

# **CONTROLO DA FISSURAÇÃO EM LAJES FUNGIFORMES MACIÇAS. ESTUDO DE UMA LAJE RESTRINGIDA AXIALMENTE**

**LETÍCIA ANTUNES CORRÊA**

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de  
**MESTRE EM ESTRUTURAS DE ENGENHARIA CIVIL**

---

Orientador: Professor Doutor Carlos Filipe Ferreira de Sousa

---

Coorientador: Professor Doutor Nelson Saraiva Vila Pouca

OUTUBRO DE 2020

## **MESTRADO EM ESTRUTURAS DE ENGENHARIA CIVIL 2019/2020**

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351-22-508 1901

Fax +351-22-508 1446

✉ [mestec@fe.up.pt](mailto:mestec@fe.up.pt)

*Editado por*

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351-22-508 1400

Fax +351-22-508 1440

✉ [feup@fe.up.pt](mailto:feup@fe.up.pt)

🌐 <http://www.fe.up.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Mestrado em Estruturas de Engenharia Civil - 2019/2020 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2020.*

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respetivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão eletrónica fornecida pelo respetivo Autor.

À minha Família

*You must be the change you wish to see in the world*

*Mahatma Gandhi*



## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de deixar expresso o meu profundo agradecimento a todos os professores que, com seus ensinamentos, contribuíram para a minha educação. Em especial ao Professor Doutor Carlos Sousa, orientador científico desta dissertação, pela disponibilidade, pelo saber que transmitiu e pela orientação recebida no desenvolvimento desta dissertação e ao Professor Doutor Nelson Vila Pouca, coorientador científico desta dissertação, pelos conhecimentos transmitidos durante o curso.

A todos os meus amigos, que me acompanharam em meu percurso acadêmico, pelo companheirismo e pelo apoio.

Por último, a minha família, a quem sou extremamente grata, pelo apoio incondicional, por me incentivarem ao longo de toda a minha vida acadêmica e por sempre estarem presentes em todas as minhas superações e conquistas.



## **RESUMO**

A presente dissertação tem como principal objetivo a análise dos efeitos das deformações impostas restringidas axialmente em lajes fungiformes maciças e o estudo do comportamento estrutural em serviço destas lajes, sujeitas à flexão composta de tração, devido aos efeitos das ações verticais instaladas no piso e do esforço axial resultante da restrição da laje, que elevam as tensões de tração no betão e ocasionam o surgimento de fissuras. Para atender a estes efeitos, é necessário um dimensionamento adequado das armaduras para controlo da fissuração, garantindo que as fissuras não ultrapassem os valores admissíveis.

Após a introdução, onde é feito o enquadramento do tema, são apresentadas as características da estrutura analisada neste estudo, idealizando-se diferentes cenários em termos de restrição à deformação axial da laje. É apresentado, também, o dimensionamento das armaduras através de métodos simplificados de análise.

Posteriormente faz-se a caracterização das análises não-lineares, realizadas no programa de cálculo DIANA (2020), baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), descrevendo-se, então, o modelo da estrutura e as malhas de elementos finitos, apoios e ações consideradas. Apresentam-se, também, os modelos usados para simular o comportamento dos materiais e da ligação aço-betão e os métodos utilizados para determinar a abertura de fendas nestas análises.

Por fim, são apresentados os resultados obtidos através das análises não-lineares, sendo possível verificar o comportamento estrutural em serviço das lajes fungiformes maciças para os diferentes graus de restrição axial considerados. Os resultados obtidos com este tipo de análise também são comparados com os de métodos simplificados de análise.

**PALAVRAS-CHAVE:** fissuração, laje fungiforme maciça, deformação imposta, grau de restrição axial, análise não-linear.





## **ABSTRACT**

The present dissertation has as main objective the analysis of the effects of imposed deformations axially restrained in flat solid slabs and the study of the structural behavior in service of these slabs, subjected to bending and axial forces, due to the effects of the vertical loads installed on the floor and the axial stress resulting from the restraint of imposed deformations, which increase the tensile stresses in the concrete and cause the appearance of cracks. Therefore, it is necessary to adequately design the reinforcement for crack control, ensuring that the cracks do not exceed the admissible values.

After the introduction, where the relevance of the theme is explained, the characteristics of the structure analyzed in this study are presented, idealizing different scenarios in terms of restriction to the axial deformation of the slab. Reinforcement design is also presented, using simplified methods of analysis.

Subsequently, the characterization of the non-linear analyses, carried out in the software DIANA (2020), based on the Finite Element Method (FEM), is presented, describing, then, the structure model and the finite element meshes, supports and actions considered. The models used to simulate the behavior of the materials and the steel-concrete bond, as well as the methods used to determine the crack opening in these analyses, are also presented.

Finally, the results obtained through non-linear analyses are shown, where it is possible to see the structural behavior in service of the flat solid slab for the different degrees of restraint considered. The results obtained with this type of analysis are also compared with those obtained with simplified methods of analysis.

**KEYWORDS:** cracking, flat solid slab, imposed deformation, degree of restraint, non-linear analysis.



## ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS.....	i
RESUMO.....	iii
ABSTRACT.....	v
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1. ENQUADRAMENTO DO TEMA E OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO.....	1
1.2. ORGANIZAÇÃO EM CAPÍTULOS.....	2
<b>2. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA ANALISADA.....</b>	<b>5</b>
2.1. GEOMETRIA.....	5
2.2. PROPRIEDADES DOS MATERIAIS .....	7
2.3. CARACTERÍSTICAS AMBIENTAIS.....	7
2.4. AÇÕES E COMBINAÇÕES DE AÇÕES.....	7
2.5. FASEAMENTO CONSTRUTIVO.....	8
<b>3. DIMENSIONAMENTO ATRAVÉS DE MÉTODOS SIMPLIFICADOS DE ANÁLISE .....</b>	<b>9</b>
3.1. INTRODUÇÃO.....	9
3.2. DIMENSIONAMENTO PARA ELUR.....	11
3.3. DIMENSIONAMENTO PARA ELS.....	12
3.4. ARMADURAS.....	17
<b>4. CARACTERIZAÇÃO DAS ANÁLISES NÃO-LINEARES ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>21</b>
4.1. INTRODUÇÃO.....	21
4.2. MODELO DA ESTRUTURA .....	21
4.3. MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS, APOIOS E AÇÕES.....	23
4.4. MODELOS DE COMPORTAMENTO DO BETÃO .....	25

4.4.1. COMPORTAMENTO DO BETÃO A LONGO PRAZO .....	25
4.4.1.1. Fluência .....	27
4.4.1.2. Modelo de fluência .....	27
4.4.1.3. Retração .....	29
4.4.1.4. Modelo de retração .....	31
4.4.2. COMPORTAMENTO DO BETÃO FENDILHADO .....	33
4.4.2.1. Modelos de fendilhação .....	33
4.4.2.2. Modelo de retenção de tensões de tração pelo betão simples ( <i>tension softening</i> ) .....	33
4.4.3. MODELO DE COMPORTAMENTO DO BETÃO COMPRIMIDO .....	34
<b>4.5. MODELO DE COMPORTAMENTO DO AÇO .....</b>	<b>35</b>
<b>4.6. MODELO DE ADERÊNCIA AÇO-BETÃO .....</b>	<b>36</b>
<b>4.7. DETERMINAÇÃO DA ABERTURA DE FENDAS .....</b>	<b>37</b>
<b>5. RESULTADOS DAS ANÁLISES NÃO-LINEARES .....</b>	<b>41</b>
5.1. INTRODUÇÃO .....	41
5.2. COMPORTAMENTO SOB CARREGAMENTO MONOTONICAMENTE CRESCENTE .....	41
5.3. COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DE UMA ESTRUTURA NÃO RESTRINGIDA .....	52
5.4. COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DE UMA ESTRUTURA RESTRINGIDA .....	59
5.5. COMPARAÇÃO ENTRE AS ANÁLISES EM SERVIÇO COM DIFERENTES GRAUS DE RESTRIÇÃO AXIAL .....	71
5.5.1. ESFORÇOS AXIAIS .....	71
5.5.2. GRAU DE RESTRIÇÃO AXIAL EFETIVO ( $R_{EFF}$ ) .....	72
<b>6. COMPARAÇÃO ENTRE ANÁLISES NÃO-LINEARES E MÉTODOS SIMPLIFICADOS DE ANÁLISE .....</b>	<b>75</b>
6.1. INTRODUÇÃO .....	75
6.2. MOMENTOS FLETORES .....	75
6.3. ABERTURA DE FENDAS .....	80
6.4. ESFORÇOS AXIAIS .....	85
<b>7. CONCLUSÕES .....</b>	<b>87</b>
7.1. CONCLUSÕES GERAIS .....	87
7.2. DESENVOLVIMENTOS FUTUROS .....	88

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS** ..... 89



## ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 2.1 – Representação em planta de uma zona corrente da laje em estudo, assinalando a sombreado a parte que foi discretizada no modelo de elementos finitos.....	5
Fig. 2.2 – Sequência considerada para as análises. ....	8
Fig. 3.1 – Representação do método do pórtico equivalente. ....	9
Fig. 3.2 – Divisão dos painéis de lajes fungiformes (CEN, 2010). ....	10
Fig. 3.3 – Equilíbrio utilizado para estimar armadura em flexão composta com tração, para uma situação em que a secção transversal está totalmente tracionada. ....	12
Fig. 3.4 – Flexão composta em fase elástica fendilhada (Walther e Miehlebradt, 1990).....	13
Fig. 3.5 – Interação da restrição à deformação por retração e flexão induzida por carga (fib, 2019). .	14
Fig. 3.6 – Armaduras da laje: a) Armadura longitudinal superior; b) Armadura transversal superior; c) Armadura longitudinal inferior; d) Armadura transversal inferior. ....	18
Fig. 3.7 – Armadura do pilar.....	19
Fig. 4.1 – Elementos finitos: a) CHX60; b) CTP45 (DIANA, 2020).....	22
Fig. 4.2 – Modelo numérico da estrutura em análise.....	22
Fig. 4.3 – Malha de elementos finitos: a) Modelo A; b) Modelo B. ....	24
Fig. 4.4 – Apoios considerados para a análise da estrutura sob carregamento monotonicamente crescente e para a análise em serviço da estrutura não restringida. ....	24
Fig. 4.5 – Componentes da deformação sob aplicação de um carregamento prolongado. Adaptado de Gilbert e Ranzi (2011). ....	26
Fig. 4.6 – Efeito da retração numa peça de betão (Costa e Appleton, 2002). ....	30
Fig. 4.7 – Modelos de fendilhação: (a) fenda discreta; (b) fenda distribuída. Adaptado de Kwak e Filippou (1990). ....	33
Fig. 4.8 – Diagrama de retenção de tensões de tração pelo betão simples. ....	34
Fig. 4.9 – Diagrama de tensão-deformação do betão, de acordo com o MC2010 (fib, 2013). ....	35
Fig. 4.10 – Diagrama de tensão-deformação considerado para o aço. ....	36
Fig. 4.11 – Diagrama de tensão-deslizamento na interface entre o aço e o betão. Adaptado de fib (2013). ....	37
Fig. 4.12 – Representação de um troço da laje com a localização dos nós, ao longo do eixo Y, utilizados para determinar a abertura de fendas. ....	38
Fig. 5.1 – Diagrama de deslocamento vertical ao centro do painel da laje em função da carga aplicada. ....	42
Fig. 5.2 – Extensões de fissuração: a) modelo A; b) modelo B.....	43
Fig. 5.3 – Extensões de fissuração, por uma vista superior dos modelos: a) modelo A; b) modelo B. ....	44
Fig. 5.4 – Extensões de fissuração, por uma vista inferior dos modelos: a) modelo A; b) modelo B. ...	45

Fig. 5.5 – Fenda em análise do modelo A. ....	45
Fig. 5.6 – Abertura de fenda em função de y, para diferentes métodos de avaliação. ....	46
Fig. 5.7 – Gráfico do deslizamento aço-betão na armadura, na vizinhança da fenda, para $y = 0,5$ m. ....	47
Fig. 5.8 – Tensões na armadura longitudinal superior: a) modelo A; b) modelo B. ....	48
Fig. 5.9 – Tensões nos varões mais solicitados da armadura longitudinal superior: a) 2º varão a partir do eixo do pilar; b) 3º varão a partir do eixo do pilar. ....	49
Fig. 5.10 – Tensões no varão mais solicitado da armadura longitudinal superior, na zona da faixa central. ....	50
Fig. 5.11 – Tensões na armadura longitudinal inferior: a) modelo A; b) modelo B. ....	51
Fig. 5.12 – Tensões num varão da armadura longitudinal inferior. ....	51
Fig. 5.13 – Mapa de deslocamentos verticais no final da análise. ....	52
Fig. 5.14 – Evolução do deslocamento vertical ao longo do tempo para o ponto mais desfavorável da estrutura. ....	52
Fig. 5.15 – Extensões de fissuração no final da análise. ....	53
Fig. 5.16 – Tensões na armadura longitudinal superior no final da análise. ....	53
Fig. 5.17 – Tensões no varão mais solicitado da armadura longitudinal superior: a) na zona da faixa sobre o pilar; b) na zona da faixa central. ....	54
Fig. 5.18 – Fendas em análise na face superior da laje, no final da análise, por uma vista superior do modelo. ....	55
Fig. 5.19 – Variação da abertura de fenda junto à: a) face esquerda do pilar; b) face direita do pilar. ....	56
Fig. 5.20 – Tensões na armadura longitudinal inferior no final da análise. ....	57
Fig. 5.21 – Tensões num varão da armadura longitudinal inferior. ....	57
Fig. 5.22 – Fenda em análise na face inferior da laje, no final da análise, por uma vista inferior do modelo. ....	58
Fig. 5.23 – Variação da abertura da fenda em destaque na Fig. 5.22. ....	58
Fig. 5.24 – Evolução do deslocamento vertical ao longo do tempo para o ponto mais desfavorável da estrutura. ....	59
Fig. 5.25 – Extensões de fissuração no final da análise. ....	60
Fig. 5.26 – Tensões na armadura longitudinal superior no final da análise. ....	60
Fig. 5.27 – Tensões no varão mais solicitado da armadura longitudinal superior: a) na zona da faixa sobre o pilar; b) na zona da faixa central. ....	61
Fig. 5.28 – Fendas em análise na face superior da laje, no final da análise, por uma vista superior do modelo. ....	62
Fig. 5.29 – Variação da abertura de fenda junto à: a) face esquerda do pilar; b) face direita do pilar. ....	63
Fig. 5.30 – Tensões na armadura longitudinal inferior no final da análise. ....	63
Fig. 5.31 – Tensões num varão da armadura longitudinal inferior. ....	64



Fig. 5.32 – Fenda em análise na face inferior da laje, no final da análise, por uma vista inferior do modelo.....	65
Fig. 5.33 – Variação da abertura da fenda em destaque na Fig. 5.32. ....	65
Fig. 5.34 – Evolução do deslocamento vertical ao longo do tempo para o ponto mais desfavorável da estrutura. ....	66
Fig. 5.35 – Extensões de fissuração no final da análise. ....	66
Fig. 5.36 – Tensões na armadura longitudinal superior no final da análise. ....	67
Fig. 5.37 – Tensões no varão mais solicitado da armadura longitudinal superior: a) na zona da faixa sobre o pilar; b) na zona da faixa central.....	68
Fig. 5.38 – Fendas em análise na face superior da laje, no final da análise, por uma vista superior do modelo.....	68
Fig. 5.39 – Variação da abertura de fenda junto à: a) face esquerda do pilar; b) face direita do pilar. ....	69
Fig. 5.40 – Tensões na armadura longitudinal inferior no final da análise. ....	70
Fig. 5.41 – Tensões num varão da armadura longitudinal inferior. ....	70
Fig. 5.42 – Fenda em análise na face inferior da laje, no final da análise, por uma vista inferior do modelo.....	71
Fig. 5.43 – Variação da abertura da fenda em destaque na Fig. 5.42. ....	71
Fig. 5.44 – Diagrama de esforço axial instalado na laje nas análises com diferentes graus de restrição axial, no final da análise. ....	72
Fig. 5.45 – Graus de restrição axial efetivos ao longo do tempo para as análises em serviço da estrutura. ....	73
Fig. 6.1 – Distribuição das composed lines consideradas ao longo da laje, numa vista em planta. ....	76
Fig. 6.2 – Diagrama de momentos ao longo das composed lines para as cargas de: a) ELS; b) ELUR. ....	76
Fig. 6.3 – Eixos considerados para avaliação dos momentos fletores na laje.....	77
Fig. 6.4 – Momentos fletores para a carga de ELS para os eixos: a) eixo A-A'; b) eixo B-B'. ....	78
Fig. 6.5 – Momentos fletores para a carga de ELUR para os eixos: a) eixo A-A'; b) eixo B-B'. ....	79
Fig. 6.6 – Comparação da abertura de fenda, em função de y, obtida pela análise não-linear e por métodos simplificados de análise. ....	80
Fig. 6.7 – Comparação da abertura de fenda, em função de y, obtida pela análise não-linear e por métodos simplificados de análise, para diferentes posições da estrutura não restringida (R = 0): a) face superior da laje; b) face inferior da laje. ....	82
Fig. 6.8 – Comparação da abertura de fenda, em função de y, obtida pela análise não-linear e por métodos simplificados de análise, para diferentes posições da estrutura restringida (R = 1/3): a) face superior da laje; b) face inferior da laje. ....	83
Fig. 6.9 – Comparação da abertura de fenda, em função de y, obtida pela análise não-linear e por métodos simplificados de análise, para diferentes posições da estrutura restringida (R = 2/3): a) face superior da laje; b) face inferior da laje. ....	84

Fig. 6.10 – Comparação entre os valores de esforços axiais obtidos no final das análises não-lineares da estrutura em serviço e através do método baseado no ábaco de Fehling e Leutbecher (2003) e do método de Câmara e Luís (2006b). ..... 85

