras em *negrito itálico* representam vetores e matrizes. Designa-se por $\|\mathbf{a}\|$ a norma ($\sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}$) do vetor \mathbf{a} e por \mathbf{A}^T a transposta da matriz \mathbf{A} . Grandezas escalares são representadas por letras em *itálico*, aplicando-se esta notação também às componentes de matrizes e vetores. No entanto, frequentemente, estas componentes são também matrizes e/ou vetores, sendo nesse caso representadas como tal. A utilização de vírgulas em índice

inferior representa derivadas (*e.g.*, se $a = a(x, y, z)$, então $a_{,x} = \partial a / \partial x$). Muito embora a utilização de derivadas se realize como descrito anteriormente, deve ser notado que derivadas em relação ao tempo são escritas como $\dot{f} = \partial f / \partial t$, como é usual. Representa-se por δ uma variação virtual e por Δ uma variação incremental/iterativa (no contexto do método de Newton-Raphson). Para variações genéricas utiliza-se apenas d .

A distinção entre parcelas de membrana e de flexão é recorrente no contexto da GBT, pelo que os respetivos termos são assinalados em índice superior pelas letras M e F .

De forma a facilitar a distinção entre os vários materiais, utilizam-se os seguintes índices inferiores:

- $()_c$, para o betão;
- $()_{co}$, para o betão (com/sem fluência) quando combinado com um modelo de fenda;
- $()_{cr}$, para as fendas;
- $()_s$, para o aço em armaduras;
- $()_a$, para o aço em perfil.

2.3 Teoria Generalizada de Vigas (GBT)

Na GBT, a configuração de uma dada secção transversal de uma barra de paredes finas é definida através de uma combinação linear de “modos de deformação”, que correspondem aos modos clássicos da teoria das peças lineares de Vlasov (1958) — extensão axial, duas flexões em torno dos eixos centrais principais e torção em torno do centro de corte — e modos de ordem superior, que contabilizam a deformação da secção no seu plano e/ou para fora deste (empenamento). Estes modos de deformação não são mais do que funções definidas no plano da secção transversal, sendo determinadas de acordo com um procedimento designado de “análise da secção da GBT”. Para secções arbitrárias (contendo partes abertas e fechadas), o procedimento foi estabelecido em Gonçalves et al. (2010a, 2014b) e Bebiano et al. (2015), tendo sido implementado no programa GBTUL, o qual pode ser obtido em <http://www.civil.ist.utl.pt/gbt/> (Bebiano et al., 2018).

A título de exemplo, apresentam-se na figura 2.1 os primeiros quatro modos de deformação (os modos clássicos) para duas secções transversais mistas aço-betão. Na figura 2.2, representam-se os seus primeiros modos de deformação de uma secção em C com reforços.

Comparativamente aos métodos tradicionais de análise de barras de parede fina — o método das faixas finitas e o método dos elementos finitos de casca — a GBT apresenta algumas vantagens que devem ser salientadas, as quais decorrem da sua natureza modal única: (i) o conjunto dos modos de deformação é constituído por vários subconjuntos, cada um representando um tipo distinto de deformação, (ii) cada subconjunto de modos encontra-se *hierarquizado*, no sentido em que a relevância dos modos para a solução decresce em geral com a sua ordem no subconjunto. Em particular, deve referir-se que, tipicamente,

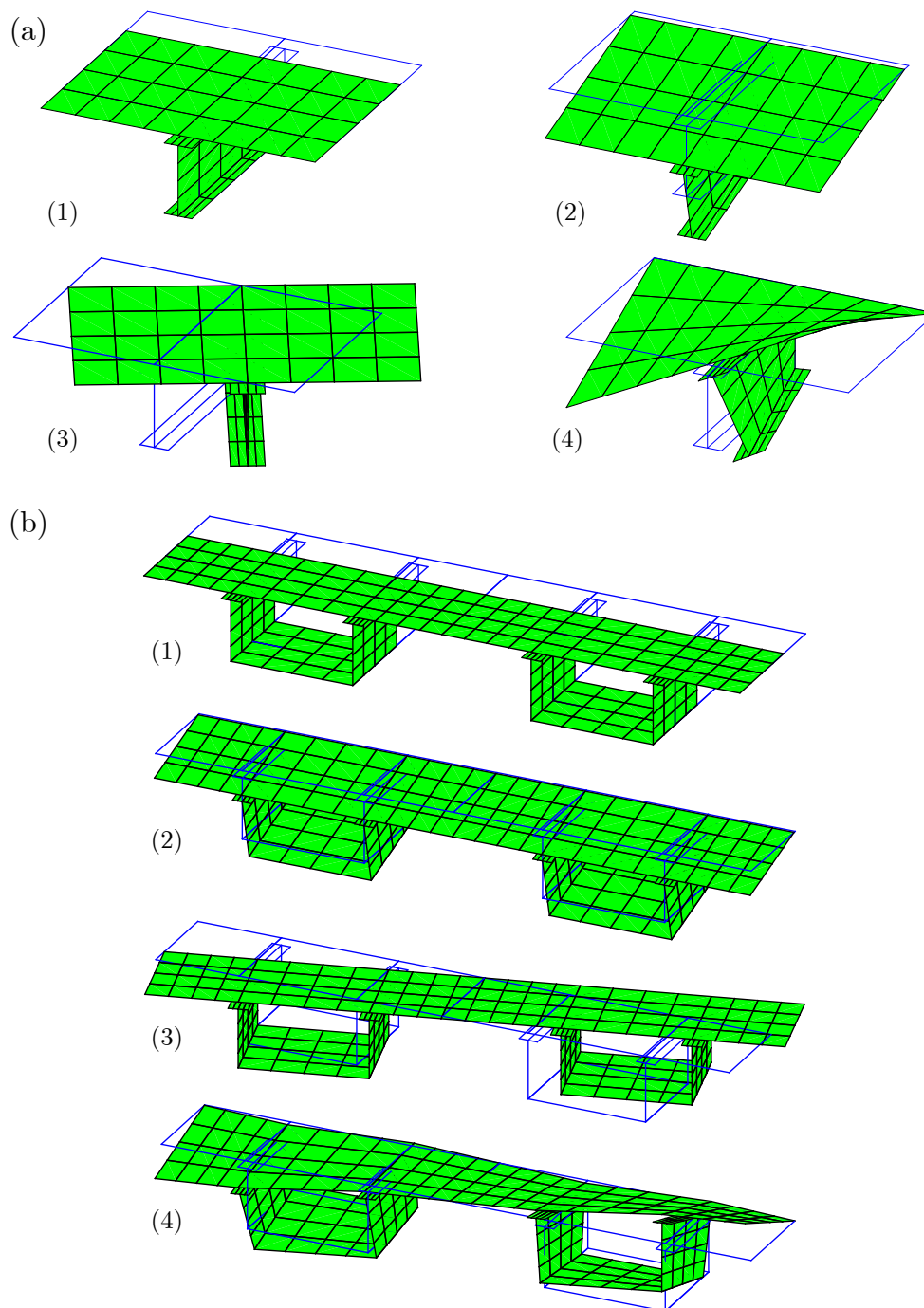


Figura 2.1: Primeiros quatro modos de deformação (modos clássicos) para secções mistas aço-betão: (a) secção com uma viga de aço em I e (b) secção com dois caixões de aço.

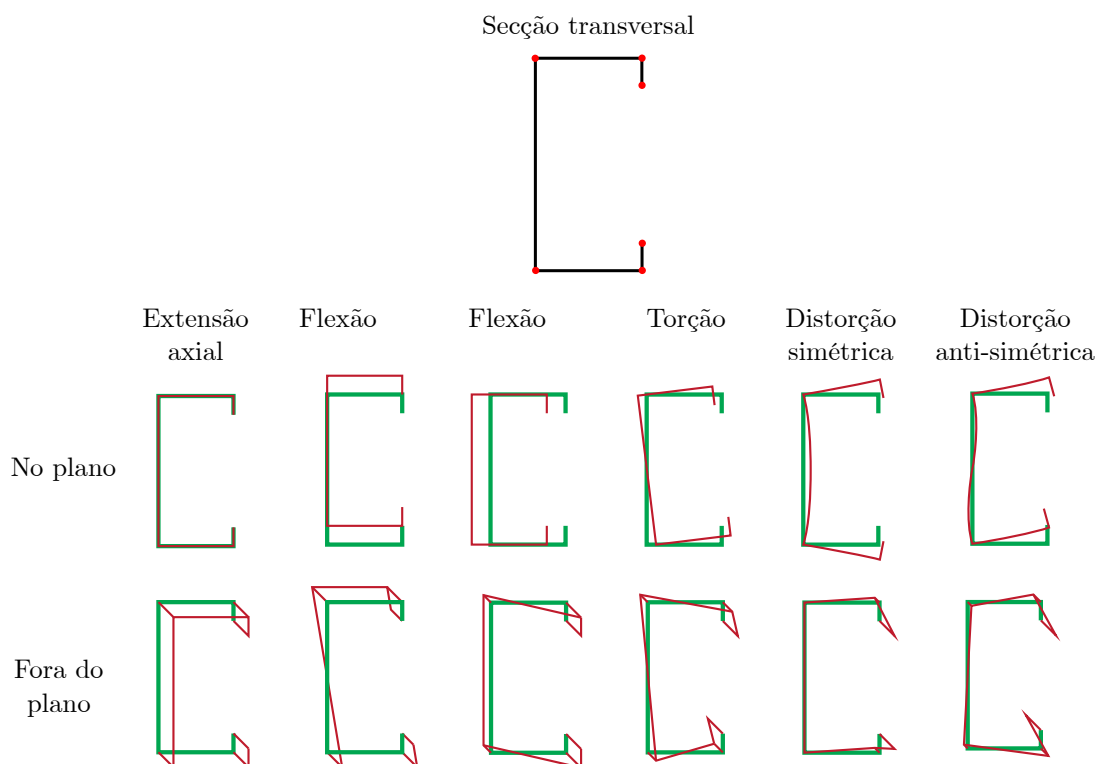


Figura 2.2: Primeiros seis modos de deformação para uma secção em C com reforços, obtidos com o programa GBTUL.

são necessários poucos modos de deformação (logo poucos GDL) para obter soluções muito precisas, mesmo em problemas complexos, e que é possível obter em muitos casos soluções semi-analíticas ou mesmo analíticas. Em acréscimo, a decomposição modal da solução oferece naturalmente vantagens significativas face aos métodos tradicionais de análise de barras de parede fina, dado que permite aferir a importância relativa dos vários modos de deformação e, conseqüentemente, extrair conclusões muito relevantes acerca do comportamento estrutural destas barras.

2.3.1 Equações fundamentais

De acordo com a notação introduzida por Gonçalves e Camotim (2010), na GBT, o campo de deslocamentos de cada parede é dado pelo vetor

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde U_x, U_y, U_z designam as componentes do deslocamento do ponto de coordenadas (x, y, z) segundo cada um dos eixos locais da parede, os quais são indicados na figura 2.3: (i) x é paralelo ao eixo da barra, (ii) y coincide com a linha média (intersecção da superfície média da barra com a secção transversal correspondente a $x = 0$) e (iii) z é perpendicular à superfície média.

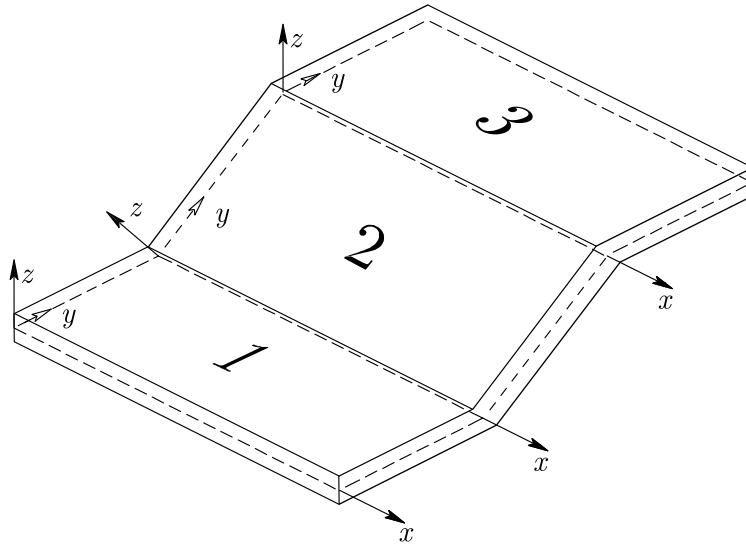


Figura 2.3: Secção arbitrária de parede fina com três paredes (os eixos locais de cada parede são indicados na figura).

Considerando a hipótese dos pequenos deslocamentos, as componentes do tensor de deformação são dadas por

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= U_{x,x}, \\
 \varepsilon_{yy} &= U_{y,y}, \\
 \varepsilon_{zz} &= U_{z,z}, \\
 \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = U_{x,y} + U_{y,x}, \\
 \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = U_{x,z} + U_{z,x}, \\
 \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = U_{z,y} + U_{y,z},
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

as quais se podem agrupar sob uma forma vetorial (notação de Voigt), ou seja,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Tendo em conta que as barras são de parede fina, torna-se aceitável adotar a hipótese de Kirchhoff, que corresponde a admitir que as fibras normais ao plano médio da parede permanecem indeformáveis e perpendiculares a esse plano médio após deformação, pelo que se tem

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \tag{2.4}$$

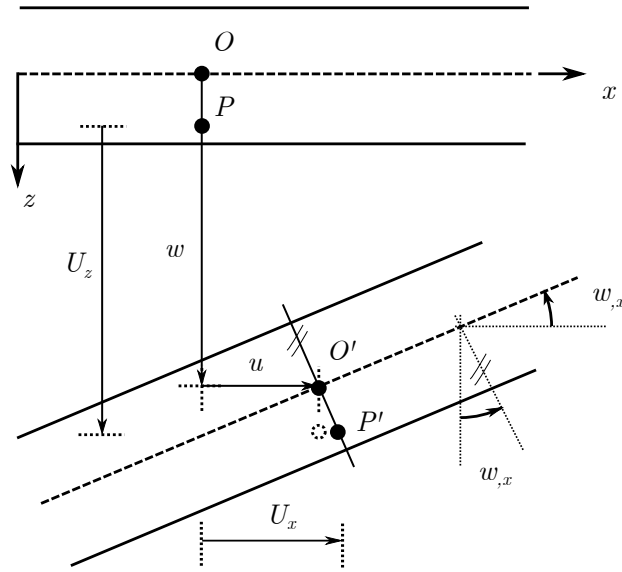


Figura 2.4: Ilustração da hipótese de Kirchhoff (neste caso $w_{,x} < 0$).

A eliminação destas componentes permite escrever o tensor de deformação na forma mais sucinta

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

o que corresponde a um estado plano de deformação.

A hipótese de Kirchhoff permite escrever o deslocamento de um ponto genérico P de uma parede em função apenas do deslocamento do plano médio da respetiva parede. Designando por u, w as componentes do deslocamento do plano médio da parede segundo x e z , respetivamente, o deslocamento do ponto P , situado à cota z , pode ser escrito como (ver figura 2.4)

$$U_x^P = u - z w_{,x}, \quad (2.6)$$

$$U_z^P = w. \quad (2.7)$$

Para o plano perpendicular, designando por v a componente do deslocamento do plano médio da parede segundo y , obtém-se antes

$$U_y^P = v - z w_{,y}. \quad (2.8)$$

Assim, o campo de deslocamentos (2.1) pode ser escrito na forma

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u - z w_{,x} \\ v - z w_{,y} \\ w \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Note-se que este vetor pode ser dividido numa parcela de membrana (dependente de u e v) e numa parcela de flexão (dependente de $-z w_{,x}$ e $-z w_{,y}$) — a subdivisão para o caso particular de U_x está ilustrada na figura 2.5 (nesta figura t designa a espessura da parede).

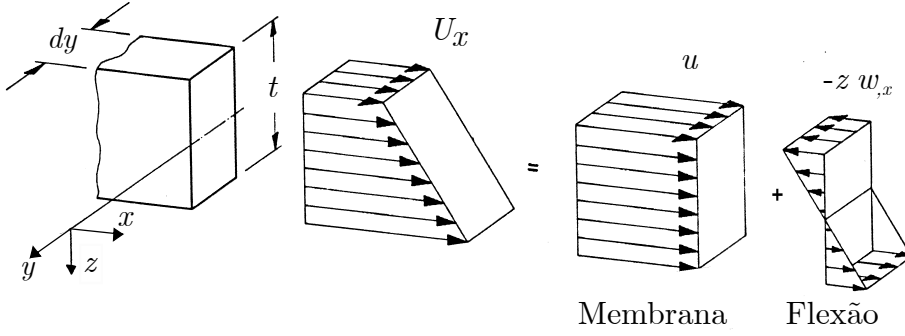


Figura 2.5: Parcela de membrana u e de flexão $-zw_{,x}$ de U_x (adaptado de Schardt, 1989).

De acordo com a abordagem introduzida por Schardt (1989), as componentes de deslocamento do plano médio são expressas por

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^N \bar{u}_k(y) \varphi_k(x) = \bar{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\varphi}, \quad (2.10)$$

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^N \bar{v}_k(y) \phi_k(x) = \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\phi}, \quad (2.11)$$

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^N \bar{w}_k(y) \psi_k(x) = \bar{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\psi}, \quad (2.12)$$

onde $\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k$ são funções de y e representam as componentes do modo de deformação k ($\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}$ são vetores que agrupam as várias funções) e $\varphi_k, \phi_k, \psi_k$ são as respectivas funções de amplitude em x , sendo as respectivas formas vetoriais dadas por $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}$. Naturalmente, todos os vetores têm dimensão igual ao número de modos de deformação (N). As funções $\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k$ são diretamente obtidas através da análise da secção da GBT e as funções $\varphi_k, \phi_k, \psi_k$ constituem as incógnitas do problema (nas figuras 2.1 e figura 2.2, os modos de deformação são representados com φ_k constante e ϕ_k, ψ_k lineares).

Nas análises com a GBT é frequente adotar a hipótese de Vlasov, segundo a qual as distorções de membrana (no plano médio das paredes) são nulas, ou seja, $\gamma_{xy}^M = 0$. Desenvolvendo o termo γ_{xy}^M a partir das Eqs. (2.2), (2.10)-(2.11) tem-se

$$\gamma_{xy}^M = u_{k,y} + v_{k,x} = \sum_{k=1}^n \bar{u}_{k,y}(y) \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^n \bar{v}_k(y) \phi_{k,x}(x) = 0. \quad (2.13)$$

Para que esta equação seja satisfeita, é necessário que se verifiquem simultaneamente as seguintes condições

$$\begin{cases} \bar{u}_{k,y}(y) = -\bar{v}_k(y), \\ \varphi_k(x) = \phi_{k,x}(x). \end{cases} \quad (2.14)$$

Este resultado mostra que, para cada modo k , as componentes \bar{u} e \bar{v} não são independentes, o mesmo se passando com as respectivas funções de amplitude. Mesmo que a hipótese de Vlasov não seja adotada, é útil utilizá-la para subdividir os modos de deformação. Assim,

sem perda de generalidade, a relação $\varphi_k(x) = \phi_{k,x}(x)$ é sempre adotada, sendo a relação $\bar{u}_{k,y}(y) = -\bar{v}_k(y)$ apenas respeitada pelos “modos de Vlasov”.

A existência de deslocamentos v numa determinada parede obriga à ocorrência de deslocamentos w numa parede adjacente se esta não for coplanar, de forma a respeitar as condições de compatibilidade. Assim, as funções de amplitude das componentes v e w têm necessariamente de respeitar

$$\phi_k(x) = \psi_k(x). \quad (2.15)$$

Tendo em conta os resultados anteriores, as expressões (2.10)–(2.12) podem agora escrever-se na forma

$$u(x, y) = \bar{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\phi}_{,x}, \quad (2.16)$$

$$v(x, y) = \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\phi}, \quad (2.17)$$

$$w(x, y) = \bar{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\phi}. \quad (2.18)$$

De modo a facilitar a escrita das equações subsequentes e a sua implementação numérica, adota-se a notação introduzida em Gonçalves e Camotim (2011). Tendo em conta (2.16)–(2.18), o campo de deslocamentos (2.9) é assim escrito como

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \boldsymbol{\Xi}_U(y) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(x) \\ \boldsymbol{\phi}_{,x}(x) \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_U(y) = \boldsymbol{\Xi}_U^M(y) + z\boldsymbol{\Xi}_U^F(y), \quad (2.20)$$

onde as matrizes auxiliares $\boldsymbol{\Xi}_U^M$ e $\boldsymbol{\Xi}_U^F$ dizem respeito às componentes de membrana (M) e flexão (F), sendo definidas por

$$\boldsymbol{\Xi}_U^M(y) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{u}}^T(y) \\ \bar{\mathbf{v}}^T(y) & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{w}}^T(y) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Xi}_U^F(y) = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{w}}^T(y) \\ \bar{\mathbf{w}}_{,y}^T(y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Para as deformações tem-se

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \boldsymbol{\varepsilon}^M + \boldsymbol{\varepsilon}^F = \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon(y) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(x) \\ \boldsymbol{\phi}_{,x}(x) \\ \boldsymbol{\phi}_{,xx}(x) \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon(y) = \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M(y) + z\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F(y), \quad (2.23)$$

onde as matrizes auxiliares para os termos de membrana ($\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M(y)$) e flexão ($\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F(y)$) são dadas por

$$\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M(y) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{u}}^T(y) \\ \bar{\mathbf{v}}_{,y}^T(y) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\bar{\mathbf{u}}_{,y}(y) + \bar{\mathbf{v}}(y))^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F(y) = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{w}}^T(y) \\ \bar{\mathbf{w}}_{,yy}^T(y) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\bar{\mathbf{w}}_{,y}^T(y) & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Admitindo que as paredes da barra estão sujeitas a um estado plano de tensão, com $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, as componentes não-nulas do tensor das tensões podem ser agrupadas no vetor

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Note-se que esta hipótese é inconsistente com o estado plano de deformação de (2.5) para materiais com $\nu \neq 0$, mas tal não conduz a erros significativos.

Para materiais elásticos lineares, as relações constitutivas são escritas como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.27)$$

onde \mathbf{C} é a matriz constitutiva para estados planos de tensão, sendo definida por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

onde E é o módulo de elasticidade, ν é o coeficiente de Poisson e G o é módulo de distorção.

No contexto das formulações clássicas da GBT, é usual adotar-se $\varepsilon_{yy}^M = \sigma_{yy}^M = 0$, o que permite reduzir o número de modos de deformação admissíveis (e, portanto, reduzir o número de GDL do problema) sem perda significativa de precisão da solução. Caso se considere esta hipótese, adota-se um estado plano de tensão apenas para os termos de flexão e, para os termos de membrana, considera-se antes

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

caso contrário obtêm-se soluções demasiado rígidas pelo facto de o efeito de Poisson estar restringido ao considerar $\varepsilon_{yy}^M = 0$. No texto que se segue, esta hipótese só é adotada quando tal for referido explicitamente.

As equações de equilíbrio podem ser obtidas recorrendo ao Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Admitindo que existem apenas cargas aplicadas na superfície média das paredes, $\bar{\mathbf{f}}^T = [\bar{f}_x \ \bar{f}_y \ \bar{f}_z]$, o PTV fornece

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_\Omega \delta \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{f}} \, d\Omega = 0, \quad (2.30)$$

onde V e Ω representam o volume e a superfície média da barra, respetivamente. Tendo

em conta as equações (2.19), (2.22) e (2.27), obtém-se

$$\begin{aligned}
 & - \int_V \left(\Xi_\varepsilon(y) \begin{bmatrix} \delta\phi(x) \\ \delta\phi_{,x}(x) \\ \delta\phi_{,xx}(x) \end{bmatrix} \right)^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_\Omega \left(\Xi_U^M(y) \begin{bmatrix} \delta\phi(x) \\ \delta\phi_{,x}(x) \end{bmatrix} \right)^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega = 0 \\
 \Leftrightarrow & - \int_V \begin{bmatrix} \delta\phi(x) \\ \delta\phi_{,x}(x) \\ \delta\phi_{,xx}(x) \end{bmatrix}^T \Xi_\varepsilon(y)^T \mathbf{C} \Xi_\varepsilon(y) \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \phi_{,x}(x) \\ \phi_{,xx}(x) \end{bmatrix} dV + \int_\Omega \begin{bmatrix} \delta\phi(x) \\ \delta\phi_{,x}(x) \end{bmatrix}^T \Xi_U^M(y)^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega = 0.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

A integração do primeiro termo da equação (2.31) na secção transversal conduz a

$$\int_L \begin{bmatrix} \delta\phi(x) \\ \delta\phi_{,x}(x) \\ \delta\phi_{,xx}(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \phi_{,x}(x) \\ \phi_{,xx}(x) \end{bmatrix} dx, \tag{2.32}$$

onde L é o comprimento da barra e \mathbf{B} , \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 , \mathbf{C} são as “matrizes modais da GBT”, dadas por

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^M + \mathbf{B}^F = \int_S \frac{E}{1-\nu^2} \left(t \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}^T dy + \frac{t^3}{12} \bar{\mathbf{w}}_{,yy} \bar{\mathbf{w}}_{,yy}^T \right) dy, \tag{2.33}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^M + \mathbf{C}^F = \int_S \frac{E}{1-\nu^2} \left(t \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T dy + \frac{t^3}{12} \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}^T \right) dy, \tag{2.34}$$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_1^M + \mathbf{D}_1^F = \int_S G \left(t (\bar{\mathbf{u}}_{,y} + \bar{\mathbf{v}}) (\bar{\mathbf{u}}_{,y} + \bar{\mathbf{v}})^T + \frac{t^3}{3} \bar{\mathbf{w}}_{,y} \bar{\mathbf{w}}_{,y}^T \right) dy, \tag{2.35}$$

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_2^M + \mathbf{D}_2^F = \int_S \frac{\nu E}{1-\nu^2} \left(t (\bar{\mathbf{v}}_{,y} + \bar{\mathbf{u}}) + \frac{t^3}{12} \bar{\mathbf{w}}_{,yy} \bar{\mathbf{w}}^T \right) dy, \tag{2.36}$$

em que S é a linha média da secção transversal. Caso se considere $\varepsilon_{yy}^M = \sigma_{yy}^M = 0$, tendo em conta (2.29), a matriz \mathbf{C}^M é dada antes por

$$\mathbf{C}^M = \int_S Et \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T dy \tag{2.37}$$

e $\mathbf{B}^M = \mathbf{0}$. Por outro lado, caso se adote a hipótese de Vlasov, tem-se $\mathbf{D}_1^M = 0$.

2.3.1.1 Materiais não-lineares

Para materiais não-lineares, as relações constitutivas são escritas na forma incremental

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_t d\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2.38}$$

onde \mathbf{C}_t é o operador constitutivo tangente apropriado à lei constitutiva adotada (será particularizado em cada um dos próximos Capítulos).

A determinação de trajetórias de equilíbrio requer a resolução das equações de equilíbrio (2.30) seguindo uma estratégia incremental-iterativa. Tal estratégia requer a linearização

das equações de equilíbrio na direção de uma variação incremental/iterativa Δ . Tendo em conta (2.38) e notando que $\delta\Delta\phi_k = 0$, em vez de (2.31) é-se conduzido a

$$\begin{aligned} \Delta\delta W_{int} + \Delta\delta W_{ext} = & - \int_V \begin{bmatrix} \delta\phi(x) \\ \delta\phi_{,x}(x) \\ \delta\phi_{,xx}(x) \end{bmatrix}^T \Xi_\varepsilon^T(y) \mathbf{C}_t \Xi_\varepsilon(y) \begin{bmatrix} \Delta\phi(x) \\ \Delta\phi_{,x}(x) \\ \Delta\phi_{,xx}(x) \end{bmatrix} dV \\ & + \int_\Omega \begin{bmatrix} \delta\phi(x) \\ \delta\phi_{,x}(x) \end{bmatrix}^T \Xi_U^M(y)^T \Delta\bar{\mathbf{f}} d\Omega. \end{aligned} \quad (2.39)$$

O primeiro termo será utilizado para obter a matriz de rigidez tangente de elementos finitos fisicamente não-lineares, ao passo que o segundo termo fornece o vetor das forças exteriores incrementais.

2.3.1.2 Análise linear de estabilidade

Numa análise linear de estabilidade (ALE) determinam-se cargas de bifurcação e os respectivos modos de instabilidade desprezando as deformações de pré-encurvadura. Tendo em conta que as deformações não podem ser consideradas infinitesimais, as equações de equilíbrio são escritas em termos do tensor de deformação de Green-Lagrange \mathbf{E} e do seu par conjugado, o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} (ver, por exemplo, Crisfield, 1991).

O tensor de deformação de Green-Lagrange \mathbf{E} é dado, na sua forma matricial, por

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{xy} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{xz} & E_{yz} & E_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (\mathbf{D} + \mathbf{D}^T) + \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{D}, \quad (2.40)$$

onde \mathbf{D} é o gradiente de deslocamento, dado pela matriz

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} U_{x,x} & U_{x,y} & U_{x,z} \\ U_{y,x} & U_{y,y} & U_{y,z} \\ U_{z,x} & U_{z,y} & U_{z,z} \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

O primeiro termo de (2.40) corresponde às deformações infinitesimais e o segundo termo contém os termos não-lineares.

No contexto de uma ALE numa barra de parede fina, é costume considerar os termos não-lineares resultantes apenas dos deslocamentos de membrana. Nesse caso, $\mathbf{U}^T = [u \ v \ w]$ e os únicos termos completos do tensor de deformação são

$$E_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2} \left((u_{,x})^2 + (v_{,x})^2 + (w_{,x})^2 \right), \quad (2.42)$$

$$E_{yy} = v_{,y} + \frac{1}{2} \left((u_{,y})^2 + (v_{,y})^2 + (w_{,y})^2 \right), \quad (2.43)$$

$$E_{xy} = \frac{1}{2} (u_{,y} + v_{,x}) + \frac{1}{2} (u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y}). \quad (2.44)$$

Assim, subdividindo as componentes de deformação lineares em termos de membrana M e de flexão F , utilizando a forma vetorial de \mathbf{E} , obtém-se

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^M \\ \varepsilon_{yy}^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^M} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^F \\ \varepsilon_{yy}^F \\ \gamma_{xy}^F \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^F} + \underbrace{\begin{bmatrix} E_{xx}^{NL} \\ E_{yy}^{NL} \\ 2E_{xy}^{NL} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}^{NL}}, \quad (2.45)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^M$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^F$ foram já obtidos em (2.22). Quanto aos termos não-lineares, utilizando (2.16)-(2.18), obtém-se

$$\begin{aligned} E_{xx}^{M,NL} &= \frac{1}{2} \left((\bar{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\phi}_{,xx})^2 + (\bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\phi}_{,x})^2 + (\bar{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\phi}_{,x})^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\phi}_{,xx}^T \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\phi}_{,xx} + \boldsymbol{\phi}_{,x}^T (\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}^T + \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}^T) \boldsymbol{\phi}_{,x} \right), \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} E_{yy}^{M,NL} &= \frac{1}{2} \left((\bar{\mathbf{u}}_{,y}^T \boldsymbol{\phi}_{,x})^2 + (\bar{\mathbf{v}}_{,y}^T \boldsymbol{\phi})^2 + (\bar{\mathbf{w}}_{,y}^T \boldsymbol{\phi})^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\phi}_{,x}^T \bar{\mathbf{u}}_{,y} \bar{\mathbf{u}}_{,y}^T \boldsymbol{\phi}_{,x} + \boldsymbol{\phi}^T (\bar{\mathbf{v}}_{,y} \bar{\mathbf{v}}_{,y}^T + \bar{\mathbf{w}}_{,y} \bar{\mathbf{w}}_{,y}^T) \boldsymbol{\phi} \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} E_{xy}^{M,NL} &= \frac{1}{2} \left((\bar{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\phi}_{,xx}) (\bar{\mathbf{u}}_{,y}^T \boldsymbol{\phi}_{,x}) + (\bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\phi}_{,x}) (\bar{\mathbf{v}}_{,y}^T \boldsymbol{\phi}) + (\bar{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\phi}_{,x}) (\bar{\mathbf{w}}_{,y}^T \boldsymbol{\phi}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\phi}_{,x}^T \bar{\mathbf{u}}_{,y} \bar{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\phi}_{,xx} + \boldsymbol{\phi}^T (\bar{\mathbf{v}}_{,y} \bar{\mathbf{v}}^T + \bar{\mathbf{w}}_{,y} \bar{\mathbf{w}}^T) \boldsymbol{\phi}_{,x} \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

É ainda frequente desprezar a contribuição dos termos relativos aos deslocamentos longitudinais $\bar{\mathbf{u}}$ (ver, por exemplo, Gonçalves et al., 2010b), pelo que as expressões anteriores se simplificam para

$$E_{xx}^{M,NL} = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\phi}_{,x}^T (\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}^T + \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}^T) \boldsymbol{\phi}_{,x} \right), \quad (2.49)$$

$$E_{yy}^{M,NL} = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\phi}^T (\bar{\mathbf{v}}_{,y} \bar{\mathbf{v}}_{,y}^T + \bar{\mathbf{w}}_{,y} \bar{\mathbf{w}}_{,y}^T) \boldsymbol{\phi} \right), \quad (2.50)$$

$$E_{xy}^{M,NL} = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\phi}^T (\bar{\mathbf{v}}_{,y} \bar{\mathbf{v}}^T + \bar{\mathbf{w}}_{,y} \bar{\mathbf{w}}^T) \boldsymbol{\phi}_{,x} \right). \quad (2.51)$$

O segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, \mathbf{S} , é também escrito na forma vetorial

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

o que permite escrever as equações de equilíbrio como

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = - \int_V \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} dV + \int_\Omega \delta \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega = 0. \quad (2.53)$$

Para obter a equação de bifurcação é necessário linearizar a equação de equilíbrio a partir da configuração inicial ($\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$), na direção de uma variação da configuração $\Delta \boldsymbol{\phi}$, o que conduz a $d\mathbf{E} = d\boldsymbol{\varepsilon}$, $\Delta \delta \mathbf{U} = \mathbf{0}$ (os deslocamentos são funções lineares de $\boldsymbol{\phi}$) e, portanto, $\Delta \delta W_{ext} = 0$. Para além disso, admite-se que as tensões são dadas por $\mathbf{S} = \lambda \bar{\mathbf{S}}$, onde λ é o

parâmetro de carga para o perfil de carregamento definido (para $\lambda = 1$ as tensões são \bar{S}_{xx}^M , \bar{S}_{yy}^M e \bar{S}_{xy}^M). Obtém-se assim

$$-\int_V (\Delta \delta \mathbf{E}^T \lambda \bar{\mathbf{S}} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV = 0. \quad (2.54)$$

Esta equação corresponde, naturalmente, a um problema de valores próprios (cargas de bifurcação λ) e vetores próprios (modos de instabilidade).

Para prosseguir, admite-se que as únicas componentes de tensão de pré-encurvatura não-nulas são S_{xx}^M e S_{xy}^M (o que está de acordo com o que se considera no Capítulo 4). O desenvolvimento do primeiro termo da equação (2.54) fornece

$$\begin{aligned} & \int_V \Delta \delta \mathbf{E}^T \lambda \bar{\mathbf{S}} dV \\ &= \int_V \begin{bmatrix} \delta \phi_{,x}^T (\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}^T + \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}^T) \Delta \phi_{,x}, \\ \delta \phi^T (\bar{\mathbf{v}}_{,y} \bar{\mathbf{v}}_{,y}^T + \bar{\mathbf{w}}_{,y} \bar{\mathbf{w}}_{,y}^T) \Delta \phi \\ \delta \phi^T (\bar{\mathbf{v}}_{,y} \bar{\mathbf{v}}^T + \bar{\mathbf{w}}_{,y} \bar{\mathbf{w}}^T) \Delta \phi_{,x} + \delta \phi_{,x}^T (\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}_{,y}^T + \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}_{,y}^T) \Delta \phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda \bar{S}_{xx}^M \\ 0 \\ \lambda \bar{S}_{xy}^M \end{bmatrix} dV \\ &= \lambda \left(\int_L \delta \phi_{,x}^T \mathbf{X}_1 \Delta \phi_{,x} dx + \int_L \delta \phi^T \mathbf{X}_2 \Delta \phi_{,x} dx + \int_L \delta \phi_{,x}^T \mathbf{X}_3 \Delta \phi dx \right), \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde as matrizes \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 e \mathbf{X}_3 são dadas por

$$\mathbf{X}_1 = \int_S t \bar{S}_{xx}^M (\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}^T + \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}^T) dy, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{X}_2 = \int_S \frac{1}{2} t \bar{S}_{xy}^M (\bar{\mathbf{v}}_{,y} \bar{\mathbf{v}}^T + \bar{\mathbf{w}}_{,y} \bar{\mathbf{w}}^T) dy, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{X}_3 = \int_S \frac{1}{2} t \bar{S}_{xy}^M (\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}_{,y}^T + \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}_{,y}^T) dy. \quad (2.58)$$

A integração do segundo termo da equação (2.54) fornece imediatamente

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_L \begin{bmatrix} \delta \phi(x) \\ \delta \phi_{,x}(x) \\ \delta \phi_{,xx}(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \phi(x) \\ \Delta \phi_{,x}(x) \\ \Delta \phi_{,xx}(x) \end{bmatrix} dx, \quad (2.59)$$

onde podem ser mais uma vez identificadas as matrizes \mathbf{B} , \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 e \mathbf{C} , dadas pelas expressões (2.33)-(2.36).

2.3.2 Formulação de elementos finitos

Nesta secção descreve-se a formulação de elementos finitos baseados na GBT seguindo a abordagem utilizada por Gonçalves e Camotim (2011, 2012). Essencialmente, interpolam-se as funções de amplitude diretamente, na forma

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \boldsymbol{\Psi}(x) \mathbf{d}_e, \quad (2.60)$$

onde a matriz $\boldsymbol{\Psi}$ contém as funções de interpolação e o vetor \mathbf{d}_e agrupa as incógnitas do problema (os valores nodais das funções de amplitude e das suas derivadas do elemento).

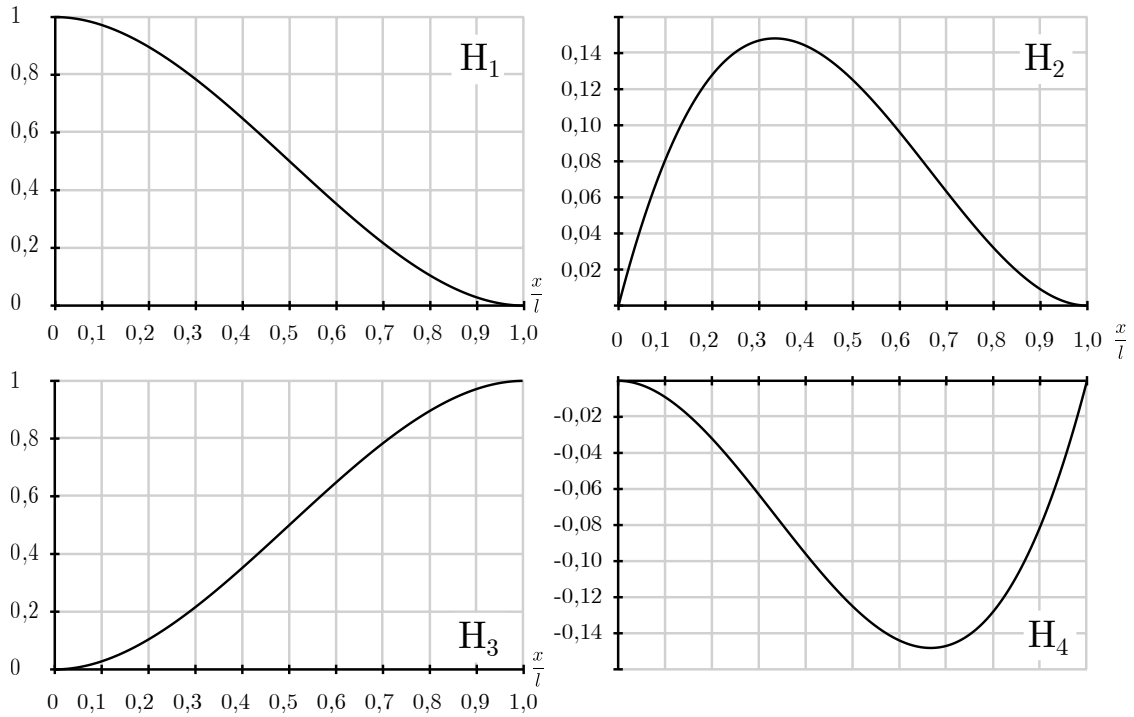


Figura 2.6: Funções de interpolação cúbicas de Hermite.

Tendo em conta que se utiliza a hipótese de Kirchhoff, é necessário que as funções de interpolação para os modos de deformação com $\bar{w} \neq 0$ sejam de classe C^1 . Assim, para estes modos, são utilizadas funções de interpolação cúbicas de Hermite, as quais são definidas por

$$H_1 = 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 1, \quad (2.61)$$

$$H_2 = l \left(\left(\frac{x}{l} \right)^3 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{x}{l} \right), \quad (2.62)$$

$$H_3 = -2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2, \quad (2.63)$$

$$H_4 = l \left(\left(\frac{x}{l} \right)^3 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right), \quad (2.64)$$

onde l representa o comprimento do elemento finito. Estas funções estão representadas nos gráficos da figura 2.6. Recorrendo a estas funções, a aproximação da função de amplitude de um modo k (com $\bar{w} \neq 0$) é dada por

$$\phi_k(x) = H_1 \phi_k(0) + H_2 \phi_{k,x}(0) + H_3 \phi_k(l) + H_4 \phi_{k,x}(l). \quad (2.65)$$

Para os modos de deformação apenas com deslocamentos axiais (ou “modos de empenamento”, $\bar{u}_k \neq 0, \bar{v}_k = \bar{w}_k = 0$) apenas é exigida continuidade das funções de interpolação, pelo que são utilizadas funções quadráticas hierárquicas de Lagrange (ver figura 2.7), dadas

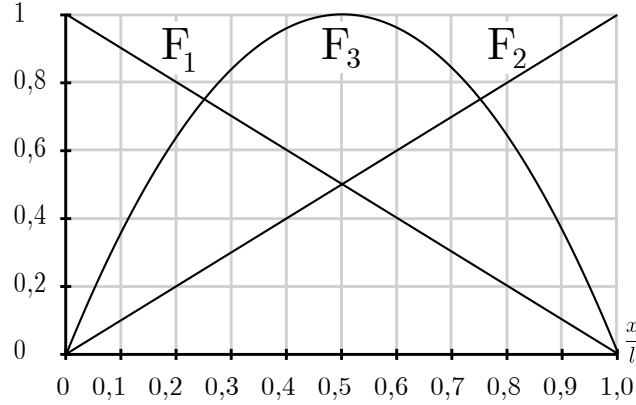


Figura 2.7: Funções de interpolação de Lagrange quadráticas hierárquicas.

por

$$F_1 = 1 - \frac{x}{l}, \quad (2.66)$$

$$F_2 = \frac{x}{l}, \quad (2.67)$$

$$F_3 = 4 \left(\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right). \quad (2.68)$$

Desta forma, a aproximação da função de amplitude para estes modos, $\phi_{k,x}(x)$ (recorde-se de (2.16) que os deslocamentos u são obtidos a partir de $\phi_{k,x}$ e não de ϕ_k),

$$\phi_{k,x}(x) = F_1 \phi_{k,x}(0) + F_3 \phi_{k,x}(l/2) + F_2 \phi_{k,x}(l). \quad (2.69)$$

Obtém-se assim um elemento finito de três nós, onde o primeiro nó ($x = 0$) está associado a F_1, H_1 e H_2 , o nó intermédio ($x = \frac{l}{2}$) diz respeito apenas à função F_3 e o terceiro nó ($x = l$) está associado a F_2, H_3 e H_4 . Considerando um total de N modos, onde os primeiros N_w são modos que envolvem exclusivamente empenamento (w provém da designação em língua inglesa, *warping*), a matriz Ψ possui dimensão $N \times (4N - N_w)$ e distribui-se da seguinte forma

$$\Psi = \left[\begin{array}{c|c|c} P(\bar{F}_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{H}_1 & \bar{H}_2 \end{array} \parallel \begin{array}{c} P(\bar{F}_3) \\ \mathbf{0} \end{array} \parallel \begin{array}{c|c|c} P(\bar{F}_2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{H}_3 & \bar{H}_4 \end{array} \right], \quad (2.70)$$

onde \bar{A} designa uma matriz que contém na sua diagonal principal a função A , logo quadrada, de dimensão igual ao número de modos de deformação associados, e $P(A)$ representa a primitiva da função A em relação a x (a necessidade da sua introdução deve-se ao facto de (2.16) envolver $\phi_{k,x}$, conforme já referido).

Assim, o vetor das incógnitas \mathbf{d}_e possui $4N - N_w$ elementos (para um único elemento

finito) e é dado por

$$\mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} \phi_{1,x}(0) \\ \vdots \\ \phi_{N_w,x}(0) \\ \phi_{N_w+1}(0) \\ \vdots \\ \phi_N(0) \\ \phi_{N_w+1,x}(0) \\ \vdots \\ \phi_{N,x}(0) \\ \hline \phi_{1,x}(l/2) \\ \vdots \\ \phi_{N_w,x}(l/2) \\ \hline \phi_{1,x}(l) \\ \vdots \\ \phi_{N_w,x}(l) \\ \phi_{N_w+1}(l) \\ \vdots \\ \phi_N(l) \\ \phi_{N_w+1,x}(l) \\ \vdots \\ \phi_{N,x}(l) \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$

2.3.2.1 Caso linear

Para o caso linear, com a aproximação (2.60), as variações virtuais das funções de amplitude são dadas por

$$\delta\phi = \mathbf{\Psi}\delta\mathbf{d}_e, \quad (2.72)$$

$$\delta\phi_{,x} = \mathbf{\Psi}_{,x}\delta\mathbf{d}_e, \quad (2.73)$$

$$\delta\phi_{,xx} = \mathbf{\Psi}_{,xx}\delta\mathbf{d}_e, \quad (2.74)$$

cuja substituição em (2.31) permite obter, para um elemento de volume V_e e superfície média Ω_e ,

$$-\delta\mathbf{d}_e^T \int_{V_e} \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi} \\ \mathbf{\Psi}_{,x} \\ \mathbf{\Psi}_{,xx} \end{bmatrix}^T \mathbf{\Xi}_\varepsilon^T \mathbf{C} \mathbf{\Xi}_\varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi} \\ \mathbf{\Psi}_{,x} \\ \mathbf{\Psi}_{,xx} \end{bmatrix} dV \mathbf{d}_e + \delta\mathbf{d}_e^T \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi} \\ \mathbf{\Psi}_{,x} \end{bmatrix}^T (\mathbf{\Xi}_U^M)^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega = 0, \quad (2.75)$$

sendo possível identificar o vetor das forças externas elementar

$$\mathbf{F}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^T (\Xi_U^M)^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega \quad (2.76)$$

e a matriz de rigidez elementar

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \Xi_\varepsilon^T \mathbf{C} \Xi_\varepsilon \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} dV. \quad (2.77)$$

Tendo em conta (2.32), a matriz de rigidez pode ser escrita em termos das matrizes modais da GBT, ou seja,

$$\mathbf{K}_e = \int_l \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} dx, \quad (2.78)$$

onde l é o comprimento do elemento finito.

2.3.2.2 Caso fisicamente não-linear

Para o caso fisicamente não-linear, comece-se por notar que se tem

$$\delta\phi = \Psi \delta d_e, \quad (2.79)$$

$$\Delta\phi = \Psi \Delta d_e, \quad (2.80)$$

$$\delta\phi_{,x} = \Psi_{,x} \delta d_e, \quad (2.81)$$

$$\Delta\phi_{,x} = \Psi_{,x} \Delta d_e, \quad (2.82)$$

$$\delta\phi_{,xx} = \Psi_{,xx} \delta d_e, \quad (2.83)$$

$$\Delta\phi_{,xx} = \Psi_{,xx} \Delta d_e. \quad (2.84)$$

Assim, substituindo (2.60) em (2.30), obtém-se

$$-\delta d_e \int_{V_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \Xi_\varepsilon^T \sigma dV + \delta d_e^T \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^T (\Xi_U^M)^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega = 0. \quad (2.85)$$

onde se identifica o vetor das forças internas elementar

$$\mathbf{Q}_e = \int_{V_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \Xi_\varepsilon^T \sigma dV, \quad (2.86)$$

e o vetor das forças externas elementar

$$\mathbf{F}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^T (\Xi_U^M)^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega. \quad (2.87)$$

A matriz de rigidez tangente elementar é obtida substituindo a aproximação (2.60) na primeira parcela de (2.39) (a segunda parcela fornece precisamente a versão incremental de (2.87)), o que fornece

$$(\mathbf{K}_t)_e = \int_{V_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \Xi_\varepsilon^T \mathbf{C}_t \Xi_\varepsilon \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} dV, \quad (2.88)$$

Para implementar o procedimento incremental-iterativo, é ainda necessário obter o vetor das forças desequilibradas, o qual se obtém através de

$$\mathbf{g} = \mathbf{F} - \mathbf{Q}. \quad (2.89)$$

2.3.2.3 Análise linear de estabilidade

No caso de uma ALE, utilizando mais uma vez a interpolação (2.60), a matriz de rigidez linear elementar é obtida a partir de (2.59), o que conduz imediatamente a (2.77). Já a matriz de rigidez geométrica elementar, é obtida a partir de (2.55), conduzindo a

$$\mathbf{G}_e = \int_{V_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \Xi_E^M(\bar{\mathbf{S}}^M) \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} dv, \quad (2.90)$$

com a matriz auxiliar $\Xi_E^M(\bar{\mathbf{S}})$ definida por

$$\Xi_E^M(\bar{\mathbf{S}}^M) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{S}_{xy}^M(\bar{\mathbf{v}}_{,y}\bar{\mathbf{v}}^T + \bar{\mathbf{w}}_{,y}\bar{\mathbf{w}}^T) & \mathbf{0} \\ \bar{S}_{xy}^M(\bar{\mathbf{v}}_{,y}\bar{\mathbf{v}}^T + \bar{\mathbf{w}}_{,y}\bar{\mathbf{w}}^T) & \bar{S}_{xx}^M(\bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{v}}^T + \bar{\mathbf{w}}\bar{\mathbf{w}}^T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.91)$$

Finalmente, a assemblagem das matrizes elementares permite obter a equação de bifurcação

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{G}) \Delta\mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (2.92)$$

Os valores próprios λ correspondem às cargas de bifurcação e os respectivos vetores próprios definem os correspondentes modos de instabilidade.

2.4 Implementação computacional

Os elementos finitos que são apresentados nos Capítulos subsequentes foram implementados em MATLAB (2010). Em particular, foram desenvolvidos os seguintes programas principais:

- (i). Programa de análise, o qual permite determinar trajetórias de equilíbrio pelo método de Newton-Raphson, com controle de força ou deslocamento. Em análises lineares não é necessário recorrer a métodos iterativos para determinação das equações de

equilíbrio, visto $\mathbf{g} = 0$ e portanto a solução é trivial. Relativamente a análises não-lineares, o vetor das forças internas \mathbf{Q} deixa de estar em equilíbrio com as forças exteriores, desenvolvendo-se forças desequilibradas, dadas pelo vetor \mathbf{g} . A cada iteração do método de Newton-Raphson são determinadas a matriz de rigidez tangente e o vetor das forças desequilibradas, procedendo-se à solução do problema como descrito detalhadamente abaixo, com controlo de deslocamento e controlo de força;

- (ii). Programa de pós-processamento, que permite obter e visualizar resultados, nomeadamente da configuração indeformada e deformada da estrutura, associadas a grandezas como tensões, deformações, fendas, deslocamentos.

O vetor das forças exteriores global é dado por

$$\mathbf{F} = \lambda \bar{\mathbf{F}}, \quad (2.93)$$

onde $\bar{\mathbf{F}}$ é determinado pela assemblagem de (2.87), estando associado ao perfil de carregamento considerado, e λ é o parâmetro de carga. Recorde-se ainda que o vetor das forças desequilibradas é dado por (2.89).

No caso de controle de força, o parâmetro de carga é incrementado e, para cada incremento, são determinados os correspondentes deslocamentos iterativamente. Esta estratégia incremental-iterativa é normalmente ilustrada recorrendo a um gráfico do tipo do representado na figura 2.8, para um sistema com um grau de liberdade apenas (a generalização para mais graus de liberdade requer a substituição das grandezas escalares pelas congêneres vectoriais/matriciais). Nesta figura, $\Delta \mathbf{F} = \Delta \lambda \bar{\mathbf{F}}$ é o incremento de carga (neste caso $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}$, dado que se está a ilustrar o primeiro incremento de carga), o índice indica o número da iteração, \mathbf{K}_t é a rigidez tangente, d é o deslocamento, \mathbf{Q} é a força interna e $\mathbf{g} = \mathbf{F} - \mathbf{Q}$ é a força desequilibrada, a qual é utilizada na iteração seguinte para obter uma nova estimativa da configuração de equilíbrio. O processo converge quando o módulo de \mathbf{g} é inferior a um determinado valor.

Para sistemas com vários graus de liberdade, o incremento de deslocamento na iteração $i + 1$ é obtido através de

$$\Delta \mathbf{d}_{i+1} = (\mathbf{K}_t)_{i+1}^{-1} \mathbf{g}_i, \quad (2.94)$$

onde os GDL restringidos foram eliminados da matriz de rigidez global e do vetor das forças desequilibradas. Note-se que, para a primeira iteração, tem-se $\mathbf{g} = \Delta \mathbf{F} = \Delta \lambda \bar{\mathbf{F}}$.

No presente trabalho, considera-se que a convergência é atingida quando a norma do vetor das forças desequilibradas atinge um valor reduzido em relação às forças aplicadas, *i.e.*,

$$\|\mathbf{g}\| < 0,001 \|\mathbf{F}\|. \quad (2.95)$$

onde os vetores elementares que compõem \mathbf{g} e \mathbf{F} são dados pelas equações (2.87) e (2.89), e se eliminam os graus de liberdade restringidos (condições de fronteira cinemáticas).

No caso de problemas em que as trajetórias de equilíbrio exibem um ponto limite, a estratégia de controle de força não permite obter soluções na vizinhança desse ponto. Como

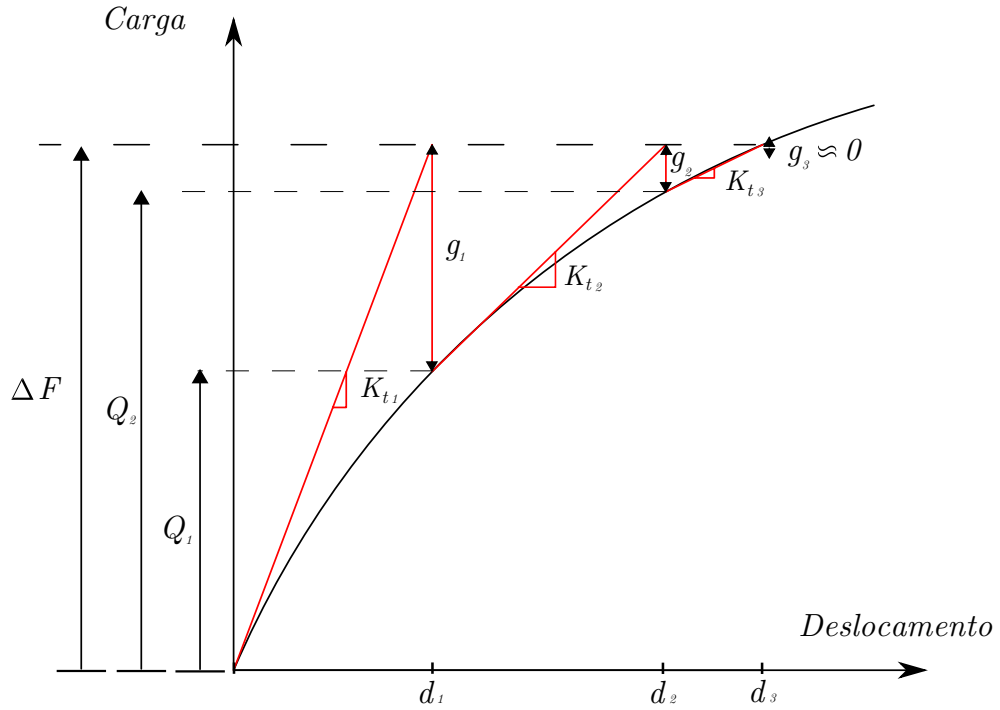


Figura 2.8: Método de Newton-Raphson para sistemas com um grau de liberdade.

no presente trabalho são obtidas trajetórias deste tipo, foi implementada uma estratégia de controle de deslocamento (ver, por exemplo, Crisfield, 1991). Como esta estratégia nunca foi implementada no contexto da GBT, tendo em conta que envolve a consideração de modos de deformação, os detalhes são descritos de seguida.

Neste método especifica-se um deslocamento “objectivo” α , que se quer igualar a uma componente do deslocamento de um determinado ponto do plano médio, d_k . Tendo em conta as expressões (2.19), (2.20) e (2.60), este deslocamento é dado por

$$d_k = \bar{\mathbf{1}} \Xi_U^M(y) \begin{bmatrix} \Psi(x) \\ \Psi_{,x}(x) \end{bmatrix} \mathbf{d}_e, \quad (2.96)$$

onde \mathbf{d}_e é o vetor dos deslocamentos do elemento ao qual o ponto k pertence, de coordenadas x e y (a coordenada z não é utilizada porque se consideram apenas pontos do plano médio), e $\bar{\mathbf{1}} = [1 \ 0 \ 0]$, $[0 \ 1 \ 0]$ ou $[0 \ 0 \ 1]$, consoante a componente de deslocamento pretendida seja segundo x , y ou z , respetivamente. Por uma questão de simplificação, a equação anterior escreve-se da seguinte forma

$$d_k = \Theta_k(x, y) \mathbf{d}_e, \quad (2.97)$$

onde se introduziu a matriz auxiliar

$$\Theta_k(x, y) = \bar{\mathbf{1}} \Xi_U^M(y) \begin{bmatrix} \Psi(x) \\ \Psi_{,x}(x) \end{bmatrix}. \quad (2.98)$$

A equação de constrangimento escreve-se então como

$$a = d_k - \alpha. \quad (2.99)$$

sendo a um escalar cujo valor se pretende anular. A linearização da equação anterior fornece

$$\Delta a = \Delta d_k = \Theta_k \Delta \mathbf{d}_e \quad (2.100)$$

Relembrando (2.93), a linearização do vetor das forças exteriores fica

$$\Delta \mathbf{F} = \Delta \lambda \bar{\mathbf{F}}. \quad (2.101)$$

Uma vez que o vetor das forças internas (2.86) não sofre alterações, a linearização do vetor das forças desequilibradas (2.89) é dada por

$$\Delta \mathbf{g} = \Delta \mathbf{F} - \Delta \mathbf{Q} = \Delta \lambda \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{K} \Delta \mathbf{d}. \quad (2.102)$$

O processo incremental/iterativo é fornecido pelas equações (2.100) e (2.102). Na iteração i , pretende-se anular a grandeza a e o vetor das forças desequilibradas \mathbf{g} , obtendo-se

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{i-1} + \Delta \mathbf{g}_i = \mathbf{0}, \\ a_{i-1} + \Delta a_i = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{g}_{i-1} + (\Delta \lambda \bar{\mathbf{F}}_i - \mathbf{K}_i \Delta \mathbf{d}_i) = \mathbf{0}, \\ a_{i-1} + \Theta_k \Delta \mathbf{d}_e = 0. \end{cases} \quad (2.103)$$

O sistema pode ser reescrito numa forma matricial, o que permite uma implementação computacional mais simples. Assim, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_i & -\bar{\mathbf{F}} \\ \Theta_k & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_i \\ \Delta \lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{g}_{i-1} \\ \Delta a_{i-1} \end{bmatrix}, \quad (2.104)$$

$$\Delta \mathbf{d}_{aug} = \mathbf{K}_{aug}^{-1} \mathbf{g}_{aug}, \quad (2.105)$$

onde \mathbf{K}_{aug} é a matriz de rigidez tangente “aumentada”, \mathbf{d}_{aug} e \mathbf{g}_{aug} os vetores dos graus de liberdade e das forças exteriores “aumentados” (do inglês *augmented*).

A matriz de rigidez tangente elementar, bem como os vetores das forças internas/externas/desequilibradas elementares, têm dimensão $4N - N_w$ (recordar a notação introduzida na Secção 2.3.2). A assemblagem da versão global destes vetores/matriz encontra-se ilustrada na figura 2.9, para uma discretização em três elementos finitos, onde se indicam as funções de aproximação utilizadas em cada GDL (de acordo com a sequência estabelecida na Secção 2.3.2). Note-se que o número de linhas (e colunas, no caso da matriz de rigidez) é igual a $2Nn_e + 2N - N_w$, onde n_e é o número de elementos finitos.

A determinação da matriz de rigidez e do vetor das forças externas e internas é efetuada com recurso a integração numérica, utilizando a regra de quadratura de Gauss. O número de pontos utilizados em cada caso é discutido nos respetivos Capítulos.

Para atingir uma melhor eficiência computacional, a integração deve ter em conta a natureza específica da aproximação do campo de deslocamentos da GBT (*i.e.*, os modos de deformação são apenas função de y e as funções de aproximação são apenas função

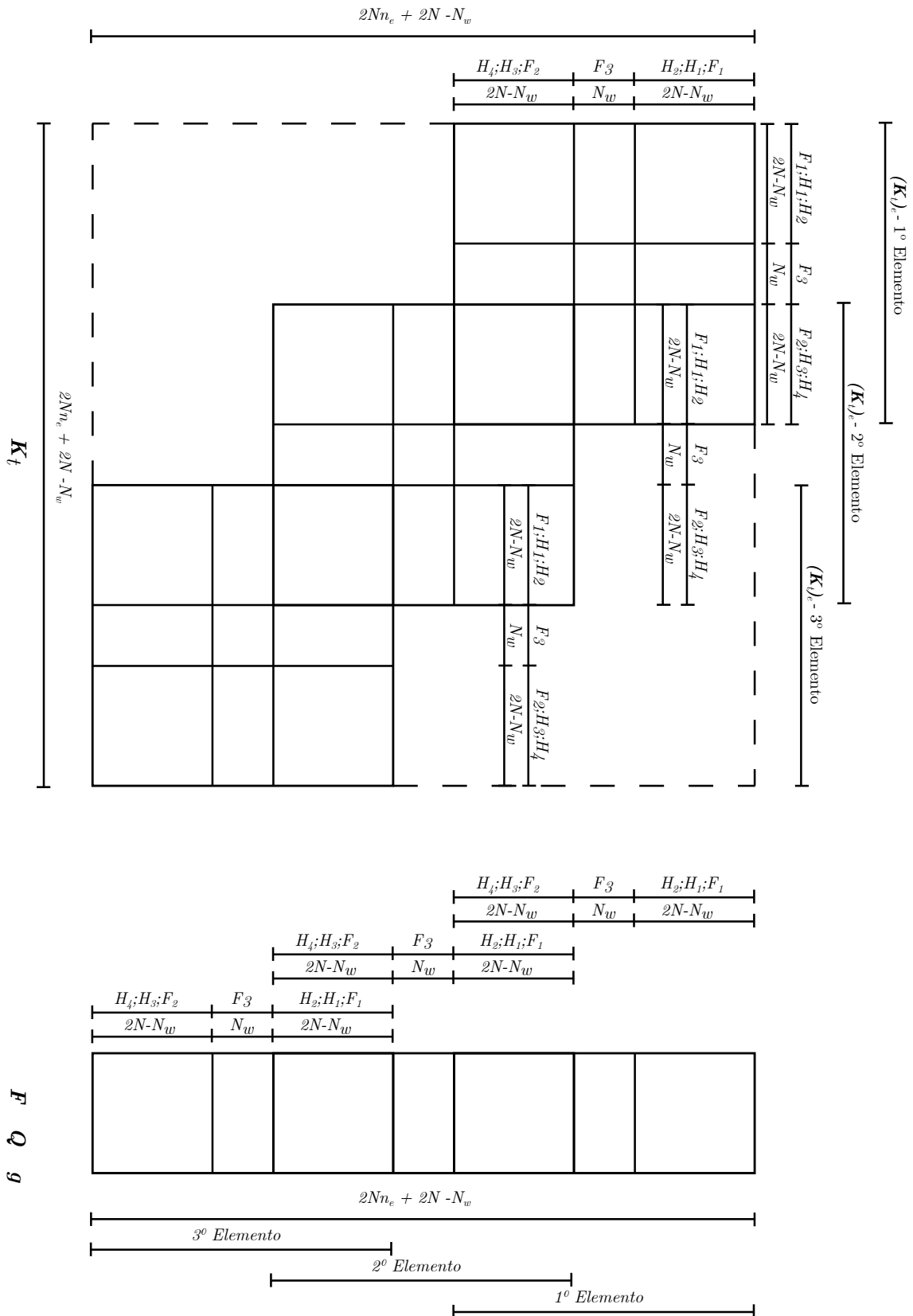


Figura 2.9: Montagem da matriz global \mathbf{K}_t e dos vetores globais \mathbf{F} , \mathbf{Q} , \mathbf{g} .

de x). Assim, antes do início do processo incremental, as matrizes (2.24) e (2.25) são pré-calculadas para cada ponto de integração (segundo y) e a matriz (2.70) e suas derivadas são pré-calculadas para cada ponto de integração segundo x . Em cada iteração, a integração é efetuada em primeiro lugar segundo z , o que não requer a determinação de novas matrizes (2.24), (2.25) e (2.70), e somente depois segundo y e x (o que apenas requer a recuperação das matrizes já pré-calculadas).

Todos os cálculos foram efetuados num computador com uma CPU Intel Core i7-8550U a 1,80 GHz.

Capítulo 3

Análise fisicamente não-linear de vigas mistas aço-betão

3.1 Introdução

No presente Capítulo, a formulação da GBT apresentada no Capítulo 2 é particularizada para o caso de vigas mistas aço-betão com comportamento fisicamente não-linear, tendo em conta os efeitos de *shear lag*, plastificação do aço e fendilhação/esmagamento no betão. O objetivo é desenvolver e validar uma formulação que permita determinar, com precisão e rapidez, o comportamento global de vigas mistas, até ao colapso, admitindo que não ocorre escorregamento na conexão e que não ocorrem fenómenos de encurvadura local e lateral-distorcional no perfil de aço. Estas hipóteses implicam que o elemento finito só deve ser aplicado a secções mistas da classe 1, de acordo com o Eurocódigo 4, dado que o colapso em geral ocorrerá após uma significativa redistribuição de esforços, o que exige capacidade de rotação das secções plastificadas. No entanto, se a estrutura for isostática, as secções podem ser da classe 2. Note-se ainda que, de acordo com o Eurocódigo 4, as hipóteses adotadas implicam automaticamente que não é necessário ter em conta os efeitos da retração, fluência, temperatura e faseamento construtivo.

A Secção 3.2 apresenta uma revisão bibliográfica na área das vigas mistas com comportamento fisicamente não-linear e/ou incluindo o efeito de *shear lag*. Na Secção 3.3 discutem-se as especificidades do elemento finito proposto, nomeadamente as hipóteses adotadas para os campos de tensão/deformação e os modos de deformação da GBT utilizados, dois aspetos fundamentais para que o elemento finito seja simultaneamente preciso e computacionalmente eficiente. As leis constitutivas consideradas para o aço e betão também são apresentadas nesta Secção, bem como aspetos relacionados com a formulação e a implementação do elemento finito proposto. De seguida, na Secção 3.4, são apresentados vários exemplos numéricos. Para efeitos de validação e comparação, são utilizados resultados obtidos com modelos de elementos finitos convencionais, utilizando os programas *ATENA* (Cervenka et al., 2013) e *ADINA* (Bathe, 2019).

3.2 Revisão da literatura

De seguida apresenta-se uma breve revisão bibliográfica relativa a estudos efetuados no contexto da modelação de vigas mistas aço betão, incluindo *shear lag* e/ou efeitos fisicamente não-lineares. Em primeiro lugar, apresentam-se estudos relativos à determinação de larguras efetivas resultantes do efeito de *shear lag*:

- (i). Em Chiewanichakorn et al. (2004) é proposto um método para calcular as larguras efetivas em vigas simplesmente apoiadas, que tem em conta a variação das tensões na espessura. Este método baseia-se na equivalência de forças no betão (ver figura 3.1): a largura efetiva (b_{eff}) é calculada de modo a que a resultante no betão (C_{slab}) e a sua posição (z_0), num modelo de barra tradicional (Euler-Bernoulli), sejam as mesmas que as obtidas com um modelo de elementos finitos de volume. Para o efeito, impõe-se que a tensão máxima no betão (na fibra superior, mais comprimida) no modelo de barra seja igual à tensão máxima do modelo de elementos de volume (na fibra superior, por cima da alma do perfil). As larguras efetivas calculadas com o método proposto são comparadas com as da norma da AASHTO (1998), verificando-se que estas últimas são muito inferiores. Os autores apresentam ainda um exemplo que mostra que o método proposto permite estimar com muita precisão as tensões na laje, em serviço.

- (ii). Posteriormente, em Chen et al. (2007), o método desenvolvido em Chiewanichakorn et al. (2004) foi utilizado para efetuar um estudo paramétrico alargado, com vista a obter expressões simplificadas para a largura efetiva em serviço e no colapso. No modelo de elementos finitos utilizado (ver figura 3.2), a lei constitutiva do betão corresponde à associação de um modelo de fenda distribuída (tração) e um modelo de plasticidade com o critério de cedência de Drucker-Prager (compressão). Considera-se uma lei constitutiva elástica-perfeitamente plástica para o perfil de aço e para as armaduras. Neste estudo são variados: (i) o comprimento do vão (inferior a 60 m), (ii) as condições de apoio (vigas simplesmente apoiadas e contínuas de três vãos), (iii) o espaçamento entre vigas (inferior a 5,8 m) e (iv) o ângulo de viés (inferior a 60). Com base nos resultados obtidos, os autores concluem que pode ser considerada toda a largura da laje, tanto para momento positivo como para momento negativo, dado que o efeito de *shear lag* só se manifesta para vãos reduzidos e, para esses casos, o erro cometido ao considerar a largura total pode ser desprezado. No entanto, para momentos negativos, uma estimativa precisa da largura efetiva é fornecida pela expressão

$$\frac{b_{eff}}{b} = 0,948 + 0,003 \frac{L_1}{S} - 0,001\bar{\theta}, \quad (3.1)$$

onde L_1 é o vão extremo da viga, S é o espaçamento entre vigas e $\bar{\theta}$ é o ângulo de viés.

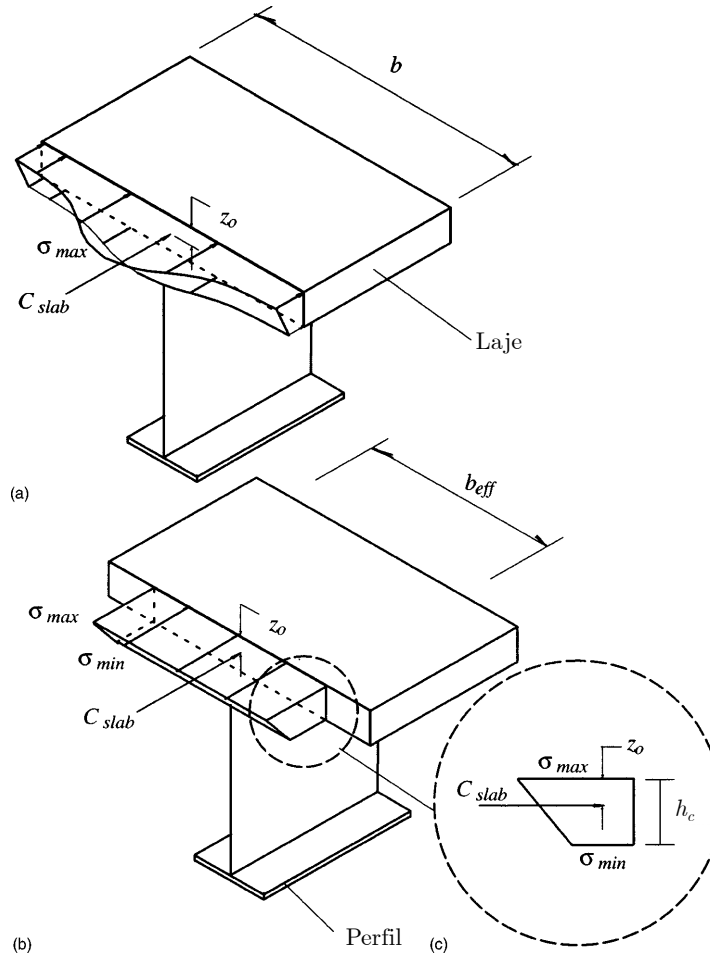


Figura 3.1: Determinação largura efetiva tendo em conta a variação na espessura das tensões longitudinais (Chiewanichakorn et al., 2004).

- (iii). Ao contrário do EC4, Nie et al. (2008) fazem a diferenciação entre largura efetiva para análises de serviço e de colapso. É proposta uma metodologia para o cálculo da largura efetiva para análises de colapso de vigas mistas simplesmente apoiadas, sujeitas a momento positivo, baseada no simples conceito de equivalência de momento resistente plástico, calculado usando o método dos blocos retangulares de tensão. A validação das novas fórmulas é feita recorrendo a modelos de elementos finitos de casca de quatro nós para modelar o perfil de aço e a elementos de volume de 8 nós para a laje de betão. Para o perfil de aço e armaduras é adotada uma lei constitutiva elástica-perfeitamente plástica com endurecimento. Para o betão é considerado um modelo constitutivo que tem em conta a fendilhação e esmagamento do material. É usada uma versão modificada da superfície de cedência de Willam e Warnke (1975) e um modelo de fenda distribuída. Verifica-se que a largura efetiva no colapso é maior do que na fase de serviço, sendo a primeira dada por

$$b_{eff} = \begin{cases} b_c, & b_c/L \leq 0,5, \\ L/2, & b_c/L \geq 0,5, \end{cases} \quad (3.2)$$

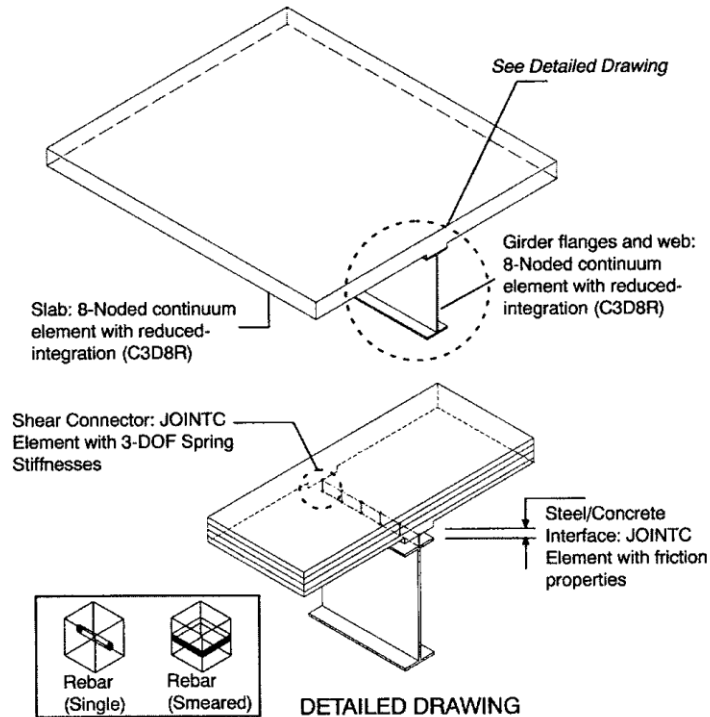


Figura 3.2: Modelo de elementos finitos utilizado por Chen et al. (2007).

em que L é o comprimento do vão e b_c a largura da laje. Comparando a largura efetiva com as expressões no EC4, conclui-se que a largura efetiva proposta é substancialmente superior.

- (iv). Castro et al. (2007) estudam a influencia da espessura da laje e do tipo de carregamento na determinação da largura efetiva de vigas simplesmente apoiadas. São realizadas análises elásticas e plásticas (com conexão rígida), recorrendo a elementos finitos de barra e de casca. Nas análises elásticas (ver figura 3.3 (a) e (c)) são variados a espessura da laje e o tipo de carregamento, demonstrando que espessuras mais finas e cargas pontuais levam a efeitos de *shear lag* mais pronunciados. Relativamente às análises plásticas, são fornecidos os gráficos (b) e (d) da figura 3.3. O gráfico (b) representa a distribuição de tensões na laje, a meio-vão, em função do deslocamento máximo δ . Quando $\delta = 3,25$ cm é atingida a tensão máxima no centro da laje, mas a tensão máxima na extremidade da laje é obtida para um deslocamento muito superior, $\delta = 6,00$ cm, não sendo acompanhada por um aumento de tensão no centro. O gráfico (d) mostra a evolução do efeito de *shear lag* (a relação entre a tensão na extremidade e no centro da laje, a meio vão) com o deslocamento. Até $\delta = 1,00$ cm, que corresponde ao início da cedência (neste caso do banzo inferior do perfil de aço), a relação mantém-se naturalmente constante, após o que decresce ligeiramente. Para $\delta = 3,25$ cm é atingida a tensão máxima no centro da laje e começa a redistribuição de tensões (na laje). Aproximadamente para $\delta = 4,70$ cm a tensão na extremidade da laje iguala a tensão no seu centro e, à medida que o deslocamento aumenta, a tensão

na extremidade torna-se superior à tensão no centro. Os autores demonstram que o efeito de *shear lag* é significativamente distinto em análises elásticas ou plásticas, propondo que, no colapso, as larguras efetivas coincidam com a largura total da laje.

- (v). Finalmente, Lasheen et al. (2018) realizam uma série de estudos experimentais e numéricos de vigas mistas para avaliar a largura efetiva para vários níveis de carga. As análises numéricas são feitas com recurso a modelos de elementos finitos de volume, considerando o comportamento não-linear do material (plasticidade, esmagamento e fendilhação). Neste caso a largura efetiva é definida dividindo o esforço axial na laje, obtido no modelo numérico, pela tensão média e a espessura. Com base nos resultados obtidos são propostas equações para determinar a largura efetiva, em serviço e no colapso, com base em parâmetros tabelados.

Discutem-se agora as formulações de elementos finitos de barra que consideram apenas o efeito de *shear lag*:

- (i). Sun e Bursi (2005) propõem três elementos finitos de deslocamento (10, 12 e 13 graus de liberdade) e dois elementos mistos (força-deslocamento, com 13 graus de liberdade) para a análise elástica de vigas mistas aço-betão com conexão flexível. O efeito de *shear lag* é considerado através de uma única função de empenamento parabólica na laje de betão, dada pela multiplicação de uma função de forma $\psi(x)$ com uma função de intensidade $f(z)$ que constitui a incógnita do problema. A figura 3.4 ilustra a função de forma utilizada, a qual é dada por

$$\psi(x) = \frac{2|X|}{B} - \left(\frac{2|X|}{B}\right)^2, \quad (3.3)$$

sendo B a largura do plano da alma até à extremidade da laje. Os autores mostram que os elementos de deslocamento com 10 GDL e 13 GDL são equivalentes aos dois elementos mistos.

- (ii). Gara et al. (2011a) utilizam o elemento finito de barra elástico desenvolvido por Gara et al. (2009) para determinar novas expressões para as larguras efetivas de pontes em caixão e em “bi-viga” que tem em conta o efeito de *shear lag* e o escorregamento na conexão. Este elemento será apresentado apenas no Capítulo 5, porque também considera a fluência, mas é importante referir que o efeito de *shear lag* é considerado pela introdução de uma função de empenamento quadrática na laje, dada por (ver figura 3.5)

$$\psi(X) = \left(\frac{X}{B}\right)^2 + 2\frac{X}{B} + \frac{B_1}{B} \left(2 - \frac{B_1}{B}\right), \quad -B \leq X \leq -B_1, \quad (3.4)$$

$$\psi(X) = \left(\frac{X}{B}\right)^2 - \left(\frac{B_1}{B}\right)^2, \quad -B_1 \leq X \leq B_1, \quad (3.5)$$

$$\psi(X) = \left(\frac{X}{B}\right)^2 - 2\frac{X}{B} + \frac{B_1}{B} \left(2 - \frac{B_1}{B}\right), \quad B_1 \leq X \leq B. \quad (3.6)$$

CAPÍTULO 3. ANÁLISE FÍSICAMENTE NÃO-LINEAR DE VIGAS MISTAS AÇO-BETÃO

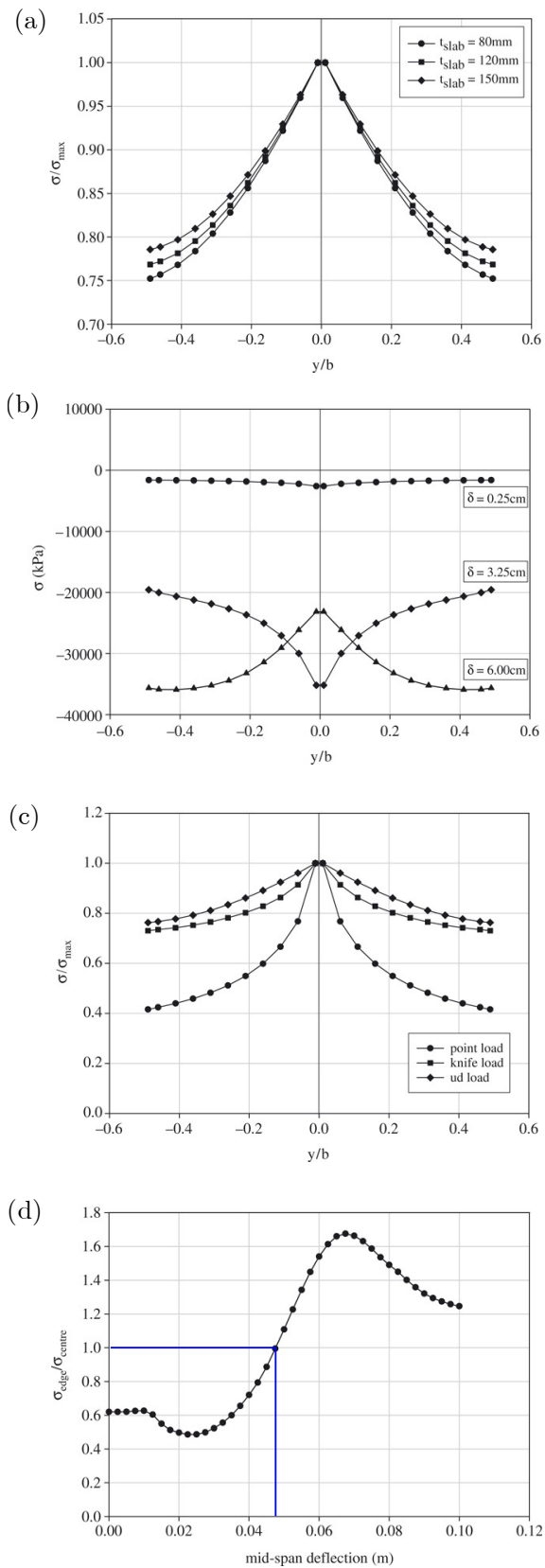


Figura 3.3: Variação do efeito de *shear-lag* com: (a) a espessura da laje, (b)-(d) o aumento da carga, (c) tipo de carga aplicada. (Castro et al., 2007).

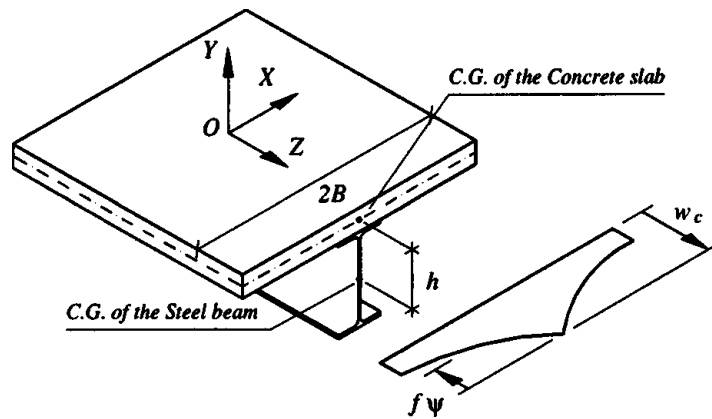


Figura 3.4: Modelo de Sun e Bursi (2005) e função de empenamento.

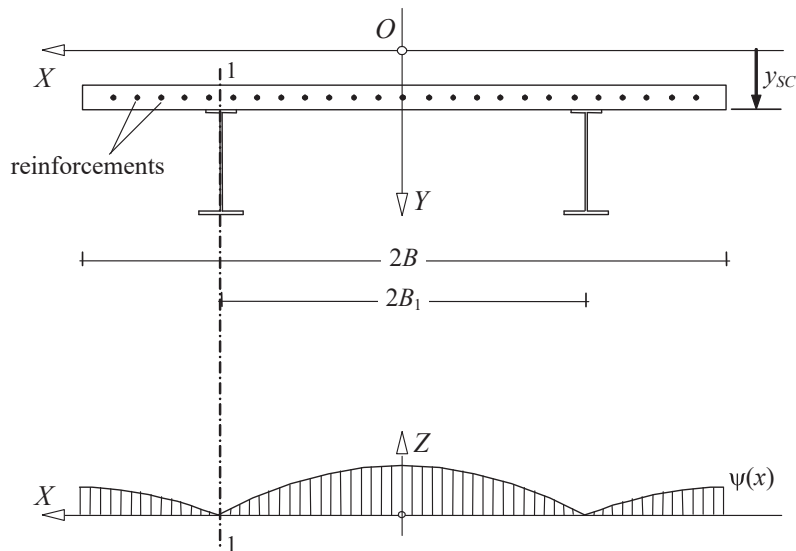


Figura 3.5: Funções de empenamento adotadas por Gara et al. (2011a).

É interessante realçar que os autores concluem que o efeito da conexão em pontes não é relevante para efeitos práticos.

- (iii). Gara et al. (2014) apresentam uma formulação elástica para barras que inclui o efeito de *shear lag*, escorregamento na conexão e deformabilidade por corte no perfil de aço. Para ter em conta a deformação por corte (incluindo *shear lag*), são obtidas funções de empenamento considerando a ação de um fluxo de corte na interface laje-perfil de aço e esforço transversal na alma do perfil. Na laje de betão obtém-se uma função de empenamento com andamento parabólico (ver a figura 3.6), cujos coeficientes são determinados numericamente. São apresentadas soluções analíticas. A comparação entre os resultados obtidos com o elemento finito proposto e com modelo é comparado com elementos finitos de casca, verificando-se uma boa concordância entre os resultados.
- (iv). Hu et al. (2017) propõem também uma formulação elástica e analítica para vigas

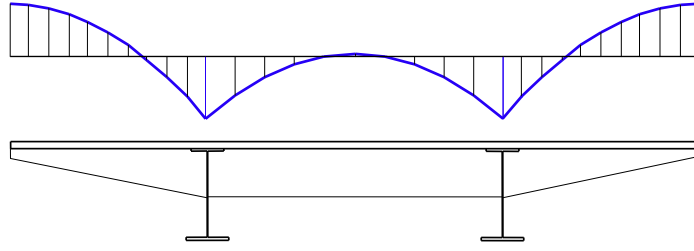


Figura 3.6: Função de empenamento para a laje (Gara et al., 2014).

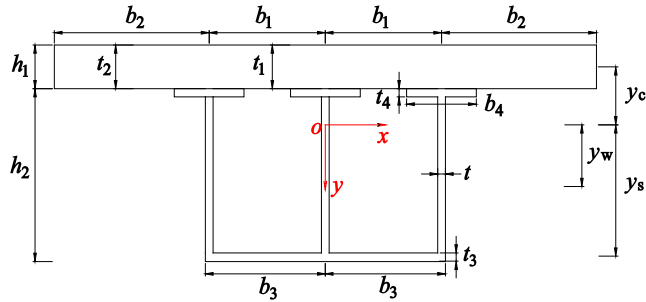


Figura 3.7: Seção transversal considerada por Hu et al. (2017).

mistas em caixão (ver figura 3.7), simplesmente apoiadas, que considera o efeito de *shear lag* na laje e nos banzos inferiores, causado por uma carga concentrada (com posição arbitrária ao longo do eixo da viga) ou duas cargas concentradas dispostas simetricamente em relação ao meio-vão. Neste caso consideram-se as seguintes funções de empenamento

$$f_1 = 1 - \left(\frac{2(x - 0,5b_1)}{b_1} \right)^2, \quad (3.7)$$

$$f_2 = 1 - \left(\frac{b_1 + b_2 - x}{b_2} \right)^3, \quad (3.8)$$

$$f_3 = 1 - \left(\frac{2(x - 0,5b_3)}{b_3} \right)^2, \quad (3.9)$$

onde f_1 , f_2 e f_3 estão associadas à zona interior da laje, à zona em consola e ao banzo inferior de aço, respetivamente. Com base no modelo proposto são feitos estudos paramétricos de sensibilidade ao efeito de *shear lag* para diferentes parâmetros, nomeadamente: classes do aço e do betão, comprimento da consola da laje, largura total da laje, espessura da laje, comprimento da viga e inclinação da alma.

- (v). Mais recentemente, em Lezgy-Nazargah et al. (2019), os autores apresentam um elemento finito de barra de três nós com 25 graus de liberdade que captura o efeito conjunto da conexão flexível e *shear lag*. Este último é descrito pelas funções (3.4)-(3.6). A comparação entre os resultados obtidos com o elemento proposto, modelos de elementos finitos de volume e modelos de elementos de barra de outros autores (entre os quais Henriques et al., 2015a) estão em boa concordância.

A pesquisa efetuada mostra que o efeito de *shear lag* é de extrema relevância para a análise de vigas mistas, existindo ainda na atualidade uma preocupação por parte da comunidade científica em analisar o problema. Muito embora sejam apresentadas diversas expressões para o cálculo de larguras efetivas, o recurso a estas mesmas torna-se moroso e mesmo desnecessário face a análises não-lineares com elementos finitos de casca ou elementos de barra de ordem superior (mais eficientes). Verifica-se uma concordância entre os artigos na definição de funções de empenamento devido ao efeito de *shear lag*, mais precisamente em Lasheen et al. (2018), Gara et al. (2011a) e Sun e Bursi (2005), onde as funções são dadas por polinômios quadráticos¹.

Relativamente a formulações para elementos finitos de barra, capazes de capturar o colapso de vigas mistas, sem o efeito de *shear lag*, são de referir os seguintes trabalhos:

- (i). Pi et al. (2006a) propõem um elemento finito de barra que considera, para além do comportamento fisicamente não-linear dos materiais, escorregamento na conexão aço-betão. É considerado um modelo biaxial de tensões com componentes normais longitudinais e tangenciais. Para o aço é utilizado o critério de cedência de Von Mises com lei de escoamento associada e endurecimento isotrópico. Para o betão, a resposta à compressão é elástica linear até 35% da tensão máxima. Acima deste valor é utilizado um critério de cedência com endurecimento isotrópico e lei de escoamento associada até atingir um determinado valor da deformação, a partir do qual a rigidez é degradada para ter em conta o esmagamento. Até à resistência máxima à tração do betão a lei é elástica linear. Após esse valor máximo, adota-se um modelo de fenda distribuída. Os resultados obtidos com o elemento proposto são comparados com ensaios experimentais em Pi et al. (2006b), concluindo-se que o elemento finito proposto captura, com bastante eficácia, o colapso de vigas mistas sem *shear lag*.
- (ii). Em Ayoub e Filippou (2000) é apresentado um elemento de barra com conexão flexível para cargas monotónicas e cíclicas, em regime fisicamente não-linear. Trata-se de uma formulação mista em deslocamentos e tensões, onde a secção transversal é discretizada em fibras com comportamento uniaxial. A lei constitutiva do betão é uniaxial com degradação cíclica da rigidez de carregamento-recarregamento. O aço também tem um comportamento uniaxial, usando a lei de Menegotto e Pinto (1973) para modelar o comportamento cíclico. O modelo é validado recorrendo a ensaios experimentais estáticos e cíclicos, verificando-se uma boa correlação entre os resultados. São ainda realizadas comparações entre elementos com formulação em deslocamentos, ensaios experimentais e os elementos propostos (mistos), verificando-se que os elementos propostos capturam com maior eficácia o escorregamento da conexão, bem como a distribuição de esforços e deformações.

¹Na secção 3.4 mostrar-se-á precisamente que, para análises elásticas lineares, é razoável a consideração de apenas uma função, mas o mesmo não é verdade para análises não-lineares.

- (iii). Em Zona e Ranzi (2011) comparam-se três elementos finitos de barra com comportamento fisicamente não-linear, capazes de capturar o colapso vigas mistas com conexão flexível. Os modelos considerados são: (EB-EB) duas vigas (laje e perfil de aço) de Euler-Bernoulli, (EB-T) uma viga Euler-Bernoulli (laje) e uma viga de Timoshenko (perfil de aço) e (T-T) duas vigas de Timoshenko (laje e perfil de aço) — estes modelos são apresentados na figura 3.8. Para os modelos de Euler-Bernoulli é naturalmente possível adotar leis constitutivas uniaxiais, mas para os modelos de Timoshenko, os quais requerem a consideração de tensões tangenciais, os autores adotam leis constitutivas muito simplificadas. Em qualquer dos casos, as leis adotadas são não-lineares, inclusivamente para a conexão aço-betão. São obtidos resultados, até ao colapso, para vigas simplesmente apoiadas e contínuas, os quais são comparados com os resultados experimentais de Ansourian (1982) e Nie (2004). Os resultados para vigas simplesmente apoiadas são apresentados na figura 3.9. Para uma carga concentrada a meio vão a rotura ocorre por flexão (a meio vão) e verifica-se que o modelo EB-EB é suficiente para capturar a carga de colapso. Para o caso com duas cargas o colapso é significativamente mais complexo: as vigas CBS-1, CBS-5 e CBS-9 colapsam por corte na alma do perfil e laje de betão, e a viga CBS-13 colapsa por corte no betão. Nestes casos o modelo EB-EB sobrestima muito a carga de colapso, como seria de esperar. Os resultados experimentais encontram-se balizados pelos dos modelos EB-T e T-T. Relativamente às vigas contínuas (ver figura 3.10) o colapso dá-se apenas por flexão, observando-se novamente que o elemento EB-EB é capaz de capturar a carga de colapso com bastante precisão.
- (iv). Mais recentemente, Lou e Karavasilis (2019) apresentam um elemento de barra fisicamente não-linear do tipo Euler-Bernoulli para vigas mistas pré-esforçadas (cabos no perfil de aço) que tem em conta o esmagamento do betão através de uma lei constitutiva não-linear e a fendilhação utilizando uma lei elástica linear com amolecimento. É considerada uma lei elástica-perfeitamente plástica para o aço. O pré-esforço é considerado através da introdução de forças exteriores equivalentes. Não é tida em conta a deformabilidade da conexão. Os resultados obtidos com o elemento proposto são comparados com ensaios experimentais, observando-se diferenças na carga de colapso de aproximadamente 5%. É ainda realizado um estudo paramétrico relativo a uma viga de dois vãos idênticos, variando apenas a área dos cabos de pré-esforço (o traçado dos cabos e a sua tensão inicial não são alterados). Os resultados mostram que o pré-esforço aumenta significativamente a carga de colapso (até 40%).

Da pesquisa bibliográfica efetuada, deve realçar-se que não foi encontrado nenhum elemento finito de barra capaz de capturar o colapso de vigas mistas aço-betão tendo em conta o efeito de *shear lag* na laje, fendilhação/esmagamento do betão e plasticidade no aço. Assim, pode afirmar-se que o elemento proposto constitui um significativo desenvolvimento em relação ao atual estado-da-arte.

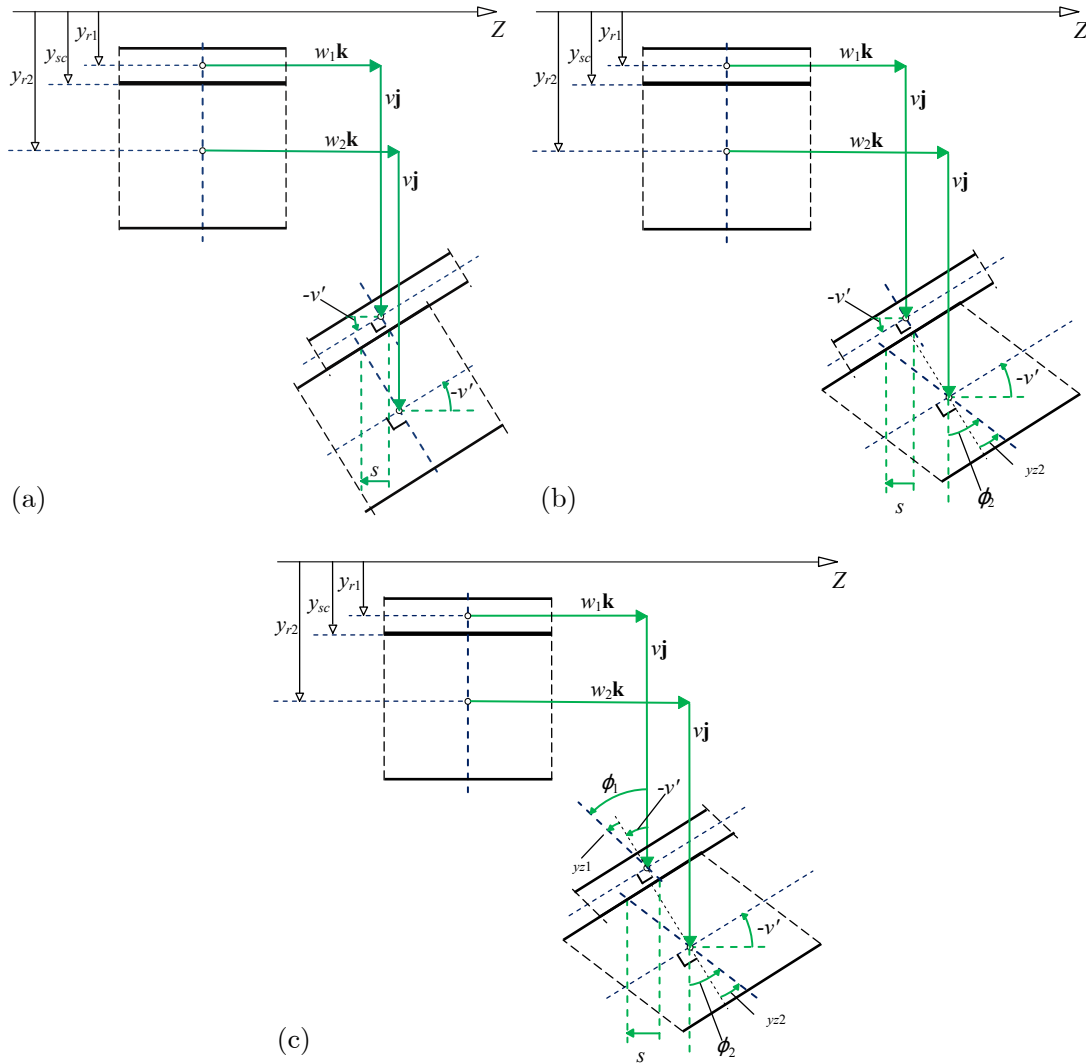


Figura 3.8: Modelos considerados por Zona e Ranzi (2011): (a) duas vigas de Euler-Bernoulli (laje-viga), (b) viga de Euler-Bernoulli (laje) e viga de Timoshenko (perfil de aço) e (c) duas vigas de Timoshenko (laje e perfil de aço).

3.3 Especificidades do elemento finito proposto

Conforme foi discutido por Gonçalves e Camotim (2017), a GBT perde alguma competitividade computacional face aos modelos de elementos finitos de casca quando se considera algum tipo de não-linearidade, se não se introduzirem hipóteses simplificativas. Esta perda de competitividade resulta da necessidade de efetuar, em cada iteração, a integração no volume de funções que envolvem deslocamentos de *toda* a barra, já que os modos de deformação envolvem em geral deslocamentos de toda a secção transversal. Como consequência, é necessário utilizar matrizes grandes e pouco esparsas.

De seguida, detalham-se as hipóteses simplificativas adotadas para obter um elemento finito computacionalmente eficiente.

Admite-se que a secção transversal da viga mista é do tipo da representada na figura

CAPÍTULO 3. ANÁLISE FÍSICAMENTE NÃO-LINEAR DE VIGAS MISTAS AÇO-BETÃO

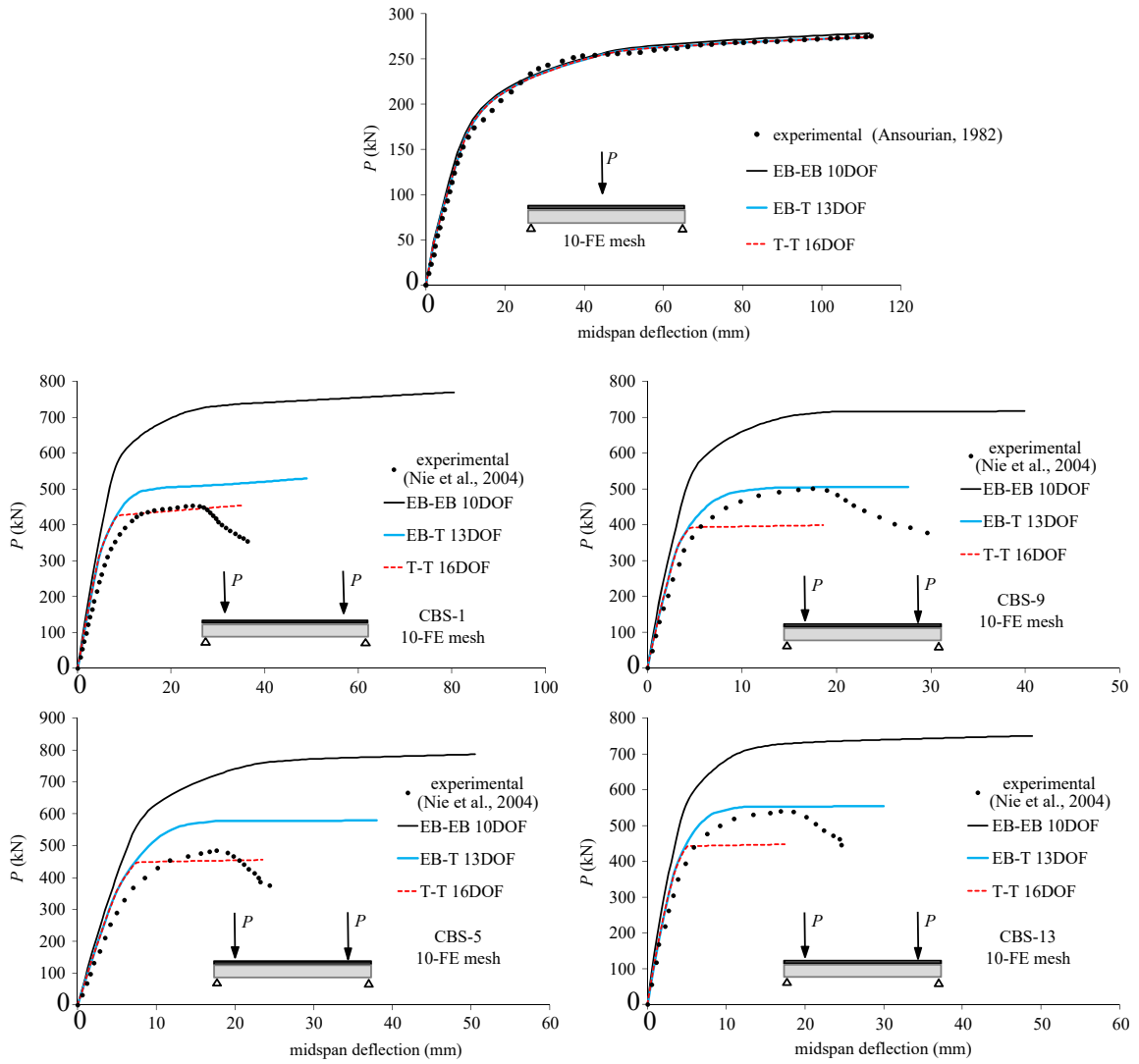


Figura 3.9: Vigas simplesmente apoiadas estudadas por Zona e Ranzi (2011).

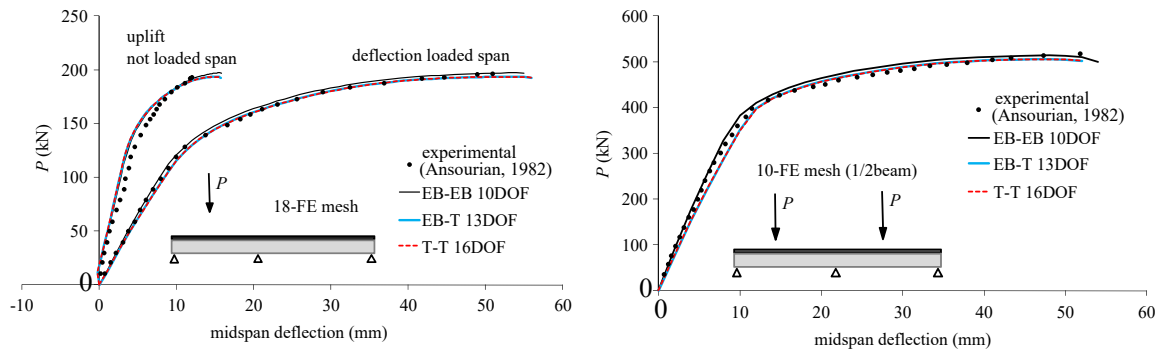


Figura 3.10: Vigas contínuas estudadas por Zona e Ranzi (2011).

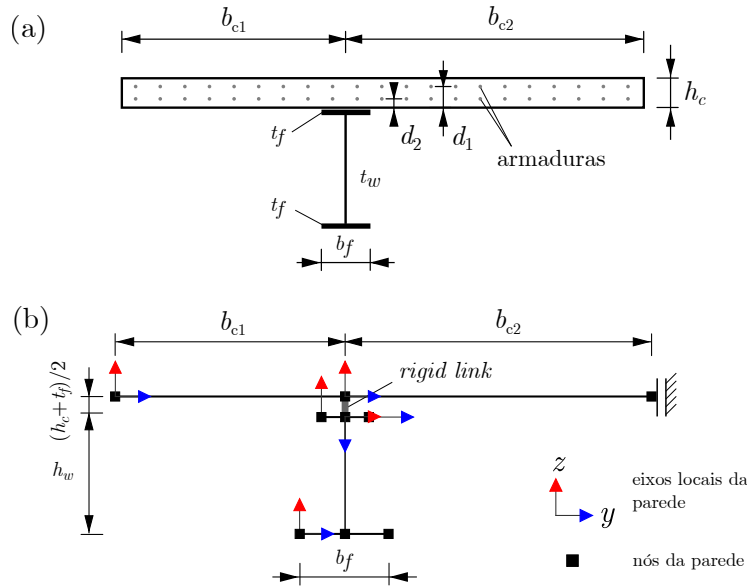


Figura 3.11: Secção-tipo adotada e respetiva discretização.

3.11(a), sendo composta por um perfil de aço com secção em I e uma laje de betão armado. As linhas médias das paredes correspondentes, que constituem a base da descrição cinemática da GBT, são representadas na figura 3.11(b), onde também se indicam os eixos locais de cada parede. Cada camada de armadura pode ser considerada (i) “discreta”, localizada na respetiva cota no interior da laje (na figura as distâncias a partir da face inferior dadas por d_1 e d_2) ou (ii) distribuída na espessura total da laje h_c — este último caso é adotado nos exemplos apresentados na Secção 3.4, dado que é mais fácil de modelar no programa *ATENA*, o qual é utilizado para efeitos de comparação. Admite-se ainda que a secção é constante ao longo de cada elemento finito e que não existe escorregamento entre a armadura e o betão. A secção transversal é subdividida nas seguintes paredes: (i) dois banzos e uma alma para o perfil de aço, (ii) dois banzos de betão, com largura b_{c1} e b_{c2} , e (iii) um número apropriado de camadas de armadura ou armadura distribuída. Note-se ainda que a discretização da secção inclui uma ligação rígida (*rigid links*) entre a laje de betão e a intersecção banzo-alma (ver figura 3.11 (b)), dado que se admite que não existe escorregamento entre os materiais.

Conforme foi já referido, de forma a obter uma formulação computacionalmente eficiente e simultaneamente precisa, adotam-se hipóteses simplificativas adicionais relativamente às introduzidas no Capítulo 2, nomeadamente ao nível das tensões e deformações. Em particular:

- (1) as paredes são indeformáveis na direção transversal y , o que implica que se tem $\varepsilon_{yy}^M = \varepsilon_{yy}^F = 0$;
- (2) em consequência da hipótese anterior, as tensões normais transversais de membrana e flexão são consideradas nulas ($\sigma_{yy}^M = \sigma_{yy}^F = 0$), para não obter soluções demasiado

rígidas em virtude do efeito de Poisson;

- (3) não ocorre rotação das paredes no plano da secção, o que se traduz em $\gamma_{xy}^F = 0$;
- (4) a deformação por corte de membrana é nula ($\gamma_{xy}^M = 0$) apenas nos banzos do perfil metálico, pelo que se considera esta deformação na alma do perfil (deformação por esforço transversal) e na laje (deformação por *shear lag*);
- (5) a armadura tem um comportamento uniaxial, cujas únicas componentes não-nulas de tensão e deformação são σ_{xx} e ε_{xx} .

As hipóteses 1, 3 e 4 constituem “constrangimentos cinemáticos” que resultam numa limitação do número de modos de deformação cinematicamente admissíveis e, conseqüentemente, na diminuição do número de GDL necessários para descrever a configuração da viga, sem que tal afete significativamente a precisão dos resultados.

Antes de mais, deve referir-se que os modos de deformação considerados não são determinados com o programa GBTUL, dado que este não permite ter em conta *rigid links*. Os modos refletem os efeitos que se pretendem capturar, nomeadamente: a flexão vertical (reta), a deformação por esforço transversal na alma do perfil de aço e a deformação por *shear lag* na laje de betão. Assim, consideraram-se apenas os seguintes modos (ver figura 3.12): (E) extensão axial, (F) flexão (Euler-Bernoulli), (C) corte puro na alma do perfil e (SL - SQ) empenamento linear e quadrático em cada lado da laje, para ter em conta o efeito de *shear lag*. A utilização de modos de outras naturezas (*e.g.*, envolvendo a flexão transversal das paredes, a extensão de membrana das paredes no plano da secção transversal, etc.) melhoraria naturalmente a precisão da solução, mas por outro lado aumentaria desnecessariamente o número de GDL e, principalmente, tornaria necessário considerar mais componentes de tensão e deformação e, conseqüentemente, leis constitutivas mais complexas — como se verá nos exemplos apresentados na Secção 3.4, os modos selecionados permitem obter resultados muito precisos com grande eficiência computacional (os tempos de cálculo são extremamente reduzidos). De seguida, descreve-se em pormenor a forma de obter os modos de deformação utilizados.

Em primeiro lugar, considere-se o modo de extensão axial (E). Este modo refere-se a um deslocamento unitário da secção segundo a direção longitudinal x , sem deformação da secção (corresponde a um movimento de “corpo rígido”), pelo que se tem $\bar{u} = 1$ e $\bar{v} = \bar{w} = 0$. Este modo tem de ser incluído nas análises, mesmo que a viga não esteja sujeita a esforço axial, dado que sem ele não é possível modelar a alteração da posição da linha neutra causada pelo comportamento não-linear do betão e/ou *shear lag*.

O modo de flexão (F) é dado pela Teoria de Euler-Bernoulli e é calculado considerando que o betão não está fendilhado. Este modo corresponde a um deslocamento vertical unitário no plano da secção. Para a determinação das respetivas funções de empenamento

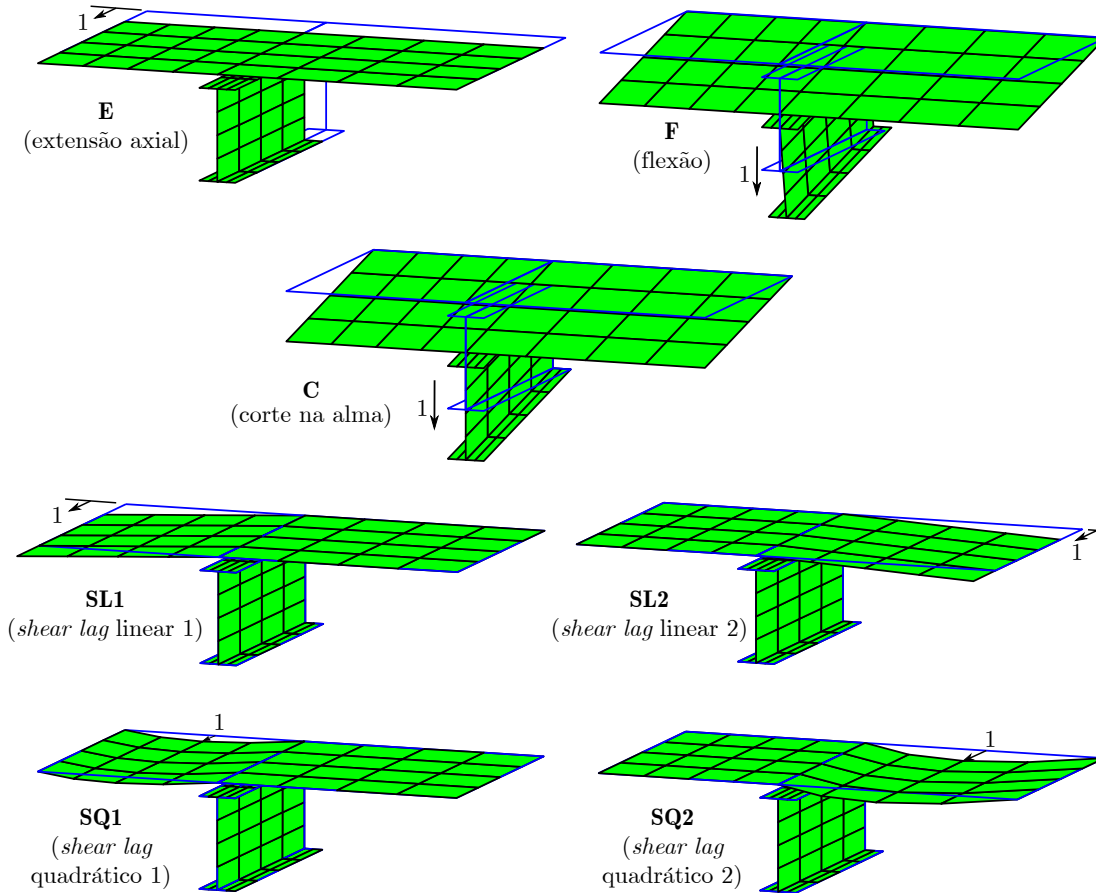


Figura 3.12: Modos de deformação considerados para a análise fisicamente não-linear.

\bar{u} em todas as paredes, é apenas necessário obter a posição da linha neutra elástica, a qual é dada por,

$$Y_{LN} = \frac{\sum_i E_i A_i y_i}{\sum_j E_j A_j}, \quad (3.10)$$

onde E_i , A_i e y_i são, respetivamente, o módulo de elasticidade, a área e a posição do centróide da parede i relativamente a um eixo de referência. De seguida, as funções de empenamento são facilmente obtidas, impondo uma rotação de flexão unitária em torno da linha neutra.

Os modos de *shear lag* correspondem a um empenamento não-uniforme linear e quadrático. Os modos lineares têm valor máximo unitário na extremidade livre da laje de betão e os modos quadráticos são dados por funções do tipo $\bar{u}_k = 4\hat{y}(1 - \hat{y})$ com $\hat{y} = y/b_{ci}$, anulando-se nas extremidades da parede e sendo máximas e unitárias para $y = b_{ci}$. Deve salientar-se que não existe qualquer dificuldade em considerar mais modos deste tipo, nomeadamente modos de grau superior. Contudo, conforme se verá nos exemplos da Secção 3.4, os resultados obtidos com os modos lineares e quadráticos são já suficientemente satisfatórios. Para problemas que exibem simetria em relação ao plano da alma do perfil, os

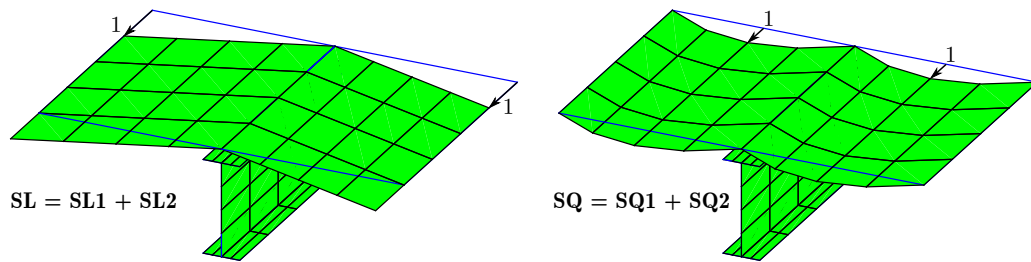


Figura 3.13: Modos de deformação “combinados” — *shear lag* linear e quadrático.

modos podem ser “combinados”, ou seja, $SL=SL1+SL2$ e $SQ=SQ1 + SQ2$, o que permite evidentemente reduzir o número de modos sem perda de precisão da solução. Os modos combinados são representados na figura 3.13.

Finalmente, o modo de corte na alma do perfil corresponde a uma distorção de membrana γ_{xy}^M constante nessa parede. Este modo corresponde aos deslocamentos no plano da secção do modo de flexão, mas a componente de empenamento é nula ($\bar{u} = 0$).

Antes de terminar, salienta-se que é naturalmente possível obter modos de deformação do tipo SL e SQ cujas funções de empenamento são ortogonais às dos modos axial e flexão (para o efeito basta diagonalizar a matriz \mathbf{C}^M dada por (2.37)). No entanto, este procedimento não é seguido no presente trabalho dado que (i) o desacoplamento das equações apenas seria válido em regime elástico linear e, em acréscimo, (ii) os modos SL e SQ passariam a envolver não só deformação por *shear lag* mas também por flexão, o que não facilita a interpretação dos resultados através da análise da participação modal da solução.

3.3.1 Lei constitutiva para o aço

À semelhança de trabalhos anteriores (Gonçalves e Camotim 2011, 2012), adota-se uma lei constitutiva do tipo elástico-perfeitamente plástico. Em particular, o comportamento em regime elástico corresponde à lei material de St. Venant-Kirchhoff e o comportamento plástico utiliza o critério de cedência de Mises-Hencky, com lei de escoamento associada. Muito embora se poderia considerar o endurecimento do material, como em (Gonçalves e Camotim, 2011), optou-se por não seguir este caminho dado que os modelos subjacentes ao Eurocódigo 4 não consideram em geral este efeito. Para além disso, não se limitam as deformações, o que quer dizer que a ductilidade da armadura e perfil têm de estar de acordo com o referido nas cláusulas 5.5.1(5) do EC4 e 3.2.2 do Eurocódigo 3 (CEN, 2005)², respetivamente.

Tendo em conta as hipóteses simplificativas introduzidas, (i) as armaduras na laje e os banzos do perfil estão sujeitos a um estado de tensão uniaxial com $\sigma_{xx} \neq 0$ e (ii) a alma do perfil está sujeita a um estado de tensão com $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}^M \neq 0$.

²Doravante designado por “EC3”.

O primeiro caso (uniaxial) é bastante simples e a sua implementação não oferece dificuldades. No entanto, convém recordar que os módulos de elasticidade para as armaduras e para o perfil de aço são designados por E_s e E_a , respetivamente.

O segundo caso ($\sigma_{xx}, \sigma_{xy}^M \neq 0$) é mais complexo. Para o efeito, a matriz constitutiva para o caso elástico é dada por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E_a & 0 \\ 0 & G_a \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

onde E_a e G_a são os módulos de elasticidade e distorção do aço em perfil, respetivamente, e se consideram as componentes

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

de modo a se obter $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$.

Tendo em conta o estado de tensão, a função de cedência escreve-se como

$$f = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\sigma_{xy}^2} - f_y = 0, \quad (3.13)$$

onde f_y é a tensão de cedência uniaxial. A natureza incremental da lei constitutiva determina que a evolução do estado de tensão após uma iteração global (*i.e.*, no contexto da resolução das equações de equilíbrio do sistema pelo método de Newton-Raphson) seja obtida utilizando um algoritmo de integração (da lei constitutiva). Neste trabalho utiliza-se o algoritmo de retorno de Euler à retaguarda, o qual exhibe robustez numérica, precisão e simplicidade (Crisfield, 1991). Para o estado de tensão em causa, este algoritmo de retorno simplifica-se bastante, requerendo em cada ponto de integração a solução de Gonçalves (2016),

$$f = \boldsymbol{\sigma}_{pe}^T \mathbf{R}^2 \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_{pe} - 1 = 0, \quad (3.14)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_{pe}$ são as “previsões elásticas”, isto é, as tensões obtidas a partir do incremento de deformação desde a última configuração de equilíbrio, admitindo um comportamento elástico linear, e as matrizes auxiliares são dadas por

$$\mathbf{R} = \text{diag} \left(\frac{1}{1 + 2\Delta\lambda E/f_y^2}, \frac{1}{1 + 6\Delta\lambda G/f_y^2} \right), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{A} = \text{diag} \left(\frac{1}{f_y^2}, \frac{3}{f_y^2} \right). \quad (3.16)$$

A equação (3.14) é resolvida através do método de Newton-Raphson com iterações j

$$\Delta\lambda_{j+1} = \Delta\lambda_j - \frac{f_j}{df_j/d\lambda}, \quad (3.17)$$

$$\frac{df_j}{d\lambda} = -4\boldsymbol{\sigma}_{pe}^T \mathbf{R}^3 \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \boldsymbol{\sigma}_{pe}. \quad (3.18)$$

Finalmente, a utilização deste algoritmo faz com que seja necessário utilizar, no cálculo da matriz de rigidez tangente elementar, a matriz constitutiva tangente dada por

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{H} - \frac{\mathbf{H} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{H}}{\mathbf{a}^T \mathbf{H} \mathbf{a}}, \quad (3.19)$$

com $\mathbf{H} = \mathbf{RC}$ e $\mathbf{a} = 2\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}$.

Em geral, em problemas fisicamente não-lineares (como é o caso dos problemas abordados neste trabalho), é necessário guardar e atualizar em cada incremento/iteração um certo número de parâmetros que descrevem a história de tensões e deformações em cada ponto de integração. No entanto, para o modelo de plasticidade utilizado, apenas é necessário guardar a deformação e tensão quando o equilíbrio é atingido.

Finalmente, salienta-se que esta lei constitutiva, algoritmo de retorno e operador tangente consistente, estão obviamente implementados nos programas *ADINA* e *ATENA* (embora para estados de tensão mais gerais), pelo que serão utilizados nos respetivos modelos de elementos finitos.

3.3.2 Lei constitutiva para o betão

3.3.2.1 Modelo implementado

No caso do betão, tal como na alma do perfil, considera-se um estado de tensão com $\sigma_{xx}, \sigma_{xy} \neq 0$. Para evitar a utilização de uma lei constitutiva multiaxial, recorreu-se à introdução de hipóteses simplificativas adicionais. Em particular, em virtude da natureza dos problemas estudados, é de esperar que a tensão normal longitudinal σ_{xx} seja preponderante. Assim, tanto por questões de simplicidade como de eficiência computacional, são adotadas leis constitutivas separadas para σ_{xx} e σ_{xy} .

Adota-se um modelo aproximado de fenda fixa distribuída sem resistência à tração. Ao considerar um estado plano de tensão sob o constrangimento $\sigma_{yy} = 0$, tal implica inevitavelmente o desenvolvimento de fendas (que permanecem fixas) para $\sigma_{xx} > 0$ ou $\sigma_{xy} \neq 0$, ocorrendo naturalmente fendilhação generalizada no início do carregamento, tipicamente (i) ao longo de y nos apoios de continuidade, (ii) a 45° junto a zonas de troca de sinal do diagrama de momento e (iii) ao longo de x em zonas de momento positivo.

As tensões longitudinais σ_{xx} são diretamente relacionadas com as deformações longitudinais ε_{xx} através de uma lei uniaxial, sem resistência à tração e um ramo de compressão não-linear até à tensão máxima. Assume-se que a descarga e recarga são elásticas. Nos exemplos apresentados na Secção 3.4, adota-se a relação tensão-deformação fornecida pelo Eurocódigo 2 (CEN, 2004a)³ para a compressão até à tensão máxima f_c ,

$$\frac{\sigma_{xx}}{f_c} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta}, \quad (3.20)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{c1}}, \quad (3.21)$$

$$k = \frac{1,05E_c|\varepsilon_{c1}|}{f_c}, \quad (3.22)$$

onde E_c é o módulo de elasticidade secante do betão, tal como definido no EC2, f_c é a tensão média de rotura aos 28 dias, associada à deformação ε_{c1} . A lei que se acabou de

³Doravante designado por “EC2”.

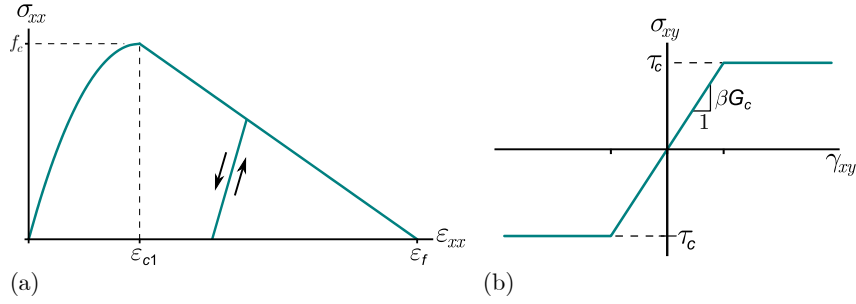


Figura 3.14: Lei constitutiva para o betão:(a) tensões normais de compressão e (b) tensões de corte.

descrever encontra-se representada na figura 3.14(a). Naturalmente, com o elemento finito proposto, não existe qualquer dificuldade em implementar qualquer outra lei uniaxial.

Após atingir a tensão máxima adota-se uma lei linear até atingir $\sigma_{xx} = 0$ para a deformação final ε_f , a qual é dada por

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{c1} - \frac{f_c}{E_c} + \frac{\bar{d}}{l}, \quad (3.23)$$

onde l é o comprimento do elemento finito e \bar{d} um parâmetro do material a calibrar que pode ser interpretado como o “deslocamento plástico” no esmagamento. A adoção de uma relação que depende do comprimento do elemento finito tem como objetivo mitigar os efeitos de dependência de malha (ver, *e.g.*, Jirasek e Bazant, 2002) — este assunto será discutido no exemplo da Secção 3.4.3.

Relativamente às tensões tangenciais, adota-se uma lei constitutiva não-linear elástica, como ilustrado na figura 3.14(b), com um ramo linear até à tensão máxima τ_c , seguido de um patamar horizontal. O ramo linear é dado por

$$\sigma_{xy} = \beta G_c \gamma_{xy}, \quad (3.24)$$

onde $G_c = E_c/2(1 + \nu_c)$ é o módulo elástico de distorção do betão, ν_c é o respetivo coeficiente de Poisson e β é um fator de redução da rigidez ($0 \leq \beta \leq 1$), semelhante ao *shear retention factor* normalmente utilizado nos modelos clássicos de fenda fixa distribuída (ver por exemplo, Suidan e Schnobrich, 1973; Rots e Blaauwendraad, 1989).

Considerando as componentes de tensão e deformação

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

a relação constitutiva tangente é da forma

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_t d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.26)$$

onde a matriz constitutiva tangente é dada por

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} E_{ct} & 0 \\ 0 & \beta G_{ct} \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Para o ramo à compressão até ε_{c1} , E_{ct} é obtido pela diferenciação da equação (3.20) em ordem a ε_{xx} , para o ramo pós pico é dado por $E_{ct} = -f_c/(\varepsilon_f - \varepsilon_{c1})$ e, caso haja fendilhação $E_{ct} = 0$. Caso haja descargas/recargas, tem-se $E_{ct} = 1,05E_c$ (corresponde à derivada de (3.20) para $\varepsilon_{xx} = 0$). Até ser atingida a tensão tangencial máxima τ_c , G_{ct} é dado pelo módulo de distorção elástico G_c . Se a tensão tangencial ultrapassar τ_c então $G_{ct} = 0$.

Tal como para o aço, é necessário guardar determinados parâmetros para descrever a história de deformações e tensões. Neste caso, no final de cada incremento, são guardados os seguintes parâmetros: a tensão longitudinal, a deformação longitudinal plástica e a deformação longitudinal.

3.3.3 Formulação do elemento finito

No Capítulo 2 foi apresentada a formulação geral para um elemento finito fisicamente não-linear baseado na GBT. Nesta Secção, a formulação é particularizada para o caso de vigas mistas sob as hipóteses simplificativas apresentadas na Secção 3.3.

Relembrando a expressão (2.88), a matriz de rigidez tangente e elementar é dada por

$$(\mathbf{K}_t)_e = \int_{V_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \Xi_\varepsilon^T \mathbf{C}_t \Xi_\varepsilon \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} dV, \quad (3.28)$$

onde a matriz constitutiva \mathbf{C}_t foi apresentada na Secção 3.3 para cada um dos materiais.

O vetor das forças externas e forças internas elementares são dados por (recorde-se as expressões (2.87) e (2.86))

$$\mathbf{F}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^T (\Xi_U^M)^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{Q}_e = \int_{V_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \Xi_\varepsilon^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (3.30)$$

O vetor das forças desequilibradas é novamente dado por (2.89),

$$\mathbf{g} = \mathbf{F} - \mathbf{Q}. \quad (3.31)$$

A integração numérica é feita recorrendo à regra de quadratura de Gauss, com 3 pontos de integração ao longo de x , para mitigar os efeitos de “locking”, tal como em Gonçalves e Camotim (2012), e um número arbitrário de pontos ao longo de y e z em cada parede (a influência deste número será abordada na Secção 3.4).

Com as funções de interpolação adotadas (recordar a Secção 2.3.2), o elemento proposto tem 8 GDL para os modos F+C, mais 3 GDL por cada modo de empenamento, levando a um total de 23 GDL apenas, caso sejam considerados todos os modos de deformação ilustrados na figura 3.12. Para uma laje simétrica, a combinação dos modos de *shear lag*

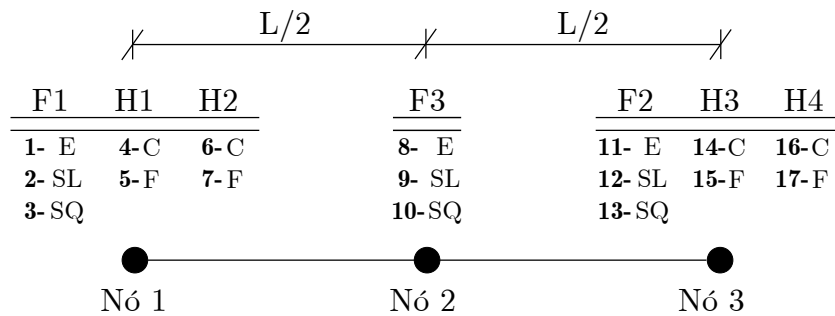


Figura 3.15: Graus de liberdade do elemento finito com 17 GDL (são representadas as funções de interpolação associadas a cada GDL).

lineares e quadráticos, $SL=SL1+SL2$ e $SQ=SQ1+SQ2$, conduz a um elemento finito com apenas 17 GDL. Os GDL do elemento finito estão representados esquematicamente na figura 3.15, considerando a combinação $SL=SL1+SL2$ e $SQ=SQ1+SQ2$.

3.4 Exemplos de aplicação e validação

3.4.1 *Shear lag* elástico em vigas mistas simplesmente apoiadas

No primeiro exemplo determina-se em regime elástico, o efeito de *shear lag*. São analisadas duas vigas mistas aço-betão com secção “bi-viga” e um banzo de betão largo, simplesmente apoiadas, com vãos de 6,0 e 8,0 m. A geometria da secção transversal e as propriedades dos materiais são fornecidas na figura 3.16(a). As vigas estão sujeitas a momento positivo, devido à ação de uma carga uniformemente distribuída de 1 kN/m, a atuar no plano da alma do perfil de aço. Existindo dupla simetria, apenas um quarto da viga é modelado (metade do vão e metade da secção transversal). O rácio comprimento do vão/largura da laje é aproximadamente igual à unidade, pelo que constitui um desafio significativo modelar estas vigas com elementos finitos de barra. No entanto, conforme se verá, o elemento proposto permite obter resultados muito precisos.

Na análise com o elemento finito proposto são utilizados os sete modos de deformação ilustrados na figura 3.12 e oito elementos finitos de igual comprimento, perfazendo um total de 112 GDL⁴. Ao assumir um comportamento elástico linear, basta adotar 2 pontos de Gauss em z e 3 pontos em y , para cada parede da secção (integração exata).

Com o objetivo de comparar os resultados obtidos com o elemento proposto, foram efetuadas análises recorrendo ao programa *ATENA* e elementos de volume de 20 nós, designados de *brick*. Como ilustrado na figura 3.16(b), foram consideradas duas malhas,

⁴Foi realizado um teste de convergência em deslocamento. A diferença entre 1 e 8 elementos é de 0,07%, o que significa que basta um único elemento finito para capturar corretamente os deslocamentos. No entanto, relativamente às tensões longitudinais, a diferença entre 1 e 8 elementos finitos é de 15%, optando-se assim por utilizar 8 elementos.

CAPÍTULO 3. ANÁLISE FÍSICAMENTE NÃO-LINEAR DE VIGAS MISTAS AÇO-BETÃO

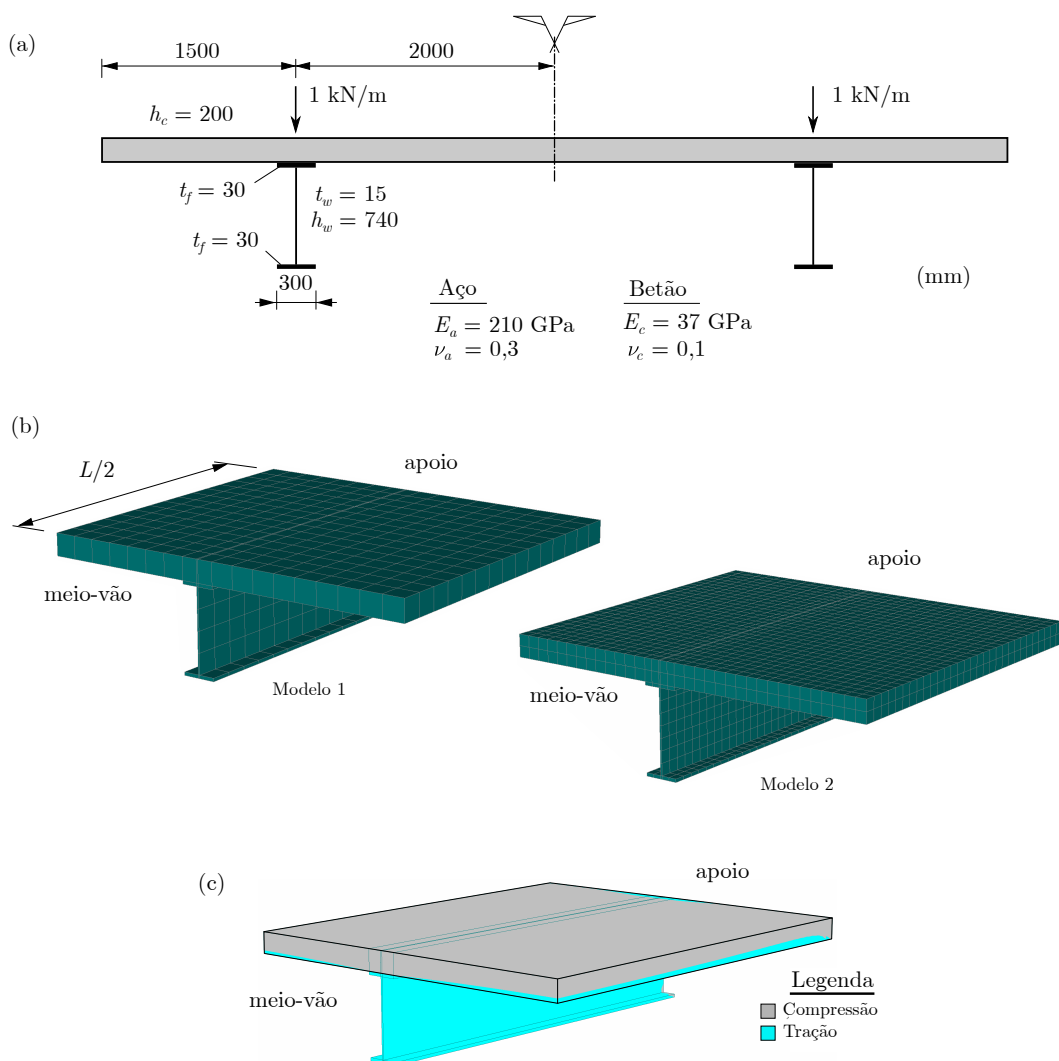


Figura 3.16: *Shear lag* elástico em vigas mistas simplesmente apoiadas: (a) geometria da seção transversal, carregamento e propriedades dos materiais, (b) modelos de elementos *brick* e (c) superfície neutra obtida com o modelo mais refinado de elementos *brick*.

sendo que a malha mais refinada duplica (aproximadamente) o número de elementos ao longo das direções x e y de cada parede. O número de elementos em z também é duplicado na laje de betão (duas camadas de elementos). Ambas as malhas conduzem praticamente aos mesmos resultados, optando-se por apresentar apenas os resultados correspondentes à malha mais refinada. Os resultados são apresentados nas figuras 3.16(c), 3.17, 3.18 e 3.19.

A figura 3.16(c) ilustra a posição da superfície neutra obtida com o modelo de elementos *brick*, sendo possível observar que está localizada na laje de betão e que a sua posição na direção da espessura da laje é variável (afasta-se da face inferior da laje à medida que aumenta a distância à viga de aço).

As funções de amplitude modais da GBT para $0 \leq x \leq L/2$ estão ilustradas nos gráficos da figura 3.17, sendo possível extrair as seguintes conclusões:

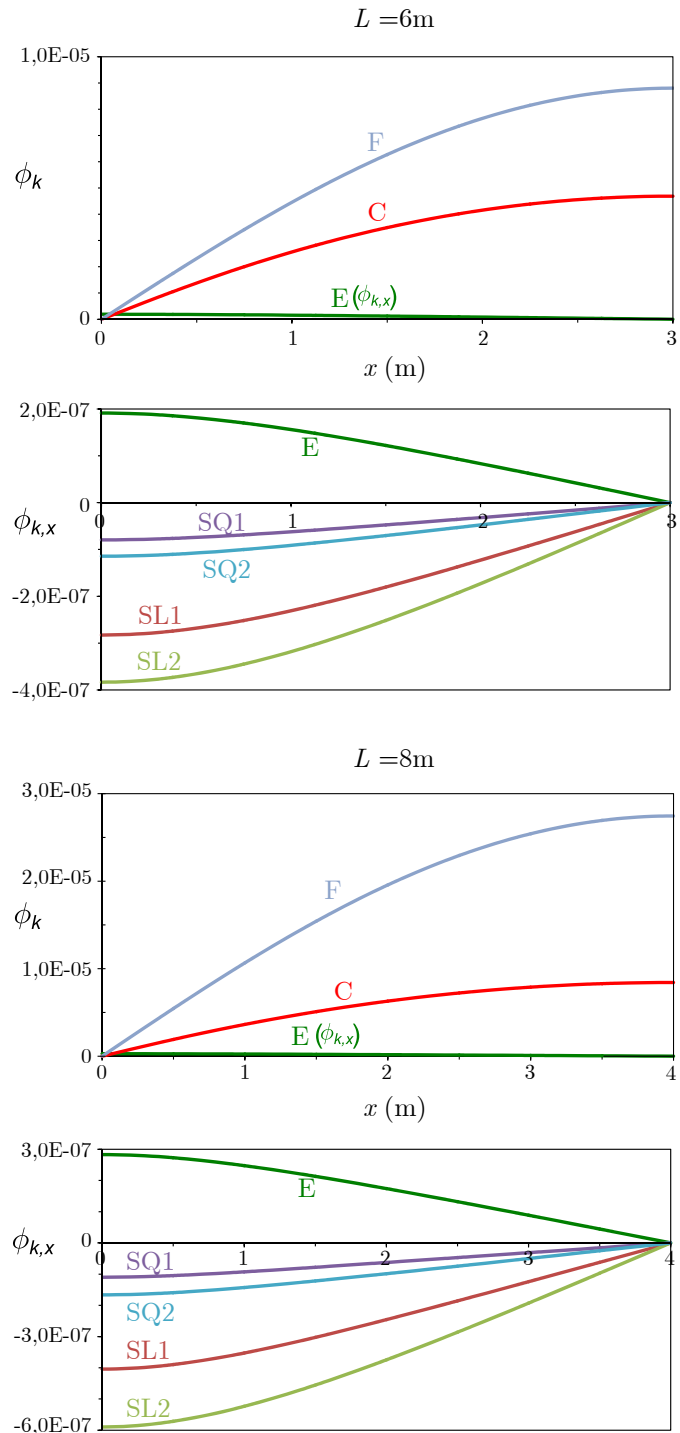


Figura 3.17: *Shear lag* elástico em vigas mistas simplesmente apoiadas: funções de amplitude da GBT.

- (i). Estes problemas são dominados por flexão vertical, dado que a maior participação observada é a do modo de flexão F, sendo naturalmente máxima a meio-vão e nula nos apoios.
- (ii). A participação da deformação por corte da alma do perfil é também significativa, sendo evidenciada pela presença do modo C. Como é lógico, a participação deste modo em relação à do modo de flexão é maior para a viga com menor vão. Note-se que, tendo em conta a equação (2.13), a deformação por corte da alma é proporcional à derivada da função de amplitude do modo C (ou seja, é proporcional a $\phi_{k,x}$), sendo assim máxima nos apoios e nula a meio-vão, conforme seria de esperar para uma viga simplesmente apoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída.
- (iii). Os modos de empenamento (E, SL, SQ) têm participações significativamente mais baixas, com o modo SL a ser o mais relevante, seguido do modo E⁵. Estando estes modos associados à deformação por corte (na laje de betão), as suas funções de amplitude ($\phi_{k,x}$) são qualitativamente semelhantes à derivada da função de amplitude do modo C (máximas no apoio e nulas a meio-vão). De facto, para os dois vão analisados, pode ser demonstrado que a relação entre os cinco modos de empenamento é aproximadamente constante e igual a 0.275 (para SQ1/SL1 e SQ2/SL2). Assim, para o problema em análise, seria possível determinar um único modo de *shear lag* que, embora aproximado, permitiria reduzir ainda mais o número de modos de deformação a usar na análise. No entanto, sendo a abordagem com quatro modos de *shear lag* mais geral, opta-se por não seguir esta via.
- (iv). Devido à assimetria da secção transversal, as participações dos modos de *shear lag* para as zonas mais larga da laje, SL2 e SQ2, são superiores às participações dos da zona mais curta (SL1 e SQ1). Esta assimetria é também claramente visível nos diagramas de tensões representados nas figuras 3.18 e 3.19, discutidas de seguida.

Nas figuras 3.18 e 3.19 são comparadas as tensões obtidas com os modelos de elementos *brick* e da GBT. Os dois gráficos da figura 3.18 ilustram a distribuição das tensões normais longitudinais σ_{xx} , a meio-vão e a meia altura da laje, enquanto que os da figura 3.19 mostram a distribuição de σ_{xx} e σ_{xy} na superfície média da laje. Estes resultados permitem concluir o seguinte:

- (i). Os efeitos de *shear lag* são claramente visíveis na distribuição de tensões σ_{xx} , sendo naturalmente mais pronunciados a meio-vão. A existência de uma secção assimétrica provoca uma distribuição de tensões também assimétrica.
- (ii). Em geral, as tensões obtidas com a GBT são bastante semelhantes às obtidas com o modelo de elementos *brick*, nomeadamente no que se refere aos valores a meio-vão

⁵Relembre-se que o modo E é necessário para aliviar a força axial provocada pelos modos SL e SQ. Acresce referir que, neste exemplo, como não é considerada a fendilhação do betão, o modo F não está acoplado com o modo E.