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1 – Propriedades dos materiais, de acordo com o MC2010 (fib, 2013). .....	7
Tabela 3.1 – Distribuição simplificada dos momentos fletores no caso de uma laje fungiforme (CEN, 2010). .....	10
Tabela 3.2 – Distribuição considerada dos momentos fletores. ....	10
Tabela 3.3 – Momentos fletores atuantes na laje, em ELUR, e armaduras requeridas. ....	11
Tabela 3.4 – Momentos fletores atuantes na laje, em ELS, e armaduras requeridas para controlo da abertura de fendas ( $w = 0,3$ mm), considerando restrição total da deformação axial segundo a direção longitudinal. ....	15
Tabela 3.5 – Altura útil mínima e altura útil considerada no estudo. ....	17
Tabela 4.1 – Efeito do tipo de agregado no módulo de elasticidade, segundo o MC2010 (fib, 2013). ..	28
Tabela 4.2 – Coeficientes a serem usados na equação 4.9 para diferentes tipos de cimento, segundo MC2010 (fib, 2013). ....	29
Tabela 4.3 – Coeficientes $\alpha_i$ , segundo o MC2010 (fib, 2013). ....	32
Tabela 6.1 – Valores de momentos obtidos pelo DIANA e pelo método do pórtico equivalente. ....	80



## SÍMBOLOS, ACRÓNIMOS E ABREVIATURAS

### LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

A	Área da secção transversal
$A_c$	Área da secção transversal de betão
$A_s$	Área da secção transversal da armadura
$A'_s$	Área da secção transversal da armadura comprimida
$A_{s,min}$	Área da secção transversal da armadura mínima
$E_{c,adj}$	Valor de cálculo do módulo de elasticidade ajustado do betão
$E_{ci}$	Valor de cálculo do módulo de elasticidade do betão aos 28 dias
$E_{ci}(t)$	Valor de cálculo do módulo de elasticidade do betão para uma idade genérica
$E_s$	Valor de cálculo do módulo de elasticidade do aço
$G_f$	Energia de fratura do betão
$G_k$	Valor característico da ação permanente
$K_R$	Rigidez do apoio elástico
L	Comprimento; vão
M	Momento fletor
N	Esforço axial
$N_{cr}$	Esforço axial de fissuração
$Q_k$	Valor característico da ação variável
R	Grau de restrição axial
$R_{eff}$	Grau de restrição axial efetivo
RH	Humidade relativa do ambiente, em %

### LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

b	Largura
$b_t$	Largura média da zona tracionada
d	Altura útil da secção, dada pela distância entre o centro de gravidade das armaduras e da fibra mais comprimida
$d'$	Altura útil da secção, dada pela distância entre o centro de gravidade das armaduras comprimidas e da fibra mais comprimida
$f_{ck}$	Valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias

$f_{cm}$	Valor médio da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias
$f_{ctm}$	Valor médio da tensão de rotura do betão à tração simples
$f_{yk}$	Valor característico da tensão de cedência à tração do aço das armaduras para betão armado
$f_{ym}$	Valor da tensão de cedência média à tração do aço das armaduras para betão armado
$h$	Altura do elemento
$h_{eq}$	Altura equivalente do elemento
$t$	Instante de tempo
$t_s$	Idade do betão no fim da cura
$u$	Perímetro do elemento em contato com a atmosfera
$w$	Abertura de fendas
$x$	Profundidade do eixo neutro

## LETRAS GREGAS

$\alpha_{bs}$	Coefficiente que depende do tipo de cimento
$\alpha_{ds1}$	Coefficiente que depende do tipo de cimento
$\alpha_{ds2}$	Coefficiente que depende do tipo de cimento
$\alpha_e$	Rácio modular entre o valor de cálculo do módulo de elasticidade do aço e o valor de cálculo do módulo de elasticidade do betão aos 28 dias
$\beta$	Coefficiente empírico para estimar a tensão média sobre $l_{s,máx}$ , dependendo do tipo de carga
$\beta_{bs}(t)$	Função que descreve a evolução da retração autógena com o tempo
$\beta_{ds}(t - t_s)$	Função que descreve a evolução da retração por secagem com o tempo
$\beta_{RH}(RH)$	Coefficiente que depende da humidade relativa
$\gamma$	Peso volúmico
$\epsilon_c(t)$	Extensão total do betão num instante de tempo $t$
$\epsilon_{cbs}(t)$	Retração autógena no instante de tempo $t$
$\epsilon_{cbs0}(f_{cm})$	Coefficiente de referência da retração autógena
$\epsilon_{cc}(t)$	Deformação por fluência do betão
$\epsilon_{cds}(t, t_s)$	Retração por secagem no instante de tempo $t$
$\epsilon_{cds0}(f_{cm})$	Coefficiente de referência da retração por secagem
$\epsilon_{ci}(t_0)$	Deformação inicial do betão
$\epsilon_{cn}(t)$	Deformação independente da tensão do betão

$\varepsilon_{cs}(t, t_s)$	Deformação total por retração no instante de tempo $t$
$\varepsilon_{CT}(t)$	Deformação térmica do betão
$\varepsilon_{c\sigma}(t)$	Deformação dependente da tensão do betão
$\eta_r$	Coefficiente para considerar a contribuição de retração
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\rho$	Taxa da área de armadura de tração em relação à área de betão
$\rho'$	Taxa da área de armadura de compressão em relação à área de betão
$\sigma_c$	Tensão no betão
$\sigma_s$	Tensão na armadura
$\sigma'_s$	Tensão na armadura comprimida
$\tau_{bmax}$	Resistência máxima da interface entre o betão e o aço
$\tau_{bms}$	Resistência média da interface entre o betão e o aço
$\phi$	Diâmetro do varão de aço
$\psi_0$	Coefficiente para a determinação do valor de combinação de uma ação variável
$\psi_1$	Coefficiente para a determinação do valor frequente de uma ação variável
$\psi_2$	Coefficiente para a determinação do valor quase permanente de uma ação variável

## ABREVIATURAS E ACRÓNIMOS

CEN	Comité Européen de Normalisation
EC0	Eurocódigo 0
EC2	Eurocódigo 2
ELS	Estado Limite de Serviço
ELUR	Estado Limite Último de Resistência
fib	Fédération Internationale du Béton
MC2010	fib Model Code for Concrete Structures 2010
MEF	Método dos Elementos Finitos
REBAP	Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado





# 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1. ENQUADRAMENTO DO TEMA E OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

Devido à baixa resistência à tração do betão, é praticamente inevitável a ocorrência de fissuras em estruturas de betão armado, devido a cargas aplicadas, deformações restringidas ou pela combinação destes dois tipos de efeitos.

O betão retrai quando envelhece, principalmente devido à evaporação de água dos poros, sendo este efeito denominado retração por secagem, mas também na ausência de trocas de humidade com o meio ambiente, devido ao processo de hidratação do cimento, efeito este que é designado retração autógena. Além disso, as variações de temperatura nas idades jovens do betão, devidas à libertação do calor de hidratação do cimento, são também responsáveis por deformações impostas à estrutura. Num elemento de betão armado, os encurtamentos causados pela retração e pelas variações de temperatura induzem tensões de tração no betão, quando são restringidos. A restrição pode ser de natureza interna (restrição induzida pelas armaduras de aço ou pelo próprio betão quando as deformações impostas não são uniformes em toda a secção transversal) ou de natureza externa (devido a condições de apoio ou de ligação a outros elementos estruturais).

Numa laje fungiforme maciça, suportada por pilares rígidos e/ou paredes, há uma restrição considerável à deformação axial da laje. Uma das maiores particularidades das lajes fungiformes tem a ver com a existência de uma elevada concentração de tensões na zona de ligação laje-pilar. Em situações de serviço estas lajes estão submetidas à flexão composta de tração, devido à atuação simultânea das ações verticais instaladas no piso e do esforço axial que resulta do impedimento à livre contração da laje por efeito da retração e, dessa forma, surgem tensões de tração no betão, que normalmente provocam fissuras nas zonas mais esforçadas, porque as tensões devidas à sobreposição dos efeitos das cargas gravíticas e das deformações impostas restringidas atingem a resistência à tração do betão. Por isso, é necessário um dimensionamento adequado das armaduras para controlo da fissuração decorrente das deformações impostas restringidas. É importante garantir que as aberturas de fissuras não ultrapassem os valores admissíveis. Para haver um bom comportamento em serviço, é também necessário que a armadura não atinja a cedência em fase de serviço, pois o contrário provocaria aberturas de fissuras com valores inadmissíveis. Também se deve ter em conta que a fissuração contribui para o aumento das flechas, tendo estas que ser limitadas a valores admissíveis para não causar danos em revestimentos e divisórias.

Muitas vezes, as estruturas de betão armado estão sujeitas a deformações impostas significativas e, por isso, o esforço axial resultante da restrição da laje deve ser adequadamente considerado no dimensionamento dos elementos estruturais. Casal (2013) mostrou como os efeitos das deformações

impostas são significativos em edifícios com grandes dimensões em planta, sendo um fator condicionante para os elementos estruturais localizados na periferia do edifício.

Diversos autores têm feito estudos sobre métodos não-lineares numéricos (Câmara e Luís, 2006a, Carvalho, 2013, Sousa *et al*, 2017, Gomes *et al*, 2020b) e analíticos (Schlicke *et al*, 2020) para analisar o comportamento estrutural de elementos de betão armado sujeitos à flexão e deformações impostas restringidas. Nenhum destes trabalhos de investigação incidiu sobre o comportamento de lajes fungiformes. Gomes *et al* (2020a) realizou uma campanha experimental para estudar o comportamento em serviço de lajes maciças restringidas axialmente. Porém, apesar da constante evolução sobre o conhecimento do comportamento estrutural durante a fase de serviço do betão armado e a sua importância no dimensionamento dos elementos estruturais, o controlo da fissuração em lajes de piso restringidas axialmente ainda é pouco abordado em regulamentos de projeto e disposições regulamentares, que, por falta de informações acerca dos procedimentos mais corretos para a contabilização das condições de restrição na estrutura, do comportamento não-linear do betão tracionado e da interação entre a fluência do betão e as deformações impostas na prática de projeto, asseguram o controlo da fissuração impondo quantidades de armaduras que podem ser superiores às efetivamente necessárias, quando o dimensionamento é realizado em flexão composta considerando o esforço axial de fissuração  $N_{cr}$ , ou então insuficientes caso os efeitos das deformações restringidas não sejam convenientemente contabilizados (Azenha *et al*, 2019).

Por outro lado, as forças instaladas nas lajes, em resultado das deformações impostas restringidas, influenciam os esforços instalados nas paredes de contraventamento de edifícios. Existem, ainda hoje, dúvidas sobre os procedimentos mais corretos para a contabilização destes efeitos no projeto de estruturas.

Pretende-se, com esta dissertação, analisar e discutir os efeitos das deformações impostas restringidas em lajes fungiformes maciças, sujeitas a deformações impostas e ações verticais, idealizando alguns casos práticos, e analisar o comportamento estrutural em serviço desta tipologia de laje. Para a modelação da estrutura e a simulação do comportamento não-linear do betão armado foi utilizado o programa de cálculo DIANA (2020), baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF). Os resultados obtidos com este tipo de análise são comparados com os de métodos simplificados de dimensionamento. Pretende-se, também, estabelecer recomendações sobre os critérios a serem utilizados no dimensionamento das armaduras para controlo da fissuração neste tipo de estrutura.

## 1.2. ORGANIZAÇÃO EM CAPÍTULOS

Esta dissertação está dividida em sete capítulos, sendo o primeiro constituído pela presente **Introdução**.

No **Capítulo 2**, apresentam-se as características da estrutura em análise neste estudo, as ações a que está sujeita e o faseamento construtivo da mesma.

No **Capítulo 3**, é feito o dimensionamento das armaduras dos elementos estruturais, com base no Estado Limite Último de Resistência (ELUR) e Estado Limite de Serviço (ELS), através de métodos simplificados de análise.

No **Capítulo 4**, estão descritas as características consideradas para o modelo da estrutura nas análises não-lineares, os modelos utilizados para simular o comportamento dos materiais e da ligação aço-betão, assim como os métodos considerados para avaliação da abertura de fendas a partir das análises não-lineares.

No **Capítulo 5**, apresentam-se os resultados obtidos nas análises não-lineares, realizadas no programa de cálculo DIANA (2020), baseado no MEF.

No **Capítulo 6**, é feita a comparação de alguns resultados obtidos nas análises não-lineares com os obtidos através de métodos simplificados de análise.

Por fim, no **Capítulo 7**, são apresentadas as conclusões desta dissertação e algumas sugestões de desenvolvimentos futuros nesta temática.



## 2

### CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA ANALISADA

#### 2.1. GEOMETRIA

O estudo incide sobre uma laje fungiforme maciça, suportada por um pilar, localizada num vão interior em ambas as direções, na direção longitudinal possui um vão de 7,2 m e na direção transversal possui um vão de 5 m, com uma espessura de 0,3 m. O pilar possui uma secção retangular com dimensões de 0,50 m na direção longitudinal e 0,60 m na direção transversal. Tirou-se proveito das condições de simetria, tendo assim sido discretizada, nos modelos de elementos finitos, apenas a porção destacada na Fig. 2.1.

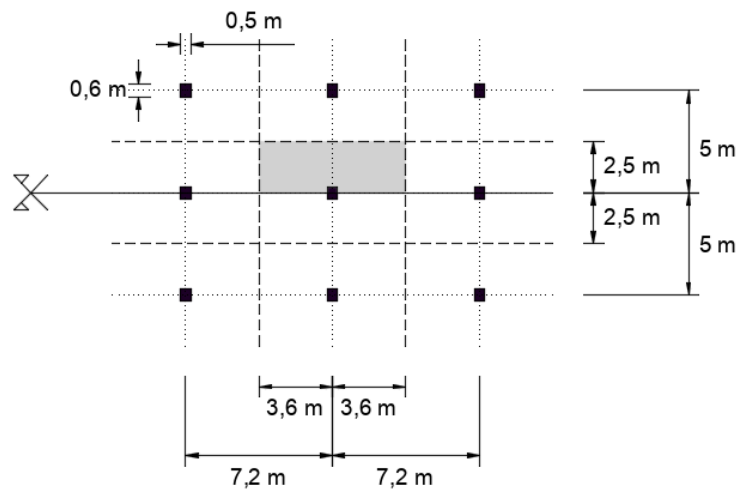


Fig. 2.1 – Representação em planta de uma zona corrente da laje em estudo, assinalando a sombreado a parte que foi discretizada no modelo de elementos finitos.

As dimensões indicadas são as existentes num edifício real que foi considerado como referência para a escolha do caso de estudo. No entanto, o edifício real de referência não apresenta uma malha de pilares totalmente regular. Neste estudo considera-se uma malha regular, para ser possível analisar apenas um painel de laje. Note-se que se pretende usar um modelo de elementos finitos refinado, com elementos finitos sólidos, recorrendo à análise não-linear para simular o comportamento do betão, o que inviabiliza a discretização no modelo de toda a estrutura, devido ao tempo de cálculo e aos processos de convergência da análise.

No que diz respeito às restrições à deformação axial da laje, considera-se que o edifício possui, na direção longitudinal (isto é, na direção dos vãos de 7,2 m), um grande desenvolvimento entre juntas de dilatação e paredes que restringem a deformação axial da laje induzida pela retração e pelas variações de temperatura. Para analisar os efeitos de tais restrições, é realizada uma análise paramétrica em que se usa um apoio elástico, com direção paralela ao folheto médio da laje, para simular a restrição à deformação axial da laje.

Ao longo do trabalho, são referidas quatro situações em termos de restrição à deformação axial da laje:

- $R = 0$  (estrutura não restringida, isto é, sem apoio elástico);
- $R = 1/3$  (estrutura parcialmente restringida);
- $R = 2/3$  (estrutura parcialmente restringida);
- $R = 1$  (estrutura totalmente restringida, onde os apoios de extremidade não sofrem qualquer deslocamento, sendo previstos apoios fixos que impedem a deformação axial).

O grau de restrição axial  $R$  é definido como o rácio entre a deformação restringida e a deformação imposta, considerado para efeitos de quantificação da rigidez do apoio elástico,  $K_R$ . Nessa quantificação, não são tidos em consideração os efeitos da fissuração da laje. Ou seja, é assumido que a relação entre a variação de tensão no betão e a deformação imposta é dada pelo módulo de elasticidade ajustado do betão,  $E_{c,adj} \cong E_{ci}/2,5$ . Além disso, não é considerado o efeito da presença de armaduras na laje. Nestas condições, a rigidez  $K_R$  é dada por:

$$K_R = \frac{R}{1 - R} \cdot \frac{E_{c,adj} \cdot A}{L} \quad (2.1)$$

em que:

A                    é a área de secção transversal restringida;

L                    é o comprimento longitudinal.

A dedução da Equação 2.1 é apresentada no Anexo A.

Portanto, para  $R = 1/3$  resulta  $K_R = 6,990E+08$  N/m e para  $R = 2/3$  essa rigidez vale  $K_R = 2,796E+09$  N/m, para  $E_{ci} = 33,55$  GPa,  $L = 7,2$  m e  $A = 0,75$  m<sup>2</sup>.

Os efeitos da fissuração provocarão um aumento do grau de restrição axial, relativamente aos valores de 1/3 e 2/3 mencionados atrás. Isto é, analisando os resultados das análises não-lineares efetuadas com os apoios elásticos atrás quantificados, será possível concluir que a deformação axial restringida é efetivamente superior aos referidos valores de 1/3 e 2/3, por causa do alongamento do folheto médio da laje induzido pelos efeitos da fissuração. Além disso, a presença de armaduras contribui também para o aumento do grau de restrição axial.

Note-se também que os efeitos da fissuração e da presença de armaduras farão com que a deformação axial, nas análises identificadas acima com  $R = 0$ , seja inferior à deformação imposta.

## 2.2. PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

Os materiais utilizados foram o betão C30/37 e o aço A500 NR. As suas propriedades mais relevantes para este estudo, de acordo com o Model Code for Concrete Structures 2010 - MC2010 (fib, 2013), estão descritas na Tabela 2.1. Há ainda outros aspetos do comportamento material com grande relevância para este estudo, tais como as deformações por retração e fluência. Todas as propriedades foram consideradas de acordo com o MC2010 (fib, 2013).

Tabela 2.1 – Propriedades dos materiais, de acordo com o MC2010 (fib, 2013).

	Propriedades	Valor	Unidades
C30/37	Peso volúmico ( $\gamma$ )	25	kN/m <sup>3</sup>
	$E_{ci}$	33,55	GPa
	$f_{ck}$	30	MPa
	$f_{ctm}$	2,9	MPa
	$G_f$	140,5	N/m
	Coeficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,2	adimensional
A500 NR	$f_{yk}$	500	MPa
	$f_{ym}$	550	MPa
	$E_s$	200	GPa

No betão foi utilizado um cimento do tipo CEM II/B-L 42.5R e agregados de quartzito.

## 2.3. CARACTERÍSTICAS AMBIENTAIS

Para efeitos de quantificação das deformações por retração e fluência, a humidade relativa média do ambiente no interior do edifício foi considerada com um valor de 60% e para a temperatura média desse ambiente foi considerado um valor de 20°C.

Com base no Eurocódigo 2 - EC2 (CEN, 2010), pelo facto dos pilares e lajes em estudo se tratarem de elementos de betão no interior do edifício, a classe de exposição é XC1 e, por isso, o valor considerado para o recobrimento nominal, que é a distância entre a face do betão e a face da armadura, é de 25 mm, tanto para os pilares quanto para as lajes.

## 2.4. AÇÕES E COMBINAÇÕES DE AÇÕES

As ações atuantes consideradas foram:

- Ações permanentes ( $G_k$ ) (aquelas que apresentam valor constante ou reduzida variabilidade em relação ao seu valor médio ao longo do tempo): peso próprio dos elementos estruturais, obtido através da multiplicação do peso volúmico do betão armado pelo volume do elemento, e restantes cargas permanentes. Para as restantes cargas permanentes considerou-se uma carga uniformemente distribuída nas lajes com o valor de 3 kN/m<sup>2</sup>;

- Ações variáveis ( $Q_k$ ): sobrecarga uniformemente distribuída nas lajes de 5 kN/m<sup>2</sup>, correspondendo a uma utilização hospitalar. Com base no Eurocódigo 0 - EC0 (CEN, 2009), os valores considerados para os coeficientes de combinação foram  $\psi_0 = 0,7$ ;  $\psi_1 = 0,7$  e  $\psi_2 = 0,6$ ;
- Também é considerada a ação correspondente à retração do betão no comportamento em serviço da estrutura.

No caso de verificação de segurança em relação ao Estado Limite Último de Resistência (ELUR), a combinação considerada, segundo o EC0 (CEN, 2009), é:

$$P_{ed} = 1,35 \cdot G_k + 1,5 \cdot Q_k \quad (2.2)$$

Para o Estado Limite de Serviço (ELS), a combinação utilizada foi a quase permanente, correspondendo às ações com uma duração na ordem dos 50% da vida útil da estrutura, sendo definida, de acordo com o EC0 (CEN, 2009), como:

$$P_{c.q.p.} = G_k + \psi_2 \cdot Q_k \quad (2.3)$$

## 2.5. FASEAMENTO CONSTRUTIVO

A Fig. 2.2 apresenta a sequência das etapas consideradas e o instante de tempo em que ocorrem.

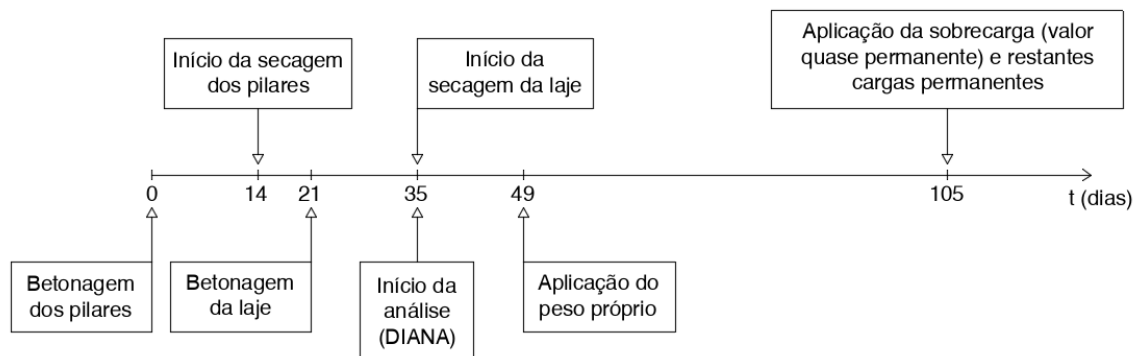


Fig. 2.2 – Sequência considerada para as análises.

Foi considerado que as lajes foram cofradas e escoradas durante 28 dias. Como a secagem pela superfície superior da laje começa antes da secagem pela superfície inferior, que só começa após a remoção da cofragem, foi considerado um valor médio de 14 dias após a betonagem para o fim da cura e início da secagem nas superfícies inferior e superior da laje.

Então, para a laje, a idade do betão no fim do período de cura foi de 14 dias, e a idade do betão no carregamento foi de 28 dias. Para os pilares, a idade do betão no fim do período de cura foi de 14 dias e a idade do betão no carregamento foi de 49 dias.



# 3

## DIMENSIONAMENTO ATRAVÉS DE MÉTODOS SIMPLIFICADOS DE ANÁLISE

### 3.1. INTRODUÇÃO

Para efeitos de projeto, as lajes fungiformes deverão ser analisadas, de acordo com o EC2 (CEN, 2010), utilizando um método comprovado, como o método das grelhas (no qual a laje é idealizada como um conjunto de elementos discretos interligados), o dos elementos finitos, o das charneiras plásticas ou o do pórtico equivalente.

Neste trabalho foi utilizado, como método simplificado de análise, o método do pórtico equivalente. A estrutura é dividida longitudinal e transversalmente em pórticos constituídos por pilares e por troços de lajes compreendidos entre as linhas médias de painéis adjacentes (área limitada por quatro pilares adjacentes), representado na Fig. 3.1. A carga total no painel deverá ser considerada na análise em cada direção. Os momentos fletores totais obtidos na análise deverão ser distribuídos por toda a largura da laje. Deverá considerar-se os painéis divididos em faixas sobre pilares e em faixas centrais, de acordo com a Fig. 3.2, e distribuir-se os momentos fletores conforme indicado na Tabela 3.1 (CEN, 2010).

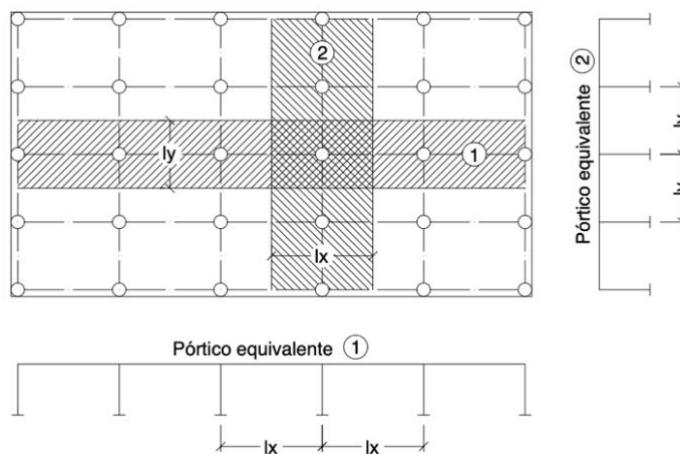


Fig. 3.1 – Representação do método do pórtico equivalente.

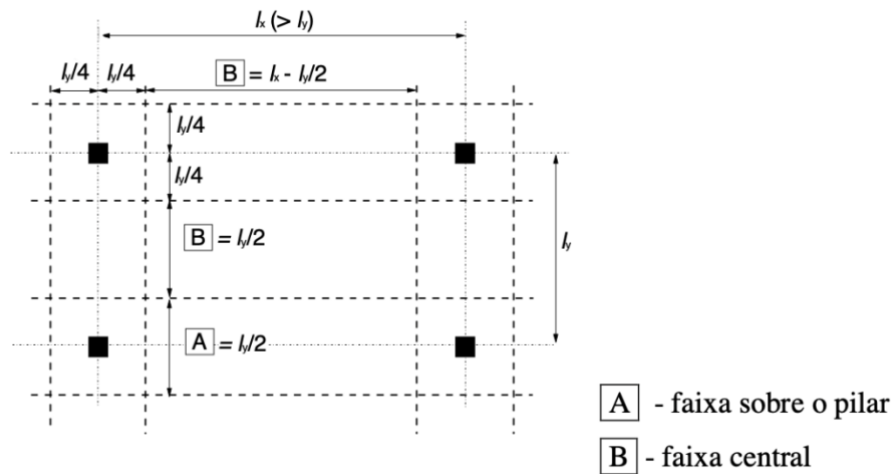


Fig. 3.2 – Divisão dos painéis de lajes fungiformes (CEN, 2010).

Tabela 3.1 – Distribuição simplificada dos momentos fletores no caso de uma laje fungiforme (CEN, 2010).

	Momentos negativos	Momentos positivos
Faixa sobre pilares (FP)	60 % a 80 %	50 % a 70 %
Faixa central (FC)	40 % a 20 %	50 % a 30 %

NOTA: O total dos momentos negativos e positivos, a resistir conjuntamente pelas faixas sobre pilares e pelas faixas centrais, deverá ser sempre igual a 100 %.

Neste trabalho, a distribuição considerada para os momentos fletores está apresentada na Tabela 3.2. Corresponde às percentagens propostas pelo regulamento Português REBAP (1983).

Tabela 3.2 – Distribuição considerada dos momentos fletores.

	Momentos negativos	Momentos positivos
Faixa sobre pilares (FP)	75 %	55 %
Faixa central (FC)	25 %	45 %

Para o cálculo da armadura necessária nos elementos estruturais para garantir a segurança ao ELUR e a verificação ao ELS foram utilizados os códigos MC2010 (fib, 2013) e EC2 (CEN, 2010) e o cálculo da armadura mínima foi feito de acordo com o EC2 (CEN, 2010), dado por:

$$A_{s,mín} = 0,26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b_t \cdot d \quad \text{mas não inferior a } 0,0013 \cdot b_t \cdot d \quad (3.1)$$

em que:

- $f_{ctm}$  é o valor médio da tensão de rotura do betão à tração simples;
- $f_{yk}$  é o valor característico da tensão de cedência à tração do aço das armaduras para betão armado;
- $b_t$  é a largura média da zona tracionada;
- $d$  é a altura útil da secção, dada pela distância entre o centro de gravidade das armaduras e da fibra mais comprimida.

### 3.2. DIMENSIONAMENTO PARA ELUR

Os valores dos momentos fletores atuantes na laje utilizando o método do pórtico equivalente, com uma combinação de ações referente ao ELUR, conforme apresentado na equação 2.2, estão indicados na Tabela 3.3, assim como as armaduras necessárias para garantir a segurança face a esses momentos fletores.

Tabela 3.3 – Momentos fletores atuantes na laje, em ELUR, e armaduras requeridas.

Representação dos momentos fletores	Momentos fletores (ELUR) (kNm/m)	Área de aço requerida ( $A_s$ ) (cm <sup>2</sup> /m)
$M^-_{x,FP}$	140,5	14,4
$M^+_{x,FP}$	51,5	5,3
$M^-_{x,FC}$	46,8	4,8
$M^+_{x,FC}$	42,1	4,3
$M^-_{y,FP}$	97,5	10,0
$M^+_{y,FP}$	35,8	3,8 ( $A_{s,min}$ )
$M^-_{y,FC}$	17,3	3,8 ( $A_{s,min}$ )
$M^+_{y,FC}$	15,6	3,8 ( $A_{s,min}$ )

É importante referir que, neste trabalho, não foi considerado o efeito da alternância de sobrecarga. Esta opção deve-se ao facto de a análise não-linear, baseada no MEF, ter sido feita com um modelo com apenas um pilar, tirando proveito das condições de simetria, para reduzir o tempo de cálculo da análise. Nesse modelo não é possível simular diretamente o efeito da alternância de sobrecarga. Por isso, na análise com o método do pórtico equivalente, também não foi considerado o efeito da alternância de sobrecarga, para tornar mais clara a comparação entre os dois métodos de análise. Numa estrutura de um edifício real é necessário considerar o efeito da alternância de sobrecarga, porque, por ser uma ação variável, pode atuar em qualquer tramo da laje. Dessa forma, verifica-se a condição de carga mais desfavorável a atuar na laje. A consideração do efeito da alternância de sobrecarga provoca um aumento dos momentos fletores máximos na zona do vão e, conseqüentemente, da quantidade de armadura necessária.

Como a análise incide sobre um painel interior da laje, os momentos flectores totais que permitiram determinar os valores apresentados na Tabela 3.3 foram calculadas recorrendo às conhecidas expressões  $P \cdot L^2/12$  e  $P \cdot L^2/24$ , para os momentos negativos e positivos, respetivamente.

### 3.3. DIMENSIONAMENTO PARA ELS

Para uma combinação de ações referente ao ELS, conforme apresentado na equação 2.3, deve-se calcular as tensões atuantes nas armaduras, em fase de serviço, considerando flexão composta com tração. A Fig. 3.3 demonstra o equilíbrio de forças numa secção fendilhada para a situação em que a secção transversal está totalmente tracionada, ou seja, uma situação em que o eixo neutro encontra-se fora da secção transversal.

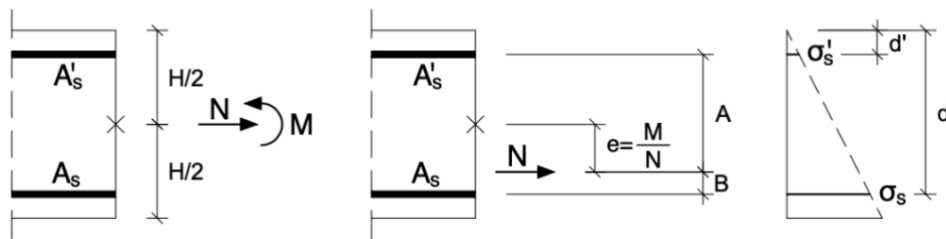


Fig. 3.3 – Equilíbrio utilizado para estimar armadura em flexão composta com tração, para uma situação em que a secção transversal está totalmente tracionada.

As forças de tração nas armaduras devidas à aplicação de um esforço axial,  $N$ , e um momento fletor,  $M$ , são determinadas através das seguintes equações:

$$\begin{cases} F_s = N \cdot \frac{A}{A + B} \\ F'_s = N \cdot \frac{B}{A + B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_s = \frac{F_s}{A_s} \\ \sigma'_s = \frac{F'_s}{A'_s} \end{cases} \quad (3.2)$$

O limite de validade destas expressões, para que não haja betão comprimido, corresponde ao diagrama de tensões apresentado à direita na Fig. 3.3 e é determinado por:

$$\frac{\sigma'_s}{\sigma_s} \geq \frac{d'}{d} \Leftrightarrow \frac{B \cdot A_s \cdot d}{A \cdot A'_s \cdot d'} \geq 1 \quad (3.3)$$

A Fig. 3.4 demonstra o equilíbrio de forças numa secção fendilhada para a situação em que o esforço axial apresenta uma baixa intensidade em comparação ao momento fletor atuante, encontrando-se o eixo neutro dentro da secção transversal, deixando de ser válido o equilíbrio proposto na Fig. 3.3.

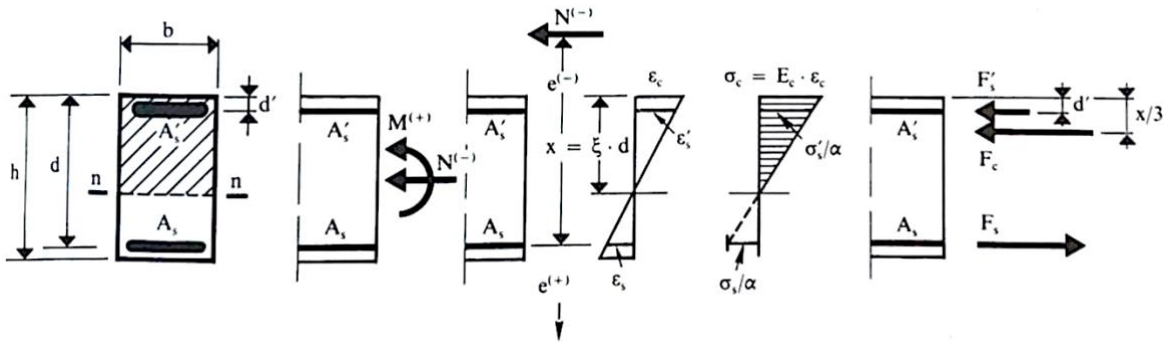


Fig. 3.4 – Flexão composta em fase elástica fendilhada (Walther e Miehlabrad, 1990).

De acordo com Walther e Miehlabrad (1990), estabelecendo as equações de equilíbrio e de compatibilidade de deformação, obtém-se uma equação de 3º grau para determinação da variável  $\xi$ , que por sua vez permitirá obter a profundidade do eixo neutro,  $x$ , uma vez que  $\xi = x/d$ :

$$\begin{aligned} \xi^3 - 3 \cdot \xi^2 \left( 1 + \frac{e}{d} \right) + 6 \cdot \alpha_e \cdot \rho \cdot \xi \cdot \left[ -\frac{e}{d} + \frac{\rho'}{\rho} \cdot \left( -\frac{e}{d} - 1 + \frac{d'}{d} \right) \right] \\ - 6 \cdot \alpha_e \cdot \rho \cdot \left[ -\frac{e}{d} + \frac{\rho' d'}{\rho d} \cdot \left( -\frac{e}{d} - 1 + \frac{d'}{d} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde:

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} \quad (3.5)$$

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} \quad (3.6)$$

$$\rho' = \frac{A'_s}{b \cdot d'} \quad (3.7)$$

Estabelecida a posição do eixo neutro, as tensões no betão e no aço, respetivamente, são dadas por:

$$\sigma_c = \frac{\xi}{\frac{\xi^2}{2} \cdot \left( 1 - \frac{\xi}{3} \right) + \rho' \cdot \alpha_e \cdot \left( \xi - \frac{d'}{d} \right) \cdot \left( 1 - \frac{d'}{d} \right)} \cdot \frac{M_s}{b \cdot d^2} \quad (3.8)$$

$$\sigma_s = \alpha_e \cdot \sigma_c \cdot \frac{1 - \xi}{\xi} = \frac{\alpha_e \cdot (1 - \xi)}{\frac{\xi^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{\xi}{3}\right) + \rho' \cdot \alpha \cdot \left(\xi - \frac{d'}{d}\right) \cdot \left(1 - \frac{d'}{d}\right)} \cdot \frac{M_s}{b \cdot d^2} \quad (3.9)$$

Nas equações anteriores:

- e            é a excentricidade da resultante de forças, determinada pelo quociente entre o momento fletor e o esforço axial;
- b            é a largura do elemento;
- $A_s$         é a área de aço em tração;
- $A'_s$         é a área de aço em compressão;
- $M_s$         é o momento em relação ao eixo da armadura  $A_s$ , dado pelo produto entre o esforço axial e a excentricidade em relação à posição dessa armadura.