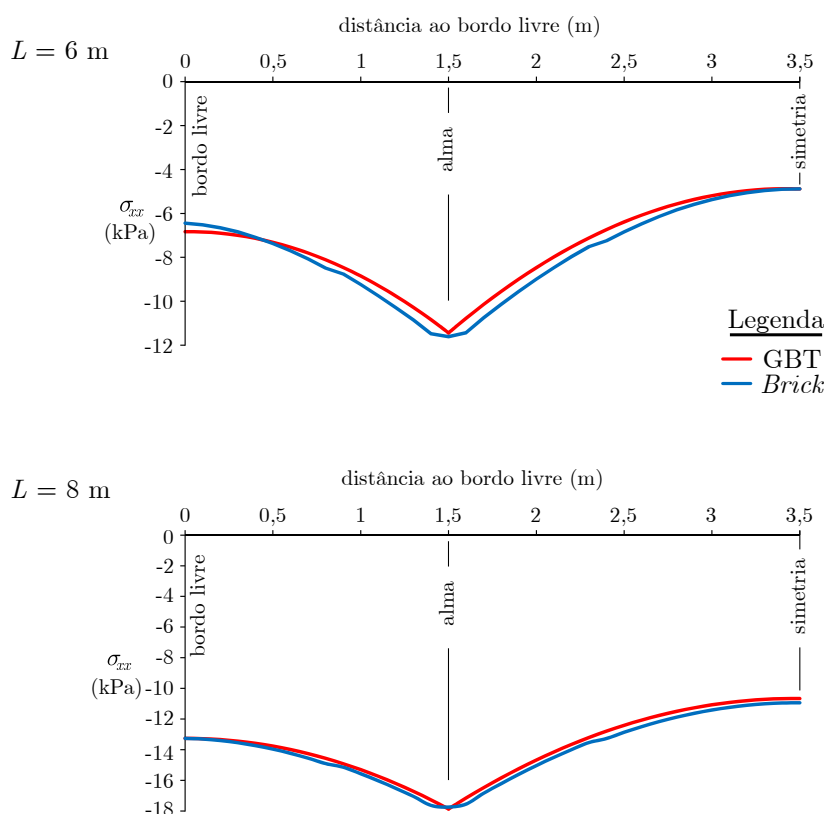


Figura 3.18: *Shear lag* elástico em vigas mistas simplesmente apoiadas: distribuição de tensões normais longitudinais (σ_{xx}) no meio-vão e a meia altura da laje.

(figura 3.18). Esta precisão é notável, tendo em conta que o elemento finito proposto incorpora muito poucos modos de deformação e que a superfície neutra está muito próxima da altura média da laje, como mostrado na figura 3.16(c), o que faz com que as tensões variem muito rapidamente na direção da espessura da laje.

- (iii). Relativamente às tensões no meio-vão, estas são praticamente coincidentes nos dois modelos. No entanto, os resultados da GBT mostram um pico de tensões na interseção da laje com o plano da alma do perfil, enquanto que o modelo de elementos *brick* conduz a uma distribuição de tensões mais suave nessa zona, devido à superfície de contacto entre o banzo do perfil e a laje de betão. Naturalmente, esta transição suave não é capturada com o elemento finito proposto dado que os modos de *shear lag* são calculados admitindo que apenas existe contacto entre a laje e o perfil no plano da alma.
- (iv). Quanto às distribuições de tensões na superfície média da laje, observa-se que, para σ_{xx} e para ambos os vãos, os dois modelos exibem resultados muito semelhantes (embora o mapa de cores não seja exatamente o mesmo). No entanto, perto do apoio, os modelos de elementos *brick* preveem uma variação de tensões mais pronunciada. O gráfico das tensões σ_{xy} demonstra a causa deste efeito: a solução da GBT captura

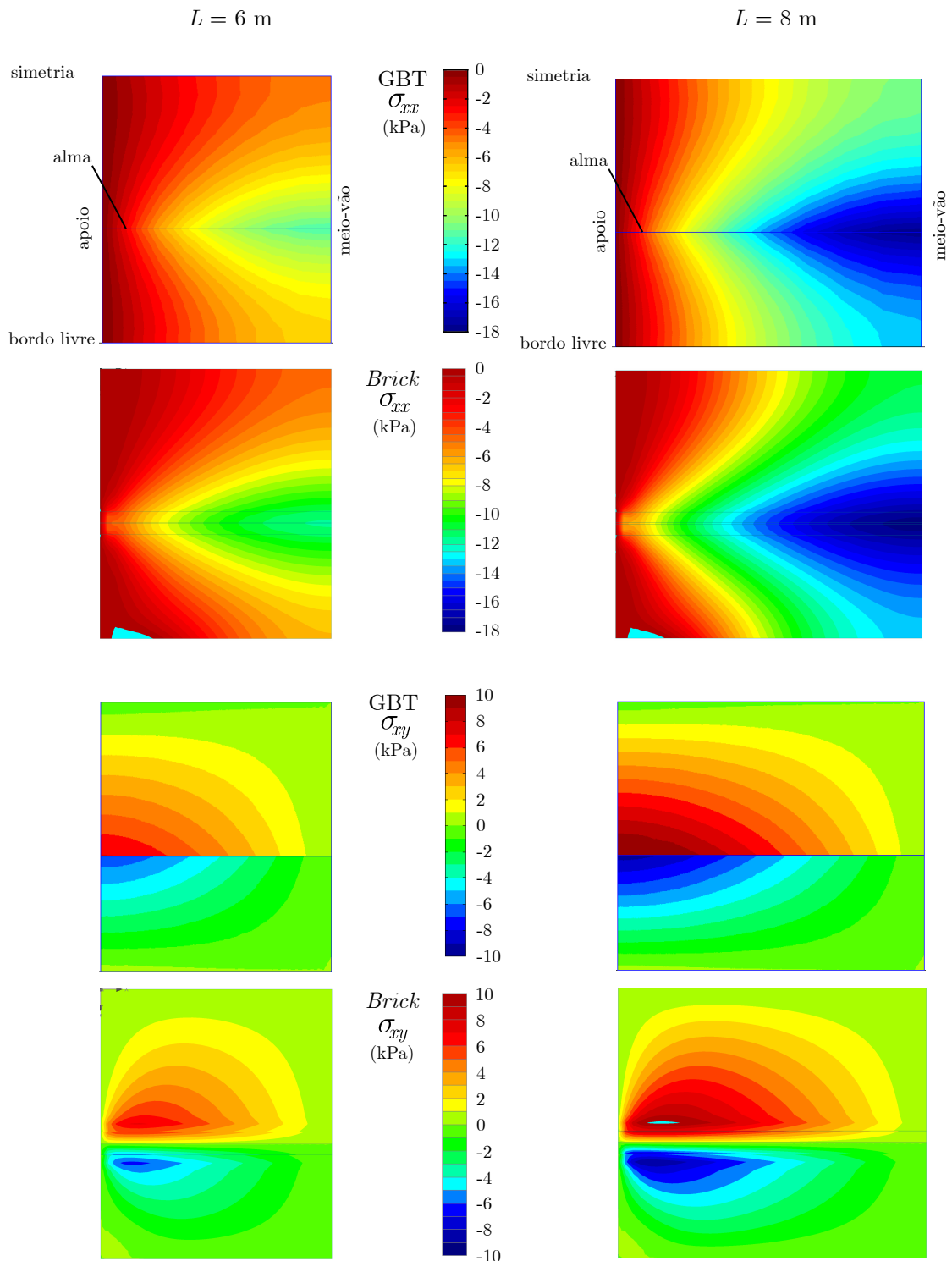


Figura 3.19: *Shear lag* elástico em vigas mistas simplesmente apoiadas: distribuição de tensões σ_{xx} e σ_{xy} na superfície média da laje.

tensões de corte não nulas junto ao apoio (para $x = 0$). Este efeito pode ser mitigado através da inclusão de modos de extensão transversal no elemento finito, o que implica uma formulação com mais GDL e, sobretudo, significativamente mais complexa ao nível do modelo constitutivo (não seria possível considerar $\sigma_{yy} = 0$).

Foram feitas análises com modos de empenamento sinusoidais com uma a quatro semi-ondas em cada lado da laje, à semelhança do que foi feito por Gonçalves e Camotim (2011) e Gonçalves et al. (2010a). Contudo, como os resultados não são significativamente diferentes, não são mostrados.

Por fim, é importante referir que o tempo de cálculo do programa elaborado em MATLAB é de menos de 0,3 segundos para 8 elementos finitos. O tempo de cálculo do programa ATENA é cerca de 2 minutos.

3.4.2 Soluções analíticas para *shear lag* elástico

Em casos particulares, a GBT possibilita a obtenção de soluções semi-analíticas (e até analíticas), as quais permitem uma caracterização única do comportamento estrutural do problema analisado. Este é o caso de vigas simplesmente apoiadas sujeitas a um carregamento transversal sinusoidal na forma $q = \bar{q} \sin(\pi x/L)$, onde \bar{q} é a amplitude da carga e L é o vão. Para este caso, a solução exata é dada por $\phi_k = \bar{\phi}_k \sin(\pi x/L)$, onde as amplitudes $\bar{\phi}_k$ constituem as únicas incógnitas do problema. Com esta solução, o número de graus de liberdade do problema é igual ao número de modos de deformação incluídos na análise.

Considerando (i) uma carga vertical sinusoidal com $\bar{q} = 1$ kN/m, atuando no plano da alma do perfil, (ii) os sete modos de deformação apresentados na figura 3.12 e (iii) as hipóteses simplificativas adotadas para o campo de deformações e tensões indicadas na Secção 3.3, o sistema de equações de equilíbrio da GBT (2.31) simplifica-se e conduz à solução semi-analítica

$$\begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \vdots \\ \bar{\phi}_7 \end{bmatrix} = \left(\left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \mathbf{C} + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \mathbf{D}_1^M \right)^{-1} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \vdots \\ \bar{q}_7 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

onde as forças modais são dadas por $\bar{q}_k = \bar{v}_k$, onde \bar{v}_k é o deslocamento vertical da alma associado ao modo k . Note-se que $\bar{q}_k = 1$ para os modos de corte puro C e de flexão F, e que, para os restantes modos, tem-se $\bar{q}_k = 0$.

As deformações longitudinais de membrana são obtidas a partir da expressão (2.22), resultando em

$$\varepsilon_{xx}^M = - \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \bar{\mathbf{u}}^T \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \vdots \\ \bar{\phi}_7 \end{bmatrix} \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right). \quad (3.33)$$

Para obter uma solução analítica, assume-se que a laje é simétrica em relação à alma do perfil, permitindo a combinação dos modos de *shear lag* (SL=SL1+SL2, SQ=SQ1+SQ2),

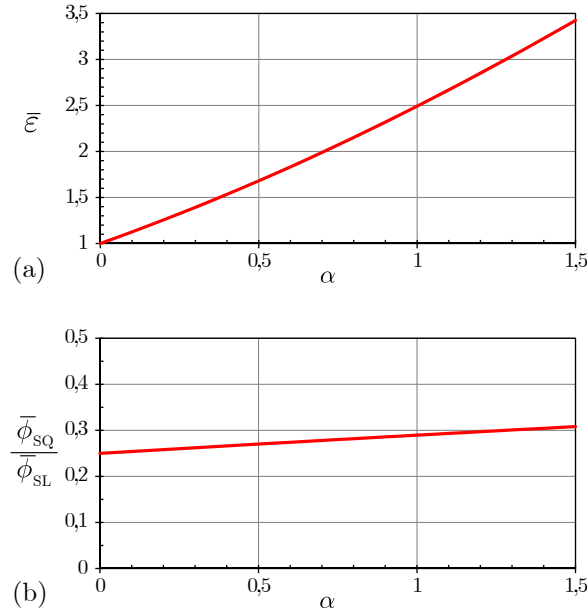


Figura 3.20: Soluções analíticas: variação (a) do parâmetro de deformação $\bar{\varepsilon}$ e (b) da relação das funções de amplitude modais SQ/SL com o parâmetro α .

reduzindo os graus de liberdade para 5. Introduce-se ainda um parâmetro que, para a secção de meio-vão, relaciona as deformações longitudinais de membrana máximas e mínimas na laje (intersecção laje-perfil e extremidade da laje, respetivamente), $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{xx}^{M,max} / \varepsilon_{xx}^{M,min}$, permitindo aferir o efeito de *shear lag* na laje.

A resolução da expressão (3.32) implica a inversão de uma matriz simbólica que, recorrendo ao programa MAPLE (Waterloo Maple Inc., 2017), permite obter a solução analítica

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3\pi^4\alpha^2 + 416\pi^2\alpha + 3840}{\pi^4\alpha^2 - 64\pi^2\alpha + 3840}, \quad (3.34)$$

com o parâmetro α dado por

$$\alpha = \frac{E_c b_c^2}{G_c L^2}, \quad (\text{laje não fendilhada}), \quad (3.35)$$

$$\alpha = \frac{E_s b_c^2}{\beta G_c L^2} \frac{A_s}{A_c}, \quad (\text{laje fendilhada}), \quad (3.36)$$

onde b_c representa a largura total da laje e a relação A_s/A_c não é mais do que a taxa de armadura longitudinal na laje.

É ainda possível obter uma expressão analítica para a relação entre as funções de amplitude dos modos SL e SQ, a qual é dada por,

$$\frac{\bar{\phi}_{SQ}}{\bar{\phi}_{SL}} = \frac{5\pi^2\alpha + 48}{4\pi^2\alpha + 240}. \quad (3.37)$$

Note-se que para o caso particular em análise esta solução não depende de x (contrariamente ao exemplo da Secção anterior) mas apenas do parâmetro α .

Os gráficos da figura 3.20 mostram o andamento das soluções (3.34) e (3.37) para $0 \leq \alpha \leq 1,5$. Observa-se que a relação entre deformações é aproximadamente linear e que

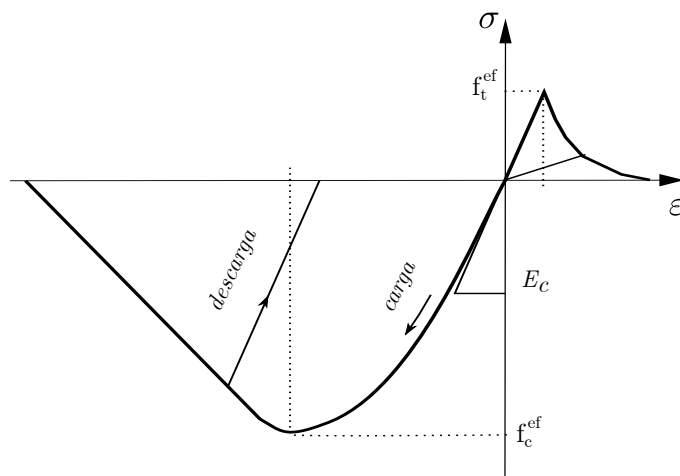


Figura 3.21: Lei constitutiva uniaxial para o betão no programa *ATENA* (Cervenka et al., 2013).

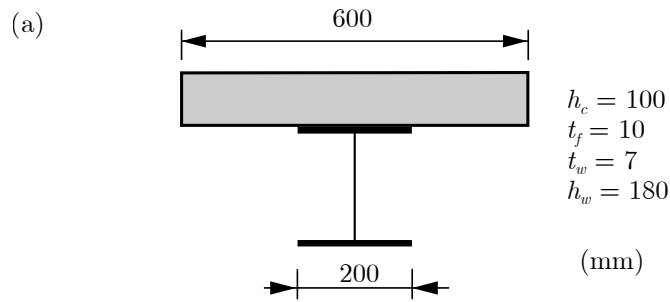
os valores da relação $\bar{\phi}_{SQ}/\bar{\phi}_{SL}$ são consistentes com os apresentados no exemplo anterior (relembre-se que a relação para os modos SQ1/SL1 e SQ2/SL2 era de aproximadamente 0,275).

3.4.3 Vigas mistas aço-betão com laje curta

Nesta Secção mostra-se que o elemento finito proposto é capaz de determinar, com precisão e rapidez, a trajetória de equilíbrio de vigas mistas, incluindo a carga de colapso e a curva pós-colapso. Consideram-se banzos estreitos, deixando-se para a Secção 3.4.4 a introdução do efeito de *shear lag*. São analisadas duas vigas com lajes estreitas, nomeadamente (i) uma viga simplesmente apoiada com um vão de 6 m, sujeita a uma carga uniformemente distribuída, e (ii) uma viga em consola com uma carga pontual na extremidade livre. A geometria da secção transversal e as propriedades dos materiais são indicadas na figura 3.22(a) (são adotados valores médios relativos a um betão C25/30).

Não sendo relevantes os efeitos de *shear lag*, as análises com a GBT necessitam apenas da consideração dos três primeiros modos de deformação (E, F e C) da figura 3.12. Análises preliminares mostraram que é necessário considerar 5 pontos de integração na alma do perfil, em y , e também 5 pontos de integração em z na laje de betão (direção da espessura). No caso da viga simplesmente apoiada foi adotada uma simplificação de simetria longitudinal.

Por forma a validar os resultados obtidos, foram elaborados modelos de elementos *brick* no programa *ATENA*. Tal como no exemplo da Secção 3.4.1, são considerados dois níveis de refinamento de malha, onde o modelo 2 (o mais refinado) envolve duas camadas de elementos na espessura da laje de betão — a figura 3.22(b) ilustra o modelo 2 para a viga em consola, sendo de notar que foi considerada uma simplificação de simetria da secção transversal. Adota-se uma taxa de armadura transversal de 4%, de forma a evitar um colapso prematuro por corte na laje.



Perfil de aço	Betão	Armaduras
$E_a = 210 \text{ GPa}$	$E_c = 31 \text{ GPa}$	$E_s = 200 \text{ GPa}$
$\nu_a = 0,3$	$\nu_c = 0,2$	$f_{sy} = 500 \text{ MPa}$
$f_{ay} = 235 \text{ MPa}$	$f_c = 33 \text{ MPa}$	$A_s/A_c = 0,4 \%$
	$\varepsilon_{c1} = 0,0021$	

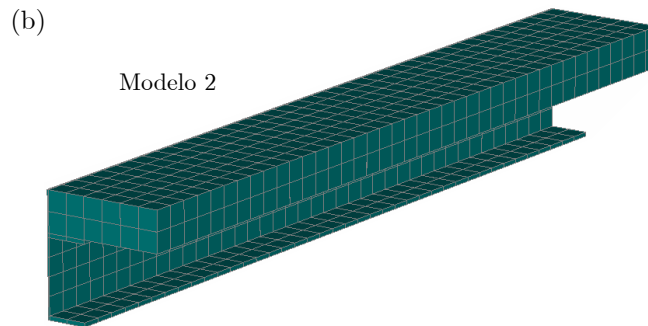


Figura 3.22: Vigas mistas aço-betão com laje curta: (a) geometria da seção transversal e propriedades dos materiais, (b) modelo de elementos *brick* mais refinado (modelo 2).

No programa *ATENA* foi utilizada uma lei constitutiva que combina fendilhação e esmagamento recorrendo a um modelo de decomposição de deformações (de Borst, 1986). Utilizou-se a lei constitutiva *CC3DNonLinCementitious2*, a qual permite considerar estados de tensão multiaxiais e é recomendada nos manuais do programa. Esta lei adota um modelo de fenda distribuída com fendas ortogonais, que podem ser fixas ou rodadas. No presente trabalho foi escolhido um modelo de fenda fixa, para procurar manter as mesmas hipóteses da Secção 3.3.2.1. Neste caso, a rigidez de corte diminui com a abertura da fenda, o que corresponde a adotar um valor de β variável entre 1 e 0. Para além disso, é possível considerar armadura distribuída, o que é extremamente conveniente do ponto de vista da modelação. Para o comportamento à compressão adota-se um modelo de plasticidade que adota a superfície de cedência de Menetrey e Willam (1995), com endurecimento (pré-pico) e amolecimento (pós-pico). A lei uniaxial é ilustrada na figura 3.21.

A viga simplesmente apoiada é analisada em primeiro lugar. Nas figuras 3.23(a)-(b) estão representados os gráficos carga-deslocamento obtidos com o elemento proposto e com os modelos de elementos *brick*. Relativamente aos resultados obtidos com o elemento proposto, o gráfico (a) ilustra o efeito do parâmetro \bar{d} , enquanto que o gráfico (b) permite avaliar a influência da discretização (elementos com o mesmo comprimento). A análise dos

3.4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO

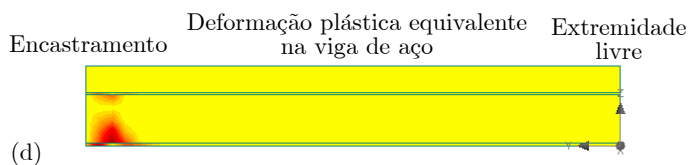
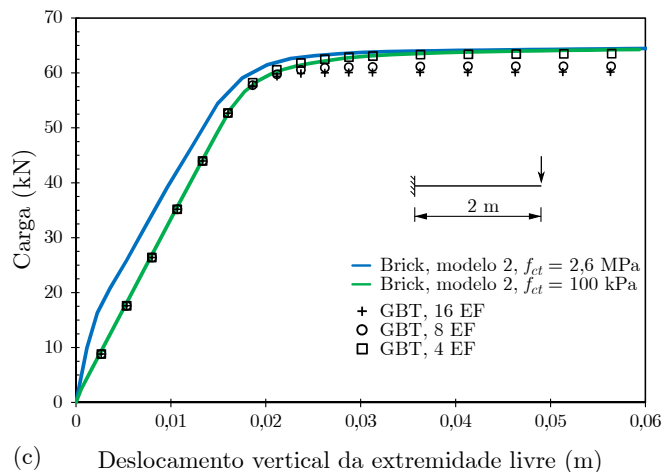
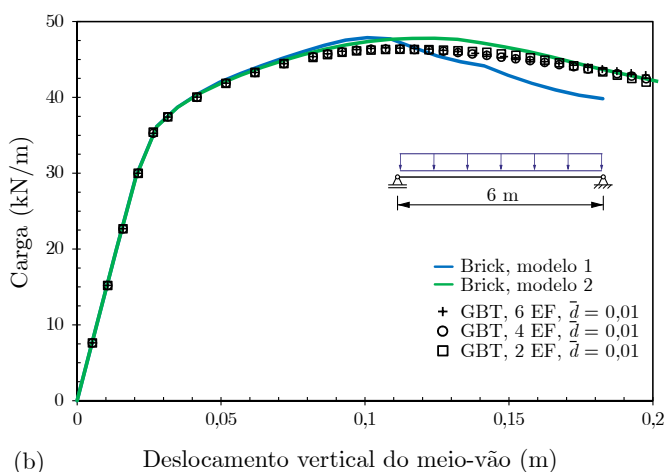
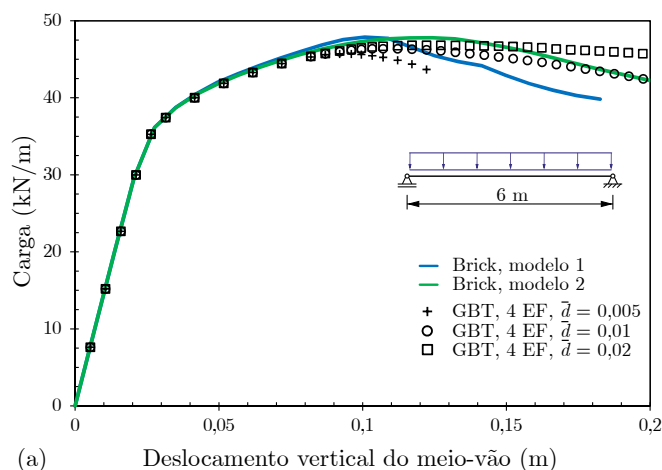


Figura 3.23: Vigas mistas aço-betão com laje curta: (a-b) gráficos carga-deslocamento para a viga simplesmente apoiada, (c) gráfico carga-deslocamento para a viga em consola e (d) deformação plástica equivalente na consola, no colapso (modelo de elementos *brick*).

gráficos permite concluir:

- (i). Relativamente aos dois modelos de elementos *brick*, estes gráficos mostram que se obtém resultados praticamente coincidentes nas trajetórias ascendentes e cargas máximas, mas distintas na resposta pós pico, com o modelo 1 (malha menos refinada) a prever uma curva ligeiramente mais inclinada.
- (ii). No que se refere aos resultados da GBT, independentemente do número de elementos finitos e do valor de \bar{d} adotado, as curvas ascendentes são praticamente coincidentes com as dos modelos de elementos *brick*.
- (iii). No gráfico da figura 3.23(a), conforme esperado, as cargas máximas obtidas com a GBT e a resposta pós-pico são significativamente dependentes do parâmetro \bar{d} , com $\bar{d} = 0,01$ a fornecer os resultados mais próximos dos obtidos com o modelo 2 de elementos *brick* (malha mais refinada).
- (iv). Em sentido contrário, o gráfico da figura 3.23(b) permite constatar claramente que a utilização de um valor fixo para o parâmetro \bar{d} resulta numa resposta independente da malha, conforme pretendido.
- (v). Em acréscimo, este gráfico permite concluir que, para este caso, é suficiente considerar apenas dois elementos finitos de barra.

No caso da viga em consola, o gráfico carga-deslocamento encontra-se representado na figura 3.23(c). Apenas são mostrados os resultados obtidos com o modelo 2 de elementos *brick* (mais refinado). Para este modelo são considerados dois valores de tensão resistente à tração e de energia de fratura: (i) $f_{ct} = 2,6$ MPa (valor médio para um betão C25/30) e $G_f = 0,08368$ kN/m (valor proposto pelo *ATENA*) ou (ii) $f_{ct} = 100$ kPa e $G_f = 8,368 \times 10^{-3}$ kN/m, valores propositadamente baixos para procurar reproduzir o modelo adotado no elemento finito proposto (betão sem resistência à tração). Análises preliminares mostraram que os resultados não variam com o parâmetro \bar{d} (o valor adotado é $\bar{d} = 0,005$) e, assim, apenas o efeito da variação de elementos finitos é ilustrado no gráfico. Estes resultados permitem retirar as seguintes conclusões:

- (i). Ambos os modelos de elementos *brick*, embora considerem leis constitutivas à tração diferentes, levam a cargas máximas semelhantes. Contudo, a diminuição da resistência à tração leva a cargas consideravelmente mais baixas no início do ramo ascendente da curva (para o mesmo valor do deslocamento).
- (ii). Verifica-se que são necessários apenas quatro elementos finitos da GBT para reproduzir com precisão o ramo ascendente da curva obtido com o modelo de elementos *brick* com baixa resistência à tração. No entanto, a convergência da carga máxima só é atingida quando se utilizam pelo menos oito elementos (a utilização de mais elementos não conduz a diferenças significativas).

Tabela 3.1: Vigas mistas aço-betão com laje curta.

	GBT	ATENA	EC4	GBT-EC4	ATENA-EC4
Simp. apoiada	46,53 kN	47,80 kN	45,83 kN	1,53%	4,30%
Consola	60,14 kN	64,26 kN	59,22 kN	1,55%	8,51%

- (iii). Naturalmente, o ramo ascendente do modelo de elementos *brick* com baixa resistência à tração leva a resultados praticamente coincidentes com os da GBT. No entanto, a carga máxima obtida com o modelo de elementos *brick* é superior em cerca de 7% relativamente à GBT (considerando 16 elementos finitos). Deve salientar-se que a carga máxima que se obtém usando o método do EC4, sem coeficientes parciais de segurança, coincide praticamente com o valor obtido com os elementos finitos da GBT (os valores obtidos pelo EC4 são fornecidos na tabela 3.1 e serão discutidos de seguida). Esta diferença entre a GBT e os modelos de elementos *brick* é explicada com recurso à figura 3.23(d), que mostra que o encastramento restringe a deformação e faz com que a rótula plástica se afaste do apoio⁶.

Na tabela 3.1 são fornecidas as cargas máximas obtidas com a GBT, o *ATENA* e o EC4. No caso da GBT, para a viga simplesmente apoiada são adotados 6 elementos finitos e $\bar{d} = 0,01$, enquanto que para a consola são considerados 16 elementos finitos e $\bar{d} = 0,005$. Relativamente ao modelo de elementos *brick*, considerou-se a malha mais refinada (modelo 2). As cargas obtidas pelo EC4 foram obtidas sem a utilização de coeficientes parciais de segurança, de modo a que os resultados sejam comparáveis. Observa-se que as cargas máximas da GBT estão mais próximas do EC4, especialmente no caso da consola (como anteriormente explicado). É de notar que a diferença máxima entre a GBT e o EC4 é de apenas 1,5%, enquanto que para os elementos finitos *brick* esta diferença é de 8.51%.

Finalmente, é importante referir os tempos de cálculo. Para a viga simplesmente apoiada, as análises recorrendo ao elemento proposto duram aproximadamente 83 segundos, enquanto que com o *ATENA* as análises duram 6 horas. No caso da consola, as análises com a GBT demoram cerca de 30 segundos e o programa *ATENA* dura 10 horas caso a resistência à tração seja reduzida (5 horas sem essa redução). É ainda de notar que a modelação da viga no *ATENA* tem uma simplificação de simetria transversal — caso tivesse sido efetuada uma análise com a secção total, os tempos de cálculo aumentariam substancialmente.

3.4.4 Placa de aço com reforço longitudinal

Neste exemplo estuda-se o comportamento de uma placa de aço com um reforço longitudinal, simplesmente apoiada, sujeita a uma carga uniformemente distribuída. Considera-se uma lei elastoplástica para o material. Na figura 3.24(a) fornece-se a geometria e as propriedades

⁶De acordo com Green (1954a, 1954b), o encastramento perfeito é designado por “*strong support*” e conduz a um aparente aumento da resistência à flexão na presença de esforço transversal. Uma perspetiva histórica acerca deste assunto pode ser encontrada em Gonçalves et al. (2014a).

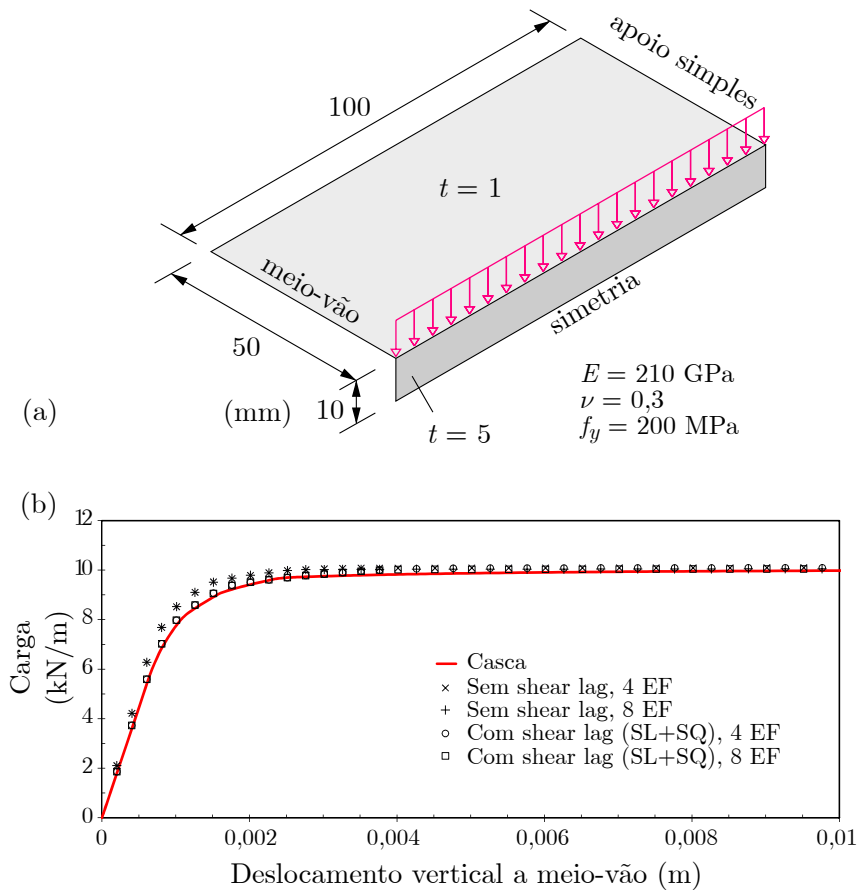


Figura 3.24: Placa de aço com reforço longitudinal: (a) geometria da placa e propriedades do material, (b) gráfico carga-deslocamento.

do material. Devido à simetria longitudinal e transversal, analisa-se apenas um quarto da placa. Este exemplo visa ilustrar as capacidades do elemento finito proposto quando se combina um comportamento elastoplástico com o efeito de *shear lag*.

As análises realizadas com a GBT recorrem aos modos E, F e C, mais dois conjuntos de modos de empenamento para capturar o efeito de *shear lag*: (i) SL e SQ ou (ii) SL mais 4 modos sinusoidais de empenamento (SS), *i.e.*, modos sinusoidais com uma a quatro semi-ondas segundo y . A integração na espessura é feita com 5 pontos de Gauss. Para a integração ao longo da linha média da secção y , análises preliminares mostraram que são necessários, no mínimo, 6 pontos de integração.

Para efeitos de comparação, foi elaborado um modelo de elementos finitos de casca, utilizando o programa *ADINA* (Bathe, 2019) — o modelo está representado na figura 3.26(a), coluna da esquerda. Utilizam-se elementos MITC (*Mixed Interpolation of Tensorial Components*) de quatro nós, os quais são recomendados no manual do programa. De forma a garantir resultados consistentes com os modelos da GBT, são utilizados 5 pontos de Gauss ao longo da espessura.

Os resultados obtidos encontram-se representados nas figuras 3.24 a 3.26. A análise do gráfico carga-deslocamento da figura 3.24(b) mostra que: (i) as análises da GBT fornecem

3.4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO

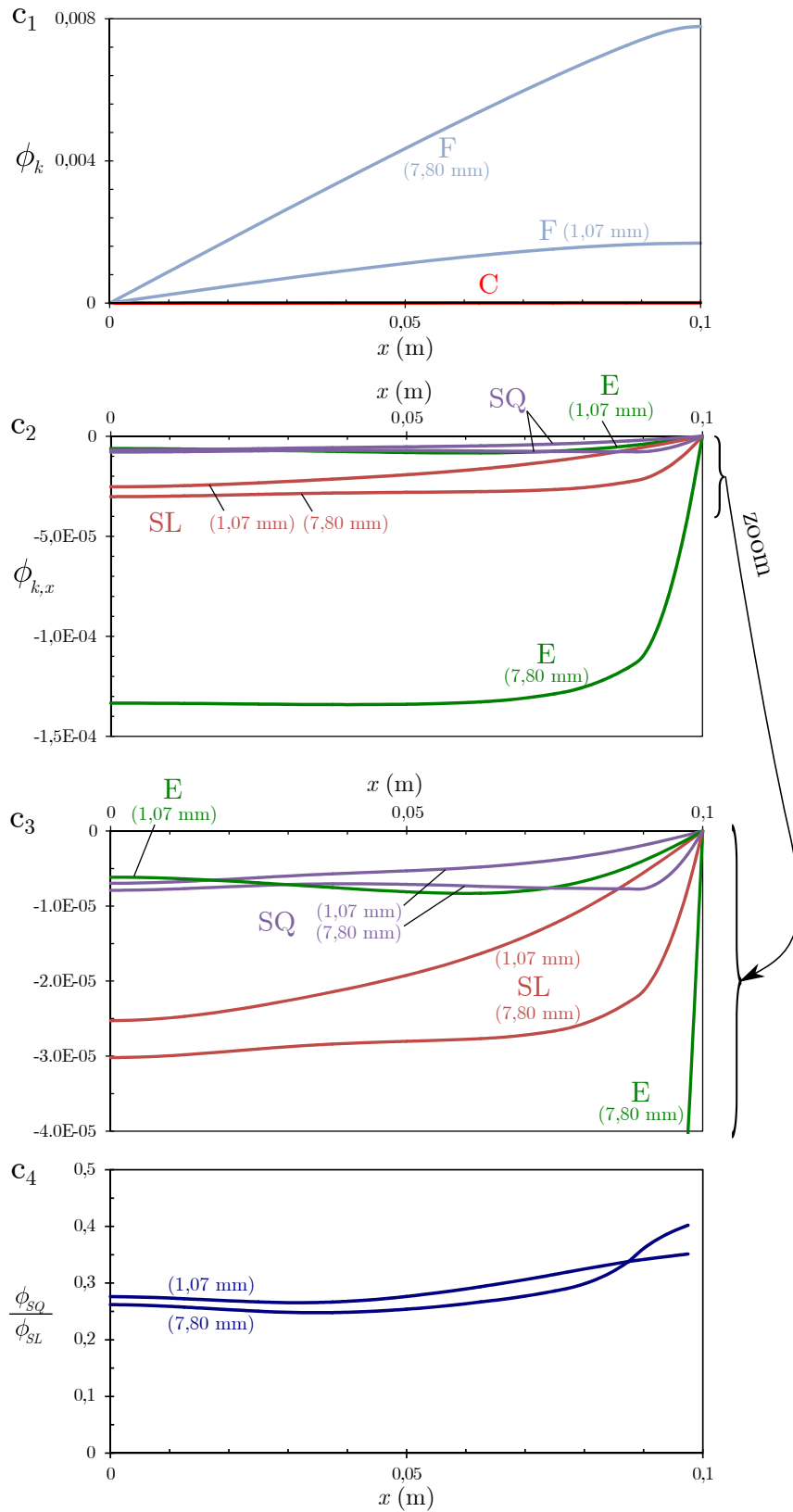


Figura 3.25: Placa de aço com reforço longitudinal: funções de amplitude modais da GBT.

resultados praticamente coincidentes com os obtidos com o modelo de elementos de casca, particularmente se os modos SL e SQ forem incluídos na análise, e que (ii) apenas 4 elementos finitos de barra são suficientes para obter resultados precisos. Conclui-se ainda que o efeito de *shear lag* influencia pouco a forma da curva e não afeta o valor da carga de colapso. Os resultados com os modos SS não se encontram representados na figura porque se verificou que permanecem inalterados relativamente aos obtidos com os modos SL e SQ.

As funções de amplitude representadas nos gráficos da figura 3.25 correspondem a deslocamentos verticais a meio-vão iguais a 1,07 e 7,80 mm, os quais estão associados à primeira e última configuração deformada representada na figura 3.26. A análise destes gráficos permite concluir o seguinte:

- (i). No gráfico c_1 é possível verificar que o modo de flexão F tem a maior participação e que o modo de corte C é praticamente nulo. É importante notar que, para um deslocamento de 7,80 mm, a função relativa ao modo de flexão permite identificar a formação de uma rótula plástica a meio vão (a curvatura concentra-se essencialmente a meio-vão).
- (ii). Os gráficos $c_2 - c_3$ representam as funções de amplitude dos modos de empenamento apenas (E, SL e SQ). Observa-se que amplitude do modo de extensão axial aumenta significativamente com o deslocamento, ao contrário das amplitudes dos modos SL e SQ.
- (iii). No gráfico c_4 está representada a relação entre as funções de amplitude dos modos de *shear lag* quadrático e linear. Observa-se que a relação entre as funções não varia significativamente com o deslocamento a meio-vão (exceto na zona da rótula plástica) e que os resultados voltam a confirmar o registado anteriormente para o caso de *shear lag* elástico (valores entre 0,25 e 0,30, ver as Secções 3.4.1 e 3.4.2, nomeadamente a figura 3.20(b)).

A figura 3.26(a) mostra a evolução da configuração deformada e da plastificação na superfície média (o deslocamento vertical a meio-vão é indicado em cada caso). As tensões são calculadas nos pontos de integração da superfície média e não é realizada qualquer interpolação de valores. Verifica-se que os resultados da GBT são muito semelhantes aos resultados do modelo com elementos de casca, especialmente se forem utilizados modos SL+SQ ou SL+SS com 20 pontos de integração em y . As diferenças observadas devem-se naturalmente às hipóteses simplificativas adotadas (recordar Secção 3.3, nomeadamente $\sigma_{yy} = 0$).

Deve ainda referir-se que, apesar de terem sido obtidos excelentes resultados com o elemento proposto, o problema em análise é bastante complexo, uma vez que as tensões variam rapidamente na espessura da placa, como demonstrado na figura 3.26(b) — as tensões nos pontos de integração da camada superior são muito superiores às obtidas na superfície média.

3.4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO

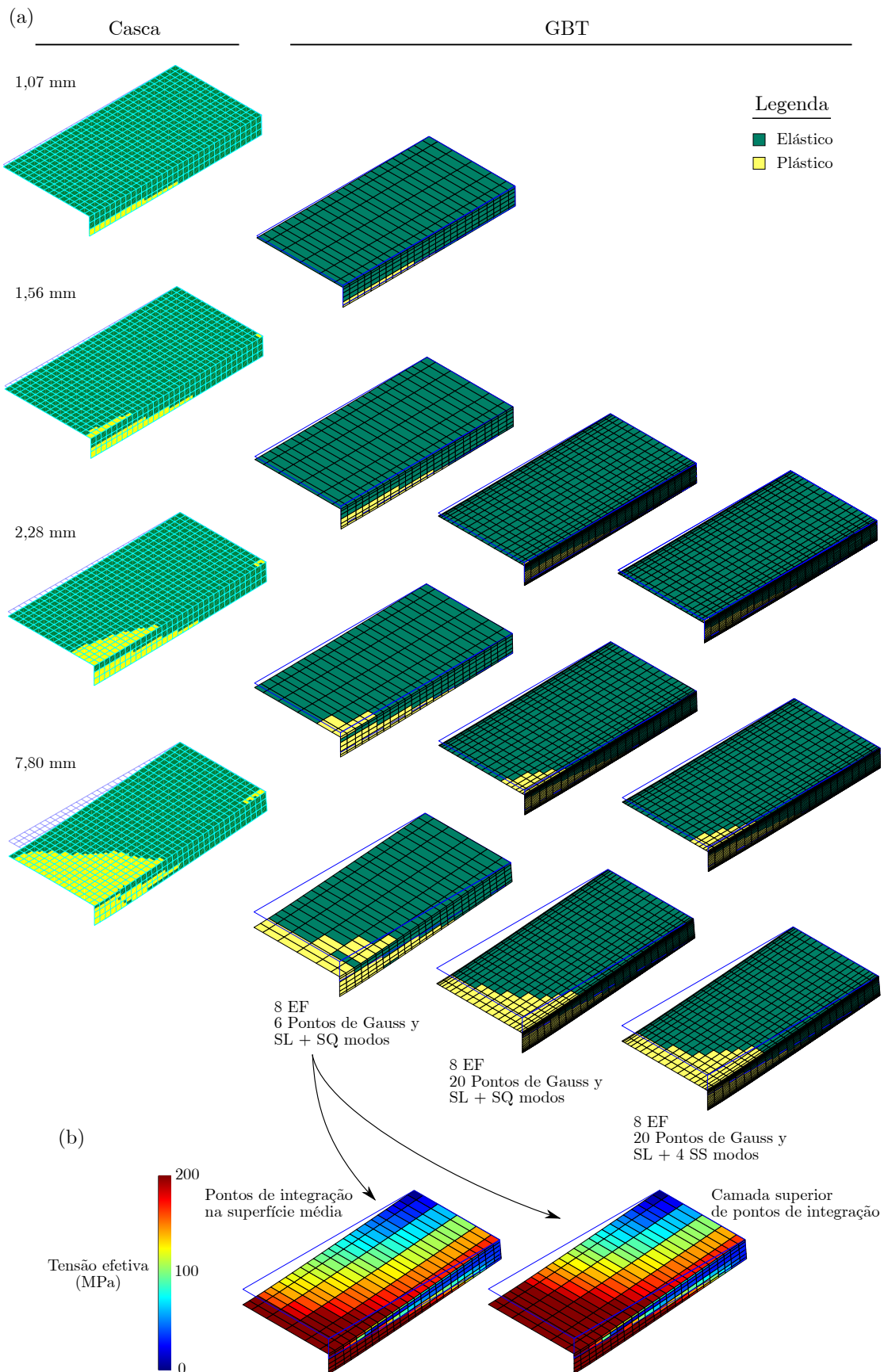


Figura 3.26: Placa de aço com reforço longitudinal: (a) configurações deformadas e evolução da plastificação na superfície média, e (b) deformada e tensões efetivas.

Comparando os tempos de cálculo⁷, a análise com o *ADINA* demora 46 segundos e a análise com os elementos da GBT 31 segundos (foram utilizados 8 elementos finitos, com modos de *shear lag* lineares e quadráticos e ainda 20 pontos de integração em y). Estes tempos de cálculo são semelhantes porque o *ADINA* utiliza uma linguagem muito mais rápida que o *MATLAB* — aliás o modelo da GBT tem apenas 80 GDL (excluindo os GDL associados às condições de fronteira cinemática), enquanto que o modelo de elementos de casca tem 3500 GDL.

3.4.5 Viga mista simplesmente apoiada com laje larga

O último exemplo refere-se ao comportamento fisicamente não-linear de uma viga mista com uma laje larga, o que potencia o efeito de *shear lag*. Analisa-se uma viga simplesmente apoiada com 12 m de vão, sujeita a uma carga uniformemente distribuída aplicada no plano da alma do perfil. A geometria da secção transversal e as propriedades dos materiais são indicadas na figura 3.27(a). Deve referir-se que se optou por uma espessura reduzida da laje de betão de forma a que o colapso seja causado por flexão no vão e não por esforço transversal nos apoios.

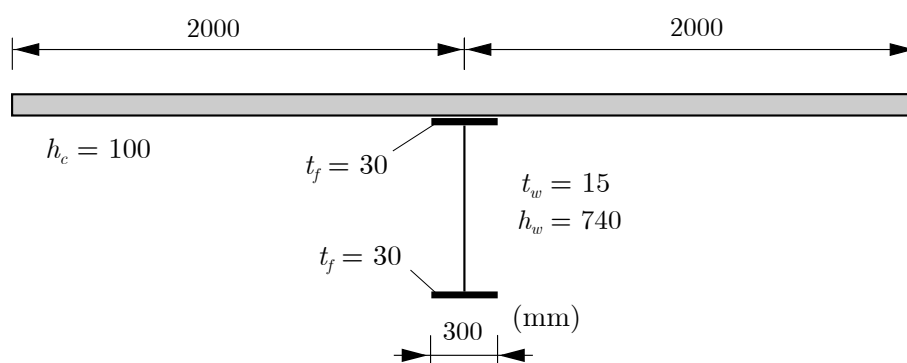
A figura 3.27(b) mostra o modelo de elementos finitos *brick* elaborado no *ATENA* para efeitos de comparação de resultados — devido à dupla simetria, apenas foi modelado um quarto da viga. Tal como no exemplo 3.4.3, adotou-se uma taxa de armadura transversal de 4% na laje de betão (para além da armadura longitudinal, cuja taxa longitudinal é igual a 0,4%). De forma a conseguir uma lei constitutiva o mais próxima possível da implementada no elemento finito da GBT, no *ATENA* definiu-se uma tensão máxima de corte constante — isto só é possível se esta for igual à tensão máxima resistente à tração, pelo que se torna necessário conferir ao material uma resistência à tração. Análises preliminares mostraram que ocorre esmagamento localizado do betão junto ao apoio, devido a forças longitudinais de corte elevadas. Assim, de forma a prevenir este modo de rotura e permitir a formação de uma rótula plástica a meio-vão, a laje de betão até 3 m do apoio foi modelada com um material elástico linear (com os mesmos valores de E_c e ν_c).

As análises com a GBT incluem os modos SL e SQ, vários níveis de discretização e vários valores dos parâmetros materiais. Em todos os casos, apenas metade do vão foi modelado e foram adotados 5 pontos de Gauss ao longo de y e z .

Os gráficos carga-deslocamento obtidos são representados na figura 3.28. A análise destes gráficos conduz às seguintes conclusões:

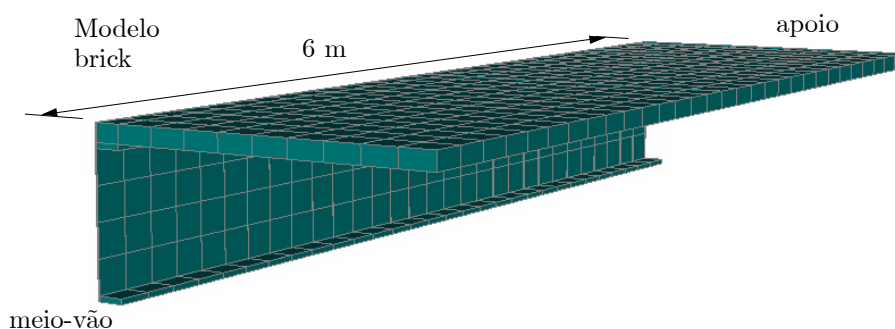
- (i). O gráfico c_1 ilustra o efeito da variação de elementos finitos da GBT, concluindo-se que, neste caso particular, não se observam diferenças caso sejam considerados 4, 6 ou 8 elementos. Os resultados da GBT e do modelo de elementos *brick* são muito semelhantes, muito embora este último preveja um ligeiro decréscimo da carga após um deslocamento igual a 0,2 m. A carga máxima obtida com a GBT ocorre para

⁷Até se atingir um deslocamento de 7,80 mm foram realizados 33 incrementos na análise com a GBT e 30 incrementos na análise com o programa *ADINA*.



Perfil de aço	Betão	Armaduras
$E_a = 210 \text{ GPa}$	$E_c = 31 \text{ GPa}$	$E_s = 200 \text{ GPa}$
$\nu_a = 0,3$	$\nu_c = 0,2$	$f_{sy} = 500 \text{ MPa}$
$f_{ay} = 235 \text{ MPa}$	$f_c = 33 \text{ MPa}$	$A_s/A_c = 0,4 \%$
	$\varepsilon_{cl} = 0,0021$	

(a)



(b)

Figura 3.27: Viga mista simplesmente apoiada com laje larga: (a) geometria da seção transversal e parâmetros dos materiais, (b) modelo de elementos *brick* e (c) gráficos carga-deslocamento.

um deslocamento ligeiramente acima deste valor, entre 0,25 e 0,27 m. Ainda assim, é notável que os resultados das análises com a GBT forneçam uma carga máxima apenas 1% abaixo do valor obtido com o modelo de elementos *brick*.

- (ii). O efeito da variação do parâmetro \bar{d} está ilustrado no gráfico c_2 . Não se observa uma influência significativa para os valores em causa, embora se registre um ligeiro (e natural) decréscimo da carga para o menor valor, $\bar{d} = 0,005$, na fase pós-pico.
- (iii). O gráfico c_3 agrupa resultados obtidos sem modos de *shear lag* (*i.e.*, sem os modos SL e SQ), assim como resultados para diferentes valores de τ_c e β . Relativamente à resistência ao corte, observa-se que a utilização de $\tau_c = 10 \text{ kPa}$ diminui drasticamente a resistência e a rigidez da viga, enquanto que um valor extremamente alto (considerou-se $\tau_c = 10^{20}$) leva a um ligeiro aumento da carga máxima e, naturalmente, a uma curva virtualmente coincidente com a curva obtida sem modos de *shear lag*. Em relação

CAPÍTULO 3. ANÁLISE FÍSICAMENTE NÃO-LINEAR DE VIGAS MISTAS AÇO-BETÃO

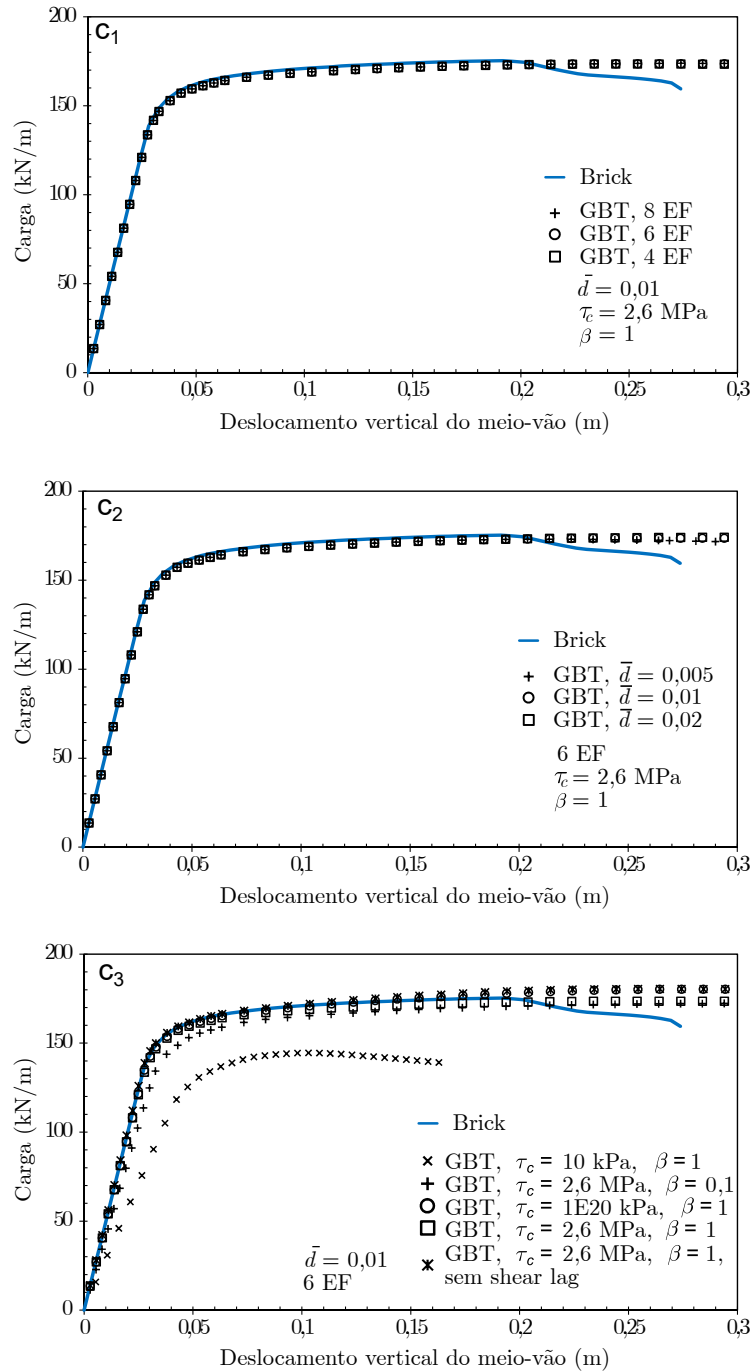


Figura 3.28: Viga mista simplesmente apoiada com laje larga: gráficos carga-deslocamento.

ao parâmetro β , caso seja adotado um valor baixo ($\beta = 0,1$), apenas a parte inicial da curva do gráfico é alterada, levando a uma resposta mais flexível em comparação com o modelo de elementos *brick*. O facto de o modelo de elementos *brick* prever um comportamento mais próximo do modelo de elementos finitos da GBT quando $\beta = 1$ pode ser explicado ao notar que, na lei constitutiva do programa *ATENA*, muito embora a rigidez de corte diminua com a fendilhação (como no modelo da GBT), a resistência à tração não é nula (é igual a τ_c), pelo que a fendilhação ocorre depois da que se obtém com o modelo de elementos da GBT — neste caso particular, a fendilhação no modelo de elementos *brick* ocorre para deslocamentos razoavelmente grandes, conforme discutido de seguida.

Também foi investigado se a consideração de modos de empenamento sinusoidais (SS) melhoraria os resultados, mas não foram observadas diferenças significativas (por essa razão, os resultados não são apresentados). No entanto, deve ser mencionado que a inclusão de quatro modos sinusoidais (em vez de apenas um modo SQ) leva a um ligeiro decréscimo da carga máxima (quase 3 %) em relação à obtida com o modo SQ. Isto deve-se ao facto de os modos de empenamento da GBT gerarem escorregamento na zona da conexão (na superfície do banzo do perfil), algo que não é permitido no modelo de elementos *brick* (a interface aço/betão está ligada em toda a extensão do banzo superior do perfil). Caso este escorregamento seja eliminado no modelo da GBT⁸, a carga máxima com os quatro modos SS desce apenas 1,4%.

As figuras 3.29 e 3.30 mostram a evolução da deformação longitudinal (ε_{xx}) na superfície média, para um quarto da laje e vários valores do deslocamento vertical a meio-vão, obtida com o elemento finito proposto e o modelo de elementos *brick*. No caso da GBT, os resultados foram obtidos usando os modos SL+SQ e a discretização e parâmetros indicados na figura 3.29(a). Observa-se que os dois modelos exibem resultados muito semelhantes para toda a gama de deslocamentos analisada (especialmente no ramo elástico) e, em particular, para as deformações máximas no meio vão. Contudo, o modelo de elementos da GBT tende a prever uma variação transversal da deformação mais acentuada e, para os maiores deslocamentos (226,2 e 273,8 mm), não captura as deformações (grandes) localizadas obtidas com o modelo de elementos *brick*. O facto de o modelo da GBT prever maiores variações de deformação na direção transversal é uma consequência da limitação imposta às tensões de corte. No modelo de elementos *brick*, este efeito não é tão pronunciado, uma vez que a limitação das tensões de corte apenas se aplica após a abertura de fendas e, recorde-se que o modelo material possui uma resistência à tração igual a 2,6 MPa. Para ilustrar esta afirmação, a figura 3.30(b) mostra os resultados obtidos com a GBT assumindo tensões de corte elásticas. Relativamente aos resultados anteriores da GBT (com $\tau_c = 2,6$ MPa), estas deformações são mais próximas das obtidas com os elementos *brick*, particularmente até 130,8 mm. Porém, para deslocamentos superiores, naturalmente, as deformações máximas não são tão

⁸Isto é facilmente conseguido pela subdivisão da laje de betão em duas paredes com 1,85 m e uma com 300 mm, que é totalmente conectada ao banzo superior do perfil.

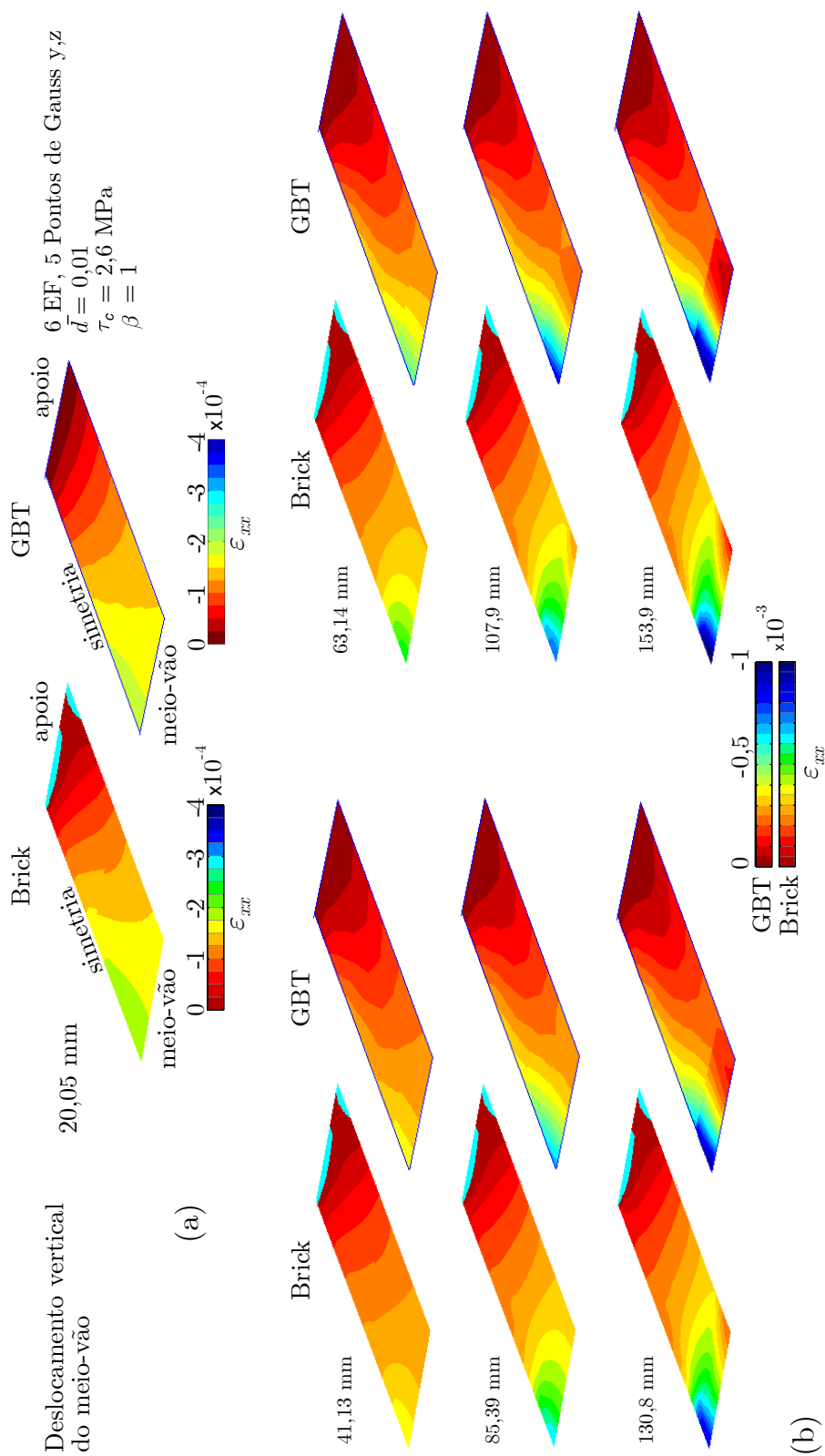


Figura 3.29: Viga mista simplesmente apoiada com laje larga: deformações longitudinais ϵ_{xx} na superfície média de um quarto da laje e deslocamentos verticais a meio vão iguais a (a) 20,05 mm e (b) 41,13 a 153,9 mm.

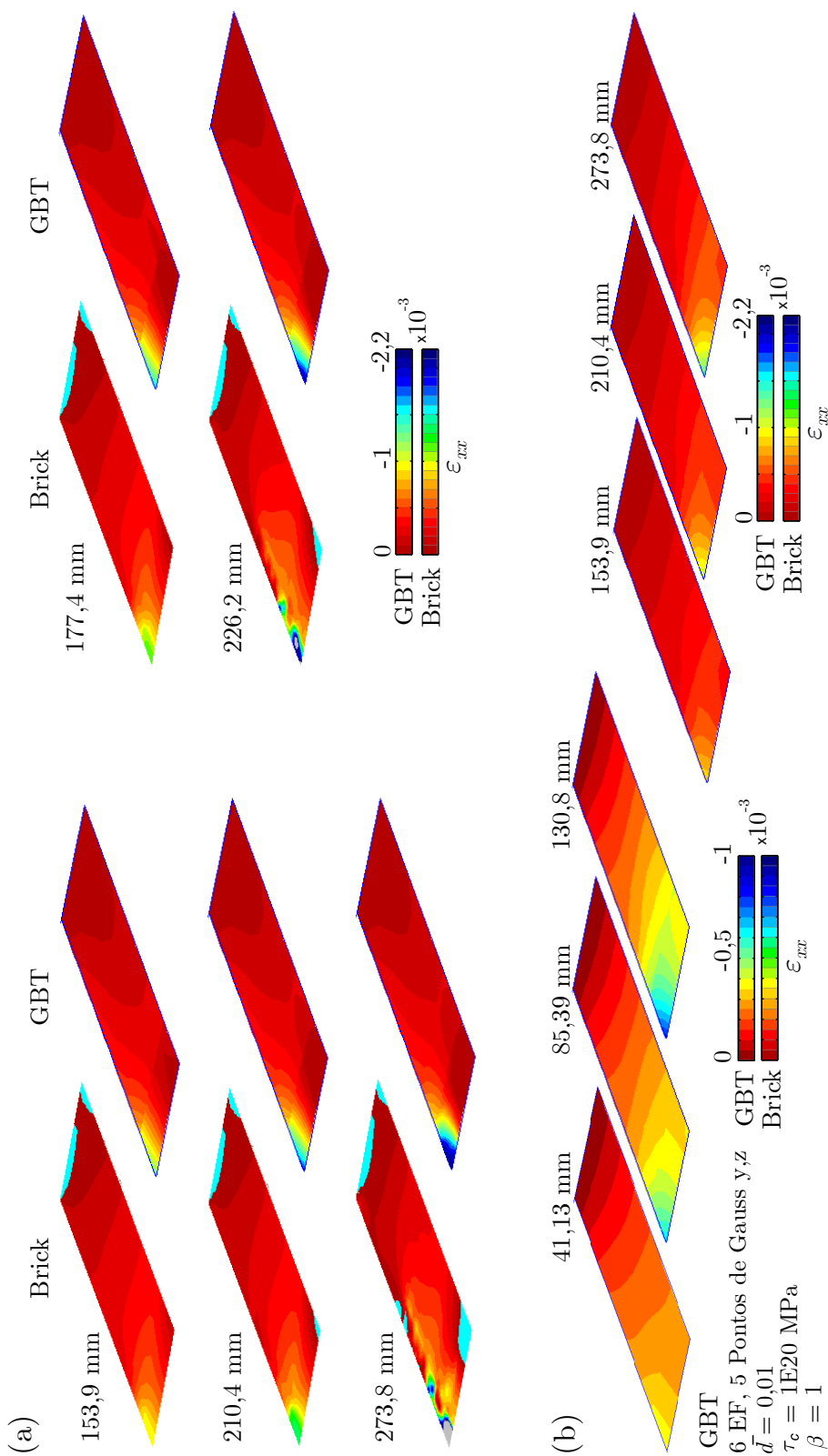


Figura 3.30: Viga mista simplesmente apoiada com laje larga: (a) 153,9 a 273,8 mm e (b) 41,13 a 273,8 (neste último caso os resultados da GBT são obtidos sem limitação de tensões tangenciais).

bem capturadas.

Para permitir uma melhor compreensão do comportamento da viga previsto pelo modelo de elementos *brick*, a figura 3.31 ilustra a evolução da fendilhação com o deslocamento vertical a meio-vão. A primeira fenda ocorre para 63,14 mm, sendo este valor de deslocamento já muito perto do patamar horizontal do gráfico carga-deslocamento, o que está de acordo com o facto já apontado de os resultados da GBT para $\beta = 1$ serem muito próximos dos obtidos com o modelo de elementos *brick*. As primeiras fendas são longitudinais na região de meio-vão (modelo com simplificação de simetria). Com o aumento do deslocamento, a fendilhação espalha-se e evolui para uma distribuição complexa que não é capturada pelo modelo presente da GBT.

Finalmente, relativamente a tempos de cálculo, o *ATENA* demora aproximadamente 3,5 horas e a GBT 37 segundos — as análises com a GBT foram conduzidas com 6 elementos finitos⁹. Tal como no exemplo da Secção 3.4.3, o modelo do *ATENA* tem uma simplificação de simetria transversal. Caso esta não fosse adotada, os tempos de cálculo aumentariam consideravelmente. Relembre-se ainda que metade do modelo de elementos *brick* tem um comportamento elástico linear, o que permite diminuir o tempo de cálculo.

3.5 Sumário

Neste capítulo foi apresentado e validado um elemento finito baseado na GBT, capaz de capturar, com precisão e eficácia computacional, o comportamento fisicamente não-linear de vigas mistas aço-betão tendo em conta os efeitos de *shear lag*, plastificação do aço e fendilhação/esmagamento no betão. Com este elemento é possível obter o comportamento pré- e pós-colapso de vigas mistas com banzo largo, dado que o efeito de *shear lag* na laje de betão é automaticamente tido em conta.

Apresentaram-se vários exemplos numéricos para demonstrar que o elemento finito desenvolvido é capaz de capturar os fenómenos relevantes com um custo computacional muito reduzido. Foram ainda desenvolvidas soluções analíticas para quantificar o efeito de *shear lag* elástico. Estas soluções analíticas resultam das características únicas de decomposição modal da GBT. Em acréscimo, a decomposição modal da solução foi também utilizada para extrair informações valiosas acerca do efeito de *shear lag* em regime fisicamente linear e não-linear, até o colapso. Por exemplo, mostrou-se que, para vigas simplesmente apoiadas sujeitas a cargas uniformemente distribuídas, a relação entre as amplitudes dos modos SL e SQ varia ao longo do vão e, para o caso fisicamente não-linear, também varia com o carregamento, o que mostra que não deve ser adotado um único modo de *shear lag*, ao contrário do que é considerado em, *e.g.*, Gara et al. (2011a), Hu et al. (2017), Lezgy-Nazargah et al. (2019) e Sun e Bursi (2005).

Deve mencionar-se uma vez mais que a eficiência do elemento proposto provém da combinação da versatilidade intrínseca da GBT para modelar o comportamento de barras de

⁹Foram realizados 42 incrementos com a análise da GBT e 60 incrementos com o programa *ATENA*.

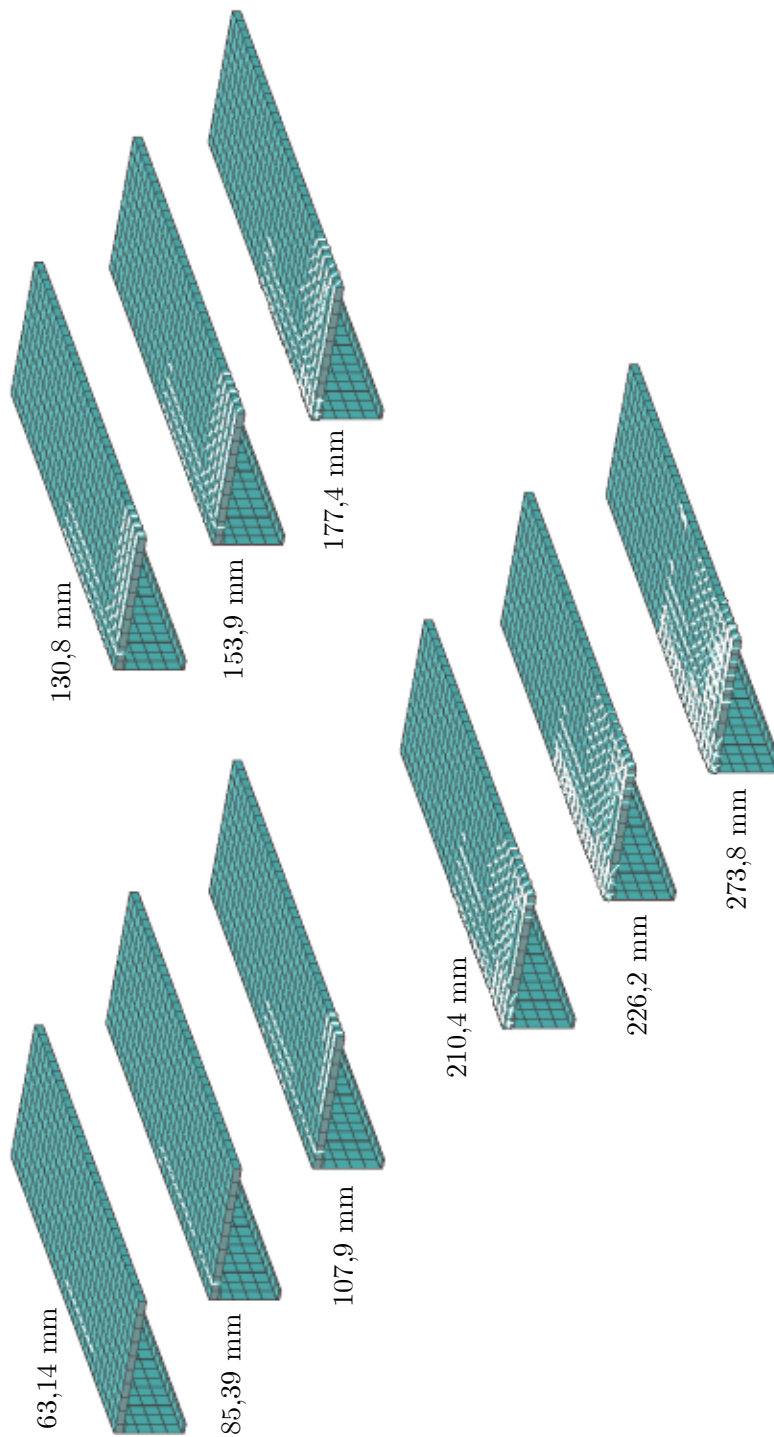


Figura 3.31: Viga mista aço-betão simplesmente apoiada com banzo de betão largo: evolução da fendilhação com o aumento do deslocamento vertical a meio-vão (modelo de elementos *brick*)

CAPÍTULO 3. ANÁLISE FÍSICAMENTE NÃO-LINEAR DE VIGAS MISTAS AÇO-BETÃO

paredes finas e da introdução de hipóteses simplificativas ao campo de tensões e deformações. Estas hipóteses possibilitam a redução de modos de deformação (logo de GDL) e também a utilização de leis constitutivas simplificadas, tanto para o betão como para o aço, sem perda significativa de precisão.

Capítulo 4

Encurvadura de vigas mistas aço-betão

4.1 Introdução

Em zonas de apoios intermédios de vigas mistas aço-betão, podem ocorrer fenómenos de encurvadura num modo local ou distorcional devido à compressão da zona inferior do perfil de aço (Johnson e Buckby, 1975). A figura 4.1(a) ilustra o modo distorcional, o qual envolve o movimento lateral e torção do banzo inferior, com flexão transversal da alma, e a figura 4.1(b) representa o modo local, sendo caracterizado pela flexão transversal da alma e, eventualmente, a torção do banzo inferior (conforme representado na figura).