A estimativa dos esforços de tração presentes na laje (em resultado da restrição ao seu encurtamento) foi feita de acordo com o método citado no Buletin n° 92 do fib (2019), que foi originalmente desenvolvido por Fehling e Leutbecher (2003). A sua aplicação prática consiste na utilização de um diagrama que permite estimar a força axial de tração, dependendo dos momentos flectores gerados devido à carga, do encurtamento (devido à retração e/ou temperatura) restringido e do valor para a limitação da largura da fissura, conforme é demonstrado na Fig. 3.5. O momento a meio-vão deve ser tomado como o parâmetro decisivo para a flexão.

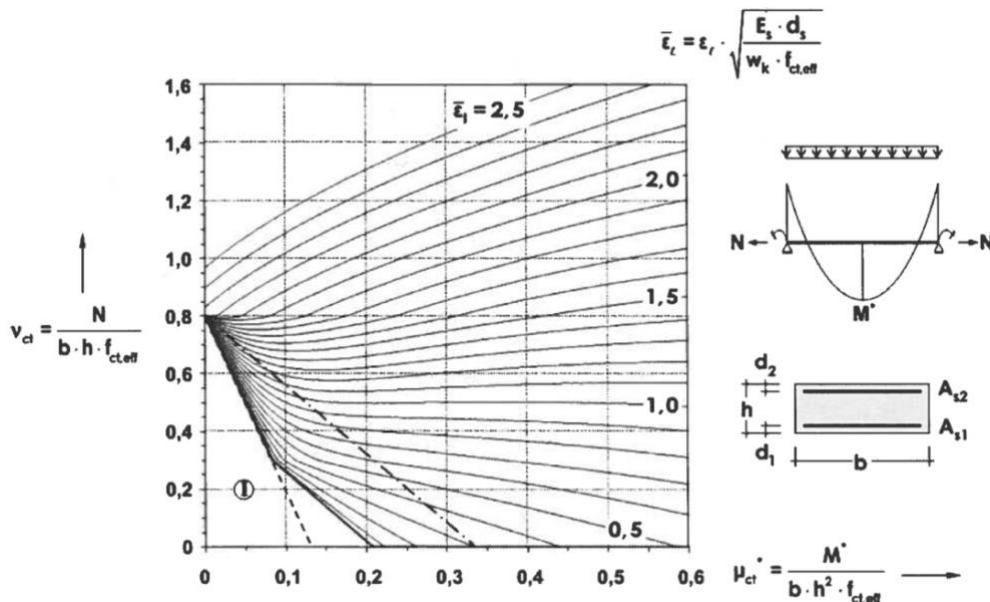


Fig. 3.5 – Interação da restrição à deformação por retração e flexão induzida por carga (fib, 2019).

Conforme exposto na Fig. 3.3 e na Fig. 3.4, e com o auxílio do Microsoft Excel, foram realizadas as iterações necessárias para determinar a quantidade de armadura que verificasse uma abertura de fendas de 0,3 mm. No que diz respeito à formulação para a determinação da abertura de fendas em função da

tensão na armadura na secção da fenda, foram usadas duas abordagens alternativas: a formulação do MC2010 (fib, 2013) e a do EC2 (CEN, 2010), com  $\tau_{bms} = 5,22$  MPa,  $\beta = 0,4$  e  $\eta_r = 1$ , conforme indicado no MC2010 (fib, 2013). Isto porque estas duas formulações conduzem, em determinadas situações, a resultados significativamente diferentes. Os momentos fletores considerados correspondem aos valores para a combinação quase permanente (conforme indicado na equação 2.3), de acordo com o método do pórtico equivalente. O esforço de tração, resultante da restrição à deformação axial da laje, foi obtido com recurso à Fig. 3.5. Para o vão de 7,2 m, considera-se que a restrição à deformação axial da laje é total, resultando um esforço axial (ver Tabela 3.4) igual a 52% do esforço axial de fissuração  $A_c \cdot f_{ctm}$ . Para o vão de 5 m, considera-se que o esforço de tração é nulo, admitindo que não existem paredes no edifício que restrinjam significativamente a retração da laje nesta direção. A extensão de retração a longo prazo,  $\varepsilon_{cs} = 0,000653$ , foi determinada de acordo com o MC2010 (fib, 2013), sendo apresentados mais detalhes sobre a sua quantificação no capítulo 4. Nestes cálculos considera-se que o rácio de módulos de elasticidade é  $\alpha_e = 15$ . O valor considerado para o recobrimento das armaduras foi de 40 mm. Na determinação da área de aço requerida para cumprir o limite para a abertura de fendas, considerou-se que a armadura é materializada através de varões com afastamento de 10 cm. Os resultados obtidos estão representados na Tabela 3.4

A formulação do MC2010 (fib, 2013) usada para determinar a abertura de fendas em função da tensão da armadura é aquela que fornece a abertura de fendas ao nível da armadura de tração. O MC2010 (fib, 2013) sugere, em comentário, que para obter o valor da abertura de fenda ao nível das fibras de betão extremas mais tracionadas, a abertura de fenda deve ser multiplicada por um fator  $(h - x)/(d - x)$ . Este fator não foi usado em nenhum dos cálculos da abertura de fendas de acordo com o MC2010 (fib, 2013) apresentados nesta dissertação, pois há a perceção na comunidade técnica e científica de que essa multiplicação conduz a uma sobre-estimativa da abertura de fendas em lajes (Azenha *et al*, 2017).

Tabela 3.4 – Momentos fletores atuantes na laje, em ELS, e armaduras requeridas para controlo da abertura de fendas ( $w = 0,3$  mm), considerando restrição total da deformação axial segundo a direção longitudinal.

Representação dos momentos fletores	Momentos fletores (ELS) (kNm/m)	Esforço axial (N) (kN/m)	MC2010		EC2	
			Tensão nas armaduras ( $\sigma_s$ ) (MPa)	Área de aço requerida ( $A_s$ ) (cm <sup>2</sup> /m)	Tensão nas armaduras ( $\sigma_s$ ) (MPa)	Área de aço requerida ( $A_s$ ) (cm <sup>2</sup> /m)
$M^-_{x,FP}$	87,5	452,4	141	45,7	267	23,9
$M^+_{x,FP}$	32,1		128	30,2	268	14,4
$M^-_{x,FC}$	29,2		126	29,5	264	14,1
$M^+_{x,FC}$	26,2		124	28,8	259	13,8
$M^-_{y,FP}$	60,8	0	116	26,2	274	11,1
$M^+_{y,FP}$	22,3		293	3,8 ( $A_{s,min}$ )	195	5,7
$M^-_{y,FC}$	10,8		142	3,8 ( $A_{s,min}$ )	142	3,8 ( $A_{s,min}$ )
$M^+_{y,FC}$	9,7		128	3,8 ( $A_{s,min}$ )	128	3,8 ( $A_{s,min}$ )

A verificação da deformação foi feita de acordo com o EC2 (CEN, 2010), através da limitação da relação vão/altura, que pode ser calculada por:

$$\frac{l}{d} \leq \left(\frac{l}{d}\right)_0 \cdot k_T \cdot k_l \cdot k_{\sigma_s} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{l}{d}\right)_0 &= K \cdot \left[ 11 + 1,5 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} + 3,2 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)^{3/2} \right] & \text{se } \rho \leq \rho_0 \\ \left(\frac{l}{d}\right)_0 &= K \cdot \left[ 11 + 1,5 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12} \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_0}} \right] & \text{se } \rho > \rho_0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

em que:

- $l/d$  é o valor limite da relação vão/altura, para lajes fungiformes deverá considerar-se o maior vão;
- $(l/d)_0$  valor dado pela equação 3.11;
- $k_T$  é o coeficiente de correção do banzo;
- $k_l$  é o coeficiente de correção do vão;
- $k_{\sigma_s}$  é o coeficiente de correção da tensão do aço,  $k_{\sigma_s} = 310/\sigma_s$ , onde  $\sigma_s$  é a tensão de tração no aço a meio vão (ou no apoio no caso de consolas) para as ações de cálculo no estado limite de serviço;
- $K$  é o coeficiente que tem em conta os diferentes sistemas estruturais;
- $\rho_0$  é a taxa de armaduras de referência =  $10^{-3} \cdot \sqrt{f_{ck}}$ ;
- $\rho$  é a taxa de armaduras de tração necessária a meio vão (ou no apoio no caso de consolas) para equilibrar o momento devido às ações de cálculo;
- $\rho'$  é a taxa de armaduras de compressão necessária a meio vão (ou no apoio no caso de consolas) para equilibrar o momento devido às ações de cálculo;
- $f_{ck}$  em MPa.

Na Tabela 3.5 estão apresentados os valores da altura útil mínima de acordo com o maior vão e da altura útil considerada neste estudo. Para os coeficientes de correção do banzo e do vão,  $k_T$  e  $k_l$ , foram considerados valores iguais a 1. Para o coeficiente que tem em conta os diferentes sistemas estruturais foi utilizado  $K = 1,2$ , valor recomendado para laje fungiforme. Foram utilizadas a armadura de tração necessária a meio vão e a tensão obtidas pelo EC2 (CEN, 2010) e para a armadura de compressão necessária a meio vão foi considerado o valor mínimo de armadura, de forma a se obter a altura útil mínima mais condicionante.

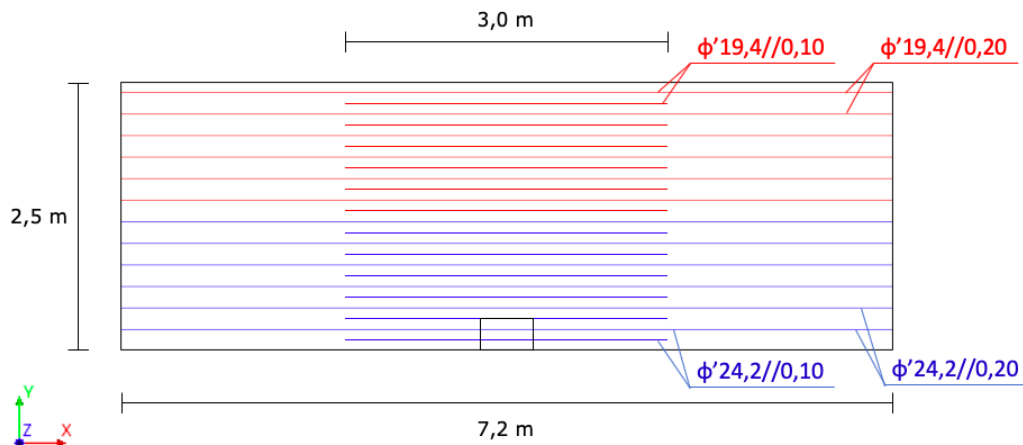


Tabela 3.5 – Altura útil mínima e altura útil considerada no estudo.

Dimensões do painel da laje (m)	Altura útil mínima (d) (cm)	Altura útil considerada (d) (cm)
7,2 x 5,0	23,7	~ 25

### 3.4. ARMADURAS

Na Fig. 3.6 estão apresentadas as armaduras da laje, consideradas nas análises não-lineares. Consideraram-se armaduras com uma área da secção transversal igual à dimensionada para ELS, de acordo com o MC2010 (fib, 2013), conforme apresentado na Tabela 3.4. Na construção do modelo de elementos finitos, adotaram-se varões afastados de 10 cm nas posições de momento fletor máximo, e de 20 cm nas posições após dispensa de armaduras. Assim, para obter as áreas de secção transversal pretendidas, usam-se diâmetros de varões que não correspondem a varões disponíveis no mercado. Esse facto não tem qualquer consequência em termos de validade do estudo, porque os diâmetros adotados têm uma grandeza próxima da dos varões disponíveis no mercado, sendo, portanto, plausível a relação considerada no modelo entre perímetro e área da secção transversal. Na Fig. 3.6, a armadura a vermelho é referente à armadura da faixa central e a armadura em azul é referente à armadura da faixa sobre o pilar. A distância entre a face do betão e o eixo das armaduras é de 50 mm para as direções X e Y.



a)

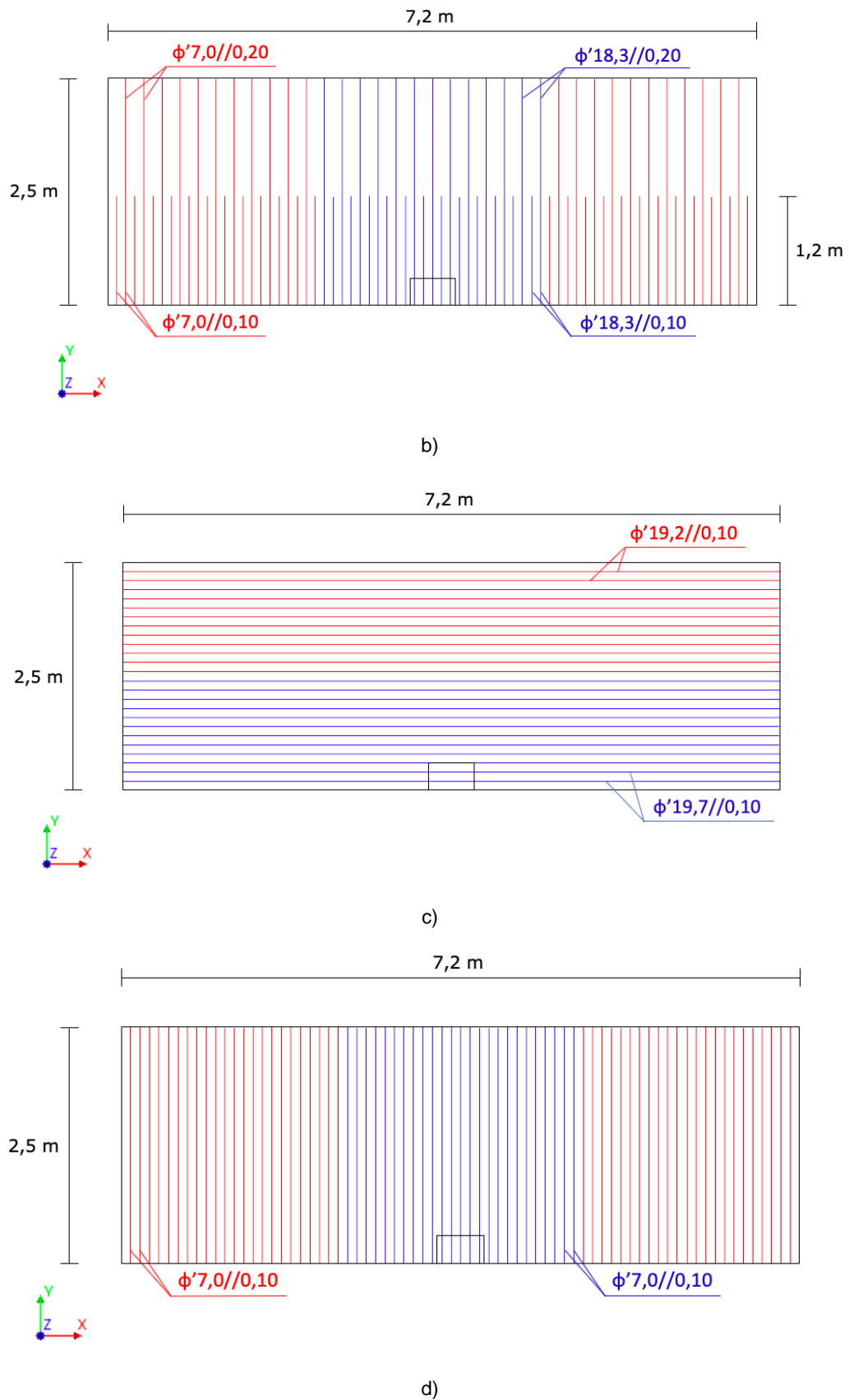


Fig. 3.6 – Armaduras da laje: a) Armadura longitudinal superior; b) Armadura transversal superior; c) Armadura longitudinal inferior; d) Armadura transversal inferior.

Para o pilar, admitiu-se uma área de armadura correspondente a aproximadamente 1,5% da área do pilar. Portanto, o pilar foi armado com 6 varões de 25 mm em cada face, com uma distância entre a face do betão e o eixo das armaduras de 50 mm. Os estribos foram dimensionados de acordo com o EC2 (CEN, 2010). As armaduras do pilar estão apresentadas na Fig. 3.7.

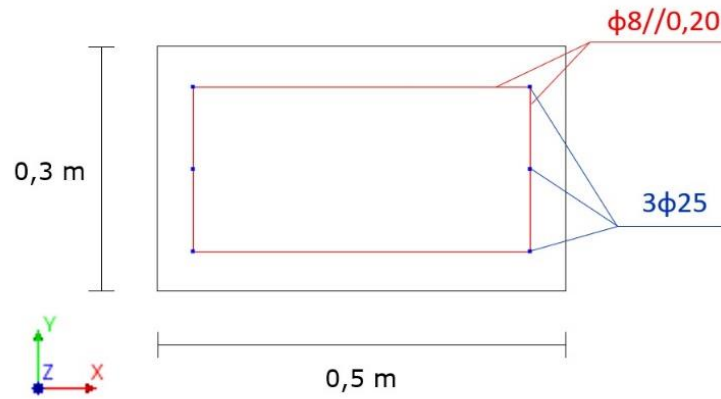


Fig. 3.7 – Armadura do pilar.



# 4

## CARACTERIZAÇÃO DAS ANÁLISES NÃO-LINEARES ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### 4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados o modelo da estrutura, as malhas de elementos finitos, apoios e ações consideradas nas análises não-lineares, assim como os modelos adotados para simular o comportamento dos materiais. Para o betão, são usados modelos de fluência, retração, fissuração e plastificação em compressão (este último apenas no caso das análises com carregamento monotonicamente crescente até à rotura). Para as armaduras, é considerado um modelo elástico-perfeitamente plástico. É ainda usado um modelo de aderência para simular a ligação aço-betão. São também descritos os procedimentos usados para quantificar a abertura de fendas com base nos resultados da análise não-linear.

As propriedades dos materiais são definidas de forma consistente com o estipulado no MC2010 (fib, 2013).

### 4.2. MODELO DA ESTRUTURA

A modelação da estrutura foi realizada no programa DIANA (2020), utilizado para análise de estruturas baseado no MEF. Disponibiliza diversos modelos para simulação do comportamento não-linear do betão, assim como rotinas computacionais para a implementação de análises não-lineares incrementais e iterativas.

Para discretizar o betão da laje e do pilar, foram utilizados elementos finitos sólidos, do tipo CHX60 (DIANA, 2020), um elemento sólido isoparamétrico com 20 nós, representado na Fig. 4.1a, e do tipo CTP45 (DIANA, 2020), um elemento sólido isoparamétrico com 15 nós, representado na Fig. 4.1b.

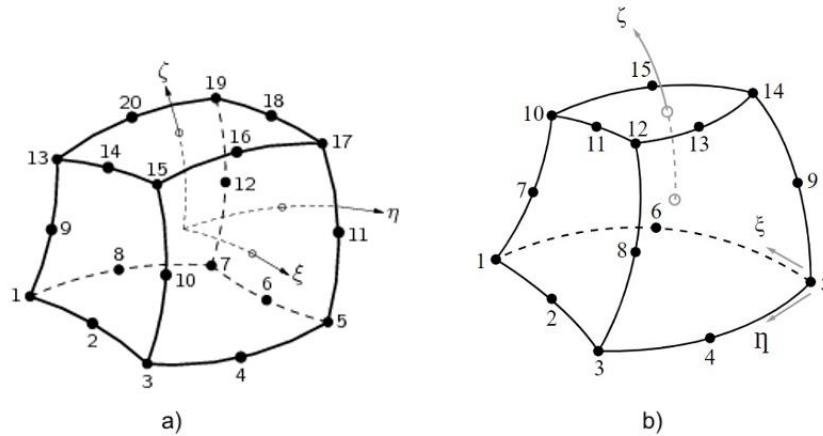


Fig. 4.1 – Elementos finitos: a) CHX60; b) CTP45 (DIANA, 2020).

A modelação das armaduras foi desenvolvida recorrendo a elementos de reforço embebidos, lineares, com deformação axial apenas. Estes elementos possibilitam a consideração automática de elementos de interface, na ligação ao betão envolvente, para simulação da lei de aderência aço-betão.

No que diz respeito à posição das armaduras da laje, na realidade os eixos das armaduras em duas direções perpendiculares não são coplanares. Simplificadamente, no modelo de elementos finitos, consideraram-se eixos coplanares, a uma distância de 50 mm em relação à superfície da laje.

Conforme já citado anteriormente, tirou-se proveito das condições de simetria e foi modelado apenas metade da laje e do pilar, conforme apresentado na Fig. 4.2.

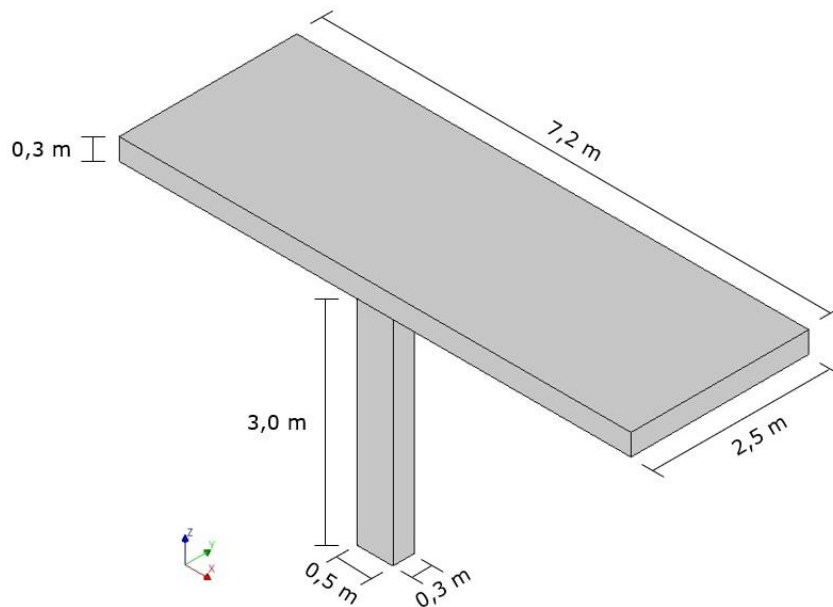
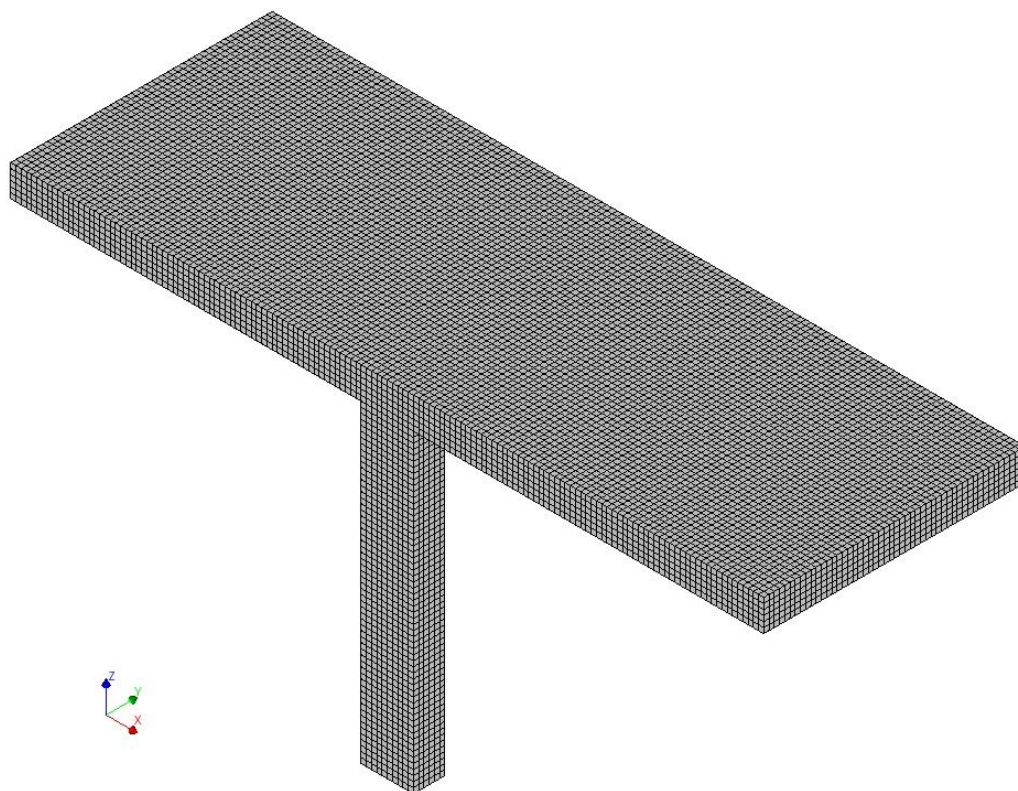


Fig. 4.2 – Modelo numérico da estrutura em análise.

### 4.3. MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS, APOIOS E AÇÕES

Neste estudo foram feitas diferentes análises não-lineares para verificar o comportamento da estrutura.

Primeiramente foram feitas análises da estrutura sob carregamento monotonicamente crescente em dois modelos com malhas de elementos finitos distintas, para avaliar a influência da dimensão dos elementos. O modelo A tem elementos finitos de 5 cm de lado, conforme apresentado na Fig. 4.3a. O modelo B tem elementos finitos de 10 cm de lado, excepto ao longo da espessura da laje, onde essa dimensão é de 7,5 cm, conforme apresentado na Fig. 4.3b. Com estas análises sob carregamento monotonicamente crescente pretende-se também avaliar a distribuição de momentos fletores, obtidos na análise não-linear, para as faixas sobre pilares e central. Posteriormente, foram efetuadas análises em serviço, utilizando uma das malhas citadas anteriormente, para avaliar a influência do grau de restrição axial da estrutura sobre o esforço axial que se desenvolverá na laje, as tensões nas armaduras mais tracionadas e as aberturas de fendas.



a)

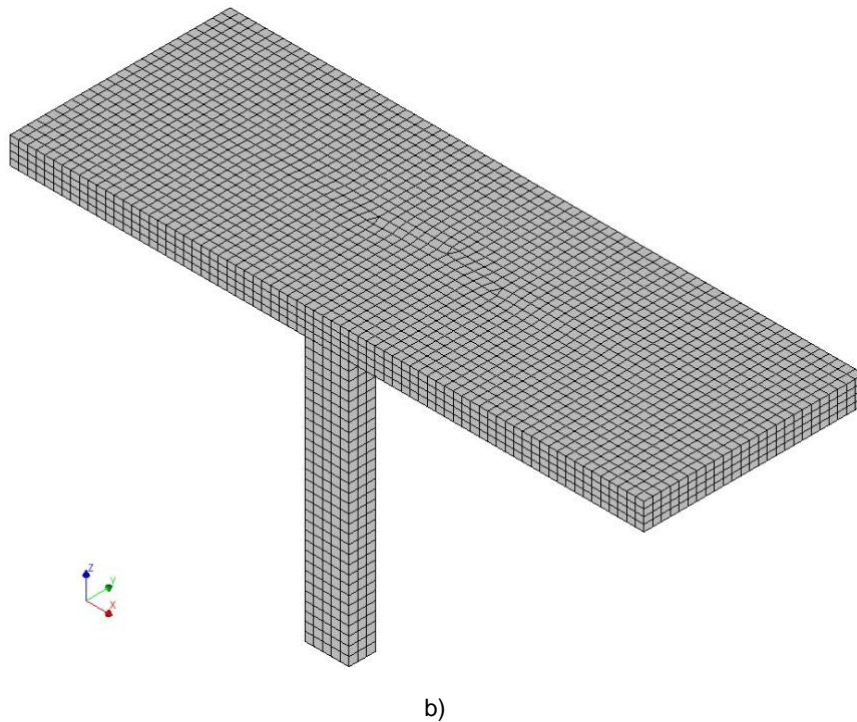


Fig. 4.3 – Malha de elementos finitos: a) Modelo A; b) Modelo B.

A análise da estrutura sob carregamento monotonicamente crescente foi feita na estrutura não restringida, portanto, os apoios utilizados nesta análise foram os requeridos pelas condições de simetria da estrutura e pelo encastramento na base do pilar. Esses apoios são representados esquematicamente na Fig. 4.4. Além disso, nas faces laterais 1 e 2 (identificadas na Fig. 4.4), foram aplicados *tyings*, que impõem que os deslocamentos dos nós na direção perpendicular à face sejam iguais em toda a sua superfície.

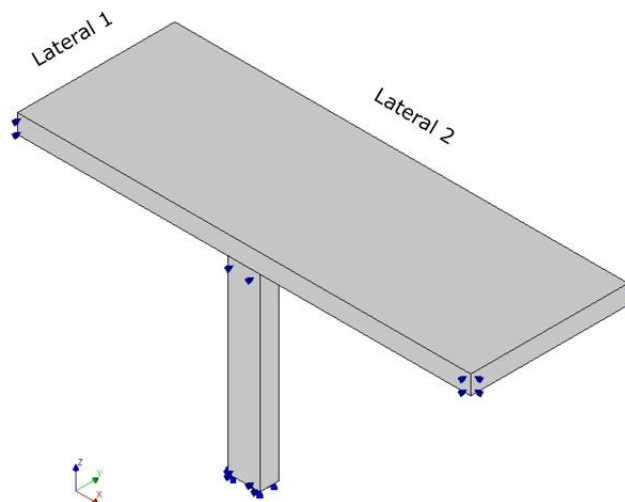


Fig. 4.4 – Apoios considerados para a análise da estrutura sob carregamento monotonicamente crescente e para a análise em serviço da estrutura não restringida.



Os apoios utilizados nas análises em serviço com graus de restrição axial,  $R$ , de 1/3 e 2/3 foram os indicados no parágrafo anterior, acrescidos de um apoio elástico na superfície lateral 1, que representa a restrição da estrutura na direção X. Este apoio elástico foi aplicado num nó localizado na face da lateral 1, sendo indiferente a sua localização na face, pois os *tyings* existentes nesta face garantem que o deslocamento seja o mesmo em todos os seus nós.

A análise não-linear da estrutura é incremental, podendo conter incrementos de tempo ou de carga.

Nas análises da estrutura sob carregamento monotonicamente crescente, os únicos efeitos não-lineares presentes são: fissuração do betão; aderência aço-betão; cedência do aço e comportamento não-linear do betão em compressão. As cargas utilizadas foram o peso próprio da estrutura e uma carga uniformemente distribuída sucessivamente crescente.

Nas análises em serviço com diferentes graus de restrição axial foram considerados adicionalmente os efeitos da fluência e retração do betão, não sendo considerado o efeito do comportamento não-linear do betão em compressão. Os incrementos de tempo foram definidos com um maior refinamento imediatamente após a aplicação de cargas, atendendo à evolução temporal das deformações por fluência. A análise tem início no instante em que se considera ser o início do desenvolvimento de tensões de natureza estrutural na laje, quando começa a retração por secagem (ver Fig. 2.2). A sequência de incrementos contém, inicialmente, passos de 100, 1000, 10000, 75300 e 13x86400 segundos. Depois, foi aplicado o peso próprio em 10 incrementos de carga. Posteriormente foram considerados incrementos de tempo de 100, 1000, 10000, 75300, 10x86400, 432000 e 4x864000 segundos, até à aplicação da sobrecarga (valor quase permanente) e das restantes cargas permanentes, que foram aplicadas em 10 incrementos de carga. Seguiram-se, então, mais incrementos de tempo de 100, 1000, 10000, 75300, 10x86400, 10x864000, 4x3974400 e 29x31536000 segundos, até ao final da análise, que se definiu ser aos 30 anos (por serem extremamente reduzidas as deformações por retração e fluência após essa data).

#### 4.4. MODELOS DE COMPORTAMENTO DO BETÃO

##### 4.4.1. COMPORTAMENTO DO BETÃO A LONGO PRAZO

A extensão total num instante de tempo  $t$ ,  $\varepsilon_c(t)$ , de um elemento de betão carregado uniaxialmente num instante de tempo  $t_0$  com uma tensão constante  $\sigma_c(t_0)$  pode ser expressa como:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t) \quad (4.1)$$

ou

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{c\sigma}(t) + \varepsilon_{cn}(t) \quad (4.2)$$

em que:

- $\varepsilon_{ci}(t_0)$  é a deformação inicial no instante do carregamento;
- $\varepsilon_{cc}(t)$  é a deformação por fluência no instante  $t > t_0$ ;
- $\varepsilon_{cs}(t)$  é a deformação por retração;
- $\varepsilon_{cT}(t)$  é a deformação térmica, dada pelo produto do coeficiente de dilatação térmica do betão e da variação de temperatura;
- $\varepsilon_{c\sigma}(t)$  é a deformação dependente da tensão:  $\varepsilon_{c\sigma}(t) = \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t)$ ;

$\varepsilon_{cn}(t)$  é a deformação independente da tensão:  $\varepsilon_{cn}(t) = \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t)$ .

Ao calcular o comportamento em serviço de uma estrutura de betão submetida a temperatura constante e a uma tensão  $\sigma_{c0}$ , aplicada no instante de tempo  $t_0$ , a deformação total num instante de tempo  $t$ , é dada por:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{cs}(t) \quad (4.3)$$

Na Fig. 4.5 estão representados os gráficos da deformação ( $\varepsilon$ ) versus tempo ( $t$ ) e da tensão ( $\sigma$ ) versus tempo ( $t$ ).

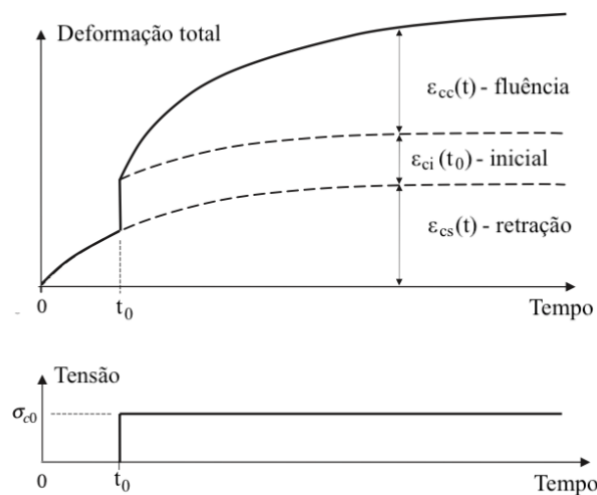


Fig. 4.5 – Componentes da deformação sob aplicação de um carregamento prolongado. Adaptado de Gilbert e Ranzi (2011).

É possível observar que a deformação por retração,  $\varepsilon_{cs}(t)$ , começa geralmente a desenvolver-se antes da aplicação do carregamento ( $t < t_0$ ), o que evidencia que esta componente da deformação é independente da tensão. No instante de aplicação do carregamento ( $t = t_0$ ) é observado um salto no gráfico, que representa a deformação inicial,  $\varepsilon_{ci}(t_0)$ , seguida de um aumento adicional gradual devido à deformação por fluência,  $\varepsilon_{cc}(t)$ , nos instantes de tempo ( $t > t_0$ ), verificando que estas componentes da deformação são dependentes da tensão.

As deformações diferidas do betão, aquelas que ocorrem lentamente ao longo do tempo, possuem uma importância considerável na análise estrutural. Como componentes deste tipo de deformação estão a fluência e a retração. É importante destacar que as curvas destas componentes da deformação possuem uma taxa alta de crescimento nos instantes iniciais e, ao longo do tempo, tendem para uma assíntota horizontal quando o tempo de análise tende para infinito.

A fluência e a retração ocasionam alguns efeitos indesejáveis, como: aumento das flechas de lajes e vigas; aumento da curvatura de pilares devido à fluência; introdução de esforços em estruturas

restringidas, devidos à retração, e sua conseqüente fissuração; perdas da força de pré-esforço em estruturas de betão pré-esforçado, entre outros.

No entanto a fluência apresenta como vantagens importantes a eliminação das concentrações de tensões e a redução dos esforços nos elementos estruturais devido a deformações impostas restringidas.

#### 4.4.1.1. Fluência

A fluência é o acréscimo contínuo das deformações que ocorre para uma tensão mantida ao longo do tempo, dependendo da humidade relativa do ambiente, geometria e composição do betão, idade do betão no primeiro carregamento e duração e intensidade dessa carga. O fenómeno da fluência ocorre devido à variação de volume da pasta de cimento que envolve os agregados e pode ser classificado em fluência básica e fluência de secagem. A fluência básica é a que se desenvolve sem transferência de água entre o betão e o meio ambiente e a fluência de secagem é a parcela restante que se desenvolve com transferência de água entre o betão e o meio ambiente.

#### 4.4.1.2. Modelo de fluência

De acordo com o modelo do MC2010 (fib, 2013), a deformação por fluência é dada por:

$$\varepsilon_{cc}(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{ci}} \cdot \varphi(t, t_0) \quad (4.4)$$

em que:

$\sigma_c(t_0)$  é a tensão constante aplicada no instante de tempo  $t_0$ , em MPa;

$E_{ci}$  é o módulo de elasticidade do betão aos 28 dias, em MPa;

$\varphi(t, t_0)$  é o coeficiente de fluência.