De acordo com a cláusula 6.4.1(3) do EC4, a verificação da segurança de vigas mistas à encurvadura pode basear-se nos métodos prescritos no EC3 (parte 1-1) para a encurvadura local e lateral por flexão-torção de vigas de aço. No entanto, a contabilização da restrição conferida pela laje é fundamental para um dimensionamento económico e, portanto, deve ser considerada. Por essa razão, o EC4, na Secção 6.4.2, fornece um método aplicável a vigas mistas de classe 1 a 3 em edifícios e com secção do perfil de aço constante ao longo do comprimento. De acordo com este método, a resistência da viga é obtida através da multiplicação do valor de cálculo do momento resistente negativo, M_{Rd} , calculado de acordo com a cláusula 6.2.1, pelo fator de redução χ_{LT} . A expressão do valor de cálculo do momento resistente à encurvadura lateral (distorcional), $M_{b,Rd}$, é assim dada por

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} M_{Rd}. \quad (4.1)$$

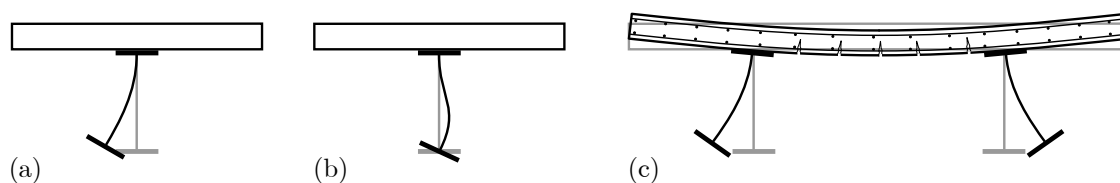


Figura 4.1: Modo de instabilidade de vigas mistas sujeitas a momento negativo (a) modo distorcional e (b) modo local; (c) modelo da “estrutura em U invertido”.

O fator de redução χ_{LT} é função da esbelteza normalizada, $\bar{\lambda}_{LT}$, sendo esta dada por

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{M_{Rk}}{M_{cr}}}, \quad (4.2)$$

onde M_{Rk} é o valor característico do momento negativo resistente, calculado considerando as propriedades características dos materiais, e M_{cr} é o momento crítico para a encurvadura distorcional. Naturalmente, a dificuldade deste método reside na determinação de M_{cr} . Para o efeito, o EC4 não fornece expressões explícitas.

Nesta Secção, os métodos mais relevantes para a determinação de momentos críticos serão descritos e comparados, nomeadamente, (i) a expressão proposta na ENV 1994-1-1, Anexo B.1.2. (CEN, 1992) e (ii) o método de Hanswille (2002). Adicionalmente, será apresentada a formulação da GBT para o cálculo de cargas críticas desenvolvida por Gonçalves e Camotim (2010).

Os primeiros dois métodos são baseados no modelo da “estrutura em U invertido”. Este modelo é ilustrado na figura 4.1(c) e consiste em um sistema de vigas mistas (pelo menos duas), dispostas paralelamente, ligadas à mesma laje de betão. Este modelo permite considerar: (i) a restrição ao deslocamento lateral e à rotação do banzo superior do perfil de aço devido à presença da laje de betão, (ii) a flexão transversal da laje e da alma do perfil e (iii) a fendilhação do betão.

De acordo com a ENV 1994-1-1, Anexo B.1.2., a expressão do momento crítico para o modelo da “estrutura em U invertido”, é

$$M_{cr} = \frac{k_c C_4}{L} \sqrt{\left(G_a I_{at} + \frac{k_s L^2}{\pi^2} \right) E_a I_{afz}}, \quad (4.3)$$

onde:

- (i). k_c é um parâmetro que, para o caso de um perfil bi-simétrico, é dado por

$$k_c = \frac{\frac{h_w I_y}{I_{ay}}}{\frac{h_w^2}{4} + i_x^2 + h_w}, \quad (4.4)$$

com

$$e = \frac{A I_{ay}}{A_a z_c (A - A_a)}, \quad i_x^2 = \frac{I_{ay} + I_{az}}{A_a}, \quad (4.5)$$

onde h_w é a distância entre as linhas médias dos banzos do perfil, I_y é a inércia da secção mista fendilhada em torno do eixo horizontal, I_{ay} e I_{az} são as inércias centrais principais da secção do perfil (y e z são, respetivamente, os eixos “forte” e “fraco”), A é a área da secção mista, desprezando o betão à tração, dada pela soma da área do perfil (A_a) com a área da armadura (A_s), e z_c é a distancia na vertical entre o baricentro do perfil e a linha média da laje de betão.

- (ii). C_4 é um coeficiente que depende da forma do diagrama de momentos fletores, dado nas tabelas da figura 4.2.

Diagrama de momentos flectores	C_4								
	$\psi=0.50$	$\psi=0.75$	$\psi=1.00$	$\psi=1.25$	$\psi=1.50$	$\psi=1.75$	$\psi=2.00$	$\psi=2.25$	$\psi=2.50$
	41.5	30.2	24.5	21.1	19.0	17.5	16.5	15.7	15.2
	33.9	22.7	17.3	14.1	13.0	12.0	11.4	10.9	10.6
	28.2	18.0	13.7	11.7	10.6	10.0	9.5	9.1	8.9
	21.9	13.9	11.0	9.6	8.8	8.3	8.0	7.8	7.6
	28.4	21.8	18.6	16.7	15.6	14.8	14.2	13.8	13.5
	12.7	9.89	8.6	8.0	7.7	7.4	7.2	7.1	7.0

Diagrama de momentos flectores	C_4				
	$\psi=0.00$	$\psi=0.25$	$\psi=0.50$	$\psi=0.75$	$\psi=1.00$
	11.1	9.5	8.2	7.1	6.2
	11.1	12.8	14.6	16.3	18.1

Figura 4.2: Coeficientes C_4 (CEN, 1992).

- (iii). L é a distância entre secções transversais em que o banzo inferior do perfil está lateralmente contraventado.
- (iv.) $G_a I_{at}$ é a parcela que representa a rigidez de torção de St. Venant do perfil, onde G_a é o módulo de distorção do aço e I_{at} é a constante de torção de St. Venant, a qual é dada aproximadamente por

$$I_{at} = \frac{1}{3} \sum_i b_i t_i^3, \quad (4.6)$$

onde b_i e t_i são as larguras e espessuras de cada parede do perfil de aço, respetivamente.

- (v.) k_s é a rigidez de flexão transversal da “estrutura em U invertido”, por unidade de comprimento da viga. Esta rigidez é calculada para a ação de forças laterais (horizontais) F , aplicadas nos banzos inferiores e com sentidos opostos em vigas adjacentes, e corresponde fisicamente ao momento no banzo superior ($M = F h_w$) quando ocorre uma rotação unitária do alinhamento definido pelos baricentros dos dois banzos do perfil. Pode mostrar-se facilmente que a rigidez do sistema estrutural em U invertido corresponde à associação em série de duas “molas”, k_1 e k_2 , que representam a rigidez de flexão transversal da laje e da alma do perfil de aço, respetivamente, ou seja

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \quad \Rightarrow \quad k_s = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \quad (4.7)$$

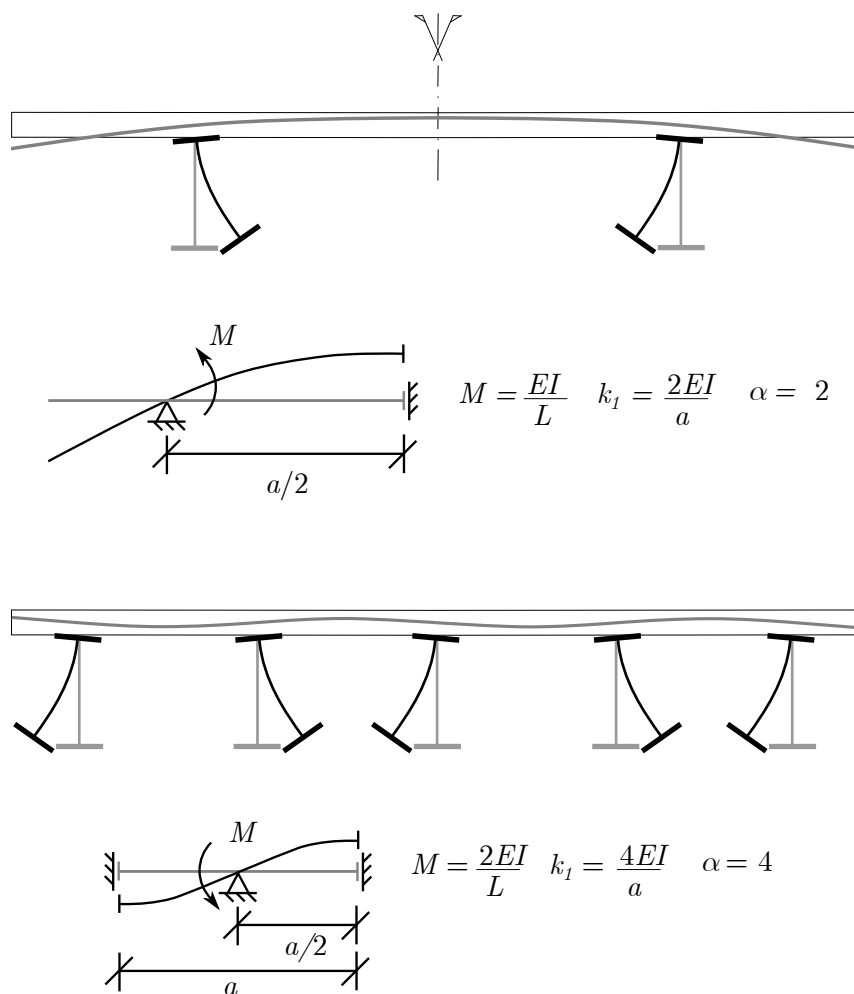


Figura 4.3: Modelos de cálculo da rigidez da laje k_1 e determinação dos parâmetros α .

A rigidez k_1 é obtida considerando que a laje se encontra fendilhada na direção transversal, com

$$k_1 = \frac{\alpha(EI)_2}{a}, \quad (4.8)$$

onde $(EI)_2$ é a rigidez de flexão transversal da laje fendilhada¹, a é a distância entre perfis de aço e α é um parâmetro que tem em conta a configuração da “estrutura em U invertido”. Na figura 4.3 mostram-se os valores de α a considerar para dois casos. Por sua vez, a rigidez de flexão da alma, k_2 , é dada por

$$k_2 = \frac{E_a t_w^3}{4(1 - \nu_a^2)h_w}, \quad (4.9)$$

onde ν_a é o coeficiente de Poisson do aço e t_w é a espessura da alma.

- (vi.) Finalmente, $E_a I_{afz}$ é a rigidez de empenamento do banzo inferior quando é imposto um deslocamento lateral unitário. I_{afz} é a inércia do banzo em relação ao eixo vertical

¹Deve ser considerado o menor dos seguintes valores: (i) o valor a meio-vão, para momento positivo, (ii) o valor no apoio, para momento negativo.

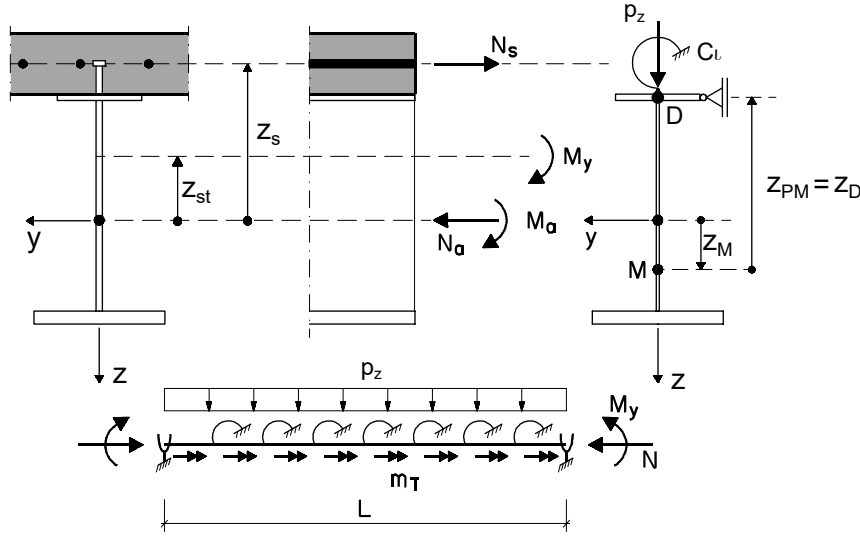


Figura 4.4: Modelo de Hanswille (2002) para determinar o momento crítico distorcional de vigas mistas.

que passa na alma do perfil, dada por

$$I_{afz} = \frac{b_f^3 t_f}{12}, \quad (4.10)$$

onde b_f e t_f representam a largura e a espessura do banzo.

É importante referir que a expressão (4.3) não é conceptualmente correta, uma vez que fornece um momento crítico que decresce continuamente com o vão, contrariando o comportamento típico de encurvadura local e distorcional de elementos de parede fina, para os quais a carga crítica apresenta vários mínimos locais (Hanswille, 2002).

Também baseado no modelo da “estrutura em U invertido”, o método de cálculo apresentado por Hanswille (2002) permite a obtenção de momentos críticos. Este método consiste na resolução da equação diferencial de quarta ordem obtida pelo equilíbrio das forças representadas na figura 4.4 cuja expressão é

$$E_a I_{WD} \vartheta'''' + ((k_z M_y - G_a I_{at}) \vartheta')' + C_\vartheta \vartheta = m_T. \quad (4.11)$$

As figuras 4.4 e 4.5(b) representam todos os parâmetros necessários para a definição das grandezas intervenientes, as quais são explicadas de seguida:

- (i). O termo $E I_{WD}$ representa a rigidez de empenamento do perfil em relação ao ponto D, com

$$I_{WD} = I_{WM} + z_D^2 I_{az} = \frac{b_f^3 t_f}{12} h_w^2, \quad (4.12)$$

onde I_{az} é a inércia do perfil de aço em relação a z , I_{WM} é a constante de empenamento do perfil em relação ao seu centro de corte (M) e $z_D^2 I_{az}$ representa a alteração do centro de rotação (do ponto M para o ponto D, dado que z_D é a distância entre estes pontos).

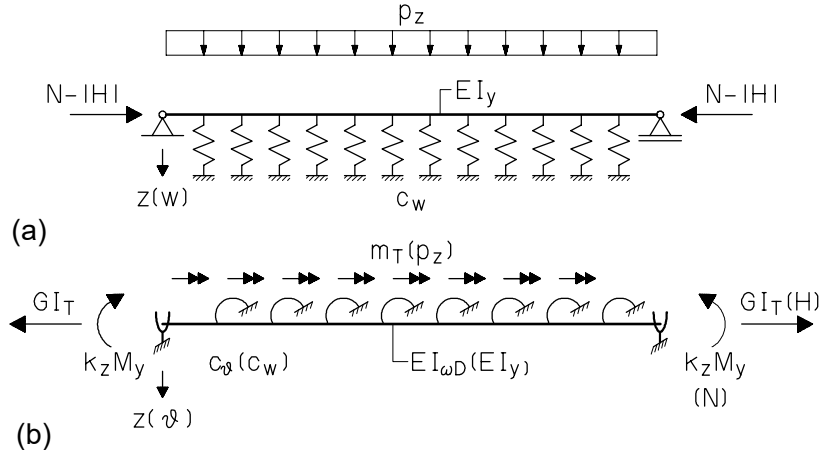


Figura 4.5: Comparação entre os modelos: (a) de viga em fundação elástica e (b) de encurvadura distorcional de vigas mistas (Hanswille, 2002).

- (ii). O segundo termo da equação diferencial (4.11) tem em conta a rigidez de torção de St. Venant do perfil, $G_a I_{at}$, e o parâmetro k_z é dado por

$$k_z = \left(\frac{(z_D + z_M)^2 + i_p^2}{-\frac{I_{ay}}{z_{st} A_a}} + 2z_D \right) \frac{I_{ay}}{I_{st,y}}, \quad (4.13)$$

onde z_M é a distância do baricentro do perfil ao seu centro de corte, z_{st} é a distância do baricentro do perfil ao baricentro da secção mista, desprezando o betão, $I_{st,y}$ a inércia da secção mista (desprezando o betão) em relação ao seu eixo central horizontal, i_p é o raio de giração polar do perfil, A_a é a área do perfil e, finalmente, I_{ay} e I_{az} são as inércias do perfil em torno de y e z , respetivamente.

- (iii). O terceiro termo da equação diferencial tem em conta a flexão transversal da laje e da alma do perfil e é novamente dado pela expressão (4.7), ou seja, $C_\vartheta = k_s$.

A equação diferencial (4.11) apresenta a mesma estrutura da equação do problema clássico de viga em fundação elástica. A figura 4.5 compara ambos os modelos (Hanswille, 2002).

Caso a viga esteja sujeita a um momento negativo uniforme, a utilização na equação (4.11) de funções sinusoidais da forma $\vartheta_k(x) = \bar{\vartheta}_k \text{sen}(n\pi x/L)$, onde n é o número de semi-ondas longitudinais do modo de instabilidade, fornece a solução exata do problema, sendo esta dada por

$$M_{cr} = \min \left[\frac{1}{k_z} \left(\frac{\pi^2 EI_{WD}}{(\beta_B L)^2} + G_a I_{at} \right) \right], \quad (4.14)$$

onde β_B é um fator de comprimento, dado por

$$\beta_B = \sqrt{\frac{1}{n^2 + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left(\frac{\eta_B}{\pi}\right)^2}}, \quad \text{com} \quad \eta_B = \sqrt{\frac{C_\vartheta L^4}{EI_{WD}}}. \quad (4.15)$$

Para vigas contínuas com carga uniformemente distribuída, o fator de comprimento β_B pode ser obtido numericamente, sendo fornecido nos ábacos da figura 4.6. A utilização da equação (4.14) para casos em que o diagrama de momentos é variável requer ainda a substituição do termo de rigidez de torção por uma rigidez “efetiva”, dada por

$$G_a I_{at,eff} = A(1,5 - 0,5\psi)G_a I_{at}, \quad (4.16)$$

onde ψ e A têm em conta a forma do diagrama de momento fletor (ver figura 4.6).

Hanswille (2002) mostra que a expressão do EC4 (ENV) conduz a valores de M_{cr} consideravelmente menores do que os fornecidos pela sua formulação. Aliás, contrariamente ao método do EC4 (ENV), o método de Hanswille prevê a ocorrência de vários mínimos da curva que representa a carga crítica em função do comprimento da viga.

Finalmente, Gonçalves e Camotim (2010) obtêm soluções semi-analíticas baseadas na GBT para vigas simplesmente apoiadas sem efeito de *shear lag* (momento negativo uniforme), considerando que a laje está totalmente fendilhada na direcção longitudinal e não fendilhada da direcção transversal. Para este caso particular, a solução da equação (2.54) é mais uma vez dada por funções de amplitude sinusoidais do tipo $\phi_k = \bar{\phi}_k \text{sen}(n\pi x/L)$ sendo a equação de bifurcação dada por (relembrem-se as equações (2.33)-(2.36) e (2.56))

$$\left(\left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \mathbf{C} + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \mathbf{D} + \mathbf{B} + \lambda \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \mathbf{X}_1 \right) \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \vdots \\ \bar{\phi}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

onde λ é o parâmetro de carga. Caso seja considerado apenas o modo de deformação distorcional² (D) ilustrado na figura 4.7, o problema reduz-se a um único grau de liberdade, o que permite obter a expressão analítica

$$\lambda_{cr} = \frac{M_{cr}}{M} = \min \left[\frac{-1}{X_D} \left(\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 C_D + D_D + \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 B_D \right) \right], \quad (4.18)$$

onde M é o momento máximo na viga para $\lambda = 1$.

Utilizando a expressão (4.18), Gonçalves e Camotim (2010) calculam o momento crítico para uma viga mista simplesmente apoiada, com a geometria da secção transversal e as propriedades dos materiais fornecidas na figura 4.8(a). A figura 4.8(b) compara os resultados obtidos com (4.18) e o programa de faixas finitas CUFSM (Li e Schafer, 2010), o qual também considera funções de amplitude sinusoidais no comprimento — observa-se uma excelente concordância. Note-se que, tal como no método de Hanswille (2002), a evolução do momento crítico com o comprimento apresenta vários mínimos correspondentes ao mesmo momento crítico.

De seguida, procede-se à comparação das expressões do momento crítico fornecidas pelo método de Hanswille e da GBT. Antes de mais, deve notar-se que, no método de Hanswille, tal como no método do EC4 (ENV), se está a considerar um modo de deformação

²A determinação deste modo de deformação será posteriormente descrita na Secção 4.4.

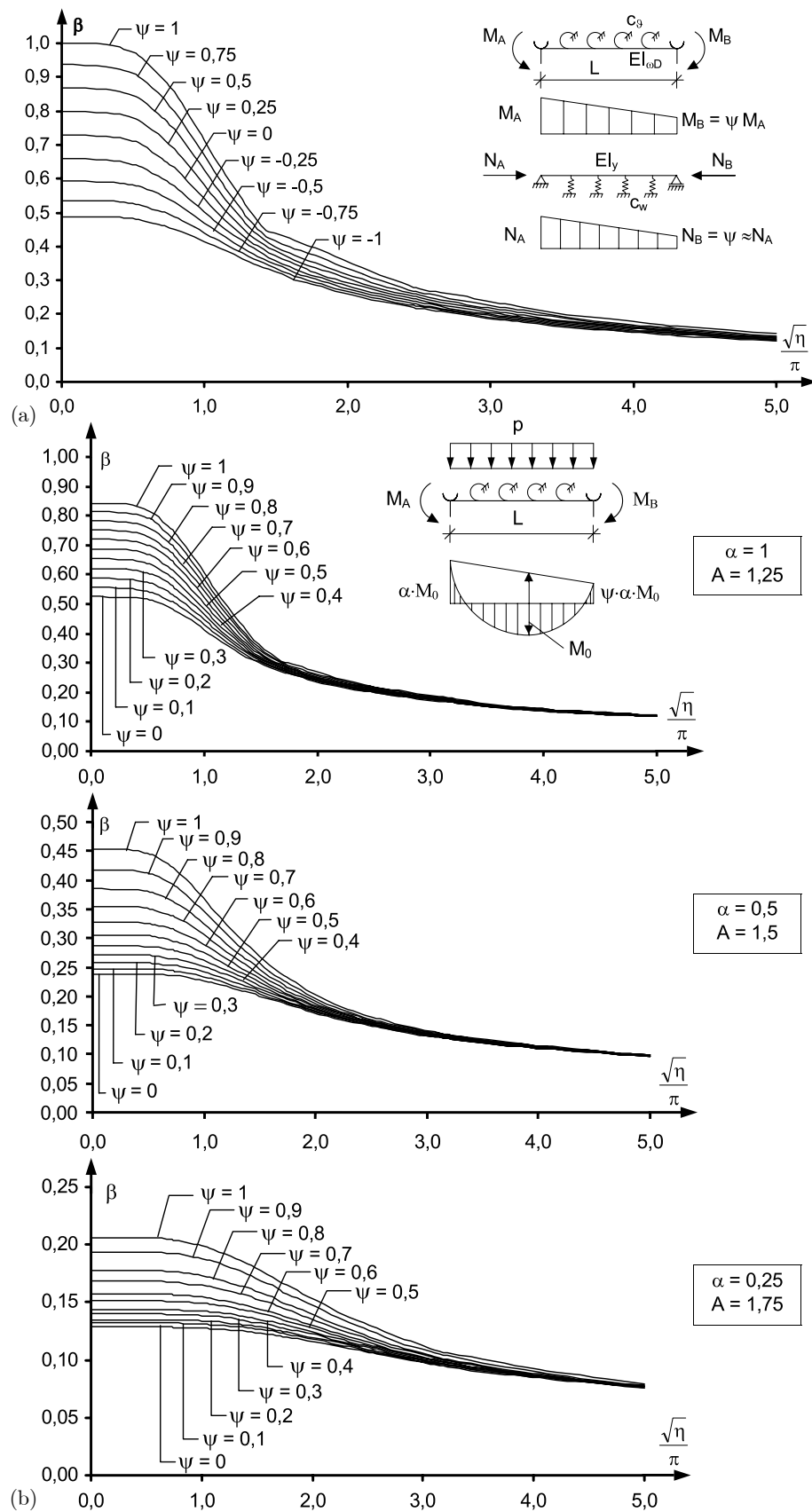


Figura 4.6: Fatores β , α e A para: vigas (a) sujeitas a momentos de extremidade e (b) com cargas uniformemente distribuídas e momentos de extremidade (Hanswille, 2002).

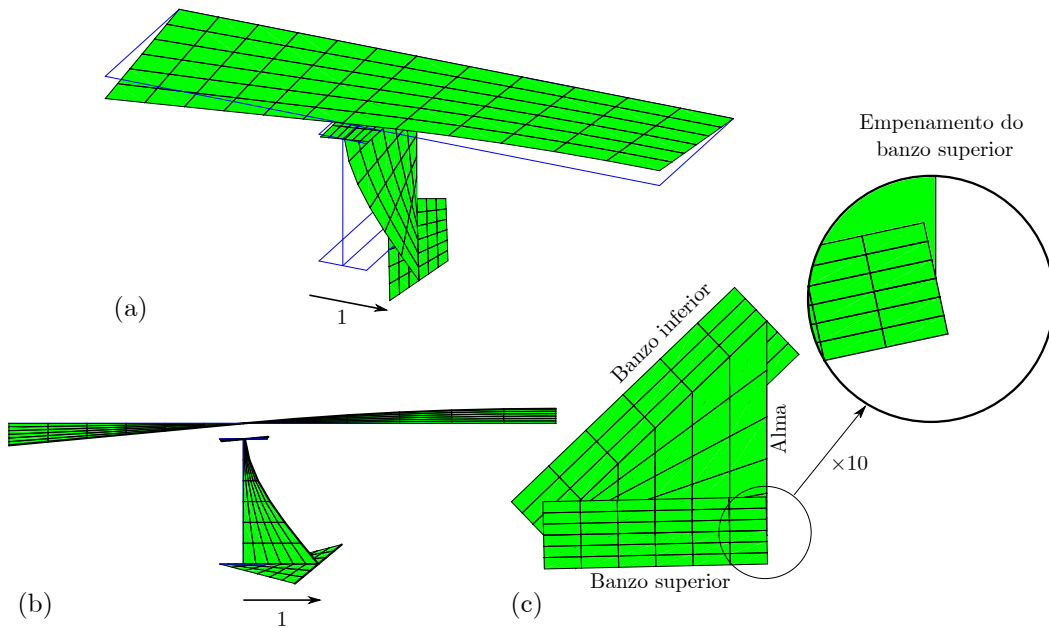


Figura 4.7: Modo de deformação distorcional: (a) perspectiva, (b) alçado frontal e (c) vista em planta do empenamento do banzo superior (a laje não está representada).

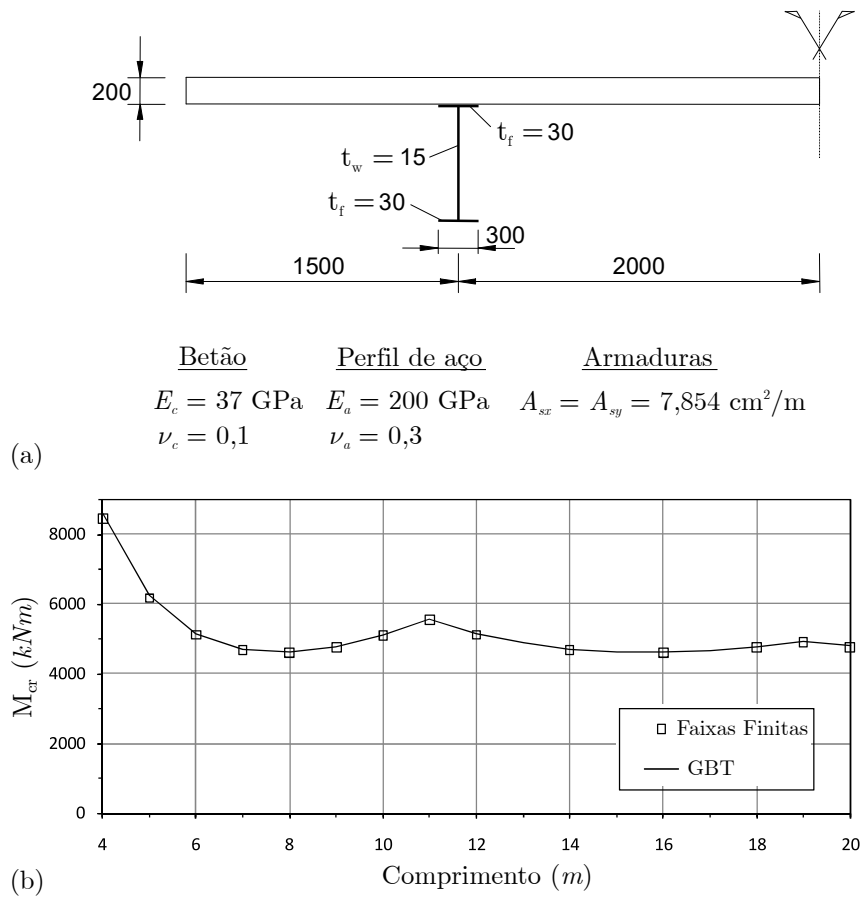


Figura 4.8: Viga simplesmente apoiada sujeita a momento uniforme: (a) geometria da secção transversal e propriedades dos materiais, e (b) variação do momento crítico com o comprimento da viga (Gonçalves e Camotim, 2010).

distorcional associado a uma rotação unitária da corda da alma do perfil, enquanto que na GBT este modo é obtido impondo um deslocamento lateral unitário no banzo inferior. Para além disso, a GBT considera a distância vertical entre o baricentro do banzo superior do perfil e a linha média da laje de betão — caso se despreze a contribuição desta distância, o fator de escala dos modos é precisamente igual a h_w e, portanto, todos os termos de rigidez diferem por um fator de escala igual a h_w^2 .

De forma a efetuar uma comparação mais direta entre as expressões do momento crítico obtidas pelo método de Hanswille e pela GBT, começa-se por desenvolver a expressão (4.14), o que conduz a

$$M_{cr} = \min \left[\frac{1}{k_z} \left(\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 EI_{WD} + \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 C_{\vartheta} + G_a I_{at} \right) \right]. \quad (4.19)$$

Esta expressão é muito semelhante à da GBT (4.18), sendo possível identificar as seguintes correspondências:

- (i). A rigidez de empenamento EI_{WD} corresponde a C_D . Contudo, o primeiro não considera o empenamento secundário resultante da torção e da flexão transversal de toda a secção (incluindo a laje). Na GBT, o empenamento secundário é incluído em C_D^F , muito embora esta contribuição seja em geral reduzida.
- (ii). A rigidez de flexão transversal C_{ϑ} corresponde a B_D , embora despreze a influência da distância entre o baricentro do banzo superior do perfil e a linha média da laje (conforme já referido);
- (iii). A rigidez de torção de St. Venant $G_a I_{at}$ corresponde a D_D , mas não considera a contribuição da flexão transversal da secção (a qual é considerada no termo $D_{1,D}$) e o efeito de Poisson resultante dessa flexão ($D_{2,D}$).
- (iv). O termo k_z , o qual corresponde aos efeitos geometricamente não-lineares, portanto a X_D . O primeiro foi estabelecido com base nos esforços instalados no perfil e não considerando a flexão transversal da secção (Hanswille et al., 1998). Por oposição, o termo X_D considera todos os efeitos, inclusivamente o efeito estabilizador das trações na laje.

Deve notar-se que os métodos do EC4 (ENV) e de Hanswille são algo laboriosos, requerendo a utilização de valores tabelados. Não deve esquecer-se que, de acordo com o EC4, a determinação do momento crítico requer a consideração dos efeitos de *shear lag*, da fendilhação e fluência do betão, do faseamento construtivo, dificultando ainda mais o problema. Assim, neste Capítulo, apresenta-se um elemento finito computacionalmente eficiente, baseado na GBT, para determinar momentos críticos em vigas mistas, tendo em conta todos os referidos efeitos.

4.2 Revisão da literatura

A determinação de momentos críticos em vigas mistas aço-betão tem sido objeto de estudo por vários investigadores. Para além dos métodos já apresentados na Secção anterior, há a referir os seguintes:

- (i). As soluções que recorrem à teoria de vigas sob fundação elástica permitem obter resultados de forma prática e simples. Estas soluções dependem de coeficientes que são fornecidos em tabelas ou gráficos. É o caso da abordagem desenvolvida por Svensson (1985) e Hanswille (2002). Relembre-se que o método proposto por Hanswille (2002) já foi apresentado na Secção anterior. Svensson (1985), trata o problema como se o banzo inferior estivesse comprimido e admite que a rigidez da fundação elástica corresponde apenas ao termo k_2 da equação (4.9), o que quer dizer que a flexibilidade da laje não é tida em conta e a rigidez de torção é desprezada. O autor propõe soluções para vários casos (o efeito do momento variável é tido em conta através da variação do esforço axial no banzo inferior) sob a forma de tabelas, obtidas utilizando funções de forma baseadas numa série de Fourier (admite-se que o modo de instabilidade satisfaz as condições de fronteira do caso simplesmente apoiado).
- (ii). Bradford e Johnson (1987) determinam cargas críticas associadas à encurvadura local de vigas mistas utilizando o método das faixas finitas. O método permite ter em conta a plastificação da secção (uniaxial) e tensões residuais, pelo que as cargas críticas são elastoplásticas. Admite-se que o betão está fendilhado e, por isso, não é considerado na análise. São analisadas vigas mistas em consola sujeitas a cargas uniformemente distribuídas.
- (iii). Bradford e Gao (1992) estudam a carga crítica distorcional em vigas mistas bi-encastadas (com o objetivo de estudar o comportamento do tramo intermédio de uma viga contínua), sujeitas a uma carga uniformemente distribuída, utilizando um elemento finito de barra. A análise é elástica mas contabiliza a fendilhação do betão na zona de momentos negativos. Para calcular o modo distorcional, admite-se que o banzo superior não se move, o banzo inferior pode deslocar-se lateralmente e rodar (torção), e a alma flete transversalmente na forma de um polinómio cúbico.
É realizado um estudo paramétrico sobre o efeito (i) da relação área de aço - área de betão e ainda (ii) da alteração da geometria do perfil. Apresenta-se também uma comparação entre os valores dos momentos críticos distorcional e de flexão-torção (*i.e.*, sem a restrição do betão). Conforme esperado, conclui-se que o aumento da relação área de aço - área de betão implica um aumento da resistência à encurvadura lateral distorcional e que o momento crítico distorcional é muito superior ao de flexão-torção.
- (iv). Em Bradford (1998) é proposto um modelo algo semelhante ao anterior Bradford e Gao (1992). Neste caso admite-se que a forma da secção transversal é descrita por três parâmetros: as rotações dos banzos do perfil e o deslocamento lateral do banzo

inferior (admite-se que o banzo superior se encontra travado lateralmente pela laje). A rotação do banzo superior está associada a uma rigidez que permite ter em conta o efeito da flexão transversal da laje. Assume-se que a viga se encontra simplesmente apoiada e sujeita a momento negativo uniforme, o que permite considerar funções de amplitude do modo de deformação sinusoidais, com uma única semi-onda. Trata-se assim de um método semi-analítico. Tal como em Bradford e Johnson (1987), é possível ter em conta o efeito da plastificação da secção (uniaxial) e das tensões residuais.

- (v). Há ainda a referir o artigo de Gonçalves e Camotim (2010), baseado na GBT e já explicado na Secção 4.1. No entanto, convém salientar que o método proposto neste artigo (i) é apenas aplicável a vigas simplesmente apoiadas, sujeitas a momento uniforme negativo (logo não existe efeito de *shear lag*) e (ii) considera um único modo de deformação (distorcional).

Da pesquisa bibliográfica efetuada (omitiram-se alguns artigos com formulações virtualmente idênticas) pode concluir-se que a determinação de cargas de bifurcação local e distorcional em vigas mistas é um tópico ainda relativamente pouco explorado, embora seja essencial para o projeto destes elementos. Em particular, não foi encontrado nenhum elemento finito (ou método numérico) que permita calcular cargas de bifurcação local/distorcional tendo em conta os efeitos conjuntos da fendilhação do betão, *shear lag*, sequência construtiva e fluência. Assim, neste Capítulo, desenvolve-se uma formação para colmatar esta lacuna, o que constitui um desenvolvimento em relação ao atual estado-da-arte.

4.3 Especificidades do elemento finito proposto

4.3.1 Generalidades

De seguida, apresenta-se o elemento finito desenvolvido para o cálculo de momentos críticos (análise linear de estabilidade, ALE) de vigas mistas aço-betão sujeitas a diagramas de momentos variáveis, tendo em conta os modos de encurvadura distorcional e local. Devido à versatilidade da GBT, o elemento finito proposto permite ter em conta os princípios do modelo de “estrutura em U invertido” do EC4 e a fendilhação da laje.

A ALE é efetuada em duas etapas. Em primeiro lugar executa-se uma análise de pré-encurvadura, geometricamente linear, que inclui os efeitos de *shear lag*, da sequência construtiva, fluência³ e da fendilhação do betão, para determinar as tensões de pré-encurvadura instaladas. Em segundo lugar, executa-se uma análise de bifurcação (problema de valores e vetores próprios), a qual permite obter as cargas de bifurcação e os respetivos modos de instabilidade.

³Neste Capítulo a fluência e sequência construtiva são consideradas de forma simplificada, conforme detalhado na Secção 4.4.

Na figura 4.9(a) apresenta-se a secção-tipo considerada, a qual está em acordo com o modelo de “estrutura em U invertido” do EC4. Apesar de se ter considerado que a laje é comum a apenas duas vigas, o modelo pode ser generalizado para outros casos, bastando para o efeito modificar as condições de fronteira da laje. No entanto, consideraram-se apenas duas vigas porque se trata do caso mais gravoso (conduz a uma menor carga crítica). Admite-se que não existe escorregamento nas interfaces armadura-betão e perfil-betão. Na figura estão também indicados todos os parâmetros geométricos relevantes, onde mais uma vez h_w é a altura entre a linha média dos banzos do perfil e A_s é a área de armadura distribuída em cada camada.

Para obter os modos de deformação da secção efetua-se a discretização indicada na figura 4.9(b), onde se apresentam também os eixos locais das paredes e as linhas médias das mesmas. A simplificação de simetria da secção também se encontra representada nesta figura. É importante referir que a análise de pré-encurvatura não é afetada pela alteração das condições de fronteira da laje (na secção transversal), uma vez que a deformação da secção no seu próprio plano não é permitida, como será referido na Secção 4.3.2.

Nas próximas secções, a teoria apresentada no Capítulo 2 relativa à ALE será particularizada para o caso de vigas mistas aço-betão. Deve desde já referir-se que a eficiência da metodologia proposta resulta da combinação da versatilidade da GBT em modelar o comportamento de barras de parede fina, com a sua capacidade de permitir a introdução de hipóteses simplificativas, relativas aos campos de deformações e tensões, nomeadamente a capacidade de (i) efetuar uma separação entre termos de membrana e flexão, o que permite definir uma rigidez apropriada para cada componente, e (ii) adotar a hipótese de extensões transversais nulas em cada parede, $\varepsilon_{yy} = 0$. Como se verá, estas hipóteses são indispensáveis para que o modelo esteja em acordo com o princípio da “estrutura em U invertido” proposto no EC4, através da atribuição de rigidezes distintas na direção longitudinal/transversal e para as componentes de flexão/membrana. Para além disso, ao se adotar estas hipóteses, o número de GDL (e portanto, o número de modos de deformação) é significativamente reduzido, sem sacrificar a precisão dos resultados, obtendo-se assim um elemento finito extremamente eficiente do ponto de vista computacional.

4.3.2 Análise de pré-encurvatura

A análise de pré-encurvatura é realizada tendo em conta as hipóteses apresentadas no Capítulo 3, muito embora a fendilhação do betão seja agora a única fonte de não-linearidade física. Assim, assume-se mais uma vez que a secção transversal é indeformável no próprio plano ($\varepsilon_{yy}^M = \varepsilon_{yy}^F = \gamma_{xy}^F = 0$) e que a hipótese de Vlasov ($\gamma_{xy}^M = 0$) é válida apenas nos banzos do perfil de aço. Estas hipóteses conduzem a $\sigma_{xy}^F = 0$ em todas as paredes e $\sigma_{xy}^M = 0$ nos banzos do perfil. De forma a aliviar o efeito de Poisson, assume-se também que $\sigma_{yy}^M = \sigma_{yy}^F = 0$, tal como explicado na Secção 3.3. Admite-se ainda que as armaduras têm um comportamento puramente uniaxial.

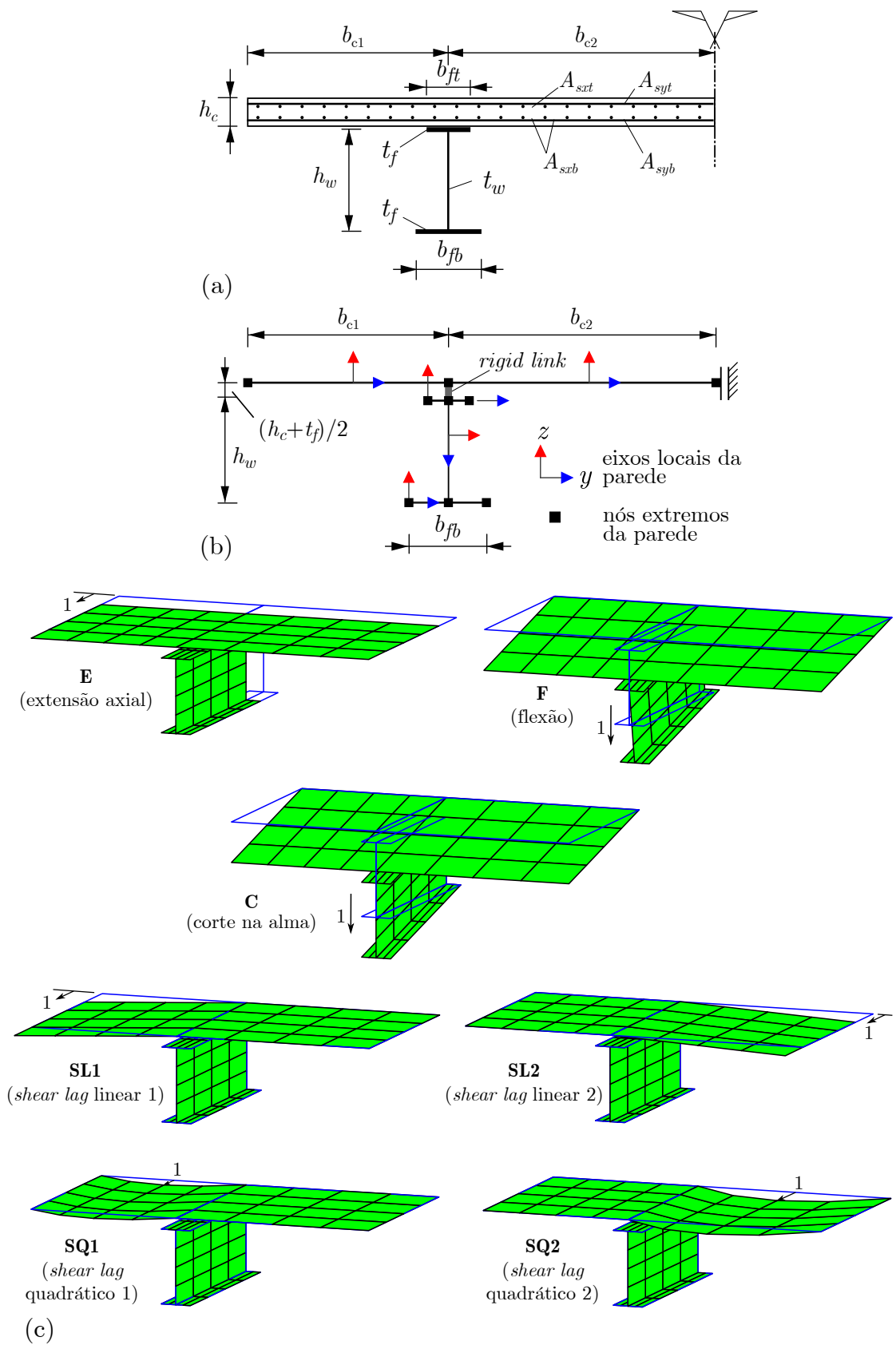


Figura 4.9: Encurvadura de vigas mistas aço-betão: (a) geometria da secção transversal, (b) discretização da secção (os eixos locais são representados) e (c) modos de deformação usados na análise de pré-encurvadura.

Na figura 4.9(c) são ilustrados os modos de deformação utilizados na análise de pré-encurvadura: (E) extensão axial, (F) flexão, (C) corte puro na alma do perfil, (SL1) empenamento linear 1, (SL2) empenamento linear 2, (SQ1) empenamento quadrático 1 e (SQ2) empenamento quadrático 2. Relativamente a estes modos, deve ter-se em atenção o referido na secção 3.3 e ainda:

- (i). Para secções transversais uniformes no comprimento, o modo de flexão é calculado considerando que a laje não se encontra fendilhada. Para secções não uniformes, o procedimento será detalhado na Secção 4.4.3.2.
- (ii). Sendo apenas utilizado um modo de corte puro na alma do perfil (C), as tensões tangenciais de membrana são constantes nesta parede (em cada secção).
- (iii). Muito embora seja possível (e fácil) a adição de mais modos de empenamento para melhorar os resultados, verifica-se que tal não melhora significativamente a solução, tal como visto anteriormente na Secção 3.4.

Ao assumir-se que $\sigma_{yy} = 0$ na alma do perfil, está a desprezar-se o efeito instabilizante que estas tensões podem produzir, o que é particularmente relevante perto de cargas concentradas (com é o caso de apoios), quando não existem reforços na alma. Este assunto será abordado nos exemplos apresentados na Secção 4.4.

Para as hipóteses adotadas, as únicas componentes de tensão não-nulas são σ_{xx}^M , σ_{xx}^F e σ_{xy}^M , muito embora se tenha $\sigma_{xy}^M = 0$ nas paredes onde se admite a hipótese de Vlasov (os banzos do perfil). Assim sendo, a matriz tangente constitutiva assume a forma geral

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} E_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_t \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

onde E_t e G_t são os módulos tangentes uniaxiais e de distorção.

Para o perfil de aço adota-se uma lei constitutiva elástica linear, pelo que se tem $E_t = E_a$ e $G_t = G_a$, onde E_a é o módulo de elasticidade do aço e G_a o respetivo módulo de distorção.

Em virtude da hipótese $\varepsilon_{yy} = 0$, despreza-se a contribuição das armaduras transversais A_{syt} na análise de pré-encurvadura. As armaduras longitudinais têm um comportamento uniaxial e uma lei constitutiva elástica linear, pelo que se adota $E_t = E_s$ e $G_t = 0$, onde E_s é o módulo de elasticidade das armaduras.

De forma a evitar a utilização de leis constitutivas complexas (esta tarefa constituirá o assunto do Capítulo 6), que prejudicam a eficiência computacional do elemento finito proposto, considerou-se para o betão uma lei simplificada relativamente à apresentada no Capítulo anterior, com resistência nula à tração e um ramo linear à compressão. A escolha desta lei é legitimada pelo facto de o momento crítico ser em geral calculado admitindo sempre um comportamento elástico linear dos materiais (embora tendo em conta o efeito da fendilhação, dado que influencia significativamente a distribuição de tensões). Como

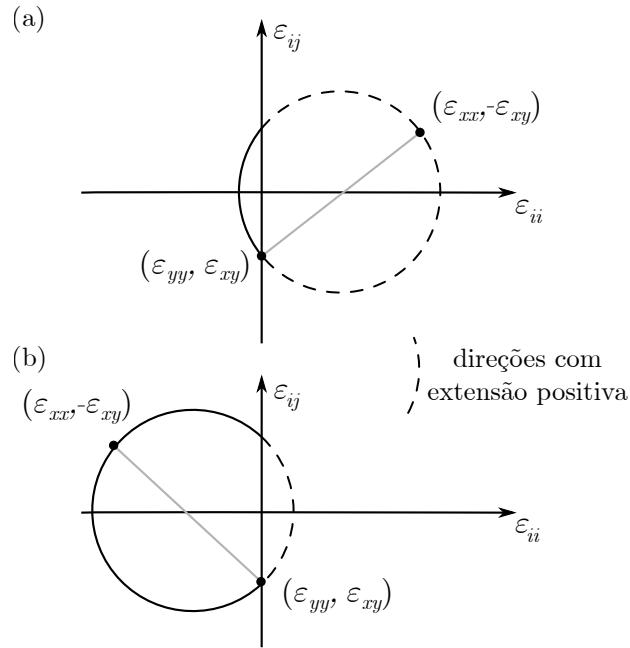


Figura 4.10: Estados de tensão para (a) $\varepsilon_{xx} \geq 0$ e (b) $\varepsilon_{xx} < 0$ com $\varepsilon_{xy} \neq 0$.

tal, tem-se $E_t = E_c$ para $\varepsilon_{xx} < 0$ e $E_t = 0$ para $\varepsilon_{xx} \geq 0$. É importante referir que, como se admite que $\varepsilon_{yy} = 0$ e que a resistência à tração do betão é nula, isso implica que ocorre fendilhação caso $\varepsilon_{xx} > 0$ ou $\varepsilon_{xy} \neq 0$. Para ilustrar o que se acabou de referir, representam-se na figura 4.10, esquematicamente, as circunferências de Mohr dos estados de deformação correspondentes a (a) $\varepsilon_{xx} \geq 0$ e (b) $\varepsilon_{xx} < 0$ com $\varepsilon_{xy} \neq 0$ (e, em ambos os casos $\varepsilon_{yy} = 0$). Conforme se pode observar, ocorre fendilhação em ambos os casos. Assim, tendo em conta que se tem em geral $\varepsilon_{xy} \neq 0$ em virtude do efeito de *shear lag*, ocorre fendilhação generalizada na laje e, portanto, aplica-se um fator de redução da rigidez de corte em toda a laje, com $G_t = \beta G_c$, onde o coeficiente β foi já explicado na Secção 3.3.2.1.

Tal como na Secção 3.3.3, o elemento finito é obtido interpolando as funções de amplitude dos modos de deformação por $\phi = \Psi \mathbf{d}$, onde a matriz Ψ contém as funções de interpolação e o vetor \mathbf{d} os valores nodais das funções de amplitude. As funções de interpolação utilizadas são as mesmas que as utilizadas na Secção 3.3.3: (i) polinómios cúbicos de Hermite para os modos de flexão e corte puro, e (ii) funções quadráticas de Lagrange para os modos com deslocamentos axiais apenas (os modos E, SL1, SL2, SQ1 e SQ2). Com este esquema é obtido um elemento finito com 23 graus de liberdade caso sejam considerados todos os sete modos de deformação representados na figura 4.9(c). Se a secção for simétrica, então os modos de *shear lag* podem ser agrupados (SL1/SL2 e SQ1/SQ2), reduzindo o número de graus de liberdade para 17.

Recuperando as expressões da Secção 3.3.3, o vetor das forças desequilibradas, a matriz de rigidez tangente elementar e o vetor das forças exteriores elementar são obtidos a partir

da integração numérica das expressões

$$\mathbf{g} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^T (\Xi_U^M)^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega - \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \Xi_{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (4.21)$$

$$(\mathbf{K}_t)_e = \int_{V_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \Xi_{\varepsilon}^T \mathbf{C}_t \Xi_{\varepsilon} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} dV, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{F}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^T (\Xi_U^M)^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega. \quad (4.23)$$

A integração é feita recorrendo à regra de quadratura de Gauss, com três pontos de integração em x e um número variável de pontos em y e z , conforme discutido de seguida. Para a subsequente análise de bifurcação considera-se que as tensões variam pouco na espessura, pelo que se admite que $S_{xx} \approx S_{xx}^M$ e $S_{xy} \approx S_{xy}^M$ e, assim, apenas são guardadas as tensões de membrana (tensões na superfície média das paredes, o que implica considerar um número ímpar de pontos de integração na espessura para obter os respetivos valores diretamente). Na direção y , os pontos a utilizar dependem dos modos de deformação considerados para a determinação das cargas de bifurcação e respetivos modos de instabilidade, remetendo-se para a próxima Secção a discussão do número de pontos de integração necessários.

Devido à natureza fisicamente não-linear do problema, a determinação do estado de tensão de pré-encurvadura requer a utilização de um processo incremental-iterativo. Para tal recorreu-se ao método de Newton-Raphson, tal como no Capítulo anterior.

Caso seja necessário contabilizar os efeitos da fluência, retração e sequência de construção, estes devem ser incluídos na análise de pré-encurvadura. Para tal, deve ser realizada uma análise de pré-encurvadura para cada efeito/etapa construtiva, guardando as respetivas tensões de pré-encurvadura (recorde-se que apenas se guardam as componentes σ_{xx}^M e σ_{xy}^M), as quais são depois somadas para determinar as cargas de bifurcação e respetivos modos de instabilidade. Esta simplificação é aceitável se a zona fendilhada devido a ε_{xx} (recorde-se que é esta componente que afeta a lei constitutiva) for aproximadamente igual em todas as análises.

4.3.3 Análise de bifurcação

A análise de bifurcação é realizada através da resolução numérica do problema de valores e vetores próprios dado pela equação (2.54). Neste caso as equações escrevem-se em termos das deformações de Green-Lagrange \mathbf{E} e das segundas tensões de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} , muito embora apenas se retenham as componentes de deformação de membrana não-lineares E_{xx}^M e E_{xy}^M (e as respetivas tensões conjugadas S_{xx}^M e S_{xy}^M) — para as restantes componentes consideraram-se pequenas deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ e as respetivas tensões $\boldsymbol{\sigma}$. Apesar de se adotar novamente $\varepsilon_{yy}^M = \sigma_{yy}^M = 0$, são agora desenvolvidas tensões/deformações de flexão transversal σ_{yy}^F , ε_{yy}^F e torção σ_{xy}^F , ε_{xy}^F , devido à deformação da secção no seu próprio plano.

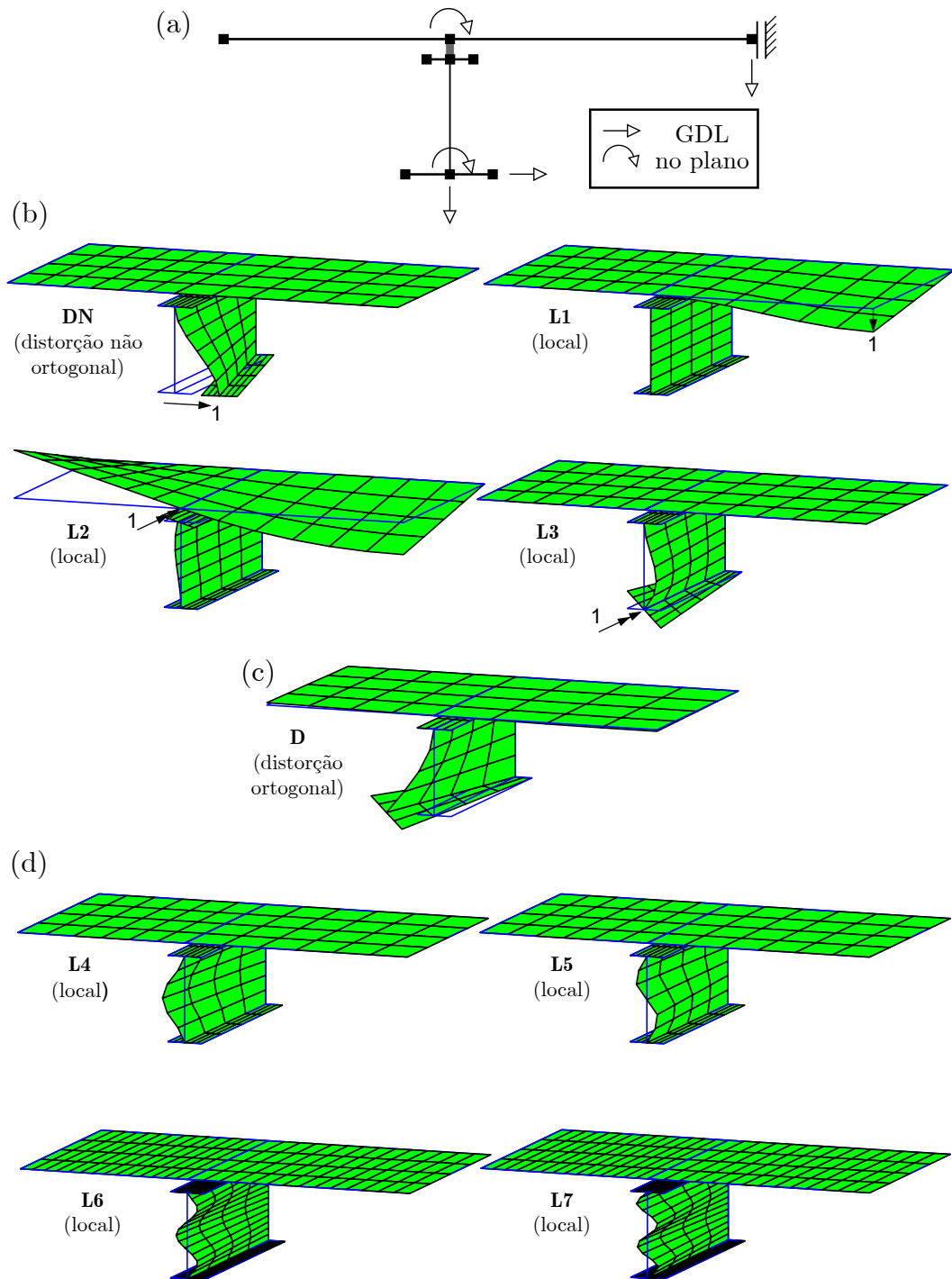


Figura 4.11: Encurvadura de vigas mistas aço-betão: (a) graus de liberdade no plano da secção para a análise de bifurcação, (b) respetivos modos de deformação, (c) modo de deformação distorcional “ortogonal” e (d) modos locais na alma do perfil.

Os modos de deformação apresentados na figura 4.9(c) devem agora ser complementados com modos adicionais que sejam capazes de capturar a deformação da secção transversal devido à encurvadura local e distorcional. Estes modos são obtidos a partir dos cinco graus de liberdade representados no modelo estrutural da figura 4.11(a), os quais foram definidos tendo em conta que se admite que (i) $\varepsilon_{yy}^M = 0$ e que (ii) o deslocamento vertical da extremidade livre da laje não constitui um GDL independente. Note-se que, ao contrário da abordagem clássica da GBT, (i) são considerados graus de liberdade de rotação (na abordagem clássica estes são condensados) e não é realizada nenhuma ortogonalização dos modos, o que apresenta uma vantagem importante: os modos de deformação tornam-se independentes da rigidez transversal das paredes, o que facilita a compatibilização entre elementos com diferentes secções transversais, conforme se verá no exemplo 4.4.3.1. No entanto, a participação dos modos ortogonalizados, nomeadamente do modo distorcional representado na figura 4.11(c), pode ser obtida efetuando uma simples mudança de base da solução.

Tendo em conta os GDL da figura 4.11(a), são obtidos os quatro modos da figura 4.11(b) mais os modos de flexão e corte na alma. É importante referir que, na determinação do modo L2, o grau de liberdade associado a L1 é considerado livre para obter um modo em que a flexão da laje não se encontra restringida (um pouco mais à frente explica-se mais claramente a motivação para a definição deste modo). O modo DN na figura 4.11(b) é designado de “distorcional” devido ao facto de envolver o movimento lateral e, consequentemente, o empenamento do banzo inferior do perfil de aço (relembre-se que $\bar{u}_{k,y}(y) = -\bar{v}_k(y)$ em virtude da hipótese de Vlasov) e ainda de “não-ortogonal” visto a respetiva função de empenamento não estar ortogonalizada face à dos modos de extensão axial e flexão. Na verdade, o modo L2 também apresenta deslocamentos de empenamento no banzo superior, uma vez que envolve a rotação no nó de ligação entre as duas paredes de betão e, portanto, causa o deslocamento lateral neste banzo (e, consequentemente, o seu empenamento).

O modo distorcional ortogonalizado (D) está ilustrado na figura 4.11(c) e, juntamente com os modos de extensão axial e flexão, completa o conjunto de “modos naturais de Vlasov” (Gonçalves e Camotim, 2010; Gonçalves et al., 2010a). O modo D corresponde a uma combinação linear dos modos ND, L2 e L3 — note-se que o modo L1 não é necessário para definir o modo D, o que constituiu precisamente a motivação para adotar a condensação do grau de liberdade de L1 em L2.

De forma a complementar os modos já referidos, foi escolhido um conjunto de modos locais associados à encurvadura local da alma. Estes modos, designados de L4 a L7, são dados por polinómios de grau crescente, exibindo deslocamentos e rotações nulas nas

intersecções alma/banzo. Os polinómios são dados por $\bar{w}_k = f_k/\max(f_k)$, com

$$f_4 = y^2(y - h_w)^2, \quad (4.24)$$

$$f_5 = y^2(y - h_w)^2(y - h_w/2), \quad (4.25)$$

$$f_6 = y^2(y - h_w)^2(y - h_w/3)(y - 2h_w/3), \quad (4.26)$$

$$f_7 = y^2(y - h_w)^2(y - h_w/4)(y - h_w/2)(y - 3h_w/4), \quad (4.27)$$

sendo os respetivos modos ilustrados na figura 4.11(d).

No Capítulo anterior a participação modal foi analisada recorrendo às funções de amplitude associadas a cada modo. Uma forma alternativa para quantificar a participação modal consiste em calcular a energia de deformação linear associada. A contribuição de cada modo para a energia de deformação é dada por

$$P_k[\%] = 100 \times \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{K}_t \mathbf{d}_k}{U}, \quad (4.28)$$

onde \mathbf{d}_k é um vetor onde apenas os graus de liberdade associados ao modo k são considerados, \mathbf{K}_t é a matriz de rigidez tangente, cuja expressão será apresentada um pouco mais à frente, e U é a soma da contribuição de todos os modos, ou seja,

$$U = \sum_k U_k = \frac{1}{2} \sum_k \mathbf{d}_k^T \mathbf{K}_t \mathbf{d}_k. \quad (4.29)$$

Note-se que U não corresponde à verdadeira energia de deformação, uma vez que os modos não são ortogonais em relação à matriz \mathbf{K}_t .

Uma vez que as análises de bifurcação são realizadas com o modo DN em substituição do modo D, conforme foi já referido, o vetor dos graus de liberdade é pós-processado para obter a participação do modo D, sendo esta tarefa especialmente importante para a análise do comportamento estrutural do problema. Este pós-processamento é realizado através do cálculo do modo D, de acordo com Gonçalves e Camotim (2010), e da projeção da solução no novo espaço do modo de deformação. Pode ser feito um procedimento semelhante relativamente aos modos L1-L3, que podem ser substituídos por modos ortogonais, mas decidiu-se não prosseguir este caminho pois estes modos já fornecem uma interpretação clara dos resultados, *i.e.*, cada um dos modos está associado a um tipo de deformação específica.

Relativamente às leis constitutivas adotadas, considera-se para o aço uma lei elástica linear, possibilitando o desacoplamento entre termos de membrana e flexão, assim como a integração analítica na espessura. Assim, as matrizes constitutivas para os termos de membrana e flexão são dadas por

$$\bar{\mathbf{C}}_{ta}^M = \begin{bmatrix} E_a t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_a t \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{ta}^F = D_{fa} \begin{bmatrix} 1 & \nu_a & 0 \\ \nu_a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_a}{2} \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

onde $D_{fa} = \frac{E_a t^3}{12(1-\nu_a^2)}$ e note-se que a matriz para os termos de flexão corresponde a um estado plano de tensão, em virtude da flexão transversal das paredes.

Para cada camada de armadura longitudinal considera-se apenas a componente de membrana e a integração na espessura fornece

$$\bar{\mathbf{C}}_{tsx}^M = \begin{bmatrix} E_s A_{sx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{tsx}^F = \mathbf{0}. \quad (4.33)$$

As armaduras transversais estão incluídas nas paredes de betão, como se explica de seguida.

O efeito de Poisson no betão é desprezado, devido à fendilhação da laje, e a matriz constitutiva tangente é dada por

$$\mathbf{C}_{tc} = \begin{bmatrix} E_{tcx} & 0 & 0 \\ 0 & E_{tcy} & 0 \\ 0 & 0 & \beta G_c \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

onde E_{tcx} é zero caso $\varepsilon_{xx} > 0$, tendo sido calculado previamente, na análise de pré-encurvadura. É possível eliminar o acoplamento membrana/flexão e integrar na direção da espessura caso se considere o seguinte:

- (i). E_{tcx} é constante na espessura da laje, calculado na sua superfície média.
- (ii). Na direção transversal y , a laje pode estar fendilhada (de acordo com o prescrito no EC4) ou não-fendilhada. Ao admitir deformações de membrana transversais nulas, a integração direta na espessura leva a soluções mais rígidas uma vez que o eixo neutro não está localizado em $z = 0$. No entanto, basta especificar a rigidez de flexão transversal adequada, designada de D_{fcy} , para ultrapassar este problema. Note-se que as armaduras transversais podem ser tidas diretamente em conta na determinação de D_{fcy} .
- (iii). β é constante em toda a laje, tal como considerado na análise de pré-encurvadura.

Pelo exposto, as matrizes constitutivas ficam então

$$\bar{\mathbf{C}}_{tc}^M = \begin{bmatrix} E_{tcx} h_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G_c h_c \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{tc}^F = \begin{bmatrix} \frac{E_{tcx} h_c^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & D_{fcy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta G_c h_c^3}{12} \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

com E_{tcx} calculado apenas para $z = 0$.

O termo geometricamente não-linear da equação de bifurcação (2.54) é também integrado na da espessura e , recorde-se, apenas são considerados os termos não-lineares de membrana. Assim, para as tensões longitudinais de pré-encurvadura tem-se

$$\int \Delta \delta E_{xx} \lambda S_{xx} dz = \delta \phi_{,x}^T (\bar{v} \bar{v}^T + \bar{w} \bar{w}^T) t \lambda S_{xx}^M \Delta \phi_{,x}^T. \quad (4.37)$$

Para as tensões de corte, apenas a contribuição da alma é considerada. Tendo em conta que $\bar{v}_{k,y} = 0$ devido à hipótese $\varepsilon_{yy}^M = 0$, obtém-se

$$\int 2 \Delta \delta E_{xy} \lambda S_{xy} dz = (\delta \phi_{,x}^T \bar{w}_{,y} \bar{w}^T \Delta \phi_{,x} + \delta \phi_{,x}^T \bar{w} \bar{w}_{,y}^T \Delta \phi) t \lambda S_{xy}^M. \quad (4.38)$$

Para a formulação do elemento finito segue-se a interpolação adotada na análise de pré-encurvadura, muito embora sejam considerados mais modos de deformação. Para estes modos adicionais são usados polinómios cúbicos de Hermite e, portanto, são adicionados $4 \times 8 = 32$ graus de liberdade em relação à análise de pré-encurvadura.

O problema discretizado de valores e vetores próprios é dado por

$$(\mathbf{K}_t + \lambda \mathbf{G}) \Delta \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (4.39)$$

sendo as matrizes de rigidez tangente e geométrica elementares dadas por,

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_t)_e &= \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \left((\Xi_\varepsilon^M)^T \bar{C}_t^M (\Xi_\varepsilon^M) + (\Xi_\varepsilon^F)^T \bar{C}_t^F (\Xi_\varepsilon^F) \right) \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T d\Omega, \\ \mathbf{G}_e &= \int_{\Omega_e} t S_{xx}^M \Psi_{,x}^T (\bar{v} \bar{v}^T + \bar{w} \bar{w}^T) \Psi_{,x} d\Omega + \int_{\Omega_e} t S_{xy}^M (\Psi^T \bar{w}_{,y} \bar{w}^T \Psi_{,x} + \Psi_{,x}^T \bar{w} \bar{w}_{,y}^T \Psi) d\Omega, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$(4.41)$$

devendo ser lembrado que a integração é apenas realizada na superfície média das paredes. A integração é feita com 3 pontos de integração em x (tal como na análise de pré-encurvadura) e um número de pontos em y que verifique a integração do termo $S_{xx}^M \bar{w}_k^2$ em cada parede, dado que este é o termo de grau mais elevado da equação (4.41). Por exemplo, para a alma do perfil, devido ao modo L7 envolver um polinómio do sétimo grau e ao facto das tensões de membrana S_{xx}^M serem lineares nesta parede, é necessário integrar uma função do 15º grau, o que requer a utilização de 8 pontos de integração.

O programa foi implementado em MATLAB.

4.4 Exemplos de aplicação e validação

Nesta secção são apresentados e discutidos vários exemplos de aplicação e validação do elemento finito proposto. Para efeitos de validação são obtidos resultados pelos métodos das faixas finitas (programa CUFSM, Li e Schafer, 2010) e elementos finitos de casca de 4 nós MITC (programa ADINA, Bathe, 2019).

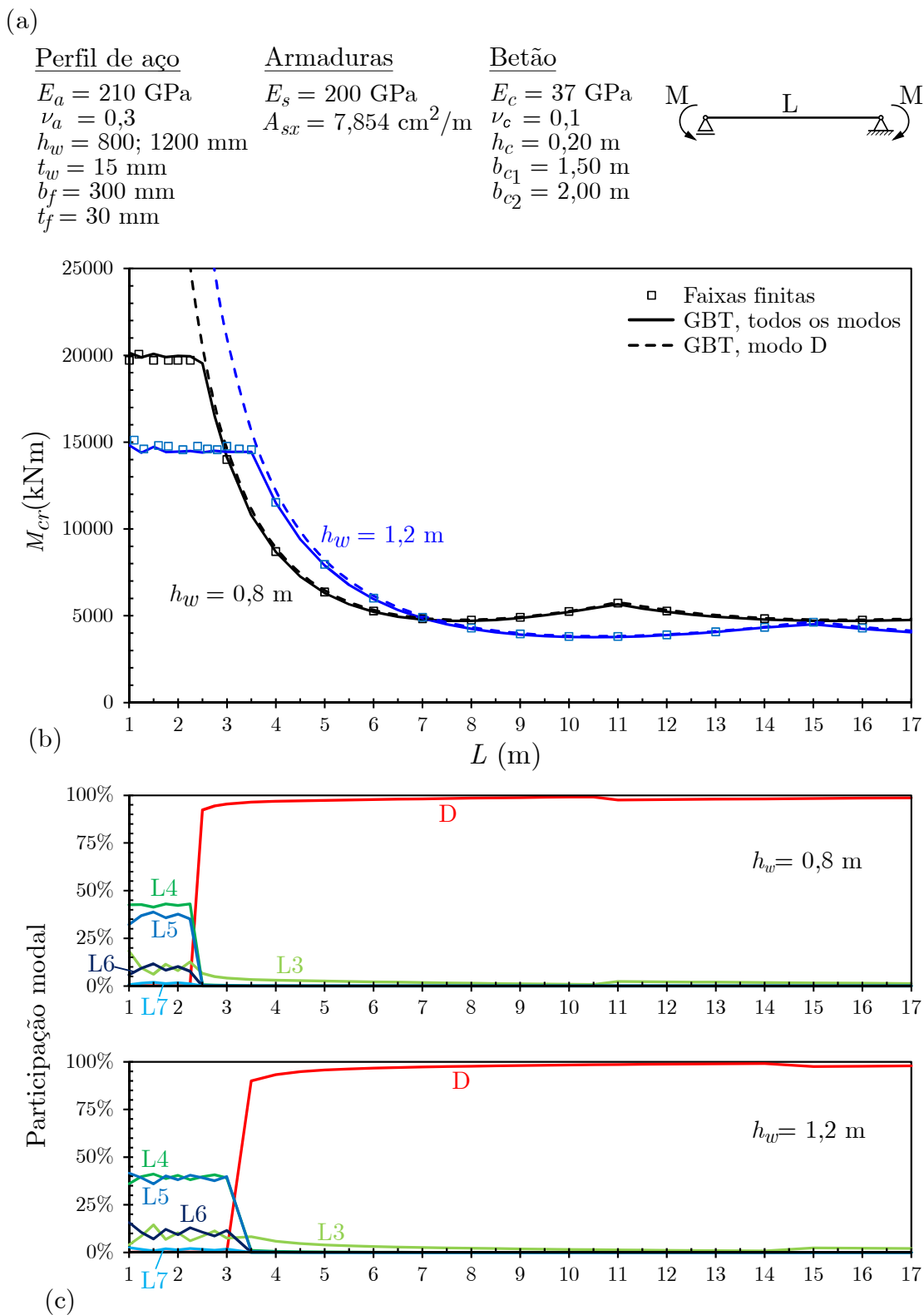


Figura 4.12: Viga mista simplesmente apoiada sujeita a momento negativo: (a) geometria, carregamento e propriedades do material, (b) gráfico momento crítico - comprimento e (c) participação modal.