Para tensões de serviço  $|\sigma_c| \leq 0,4 \cdot f_{cm}(t_0)$ , considera-se válida a linearidade entre a deformação por fluência e a tensão aplicada.

A deformação dependente da tensão,  $\varepsilon_{cs}(t)$ , pode ser expressa como:

$$\varepsilon_{cs}(t) = \sigma_c(t_0) \cdot \left[ \frac{1}{E_{ci}(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{ci}} \right] = \sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad (4.5)$$

em que:

$E_{ci}(t_0)$  é o módulo de elasticidade do betão no instante de tempo  $t_0$ ;

$J(t, t_0)$  é a função de fluência, que representa a deformação total dependente da tensão para uma tensão unitária.

O módulo de elasticidade do betão aos 28 dias pode ser obtido por:

$$E_{ci} = E_{c0} \cdot \alpha_E \cdot \left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{1/3} \quad (4.6)$$

$$f_{cm} = f_{ck} + \Delta f \quad (4.7)$$

em que:

$E_{c0}$  = 21500 MPa;

$\alpha_E$  é 1,0 para agregados de quartzito. Para diferentes tipos de agregado os valores para  $\alpha_E$  podem ser encontrados na Tabela 4.1;

$f_{cm}$  é o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias, em MPa;

$f_{ck}$  é o valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias, em MPa;

$\Delta f$  = 8 MPa.

Tabela 4.1 – Efeito do tipo de agregado no módulo de elasticidade, segundo o MC2010 (fib, 2013).

Tipo de agregado	$\alpha_E$	$E_{c0} \cdot \alpha_E$ [MPa]
Basalto, agregados densos de calcário	1,2	25800
Agregados de quartzito	1,0	21500
Agregados de calcário	0,9	19400
Agregados de arenito	0,7	15100

O módulo de elasticidade do betão para uma idade genérica,  $E_{ci}(t)$ , pode ser obtido por:

$$E_{ci}(t) = [\beta_{cc}(t)]^{0,5} \cdot E_{ci} \quad (4.8)$$

$$\beta_{cc}(t) = \exp \left\{ s \cdot \left[ 1 - \left( \frac{28}{t} \right)^{0,5} \right] \right\} \quad (4.9)$$

em que:

$E_{ci}$  é o módulo de elasticidade do betão aos 28 dias, em MPa;

$\beta_{cc}(t)$  é o coeficiente que descreve o desenvolvimento da fluência ao longo do tempo;

$t$  é a idade do betão ajustada, em dias, levando em consideração a temperatura durante o período de cura;

s é um coeficiente que depende da classe de resistência do cimento, de acordo com a Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Coeficientes a serem usados na equação 4.9 para diferentes tipos de cimento, segundo o MC2010 (fib, 2013).

$f_{cm}$ (MPa)	Classe de resistência do cimento	s
$\leq 60$	32.5 N	0,38
	32.5 R, 42.5 N	0,25
	42.5 R, 52.5 N, 52.5 R	0,20
$> 60$	Todas as classes	0,20

O coeficiente de fluência é calculado por:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_{bc}(t, t_0) + \varphi_{dc}(t, t_0) \quad (4.10)$$

em que:

$\varphi_{bc}(t, t_0)$  é o coeficiente de fluência básica;

$\varphi_{dc}(t, t_0)$  é o coeficiente de fluência de secagem;

t é a idade do betão no instante considerado, em dias;

$t_0$  é a idade do betão ajustada no instante do carregamento, em dias.

#### 4.4.1.3. Retração

Retração consiste na variação de volume de um elemento de betão, na ausência de tensões exteriores e com temperatura constante. A deformação por retração ocorre devido a diversos fenómenos conhecidos, que atuam durante diferentes períodos de tempo do ciclo de vida do betão, dependendo de fatores como humidade relativa do ambiente e geometria e composição do elemento de betão. A principal causa da retração é a perda de água ao longo do tempo.

Conforme é evidenciado na Fig. 4.6, quando uma peça de betão não restringida é exposta ao ambiente, a partir do fim do tempo de cura desta peça,  $t_s$ , ocorre o aumento da deformação por retração,  $\varepsilon_{cs}$ , ao longo do tempo. Neste caso, como a peça não está restringida, podendo se deformar, não são geradas tensões no betão. Caso essa deformação esteja restringida, a peça não irá se deformar, porém há o surgimento de tensões de tração, que aumentam ao longo do tempo, podendo provocar fissuras no elemento.

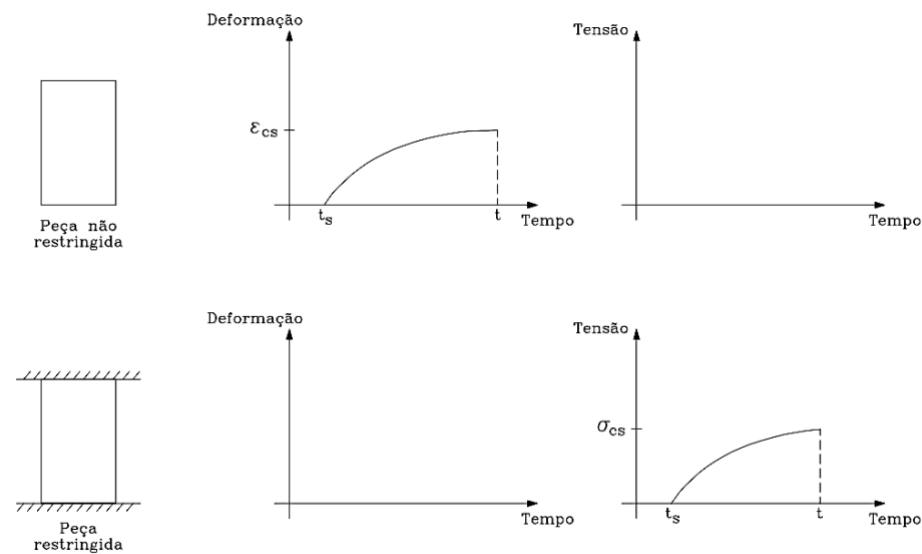


Fig. 4.6 – Efeito da retração numa peça de betão (Costa e Appleton, 2002).

Existem deformações por retração de diferentes naturezas. Na análise estrutural são consideradas as seguintes:

- retração autógena: ocorre devido às reações de hidratação do cimento e à consequente auto dissecação, em condições de ausência de trocas de humidade com o ambiente exterior ao betão; a auto dissecação consiste na redução do teor de humidade nos poros do betão em resultado do consumo de água durante as reações de hidratação do cimento, sendo relevante em betões cuja composição possua uma baixa relação água/cimento;
- retração de secagem: resultante da perda de água, por evaporação, do betão em estado sólido para o ambiente. Este tipo de retração é a mais influente, a longo prazo, no betão.

Há ainda outros tipos de deformações por retração que não são habitualmente consideradas na análise estrutural:

- retração plástica: ocorre quando o betão ainda está no seu estado plástico e é caracterizada pela evaporação de água à superfície decorrente da exsudação; esta retração é acelerada caso a superfície esteja exposta à vento, temperatura elevada ou baixa humidade relativa do ambiente; deve ser minimizada através de procedimentos de construção (composição, colocação, vibração e cura) adequados;
- retração por carbonatação: devida à reação de hidróxido de cálcio presente na pasta de cimento hidratado com dióxido de carbono presente na atmosfera, originando carbonato de cálcio e uma consequente redução de volume do betão; progride lentamente ao longo do tempo a partir da superfície de betão exposta ao ar.

Além disso, a deformação de origem térmica, em resultado do calor de hidratação do cimento e consequente evolução de temperatura no betão, é, por vezes, designada de retração térmica, mas na realidade trata-se de uma deformação de natureza térmica, que ocorre numa fase em que o módulo de elasticidade do betão tem um crescimento muito acentuado. No presente trabalho, este efeito do calor de hidratação não é tido explicitamente em consideração nos cálculos efetuados. No trabalho de Gomes *et al* (2020b) pode ser encontrada uma análise detalhada sobre a importância deste efeito em lajes maciças restringidas.

#### 4.4.1.4. Modelo de retração

De acordo com o modelo do MC2010 (fib, 2013), a deformação por retração é dada por:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cbs}(t) + \varepsilon_{cds}(t, t_s) \quad (4.11)$$

com

$$\varepsilon_{cbs}(t) = \varepsilon_{cbs0}(f_{cm}) \cdot \beta_{bs}(t) \quad (4.12)$$

e

$$\varepsilon_{cds}(t, t_s) = \varepsilon_{cds0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH}(RH) \cdot \beta_{ds}(t - t_s) \quad (4.13)$$

em que:

- $\varepsilon_{cs}(t, t_s)$  é a retração total no instante de tempo  $t$ ;
- $\varepsilon_{cbs}(t)$  é a retração autógena no instante de tempo  $t$ ;
- $\varepsilon_{cds}(t, t_s)$  é a retração por secagem no instante de tempo  $t$ ;
- $t$  é a idade do betão, em dias;
- $t_s$  é a idade do betão no fim da cura, em dias;
- $(t - t_s)$  é a duração da secagem, em dias.

A componente de retração autógena  $\varepsilon_{cbs}(t)$  pode ser estimada por meio do coeficiente de referência da retração autógena  $\varepsilon_{cbs0}(f_{cm})$  e da função que descreve a evolução da retração autógena com o tempo  $\beta_{bs}(t)$ :

$$\varepsilon_{cbs0}(f_{cm}) = -\alpha_{bs} \cdot \left( \frac{0,1 \cdot f_{cm}}{6 + 0,1 \cdot f_{cm}} \right)^{2,5} \cdot 10^{-6} \quad (4.14)$$

$$\beta_{bs}(t) = 1 - \exp(-0,2 \cdot \sqrt{t}) \quad (4.15)$$

$$f_{cm} = f_{ck} + \Delta f \quad (4.16)$$

em que:

- $f_{cm}$  é o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias, em MPa;
- $f_{ck}$  é o valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias, em MPa;
- $\Delta f$  = 8 MPa;
- $\alpha_{bs}$  é um coeficiente que depende do tipo de cimento (ver Tabela 4.3);
- $t$  é a idade do betão, em dias.

Tabela 4.3 – Coeficientes  $\alpha_i$ , segundo o MC2010 (fib, 2013).

Classe de resistência do cimento	$\alpha_{bs}$	$\alpha_{ds1}$	$\alpha_{ds2}$
32.5 N	800	3	0,013
32.5 R, 42.5 N	700	4	0,013
42.5 R, 52.5 N, 52.5 R	600	6	0,012

A componente de retração por secagem  $\varepsilon_{cds}(t, t_s)$  pode ser calculada por meio do coeficiente de referência da retração por secagem  $\varepsilon_{cds0}(f_{cm})$ , do coeficiente que depende da humidade relativa  $\beta_{RH}(RH)$ , levando em consideração o efeito da humidade relativa do ambiente, e da função que descreve a evolução da retração por secagem com o tempo  $\beta_{ds}(t - t_s)$ :

$$\varepsilon_{cds0}(f_{cm}) = [(220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot \exp(-\alpha_{ds2} \cdot f_{cm})] \cdot 10^{-6} \quad (4.17)$$

$$\beta_{RH}(RH) = \begin{cases} -1,55 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right] & \text{se } 40 \leq RH < 99 \% \cdot \beta_{s1} \\ 0,25 & \text{se } RH \geq 99 \% \cdot \beta_{s1} \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\beta_{ds}(t - t_s) = \left( \frac{(t - t_s)}{0,035 \cdot (h_{eq})^2 + (t - t_s)} \right)^{0,5} \quad (4.19)$$

$$\beta_{s1} = \left( \frac{35}{f_{cm}} \right)^{0,1} \leq 1,0 \quad (4.20)$$

em que:

- $\alpha_{ds1}, \alpha_{ds2}$  são coeficientes que dependem do tipo de cimento (ver Tabela 4.3);
- $f_{cm}$  é o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias, em MPa (ver equação 4.16);
- RH é a humidade relativa do ambiente, em %;
- $h_{eq}$  =  $2 A_c / u$ , é a espessura equivalente do elemento em mm, onde  $A_c$  é a área da secção transversal em mm<sup>2</sup> e  $u$  é o perímetro do elemento em contato com a atmosfera em mm;
- $t$  é a idade do betão, em dias;
- $t_s$  é a idade do betão no fim da cura, em dias;
- $(t - t_s)$  é a duração da secagem, em dias.



#### 4.4.2. COMPORTAMENTO DO BETÃO FENDILHADO

##### 4.4.2.1. Modelos de fendilhação

Existem dois tipos principais de modelos de fendilhação do betão, para aplicação em conjunto com o método dos elementos finitos: modelo de fenda discreta e modelo de fenda distribuída.

No modelo de fenda discreta, a fenda é formada na interface entre dois elementos, através da duplicação dos nós pertencentes aos elementos adjacentes, como representado na Fig. 4.7a. A posição e orientação das fendas fica, assim, restrita ao contorno dos elementos. Este tipo de modelo é, portanto, mais apropriado para aplicação em problemas em que se desenvolvem um pequeno número de fendas em posições que possam ser predeterminadas.

No modelo de fendas distribuídas, a fenda é modelada assumindo danos ortotrópicos nos elementos de betão, sendo o material fendilhado considerado como um meio contínuo, como representado na Fig. 4.7b. Com esta abordagem, as discontinuidades locais são distribuídas por uma área no elemento finito. Portanto, os deslocamentos relativos das faces da fenda são representados pelas extensões da fenda e o comportamento constitutivo do betão fendilhado é modelado pelas relações de tensão-extensão (Rots *et al.*, 1985). Este modelo é mais apropriado para aplicação em casos em que se desenvolvem um grande número de fendas e será o modelo abordado neste subcapítulo, já que foi o utilizado no presente trabalho.

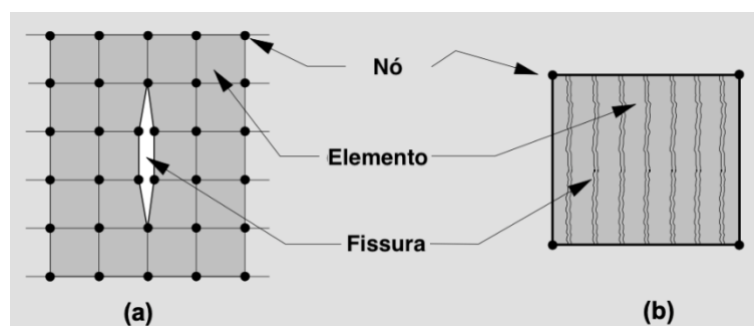


Fig. 4.7 – Modelos de fendilhação: (a) fenda discreta; (b) fenda distribuída. Adaptado de Kwak e Filippou (1990).

Entre a abordagem de fendas distribuídas estão os modelos de fendas fixas e os modelos de fendas rotativas. Nos modelos de fendas fixas, a orientação das fendas permanece invariável durante todo o processo de cálculo. Nos modelos de fendas rotativas, as fendas podem “rodar” durante o carregamento da estrutura, acompanhando a direção das tensões principais ou extensões principais.

No presente trabalho foi utilizado um modelo baseado no conceito de fendas distribuídas com fendas rotativas.

##### 4.4.2.2. Modelo de retenção de tensões de tração pelo betão simples (*tension softening*)

Mesmo após ser atingida a resistência à tração, o betão ainda apresenta alguma capacidade de retenção de tensões de tração, que é garantida pelas propriedades de fratura do betão simples, sendo este efeito denominado por *tension softening*. De acordo com o MC2010 (fib, 2013), este efeito pode ser simulado através de um diagrama multi-linear para a relação tensão-extensão, que define uma área igual à energia de fratura do betão,  $G_f$ , dividida pela dimensão da banda de fendilhação,  $h$ , como demonstra a Fig. 4.8.

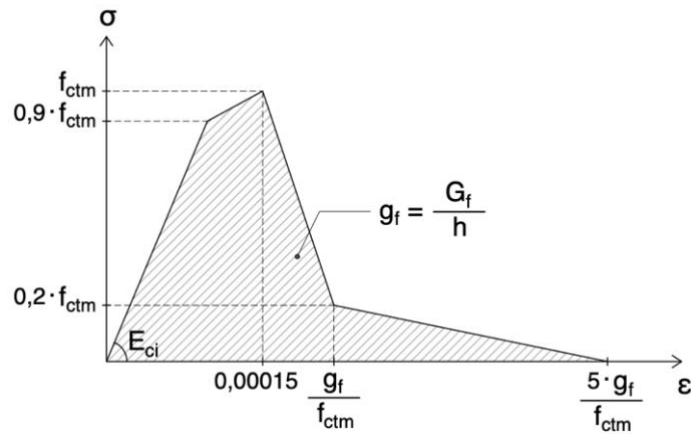


Fig. 4.8 – Diagrama de retenção de tensões de tração pelo betão simples.

A energia de fratura do betão,  $G_f$ , é definida como a quantidade de energia necessária para propagar uma fenda de área unitária e, de acordo com o MC2010 (fib, 2013), é dada por:

$$G_f = 73 \cdot f_{cm}^{0,18} \text{ [N/m]} \quad (4.21)$$

em que:

$f_{cm}$  é o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias, em MPa (ver equação 4.16).

A dimensão da banda de fendilhação,  $h$ , é a largura da banda em que ocorre a propagação de fendilhação do betão. Sendo relacionada com a dimensão do elemento finito, é minimizada a dependência dos resultados relativamente à discretização adotada.

#### 4.4.3. MODELO DE COMPORTAMENTO DO BETÃO COMPRIMIDO

O comportamento não-linear do betão comprimido foi baseado no MC2010 (fib, 2013). Na Fig. 4.9 está apresentado o diagrama tensão-deformação do betão considerado neste estudo.

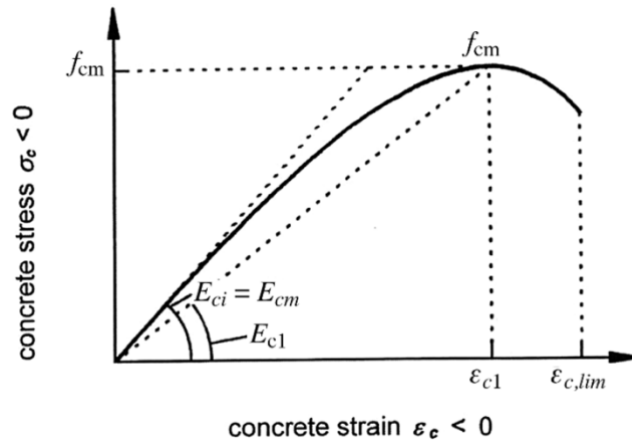


Fig. 4.9 – Diagrama de tensão-deformação do betão, de acordo com o MC2010 (fib, 2013).