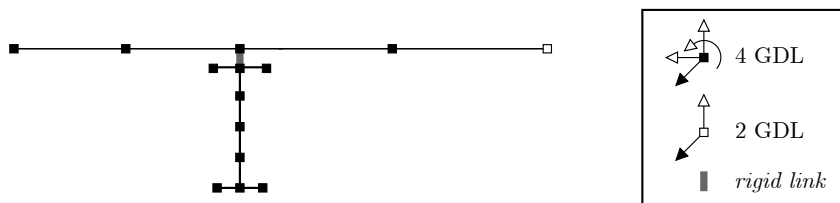


Figura 4.13: Viga mista simplesmente apoiada sujeita a momento negativo: discretização da secção para aplicação do método das faixas finitas.

4.4.1 Viga mista simplesmente apoiada sujeita a momento negativo

No primeiro exemplo é analisada uma viga simplesmente apoiada sujeita a momento negativo constante. As propriedades dos materiais, o carregamento e a geometria do problema são dados na figura 4.12(a). São consideradas duas alturas distintas para a alma do perfil (h_w) e o comprimento da viga é variado entre 1 e 17 m. Assume-se que a armadura se localiza na linha média da laje, que o betão não fendilha por flexão transversal (não existem fendas longitudinais) e, como tal, despreza-se a contribuição da armadura transversal para a rigidez de flexão transversal da laje, D_{fcy} .

Como a viga está sujeita a um momento negativo constante, não existem tensões tangenciais na análise de pré-encurvadura e a laje encontra-se totalmente fendilhada na direção longitudinal (fendas transversais). Assim, a análise de pré-encurvadura pode ser efetuada sem os modos C, SL e SQ. Para a análise de bifurcação, são adicionados os modos DN e L1-L7 ao conjunto dos utilizados na análise de pré-encurvadura. A viga é discretizada usando 10 elementos finitos de igual comprimento. São utilizados 5 pontos de integração ao longo de y e z , em cada parede⁴.

Neste caso particular, o programa de faixas finitas CUFSM permite a obtenção de soluções muito precisas, dado que utiliza funções de amplitude sinusoidais segundo x , as quais constituem a solução exata para barras simplesmente apoiadas sujeitas a um estado de tensão com apenas $\sigma_{xx} \neq 0$ e constante segundo x (é precisamente o que se verifica no caso em análise). Assim, os resultados obtidos com este programa são utilizados para efeitos de comparação. Neste caso a secção foi discretizada em 14 “linhas nodais” (na nomenclatura utilizada no contexto das faixas finitas) e note-se que o *rigid link* também é incluído, conforme ilustrado na figura 4.13, o que equivale a considerar $4 \times 12 + 1 \times 2 = 50$ GDL da secção (muito mais do que o considerado nas análises da GBT).

O gráfico da figura 4.12(b) mostra a evolução do momento crítico com o aumento do vão e os gráficos da figura 4.12(c) permitem observar as respetivas participações modais, obtidas através do critério de energia de deformação (ver expressões (4.28) e (4.29)). São ainda representados, na figura 4.14, alguns modos de instabilidade representativos, obtidos com a GBT.

Observa-se que os momentos críticos obtidos com a GBT são praticamente coincidentes

⁴Verificou-se que a utilização de 8 pontos não alterava os resultados.

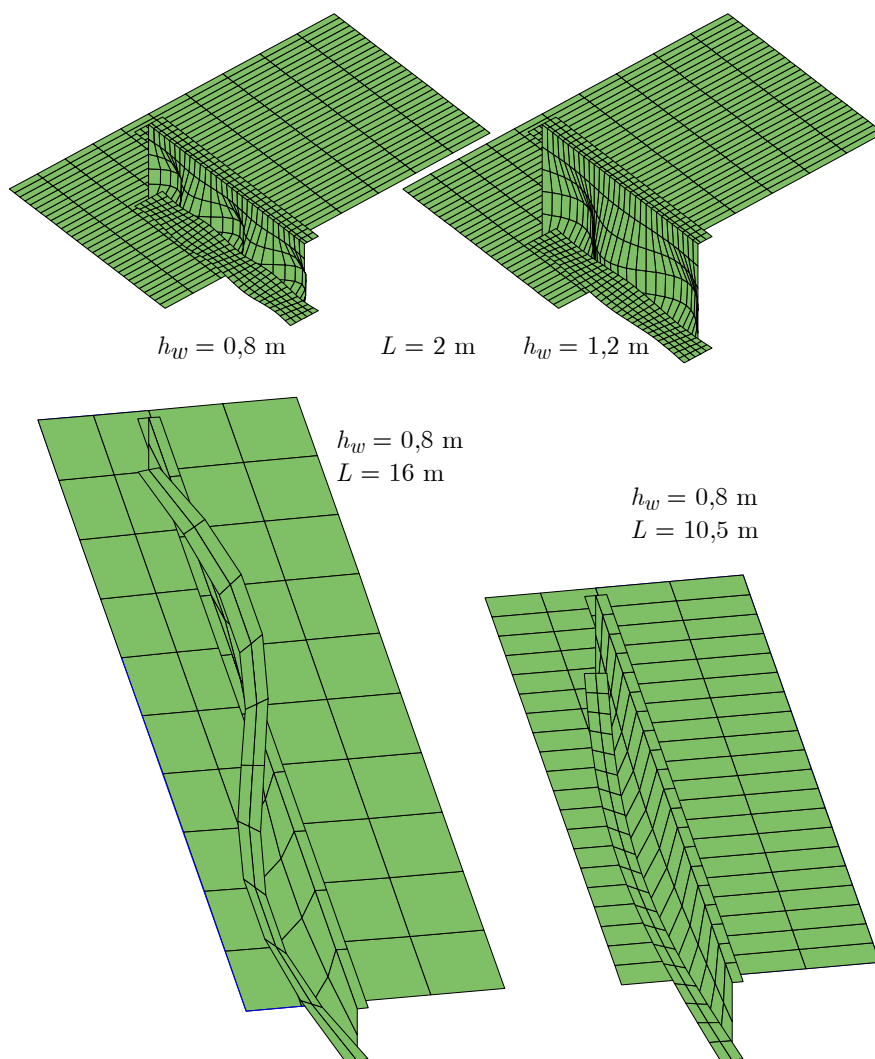


Figura 4.14: Viga mista simplesmente apoiada sujeita a momento negativo: modos de instabilidade para $L = 2$, $L = 10,5$ e $L = 16$ m.

com os obtidos com o CUFSM para todos os vãos considerados, indicando que o conjunto dos modos de deformação escolhidos é apropriado para o problema em análise, muito embora sejam muito menos (12) do que os GDL utilizados no CUFSM (50).

Estes resultados mostram, como esperado, que a encurvadura local é caracterizada por semi-comprimentos de onda muito pequenos, enquanto a encurvadura distorcional está associada a maiores semi-comprimentos, sendo crítica para vãos com interesse prático.

Os diagramas de participação modal permitem concluir que a encurvadura local tem contribuições importantes dos modos L4 e L5, mas também de L3 e L6. Por outro lado, a instabilidade distorcional corresponde essencialmente ao modo D, com uma participação muito pequena do modo L3. Note-se que o modo L3 é o único a participar em ambos os modos de instabilidade.

As curvas a traço interrompido no gráfico figura 4.12(b) correspondem a ALEs realizadas apenas com o modo D. Observa-se que, para os vãos em que a instabilidade distorcional é

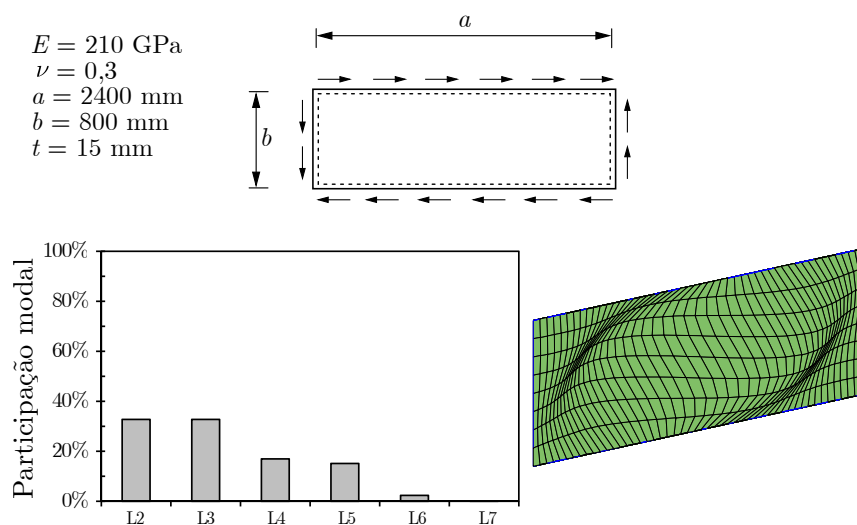


Figura 4.15: Placa simplesmente apoiada sujeita ao corte puro.

crítica, estas curvas praticamente coincidem com as obtidas com todos os modos, mostrando que, neste caso particular, o modo de deformação D é suficiente para obter resultados muito precisos para o modo de instabilidade distorcional.

É ainda de referir que os resultados mostram que o aumento da altura da alma h_w influencia significativamente o momento crítico local (como seria de esperar), mas tem impacto reduzido no momento crítico distorcional para vãos maiores, muito embora a transição entre modos com 1 e 2 semi-comprimentos de onda ocorra para vãos consideravelmente diferentes (11 m para $h_w = 0.8 \text{ m}$ e 15 m para $h_w = 1.2 \text{ m}$).

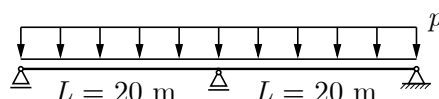
4.4.2 Placa simplesmente apoiada sujeita ao corte puro

Este exemplo tem como objetivo avaliar a precisão do elemento finito proposto num problema clássico de encurvadura de uma placa retangular sujeita ao corte puro. A placa encontra-se simplesmente apoiada em todos os bordos, conforme ilustrado na figura 4.15. A tensão de corte crítica pode ser geralmente expressa como (ver, por exemplo, Reis e Camotim, 2012)

$$\tau_{cr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2, \quad (4.42)$$

onde a , b , e t são o comprimento, a altura e a espessura da placa, respetivamente, e k é o coeficiente de encurvadura, cujos valores se encontram tabelados para vários casos de carga e apoio (Reis e Camotim, 2012). Para uma relação $a/b = 3$, usando o programa EBPlate (Galéa e Martin, 2007), o qual utiliza o Método de Rayleigh-Ritz, obtém-se $k = 5,840$ para o problema em análise.

As análises da GBT foram conduzidas apenas com a alma do perfil de aço, com $h_w = b$, $t_w = t$ e $L = a$. A integração é feita de acordo com o referido nas secções 4.3.2 e 4.3.3, com 3 pontos de integração em x , 8 pontos em y e 1 ponto em z . Além disso, apenas os modos L2-L7 da figura 4.11 são incluídos na análise. Os resultados obtidos com apenas



<u>Perfil de aço</u>	<u>Armaduras</u>	<u>Betão</u>
$E_a = 210 \text{ GPa}$	$E_s = 200 \text{ GPa}$	$E_c = 37 \text{ GPa}$
$\nu_a = 0,3$	$A_{sx} = 1,5 \%$	$\nu_c = 0$
$h_w = 800 \text{ mm}$	$A_{sy} = 1,5 \%$	$h_c = 0,20 \text{ m}$
$t_w = 15, 30 \text{ mm}$		$b_{c1} = 1,50 \text{ m}$
$b_f = 300 \text{ mm}$		$b_{c2} = 2,00 \text{ m}$
$t_f = 30 \text{ mm}$		

Figura 4.16: Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: geometria, carregamento e propriedades dos materiais.

dois elementos finitos são superiores em 4,4% aos obtidos com o EBPlate e diferem em menos de 1% caso sejam usados cinco ou mais elementos.

A figura 4.15 mostra as participações modais (critério de energia de deformação) e o modo de instabilidade obtidos com 6 elementos finitos. É possível verificar que os dois modos de deformação L2 e L3 são os mais relevantes, muito embora os modos L4 e L5 tenham uma participação significativa. Os modos L6 e L7 têm participações muito reduzidas. Relativamente ao modo de instabilidade, este apresenta duas semi-ondas sensivelmente inclinadas a 45 graus, o que é típico para uma placa sujeita a corte puro (Timoshenko e Gere, 2009).

4.4.3 Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído

Nesta Secção, a viga contínua de dois vãos da figura 4.16 é analisada adotando várias hipóteses. A viga é sujeita a uma carga vertical uniformemente distribuída a atuar no plano da alma do perfil de aço. Os parâmetros geométricos e materiais são fornecidos na figura. Realça-se que se consideram duas espessuras distintas para a alma do perfil — apesar de $t_w = 30 \text{ mm}$ ser irrealista do ponto de vista prático, este valor foi considerado por se tratar de um caso limite, com uma alma muito espessa. Os três apoios restringem totalmente os deslocamentos no plano da secção transversal (incluindo os da laje), apesar de o empenamento ser permitido. É importante referir que o problema é significativamente mais complexo que os anteriores, uma vez que as tensões de pré-encurvatura variam rapidamente ao longo do comprimento da viga e a encurvatura é localizada perto do apoio de continuidade. Foram utilizados 3 pontos de integração segundo x , 8 pontos segundo y e 5 pontos segundo z .

A análise de pré-encurvatura com a GBT é realizada recorrendo a uma simplificação de simetria, enquanto que a análise de bifurcação admite uma anti-simetria dos modos de instabilidade em relação ao apoio de continuidade. Assim, é possível analisar apenas um vão, reduzindo significativamente o número de GDL do problema.

Para efeitos de comparação, são fornecidos resultados obtidos com malhas refinadas de elementos finitos de casca MITC de 4 nós, utilizando o programa *ADINA* (Bathe, 2019) (53000 GDL). Nestes modelos, o banzo superior do perfil de aço é conectado à laje com *rigid links* (não é permitido o escorregamento) e os dois vãos são modelados, dado que não é possível adotar as simplificações de simetria/anti-simetria efetuadas no modelo de elementos finitos da GBT. Nos apoios, os deslocamentos no plano da secção transversal estão impedidos e o deslocamento longitudinal da laje de betão e do banzo inferior do perfil são permitidos. É de notar que neste modelo surgem tensões de pré-encurvadura σ_{yy} perto do apoio, ao contrário do que sucede no modelo de elementos finitos da GBT, onde se admite que esta componente é nula (recordar Secção 4.3.2).

Antes de prosseguir, é importante salientar que a modelação com elementos de casca tendo em conta a influência da fendilhação do betão é consideravelmente mais complexa do que a efetuada com o elemento proposto, baseado na GBT. Em particular, para ter em conta a influência da fendilhação nas direções transversal e longitudinal, foi necessário adotar uma modelação “iterativa” e bastante morosa. A laje é modelada com elementos ortotrópicos onde a rigidez em cada direção é modificada caso se verifique que ocorre fendilhação (os parâmetros materiais são calculados de acordo com a equação (4.34), com $E_{tcx} = 0$ ou E_c (caso $\varepsilon_{xx}^M > 0$ ou < 0 , respetivamente) e $E_{tcy} = 12D_{fcy}/h_c^3$). Em acréscimo, os elementos de casca que simulam a laje de betão são sobrepostos a elementos (de casca) ortotrópicos que simulam o efeito da armadura longitudinal da laje (apenas possuem rigidez na sua direção). O perfil de aço é modelado com elementos de casca isotrópicos.

Para efetuar uma ALE com o modelo de elementos de casca, começa-se por efetuar análises lineares, seguindo um processo iterativo, determinando em cada passo a extensão da zona fendilhada e modificando em concordância as propriedades dos elementos afetados. O processo é repetido até que não haja diferenças significativas entre duas iterações consecutivas. Finalmente, com o modelo obtido, realiza-se a ALE para determinar as cargas de bifurcação e os respetivos modos de instabilidade. A título de exemplo, refira-se que, para o exemplo da secção 4.4.3.3, foram necessárias 3 iterações, partindo de um modelo onde se considera que o betão não se encontra fendilhado (na figura 4.17 são apresentados os 3 modelos).

4.4.3.1 Análise não-fendilhada

Em primeiro lugar, admite-se que a laje se encontra totalmente não-fendilhada e despreza-se a contribuição da armadura transversal e longitudinal. Nestas condições, o modelo de elementos finitos da GBT pode ser diretamente comparado com um modelo de elementos finitos de casca com material isotrópico.

Os resultados para $t_w = 15$ mm e $t_w = 30$ mm são fornecidos nas figuras 4.18 a 4.21. Nas figuras 4.18 ($t_w = 15$ mm) e 4.20 ($t_w = 30$), o gráfico superior mostra a evolução das cargas de bifurcação (p_b) associadas aos dois primeiros modos de instabilidade com o número de elementos finitos da GBT (de igual comprimento), considerando: (i) apenas

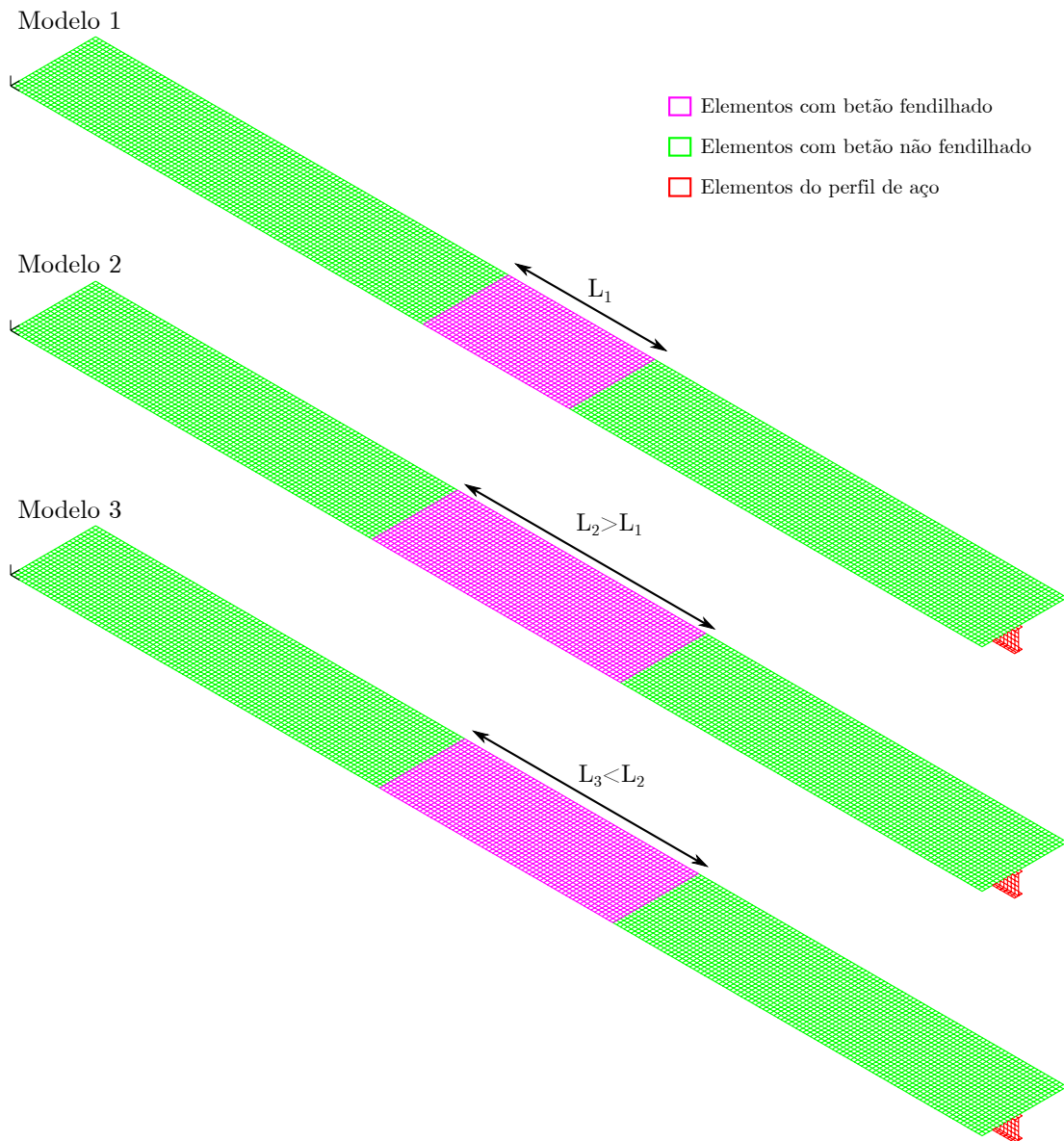


Figura 4.17: Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: modelação “iterativa”.

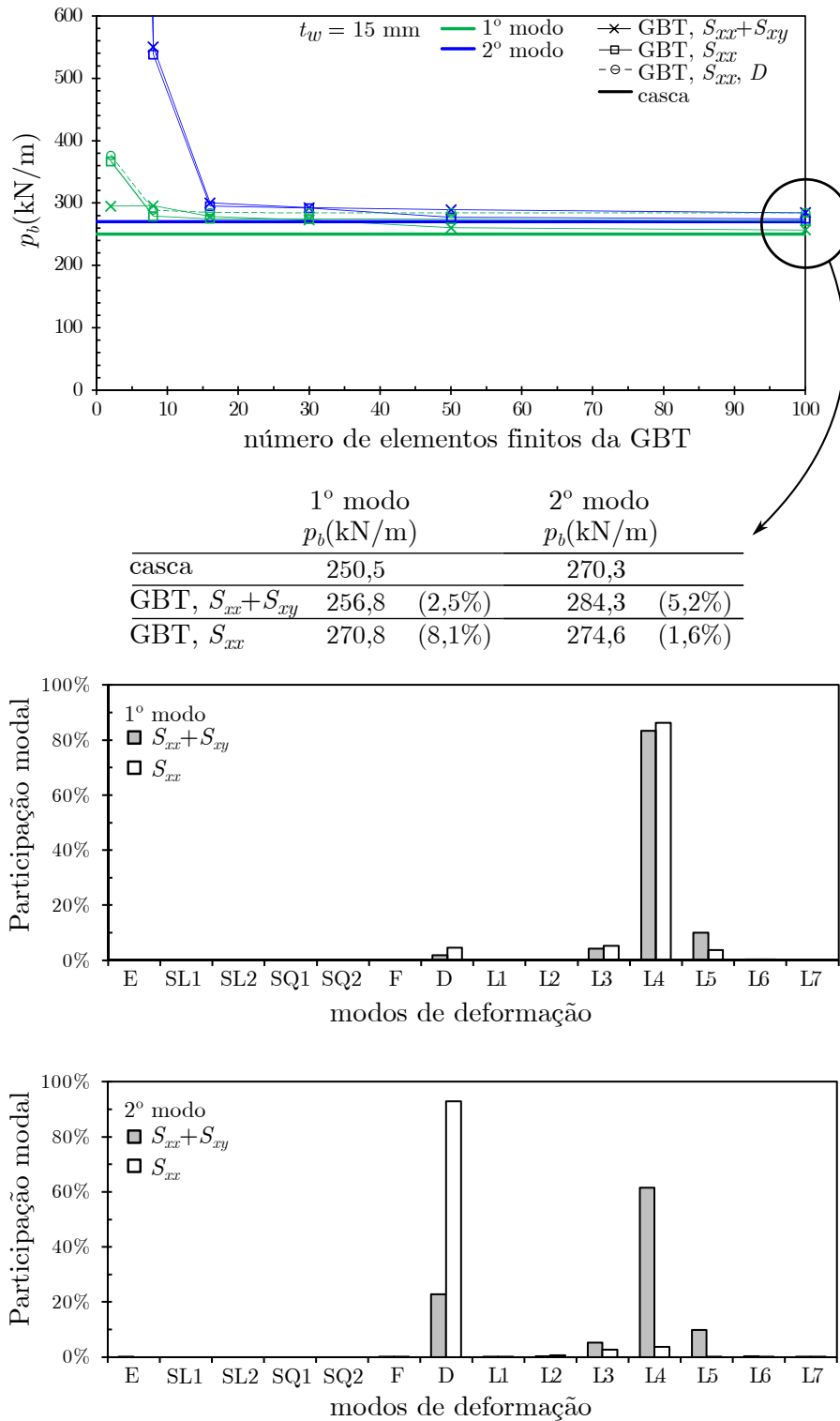


Figura 4.18: Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: cargas críticas e participações modais para a análise não-fendilhada ($t_w = 15 \text{ mm}$).

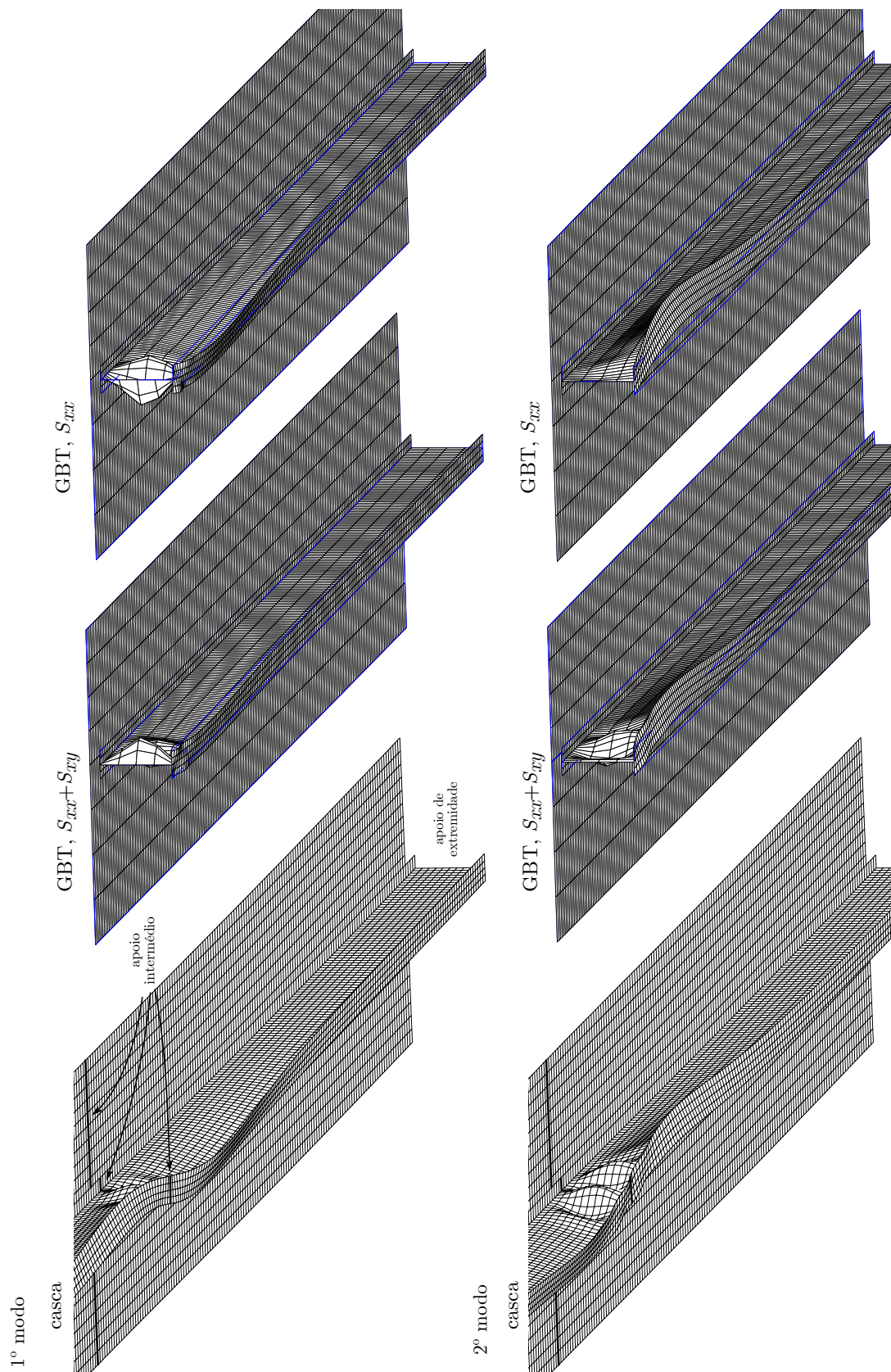


Figura 4.19: Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: modos de instabilidade obtidos na análise não-fendilhada ($t_w = 15$ mm).

tensões longitudinais de pré-encurvadura S_{xx} e todos os modos de deformação, (ii) S_{xx} , S_{xy} e todos os modos de deformação, e (iii) S_{xx} e todos os modos de deformação da figura 4.9(c) (análise de pré-encurvadura) e mais apenas o modo distorcional (D) da figura 4.11(c). Para efeitos de comparação, os resultados obtidos com os modelos de elementos de casca também são representados no gráfico (linhas horizontais espessas). As tabelas por baixo dos gráficos mostram os valores das cargas de bifurcação para os modelos da GBT (obtidas com aproximadamente 100 elementos finitos) e de elementos de casca. Além disso, são representadas as participações modais para cada modo de instabilidade (critério de energia de deformação), obtidas também com 100 elementos. Os modos de instabilidade são apresentados nas figuras 4.19 e 4.21— recorde-se que os modos de instabilidade da GBT mostram um único vão, enquanto que nos modelos de casca foi necessário modelar os dois vãos.

Em primeiro lugar, analisa-se a influência do número de elementos finitos da GBT na obtenção das cargas de bifurcação. Os gráficos superiores das figuras 4.18 e 4.20 mostram que 20-30 elementos já fornecem bons resultados, apesar de serem necessários mais elementos em alguns casos (nomeadamente para o segundo modo quando $t_w = 30$ mm). Estas discretizações são naturalmente superiores às utilizadas nos exemplos apresentados nas secções anteriores, devido ao problema em análise envolver uma complexidade muito superior (como já foi mencionado, ocorre uma forte variação das tensões de pré-encurvadura ao longo das vigas, contrariamente ao que se passava nos exemplos anteriores).

Para $t_w = 15$ mm (figura 4.18), a partir dos resultados dos modelos de elementos finitos de casca, regista-se que as primeiras duas cargas de bifurcação são bastante próximas — $p_b = 250,5$ e $270,3$ kN/m — e os respetivos modos de instabilidade combinam a distorção da secção transversal com a encurvadura local da alma. A presença desta última é algo surpreendente, visto a alma não ser particularmente esbelta⁵.

Em relação aos resultados da GBT para esta espessura ($t_w = 15$ mm), podem ser retiradas as seguintes conclusões:

- (i). As cargas de bifurcação da GBT obtidas com 100 elementos finitos e ambas as componentes de tensão de pré-encurvadura são 256,8 e 284,3 kN/m, ficando apenas ligeiramente acima dos valores fornecidos pelos modelos de elementos de casca (2,5% e 5,2%, respetivamente). Os modos de instabilidade correspondentes confirmam a semelhança entre estes modelos: são observadas algumas diferenças no caso do primeiro modo (a solução da GBT prevê uma deformação mais pronunciada da alma), mas relativamente ao segundo modo os resultados são muito semelhantes. Os diagramas de participação modal mostram que os modos de instabilidade têm uma grande participação dos modos de deformação local na alma do perfil (nomeadamente do modo L4), com o modo D a exibir também uma contribuição importante para o segundo modo de instabilidade (23%).

⁵De acordo com o EC4 e o EC3, para a secção considerada, se for utilizado um aço S235 ou S275, não é necessário verificar a resistência à encurvadura por esforço transversal.

4.4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO

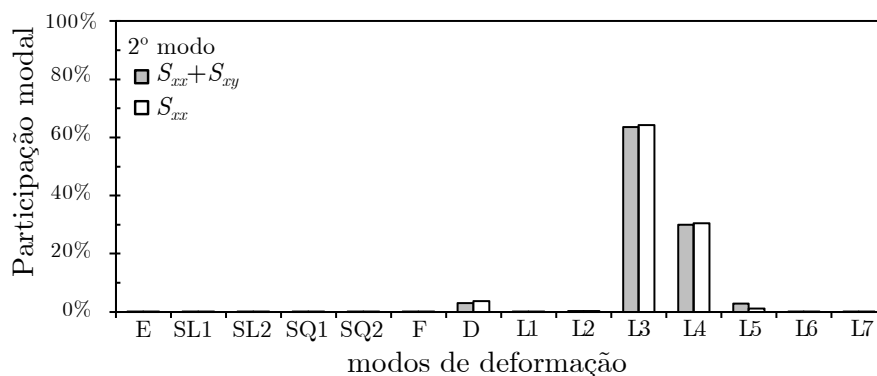
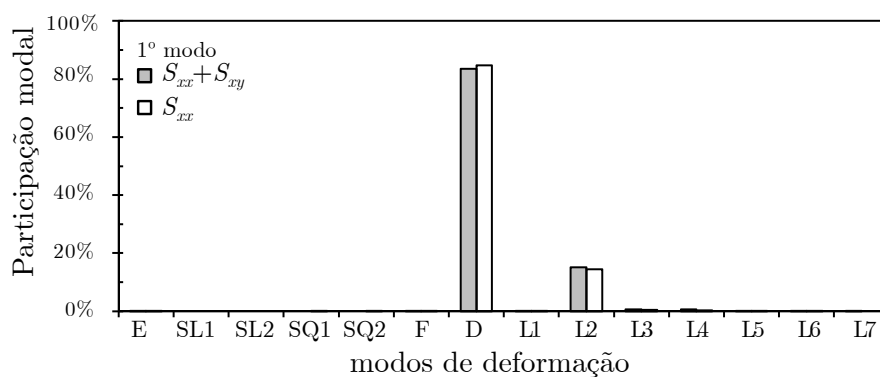
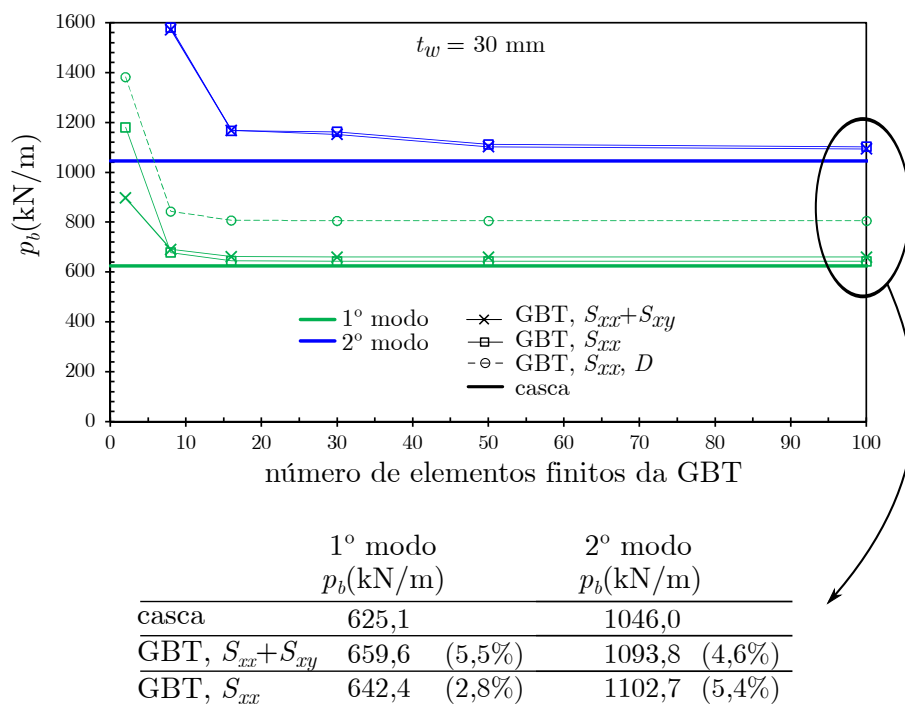


Figura 4.20: Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: cargas críticas e participações modais para a análise não-fendilhada ($t_w = 30 \text{ mm}$).

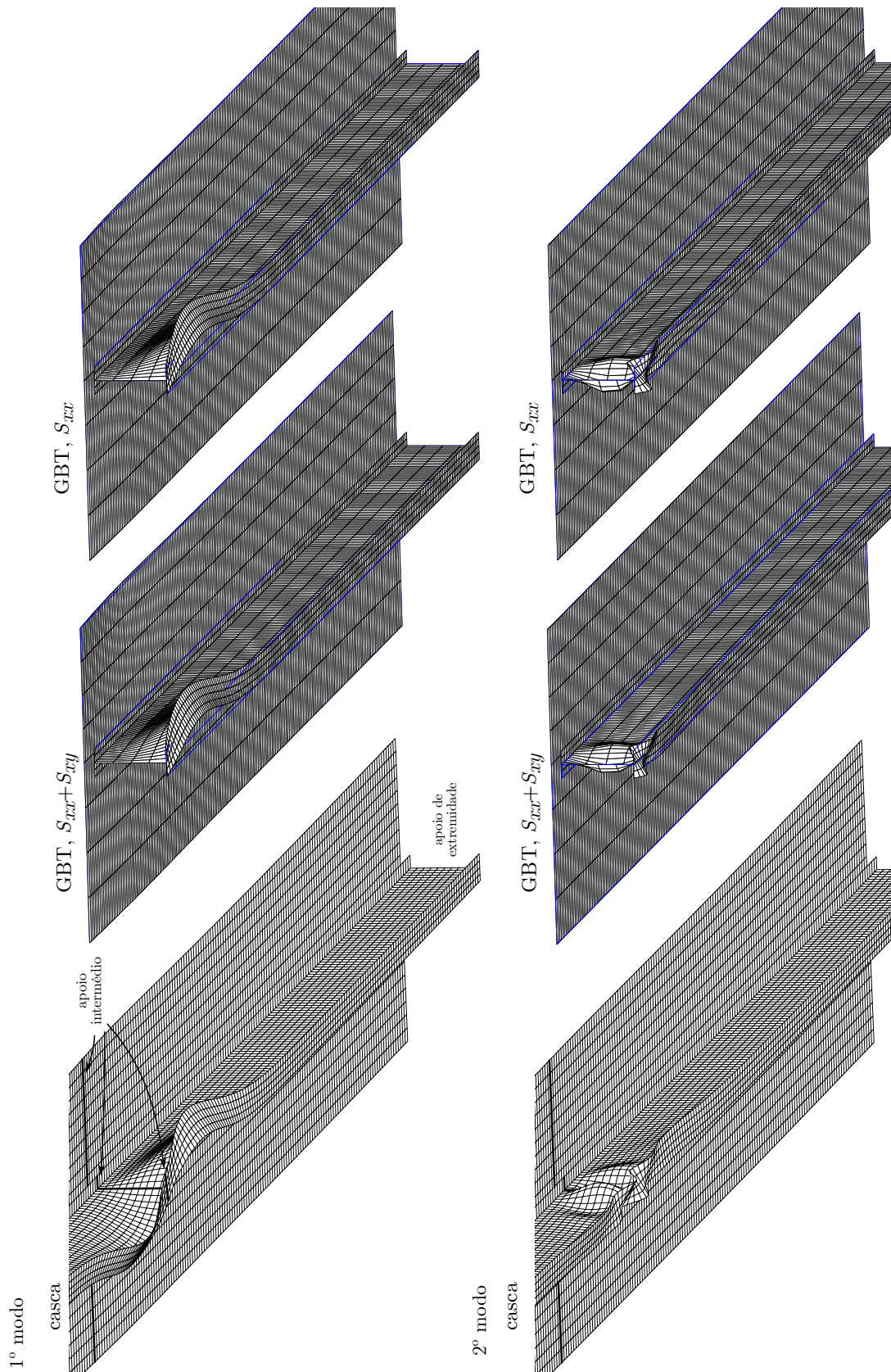


Figura 4.21: Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: modos de instabilidade obtidos na análise não-fendilhada ($t_w = 30$ mm).

- (ii). Considerando agora os resultados da GBT apenas com S_{xx} e incluindo todos os modos de deformação, observa-se que a primeira carga de bifurcação torna-se 8,1% superior à obtida com o modelo de elementos de casca, mesmo utilizando 100 elementos finitos e apesar de as participações modais e a configuração do modo de instabilidade serem semelhantes às obtidas com S_{xx} e S_{xy} . Este resultado mostra que, neste caso, ambas as tensões de pré-encurvatura devem ser incluídas nas análises, uma conclusão importante que não é referida no EC4.
- (iii). Em sentido inverso, a segunda carga de bifurcação do caso referido em (ii) está agora mais próxima da carga obtida com o modelo de elementos de casca (apenas 1,6% superior para 100 elementos). Apesar de tal parecer contradizer a conclusão do ponto (ii), a análise da configuração do modo de instabilidade e das participações modais revela que os modos L4-L5 quase desaparecem e que o modo de instabilidade se torna praticamente distorcional, o que não está de acordo com o obtido com o modelo de elementos de casca. Assim, embora a carga de bifurcação esteja mais próxima, o modo de instabilidade não é semelhante. A este respeito, não deve deixar de se salientar que *todos* os modelos considerados (GBT e elementos de casca) contêm aproximações, pelo que as diferenças registradas podem ser consideradas aceitáveis.
- (iv). Se as análises com a GBT forem realizadas com apenas S_{xx} e o modo D (mais os modos de pré-encurvatura), a primeira carga de bifurcação obtida com 100 elementos situa-se 13,6% acima do valor obtido com o modelo de elementos de casca, uma diferença apenas aceitável em certas circunstâncias (*e.g.*, pré-dimensionamento). Este resultado mostra que o modo distorcional por si só pode não ser suficiente para obter resultados precisos (neste caso, o modo L4 é o que mais participa na solução), contrariamente ao prescrito no EC4. É importante referir que o segundo modo é substancialmente sobrestimado ($p_b = 997,8$ kN/m, um valor fora da área do gráfico).

Para $t_w = 30$ mm, os resultados são apresentados na figura 4.20. Relativamente aos resultados obtidos com o modelo de elementos de casca, as cargas de bifurcação estão agora bastante afastadas ($p_b = 625,1$ e $1046,0$ kN/m) e o primeiro modo de instabilidade é essencialmente distorcional, enquanto que o segundo é local. Os resultados da GBT para esta espessura permitem tecer as seguintes conclusões:

- (i). Com ambas as componentes de tensão de pré-encurvatura, a primeira/segunda cargas de bifurcação para 100 elementos são 5,5/4,6 % superiores às cargas do modelo de elementos de casca e observa-se uma excelente aproximação entre modos de instabilidade. As participações modais confirmam que o primeiro modo é essencialmente distorcional (o modo L2 também tem participação significativa, evidenciando a rotação do banzo superior), enquanto que o segundo modo é local na alma do perfil, com uma pequena contribuição do modo distorcional (3 %).

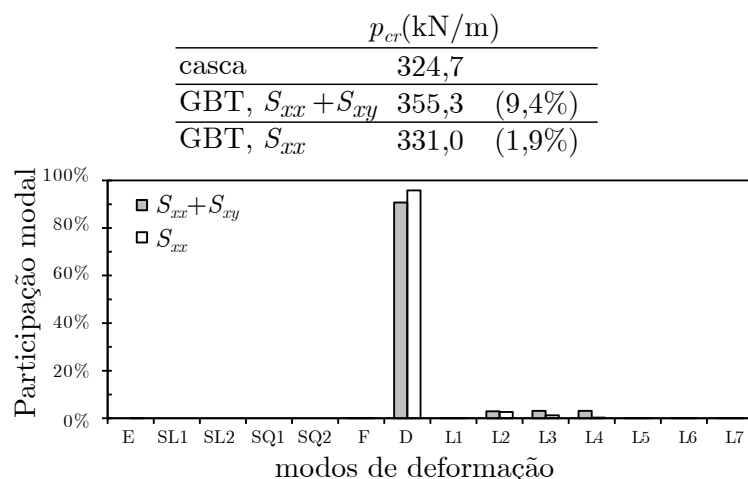


Figura 4.22: Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: cargas críticas e participações modais para a variação da espessura da alma.

- (ii). Contabilizando apenas S_{xx} , todos os modos de deformação e 100 elementos finitos, as cargas de bifurcação, as configurações dos modos de instabilidade e as participações modais são muito semelhantes às obtidas com as duas componentes de tensão de pré-encurvadura (S_{xx} e S_{xy}). No entanto, deve salientar-se que, tal como no caso com $t_w = 15$ mm, obtém-se uma carga de bifurcação ligeiramente inferior sem S_{xy} quando o modo de instabilidade tem uma participação importante do modo D (o primeiro modo de instabilidade para $t_w = 30$ mm; o segundo modo para $t_w = 15$ mm). Mesmo que as diferenças sejam bastante pequenas, é recomendável realizar os dois tipos de análise (com/sem S_{xy}).
- (iii). Com apenas S_{xx} e o modo D, a primeira carga de bifurcação com 100 elementos é cerca de 30% superior ao valor do modelo de EF de casca, o que não é aceitável. Esta diferença deve-se ao facto de o modo L2 ter uma participação significativa (ver gráfico de participação modal da figura 4.20). Novamente, a segunda carga de bifurcação fica fora da área do gráfico.

Uma nota final relativa ao número de GDL e tempos de cálculo. O modelo de elementos de casca tem aproximadamente 53000 GDL e demora aproximadamente 18 segundos a correr. Por outro lado, utilizando o programa implementado em MATLAB com o elemento finito proposto, para 25 elementos finitos e todos os modos de deformação, obtém-se 348 GDL na análise de pré-encurvadura e 750 GDL na análise de bifurcação. A execução da análise demora apenas 5,37 segundos (0,67 segundos na análise de pré-encurvadura e 4,70 segundos na análise de bifurcação).

4.4.3.2 Viga mista com variação da espessura da alma

Neste exemplo é demonstrado como a formulação proposta pode lidar com a alteração discreta da espessura da alma. Considera-se que a espessura desta parede é de 20 mm

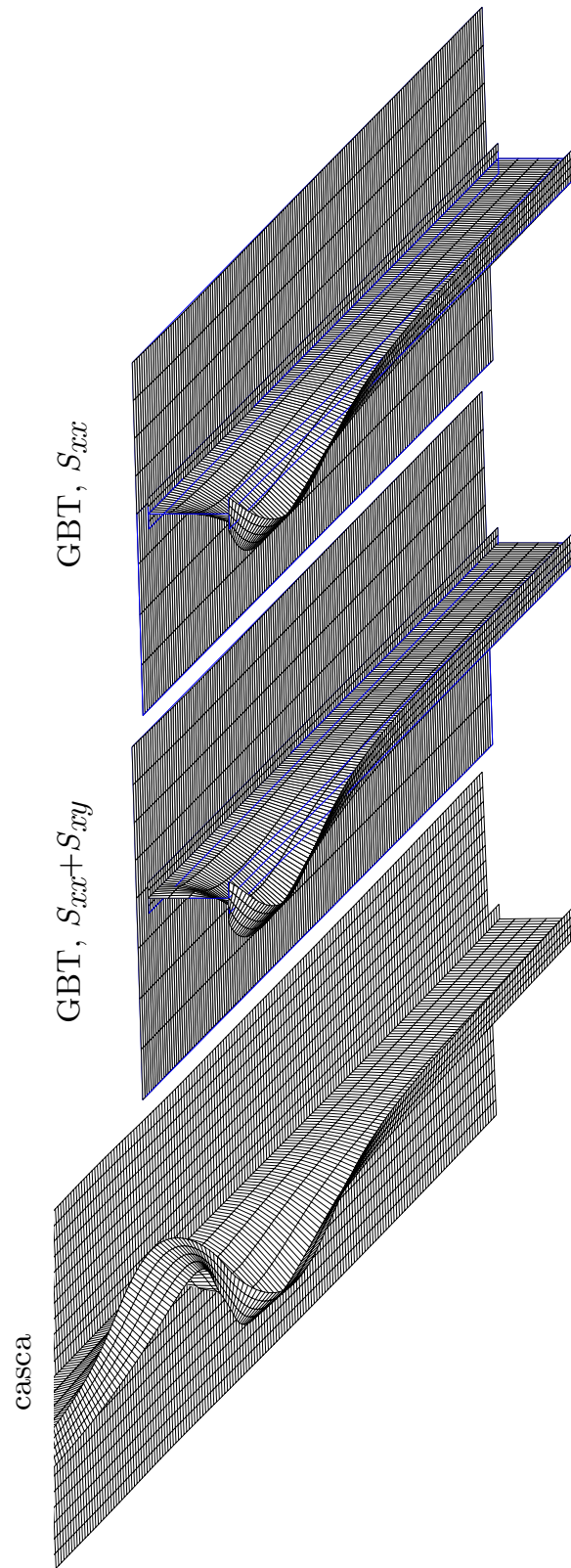


Figura 4.23: Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: modos de instabilidade resultantes da variação da espessura da alma.

desde o apoio intermédio até 3 m deste e 15 mm nas restantes zonas. Como no caso anterior, assume-se que a laje não se encontra fendilhada, desprezando-se, portanto, a contribuição da armadura.

Na análise com o elemento finito proposto, a compatibilidade entre elementos com espessuras de alma diferentes é automaticamente assegurada utilizando os modos das figuras 4.9(c) e 4.11(b) e (d). Relativamente ao modo de flexão (F), este é calculado para uma única espessura de alma, para evitar a utilização de equações de constrangimento (considerou-se $t_w = 20$ mm), e a solução é posteriormente projetada no espaço dos modos de deformação de flexão corretos (calculados com a espessura correta, tal como efetuado para obter a participação do modo distorcional ortogonal).

A figura 4.22 mostra as cargas críticas e a figura 4.23 as configurações dos respetivos modos de instabilidade, obtidas com o modelo de elementos de casca e com a GBT. Comparando estes resultados com os obtidos na Secção 4.4.3.1 para $t_w = 15$ mm (primeiro modo), verifica-se que: (i) a carga crítica é 30% superior e (ii) o modo torna-se essencialmente distorcional. Mais uma vez, os resultados obtidos com a GBT são muito próximos dos obtidos com o modelo de elementos de casca, em particular ao considerar $S_{xy} = 0$ (ou seja, mais uma vez se verifica que, caso o modo de deformação D tenha uma participação significativa, a carga crítica obtida com o elemento proposto é mais próxima da do modelo de elementos de casca ao se considerar $S_{xy} = 0$, tal como nos exemplos anteriores).

Para 80 elementos finitos, o modelo proposto contabiliza um total de 1118 GDL na análise de pré-encurvadura (demorando 3,2 segundos) e 2240 GDL na análise de bifurcação (157,6 segundos). É importante referir que a determinação dos valores e vetores próprios no MATLAB é relativamente dispendiosa, já que a determinação das matrizes de rigidez é extremamente rápida, demorando aproximadamente 3,6 segundos.

4.4.3.3 Análise fendilhada

Consideram-se agora os efeitos da fendilhação. Neste caso, o comprimento da região de momento negativo diminui e a encurvadura torna-se ainda mais localizada e afetada por concentrações de tensões perto do apoio intermédio, o que aumenta significativamente a complexidade do problema. A armadura é naturalmente tida em conta, sendo modelada como uma única camada na linha média da laje. Para além disso adota-se $\beta = 0.2$. Para a rigidez de flexão transversal da laje $D_{f_{cy}}$ consideram-se duas situações: laje fendilhada (conforme prescrito na Secção 6.4.2 do EC4) e laje não-fendilhada.

Nas análises com o EF proposto observou-se que é suficiente considerar 30 elementos de igual comprimento. A figura 4.24 exhibe o padrão de fendilhação para um dos vãos (cada fenda diz respeito a um único ponto de integração da superfície média da laje).

Para efeitos de comparação, são fornecidos resultados obtidos com modelos de elementos finitos de casca (*ADINA*), seguindo o método iterativo descrito na Secção 4.4.3. Assim, utiliza-se um elemento finito ortotrópico, com os parâmetros materiais de acordo com a equação (4.34), com $E_{tcx} = 0$ ou E_c (caso $\varepsilon_{xx}^M > 0$ ou < 0 , respetivamente) e $E_{tcy} =$

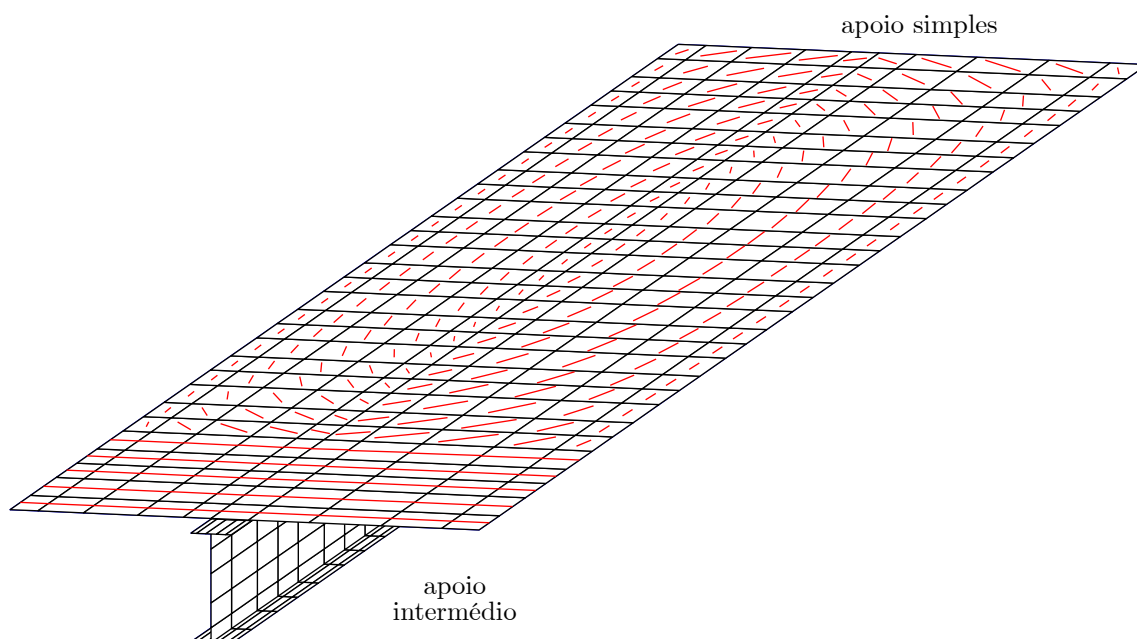


Figura 4.24: Fendilhação na superfície média da viga mista contínua da figura 4.16 (apenas se representa um vão).

$12D_{f_{cy}}/h_c^3$. A armadura longitudinal é incluída através de elementos de casca adicionais, sobrepostos aos de betão, com a rigidez longitudinal apropriada. Como E_{tcx} depende das deformações longitudinais, recorde-se que se realiza uma análise iterativa manual (o que acarreta um significativo dispêndio de tempo): no final de cada iteração, os elementos finitos de betão com $\varepsilon_{xx}^M > 0$ são identificados e o respetivo E_{tcx} é ajustado, até que não sejam observadas alterações significativas em iterações consecutivas.

As cargas críticas e os respetivos modos de instabilidade são exibidos nas figuras 4.25 e 4.26, juntamente com as participações modais, conduzindo às seguintes observações:

- (i). Em relação aos resultados não-fendilhados, observa-se um ligeiro aumento das cargas críticas fornecidas pelos modelos de elementos finitos de casca (até 12%, para $t_w = 15$ mm e uma laje transversalmente não-fendilhada). Este aumento não é tão pronunciado quando a laje se encontra fendilhada transversalmente e, para $t_w = 30$ mm, obtém-se mesmo um decréscimo de 2% no valor da carga crítica.
- (ii). Os modos de instabilidade mostram que a distorção desempenha um papel importante em todos os casos (o que é corroborado pelos gráficos das participações modais). É importante referir que, para $t_w = 30$ mm, verifica-se flexão transversal muito pronunciada na laje de betão.
- (iii). As cargas críticas obtidas com a GBT estão muito próximas das obtidas com os modelos de elementos finitos de casca, particularmente quando S_{xy} é descartada (o que está de acordo com o registado na Secção 4.4.3.1 sempre que os modos de instabilidade envolvem distorção significativa). Observa-se ainda que as diferenças

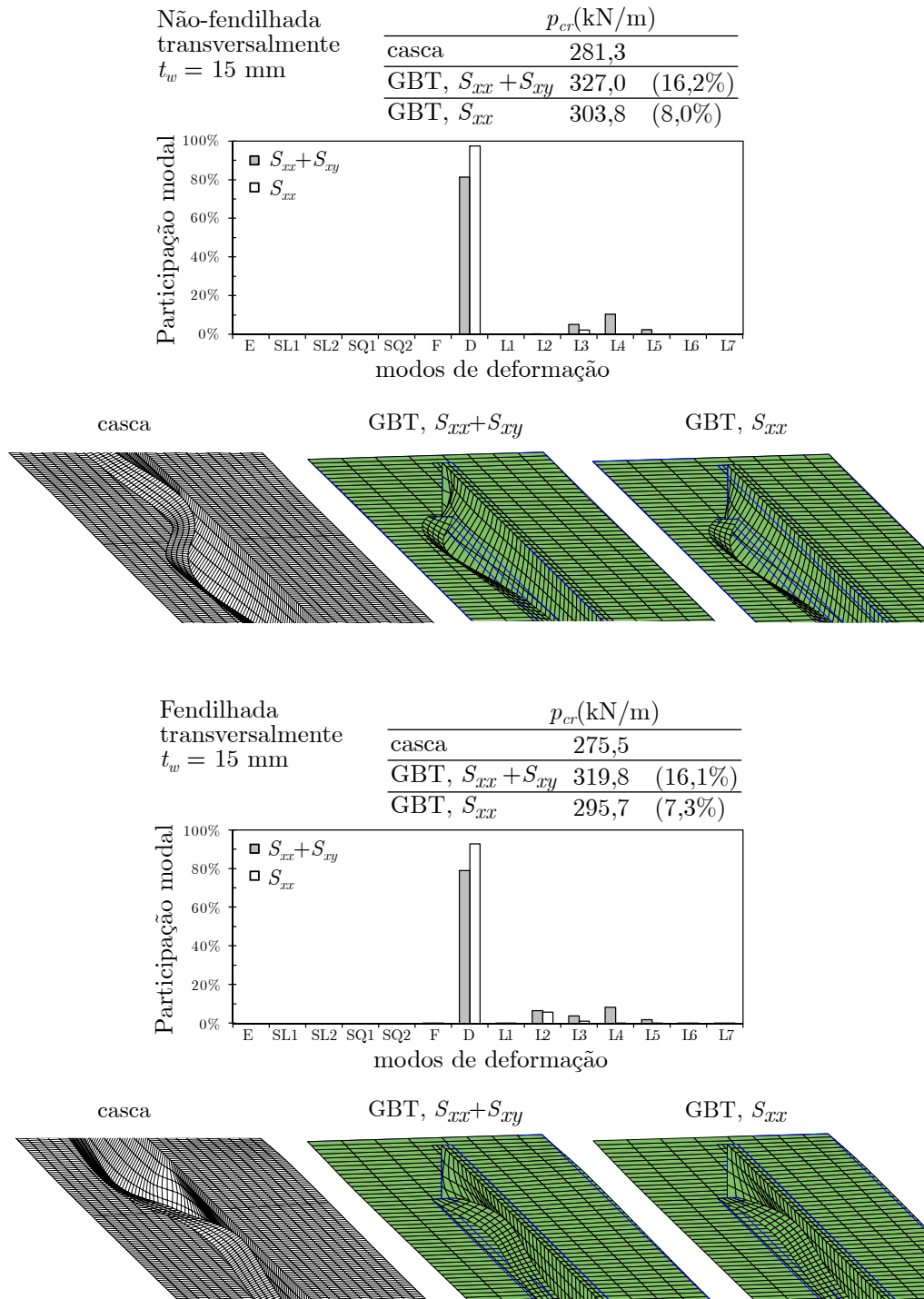


Figura 4.25: Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: cargas críticas, participações modais e modos de instabilidade para a análise fendilhada ($t_w = 15 \text{ mm}$).

4.4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO

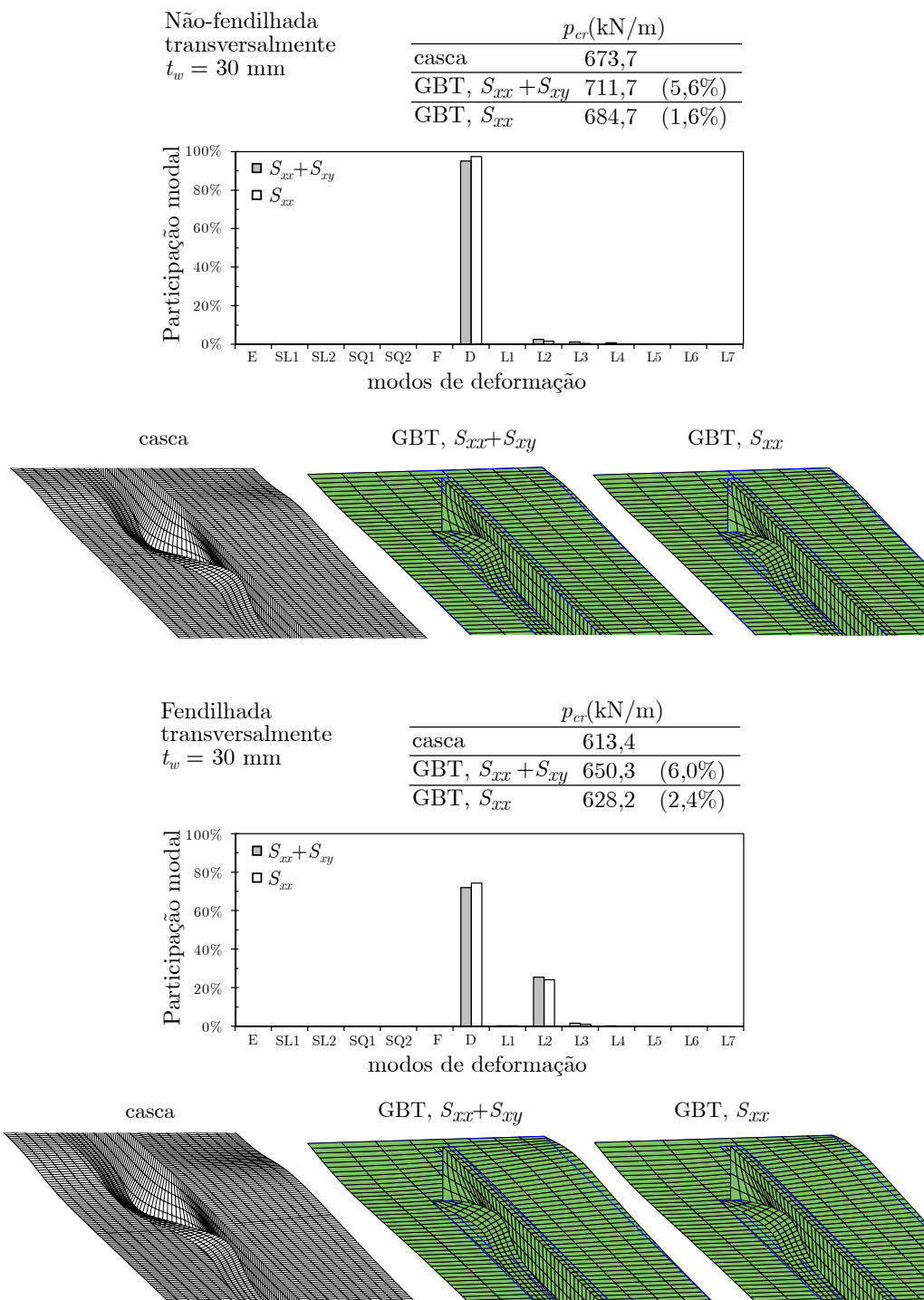


Figura 4.26: Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: cargas críticas, participações modais e modos de instabilidade para a análise fendilhada ($t_w = 30$ mm).

relativamente aos modelos de casca são maiores para a alma esbelta ($t_w = 15$ mm), o que pode indicar que a deformação local na alma⁶ e/ou concentrações de tensões⁷ podem desempenhar um papel importante neste caso.

- (iv). Os diagramas de participação modal mostram que os modos locais estão presentes na maioria dos casos, particularmente os modos que envolvem rotação dos banzos (L2 e L3) no caso da laje transversalmente fendilhada. Isto significa que, como no exemplo da figura 4.20, utilizar apenas o modo D não conduzirá a resultados satisfatórios.

Finalmente, é importante referir que a análise com a GBT demora aproximadamente 9,9 segundos (4,0 segundos na análise de pré-encurvadura e 5,8 segundos na análise de bifurcação). Relembre-se que, em relação às análises não-fendilhadas da Secção 4.4.3.1, são agora necessárias iterações na análise de pré-encurvadura, o que aumenta o tempo de cálculo. Para 30 elementos finitos obtêm-se 418 GDL na análise de pré-encurvadura e 840 GDL na análise de bifurcação. O programa *ADINA* demora 14,9 segundos para efetuar a ALE. No entanto, não se deve esquecer que com elementos finitos de casca é necessário recorrer a uma modelação iterativa “manual” para ter em conta a fendilhação, conforme já mencionado. O tempo despendido nessa modelação não foi contabilizado na comparação.

4.4.3.4 Contabilização simplificada do efeito da fluência

Este último exemplo pretende ilustrar a aplicação do elemento finito proposto quando é necessário realizar várias análises de pré-encurvadura, conforme discutido na Secção 4.3.2.

Considere-se então que a viga é solicitada por uma carga permanente p_L (o índice inferior designa “long term loading”) e por uma sobrecarga de curto prazo p_S (“short term loading”), sendo que apenas a sobrecarga é aumentada até atingir a bifurcação, *i.e.*, a carga total é dada por $p_L + \lambda p_S$. As tensões devidas ao carregamento de longo prazo são calculadas usando um módulo de elasticidade efetivo $E_L = E_c/2$, para ter em conta o efeito da fluência, enquanto as tensões devidas à carga de curto prazo são obtidas usando $E_S = E_c$.

Tal como referido na Secção 4.3.2, neste caso assume-se que as tensões de pré-encurvadura resultantes de cada ação podem ser calculadas independentemente, o que constitui uma aproximação caso a zona fendilhada varie significativamente para cada uma delas. Neste caso particular verificou-se que não existe variação significativa, pelo que a hipótese é aceitável.

Para as duas ações consideradas, o problema discretizado de valores e vetores próprios é da forma

$$(\mathbf{K}_t + \mathbf{G}_L + \lambda \mathbf{G}_S) \Delta \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (4.43)$$

⁶Note-se que, nos gráficos de participação modal, os modos locais na alma L4-L5 participam apenas para $t_w = 15$ mm.

⁷Relembre-se que, no elemento proposto, as tensões S_{yy}^M são desprezadas e que S_{xy}^M são constantes na alma.

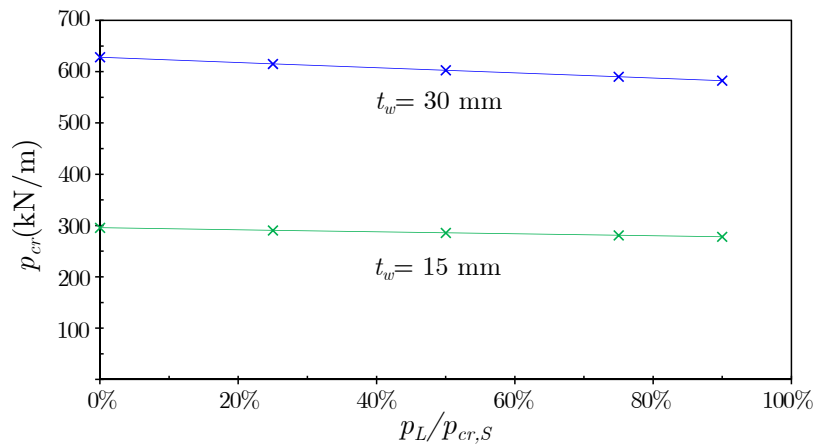


Figura 4.27: Viga mista contínua sujeita a carregamento uniformemente distribuído: variação da carga crítica com a relação entre o carregamento de curto/longo prazo.

onde o parâmetro de carga λ afeta apenas a matriz de rigidez geométrica associada ao carregamento de curto prazo. São considerados ambos os valores de espessura de alma da Secção 4.4.3.3 ($t_w = 15$ mm e $t_w = 30$ mm) e assume-se que a laje está totalmente fendilhada, tanto na direção longitudinal como transversal, adotando-se $\beta = 0,2$. Em todos os casos foram utilizados 50 elementos finitos de igual comprimento. Note-se que as cargas críticas resultantes apenas da atuação do carregamento de curto prazo correspondem às fornecidas na figura 4.25 para a laje fendilhada transversalmente. Seguindo as conclusões do exemplo anterior, desprezam-se as tensões S_{xy} .

O gráfico da figura 4.27 mostra as cargas críticas ($p_{cr} = p_L + \lambda_{cr}p_S$) em função da relação entre a carga permanente (p_L) e a carga crítica considerando apenas a ação de curto prazo ($p_{cr,S}$), dada por 295,7 kN/m para $t_w = 15$ mm e 628,2 kN/m para $t_w = 30$ mm (valores já fornecidos na figura 4.25, para a laje transversalmente fendilhada). Estes resultados mostram que a carga crítica decresce ligeiramente com o aumento de $p_L/p_{cr,S}$ (ou seja, à medida que a carga permanente se aproxima da carga crítica de curto prazo), até uma descida máxima de 6% e 7%, para $t_w = 15$ mm e $t_w = 30$ mm, respetivamente. Não são apresentados resultados para $p_L/p_{cr,S}$ superiores a 90%, uma vez que o carregamento de longo prazo atinge por si só a carga de bifurcação. Refere-se ainda que as participações modais não variam com $p_L/p_{cr,S}$ e, portanto, os gráficos apresentados na figura 4.25, para a laje transversalmente fendilhada, mantêm-se válidos.

É importante referir que o efeito da fluência é rigorosamente modelado no Capítulo 5. Nesta Secção apenas se apresenta uma via alternativa, simplificada, para a contabilização da mesma.

4.5 Sumário

Neste Capítulo foi proposto um elemento finito de barra baseado na GBT, capaz de calcular, com precisão e eficiência, cargas de bifurcação elásticas de vigas mistas aço-betão.

O elemento inclui apenas alguns modos de deformação (até 7 na análise de pré-encurvadura e até 15 na análise de bifurcação) e tem em conta os seguintes efeitos: *shear lag*, fendilhação do betão, distorção da secção e deformação local (tipo placa) na alma, para além de variações discretas da espessura da alma. Mostrou-se também que o efeito da fluência pode ser tido em consideração, muito embora de maneira simplificada.

Os exemplos apresentados atestam a precisão e a eficiência do elemento finito proposto, visto que a determinação de cargas de bifurcação e modos de instabilidade envolve um custo computacional muito baixo e os resultados são muito semelhantes aos obtidos com o método das faixas finitas e modelos refinados de elementos finitos de casca. Além disso, as características de decomposição modal da GBT tornam possível retirar conclusões significativas sobre a natureza dos modos de instabilidade – por exemplo, observou-se que, para além da distorção, existe uma influência significativa da deformação local (tipo placa), mesmo em almas pouco esbeltas.

Deve-se salientar que as principais características do elemento proposto decorrem do facto de a GBT permitir incorporar uma ampla gama de hipóteses relativas aos campos de tensões e deformações, sem sacrificar a precisão. Em particular, o elemento proposto é formulado de forma a ser possível atribuir valores independentes aos vários termos de rigidez da laje (membrana e flexão), o que permite, por exemplo, satisfazer os princípios do modelo prescrito pelo EC4 (o mesmo não é facilmente conseguido com elementos finitos de casca).

Capítulo 5

Fluência do betão em vigas mistas aço-betão

5.1 Introdução

Neste Capítulo é desenvolvido e validado um elemento finito, baseado na GBT, que combina a fluência do betão e a deformação arbitrária da secção transversal no seu próprio plano e para fora deste (o que inclui, por exemplo, a distorção e o efeito de *shear lag*). A fluência do betão é modelada usando uma lei constitutiva viscoelástica linear, sendo a função de fluência aproximada por uma série de Dirichlet, conforme proposto por Bazant e Wu (1973).

Antes de mais, deve referir-se que a consideração conjunta do efeito fluência-fendilhação é apenas abordada no Capítulo 6, dado que a respetiva modelação constitutiva é significativamente mais complexa. Assim, o presente Capítulo constitui o primeiro (e necessário) passo para alcançar a formulação que se apresenta no Capítulo subsequente.

5.2 Revisão da literatura

A modelação dos efeitos diferidos no betão tem sido objeto de estudo de um grande número de autores, pelo que, nesta Secção, apenas se mencionam os artigos mais estreitamente relacionados com o presente trabalho, o qual aborda vigas mistas aço-betão.

O estado-da-arte relativo à modelação do comportamento diferido de estruturas mistas aço-betão apresentado por Ranzi et al. (2013), descreve os desenvolvimentos mais relevantes até 2013. A leitura deste artigo permite concluir que a maior parte dos estudos concernem o desenvolvimento de elementos finitos de barra 2D que incluem o efeito da flexibilidade da conexão de corte. Apenas em alguns (poucos) casos, é considerado o efeito de *shear lag*. De seguida, descrevem-se as formulações deste último tipo, dado que se relacionam mais diretamente com a que se apresenta no presente Capítulo.

Em Gara et al. (2009), é proposta uma formulação para vigas mistas elásticas (portanto não é considerado o efeito da fendilhação do betão), tendo em conta a flexibilidade da conexão e adotando uma única função de *shear lag* (quadrática). Os efeitos diferidos são

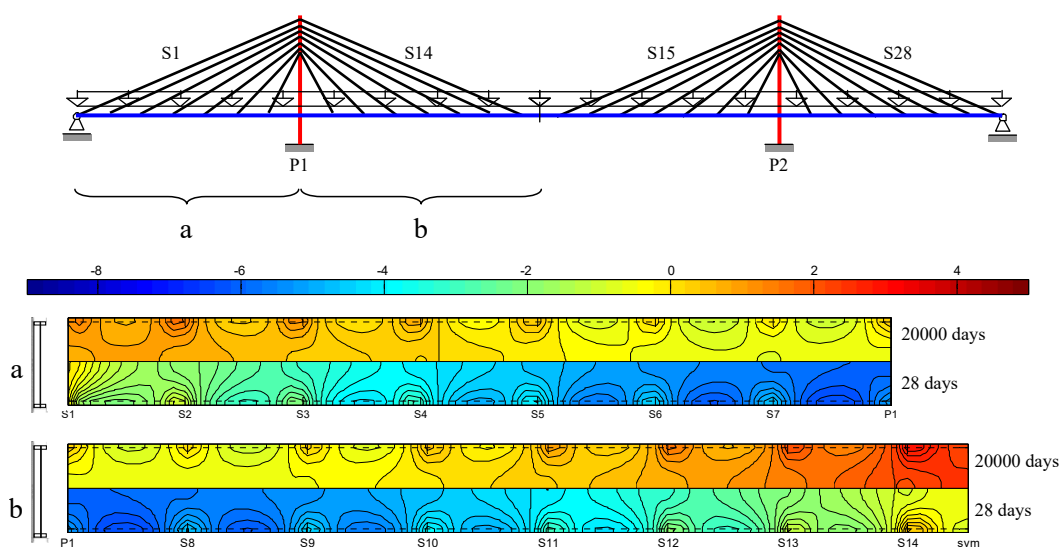


Figura 5.1: Tensão normal longitudinal na laje de betão a 28 e 20000 dias numa ponte atirantada (Gara et al., 2011b).

modelados usando uma regra de integração trapezoidal da lei constitutiva. O elemento finito tem 13 GDL (2 para o deslocamento vertical, 2 para rotações, 6 para os deslocamentos axiais do perfil/laje e 3 para o empenamento de *shear lag*). Este elemento finito foi utilizado posteriormente, em Gara et al. (2010), para obter soluções analíticas para vigas mistas uniformes, de secção simétrica e com um único perfil de aço¹ e, em Gara et al. (2011b), para analisar alguns casos práticos, como é o caso da ponte mista atirantada representada na figura 5.1.

Zhu e Su (2017), utilizam um modelo muito semelhante ao desenvolvido por Gara et al. (2009) para obter soluções analíticas para vigas de secção uniforme e sujeitas a cargas uniformemente distribuídas, recorrendo novamente a uma lei viscoelástica do tipo integral e à regra do trapézio².

Tendo em conta o que acabou de ser descrito, no conhecimento do autor, não existem presentemente elementos finitos de barra para vigas mistas aço-betão capazes de ter em conta os efeitos da fluência, secções transversais arbitrárias e a deformação no seu plano e para fora deste (empenamento). Assim, o elemento que se propõe de seguida constitui um avanço considerável face ao atual estado-da-arte.

¹Deve referir-se que neste artigo as soluções não são dadas de forma explícita, sendo necessário obter várias constantes a partir das condições de fronteira específicas do problema em causa. Para além disso, como as expressões são muito complexas e o seu número é significativo, optou-se por não as reproduzir neste trabalho.

²Tal como em Gara et al. (2011b), as expressões são significativamente complexas, pelo que não são aqui reproduzidas.

5.3 Especificidades do elemento finito proposto

O elemento finito proposto neste Capítulo é baseado nas equações gerais fornecidas no Capítulo 3 (ver Secção 3.3), diferindo apenas na modelação constitutiva (do betão). Assim, não existe qualquer restrição aos modos de deformação da GBT considerados na análise e não se considera, à partida, qualquer hipótese simplificativa adicional face às referidas na Secção 2.3 do Capítulo 2. Contudo, nos exemplos de validação apresentados na Secção 5.4, considera-se sempre $\varepsilon_{yy}^M = 0$, o que quer dizer que a relação constitutiva para os termos de membrana tem diretamente em conta esta hipótese, tal como discutido na Secção 3.3.

De seguida, aborda-se a lei constitutiva para o aço (Secção 5.3.1), a modelação da fluência no betão (5.3.2) e, na Secção 5.3.3, obtêm-se as equações fundamentais do elemento finito proposto.

5.3.1 Lei constitutiva para o aço

Para o aço adota-se um comportamento elástico linear onde, devido ao constrangimento $\varepsilon_{yy}^M = 0$, a matriz constitutiva é dividida em termos de membrana e de flexão, obtendo-se (recordar as equações (2.28) e (2.29))

$$\mathbf{C}_a^M = \begin{bmatrix} E_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_a \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{C}_a^F = \begin{bmatrix} \frac{E_a}{1-\nu_a^2} & \frac{\nu_a E_a}{1-\nu_a^2} & 0 \\ \frac{\nu_a E_a}{1-\nu_a^2} & \frac{E_a}{1-\nu_a^2} & 0 \\ 0 & 0 & G_a \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

5.3.2 Lei constitutiva para o betão

Para a modelação da fluência no betão adota-se uma lei constitutiva viscoelástica linear, sem envelhecimento. De acordo com este modelo, a deformação no instante t é dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \int_0^t J(t, \tau) \bar{\mathbf{C}}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau, \quad (5.3)$$

onde $J(t, \tau)$ é a função de fluência do material (deformação uniaxial no instante t causada por uma tensão unitária uniaxial a atuar desde o instante τ), $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = d\boldsymbol{\sigma}/dt$ e $\bar{\mathbf{C}}$ é uma matriz constitutiva adimensional que se admite não variar no tempo.

Conforme proposto por Bazant e Wu (1973), a integração no tempo da lei constitutiva pode ser efetuada analiticamente começando por recorrer a uma expansão em série de Dirichlet da função de fluência. Assim, para $n + 1$ termos, tem-se

$$J(t, \tau) = \frac{1}{E_0} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{E_\alpha} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_\alpha}} \right) \quad (5.4)$$

onde os parâmetros E_α têm a dimensão do módulo de elasticidade, sendo neste caso considerados constantes no tempo, e τ_α são constantes denominadas de “tempos de retardação”.

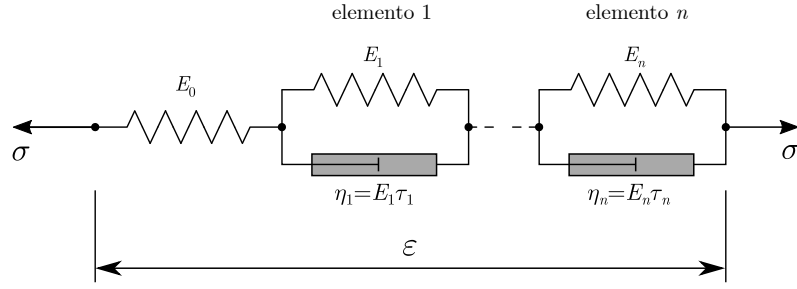


Figura 5.2: Cadeia de elementos de Kelvin.

Conforme apontado por Bazant e Wu (1973), a substituição de (5.4) na equação (5.3) conduz a uma forma equivalente a uma cadeia de elementos de Kelvin acoplados a um corpo de Hooke — a figura 5.2 representa precisamente este modelo, onde η_n é o coeficiente de viscosidade do n -ésimo elemento de Kelvin, o qual é dado por $\eta_\alpha = E_\alpha \tau_\alpha$.

Admitindo que a variação de tensão é constante num intervalo de tempo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ (portanto $\dot{\sigma} = \Delta\sigma/\Delta t = \text{constante}$), é possível integrar analiticamente a lei constitutiva (5.3), o que conduz à relação incremental

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{E^*} \bar{C}^{-1} \Delta\sigma + \sum_{\alpha=1}^n \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}}\right) \Delta\varepsilon_\alpha^*(t_n), \quad (5.5)$$

onde se introduziu a constante

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_0} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{E_\alpha} \left(1 - \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}}\right)\right) \quad (5.6)$$

e $\varepsilon_\alpha^*(t_n)$ são designadas de “variáveis de estado”, atualizadas após cada intervalo de tempo através de

$$\varepsilon_\alpha^*(t_{n+1}) = e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}} \varepsilon_\alpha^*(t_n) + \frac{\tau_\alpha}{\Delta t E_\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}}\right) \Delta\sigma, \quad (5.7)$$

com $\varepsilon_\alpha^*(t_0) = \frac{1}{E_\alpha} \Delta\sigma$. Finalmente, a inversão da equação (5.5) permite obter a relação constitutiva na forma

$$\Delta\sigma = E^* \bar{C} (\Delta\varepsilon - \Gamma), \quad (5.8)$$

onde

$$\Gamma = \sum_{\alpha=1}^n \varepsilon_\alpha^*(t_n) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}}\right) \quad (5.9)$$

é o vetor das deformações viscoelásticas resultantes do estado de tensão acumulado até ao instante t_n , as quais dependem apenas das variáveis de estado. Com este processo, apenas é necessário atualizar (através de (5.7)) e guardar as variáveis de estado após cada intervalo de tempo.

Tendo em conta que se admite $\varepsilon_{yy}^M = 0$, conforme discutido no início da Secção 5.3, a matriz \bar{C} deve ser subdividida em componentes de membrana e flexão. Assim, admitindo

que o material é isotrópico, tem-se

$$\bar{\mathbf{C}}_c^M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu_c)} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_c^F = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu_a^2} & \frac{\nu_c}{1-\nu_a^2} & 0 \\ \frac{\nu_c}{1-\nu_c^2} & \frac{1}{1-\nu_a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu_c)} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Por uma questão de conveniência, é também útil separar os vetores $\mathbf{\Gamma}$ nas suas componentes de membrana e flexão, tendo-se então

$$\mathbf{\Gamma}^M = \sum_{\alpha=1}^n (\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^*)^M (t_n) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}}\right), \quad (5.12)$$

$$\mathbf{\Gamma}^F = \sum_{\alpha=1}^n (\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^*)^F (t_n) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}}\right). \quad (5.13)$$

5.3.3 Formulação do elemento finito

Tal como nos Capítulos anteriores, recorre-se à interpolação direta das funções de amplitude dos modos através de $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{d}$, utilizando as mesmas funções de interpolação (contidas na matriz $\boldsymbol{\Psi}$). A matriz de rigidez elementar num determinado instante é obtida pela introdução da interpolação na expressão do trabalho virtual das forças interiores (ver equação (2.31), obtendo-se as contribuições de membrana e de flexão ($\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e^M + \mathbf{K}_e^F$),

$$\mathbf{K}_e^M = \int_{V_e} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} \\ \boldsymbol{\Psi}_{,x} \\ \boldsymbol{\Psi}_{,xx} \end{bmatrix}^T (\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M)^T \mathbf{C}^M \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} \\ \boldsymbol{\Psi}_{,x} \\ \boldsymbol{\Psi}_{,xx} \end{bmatrix} dV, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{K}_e^F = \int_{V_e} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} \\ \boldsymbol{\Psi}_{,x} \\ \boldsymbol{\Psi}_{,xx} \end{bmatrix}^T z^2 (\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F)^T \mathbf{C}^F \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} \\ \boldsymbol{\Psi}_{,x} \\ \boldsymbol{\Psi}_{,xx} \end{bmatrix} dV. \quad (5.15)$$

A contribuição do aço para a matriz de rigidez é obtida com $\mathbf{C}^M = \mathbf{C}_a^M$ e $\mathbf{C}^F = \mathbf{C}_a^F$ (recordar expressões (5.1) e (5.2)). Para o betão, tendo em conta as equações (5.8)–(5.11), considera-se antes $\mathbf{C}^M = E^* \bar{\mathbf{C}}_c^M$ e $\mathbf{C}^F = E^* \bar{\mathbf{C}}_c^F$.

O vetor das forças exteriores incremental elementar é constituído por duas partes, uma obtida diretamente do trabalho virtual das forças exteriores e outra resultante das variáveis

de estado presentes em (5.8), ficando

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}_e &= \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^T \bar{\Xi}_U^T \Delta \bar{\mathbf{f}} d\Omega \\ &+ \int_{V_c} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T (\bar{\Xi}_\varepsilon^M)^T E^* \bar{\mathbf{C}}_c^M \mathbf{\Gamma}^M dV \\ &+ \int_{V_c} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T z (\bar{\Xi}_\varepsilon^F)^T E^* \bar{\mathbf{C}}_c^F \mathbf{\Gamma}^F dV. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Note-se que, no primeiro termo de (5.16), assume-se uma carga incremental constante no intervalo de tempo, o que corresponde ao considerado nos exemplos apresentados na Secção 5.4. Para outros carregamentos, este termo deve ser naturalmente ajustado.

O procedimento incremental (no tempo) é efetuado calculando em cada passo os deslocamentos resultantes d e atualizando as variáveis de estado. Como nos capítulos anteriores, recorre-se à quadratura de Gauss para integrar as matrizes de rigidez e o vetor das forças exteriores, com integração reduzida em x (3 pontos), integração exata em y (3 pontos para modos quadráticos, 4 para cúbicos e 5 para quárticos) e integração exata em z (2 pontos). Note-se que é possível integrar analiticamente as matrizes de rigidez na direção da espessura (z). No entanto, uma vez que tal é apenas necessário efetuar uma vez, no início da análise (a parcela relativa ao betão deve ser guardada em memória sem o termo E^*), procedeu-se a uma integração numérica também segundo z por uma questão de generalização (a formulação do Capítulo 6 já não permite a integração analítica). O mesmo se passa com o vetor $\Delta \mathbf{F}_e$, dado que $\mathbf{\Gamma}^F$ é função linear de z .

Finalmente, é importante referir que o tempo de cálculo despendido pela implementação em MATLAB do elemento finito proposto é bastante reduzido. Por exemplo, no problema apresentado na Secção 5.4.3 (o mais complexo), cada passo de tempo é calculado em aproximadamente 0,2 segundos com 13 modos de deformação da secção transversal, 3 elementos finitos (78 GDL e 1152 pontos de integração) e uma expansão em série de Dirichlet da função de fluência com 12 termos. Por sua vez, o programa *ADINA* demora mais de 5 segundos em cada passo.

5.4 Exemplos de aplicação e validação

Em todos os exemplos apresentados de seguida consideraram-se as seguintes propriedades para o aço em perfil e para o betão (não se consideram armaduras): $E_a = 210$ GPa, $\nu_a = 0,3$, $E_c = 37$ GPa e $\nu_c = 0,1$. O carregamento inicial é aplicado num primeiro incremento com $\Delta t = 10^{-8}$ dias. A função de fluência é baseada na formulação proposta no EC2, sendo

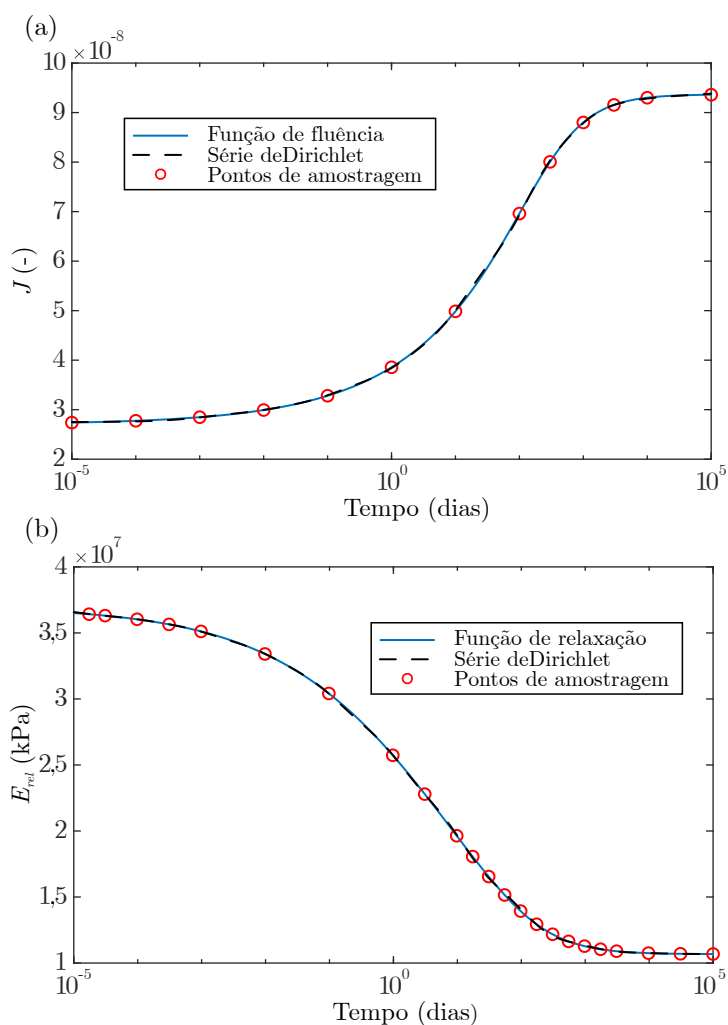


Figura 5.3: Função exata, série de Dirichlet obtida e pontos de amostragem para a (a) função de fluência e (b) função de relaxação.

explicitamente dada por

$$J(t, 0) = \frac{1}{E_c} \left(1 + 2,47 \left(\frac{t}{345 + t} \right)^{0,3} \right). \quad (5.17)$$

Esta função é posteriormente expressa numa série de Dirichlet com 12 termos, associados a tempos de retardação iguais a $10^{-5}, 10^{-4}, \dots, 10^5$ (mais o termo constante). Os parâmetros E_α presentes na equação (5.4) são dados na tabela 5.1, tendo sido obtidos pelo método dos mínimos quadrados, com os pontos de amostragem ilustrados na figura 5.3(a), a qual representa também a função analítica (5.17) e a série de Dirichlet obtida. Como é possível observar na figura, a série de Dirichlet é virtualmente coincidente com a função analítica.

A validação dos resultados obtidos com o elemento finito proposto é feita recorrendo a modelos de elementos de casca MITC-4, analisados no programa *ADINA*. Neste programa, a lei constitutiva viscoelástica é baseada numa expansão em série de Dirichlet da função

α	E_α (GPa)	τ_α (dias)
0	37,00	[-]
1	2402,82	0.00001
2	2269,40	0.0001
3	1702,24	0.001
4	557,21	0.01
5	361,10	0.1
6	152,69	1
7	83,33	10
8	38,02	100
9	68,14	1000
10	1977,23	10000
11	1174,16	100000

Tabela 5.1: Parâmetros E_α da expansão em série de Dirichet da função de fluência (5.17).

de relaxação³ (ao invés da função de fluência), ou seja, através de uma série da forma

$$E_{rel}(t, \tau) = E_\infty + \sum_{\alpha=1}^n E_\alpha e^{-\frac{t-\tau}{\tau_\alpha R}} \quad (5.18)$$

onde os parâmetros E_α têm (tal como na função de fluência) a dimensão de módulo de elasticidade (no presente caso admitem-se constantes no tempo) e $\tau_\alpha R$ são constantes denominadas de “tempos de relaxação”. Assim, torna-se necessário obter a função de relaxação a partir da função de fluência (5.17), recorrendo-se para o efeito ao procedimento proposto por Sluys (1999), que consiste em obter a função de relaxação por integração numérica, considerando um ensaio de relaxação unidimensional e utilizando o método de Euler com um passo de tempo muito pequeno.

O gráfico da figura 5.3(b) ilustra (i) a função de relaxação “exata” (calculada com um passo de tempo muito pequeno), (ii) os pontos de amostragem utilizados para obter os termos da respetiva série de Dirichlet, pelo método dos mínimos quadrados, e (iii) a série obtida (foram usados 15 termos, correspondendo os tempos de relaxação aos tempos de retardação adotados, mais $t = 400, 500$ e 600 dias). Mais uma vez, observa-se que as funções são praticamente coincidentes. Os parâmetros E_α da função de relaxação são fornecidos na tabela 5.2.

5.4.1 Consola de betão sujeita a flexão–torção

No primeiro exemplo estuda-se a laje de betão simples em consola representada na figura 5.4(a), que fornece a geometria e o carregamento do problema. A simplicidade deste exemplo, decorrente do facto de não ser necessário incluir um número significativo de modos de deformação, é justificada pelo facto de visar essencialmente demonstrar que a função de

³A função de relaxação, $E_{rel}(t, \tau)$, pode ser definida como a tensão uniaxial no material no instante t causada por uma deformação unitária a atuar desde o instante τ .

α	E_α (kPa)	$\tau_{\alpha R}$ (dias)
∞	10,67	[-]
1	0,57	0.00001
2	0,42	0.0001
3	1,11	0.001
4	1,72	0.01
5	3,56	0.1
6	5,04	1
7	6,95	10
8	5,45	100
9	0,01	400
10	0,01	500
11	0,01	600
12	1,28	1000
13	0,17	10000
14	0,02	100000

Tabela 5.2: Parâmetros E_α da expansão em série de Dirichet da função de relaxação (5.18).

fluência (elementos finitos da GBT) e a função de relaxação associada (elementos de casca) estão modeladas corretamente.

Devido à natureza particular do problema (nomeadamente ao facto de ocorrer flexão e torção sem esforço axial), não é necessário considerar deformação de membrana. Consequentemente, as análises GBT são realizada apenas com os quatro modos de deformação representados na 5.4(b), que consistem em polinómios cúbicos de Hermite para os deslocamentos $\bar{w}_k(y)$ (portanto, $\bar{u}_k(y) = \bar{v}_k(y) = 0$). Como tal, é obtida uma matriz de rigidez com 16×16 elementos. São utilizados 1/3 elementos finitos ao longo do comprimento, o que corresponde a 16/24 GDL ativos (*i.e.*, após a eliminação dos GDL correspondentes ao encastramento).

Para efeitos de comparação, realiza-se uma análise com elementos finitos de casca, usando a malha com 16×4 elementos finitos que se mostra na figura 5.5(a) e que conta com 400 GDL.

O gráfico na figura 5.4(c) mostra a evolução do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga com o tempo, obtida com os elementos finitos da GBT (duas discretizações) e o modelo de elementos de casca. São realizados 13 passos de tempo (após um passo inicial muito curto igual a $t = 10^{-8}$ dias). Na figura 5.5(a-c) são representadas as configurações deformadas obtidas para $t = 10^{-8}$ e $t = 10^6$ dias — neste caso, as configurações obtidas com o elemento proposto correspondem a uma discretização com 3 elementos e são representadas com 4 subdivisões ao longo de x e y , em cada elemento.

O gráfico da figura 5.4(c) e as configurações deformadas exibidas na figura 5.5 demonstram claramente que os resultados obtidos com o elemento finito proposto correspondem com bastante precisão aos obtidos com o modelo de elementos de casca, mesmo quando apenas é considerado um único elemento finito. Em termos de deslocamento do ponto de

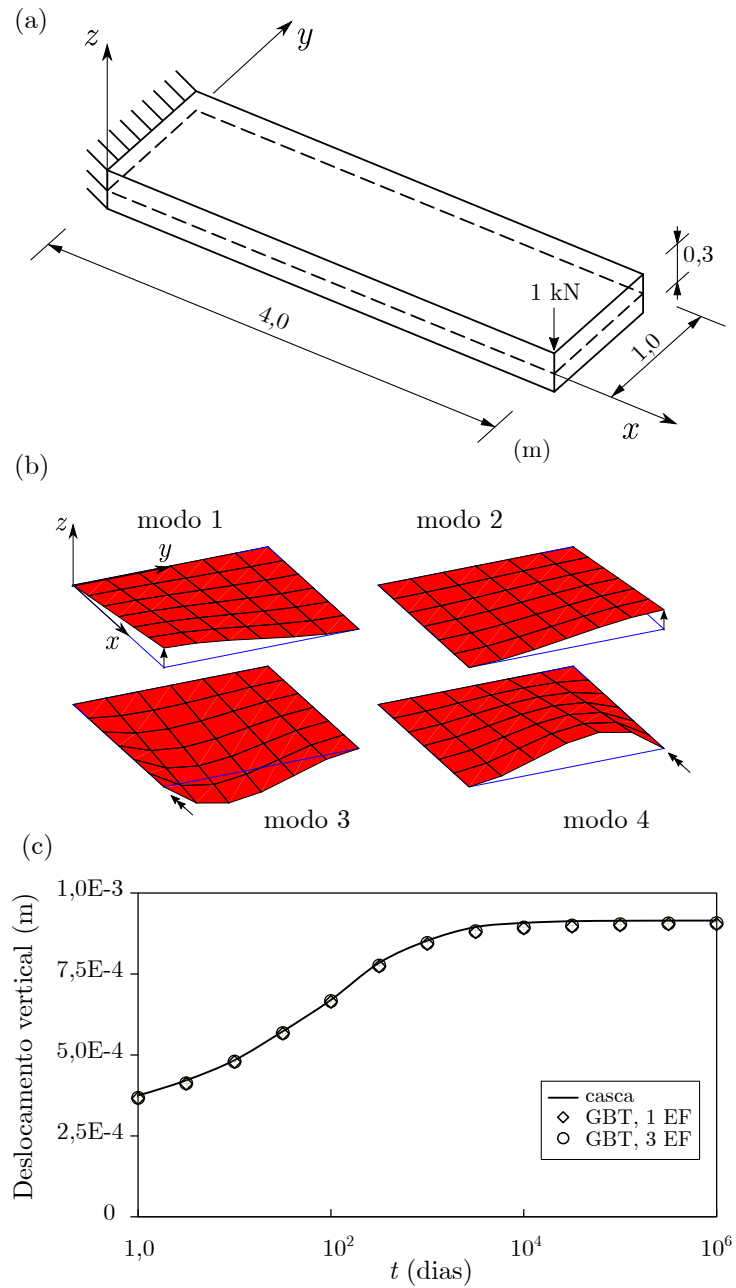


Figura 5.4: Consola de betão sujeita a flexão-torção: (a) geometria e carregamento, (b) modos de deformação e (c) evolução do deslocamento vertical com o tempo.

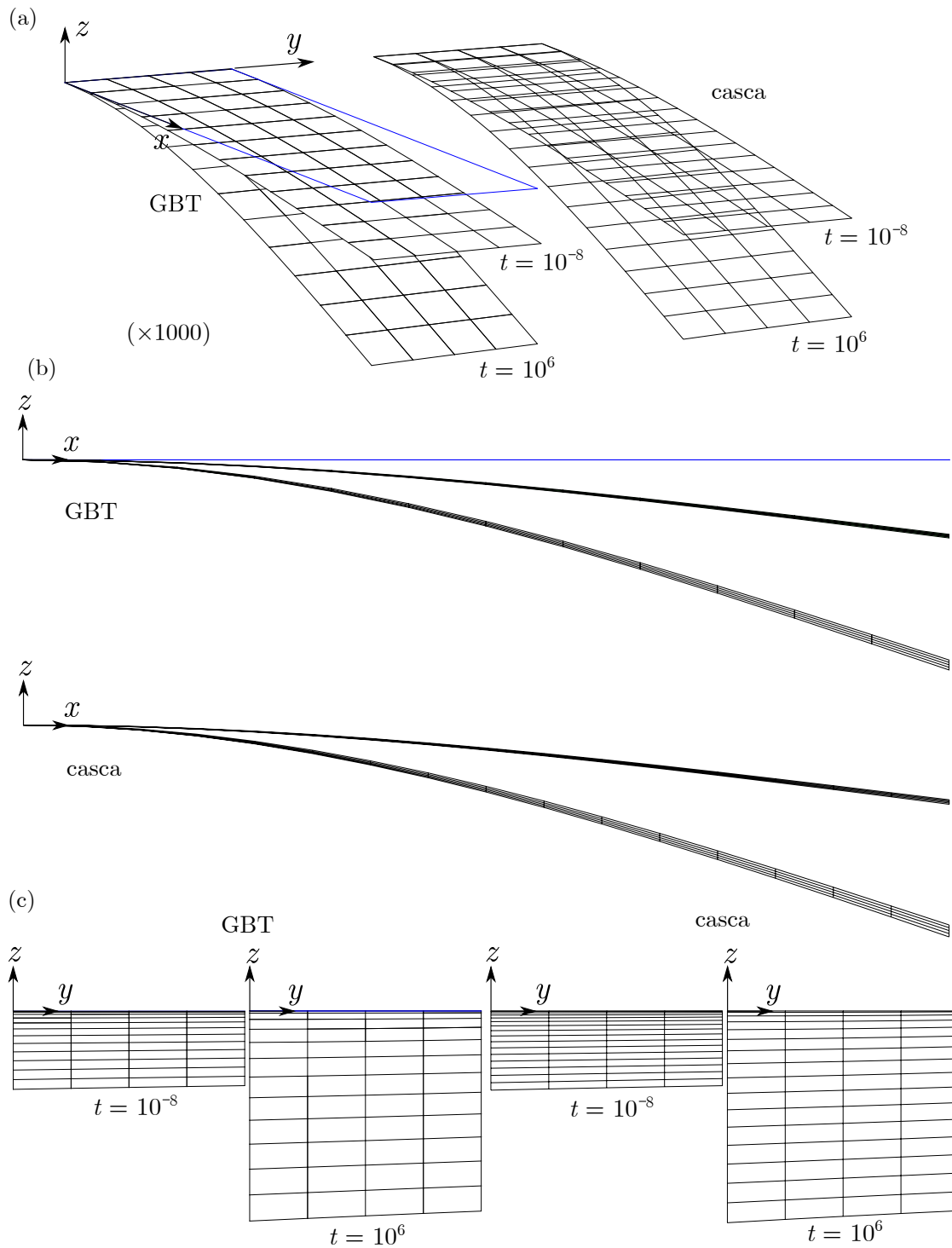


Figura 5.5: Consola de betão sujeita a flexão-torção: configurações deformadas, para $t = 10^{-8}$ e $t = 10^6$ dias, (a) perspetiva, (b) alçado lateral e (c) alçado frontal.

aplicação da carga, utilizando 1/3 elementos finitos, a diferença média entre os dois modelos é de apenas 1,6/1,2%, com um mínimo de 0,9/0,5% para 100/100 dias e um máximo de 2,5/2,1% para 3,16/10⁵ dias. Além disso, para o tempo inicial e final, a diferença é de apenas 1,2/0,8%. No entanto, deve ser observado que um único elemento da GBT é suficiente devido ao facto de este problema ser dominado por flexão-torção (não ocorre praticamente flexão transversal) e de não existirem cargas distribuídas (a aproximação das funções de amplitude com polinómios cúbicos de Hermite fornece uma boa solução).

5.4.2 Viga mista simplesmente apoiada

Neste exemplo é analisado um tabuleiro misto aço-betão do tipo “bi-viga”, simplesmente apoiado com 8 m de comprimento, submetido a cargas uniformemente distribuídas de 1 kN/m, aplicadas na laje de betão, no plano das almas dos perfis de aço. A geometria da secção transversal é do tipo da ilustrada na figura 5.6(a), com $h_c = 200$, $b_{c1} = 1500$, $b_{c2} = 2000$, $t_{ft} = t_{tb} = 30$, $t_w = 15$, $b_{ft} = b_{tb} = 300$ e $h_w = 770$ (todas as dimensões em mm). Devido à simetria do problema, apenas metade da viga é analisada, conforme representado nas figuras 5.6(a) 5.7(a).

Os modos de deformação adotados estão ilustrados na figura 5.6(c), tendo sido escolhidos de forma a capturarem a flexão vertical e *shear lag* sem distorção da secção. Tal como nos Capítulos anteriores, assume-se que as extensões transversais de membrana são nulas e que apenas é possível desenvolverem-se distorções de membrana na alma do perfil (para capturar o esforço transversal) e na laje de betão (para capturar o efeito de *shear lag*). A discretização da secção transversal da GBT é mostrada na figura 5.6(b), onde se podem identificar os nós e os eixos locais de cada parede. Considera-se uma conexão rígida entre o perfil de aço e a laje de betão (*rigid links*). Podem ser incluídos mais nós nas paredes (e, portanto, mais modos de deformação), mas os resultados previamente obtidos nos Capítulos 3 e 4 mostram que os modos escolhidos são suficientes. Assim, os modos de deformação considerados são: (E) extensão axial, (F) flexão (Euler-Bernoulli), (C) corte puro na alma do perfil e (SL/SQ) *shear lag* linear/quadrático. Como referido anteriormente, para secções simétricas (não corresponde ao presente caso) é possível combinar os modos SL1 e SL2, *i.e.*, $SL = SL1 + SL2$ e $SQ = SQ1 + SQ2$, reduzindo assim o número de modos de deformação para apenas cinco.

Nas análises da GBT são assim considerados os sete modos de deformação exibidos na figura 5.6(c), o que corresponde a uma matriz de rigidez elementar de dimensão 23×23 . Para um único elemento, este problema envolve 14 GDL e, para oito elementos, 112 GDL (após a eliminação dos GDL restringidos por condições de fronteira). Além disso, o efeito da inclusão de modos de *shear lag* de ordem superior na laje é também analisado. No presente caso, são considerados modos cúbicos e quárticos, levando a uma matriz de rigidez elementar de dimensão 35×35 (22/176 GDL para um/oito elementos finitos, respetivamente).

Para efeitos de comparação, foi analisado o modelo de elementos de casca ilustrado na figura 5.7(a), o qual envolve cerca de 18000 GDL. Neste modelo, a conexão rígida entre as

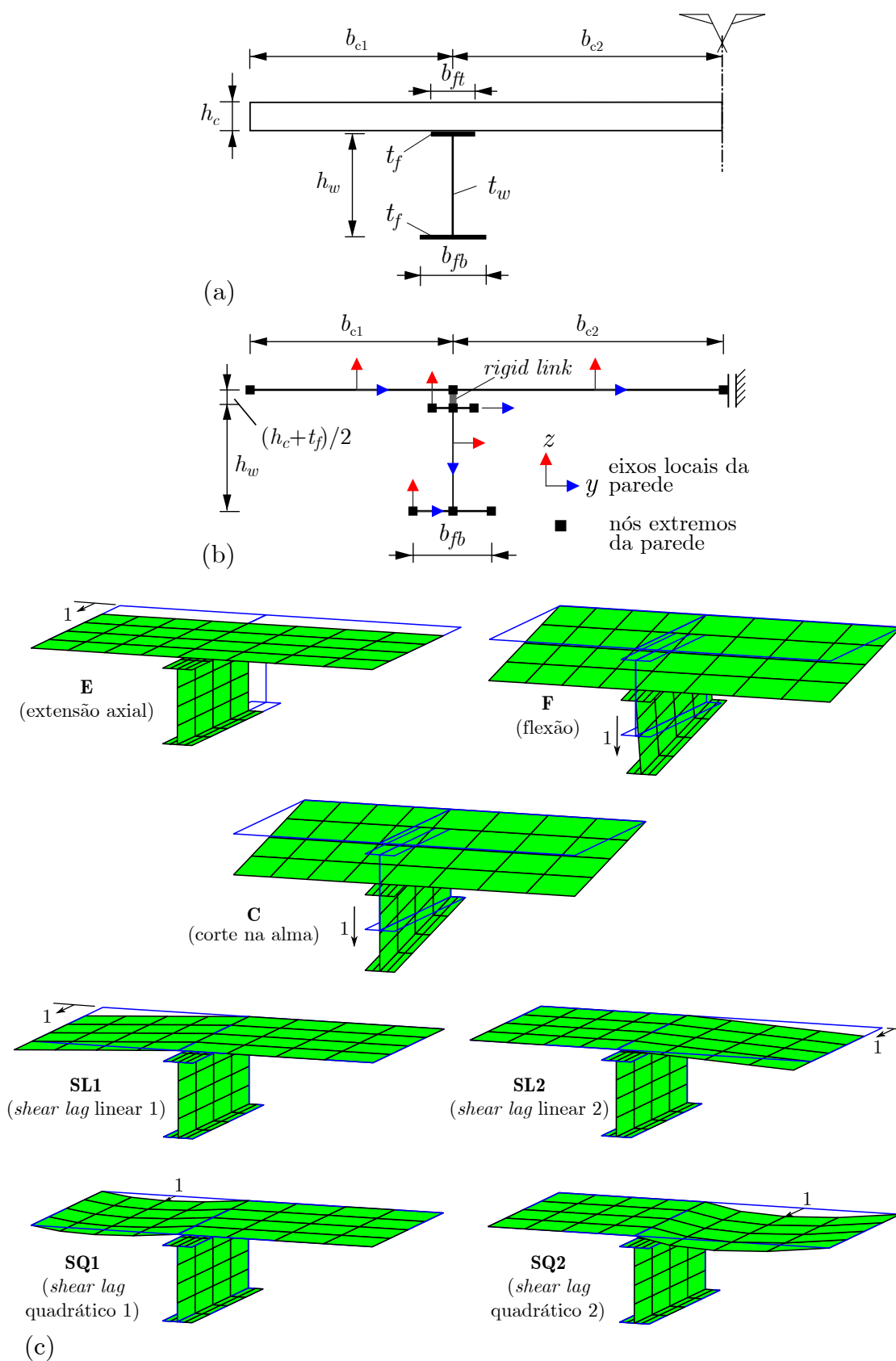


Figura 5.6: Viga mista em consola: (a) geometria da secção transversal, (b) discretização da secção (os eixos locais são representados) e (c) modos de deformação.

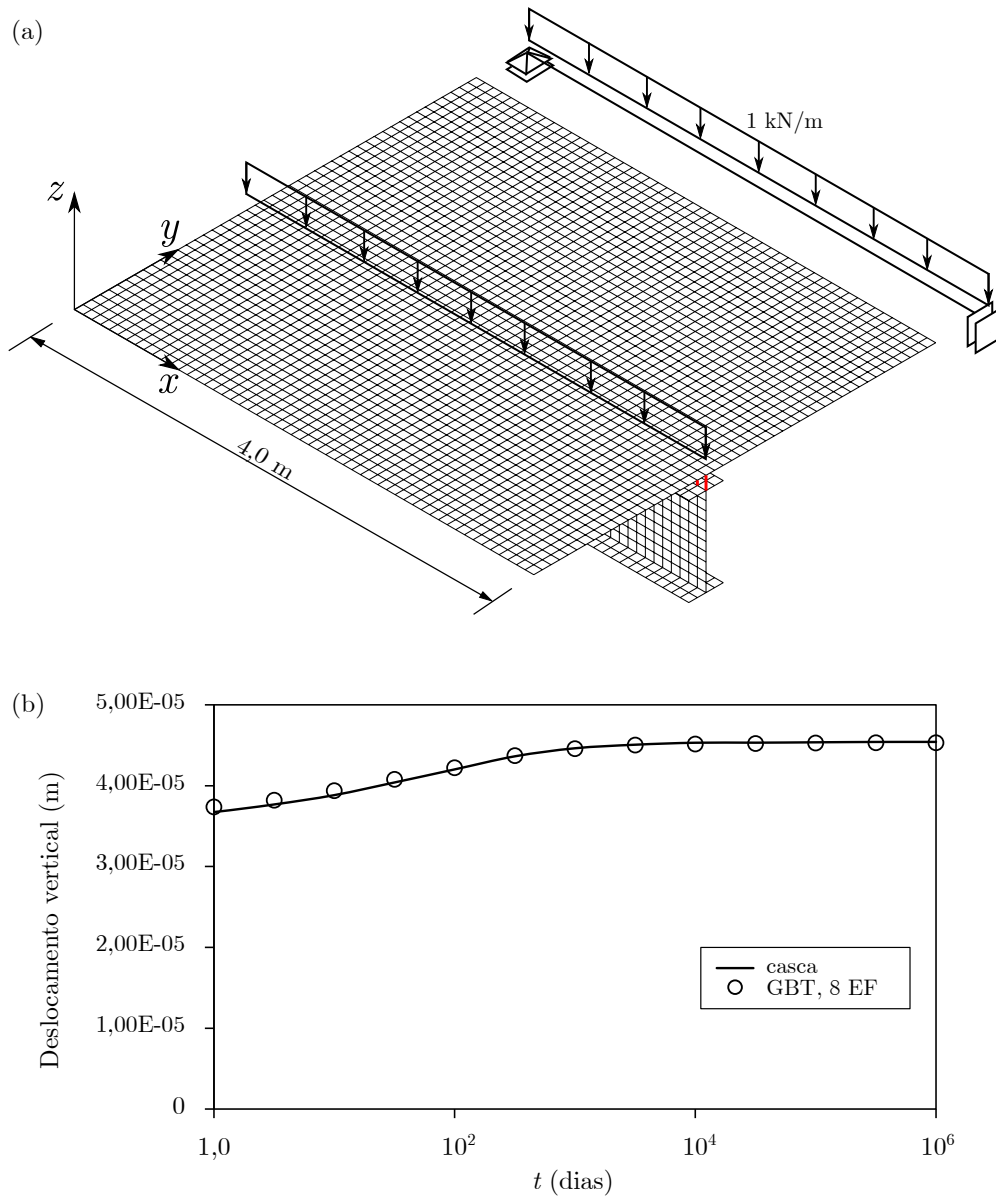


Figura 5.7: Viga mista em consola: (a) modelo de elementos de casca e modelo estrutural, (b) evolução no tempo do deslocamento vertical a meio-vão.

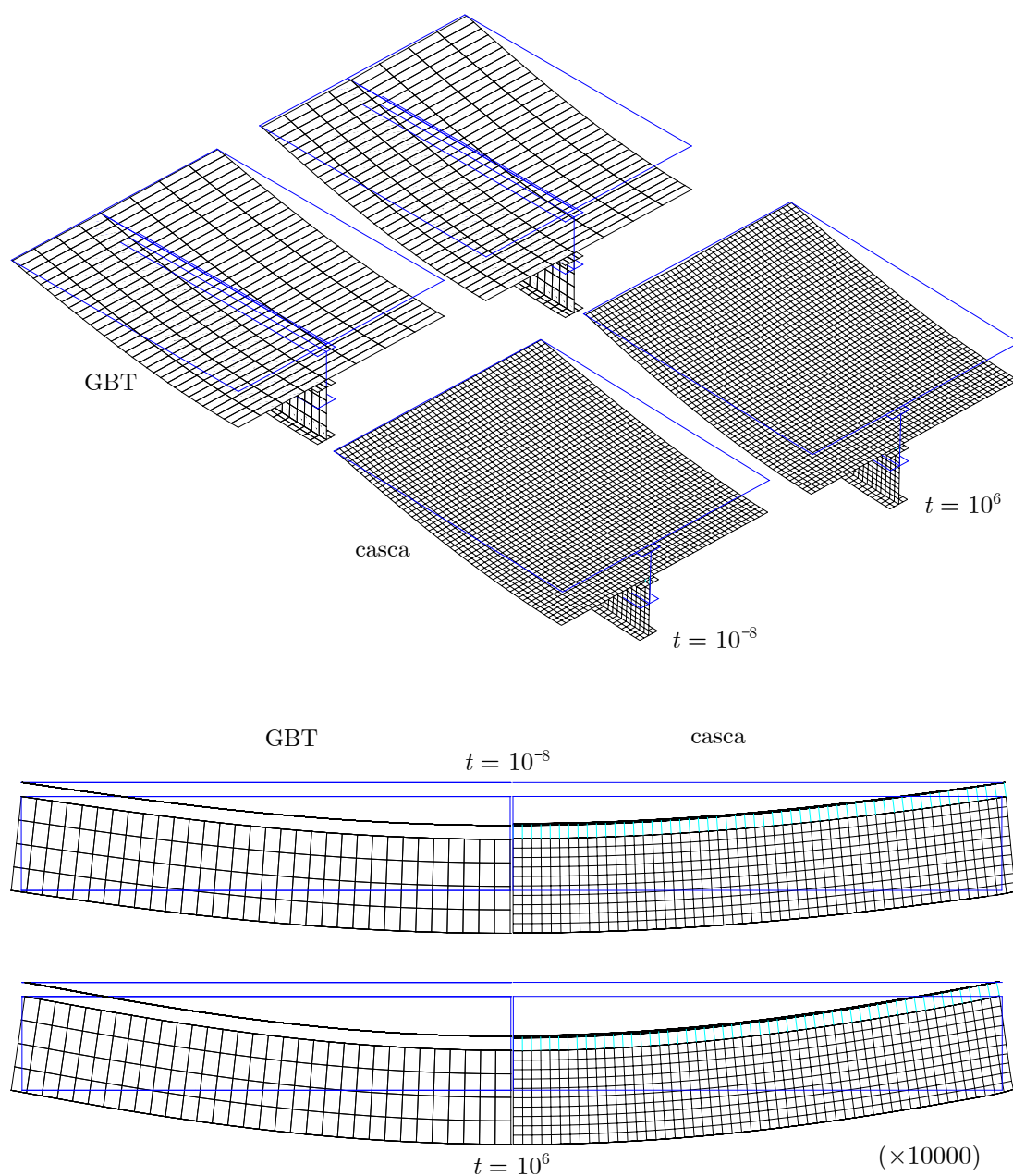


Figura 5.8: Viga mista em consola: configurações deformadas obtidas com os modelos de elementos finitos da GBT (8 elementos) e de casca.

superfícies médias da laje de betão e o banzo superior de aço é materializada através de *rigid links*.

Os resultados obtidos são exibidos nas figuras 5.7(b), 5.8 e 5.9. Em particular:

- (i). O gráfico da figura 5.7(b) mostra a evolução no tempo do deslocamento vertical a meio-vão, obtido com a GBT (8 elementos finitos e 4 modos de *shear lag*) e o modelo de elementos de casca. Também foram realizadas análises com um único elemento e/ou adicionando modos de *shear lag* cúbicos e quárticos. No entanto, os resultados variam apenas 0,1% e, portanto, não são representados na figura. Isto significa que,

para o cálculo do deslocamento vertical, um único elemento e 4 modos de *shear lag* já permitem obter a convergência de resultados. Comparando os resultados da GBT com os do modelo de elementos de casca, a diferença média é inferior a 1%, com um máximo de 2% para 1 dia e um mínimo de 0,04% aos 104 dias.

- (ii). A figura 5.8 exhibe as configurações deformadas correspondentes aos dois modelos (GBT e casca), para $t = 10^{-8}$, 10^6 dias. Estas configurações permitem confirmar que o elemento finito da GBT reproduz, com precisão, os resultados obtidos com o modelo de elementos de casca. Os resultados da GBT foram obtidos com 8 elementos finitos, 4 modos de *shear lag* e, para efeitos de visualização, as paredes foram subdivididas em 4 elementos ao longo de x e y .
- (iii). Os gráficos (a) e (b) da figura 5.9 mostram as funções de amplitude modal para $0 < x < 4$ m, obtidas com 8 elementos finitos e 4 modos de *shear lag*⁴, para $t = 10^{-8}$ e $t = 10^6$ dias. Conclui-se que a flexão (F) tem a maior participação, aumentando 36% com o tempo, enquanto que o modo de corte na alma (C) naturalmente varia muito pouco — este modo envolve não só o corte na alma do perfil, mas também a flexão dos banzos e da laje, pelo que a sua rigidez também é (pouco) afetada pela fluência. Todos os modos de empenamento, cujas amplitudes são dadas por $\phi_{k,x}$, também aumentam significativamente com o tempo, evidenciando que a deformação por *shear lag* se torna mais pronunciada. Observe que, tal como no caso do modo de corte na alma (C), as amplitudes destes modos são máximas nos apoios (esforço transversal máximo) e nulas a meio-vão (esforço transversal nulo). Finalmente, é de referir que as participações são mais altas para os modos que envolvem a parede de betão mais larga (SL2 e SQ2).
- (iv). O gráfico da figura 5.9(c) permite observar as deformações longitudinais de membrana na laje de betão, a meio-vão, obtidas com a GBT (para várias discretizações e modos de *shear lag*) e com o modelo de elementos casca, para $t = 10^{-8}$ e 10^6 dias. Naturalmente, devido à fluência, as deformações aumentam com o tempo. Estes resultados mostram que, para o instante inicial, um único elemento finito da GBT com 4 modos de *shear lag* é suficiente para obter resultados precisos (as diferenças em relação ao modelo de elementos de casca são inferiores a 2%). No entanto, para $t = 10^6$ dias, são necessários mais elementos — com um único elemento as diferenças em relação ao modelo de elementos de casca variam entre 15 e 17%, mesmo considerando 8 modos de *shear lag*. Para obter resultados precisos é necessário considerar 8 elementos finitos e 4 modos de *shear lag*, o que diminui as diferenças para menos de 2%.
- (v). Finalmente, o gráfico da figura 5.9 (d) mostra as tensões normais longitudinais na laje (σ_{xx}), obtidas nos pontos de integração mais próximos do meio-vão e da face

⁴Numa análise separada foram considerados, em acréscimo, os modos de *shear lag* de ordem superior. Contudo, como os resultados não se alteraram significativamente (a participação dos modos adicionais é muito reduzida), não são apresentados.

superior da laje. Tanto no modelo da GBT como no modelo de elementos de casca, a integração na espessura envolve dois pontos de Gauss, o que significa que a coordenada z dos pontos é a mesma. Em relação à coordenada x , no modelo de casca são representadas as tensões no centro do elemento mais próximo do meio-vão (a média das tensões dos quatro pontos de integração na camada z considerada) e, no modelo GBT, são considerados 8 elementos finitos e são representadas as tensões nos pontos de integração mais próximos do meio-vão — isto conduz a diferenças no ponto de determinação de tensões entre os dois modelos de menos de 2 cm segundo x . Os resultados mostram uma diminuição das tensões com o tempo, devido à fluência (tal como esperado). Observa-se que os resultados da GBT são praticamente coincidentes com os do modelo de elementos de casca, mesmo com apenas 4 modos de *shear lag*. Esta coincidência é notável não só pelo facto de o modelo de elementos da GBT possuir muito menos GDL, mas também por se verificar que as tensões variam muito rapidamente na direção da espessura: por exemplo, para o par de pontos de integração na espessura mais próximos da conexão, a variação da tensão é de cerca de 20 kPa para $t = 10^{-8}$ e 8 kPa para $t = 10^6$, valores da mesma ordem de grandeza dos mostrados no gráfico.

5.4.3 Viga mista simplesmente apoiada com duplo caixão de aço

O último exemplo deste Capítulo consiste numa ponte mista simplesmente apoiada com 20 m de vão. A secção transversal apresenta dois caixões de aço, tal como mostra a figura 5.10(a), com (dimensões em mm) $h_c = 300$, $b_{c1} = 1500$, $b_{c2} = 2000$, $b_{c3} = 2000$, $t_f = 30$, $t_b = 15$, $b_f = 300$ e $h_w = 770$. A ponte encontra-se sujeita a uma carga pontual excêntrica a meio-vão, como se pode observar na figura 5.11(a). Com este exemplo, pretende-se mostrar as capacidades do elemento finito proposto quando ocorre torção e distorção da secção transversal. Efetua-se uma simplificação de simetria nos modelos (considera-se apenas metade da ponte).

Os modos de deformação da GBT são calculados de acordo com o procedimento proposto por Gonçalves e Camotim (2010), que se baseia na discretização da secção transversal ilustrada na figura 5.10(b). Deve referir-se que (i) as barras diagonais nos caixões representam o efeito de diafragmas) e (ii) são mais uma vez considerados *rigid-links* na ligação aço-betão. Os modos de deformação resultantes são representados na figura 5.10(c) onde: (i) os modos 1-4 correspondem aos modos clássicos da teoria de Vlasov (extensão axial, duas flexões em torno de eixos centrais principais e torção em torno do centro de corte), (ii) o modo 5 é distorcional (envolve empenamento e a deformação da secção no seu plano) sem que ocorra deformação nos diafragmas nem distorções de membrana ($\gamma_{xy}^M = 0$, hipótese de Vlasov), (iii) os modos 6-7 também são distorcionais e obedecem à hipótese de Vlasov, mas correspondem a extensões simétricas e anti-simétricas das diagonais, e (iv) os modos 8-13 envolvem distorções de membrana nas paredes de aço sem extensão das diagonais. Com estes modos torna-se extremamente fácil modelar o efeito da presença de diafragmas,

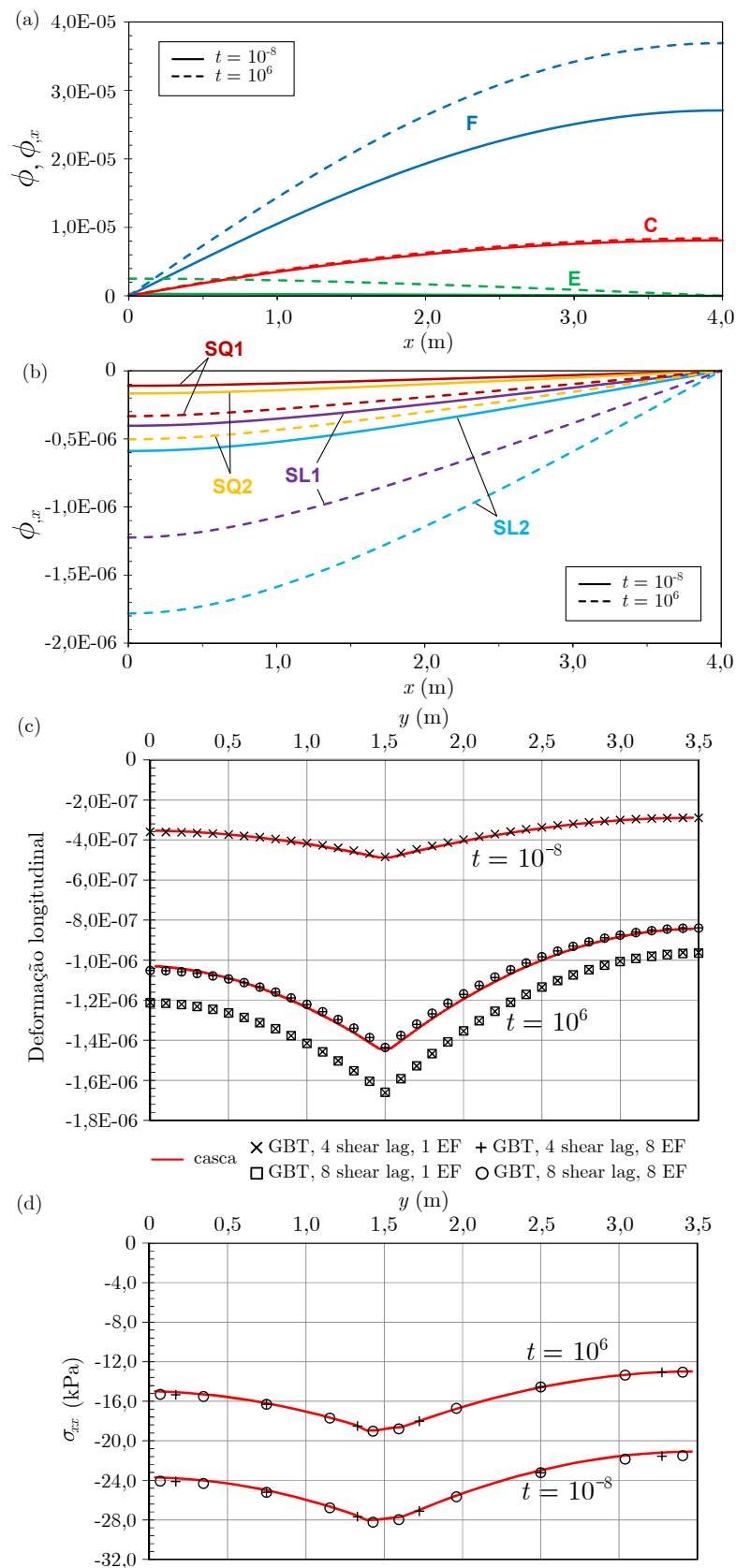


Figura 5.9: Viga mista em consola: (a)-(b) funções de amplitude modais, (c) deformação longitudinal de membrana a meio-vão e (d) tensões normais longitudinais nos pontos de integração mais próximos do meio-vão e da face superior da laje.

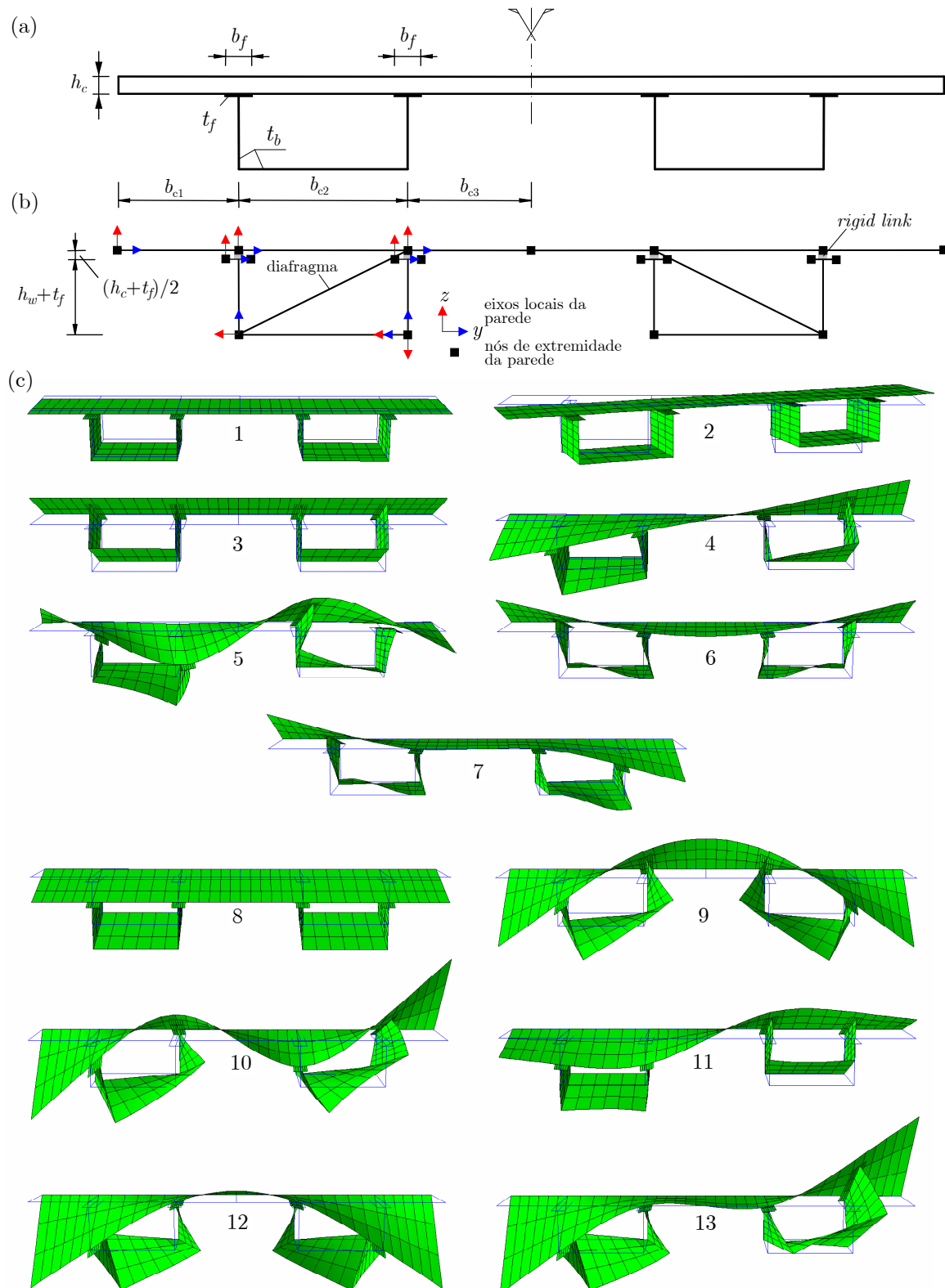


Figura 5.10: Viga mista simplesmente apoiada com duplo caixão de aço: (a) geometria da secção transversal, (b) discretização da secção (os eixos locais são representados) e (c) modos de deformação.

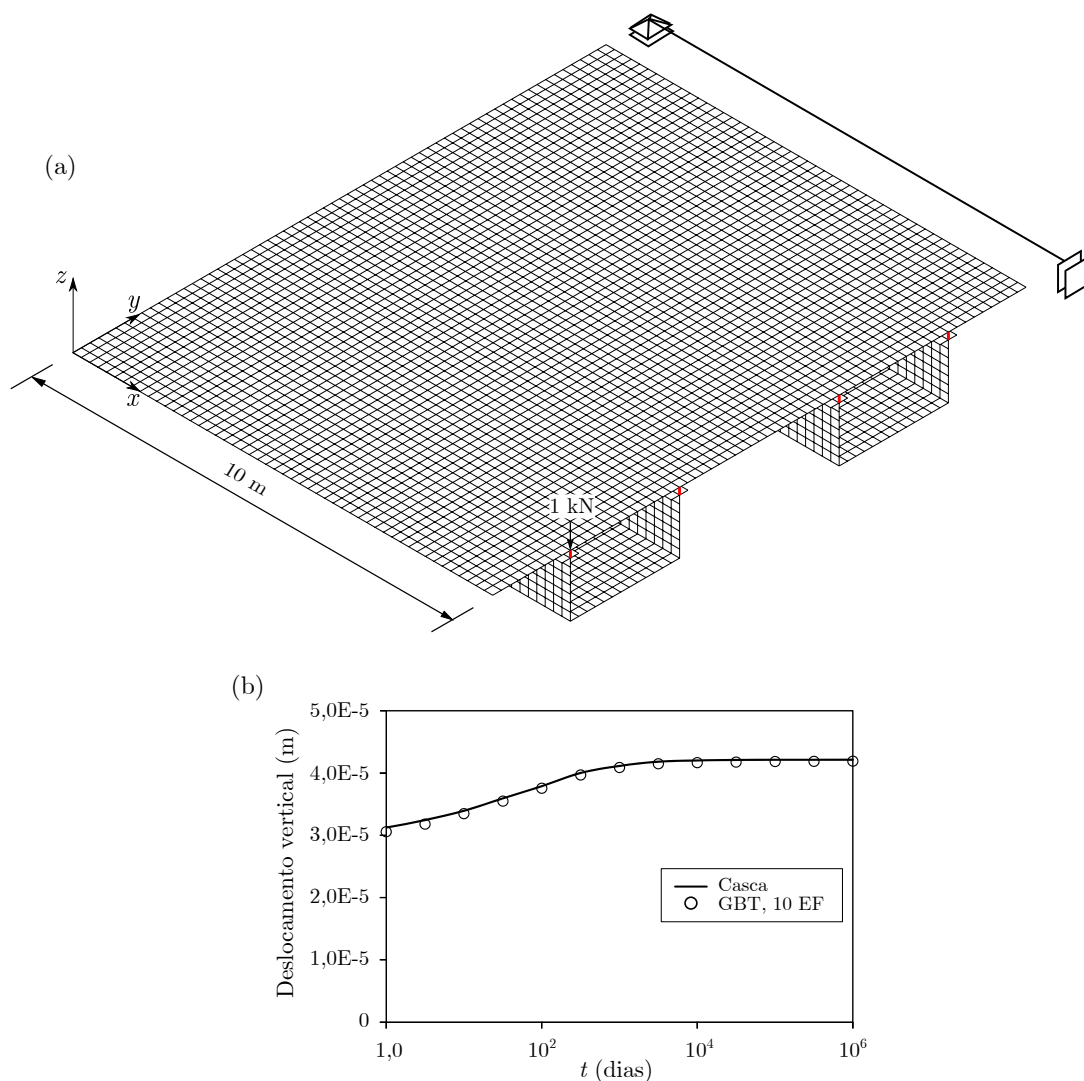


Figura 5.11: Viga mista simplesmente apoiada com duplo caixão de aço: (a) modelo de elementos de casca e modelo estrutural, (b) evolução no tempo do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga.

bastando para tal impor $\phi_6 = \phi_7 = 0$ nas abcissas relevantes. Tal como no exemplo da Secção anterior, pode ser considerada uma discretização mais refinada da secção transversal, mas os resultados que se mostram de seguida demonstram que a escolhida conduz já a resultados extremamente precisos.

Para as análises com a GBT são considerados os 13 modos de deformação mostrados na figura 5.10(c), o que conduz a uma matriz de rigidez elementar de dimensão 51×51 . Para um único elemento obtêm-se 26 GDL após a eliminação dos GLD restringidos nos apoios. No entanto, foram usados 10 elementos (260 GDL) em todas as análises, garantindo assim resultados convergentes (recorde-se que foi referido na Secção 5.3.3 que as análises são muito rápidas).

O modelo de elementos de casca utilizado para efeitos de comparação encontra-se representado na figura 5.11(a) e envolve aproximadamente 32000 GDL. Como no exemplo

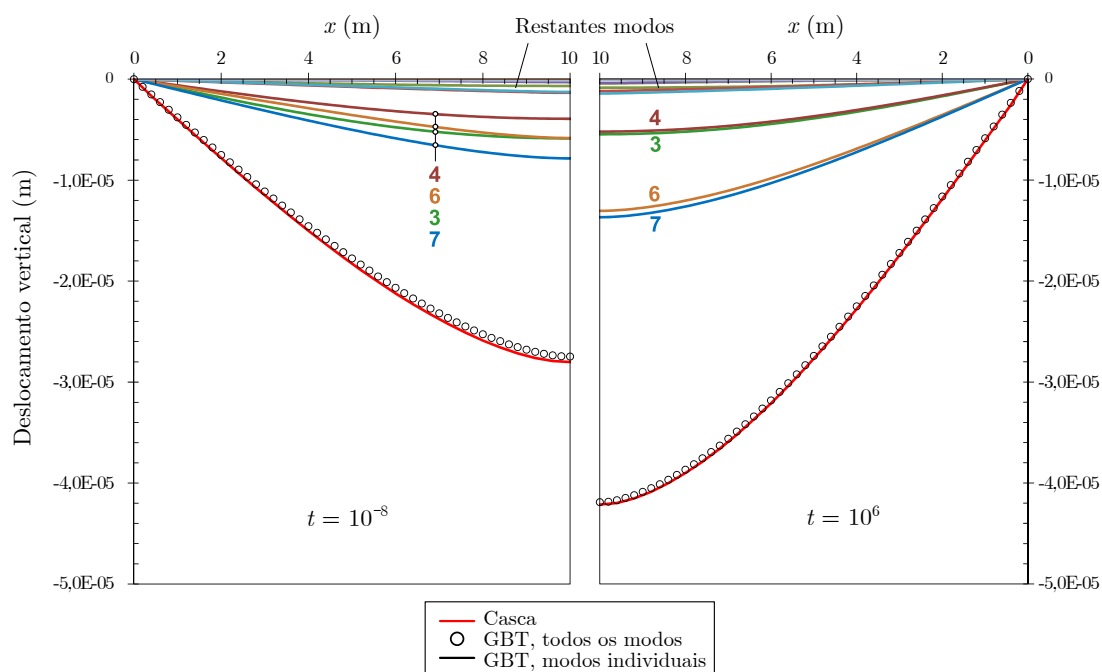


Figura 5.12: Viga mista simplesmente apoiada com duplo caixão de aço: deslocamento vertical do alinhamento longitudinal do ponto de aplicação da carga.

anterior, são usados *rigid links* na conexão entre a laje de betão e os banzos superiores dos caixões de aço.

Os resultados obtidos são exibidos nas figuras 5.11-5.13 e levam às seguintes conclusões:

- (i). O gráfico da figura 5.11(b) refere-se à evolução do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga com o tempo. Observa-se uma excelente concordância entre os modelos de elementos da GBT e de casca. Em particular, a diferença média entre ambos os modelos é de 1,1%, com um máximo de 2,2% para 1 dia e um mínimo de 0,6% para 106 dias.
- (ii). Os gráficos da figura 5.12 fornecem o andamento, desde o apoio esquerdo ao meio-vão ($0 < x < 10$ m), do deslocamento vertical do alinhamento longitudinal do ponto de aplicação da carga, bem como as contribuições de cada modo de deformação para esse deslocamento. A comparação entre os resultados dos dois modelos (casca e GBT com todos os modos) mostra mais uma vez que existe uma excelente concordância, tanto para o tempo inicial (diferença de 2,0%) como para o tempo final (diferença de 0,6%). A observação das contribuições de cada modo de deformação da GBT permite obter informações adicionais acerca do comportamento estrutural da ponte. Em particular, os modos 3 (flexão), 4 (torção), 6 (distorção simétrica) e 7 (distorção anti-simétrica) são claramente dominantes, mas as suas contribuições alteram-se de forma distinta entre o tempo inicial e tempo final: 124% para o modo 7, 74% para modo 6, 33% para o modo 4 e 7% para o modo 3, ou seja, a contribuição do modo de flexão é a que menos aumenta.

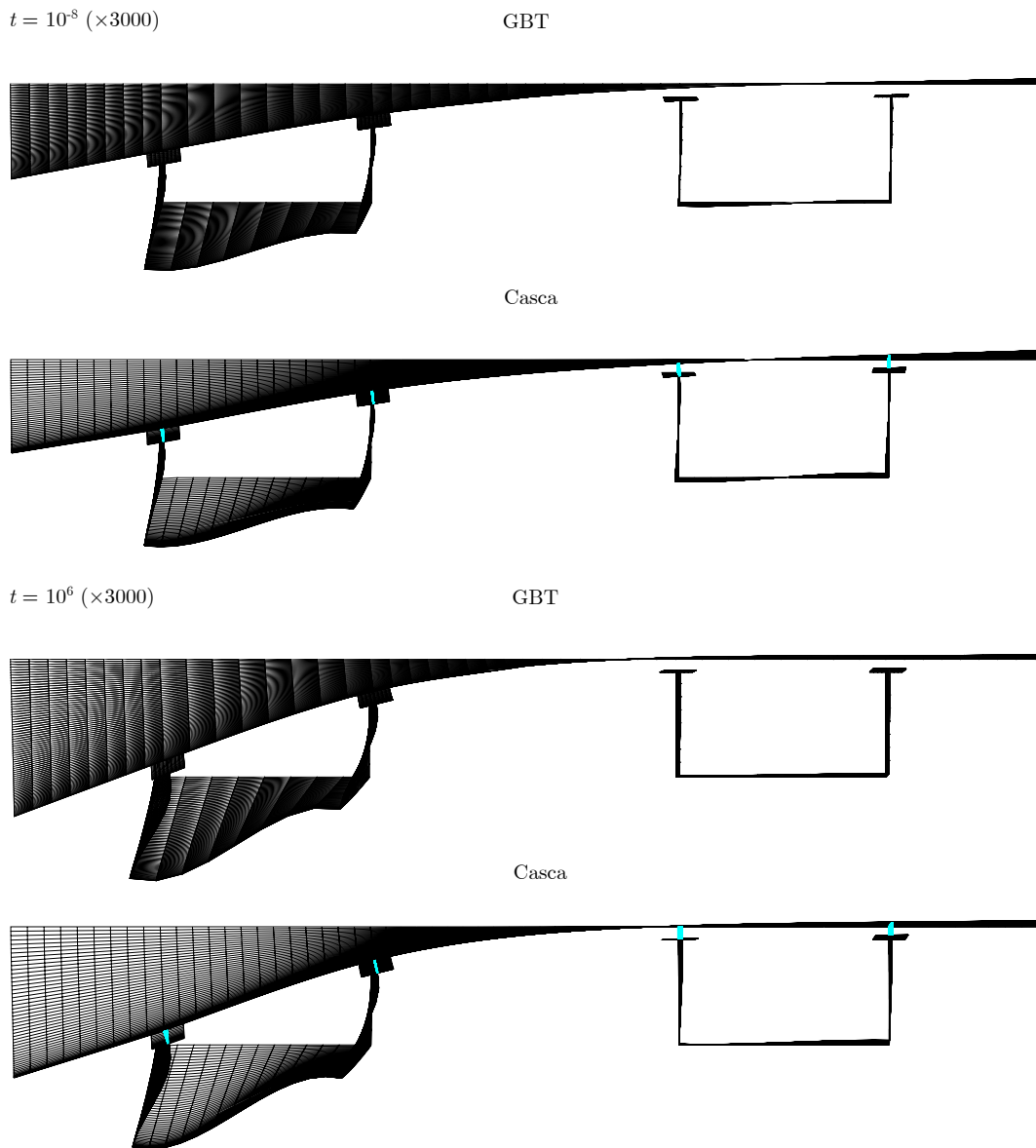


Figura 5.13: Viga mista simplesmente apoiada com duplo caixão de aço: alçado frontal das configurações deformadas para $t = 10^{-8}$ e $t = 10^6$.