De acordo com o MC2010 (fib, 2013), a relação entre a tensão e a deformação do betão comprimido, demonstrada na Fig. 4.9, é descrita por:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = - \left( \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \right) \quad \text{para } |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{c,lim}| \quad (4.22)$$

$$\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1} \quad (4.23)$$

$$k = E_{ci} / E_{c1} \quad (4.24)$$

em que:

$\varepsilon_{c1}$  é a deformação à tensão máxima de compressão ( $f_{cm}$ );

$E_{c1}$  é o módulo secante da origem à tensão máxima de compressão ( $f_{cm}$ );

$k$  é o número de plasticidade.

As relações tensão-deformação para o betão comprimido, em geral, cumprem com a representação esquemática mostrada na Fig. 4.9. Porém, o ramo descendente do diagrama de tensão-deformação à compressão é dependente da malha de elementos finitos, sendo mais bem determinado por testes correspondentes. Este assunto não foi explorado neste estudo porque o trabalho incide, essencialmente, sobre o comportamento em serviço.

#### 4.5. MODELO DE COMPORTAMENTO DO AÇO

No presente trabalho, o comportamento à compressão e à tração do aço é modelado por um diagrama tensão-deformação, que apresenta, inicialmente, um trecho linear elástico definido pelo módulo de elasticidade do aço,  $E_s$ , seguido de um trecho constante, quando é atingida a tensão de cedência média

do aço,  $f_{ym}$ , como está representado na Fig. 4.10. Os efeitos de endurecimento após a cedência não foram considerados na modelação pois o presente trabalho incide sobre o estudo do comportamento em serviço, não sendo relevante para este estudo a resposta do aço após a cedência.

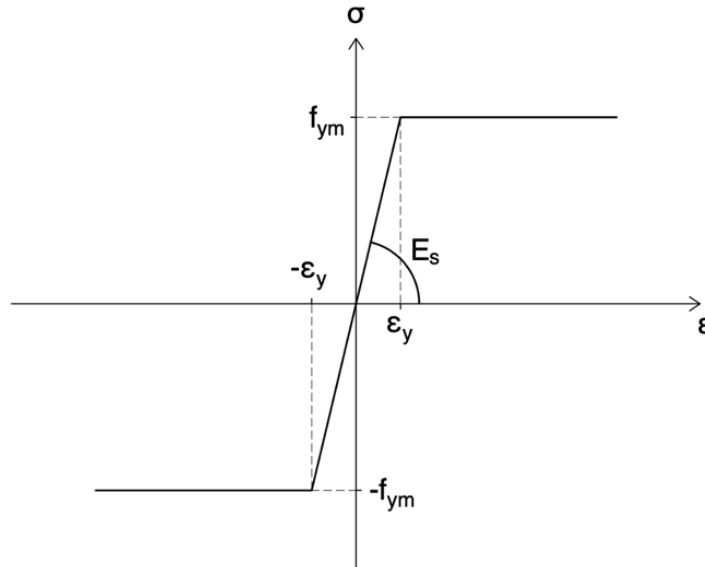


Fig. 4.10 – Diagrama de tensão-deformação considerado para o aço.

#### 4.6. MODELO DE ADERÊNCIA AÇO-BETÃO

A aderência entre o aço e o betão é responsável pela interação e transferência de força entre o aço e o betão, influenciando a abertura e espaçamento das fendas numa estrutura em condições de serviço.

Neste trabalho, a aderência entre o aço e o betão foi modelada de acordo com o MC2010 (fib, 2013). Na Fig. 4.11 está representado o diagrama de tensão-deslizamento na interface entre o aço e o betão, composto por quatro seções. Os valores dos vários parâmetros do diagrama estão definidos em MC2010 (fib, 2013).

Para a simulação do comportamento em serviço, apenas interessa o ramo ascendente da relação tensão-deslizamento, uma vez que o deslizamento  $s_1$  não é atingido em situações normais durante a fase de serviço. Considera-se que todas as armaduras se encontram em boas condições de aderência, sendo, portanto, o ramo ascendente descrito pela seguinte equação:

$$\tau = \tau_{bmax} \left( \frac{s}{1\text{mm}} \right)^{0,4} \quad (4.25)$$

sendo  $\tau_{bmax} = 2,5 \cdot \sqrt{f_{cm}}$ , com  $\tau$  e  $f_{cm}$  em MPa.

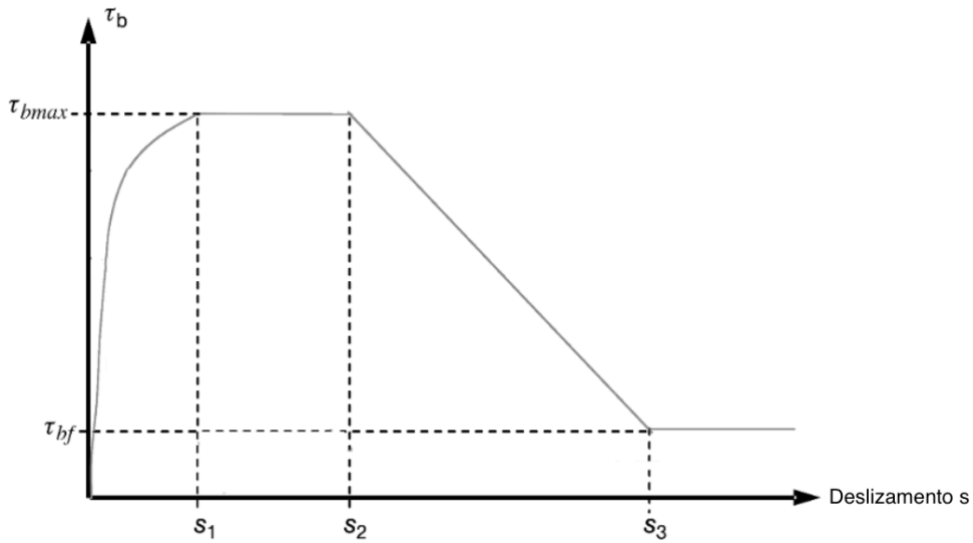


Fig. 4.11 – Diagrama de tensão-deslizamento na interface entre o aço e o betão. Adaptado de fib (2013).

No caso de carregamentos de longa duração, o deslizamento sob tensão de aderência constante sofre um aumento, por efeitos de fluência e propagação de micro-fissuração junto às nervuras dos varões de aço. Em correspondência, a tensão de aderência sob deslizamento constante sofre uma diminuição. Este efeito foi, no presente trabalho, simulado de forma simplificada, através de um fator redutor constante igual a 0,75, sendo, portanto,  $\tau_{bmax} = 0,75 \cdot 2,5 \cdot \sqrt{f_{cm}}$ . Esta simplificação é aceitável porque a redução das tensões de aderência sob deslizamento constante acontece rapidamente nas primeiras idades após a ocorrência do deslizamento, estabilizando ao longo do tempo (Sousa, 2012).

#### 4.7. DETERMINAÇÃO DA ABERTURA DE FENDAS

Há diversas formas de avaliar as aberturas de fendas com base nos resultados dos modelos de elementos finitos, assim como diferentes posições onde estas fendas podem ser avaliadas. Os métodos utilizados neste estudo foram os seguintes:

- $w$  avaliado ao nível da face superior da laje, com base nos deslocamentos dos nós do elemento finito fendilhado, sendo possível obter o valor da abertura (segundo a direção X) da fenda, sem sofrer efeitos de inclinação da orientação da fissura em cada ponto de integração do elemento finito (caso a inclinação varie ao longo dos vários pontos de integração do mesmo elemento finito). Analisando o comportamento entre os nós A e B, indicados na Fig. 4.12, tem-se:

$$(u_x)_{\text{nó B}} - (u_x)_{\text{nó A}} = \Delta L_{AB} = \bar{\epsilon}_t \cdot L_{AB} \quad (4.26)$$

$$\bar{\epsilon}_t = \bar{\epsilon}_{el} + \bar{\epsilon}_{creep} + \bar{\epsilon}_{sh} + \bar{\epsilon}_{cr} \quad (4.27)$$

em que:

$(u_x)_{\text{nó B}}$  é o deslocamento em X do nó B;

$(u_x)_{\text{nó A}}$  é o deslocamento em X do nó A;

$\Delta L_{AB}$	é a variação de comprimento entre os nós A e B;
$\bar{\epsilon}_t$	é a extensão média total;
$L_{AB}$	é a distância entre os nós A e B;
$\bar{\epsilon}_{el}$	é a extensão média elástica;
$\bar{\epsilon}_{creep}$	é a extensão média de fluência;
$\bar{\epsilon}_{sh}$	é a extensão média de retração;
$\bar{\epsilon}_{cr}$	é a extensão média de fissuração.

A longo prazo tem-se que:

$\bar{\epsilon}_{sh} = -0,000653$ , calculado conforme apresentado no subcapítulo 4.4.1.4;

$\bar{\epsilon}_{el} + \bar{\epsilon}_{creep} \cong \frac{\bar{\sigma}}{E_c} (1 + \varphi)$ , considerando que a posição que está a ser analisada é muito próxima à fenda, as tensões no betão são praticamente zero, por isso, esta parcela é praticamente zero.

Portanto:

$$(u_x)_{\text{nó B}} - (u_x)_{\text{nó A}} = (\bar{\epsilon}_{sh} + \bar{\epsilon}_{cr}) \cdot L_{AB} \quad (4.28)$$

Com isso, a abertura de fenda,  $w$ , na posição dos nós A e B, indicados na Fig. 4.12, é então dada por:

$$w = \bar{\epsilon}_{cr} \cdot L_{AB} = (u_x)_{\text{nó B}} - (u_x)_{\text{nó A}} - \bar{\epsilon}_{sh} \cdot L_{AB} \quad (4.29)$$

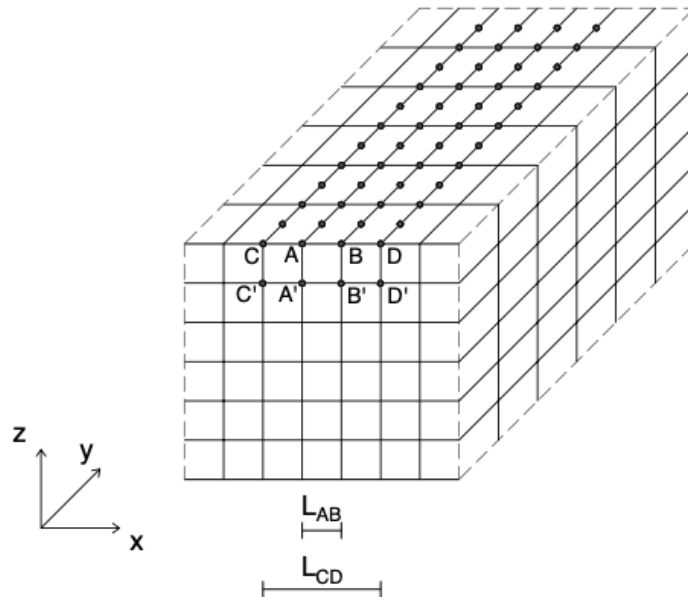


Fig. 4.12 – Representação de um trecho da laje com a localização dos nós, ao longo do eixo Y, utilizados para determinar a abertura de fendas.

Este procedimento é válido quando se pretende obter a abertura de “macro-fendas” que estejam alinhadas com os lados dos elementos finitos. Neste trabalho, esta abordagem será aplicada para avaliar a abertura de fenda não apenas numa posição isolada, mas sim ao longo do desenvolvimento de uma “macro-fenda”. Para o caso em que a fissura está bem localizada num alinhamento de elementos finitos, faz-se o cálculo para os nós A e B (nós do elemento finito fendilhado). Para o caso em que a fissura não está bem localizada num alinhamento de elementos finitos, faz-se o cálculo com um número maior de elementos finitos, considerando os nós C e D, por exemplo, apresentados na Fig. 4.12;

- $w$  avaliado ao nível da armadura, com base nos deslocamentos dos nós do elemento finito fendilhado, calculado da mesma forma que é explicada no parágrafo anterior, só que utilizando os deslocamentos dos nós A' e B' ao nível da armadura, como indicado na Fig. 4.12;
- $w$  avaliado ao nível da armadura, com base no diagrama de deslizamento aço-betão, sendo a fenda calculada pela soma do valor absoluto do deslizamento aço-betão à esquerda e à direita da fenda;
- $w$  avaliado ao nível da face superior da laje, através da integração das extensões de fissuração obtidas na análise não-linear, podendo, neste caso, os resultados serem afetados pela inclinação da fenda em cada ponto de integração;
- $w$  avaliado ao nível da armadura, com base na tensão na armadura  $\sigma_s$  obtida na análise não-linear, utilizando a fórmula para cálculo de  $w$  prevista no capítulo 7.6.4.4 do MC2010 (fib, 2013), ou a fórmula prevista no capítulo 7.3.4 do EC2 (CEN, 2010).





# 5

## RESULTADOS DAS ANÁLISES NÃO-LINEARES

### 5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos nas análises não-lineares sob carregamento monotonicamente crescente, comparando os resultados para os modelos A e B, assim como os resultados da avaliação da abertura de uma determinada fenda do modelo A, utilizando os métodos descritos no subcapítulo 4.7. Também serão apresentados os resultados obtidos nas análises não-lineares do comportamento em serviço da estrutura com diferentes graus de restrição axial, discutindo os resultados obtidos para os esforços axiais resultantes do efeito de restrição. Por fim, são calculados os graus de restrição axial efetivos para as análises em serviço feitas com apoios elásticos para simular diferentes condições de restrição.

### 5.2. COMPORTAMENTO SOB CARREGAMENTO MONOTONICAMENTE CRESCENTE

A Fig. 5.1 representa o diagrama de comportamento global da laje, com base no deslocamento vertical ao centro do painel, fornecendo uma evolução da rigidez global da laje. Conforme se aumenta o carregamento, ocorre fissuração e cedência das armaduras, por isso, há uma diminuição da rigidez, representada pela redução da inclinação da curva carga-deslocamento. Para ELS, a armadura utilizada foi a dimensionada de acordo com o MC2010 (fib, 2013).

Observa-se que há uma boa aproximação entre a carga máxima que foi atingida na análise não-linear com armadura dimensionada para ELUR e a carga de dimensionamento utilizada na quantificação desta armadura, calculada de acordo com o método do pórtico equivalente.

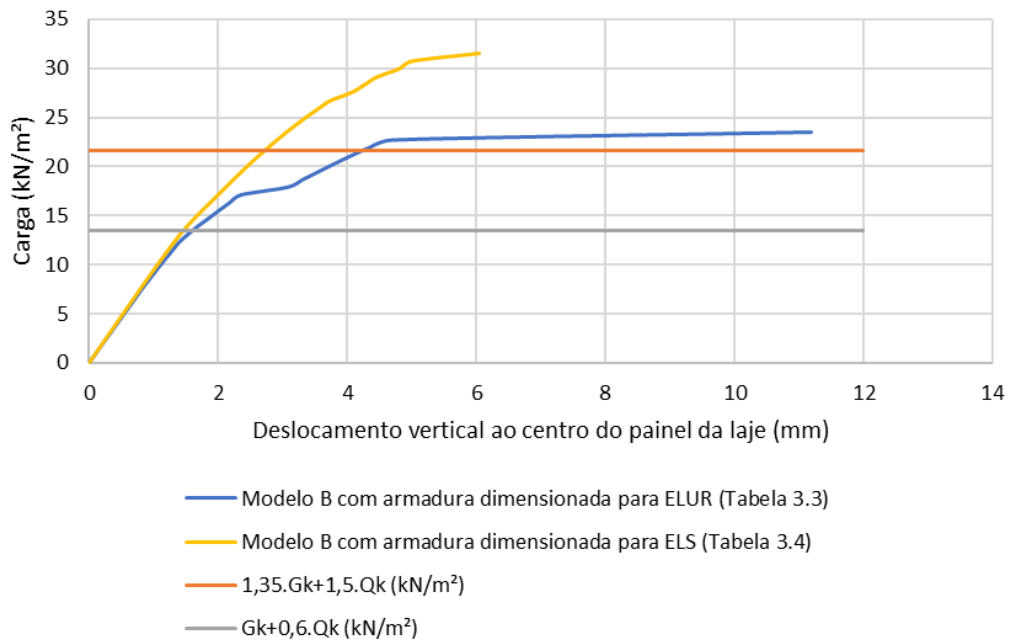
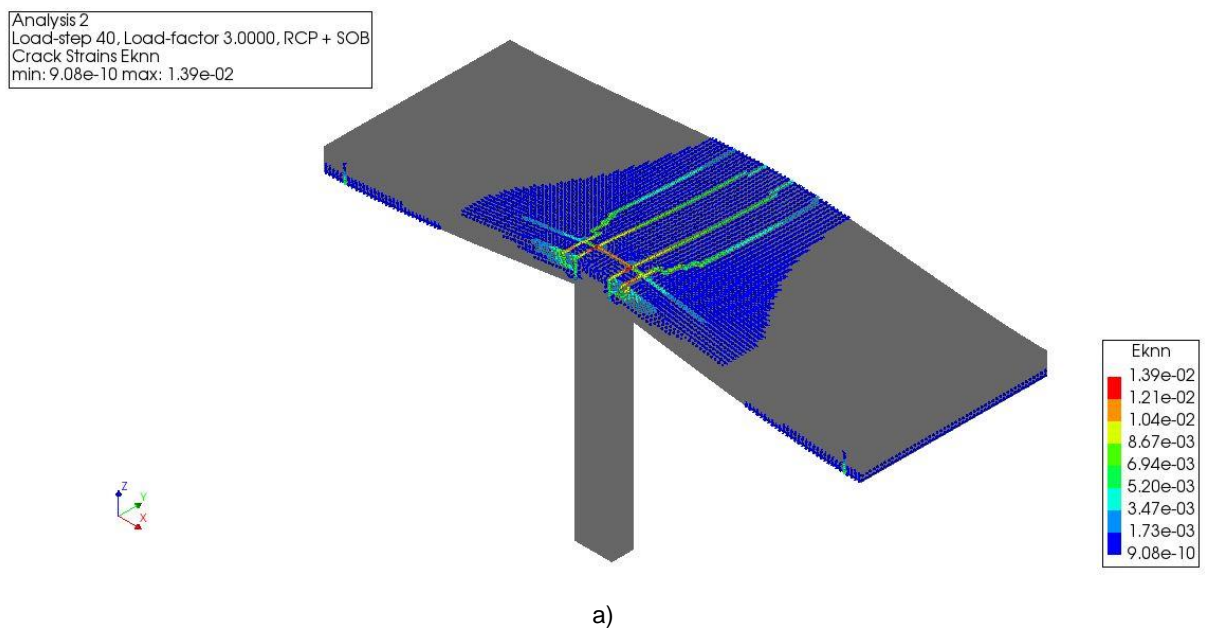


Fig. 5.1 – Diagrama de deslocamento vertical ao centro do painel da laje em função da carga aplicada.