- (iii). Finalmente, a figura 5.13 mostra as configurações deformadas em alçado frontal, obtidas com os dois modelos, para $t = 10^{-8}$ e $t = 10^6$. Estes resultados mostram claramente que o elemento finito da GBT é capaz de capturar, com muita precisão, os resultados do modelo de elementos de casca. É observado um aumento pronunciado da distorção do caixão esquerdo (onde a carga é aplicada). Por sua vez, o caixão direito não exhibe deslocamentos significativos.

5.5 Sumário

Neste Capítulo foi apresentado e validado um elemento finito, baseado na GBT, que combina os efeitos da fluência do betão e a deformação da secção transversal, incluindo os efeitos da distorção e de *shear lag*. A fluência é modelada adotando uma lei viscoelástica linear e aproximando a função de fluência por uma expansão em série de Dirichlet.

Como se admite que os materiais são elásticos lineares (o betão tem um comportamento visco-elástico linear), o elemento finito proposto é extremamente eficiente, dado que a análise no tempo não requer iterações e é possível adotar as hipóteses simplificativas habituais da GBT para diminuir o número de modos de deformação (e, portanto, o número de GDL).

Os exemplos apresentados mostram claramente que o elemento finito proposto é capaz de analisar problemas complexos com grande precisão e eficiência computacional, isto é, (i) os resultados são semelhantes aos obtidos com modelos refinados de elementos de casca e (ii) as análises envolvem muito menos GDL e são significativamente mais rápidas. Além disso, a natureza modal da solução da GBT permitiu identificar os modos de deformação mais relevantes para o comportamento estrutural do problema em análise.

Capítulo 6

Fluência e fendilhação em vigas mistas aço-betão

6.1 Introdução

Neste capítulo introduz-se o efeito da fendilhação do betão no elemento finito apresentado no Capítulo 5, com o objetivo de permitir analisar, de forma computacionalmente eficiente, o comportamento de vigas mistas aço-betão, com secção deformável, em serviço.

A fendilhação do betão é modelada utilizando um modelo de fenda fixa distribuída, considerando que pode ocorrer a abertura de duas fendas ortogonais, em planos perpendiculares à superfície média da laje de betão. Tal como no Capítulo anterior, a fluência é modelada através de uma lei viscoelástica linear, efetuando uma expansão da função de fluência numa série de Dirichlet. A combinação dos dois efeitos (fluência e fendilhação) é efetuada através de um modelo com decomposição de deformações betão/fenda.

Para demonstrar as potencialidades do elemento finito proposto, apresentam-se vários exemplos de aplicação. Para efeitos de comparação, são apresentados resultados obtidos com modelos de elementos finitos de casca, analisados no programa *DIANA* (DIANA FEA BV, 2019), o qual permite adotar um modelo constitutivo muito semelhante ao implementado no elemento finito proposto.

A pesquisa bibliográfica efetuada revelou que não existem, atualmente, elementos finitos de barra para vigas mistas aço-betão que combinem os efeitos da fendilhação e fluência do betão com a deformação arbitrária da secção transversal. Assim, o elemento finito que se apresenta neste Capítulo constitui mais um significativo desenvolvimento relativamente ao atual estado-da-arte.

6.2 Especificidades do elemento finito proposto

Conforme referido anteriormente, o elemento finito proposto baseia-se no elemento apresentado no Capítulo 5, o qual não considera o efeito a fendilhação do betão. O modelo de fenda é significativamente mais rigoroso (e conseqüentemente mais complexo) do que o

utilizado no Capítulo 3, para a determinação de cargas de colapso. Em particular torna-se agora necessário considerar que a laje de betão está sujeita a um estado plano de tensão, o que implica que as hipóteses simplificativas relativas ao estado de deformação e tensão adotadas no Capítulo 3 (Secção 3.3) têm de ser abandonadas.

De seguida, apresentam-se as leis constitutivas para o aço (Secção 6.2.1) e betão (Secção 6.2.2), incluindo os respetivos aspetos algorítmicos. Finalmente, na Secção 6.2.3, apresenta-se a formulação do elemento finito proposto.

6.2.1 Lei constitutiva para o aço

Tal como nos Capítulos 4 e 5, adota-se um comportamento elástico linear para o perfil de aço com o constrangimento $\varepsilon_{yy}^M = \sigma_{yy}^M = 0$. Assim, as matrizes constitutivas para os termos de membrana e flexão são dadas por

$$\sigma_a^M = C_a^M \varepsilon_a^M, \quad C_a^M = \begin{bmatrix} E_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_a \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

$$\sigma_a^F = C_a^F \varepsilon_a^F, \quad C_a^F = \begin{bmatrix} \frac{E_a}{1-\nu_a^2} & \frac{\nu_a E_a}{1-\nu_a^2} & 0 \\ \frac{\nu_a E_a}{1-\nu_a^2} & \frac{E_a}{1-\nu_a^2} & 0 \\ 0 & 0 & G_a \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

onde, tal como anteriormente, E_a é o módulo de elasticidade e G_a o módulo de distorção para o aço em perfil.

Para a armadura considera-se um comportamento uniaxial. Assim, considerando armadura em ambas as direções (longitudinal x e transversal y), tem-se

$$\sigma_s = C_s \varepsilon_s, \quad C_s = \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

onde E_s é o módulo de elasticidade para o aço em armadura.

6.2.2 Combinação da fluência e da fendilhação

O modelo constitutivo adotado para o betão é baseado nos modelos clássicos de fenda fixa distribuída, sendo consideradas uma ou duas fendas ortogonais. A combinação dos efeitos da fluência e fendilhação é feita de acordo com um modelo de decomposição de deformações (Bazant e Gambarova, 1980; Bazant e Chern, 1985; de Borst e Nauta, 1985; de Borst, 1987; Litton, 1974; Riggs e Powell, 1986; Rots et al., 1985) esquematicamente representado na figura 6.1, onde a fluência (cadeia de Kelvin) afeta apenas o betão intacto (índice inferior co) e não a fenda (índice inferior cr). Assim, um determinado incremento de deformação no betão fendilhado é dado pela decomposição

$$d\varepsilon = d\varepsilon_{co} + d\varepsilon_{cr}. \quad (6.4)$$

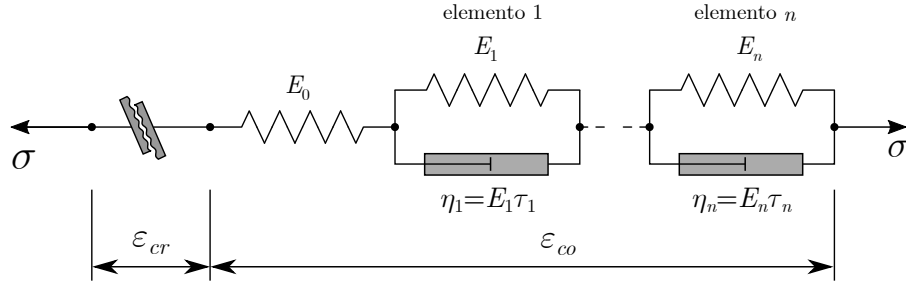


Figura 6.1: Modelo de decomposição de deformação considerando fendilhação e fluência.

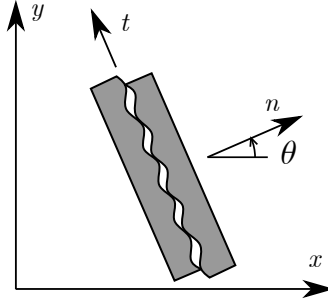


Figura 6.2: Eixos globais e locais para uma fenda.

Quando se forma uma fenda torna-se conveniente relacionar as componentes de deformação e tensão nos sistemas de eixos global (x, y) e local da fenda (n, t) , representados na figura 6.2. Estas relações podem ser escritas na forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{cr} = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{cr}^L, \quad (6.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^L = \mathbf{T} \boldsymbol{\sigma}, \quad (6.6)$$

onde o índice superior $(\cdot)^L$ identifica grandezas expressas no referencial local e

$$\boldsymbol{\varepsilon}^L = \begin{bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \gamma_{nt} \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^L = \begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{nt} \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

sendo \mathbf{T} a matriz de transformação, que depende do ângulo da fenda θ (ilustrado na figura 6.2).

Para cada fenda, a relação constitutiva incremental associada aos eixos locais pode ser expressa na forma genérica

$$d\boldsymbol{\sigma}_{cr}^L = \mathbf{C}_{cr} d\boldsymbol{\varepsilon}_{cr}^L, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{C}_{cr} = \begin{bmatrix} C_{nn} & 0 \\ 0 & C_{nt} \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

O módulo tangente na direção normal à fenda, C_{nn} , depende da lei uniaxial adotada. No presente trabalho considera-se a lei representada na figura 6.3, onde f_{ct} é a tensão de resistência à tração e ε_{ult} é a deformação correspondente a $\sigma_{nn} = 0$. Relativamente ao módulo correspondente às tensões tangenciais, C_{nt} , admite-se que é constante e dado por (ver, por exemplo, Rots et al., 1985)

$$C_{nt} = \frac{\beta G_c}{1 - \beta}, \quad (6.12)$$

onde $G_c = E_c/(1 - \nu_c)$ é o módulo de distorção do betão intacto e $\beta \leq 1$ é o chamado “fator de retenção de corte” (*shear retention factor* da designação em língua inglesa), o qual representa a redução da rigidez ao corte devido à fendilhação e, no presente trabalho, é assumido constante. A expressão (6.12) pode ser obtida notando que, como o modelo adotado corresponde a um arranjo em série dos “materiais” betão e fenda, tem-se

$$\frac{1}{\beta G_c} = \frac{1}{G_c} + \frac{1}{C_{nt}} \Rightarrow C_{nt} = \frac{\beta G_c}{1 - \beta}. \quad (6.13)$$

A fluência do betão é modelada de acordo com o exposto no Capítulo 5, sendo de notar que no presente caso não existe qualquer vantagem em separar os termos de membrana e flexão. Assim, a lei constitutiva incremental é análoga a (5.8), apenas havendo que retirar o efeito da fendilhação de acordo com (6.4), resultando em

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_c^* (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{cr} - \boldsymbol{\Gamma}) \quad (6.14)$$

em que $\boldsymbol{\Gamma}$ é dado pela equação (5.9) e

$$\mathbf{C}_c^* = \begin{bmatrix} \frac{E^*}{1 - \nu_a^2} & \frac{\nu_c E^*}{1 - \nu_a^2} & 0 \\ \frac{\nu_c E^*}{1 - \nu_c^2} & \frac{E^*}{1 - \nu_a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E^*}{2(1 + \nu_c)} \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

onde E^* é dado pela equação (5.6).

Usando as equações (6.5)-(6.9), a lei constitutiva pode ser reescrita em função da deformação total, ou seja,

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_c^{cr} (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\Gamma}), \quad (6.16)$$

onde a matriz constitutiva para o betão fendilhado é dada por

$$\mathbf{C}_c^{cr} = \mathbf{C}_c^* - \mathbf{C}_c^* \mathbf{T}^T (\mathbf{C}^{cr} + \mathbf{T} \mathbf{C}_c^{cr} \mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{T} \mathbf{C}_c^*. \quad (6.17)$$

Os aspetos algorítmicos do modelo de decomposição de deformações (sem fluência) encontram-se descritos com pormenor em Sena-Cruz et al. (2004), pelo que apenas se salientam no presente texto os pontos essenciais.

No âmbito de um processo incremental/iterativo, as tensões (incrementais) em cada ponto de integração, no final de cada iteração, são calculadas a partir da condição

$$\mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (6.18)$$

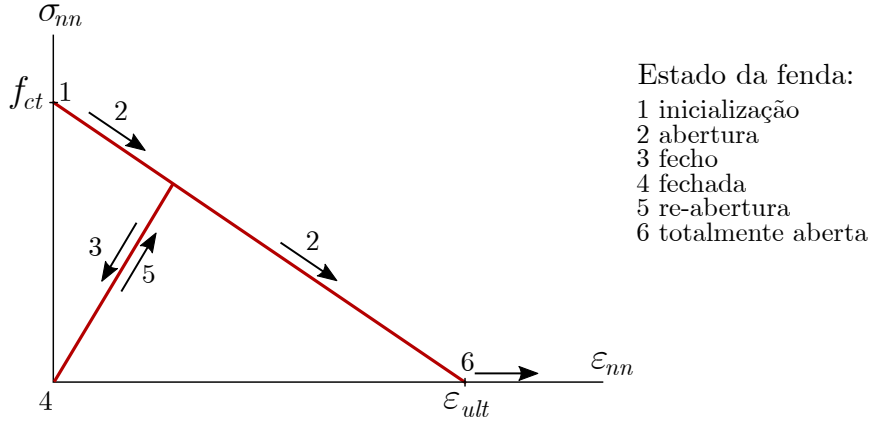


Figura 6.3: Lei constitutiva uniaxial da fenda.

a qual impõe que o estado de tensão na fenda é igual ao do betão

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \Delta \boldsymbol{\sigma}_{cr}^L - \Delta \boldsymbol{\sigma}^L, \\ &= \Delta \boldsymbol{\sigma}_{cr}^L - \mathbf{T} \mathbf{C}_c^* (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{T}^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{cr}^L - \boldsymbol{\Gamma}). \end{aligned} \quad (6.19)$$

A solução de (6.18) é obtida através do método de Newton-Raphson (local), para o qual é necessário utilizar a derivada

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{cr}^L)} = \mathbf{C}^{cr} + \mathbf{T} \mathbf{C}_c^* \mathbf{T}^T. \quad (6.20)$$

Contudo, a determinação das tensões requer também a monitorização do estado das fendas, uma vez que uma alteração de estado acarreta a alteração da lei constitutiva — veja-se a figura 6.3, que representa a lei uniaxial de uma fenda e os seus diferentes estados, e a figura 6.4, que ilustra os caso possíveis para duas fendas.

Em termos práticos, para cada ponto de integração e em cada iteração, recorre-se ao seguinte procedimento:

- (i). As deformações incrementais $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ (isto é, as deformações desde a última configuração de equilíbrio) são aplicadas na sua totalidade e verifica-se se ocorrem alterações de estado.
- (ii). Se não ocorrem alterações de estado, as tensões são puramente elásticas (se não existem fendas abertas) ou determinadas resolvendo a equação (6.18) (se existem fendas abertas).
- (iii). Se ocorrem alterações de estado, as deformações $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ são aplicadas em sub-incrementos correspondentes a cada alteração, sendo os pontos de transição detetados recorrendo ao método da bissecção. No final de cada sub-incremento as tensões são obtidas tal como descrito no ponto (ii), considerando a lei constitutiva apropriada.

Uma vez que são consideradas, no máximo, duas fendas ortogonais, as expressões anteriores podem ser facilmente adaptadas usando as seguintes expressões (os índices 1 e 2

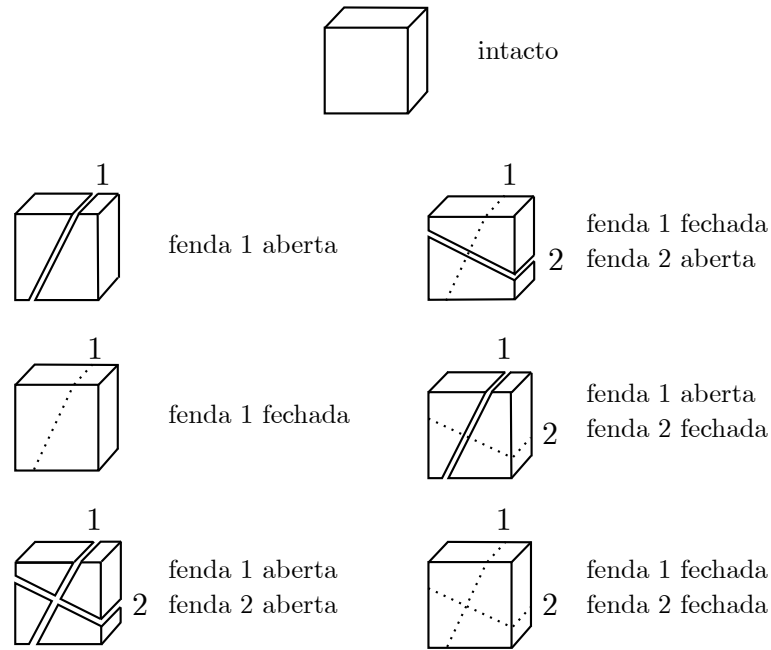


Figura 6.4: Casos possíveis para duas fendas ortogonais (adaptado de Póvoas, 1991).

designam o número da fenda)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

$$\mathbf{C}_{cr} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cr1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{cr2} \end{bmatrix}, \quad (6.22)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^L = \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\sigma}_1^L \\ \Delta \boldsymbol{\sigma}_2^L \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^L \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2^L \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Obviamente, uma vez que as fendas são fixas e ortogonais, as matrizes de transformação \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 ficam automaticamente definidas após a formação da primeira fenda, independentemente do historial de deformação posterior.

6.2.3 Formulação do elemento finito

Mais uma vez, o elemento finito é obtido através da interpolação das funções de amplitude dos modos de deformação de acordo com $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{d}$, recorrendo às mesmas funções de interpolação dos Capítulos anteriores (com exceção do exemplo da Secção 6.3.1).

A matriz de rigidez tangente e o vetor das forças internas elementares são imediatamente

dados pelas expressões (2.86) e (2.88), ou seja,

$$(\mathbf{K}_t)_e = \int_{V_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \Xi_\varepsilon^T \mathbf{C}_t \Xi_\varepsilon \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} dV, \quad (6.25)$$

$$\mathbf{Q}_e = \int_{V_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \Xi_\varepsilon^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (6.26)$$

onde a matriz constitutiva tangente \mathbf{C}_t depende do material em causa: (i) \mathbf{C}_a^M e \mathbf{C}_a^F para as componentes de membrana e de flexão do aço em perfil, dadas pelas equações (6.1) e (6.2), respetivamente, (ii) \mathbf{C}_s para as armaduras (equação (6.3)), e (iii) \mathbf{C}_c^{cr} para o betão (equação (6.17)).

O vetor das forças exteriores incremental elementar é constituído por duas partes: uma que tem em conta as forças exteriores aplicadas, sendo diretamente obtida de (2.87) e outra que considera as variáveis de estado $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^*$ (ver a equação (5.9)). Tem-se assim

$$\Delta \mathbf{F}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^T \bar{\Xi}_U^T \Delta \bar{\mathbf{f}} d\Omega + \int_{V_e} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \Xi_\varepsilon^T \mathbf{C}_c^* \boldsymbol{\Gamma} dV. \quad (6.27)$$

Tal como no Capítulo anterior, os graus de liberdade \mathbf{d} são calculados em cada passo de tempo. No entanto, devido à fendilhação são agora necessárias iterações até obter a convergência, após a qual são atualizadas as variáveis de estado.

Novamente, recorre-se à regra de quadratura de Gauss para integrar as matrizes de rigidez, o vetor das forças internas e o vetor das forças externas (os detalhes são fornecidos em cada exemplo). Deve salientar-se que o aço (em perfil e armaduras) é considerado elástico linear, pelo que as contribuições correspondentes podem ser integradas analiticamente e calculadas apenas uma vez, no início da análise.

Comparativamente a modelos de elementos finitos de casca, o elemento finito de barra proposto, baseado na GBT, oferece essencialmente duas grandes vantagens:

- (i). Para alcançar uma determinada precisão relativamente à determinação dos efeitos da fluência e fendilhação no betão, um modelo de elementos finitos da GBT exige o mesmo número de GDL que uma discretização com elementos de casca de Kirchhoff exigiria. Em relação a elementos de casca de Reissner-Mindlin, obtém-se uma pequena vantagem com o elemento da GBT, já que os GDL associados à distorção na direção da espessura (γ_{xz} e γ_{yz}) não são considerados. Como é natural, para paredes espessas, a hipótese de Kirchhoff não é aceitável e, como tal, o modelo proposto não conduzirá a resultados aceitáveis. No entanto, a principal vantagem da GBT provém da introdução de hipóteses simplificativas aos campos de tensões e deformação na *parte de aço* da secção (conforme discutido nos exemplos da Secção (6.3)), as quais conduzem a uma

secção com muito menos GDL do que num modelo de elementos de casca, sem perda significativa de precisão dos resultados.

- (ii). A natureza modal da GBT permite obter uma interpretação estrutural muito mais clara do problema, uma vez que é possível avaliar a importância relativa de cada modo de deformação.

Por outro lado, também é verdade que os elementos finitos da GBT perdem alguma vantagem computacional em relação a modelos de casca em problemas não-lineares, uma vez que as matrizes envolvidas na implementação computacional são muito maiores e menos esparsas (conforme discutido em Gonçalves e Camotim, 2017). Por esse motivo, no exemplo da Secção 6.3.3, utilizam-se modos de deformação não-ortogonais, dado que conduzem a matrizes mais esparsas e não exigem a integração na secção completa. Assim, a participação dos modos ortogonais é recuperada *a posteriori*, na fase de pós-processamento, utilizando uma simples mudança de base. No entanto, é importante salientar uma vez mais que a contribuição do aço (elástico linear) para a matriz de rigidez e para o vetor das forças internas apenas necessita ser calculada uma vez, no início da análise.

Finalmente, é importante referir que o tempo de execução da implementação em MATLAB da formulação proposta é muito reduzido. No cálculo da curva da figura 6.20, para 6 elementos finitos e 25 modos de deformação (o caso mais exigente em termos computacionais), uma iteração típica leva menos de 0,1 segundos.

6.3 Exemplos de aplicação e validação

Tal como nos exemplos do Capítulo 5, a análise no tempo é realizada com um carregamento aplicado num primeiro intervalo muito curto ($\Delta t = 10^{-8}$ dias). A função de fluência considerada é uma vez mais dada pela equação (5.17).

Os resultados são comparados com os obtidos com o programa *DIANA*, recorrendo a elementos de placa/casca. Conforme foi já referido, este programa foi escolhido devido ao facto de permitir considerar uma lei constitutiva relativamente à fluência e à fendilhação do betão muito semelhante à adotada no presente trabalho. A única diferença reside no modelo de fenda distribuída, para o qual é permitida a abertura de múltiplas fendas não-ortogonais (em vez de apenas duas fendas ortogonais, como o modelo proposto). Para minimizar esta diferença, as análises com o programa *DIANA* são realizadas impondo um ângulo mínimo entre fendas consideravelmente elevado, o que naturalmente não garante que as fendas sejam ortogonais. Contudo, este aspeto é apenas relevante para o primeiro exemplo (Secção 6.3.1), dado que nos restantes não se formam duas fendas em nenhum ponto de integração. Refira-se ainda que os elementos de casca utilizados são do tipo Reissner-Mindlin, o que está em contraste com o modelo de Kirchhoff adotado na GBT (e, portanto, considerado no elemento finito proposto). Devido às diferenças apontadas, os dois modelos (placa/casca e GBT) conduzirão naturalmente a resultados exibindo algumas diferenças.

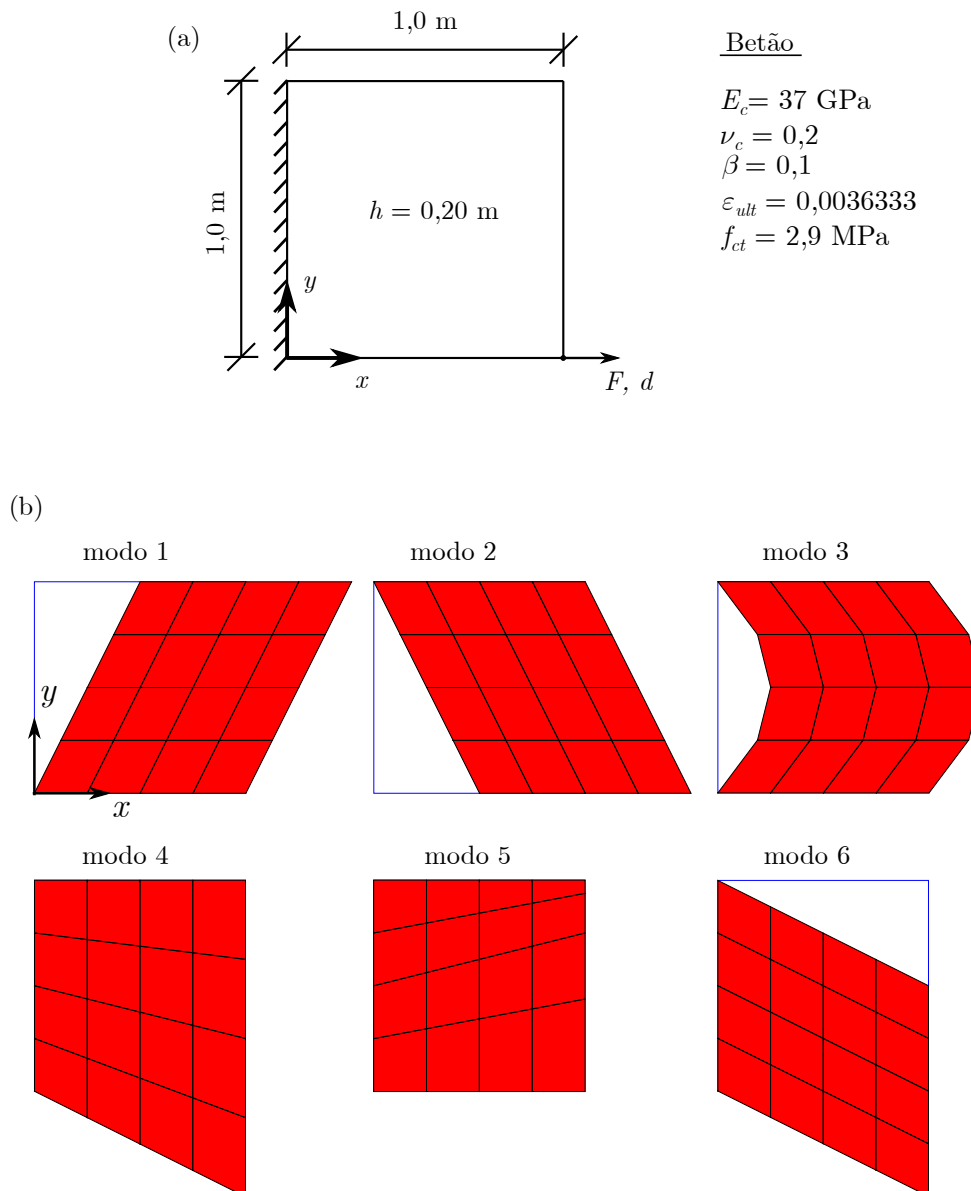


Figura 6.5: Placa de betão simples: (a) geometria, carregamento e propriedades do material e (b) modos de deformação.

6.3.1 Placa de betão simples

O primeiro exemplo tem como objetivo validar a implementação da lei constitutiva para o betão fendilhado no elemento finito proposto. É analisada uma placa quadrada de betão simples (sem armadura), com a geometria, propriedades do material e carregamento mostrados na figura 6.5(a), onde h designa a espessura da placa. Como se pretende validar apenas a implementação da lei constitutiva, modifica-se o elemento proposto de modo a que resulte idêntico ao utilizado nas análises efetuadas com o programa *DIANA* e, em todos os modelos, utiliza-se apenas 1 elemento finito.

Tendo em conta que o problema é plano, o elemento finito escolhido nas análises efetuadas com o programa *DIANA* designa-se de *CQ18M*, tratando-se de um elemento plano

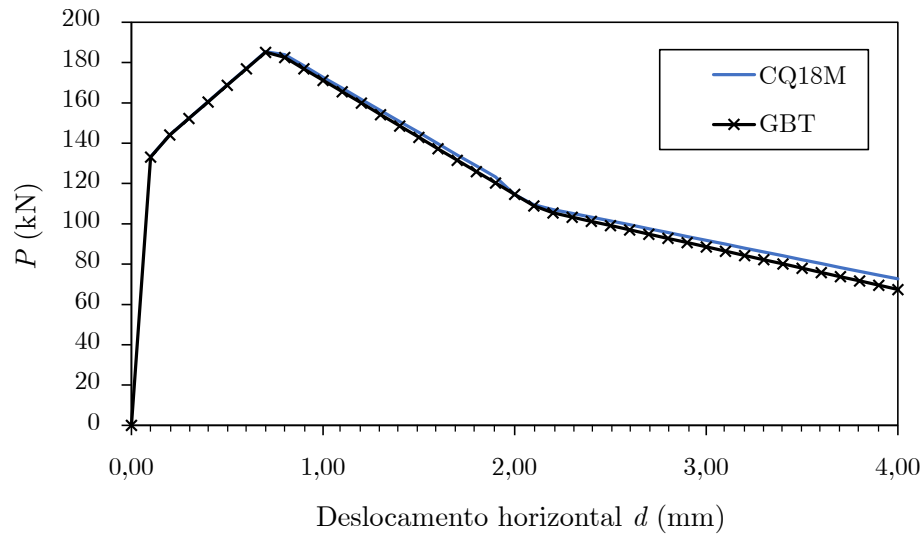


Figura 6.6: Placa de betão simples: gráfico carga-deslocamento obtido com o elemento da GBT e o elemento CQ18M.

de 9 nós (18 GDL) que utiliza funções de interpolação quadráticas de Lagrange e uma integração com 3×3 pontos de Gauss. O ângulo mínimo entre fendas foi considerado igual a 60° , dado que para valores superiores a segunda fenda surge para deslocamentos muito superiores (para ângulos maiores que 80° nem se chega a formar).

Para obter um elemento finito da GBT efetivamente idêntico ao CQ18M, utilizam-se os seis modos de deformação representados na figura 6.5(b)¹: (i) três modos de empenamento (dois lineares e um quadrático, modos 1 a 3) e (ii) três modos com deslocamentos transversais (segundo y ; dois lineares e um quadrático, modos 4 a 6). Para além disso, para manter a correspondência com o elemento CQ18M, são utilizados 3×3 pontos de Gauss e as funções de amplitude modal são interpoladas longitudinalmente com funções quadráticas de Lagrange, o que resulta no mesmo número de GDL.

Em primeiro lugar é realizada uma análise carga-deslocamento sem efeitos da fluência. Os resultados obtidos são mostrados nas figuras 6.6 e 6.7, as quais permitem comparar os gráficos carga-deslocamento obtidos e a evolução da fendilhação nos nove pontos de integração, para valores do deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga $d = 0,1; 0,2; 0,8; 2,0$ mm (o padrão da fendilhação não é alterado para deslocamentos superiores a 2,0 mm).

Estes resultados demonstram claramente que a lei constitutiva implementada no elemento finito proposto é praticamente coincidente com a implementada no elemento CQ18M. As curvas carga-deslocamento apenas diferem ligeiramente, para deslocamentos superiores a 2,0 mm, devido às diferenças entre os modelos constitutivos no que se refere à orientação da segunda fenda — aliás, observe-se que surge uma segunda fenda precisamente para $d = 2,0$

¹Nesta figura, os modos são representados adotando funções de amplitude lineares ϕ_k , o que significa que os deslocamentos de empenamento são constantes ao longo da direção longitudinal. Recorde-se que na descrição cinemática da GBT, a componente de empenamento dos deslocamentos do plano médio u (recordar a equação (2.16)) depende da derivada da função de amplitude $\phi_{k,x}$.

mm, no ponto de integração central, que no caso do elemento CQ18M não é ortogonal à primeira fenda.

De seguida, realiza-se uma análise no tempo, considerando o efeito da fluência. São aplicadas duas cargas iniciais distintas, correspondentes a um deslocamento horizontal inicial d_0 igual a 0,1 mm (figura 6.8(a)) e 0,4 mm (figura 6.8(b)). Os resultados fornecidos nestas figuras mostram que, em ambos os casos, o padrão de fendilhação não se altera com o tempo. Além disso, observa-se mais uma vez que existe uma excelente concordância entre os resultados obtidos com os dois elementos finitos.

Ainda em relação a este exemplo, é interessante notar que, para um deslocamento inicial $d_0 = 0,4$ mm (figura 6.8(b)), as análises em ambos os modelos não progridem para além de cerca de 12 dias, por falta de convergência da solução. Neste caso, obtém-se uma ligeira diferença entre os dois modelos para $t > 1$ dia.

6.3.2 Flexão de uma viga mista em consola

O segundo exemplo diz respeito a uma viga mista aço-betão em consola, com 5 metros de comprimento, cuja secção transversal, propriedades dos materiais e carregamento são fornecidos na figura 6.9(a). A viga está sujeita a uma carga uniformemente distribuída p , aplicada no plano da alma, provocando a flexão vertical da consola.

Conforme foi referido na Secção 6.2.3, a principal economia em termos de GDL do elemento proposto, face a um modelo de elementos de casca, resulta da introdução de hipóteses simplificativas relativas ao campo de tensões e deformações na viga de aço. Neste exemplo particular, é aceitável assumir que $\varepsilon_{yy}^M = \sigma_{yy}^M = 0$ em toda a viga de aço e $\gamma_{xy}^M = 0$ nos banzos (o que implica $\sigma_{xy}^M = 0$). Para além disso, como o problema não envolve torção e flexão transversal, pode considerar-se ainda $\varepsilon_{yy}^F = \sigma_{yy}^F = \gamma_{xy}^F = \sigma_{xy}^F = 0$ em toda a viga. Tendo em conta as hipóteses simplificativas introduzidas, podem utilizar-se os modos de deformação simétricos já utilizados na Secção 3.3, os quais devem ser complementados com modos que envolvem a deformação transversal (segundo y) na laje, para permitir o desenvolvimento de um estado plano de tensão. A figura 6.9(b) mostra os modos considerados: para além dos modos clássicos de “corpo rígido” (extensão axial, flexão e corte na alma), são considerados modos de *shear lag* linear e quadrático (SL e SQ) e modos que envolvem deslocamentos transversais (segundo y) lineares e quadráticos (TL e TQ). Relembre-se ainda que o modo de extensão axial deve ser incluído nas análises, para capturar a alteração da superfície neutra devido à fendilhação e o efeito de *shear lag*.

Os modos de deformação adotados totalizam 25 GDL para um único elemento finito e $11 + 14n$ GDL para n elementos (sem eliminar os GDL associados às condições de apoio). A integração é realizada com $3 \times 3 \times 3$ pontos de Gauss em cada parede. São utilizados três pontos de integração na direção da espessura para obter resultados na superfície média da laje.

Para efeitos de comparação, foi analisado um modelo de elementos finitos de casca CQ40S

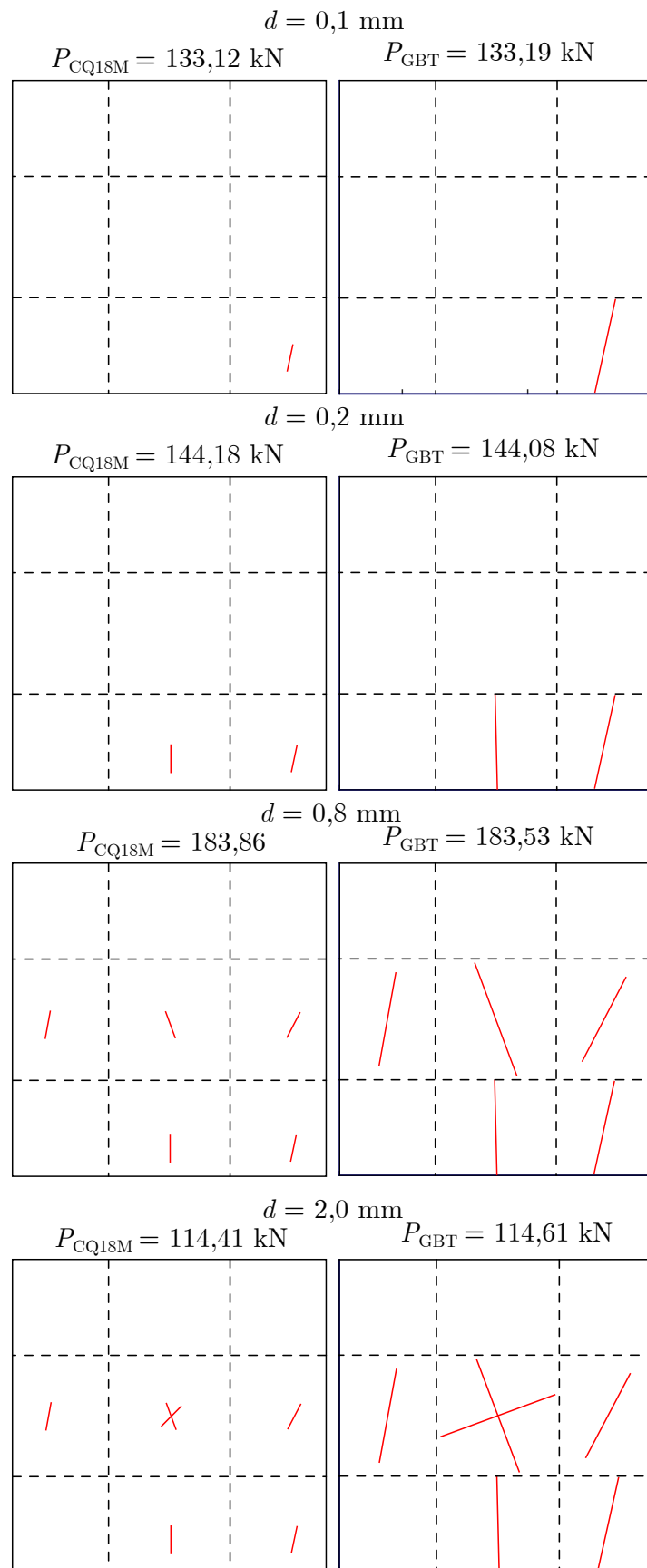


Figura 6.7: Placa de betão simples: evolução da fendilhação com o deslocamento, obtida com o elemento da GBT e o elemento CQ18M.

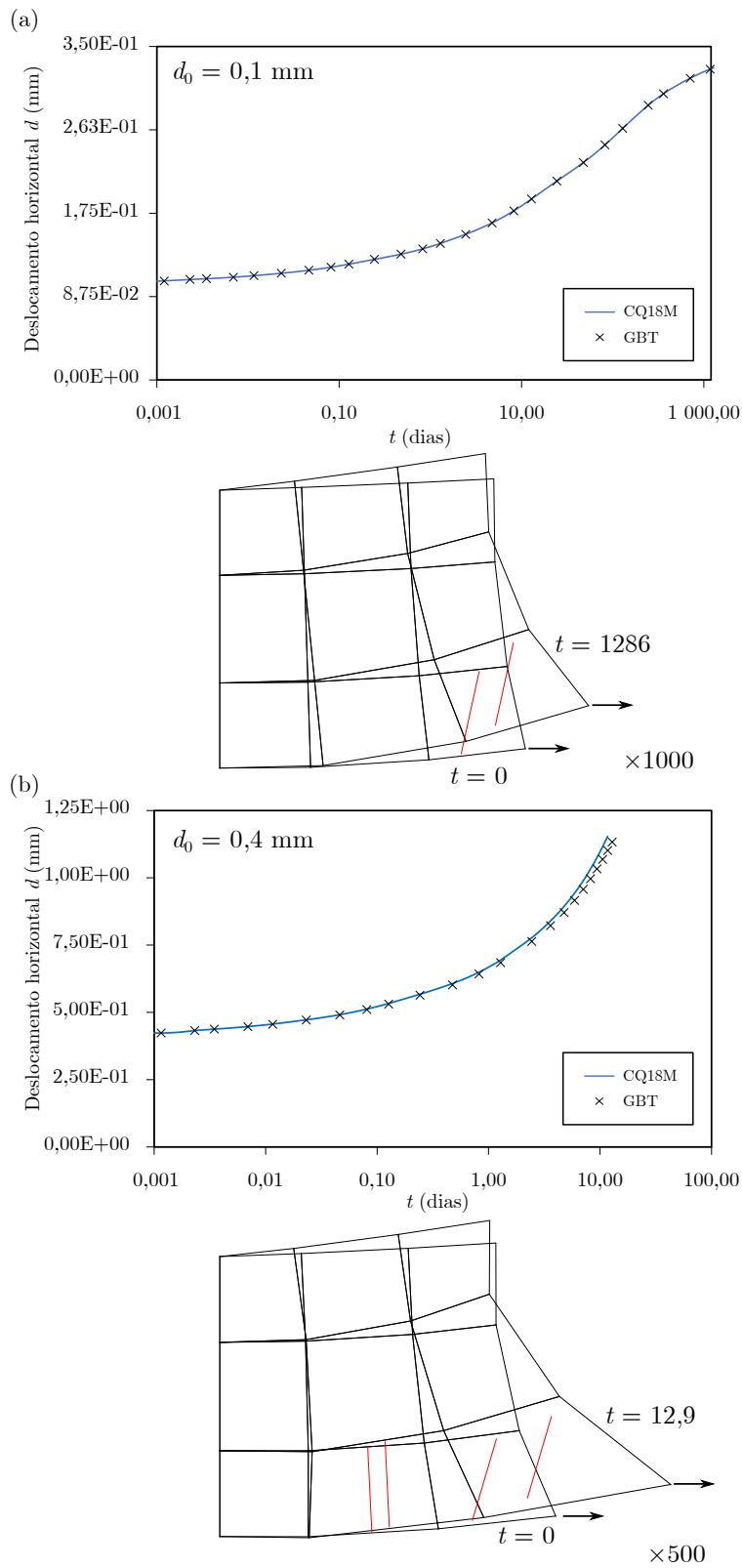


Figura 6.8: Placa de betão simples: análise no tempo para um deslocamento de (a) $d_0 = 0,1$ mm e (b) $d_0 = 0,4$ mm.

CAPÍTULO 6. FLUÊNCIA E FENDILHAÇÃO EM VIGAS MISTAS AÇO-BETÃO

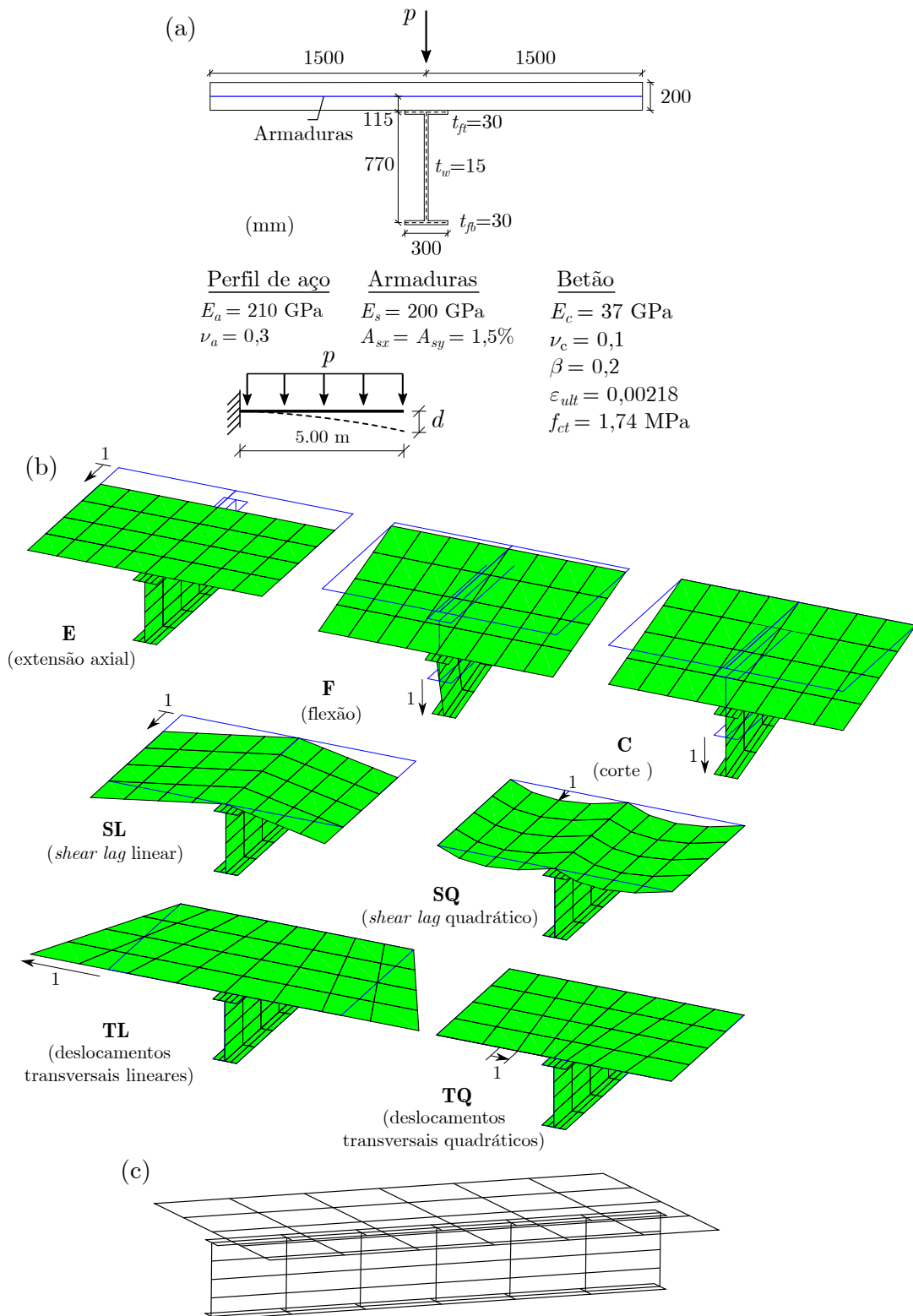


Figura 6.9: Flexão de uma viga mista em consola: (a) geometria, carregamento e propriedades dos materiais, (b) modos de deformação da GBT e (c) modelo de elementos de casca CQ40S.

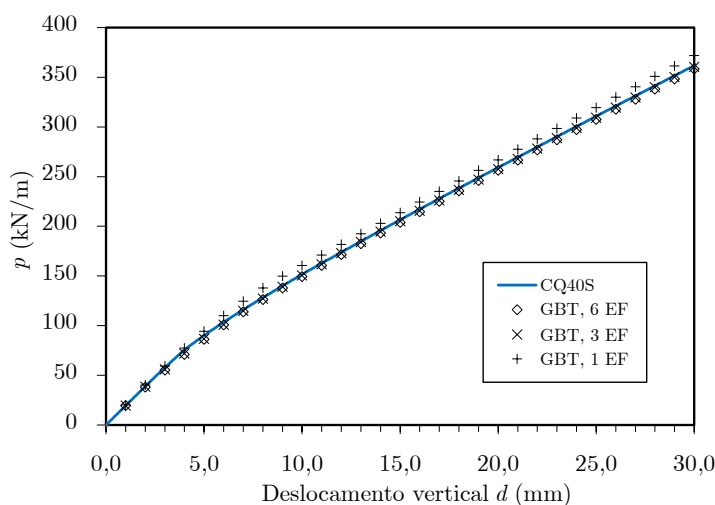


Figura 6.10: Flexão de uma viga mista em consola: gráfico carga-deslocamento.

de 8 nós e 5 GDL por nó². O esquema de integração adotado é idêntico ao considerado em cada parede do elemento finito de barra proposto. O modelo de elementos de casca é exibido na figura 6.9(c). Deve referir-se que a ligação aço-betão é assegurada por elementos rígidos (não representados na figura) que ligam os nós da laje e com os nós da intersecção banzo-alma do perfil, em cada secção transversal. Para a discretização adotada, obtêm-se 315 GDL para um único conjunto de elementos finitos na direção do comprimento (12 elementos CQ40S), o que resulta em aproximadamente 1270 GDL para o modelo completo (antes de aplicar as condições de fronteira cinemáticas). Deve salientar-se que estes números são bastante mais elevados do que os que estão associados a um modelo com o elemento finito proposto; 23 GDL para um único elemento, $11 + 14 \times 6 = 95$ GDL para 6 elementos.

Foi também analisado um modelo de elementos de casca com uma malha menos refinada, com apenas três elementos ao longo da direção longitudinal e, na laje, apenas dois elementos na direção transversal. No entanto, uma vez que o gráfico carga-deslocamento correspondente não mostrou virtualmente nenhuma diferença em relação ao modelo representado na figura 6.9(c), apenas são apresentados os resultados associados ao modelo mais refinado.

A figura 6.10 permite comparar os gráficos carga-deslocamento obtidos. No caso da GBT foram usadas três discretizações com elementos de igual comprimento. Estes resultados mostram que um único elemento da GBT já permite obter excelentes resultados (a diferença em relação ao modelo de elementos de casca é de apenas 2,8% para $d = 30$ mm) e que três elementos melhoram a precisão (a diferença cai para 0,4%). Não se observam diferenças significativas aumentando para 6 o número de elementos da GBT.

A figura 6.11 mostra a evolução do padrão de fendilhação na superfície média da laje (os resultados são relativos aos pontos integração situados nesta superfície), obtidos com a GBT e o modelo de elementos de casca. Nesta figura, os resultados da GBT dizem

²Este elemento de casca é do tipo Reissner-Mindlin e não considera o GDL associado ao *drill*, ou seja, à rotação na direção perpendicular ao seu plano médio.

respeito a uma discretização com 6 elementos finitos (exatamente a mesma discretização longitudinal utilizada no modelo de elementos de casca), mas apenas envolve duas paredes de betão, enquanto a discretização do modelo de elementos de casca da laje envolve quatro elementos na direção transversal. Isto significa que ambos os modelos têm o mesmo número de pontos de integração ao longo de x (18), mas um número diferente ao longo de y : 6 para os elementos da GBT e 12 para os elementos de casca. Deve ter-se em atenção que, enquanto as fendas no modelo da GBT são representados por um segmento de reta, no modelo de elementos de casca estas são ilustradas por círculos (orientados no espaço de modo a definir o plano da fenda), o que significa que a sua representação em planta é uma elipse se o plano da fenda não for exatamente vertical — recorde-se que o elemento CQ40S emprega a teoria de Reissner-Mindlin, pelo que a deformação por corte causa uma rotação do plano da fenda.

Os resultados da figura 6.11 mostram que o padrão de fendilhação e a orientação das fendas são muito semelhantes em ambos os modelos, muito embora o modelo de elementos de casca preveja uma maior extensão da fendilhação devido às diferenças entre ambos os modelos (Kirchhoff, no caso da GBT, e Reissner-Mindlin, no caso do elemento CQ40S) — contudo, observe-se que a carga e os deslocamentos não são exatamente os mesmos para os dois modelos.

Os gráficos das figuras 6.12 e 6.13 mostram as funções de amplitude modal da GBT ao longo do comprimento da viga, para um deslocamento da extremidade livre igual a 4 mm e 30 mm, os quais correspondem ao primeiro e ao último padrão de fendas representados na figura 6.11. Em ambos os casos, estes resultados foram obtidos utilizando 6 elementos finitos. É importante notar que as escalas verticais dos gráficos são diferentes (os deslocamentos naturalmente aumentam com a carga). Estes gráficos mostram que os modos de flexão (F) e corte (C) têm as participações mais altas, seguidos da extensão axial (E). São obtidas participações muito menores para os modos de *shear lag* (SL e SQ) e, finalmente, os modos de deslocamentos transversais (TL e TQ). É de salientar que, apesar de as funções de amplitude dos modos principais (F e C) exibirem formas muito semelhantes para ambas as cargas, as funções dos restantes modos são muito distintas, devido à grande diferença entre o padrão de fendilhação associado a cada carga.

Considere-se agora uma análise no tempo da viga, considerando o efeito da fluência. É imposto um deslocamento inicial $d = 4,1$ mm, sendo este monitorizado até aos 1000 dias. Para o deslocamento inicial imposto, o padrão de fendas é exatamente igual ao obtido para $d = 4,0$ mm (ver os padrões representados no canto superior esquerdo na figura 6.11). Os resultados obtidos com os modelos de elementos da GBT e de casca são fornecidos nas figuras 6.14 e 6.15, levando às seguintes conclusões:

- (i). Em primeiro lugar, considere-se o gráfico da figura 6.14(a), que mostra a evolução do deslocamento vertical na extremidade livre d com tempo. Observa-se que, conforme concluído anteriormente, a partir dos resultados da figura 6.10, três elementos finitos da GBT são suficientes para obter resultados precisos. Mais especificamente, as

6.3. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO

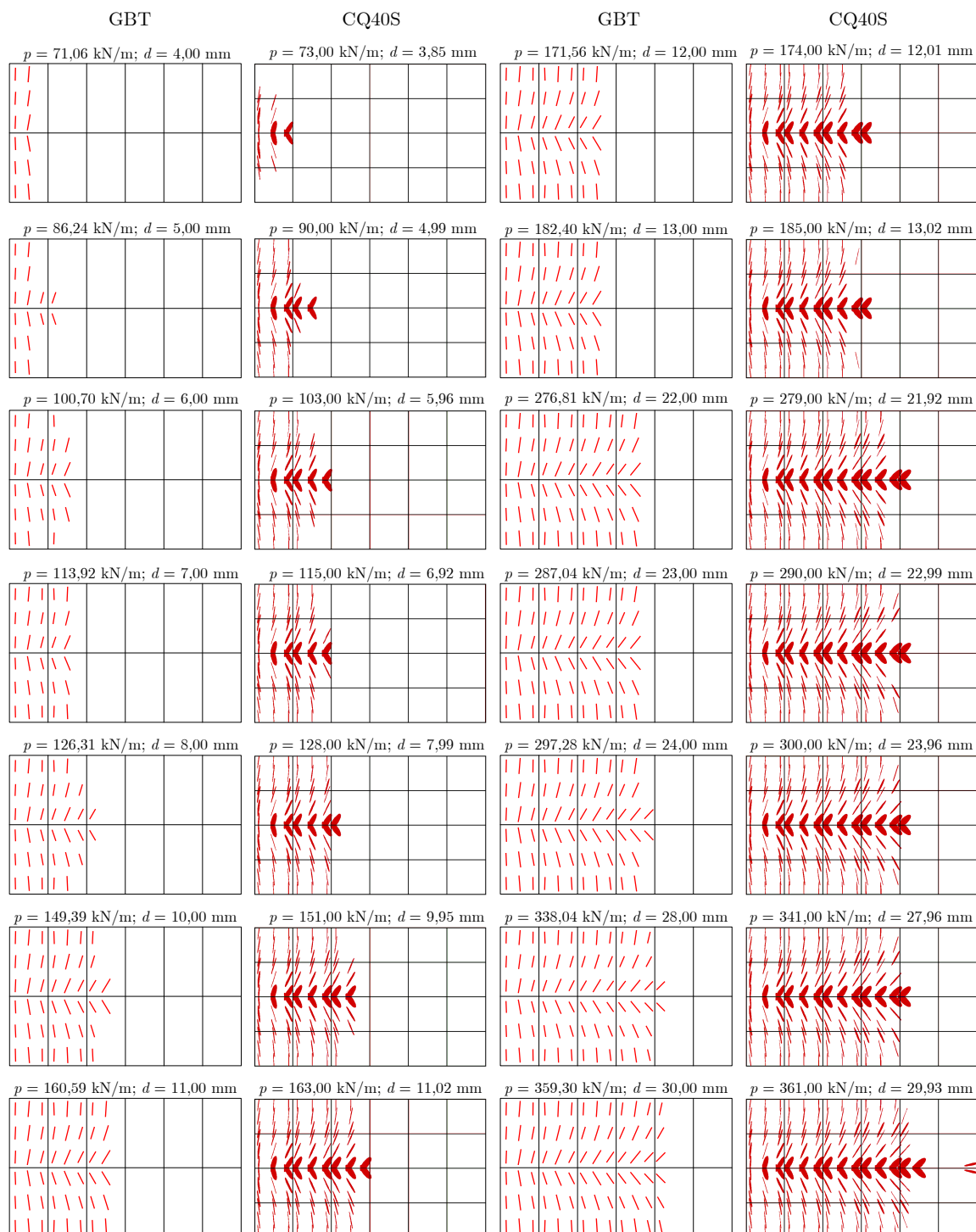


Figura 6.11: Flexão de uma viga mista em consola: evolução da fendilhação nos modelos de elementos finitos da GBT e de casca CQ40S.

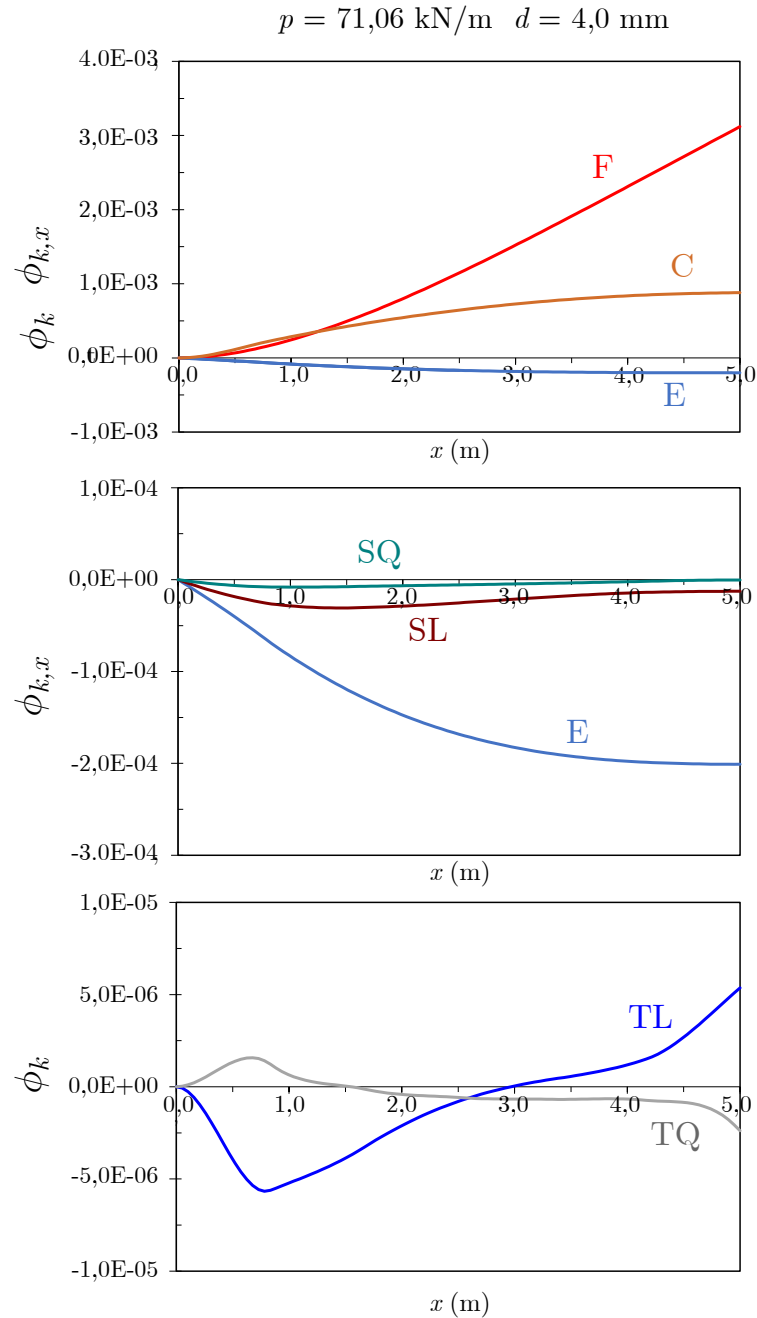


Figura 6.12: Flexão de uma viga mista em consola: funções de amplitude dos modos de deformação para $d = 4,0 \text{ mm}$.

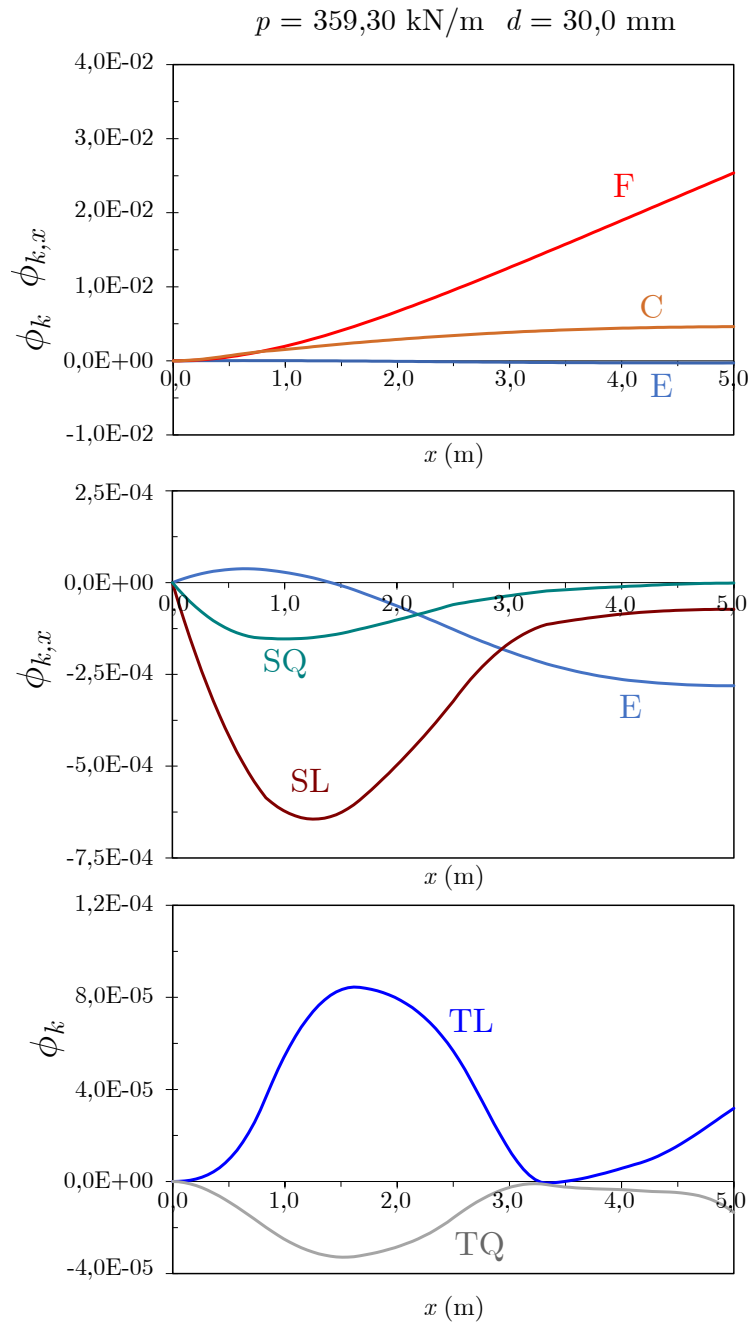


Figura 6.13: Flexão de uma viga mista em consola: funções de amplitude dos modos de deformação para $d = 30 \text{ mm}$.

CAPÍTULO 6. FLUÊNCIA E FENDILHAÇÃO EM VIGAS MISTAS AÇO-BETÃO

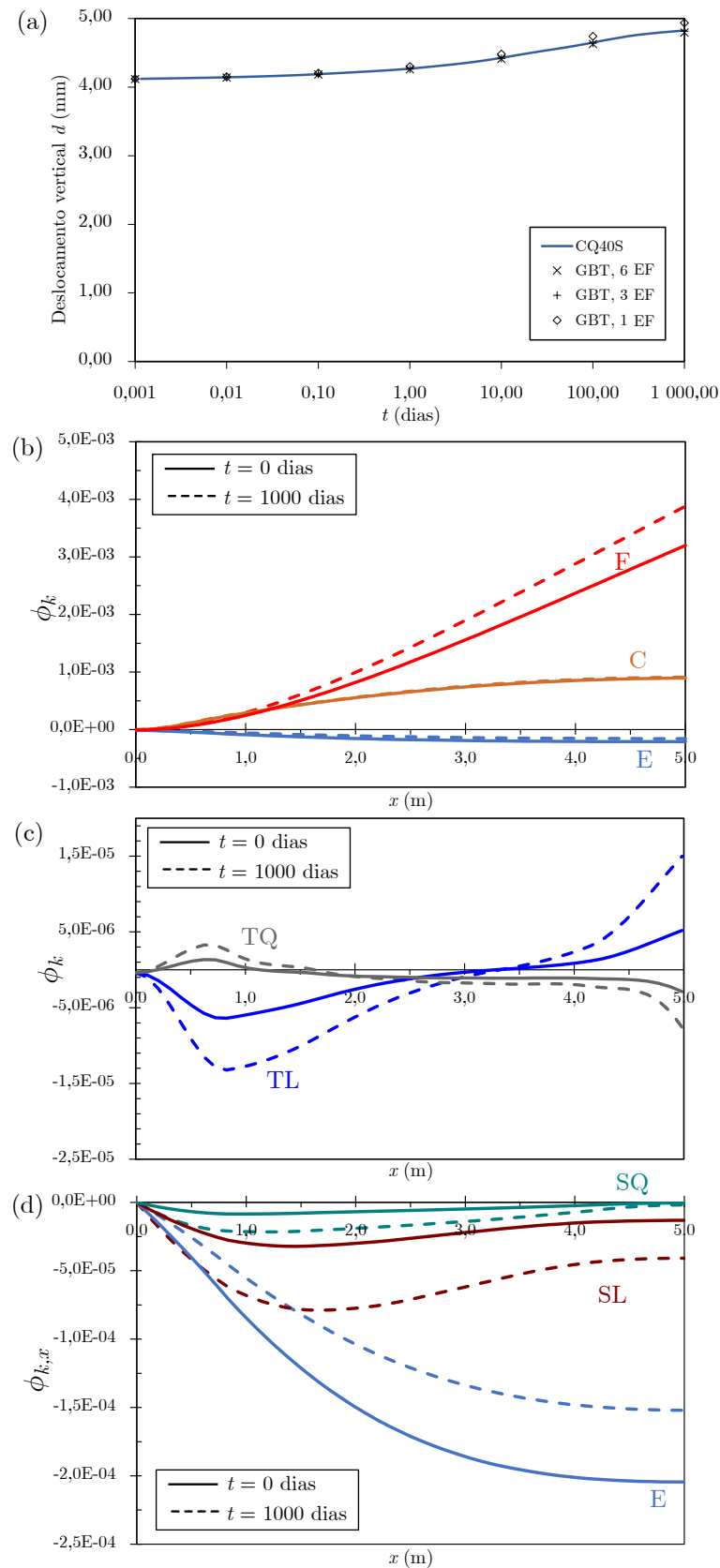


Figura 6.14: Flexão de uma viga mista em consola (análise no tempo): (a) evolução do deslocamento vertical d com o tempo t e (b)-(d) funções de amplitude dos modos de deformação ao longo do comprimento para $t = 0$ dias e $t = 1000$ dias.

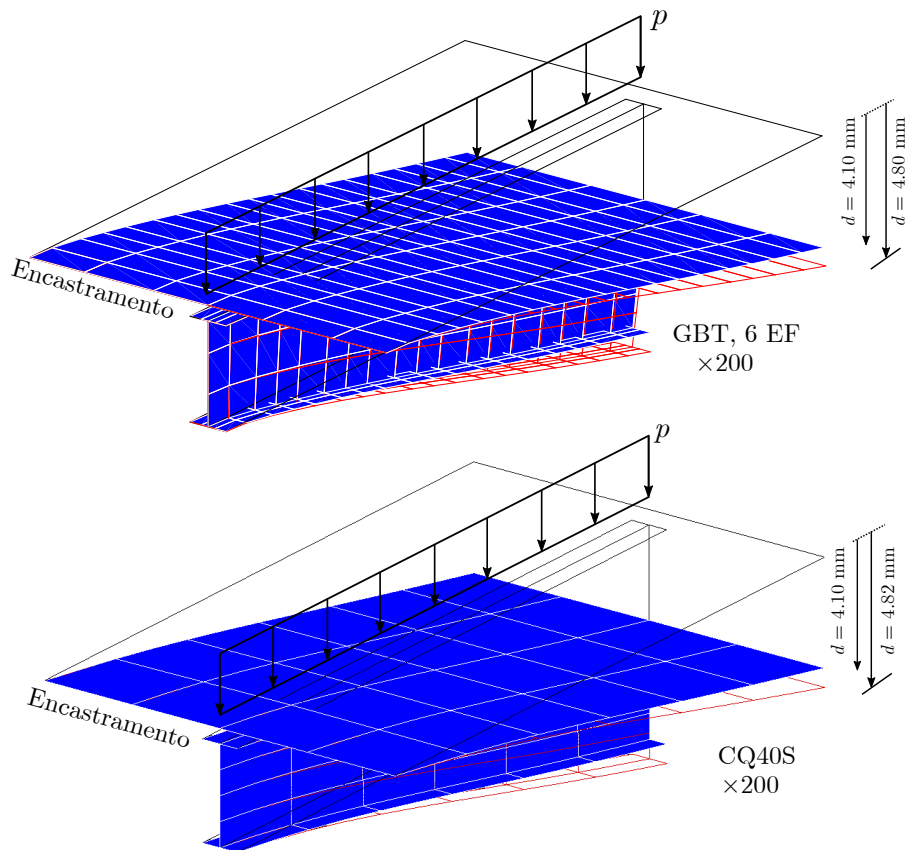


Figura 6.15: Flexão de uma viga mista em consola (análise no tempo): configurações deformadas iniciais e finais obtidas com os elementos finitos da GBT e de casca CQ40S.

diferenças em relação ao modelo de casca são inferiores a 2,3/0,2/0,6 % para 1/3/6 elementos finitos da GBT, respetivamente.

- (ii). Os gráficos (b)-(d) da figura 6.14 mostram as funções de amplitude modal para $t = 0$ e $t = 1000$ dias, obtidos com 6 elementos finitos. Estes gráficos mostram que, naturalmente, a função de amplitude do modo de flexão (F) aumenta significativamente com o tempo, mas a do modo de corte na alma do perfil (C) mantém-se praticamente inalterada, tal como no caso da Secção 5.4.2. As funções de amplitude dos restantes modos de deformação também aumentam (em valor absoluto), com a exceção do modo de extensão axial, o qual depende da fendilhação e do efeito de *shear lag*.
- (iii). A figura 6.15 mostra as configurações deformadas no início e no final da análise no tempo, obtidas com os modelos de elementos finitos da GBT (com 6 elementos) e de casca CQ40S, confirmando mais uma vez que existe uma excelente concordância entre ambos.

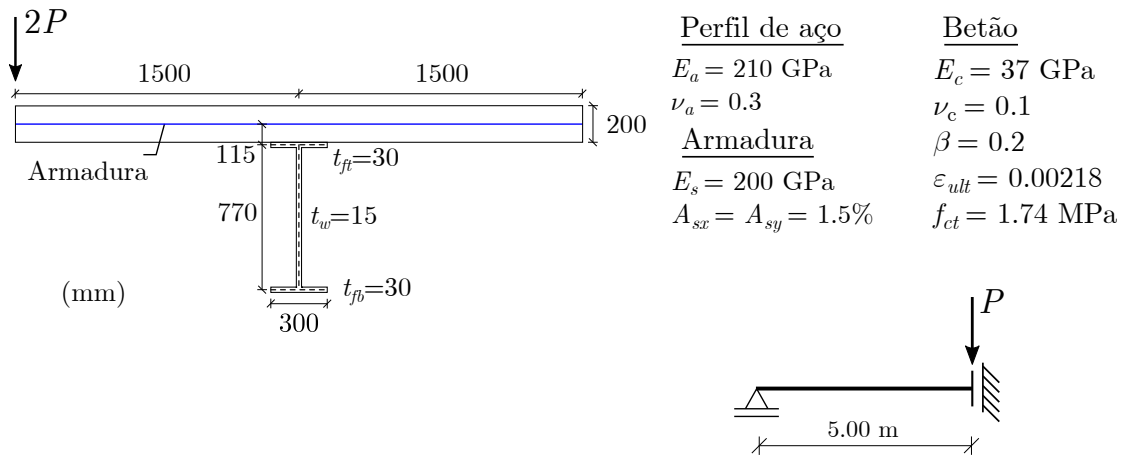


Figura 6.16: Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: geometria, carregamento e propriedades dos materiais.

6.3.3 Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica

No terceiro e último exemplo é analisada uma viga mista aço-betão simplesmente apoiada, com a geometria da secção transversal e as propriedades materiais do exemplo anterior. É aplicada uma carga vertical excêntrica, a meio-vão, como mostra a figura 6.16, e o deslocamento conjugado d é monitorizado. Devido à simetria do problema, apenas se modela metade da viga, conforme ilustrado na figura. Deve salientar-se que este exemplo é significativamente mais complexo do que o anterior, uma vez que a carga excêntrica causa, para além de flexão na viga, torção e também distorção da secção transversal.