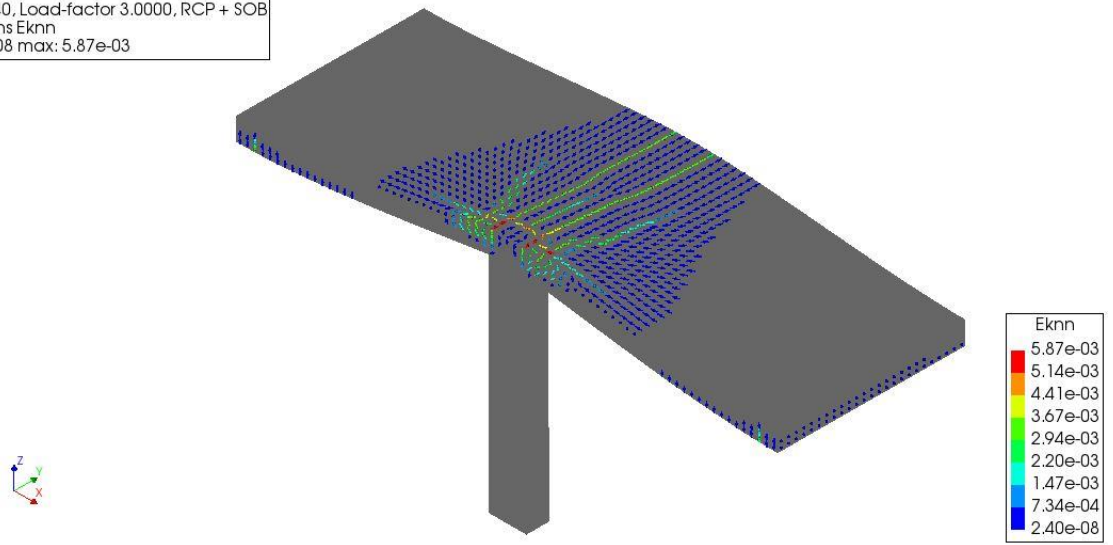
As Figs 5.2 a 5.4 apresentam as extensões de fissuração obtidas para modelos com diferentes dimensões dos elementos finitos (os modelos A e B caracterizados no subcapítulo 4.3). Nestas análises foram usadas as armaduras dimensionadas para ELS de acordo com o MC2010 (fib, 2013) (ver Tabela 3.4). Os resultados apresentados correspondem a uma carga vertical na laje de 31,5 kN/m², que corresponde a 2,0 ( $G_k + Q_k$ ).

A Fig. 5.2 apresenta uma vista em perspetiva, enquanto a Fig. 5.3 e a Fig. 5.4 apresentam a face superior e inferior do modelo, respetivamente.



a)

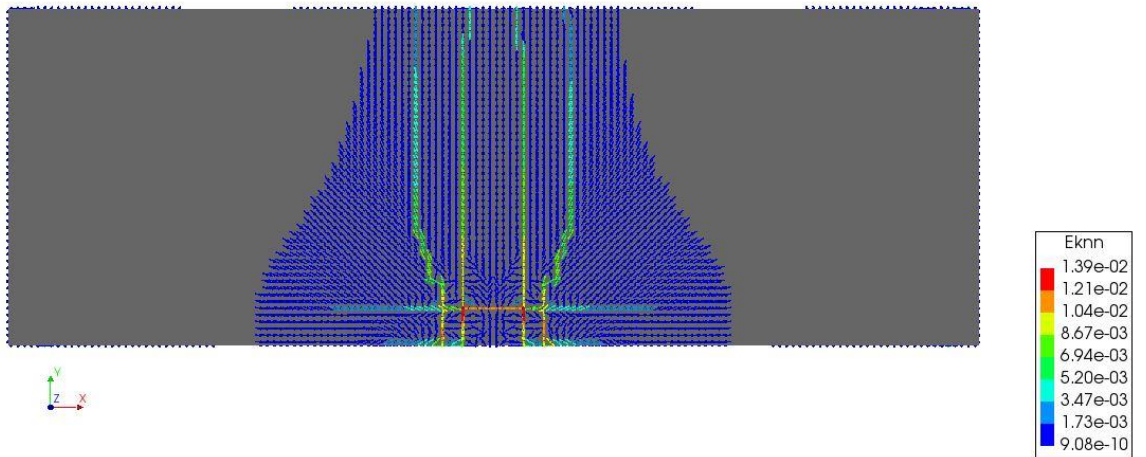
Analysis 1  
Load-step 40, Load-factor 3.0000, RCP + SOB  
Crack Strains Eknn  
min: 2.40e-08 max: 5.87e-03



b)

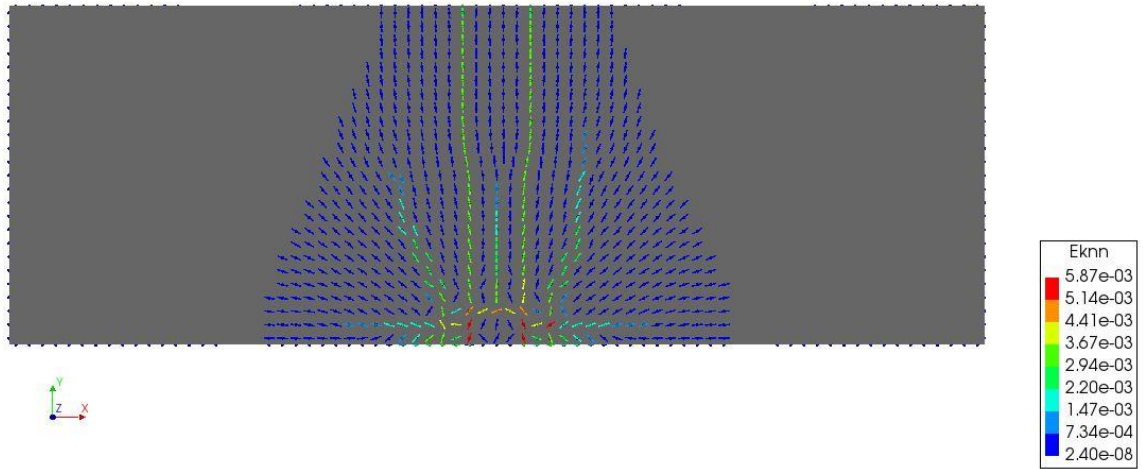
Fig. 5.2 – Extensões de fissuração: a) modelo A; b) modelo B.

Analysis 2  
Load-step 40, Load-factor 3.0000, RCP + SOB  
Crack Strains Eknn  
min: 9.08e-10 max: 1.39e-02



a)

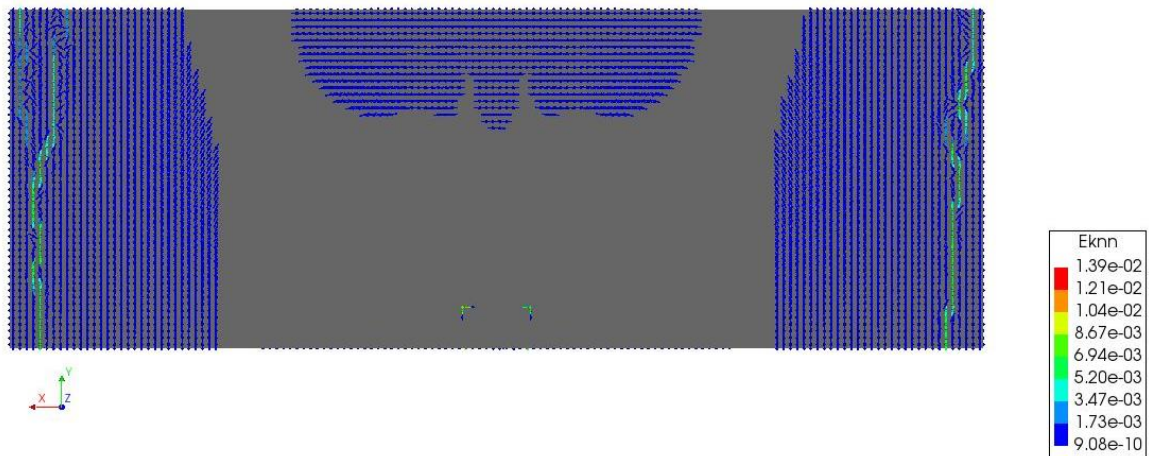
Analysis 1  
Load-step 40, Load-factor 3.0000, RCP + SOB  
Crack Strains Eknn  
min: 2.40e-08 max: 5.87e-03



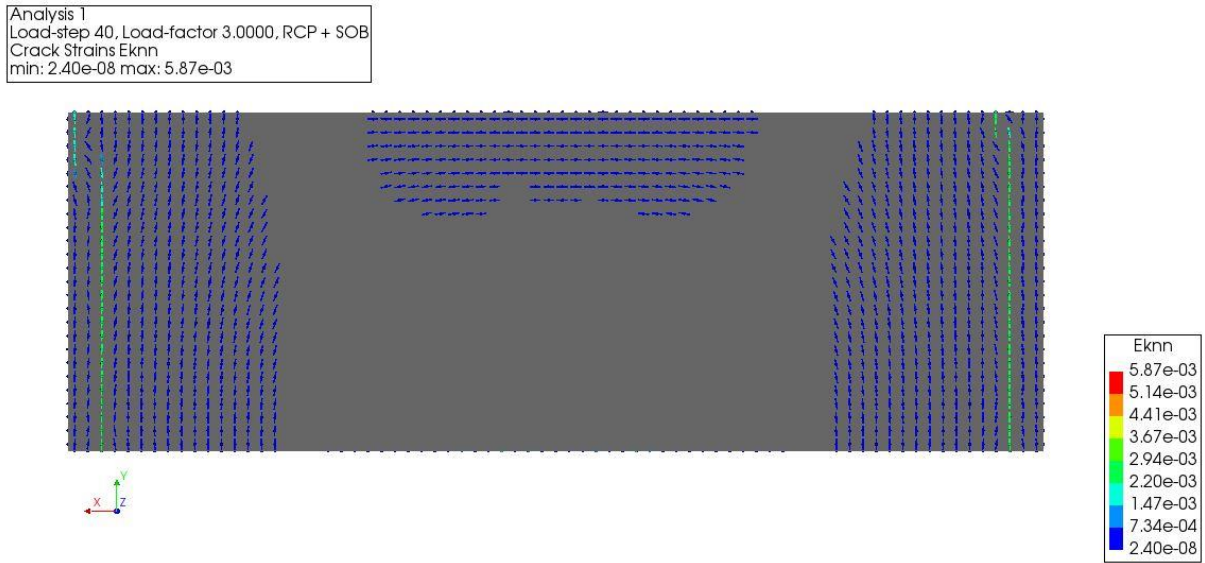
b)

Fig. 5.3 – Extensões de fissuração, por uma vista superior dos modelos: a) modelo A; b) modelo B.

Analysis 2  
Load-step 40, Load-factor 3.0000, RCP + SOB  
Crack Strains Eknn  
min: 9.08e-10 max: 1.39e-02



a)



b)

Fig. 5.4 – Extensões de fissuração, por uma vista inferior dos modelos: a) modelo A; b) modelo B.

Comparando os resultados obtidos com os modelos A e B, observa-se que os padrões de fissuração são, de um modo geral, semelhantes, existindo algumas diferenças principalmente na face superior da laje, na zona de momentos flectores negativos. A localização das fissuras está de acordo com o esperado para uma laje fungiforme sujeita a cargas gravíticas. As fendas mais abertas encontram-se na face superior da laje, na zona de apoio.

Foi analisada em maior detalhe a fenda no modelo A, que se destaca na Fig. 5.5. A Fig. 5.6 apresenta a variação da abertura de fenda, calculada em função da posição. Usa-se a coordenada Y (ver sistema de eixos indicado na Fig. 5.5) para caracterizar a posição. Usam-se alguns dos métodos citados no subcapítulo 4.7 para avaliar a abertura da fenda.

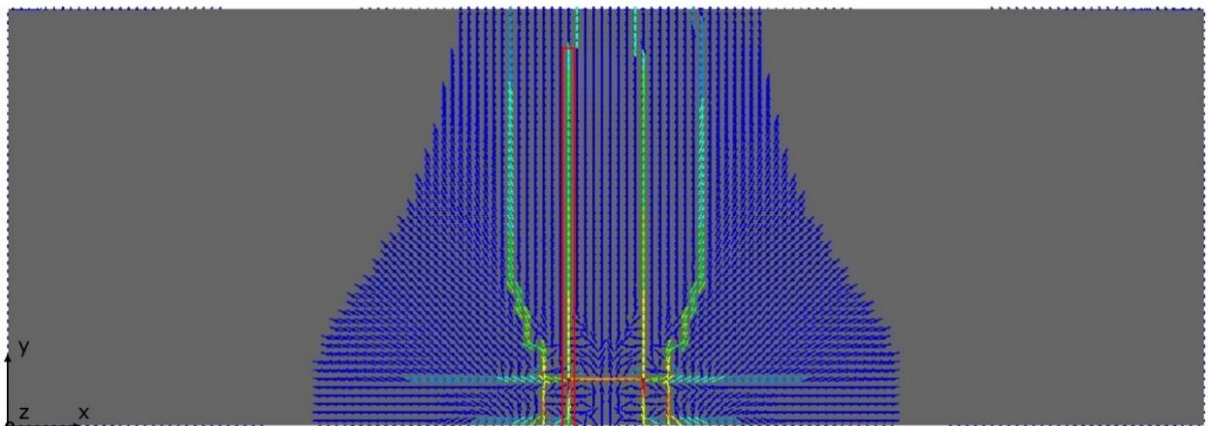


Fig. 5.5 – Fenda em análise do modelo A.

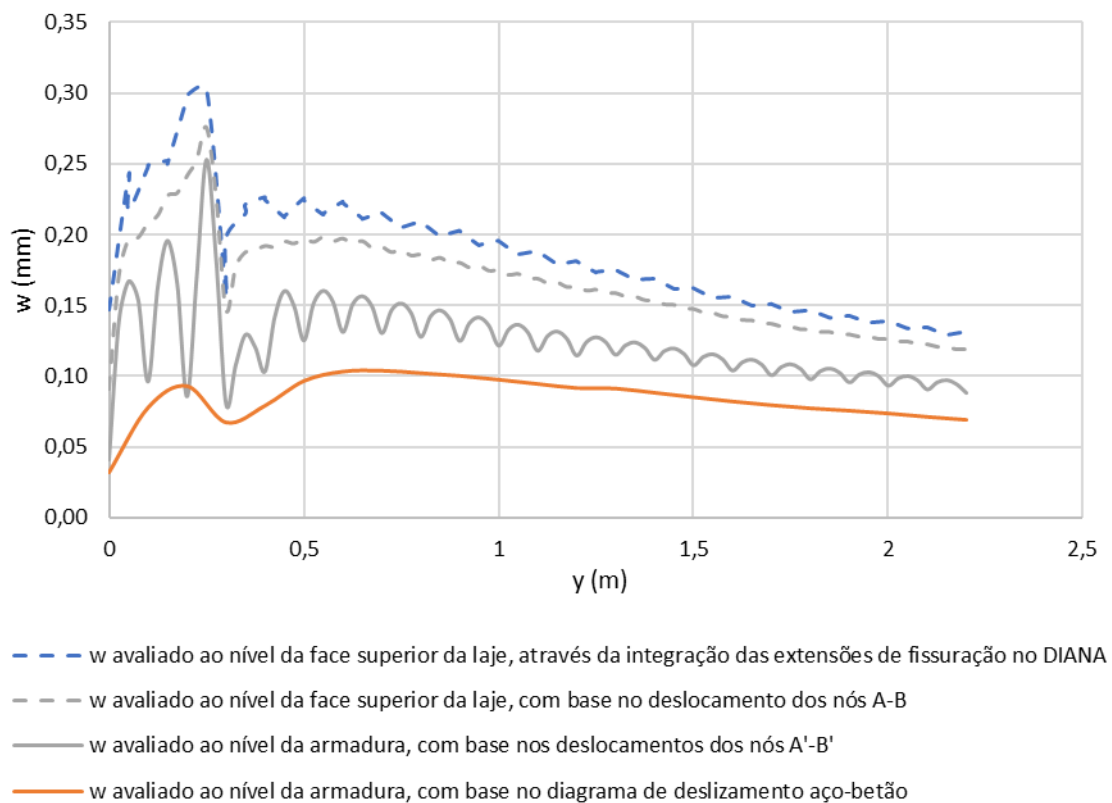


Fig. 5.6 – Abertura de fenda em função de  $y$ , para diferentes métodos de avaliação.

A ondulação na curva a cinzento deve-se à influência da posição das armaduras, distribuídas a cada 0,10 m ao longo do eixo Y, sobre a abertura de fenda, sentida na malha dos elementos finitos. Os “pontos mais baixos” na curva a cinzento correspondem à posição das armaduras, posição em que as aberturas de fenda são menores. Com o aumento do afastamento à posição da armadura, a abertura de fenda aumenta.

O deslizamento aço-betão ocorre na posição das armaduras, portanto, a comparação da curva a laranja com a curva a cinzento deve ser feita nos “pontos mais baixos” da curva a cinzento. Verifica-se, nesses pontos, que os valores obtidos nas curvas a cinzento e a laranja estão relativamente próximos. Não são exatamente iguais porque o deslizamento aço-betão lido nos resultados da análise não-linear não é analisado exatamente na posição da fenda, mas sim nos nós próximos à fenda, onde tem-se o valor máximo do deslizamento, como pode ser observado na Fig. 5.7, que apresenta o gráfico de deslizamento aço-betão na armadura, para  $y = 0,5$  m. A fenda em análise está localizada numa posição entre  $x = 3,35$  m e  $x = 3,40$  m e os valores utilizados para a soma do valor absoluto do deslizamento aço-betão estão localizados nas posições de  $x = 3,35$  m e  $x = 3,40$  m, à esquerda e à direita da fenda, respetivamente.