Como neste problema ocorre a deformação da secção transversal no seu plano, a parede de betão do lado da carga é subdividida em duas paredes de igual largura, para procurar reproduzir melhor o efeito da flexão transversal nessa zona. Os modos de deformação não podem ser determinados aplicando todos os constrangimentos considerados no exemplo da Secção anterior. Em particular, não é mais aceitável considerar $\varepsilon_{yy}^M = \sigma_{yy}^M = \gamma_{xy}^F = \sigma_{xy}^F = 0$, mas dois dos constrangimentos — $\varepsilon_{yy}^M = \sigma_{yy}^M = 0$ na viga de aço e $\gamma_{xy}^M = \sigma_{xy}^M = 0$ nos banzos — podem ser utilizados, o que permite reduzir o número de GDL face ao modelo de elementos de casca. A discretização da secção e os 19 GDL independentes considerados são representados na figura 6.17³. Estes GDL da secção transversal são utilizados para gerar os modos de deformação representados na figura 6.18, os quais são calculados admitindo que o betão não se encontra fendilhado (tal como nos Capítulos anteriores). Estes modos podem ser divididos nos seguintes grupos:

- (i). Os primeiros quatro modos de deformação correspondem aos da teoria clássica de

³Note-se que existem vários deslocamentos nodais dependentes. O deslocamento vertical do banzo inferior não constitui um GDL independente porque a condição $\varepsilon_{yy}^M = 0$ na alma do perfil implica uma dependência do deslocamento vertical do nó da laje que se situa nessa vertical. Os deslocamentos do banzo superior são totalmente dependentes do deslocamento da laje em virtude da ligação rígida. Relativamente aos nós de extremidade do banzo inferior, os deslocamentos de empenamento e horizontais são dependentes, em virtude dos constrangimentos introduzidos, mas os deslocamentos verticais e a rotação poderiam ter sido considerados independentes, mas não são relevantes para o problema em análise.

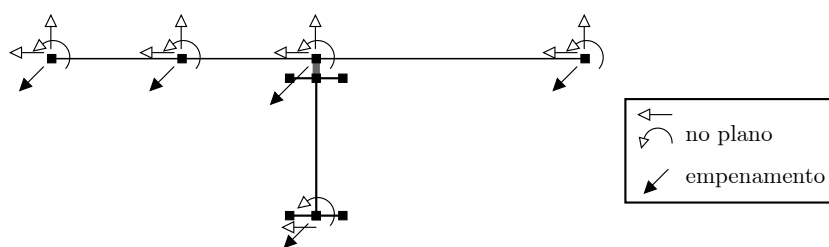


Figura 6.17: Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: GDL da secção transversal.

vigas de Vlasov — extensão axial (modo 1), flexões em torno dos eixos centrais principais (modos 2 e 3) e torção em torno do cento de corte.

- (ii). O quinto modo corresponde à aplicação de uma distorção de membrana unitária apenas na alma do perfil, à semelhança do que foi já considerado em exemplos anteriores.
- (iii). Os modos 6 a 13 são obtidos a partir dos 14 GDL no plano da secção representados na figura 6.17, admitindo que é válida a hipótese de Vlasov ($\gamma_{xy}^M = 0$), impondo $\varepsilon_{yy}^M = 0$ e garantindo a independência linear relativamente aos modos 2 a 4 (o modo 5 não necessita ser considerado, dado que não respeita a hipótese de Vlasov). Assim, a eliminação da dependência com os modos 2 a 4 e notando que $\varepsilon_{yy}^M = 0$ introduz três constrangimentos, resulta em $14 - 3 - 3 = 8$ modos de deformação. Os GDL escolhidos para independentes são indicados na figura 6.18 (modos 6 a 13).
- (iv). Os modos 14 a 16 são de *shear lag* linear, sendo gerados a partir dos cinco deslocamentos de empenamento independentes da figura 6.17, garantindo a independência com o modo de extensão axial e a hipótese de Vlasov na alma do perfil (uma das hipóteses fundamentais), o que reduz em 2 o número de GDL independentes. Assim, obtêm-se apenas $5 - 2 = 3$ modos de deformação.
- (v). Os modos 17 a 18 são, à semelhança da metodologia utilizada nos exemplos anteriores, modos de *shear lag* quadráticos em cada parede da laje. Estes modos não são obtidos a partir dos GDL da figura 6.17.
- (vi). Os modos 20 a 22 correspondem a deslocamentos transversais nos nós das paredes de betão e completam o espaço definido pelos 19 GDL da figura 6.17 (em conjunto com os modos considerados nos pontos i a iv).
- (vii). Finalmente, os modos 23 a 25 envolvem deslocamentos quadráticos em cada parede da laje, em concordância como o que foi considerado nos restantes exemplos do presente Capítulo. Tal como nos modos do ponto (v), não são obtidos a partir dos GDL da figura 6.17.

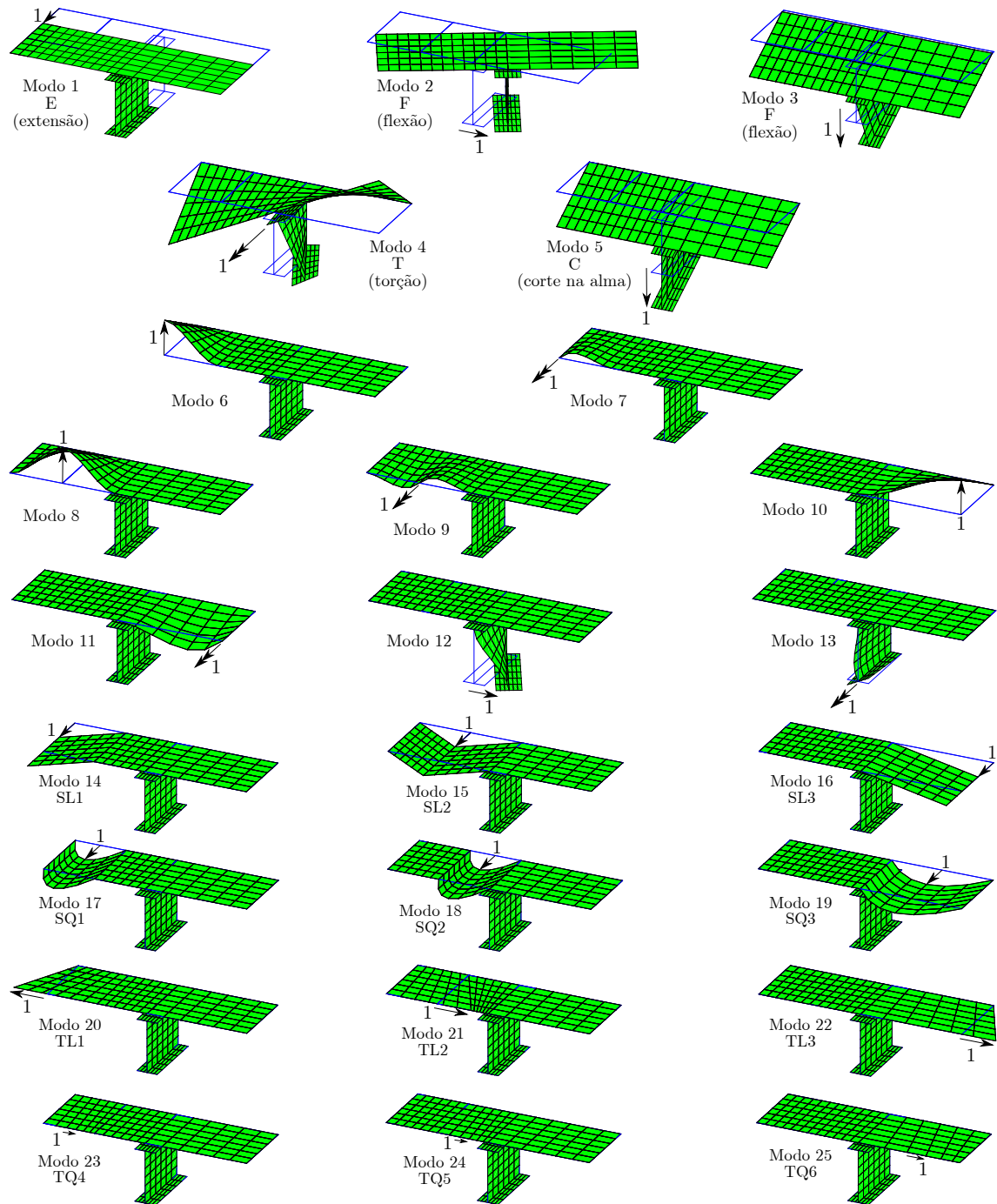


Figura 6.18: Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: modos de deformação da GBT utilizados nas análises.

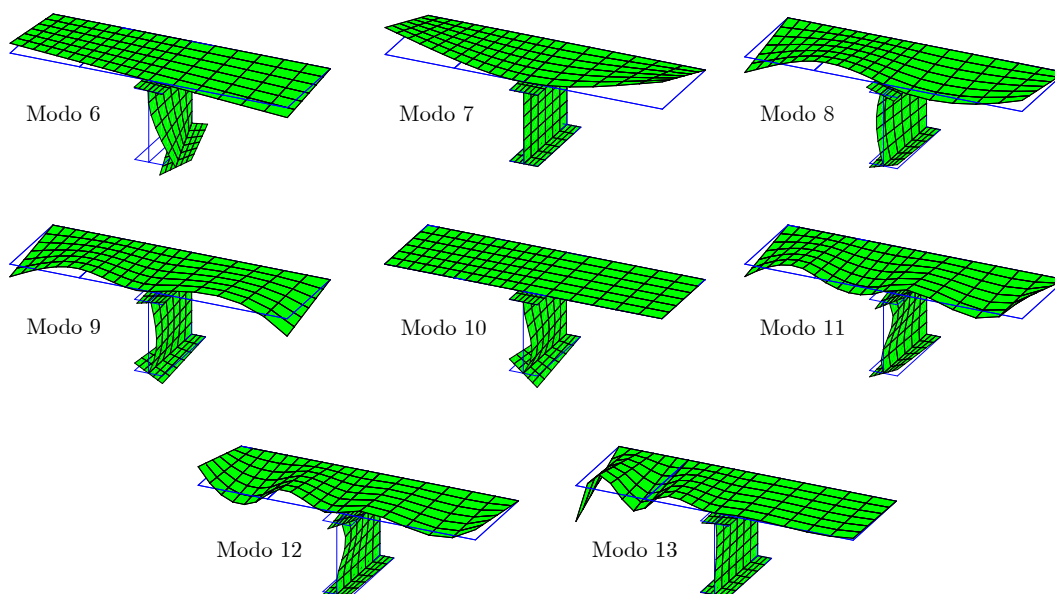


Figura 6.19: Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: modos de deformação ortogonalizados.

Deve salientar-se que, com a exceção dos primeiros 4 modos, os restantes não se encontram ortogonalizados, de modo a que a análise possa utilizar matrizes menores e estas resultem mais esparsas, conforme recomendado por Gonçalves e Camotim (2017). Muito embora a análise seja realizada com modos não-ortogonais, é importante obter a solução em termos de modos ortogonalizados e hierarquizados (no sentido em que os primeiros serão os mais relevantes). Este aspeto é de menor importância para os modos 14-25, dado que representam efeitos localizados na laje, devido à fendilhação, mas não para os modos 6-13, que envolvem a flexão transversal da laje e da viga de aço.

Os modos ortogonais congêneres dos modos 6-13 são obtidos a partir do espaço gerados pelos modos 1-4 e 6-13 (representados na figura 6.18), calculando os vetores próprios associados aos oito valores próprios não-nulos de

$$(\mathbf{B}^F - \lambda \mathbf{C}) \mathbf{v} = 0, \quad (6.28)$$

onde \mathbf{B}^F e \mathbf{C} são matrizes da GBT dadas por (recordar as equações (2.33) e (2.34))

$$\mathbf{B}^F = \int_S \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{t^3}{12} \bar{\mathbf{w}}_{,yy} \bar{\mathbf{w}}_{,yy}^T \right) dy, \quad (6.29)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^M + \mathbf{C}^F = \int_S \left(Et \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T dy + \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{t^3}{12} \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}^T \right) dy. \quad (6.30)$$

Os vetores próprios são posteriormente normalizados de forma a que o deslocamento máximo segundo z seja unitário para cada um deles. Os modos de deformação resultantes são ilustrados na figura 6.19.

Uma vez realizada a análise (com os modos não-ortogonais), as funções de amplitude dos modos ortogonais são recuperadas através de uma simples mudança de base, usando os vetores próprios normalizados.

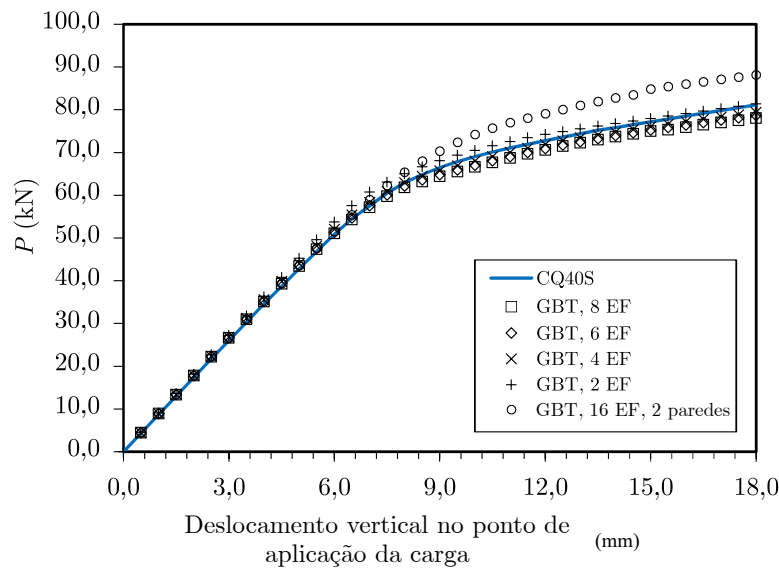


Figura 6.20: Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: gráfico carga-deslocamento.

Com os modos de deformação obtidos, é-se conduzido a um elemento finito com 93 GDL, o que implica que para n elementos se obtêm $43 + 50n$ GDL (antes de aplicar condições de fronteira cinemáticas). A integração é realizada com pontos $3 \times 3 \times 2$ Gauss em cada parede (ao longo de x , y e z , respetivamente).

Como no exemplo anterior, para efeitos de comparação, é analisado um modelo de elementos de casca CQ40S de 8 nós, utilizando o esquema de integração numérica do elemento da GBT. Como a geometria da viga é igual à do exemplo anterior (tirando partido da simetria do problema), a malha de elementos finitos coincide exatamente com a ilustrada na figura 6.9(c). Recorde-se que esta malha envolve 315 GDL para um único conjunto de elementos finitos no comprimento (12 elementos) e aproximadamente 1270 GDL no total (antes de aplicar condições de fronteira) — note-se que uma discretização com 6 elementos finitos da GBT envolve apenas 343 GDL.

O gráfico da figura 6.20 mostra as curvas carga-deslocamento obtidas. No caso dos modelos com o elemento finito proposto, mostram-se os resultados para várias discretizações e, para efeitos de comparação, também resultados obtidos sem subdividir a parede de betão do lado da carga aplicada (estes resultados são denominados “2 paredes”) e usando uma discretização refinada (16 elementos). Estes resultados permitem concluir que a subdivisão da parede de betão é essencial para obter resultados satisfatórios. Adotando esta subdivisão, dois elementos da GBT levam a pequenas diferenças em relação ao modelo de elementos de casca ($< 5,9\%$) e o aumento do número de elementos finitos reduz as diferenças para cerca de $3,0\%$ para todas as discretizações. Observa-se ainda uma resposta ligeiramente mais flexível com o elemento GBT, o que pode estar relacionado com o facto de este utilizar funções de interpolação de ordem superior (cúbicas em vez de quadráticas) para os deslocamentos transversais na laje.

6.3. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO

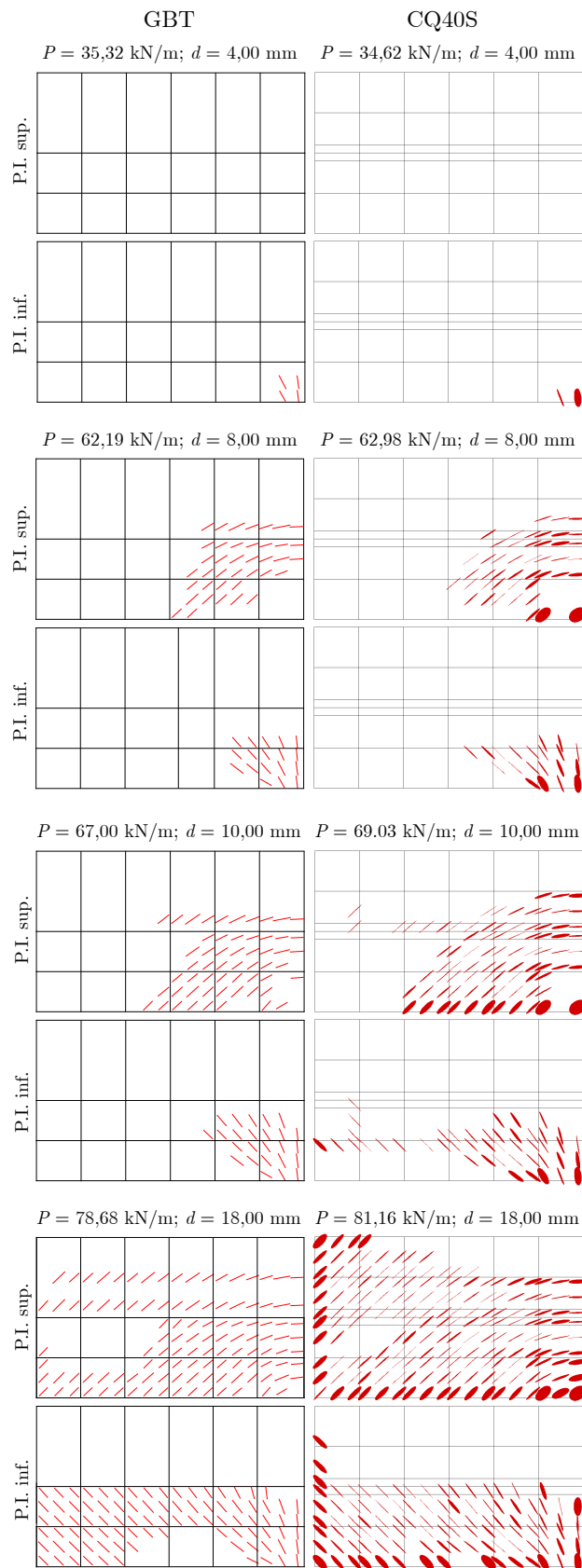


Figura 6.21: Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: evolução da fendilhação nos pontos de integração superiores e inferiores.

Na figura 6.21 é possível comparar a evolução da fendilhação nos pontos de integração superiores e inferiores da laje de betão, obtida com os modelos de elementos de casca e da GBT (com 6 elementos finitos). Relembre-se que, no caso do elemento da GBT, as fendas são representadas por uma única linha, enquanto que no modelo de elementos de casca são representadas por círculos. Os resultados mostram que as primeiras fendas aparecem perto do ponto de aplicação da carga, nos pontos de integração inferiores. À medida que a carga aumenta, a fendilhação espalha-se significativamente, particularmente nos pontos de integração junto à face superior. Observa-se também, mais uma vez, que o elemento finito proposto é capaz de reproduzir com bastante precisão os resultados obtidos com o modelo de elementos de casca para todo o carregamento considerado.

Os gráficos das figuras 6.22 e 6.23 mostram as funções de amplitude dos modos de deformação da GBT, desde o apoio até ao meio-vão, para deslocamentos verticais iguais a 4 mm e 18 mm, que correspondem ao primeiro e último padrão de fendas da figura 6.21. Estes gráficos foram obtidos utilizando 6 elementos finitos e permitem constatar o seguinte:

- (i). Os gráficos na parte superior de ambas as figuras referem-se aos modos 2-13 (o que inclui os modos ortogonais da figura 6.19) e mostram que a torção (T) e a flexão vertical (F_3) têm as maiores participações, seguidas pelos modos C (modo 5), 6 e 7⁴. No entanto, as funções de amplitude diferem consideravelmente para os dois valores de deslocamento considerados. Em particular, as funções do gráfico da figura 6.22 aproximam-se ao comportamento elástico, enquanto que as funções do gráfico da figura 6.23 são (naturalmente) de maior amplitude, mas também concentradas na zona de meio-vão, devido à fendilhação ser mais pronunciada nessa zona. Também é observado que a participação relativa a cada modo se altera para níveis diferentes da carga, sendo a torção e o modo 7 os mais relevantes para a carga mais alta (gráfico da direita).
- (ii). Os gráficos centrais e inferiores das figuras exibem as funções de amplitude dos modos restantes (modos de empenamento e modos de deslocamento transversal — modos 1 e 14-25). Neste caso, as funções de amplitude são bastante complexas e as suas formas são consideravelmente diferentes para os dois valores de carga considerados, exibindo uma tendência para se concentrarem na região de meio-vão. Os seus valores absolutos naturalmente aumentam com o carregamento, mas são muito menores do que os dos gráficos superiores (particularmente os valores dos modos quadráticos 17-19 e 23-25).

Seguidamente, realiza-se uma análise no tempo considerando o efeito da fluência, aplicando uma carga que produz um deslocamento inicial de 8 mm — note-se que, para este valor do deslocamento, a fendilhação na laje é bastante significativa, tal como mostra a figura 6.21). Os resultados obtidos com modelos elementos finitos da GBT e de casca, até 1000 dias, são mostrados nas figuras 6.24, 6.25 e 6.26, sendo possível concluir o seguinte:

⁴Note-se que este resultado confirma o que foi referido atrás: o processo de ortogonalização hierarquiza os modos e, conseqüentemente, os primeiros são os que mais participam na solução.

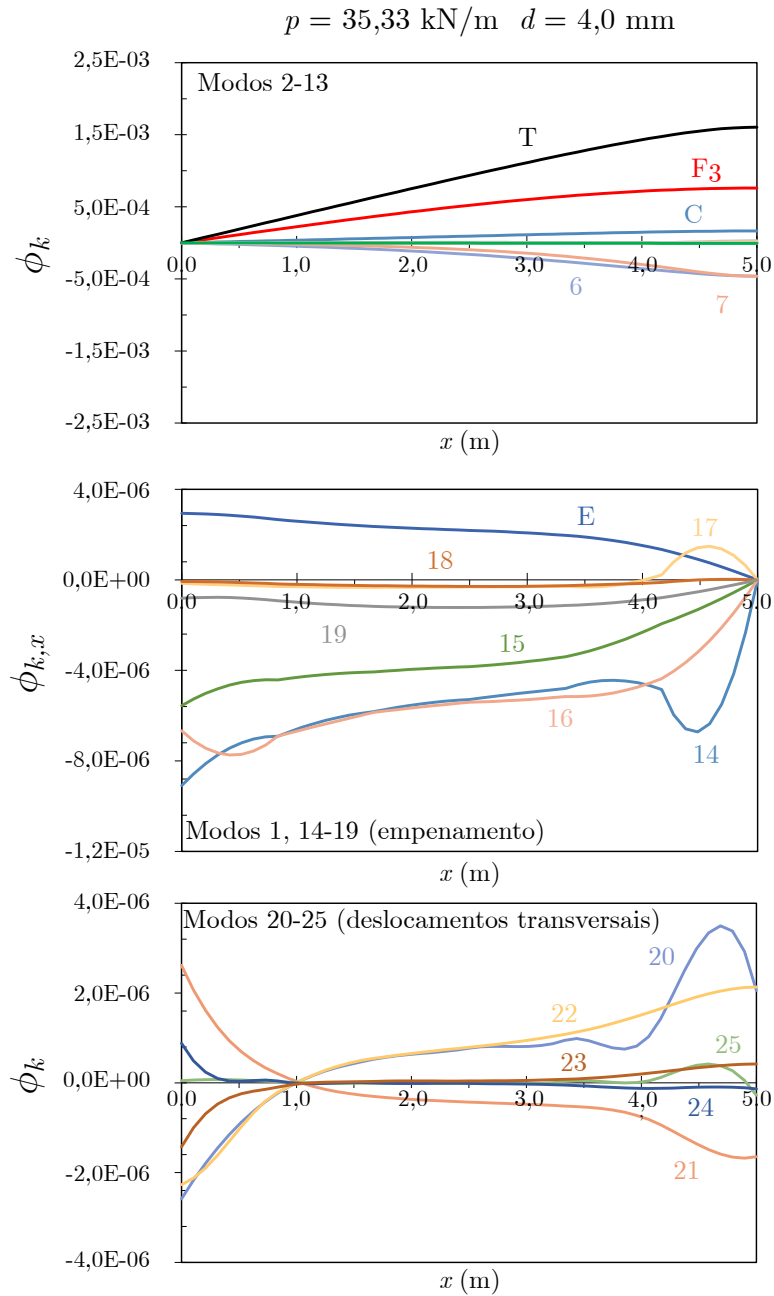


Figura 6.22: Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: funções de amplitude modal da GBT para $d = 4 \text{ mm}$.

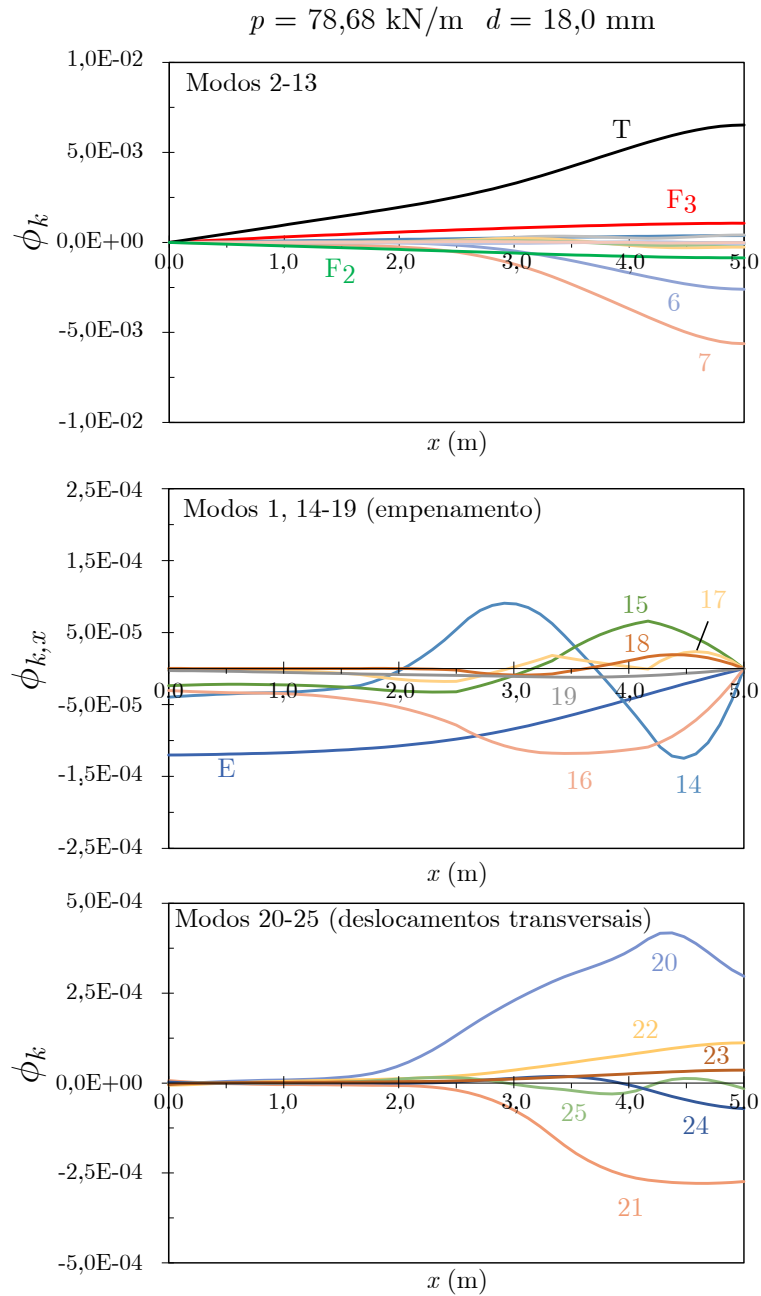


Figura 6.23: Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: funções de amplitude modal da GBT para $d = 18 \text{ mm}$.

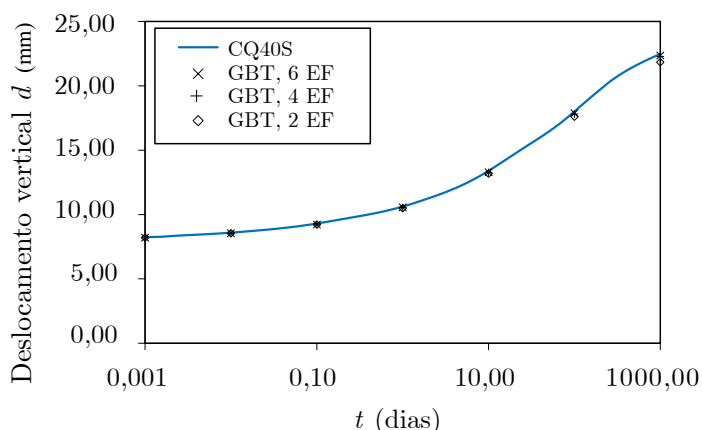


Figura 6.24: Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: evolução do deslocamento no tempo.

- (i). O gráfico na figura 6.24 mostra a evolução do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga ao longo do tempo. Verifica-se uma excelente concordância entre o modelo de elementos da GBT e o modelo de elementos de casca, mesmo quando são utilizados apenas dois elementos da GBT. Em particular, a diferença máxima entre modelos é de 2,9%, 1,1% e 0,9%, para discretizações com 2, 4 e 6 elementos finitos da GBT, respetivamente.
- (ii). Os gráficos das funções de amplitude dos modos de deformação da GBT são mostrados nas figuras 6.25 e 6.26, sendo obtidos para $t = 0$ e $t = 1000$ dias, considerando 6 elementos finitos. Os gráficos dizem respeito a todos os modos de deformação da figura 6.18, com exceção dos modos 6 a 13, que foram substituídos pelos seus congêneres ortogonais da figura 6.19. A análise destes gráficos permite concluir que o modo de torção é o mais relevante, seguido dos modos 6 e 7. As amplitudes destes três modos aumentam significativamente com o tempo (mais do dobro), enquanto que a amplitude do modo de flexão vertical aumenta apenas cerca de 20%. Os restantes modos têm participações muito menores, sendo de salientar que as suas formas mudam consideravelmente para os dois tempos considerados, com tendência a exibir amplitudes mais altas a meio-vão para $t = 1000$ dias.
- (iii). Finalmente, a figura 6.27 mostra as configurações deformadas obtidas com seis elementos da GBT e com o modelo de elementos de casca. Estas configurações mostram claramente que ocorre torção e distorção da secção transversal — note-se, a meio-vão, a flexão transversal da alma do perfil e da laje de betão. Mais uma vez, constata-se que existe uma excelente concordância entre os dois modelos, para ambos os tempos considerados.

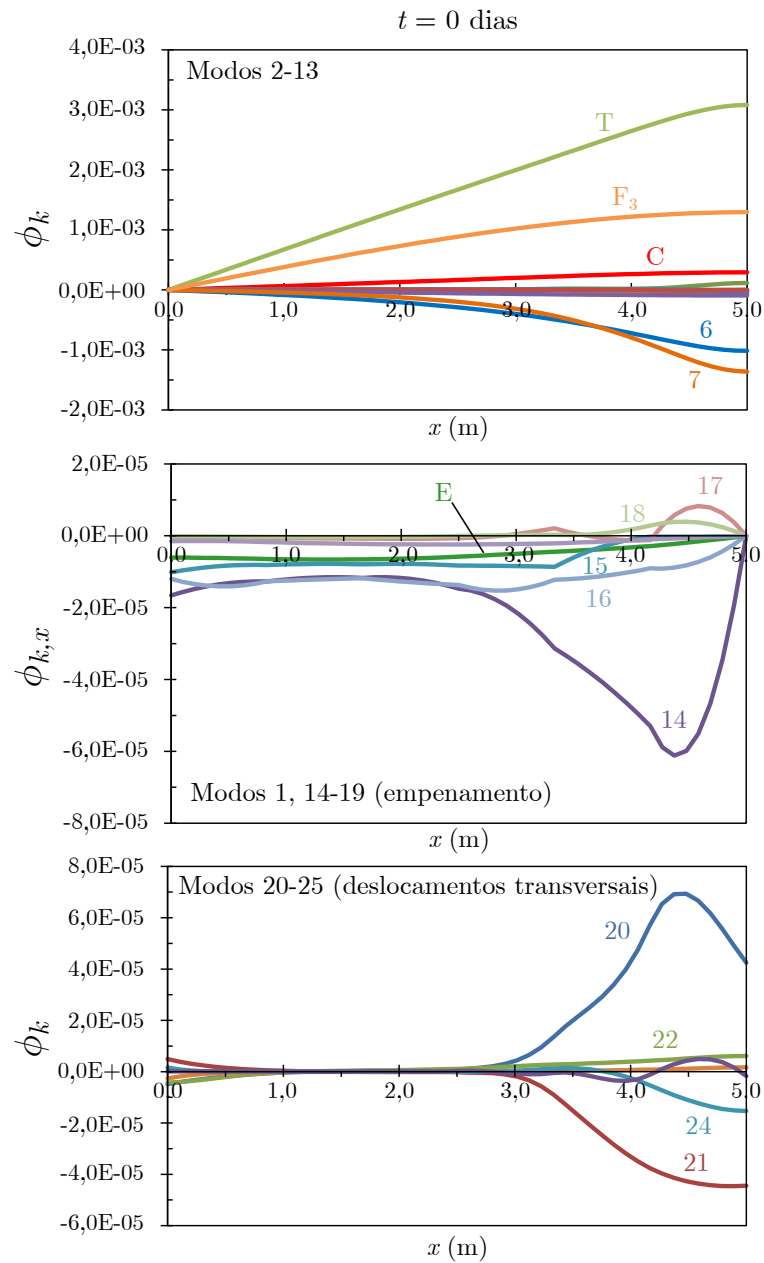


Figura 6.25: Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: funções de amplitude modal da GBT para $t = 0$ dias.

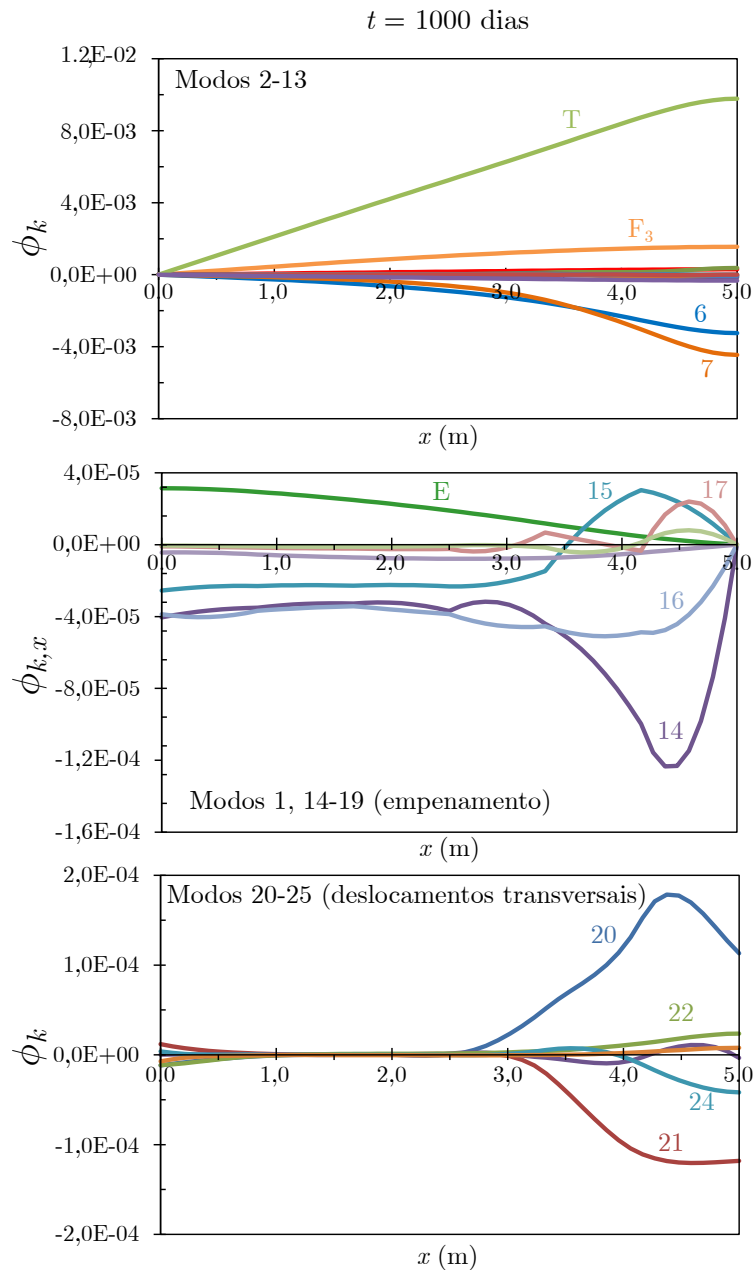


Figura 6.26: Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: funções de amplitude modal da GBT para $t = 1000$ dias.

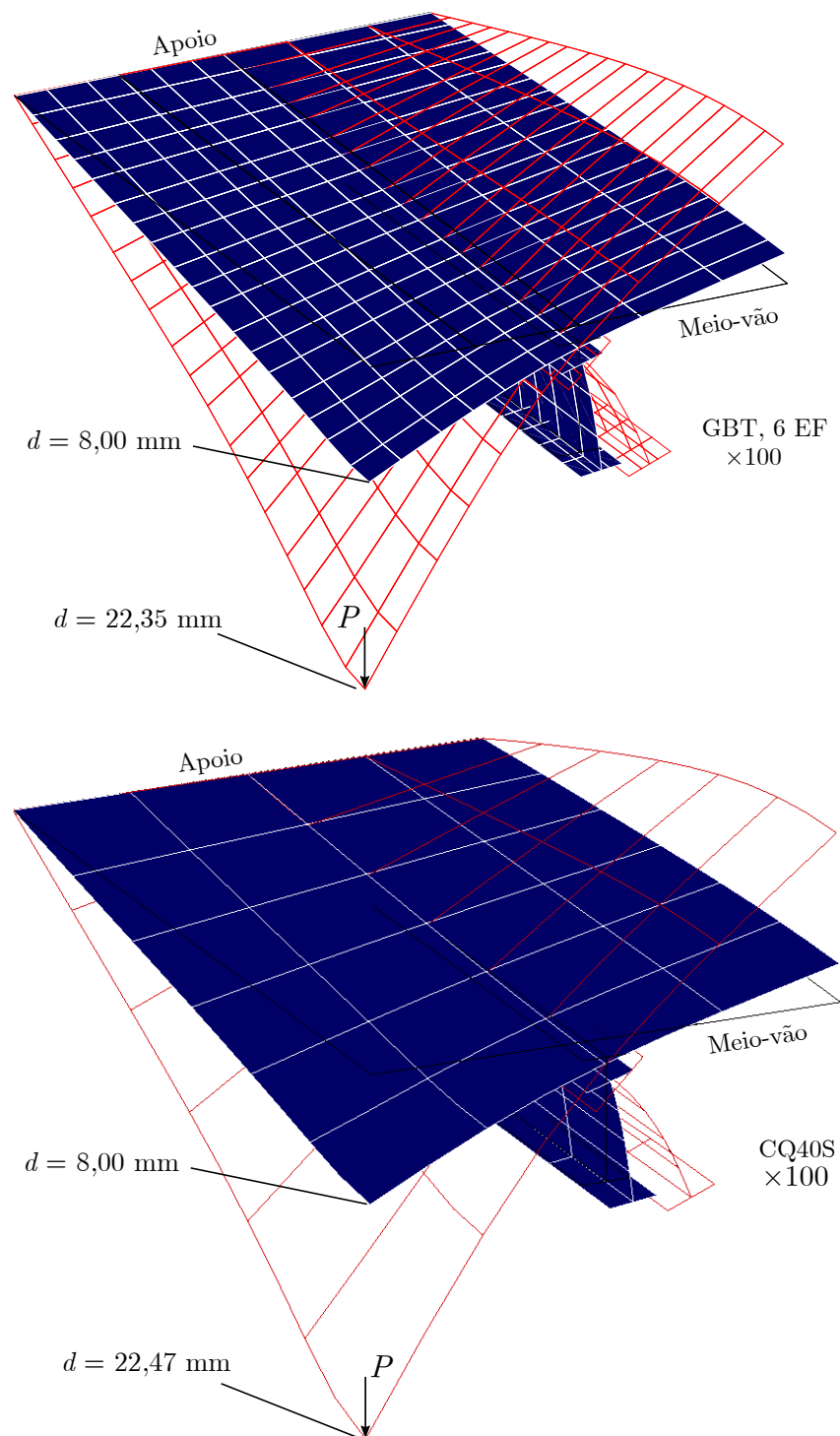


Figura 6.27: Viga mista simplesmente apoiada sujeita a uma carga excêntrica: configurações deformadas, a $t = 0$ e 1000 dias, obtidas com seis elementos da GBT e o modelo de elementos de casca CQ40S.

6.4 Sumário

Neste Capítulo foi apresentado e validado um elemento finito, baseado na GBT, que combina os efeitos da fluência e fendilhação do betão, juntamente com a deformação arbitrária da secção transversal, o que inclui os efeitos da distorção e de *shear lag*. Os efeitos da fluência são modelados de acordo com o apresentado no Capítulo 5.

De forma a combinar a fendilhação e a fluência, foi adotado um modelo de decomposição de deformação (betão/fenda), sendo que a fluência afeta apenas a deformação no betão. A modelação da fenda é efetuada recorrendo a um modelo de fenda fixa distribuída e considera, no máximo, duas fendas ortogonais. Este modelo exige a consideração de um estado plano de tensão na laje e, portanto, torna-se necessário a inclusão de modos com extensão transversal ε_{yy}^M . Apesar de tal acarretar um custo computacional significativo (idêntico ao de um elemento finito de casca com o mesmo número de GDL), as parcelas relativas ao aço em perfil e em armadura podem incluir várias hipóteses simplificativas e serem pré-calculadas no início da análise, o que resulta em ganhos computacionais significativos.

Foram apresentados três exemplos de aplicação, mostrando claramente que o elemento finito proposto é capaz de analisar, com grande precisão e eficiência, problemas muito complexos combinando os efeitos da fendilhação, da fluência e da deformação da secção transversal. Em particular, (i) os resultados são muito semelhantes aos obtidos com modelos de elementos finitos de casca, muito embora envolvam muito menos GDL, e (ii) a natureza modal da GBT permitiu analisar a contribuição de cada modo de deformação para o comportamento estrutural analisado.

Capítulo 7

Conclusões e desenvolvimentos futuros

7.1 Conclusões

A principal contribuição do trabalho apresentado nesta tese consistiu em mostrar que os elementos finitos de barra, baseados na GBT, podem constituir uma alternativa viável e vantajosa face aos elementos de volume/casca, para modelar o comportamento linear e não-linear de vigas mistas aço-betão. Em particular, foram desenvolvidos e implementados três elementos finitos baseados na GBT com diferentes âmbitos de aplicação e níveis de complexidade. Os exemplos de validação apresentados mostram claramente que os elementos finitos propostos conduzem a resultados muito precisos e exibem uma significativa eficiência computacional, quando comparados com modelos de elementos finitos de volume ou de casca. De seguida, enumeram-se as principais conclusões do trabalho realizado.

Em primeiro lugar, apresentam-se as conclusões relativas ao elemento finito apresentado no Capítulo 3:

1. Este elemento é capaz de capturar, com grande precisão, o comportamento fisicamente não-linear de vigas mistas aço-betão, incluindo as fases de pré- e pós-colapso. Para além dos efeitos da fendilhação/esmagamento no betão e da plastificação do aço (tensões normais e tangenciais), é considerado automaticamente o efeito de *shear lag* na laje de betão.
2. Os exemplos numéricos apresentados mostraram claramente que o elemento, para além de ser muito preciso, envolve um custo computacional muito reduzido. Esta eficiência provém da introdução de várias hipóteses simplificativas, as quais permitem (i) utilizar leis constitutivas mais simples (envolvem menos componentes de tensão/deformação) do que as consideradas em elementos de volume/casca e (ii) reduzir o número de modos de deformação admissíveis (e, portanto, o número de GDL), sem perda de precisão da solução.

3. Para além do que foi referido no ponto anterior, deve salientar-se que a precisão do elemento foi demonstrada também em casos com banzos muito largos, onde o efeito de *shear lag* é muito pronunciado e as tensões podem variar muito rapidamente na direção da espessura. Mostrou-se ainda que o efeito de *shear lag* não influencia significativamente a curva carga-deslocamento em regime fisicamente não-linear.
4. Em virtude das características únicas de decomposição modal da GBT, foram obtidas fórmulas analíticas para quantificar o efeito de *shear lag* elástico. Muito embora estas fórmulas tenham sido desenvolvidas para vigas simplesmente apoiadas sujeitas a uma carga sinusoidal com uma única semi-onda, podem ser utilizadas para estimar o efeito de *shear lag* em outros casos e, principalmente, mostram claramente quais são os parâmetros materiais e geométricos relevantes.
5. A decomposição modal da solução da GBT foi também utilizada para aferir a importância relativa dos vários modos de deformação associados ao efeito de *shear lag*. Por exemplo, mostrou-se que as fórmulas analíticas desenvolvidas (ver ponto anterior) permitem estimar, com bastante precisão, este efeito. No entanto, também se mostrou que, para vigas simplesmente apoiadas sujeitas a cargas uniformemente distribuídas, a relação entre as amplitudes dos modos de empenamento linear e quadrático varia ao longo do vão e, para o caso fisicamente não-linear, também varia com o carregamento. Esta observação mostra que não pode ser adotado um único modo de *shear lag*, ao contrário do que é considerado em vários estudos (*e.g.*, Gara et al., 2011a; Hu et al., 2017; Lezgy-Nazargah et al., 2019; Sun e Bursi, 2005).

Relativamente ao elemento finito apresentado no Capítulo 4, há a apontar as seguintes conclusões:

1. O elemento permite determinar cargas de bifurcação e modos de instabilidade de vigas mistas aço-betão com grande precisão e um custo computacional muito reduzido. Em particular, o elemento inclui muito poucos modos de deformação: (i) até 7 na análise de pré-encurvadura e (ii) até 15 na análise de bifurcação. Estes modos de deformação contabilizam os efeitos de *shear lag*, fendilhação do betão, distorção da secção e deformação local (tipo placa) na alma. Os efeitos da fluência e do faseamento construtivo podem também ser considerados, muito embora de maneira simplificada.
2. O elemento é formulado de forma a ser possível atribuir valores independentes aos vários termos de rigidez da laje (de membrana e de flexão), o que permite, por exemplo, satisfazer os princípios do modelo prescrito no EC4 (o modelo da “estrutura em U invertido”).
3. No presente trabalho foi pela primeira vez considerada, no contexto da GBT, a variação discreta da espessura das paredes da secção transversal ao longo do comprimento da barra. Deve salientar-se que se trata de uma importante contribuição original. No caso dos exemplos apresentados no Capítulo 4, foi considerada a variação da espessura

da alma. Para o efeito, a análise é efetuada com modos não-ortogonalizados, sendo os resultados pós-processados para recuperar a participação dos modos ortogonalizados.

4. As características de decomposição modal da GBT permitiram retirar algumas conclusões significativas sobre a natureza dos modos de instabilidade. Em particular, observou-se que, mesmo para secções compactas, pode existir uma influência significativa dos modos de deformação locais, o que significa que nesses casos o modelo do EC 4 não está do lado da segurança, já que considera apenas a distorção da secção.

Finalmente, enumeram-se as principais conclusões relativas ao elemento finito desenvolvido nos Capítulos 5 e 6:

1. O modelo de fluência implementado no elemento finito proposto permite executar análises no tempo com grande precisão e rapidez, mesmo quando é necessário considerar a deformação da secção no seu plano e para fora deste, incluindo os efeitos da distorção e de *shear lag*. No Capítulo 5 admite-se que os materiais são elásticos lineares (o betão tem um comportamento visco-elástico linear), o que potencia a eficiência do elemento proposto, dado que a análise no tempo não requer iterações e torna-se possível adotar as hipóteses simplificativas habituais da GBT para diminuir o número de modos de deformação — nomeadamente, pode admitir-se que $\varepsilon_{yy}^M = 0$, o que permite descartar os modos que envolvem esta componente deformação.
2. No Capítulo 6 introduziu-se no elemento finito um modelo de fenda fixa distribuída, com a possibilidade de abertura de duas fendas ortogonais. Este modelo de fenda exige a consideração de um estado plano de tensão na laje de betão e, portanto, é necessário incluir na análise modos de deformação que envolvem ε_{yy}^M na laje. Apesar de este modelo constitutivo acarretar um custo computacional significativo (idêntico ao de um elemento finito de casca com o mesmo número de GDL), as parcelas relativas ao aço em perfil e em armadura podem incluir várias hipóteses simplificativas e serem pré-calculadas no início da análise, o que resulta em ganhos computacionais significativos.
3. À semelhança do que foi já referido, a decomposição modal da solução da GBT permitiu identificar os modos que mais contribuem para a solução em cada instante (no caso de se considerar o efeito da fluência) e para cada nível de carga (no caso de se considerar o efeito da fendilhação).

7.2 Desenvolvimentos futuros

Apesar de o trabalho apresentado ter mostrado claramente que os elementos finitos baseados na GBT constituem uma alternativa muito vantajosa para modelar vigas mistas aço-betão, este tópico está longe de estar encerrado. Assim, existem assim vários desenvolvimentos futuros a apontar, os quais são descritos de seguida:

1. A deformabilidade longitudinal da conexão de corte foi já considerada em formulações da GBT elásticas lineares (Gonçalves e Camotim, 2010). Assim, será importante incluir este efeito nos elementos finitos propostos, tanto em regime linear (o que não constituirá uma contribuição original), como fisicamente não-linear. Em acréscimo, poderá ser considerada a flexibilidade vertical da conexão, para modelar o efeito de *uplift*.
2. O melhoramento dos modelos constitutivos adotados também constituirá um importante desenvolvimento. Ao nível do aço (em armadura e perfil), deve ser considerado o efeito do endurecimento (isotrópico e/ou cinemático). No caso do betão, existem muitos aspetos importantes, desde a consideração de modelos multi-fenda (a sua formulação não é muito diferente da adotada no presente trabalho) à implementação de um modelo de plasticidade, para permitir contabilizar o esmagamento, e à consideração do envelhecimento.
3. A inclusão do efeito da retração do betão também será fundamental para permitir a aplicação prática dos elementos finitos desenvolvidos.
4. Em certos casos, nomeadamente em pontes mistas, o faseamento construtivo tem de ser considerado na análise e dimensionamento. Assim, seria de extremo interesse prático que este efeito fosse implementado.
5. As vigas mistas em edifícios incluem frequentemente lajes nervuradas com chapa de aço colaborante, pelo que seria interessante considerar este caso. A geometria nervurada constitui um desafio no contexto da GBT (tratar-se-ia de um desenvolvimento significativo), mas julga-se que a adaptação do elemento finito do Capítulo 3 a este caso não oferecerá grandes dificuldades, dado que não considera a deformação da secção no seu plano.
6. A aplicação da GBT a análises de vibração (forçadas ou livres, com ou sem amortecimento) também se reveste de grande interesse para estudar o comportamento em serviço de viadutos mistos ferroviários de alta velocidade e estruturas mistas de pisos em edifícios. Por enquanto, a única aplicação da GBT neste âmbito deve-se a Gonçalves e Camotim (2010) e concerne apenas a determinação de frequências naturais e modos de vibração, para o caso elástico linear. A este respeito, a utilização do modelo de fendilhação apresentado no Capítulo 6 permitirá obter um elemento finito com grandes potencialidades.
7. Seria bastante atrativo dispor de um elemento finito capaz de juntar os efeitos fisicamente e geometricamente não-lineares, para estudar o comportamento de vigas mistas de classe 3 ou 4. Estes modelos devem incluir o efeito de imperfeições geométricas e tensões residuais. Apesar de existirem já formulações da GBT capazes de modelar estes efeitos no aço, não foram ainda aplicadas a outros materiais, pelo que este desenvolvimento seria muito significativo. Contudo, não deve deixar de se

referir que tal elemento muito provavelmente perderia a eficiência computacional face a modelos de elementos de casca, conforme discutido em Gonçalves e Camotim (2017) (recorde-se também a Secção 6.3.3).

8. Finalmente, uma vez que os desenvolvimentos referidos nos pontos anteriores estejam implementados, podem aplicar-se os elementos finitos para (i) reproduzir resultados de ensaios experimentais e (ii) conduzir estudos paramétricos, com o objetivo de procurar contribuir para procurar melhorar a compreensão do comportamento estrutural de vigas mistas e, em particular, aperfeiçoar as regras de dimensionamento do EC 4.

Referências

A

- AASHTO, 1998. *LRFD bridge design specifications, 2nd Ed.* American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), Washington D.C., EUA.
- Ansourian, P., 1982. “Plastic rotation of composite beams”. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, 108(ST3), pp. 643-659.
- Ayoub, A. e Filippou, F., 2000. “Mixed formulation of nonlinear steel-concrete composite beam element”. *Journal of Structural Engineering*, 126(3), pp. 371-381.

B

- Bathe, K. J., 2019. ADINA System. ADINA R& D Inc.
- Bažant, Z. P. e Gambarova, P., 1980. “Rough cracks in reinforced concrete”. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, 106(4), pp. 819–842.
- Bažant, Z. P. e Wu, S. T., 1973. “Dirichlet series creep function for aging concrete”. *Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE)*, 99(2), pp. 367–387.
- Bažant, Z. P. e Chern, J. C., 1985. “Strain softening with creep and exponential algorithm”. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 111(3), pp. 391–415.
- Bebiano, R., Gonçalves, R. e Camotim, D., 2015. “A cross-section analysis procedure to rationalise and automate the performance of GBT-based structural analyses”. *Thin-Walled Structures*, 92, pp. 29–47.
- Bebiano, R., Camotim, D. e Gonçalves, R., 2018. “GBTul 2.0 - A second-generation code for the GBT-based buckling and vibration analysis of thin-walled members”. *Thin-Walled Structures*, 124, pp. 235-257.
- Bradford, M. e Johnson, R., 1987. “Inelastic buckling of composite bridge girders near internal supports”. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 83(1), pp. 143-159.
- Bradford, M. A., 1998. “Inelastic buckling of I-beams with continuous elastic tension flange restraint”. *Journal of Constructional Steel Research*, 48(2-3), pp. 63–77.
- Bradford, M. A. e Gao, Z., 1992. “Distortional buckling solutions for continuous composite beams”. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, 118(1), pp. 73–89.
- Brozzetti, J., 2000. “Design development of steel-concrete composite bridges in France”. *Journal of Constructional Steel Research*, 55(1-3), pp. 229–243.

C

- Calado, L. e Santos, J., 2010. *Estruturas mistas de aço e betão*. IST Press.
- Camotim, D., Silvestre, N., Gonçalves, R. e Dinis, P. B., 2004. “GBT analysis of thin-walled members: new formulations and applications”. Em J. Loughlan (editor), *Thin-walled structures: recent advances and future trends in thin-walled structures technology*, pp. 137–168. Canopus Publishing, Bath, Reino Unido.
- Camotim, D., Silvestre, N., Gonçalves, R. e Dinis P. B., 2006. “GBT-based structural analysis of thin-walled members: overview, recent progress and future developments”. Em M. Pandey, W. Xie e L. Xu (editores), *Advances in engineering structures, mechanics & construction*, pp. 187–204, Springer.
- Camotim, D., Basaglia, C., Bebbiano, R., Gonçalves, R. e Silvestre, N., 2010. “Latest developments in the GBT analysis of thin-walled steel structures”. Em: E. Batista, P. Vellasco, L. Lima (editores), *Proceedings of the International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures*, pp. 33-58 (Vol.1).
- Castro, J., Elghazouli A. e Izzuddin, B., 2007. “Assessment of effective slab widths in composite beams”. *Journal of Constructional Steel Research*, 63(10), pp. 1317–1327.
- CEN, 1992. *ENV 1994-1-1:1992, Eurocode 4: Design of Composite Steel and Concrete Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*. Comité Européu de Normalização, Bruxelas, Bélgica.
- CEN, 2004a. *EN 1992-1-1:2004, Eurocode 2: Design of Concrete Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*. Comité Européu de Normalização, Bruxelas, Bélgica.
- CEN, 2004b. *EN 1994-1-1:2004, Eurocode 4: Design of Composite Steel and Concrete Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*. Comité Européu de Normalização, Bruxelas, Bélgica.
- CEN, 2005. *EN 1993-1-1:2005, Eurocode 3: Design of Steel Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*. Comité Européu de Normalização, Bruxelas, Bélgica.
- Cervenka, V., Jendele, L. e Cervenka, J., 2013. *ATENA 3D program documentation*. Cervenka Consulting, Praga, República Checa.
- Chen, S. S., Aref, A. J., Chiewanichakorn, M. e Ahn, I.-S., 2007. “Proposed effective width criteria for composite bridge girders”. *Journal of Bridge Engineering (ASCE)*, 12(3), pp. 325-338.
- Chen, Y. S. e Yen, B. T., 1980. *Analysis of composite box girders*. Relatório Técnico, Fritz Laboratory Reports, Lehigh University, EUA.
- Chiewanichakorn, M., Aref, A. J., Chen, S. S., e Ahn, I.-S., 2004. “Effective flange width definition for steel–concrete composite bridge girder”. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, 130(12), pp. 2016–2031.
- Crisfield, M. A., 1991. *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*, Vol 1. John Wiley & Sons, Chichester, Inglaterra.

D

- de Borst, R. e Nauta, P., 1985. “Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model”. *Engineering Computations*, 2(1), pp. 35–46.
- de Borst, R., 1986. “Non-linear analysis of frictional materials”. Tese de Doutorado, Delft University of Technology, Holanda.
- de Borst, R., 1987. “Smeared cracking, plasticity, creep, and thermal loading – A unified approach”. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 62(1), pp. 89–110.
- DIANA FEA BV, 2019. DIANA FEM software release 10.3.

F

- Fragiacomo, M., Amadio, C. e Macorini, L., 2004. “Finite-element model for collapse and long-term analysis of steel–concrete composite beams”. *Journal of Structural Engineering*, 130(3) pp. 489–497.

G

- Galéa, Y. e Martin, P., 2007. “Contrainte critiques de voilement de plaques rectangulaires - Présentation du logiciel libre EBPlate”. *Construction Métallique*, 44(3), pp. 33-74.
- Gara, F., Carbonari, S., Leoni, G. e Dezi, L., 2014. “A higher order steel–concrete composite beam model”. *Engineering Structures*, 80, pp. 260-273.
- Gara, F., Leoni, G. e Dezi, L., 2009. “A beam finite element including shear lag effect for the time-dependent analysis of steel–concrete composite decks”. *Engineering Structures*, 31(8), pp. 1888–1902.
- Gara, F., Ranzi, G. e Leoni, G., 2010. “Short- and long-term analytical solutions for composite beams with partial interaction and shear-lag effects”. *International Journal of Steel Structures*, 10(4), pp. 359–372.
- Gara, F., Ranzi, G. e Leoni, G., 2011a. “Simplified method of analysis accounting for shear lag effects in composite bridge decks”. *Journal of Constructional Steel Research*, 67(10), pp. 1684-1697.
- Gara, F., Ranzi, G. e Leoni, G., 2011b. “Partial interaction analysis with shear-lag effects of composite bridges: a finite element implementation for design applications”. *Advanced Steel Construction*, 7(1), pp. 1–16.
- Gonçalves, R., 2016. “A shell-like stress resultant approach for elastoplastic geometrically exact thin-walled beam finite elements”. *Thin-Walled Structures*, 103, pp. 263–272.
- Gonçalves, R. e Camotim, D., 2010. “Steel-concrete composite bridge analysis using generalised beam theory”. *Steel and Composite Structures*, 10(3), pp. 223–243.
- Gonçalves, R. e Camotim, D., 2011. “Generalised beam theory-based finite elements for elastoplastic thin-walled metal members”. *Thin-Walled Structures*, 49(10), pp. 1237-1245.
- Gonçalves, R. e Camotim, D., 2012. “Geometrically non-linear generalised beam theory for elastoplastic thin-walled metal members”. *Thin-Walled Structures*, 51, pp. 121–129.

- Gonçalves, R. e Camotim, D., 2017. “Improving the efficiency of GBT displacement-based finite elements”. *Thin-Walled Structures*, 111, pp. 165–175.
- Gonçalves, R., Ritto-Corrêa, M. e Camotim, D., 2010a. “A new approach to the calculation of cross-section deformation modes in the framework of generalized beam theory”. *Computational Mechanics*, 46(5), pp. 759–781.
- Gonçalves, R., Le Grogneq, P. e Camotim, D., 2010b. “GBT-based semi-analytical solutions for the plastic bifurcation of thin-walled members”. *International Journal of Solids and Structures*, 47(1), pp. 34–50.
- Gonçalves, R., Coelho, T. e Camotim, D., 2014a. “On the plastic moment of I-sections subjected to moderate shear forces”. *Thin-Walled Structures*, 78, pp. 138–147.
- Gonçalves, R., Bebiano, R. e Camotim, D., 2014b. “On the shear deformation modes in the framework of Generalized Beam Theory”. *Thin-Walled Structures*, 84, pp. 325–334.
- Green, A. P., 1954a. “A theory of the plastic yielding due to bending of cantilevers and fixed-ended beams. Part I”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 3, pp. 1–15.
- Green, A. P., 1954b. “A theory of the plastic yielding due to bending of cantilevers and fixed-ended beams. Part II”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 3, pp. 143–155.

H

- Hanswille, G., 2002. “Lateral torsional buckling of composite beams – comparison of more accurate methods with Eurocode 4”. *Composite construction in steel and concrete IV*, pp. 105–116.
- Hanswille, G., Lindner J., e Munich D., 1998. “Zum Biegedrillknicken von Verbundträgern” (For bending and twisting composite beams). *Stahlbau*, 67(7), pp. 525-535.
- Henriques, D., Gonçalves, R. e Camotim, D., 2015a. “A physically non-linear GBT-based finite element for steel and steel-concrete beams including shear lag effects”. *Thin-Walled Structures*, 90, pp. 202–215.
- Henriques, D., Gonçalves, R. e Camotim, D., 2015b. “An efficient non-linear GBT-based finite element for steel-concrete beams”. *CD-Rom Proceedings of the 8th International Conference on Advances in Steel Structures*, Artigo 135 (18 pp.).
- Henriques, D., Gonçalves, R. e Camotim, D., 2015c. “Desenvolvimentos recentes na modelação de vigas mistas com a Teoria Generalizada de Vigas”. Em: L. Simões da Silva, P. Vila Real, J. Rocha de Almeida e R. Gonçalves (editores), *Atas do X Congresso de Construção Metálica e Mista, Vol. II*, pp. 515-524.
- Henriques, D., Gonçalves, R. e Camotim, D., 2015d. “Non-linear analysis of steel-concrete beams using Generalized Beam Theory”. Em E. Oñate, J. Oliver, A. Huerta (editores), *Proceedings of 11th World Congress on Computational Mechanics. Vol. II*, pp. 130–141.
- Henriques, D., Gonçalves, R. e Camotim, D., 2016a. “GBT-based finite element to assess the buckling behaviour of steel–concrete composite beams”. *Thin-Walled Structures*, 107, pp. 207–220.

-
- Henriques, D., Gonçalves, R. e Camotim, D., 2016b. “Recent developments in the GBT-based numerical modeling of steel-concrete composite beams”. *Proceedings of the SSRC Annual Stability Conference*, Artigo 32 (16 pp.).
- Henriques, D., Gonçalves, R. e Camotim, D., 2017. “Formulação da Teoria Generalizada de Vigas para calcular cargas de bifurcação lateral-distorcional em vigas mistas aço-betão”. Em L. Simões da Silva, P. Vila Real, P. Piloto e J. Martins (editores), *Atas do XI Congresso de Construção Metálica e Mista*, pp. 863-874.
- Henriques, D., Gonçalves, R. e Camotim, D., 2018. “Creep analysis of steel-concrete composite beams using generalized beam theory”. *Proceedings of the 8th International Conference on Thin-Walled Structures*, Artigo 92 (10 pp.).
- Henriques, D., Gonçalves, R. e Camotim, D., 2019a. “A visco-elastic GBT-based finite element for steel-concrete composite beams”. *Thin-Walled Structures*, 145, 106440 (11 pp.).
- Henriques, D., Gonçalves, R. e Camotim, D., 2019b. “Inclusão da fendilhação e fluência num elemento finito baseado na Teoria Generalizada de Vigas”. Em L. Simões da Silva, P. Vila Real, J. Pedro e L. Laím (editores), *Atas do XII Congresso de Construção Metálica e Mista*, pp. 899-908.
- Henriques, D., Gonçalves, R., Sousa, C. e Camotim, D., 2019c. “GBT-based time-dependent analysis of steel-concrete composite beams including shear lag and concrete cracking effects”. Submetido para publicação em dezembro de 2019.
- Hu, S., Yu, J., Wei, C. e Z. Zhang, 2017. “Shear lag behavior and parametric sensitivity analysis of steel-concrete composite structure with double-box”. *Archive of Applied Mechanics*, 87(9), pp. 1525–1539.

J

- Jirasek, M. e Bažant, Z. P., 2002. *Inelastic analysis of structures*. John Wiley & Sons, Chichester, Inglaterra.
- Johnson, R. P. e Anderson, D., 2004. *Designers' Guide to EN 1994-1-1: Eurocode 4: Design of Composite Steel and Concrete Structures. General Rules and Rules for Buildings*. Thomas Telford.
- Johnson, R. P. e Buckby, R. J., 1975. *Composite structures of steel and concrete, Vol. 1 – Beams, slabs, columns and frames for buildings*. Wiley Online Library.

L

- Lasheen, M., Shaat, A. e Khalil, A., 2018. “Numerical evaluation for the effective slab width of steel-concrete composite beams”. *Journal of Constructional Steel Research*, 148, pp. 124–137.
- Lezgy-Nazargah, M., Vidal, P. e Polit, O., 2019. “A sinus shear deformation model for static analysis of composite steel-concrete beams and twin-girder decks including shear lag and

- interfacial slip effects”. *Thin-Walled Structures*, 134, pp. 61–70.
- Li, Z e Schafer, B. W., 2010. “Buckling analysis of cold-formed steel members with general boundary conditions using CUFSM conventional and constrained finite strip methods”. *20th International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, pp. 17-31.
- Litton, R., 1974. “A contribution to the analysis of concrete structures under cyclic loading”. Tese de Doutorado, Berkeley, University of California, EUA.
- Lou, T. e Karavasilis, T. L., 2019. “Numerical assessment of the nonlinear behavior of continuous prestressed steel-concrete composite beams”. *Engineering Structures*, 190, pp. 116–127.

M

- MATLAB, 2010. version 7.10.0, R2010a. The MathWorks Inc., Massachusetts, EUA.
- Menegotto, M. e Pinto, P, 1973. “Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bending”. *Proceedings of the IABSE Symposium on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well-Defined Repeated Loads*, pp. 15-22.
- Menetrey, P. e Willam, K., 1995. “Triaxial failure criterion for concrete and its generalization”. *ACI Structural Journal*, 92(3), pp. 311–318.

N

- Nguyen, Q.-H., Hjjaj, M. e Aribert, J.-M., 2010. “A space-exact beam element for time dependent analysis of composite members with discrete shear connection”. *Journal of Constructional Steel Research*, 66(11), pp. 1330–1338.
- Nie, J.-G., Tian, C.-Y. e Cai, C., 2008. “Effective width of steel–concrete composite beam at ultimate strength state”. *Engineering Structures*, 30(5), pp. 1396–1407.
- Nie, J., Xiao, Y. e Chen, L., 2004. “Experimental studies on shear strength of steel–concrete composite beams”. *Journal of Structural Engineering*, 130(8), pp. 1206–1213.

P

- Pedro, J, 1995. “Distorção em tabuleiros de pontes em caixão. Influência no comportamento longitudinal”. Tese de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- Pi, Y.-L., Bradford, M. A. e Uy, B., 2006a. “Second order nonlinear inelastic analysis of composite steel–concrete members. I: Theory”. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, 132(5), pp. 751–761.
- Pi, Y.-L., Bradford, M. A. e Uy, B., 2006b. “Second order nonlinear inelastic analysis of composite steel–concrete members. II: Applications”. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, 132(5), pp. 762–771.

Póvoas, R., 1991. *Modelos não-Lineares de análise e dimensionamento*. Tese de Doutorado, Universidade de Porto.

R

Ranzi, G. e Bradford, M., 2009. “Analysis of composite beams with partial interaction using the direct stiffness approach accounting for time effects”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(5), pp. 564–586.

Ranzi, G., Leoni, G. e Zandonini, R., 2013. “State of the art on the time-dependent behaviour of composite steel–concrete structures”. *Journal of constructional steel Research*, 80, pp. 252–263.

Reis, A. e Camotim, D., 2012. *Estabilidade e dimensionamento de estruturas*. Orion.

Riggs, H. R. e Powell, G. H., 1986. “Rough crack model for analysis of concrete”. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 112(5), pp. 448–464.

Rots, J., Nauta, P., Kuster, G. e Blaauwendraad, J., 1985. “Smearred crack approach and fracture localization in concrete”. *Heron*, 30(1), pp. 1–48.

Rots, J. e Blaauwendraad, J., 1989. “Crack models for concrete, discrete or smearred? Fixed, multi-directional or rotating?”. *Heron*, 34(1), 1989.

S

Schardt, R., 1966. “Eine erweiterung der technischen biegetheorie zur berechnung prismatischer faltwerke” (Uma extensão da teoria técnica de vigas para a análise de vigas prismáticas de parede fina). *Stahlbau*, 35(6), pp. 161–171.

Schardt, R., 1989. *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie* (Teoria Generalizada de Vigas). Springer-Verlag, Berlim, Alemanha.

Schlaich, J. e Scheef, H., 1982. *Concrete box-girder bridges*. IABSE, Zurique, Suíça.

Sena-Cruz, J., Barros, J. A. e Azevedo, Á. F., 2004. *Elasto-plastic multi-fixed smearred crack model for concrete*. Relatório técnico, Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho.

Sluys, L., 1999. *Computational Methods in Non-Linear Solid Mechanics*. CTmes5142, Delft University of Technology, Holanda.

Suidan, M. e Schnobrich, W. C., 1973. “Finite element analysis of reinforced concrete”. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, 99(st1), pp. 2109–2122.

Sun, F.-F. e Bursi, O. S., 2005. “Displacement-based and two-field mixed variational formulations for composite beams with shear lag”. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 131(2), pp. 199–210.

Svensson, S., 1985. “Lateral buckling of beams analysed as elastically supported columns subject to a varying axial force”. *Journal of Constructional Steel Research*, 5(3), pp. 179–193.

T

- Taig, G. e Ranzi, G., 2015. “Generalised Beam Theory (GBT), for composite beams with partial shear interaction”. *Engineering Structures*, 99, pp. 582–602.
- Timoshenko, S. P. e Gere, J. M., 1961. *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill.

U

- Uddin, M. A., Sheikh, A. H., Brown, D., Bennett, T. e Uy, B., 2017. “A higher order model for inelastic response of composite beams with interfacial slip using a dissipation based arc-length method”. *Engineering Structures* 139, pp. 120–134.
- Uy, B. e Bradford, M. A., 1996. “Elastic local buckling of steel plates in composite steel-concrete members”. *Engineering Structures*, 18(3), pp. 193–200.

V

- Vlasov, V., 1958. *Tonkostenyje sterjni* (em russo). Fizmatgiz, Rússia. Tradução francesa: “Pièces Longues en Voiles Minces”, Éditions Eyrolles, França, 1962.
- Vrcelj, Z. e Bradford, M. A., 2009. “Inelastic restrained distortional buckling of continuous composite T-beams”. *Journal of Constructional Steel Research*, 65(4), pp. 850–859.

W

- Waterloo Maple Inc., 2017. MAPLE 2017 (versão 2017.1), Waterloo, Canadá.
- Willam, K. J. e Warnke, E. P., 1975. “Constitutive models for the triaxial behavior of concrete”. *Proceedings of IABSE*, Structural Engineering Report 19, Section III, pp. 1-30.

Z

- Zhu, L. e Su, R., 2017. “Analytical solutions for composite beams with slip, shear-lag and time-dependent effects”. *Engineering Structures* 152, pp. 559–578.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Nithiarasu, P. e Zhu, J., 1977. *The finite element method*. Vol. 3. McGraw-hill.
- Zona, A. e Ranzi, G., 2011. “Finite element models for nonlinear analysis of steel–concrete composite beams with partial interaction in combined bending and shear”. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(2), pp. 98–118.





David José dos Santos Henriques

Mestre em Engenharia Civil

**Análise e modelação avançada de vigas
mistas aço-betão utilizando a
Teoria Generalizada de Vigas**

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em
Engenharia Civil

Janeiro, 2020





David José dos Santos Henriques

Mestre em Engenharia Civil

**Análise e modelação avançada de vigas mistas
aço-betão utilizando a
Teoria Generalizada de Vigas**

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em
Engenharia Civil

Janeiro, 2020

Copyright © David José dos Santos Henriques, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA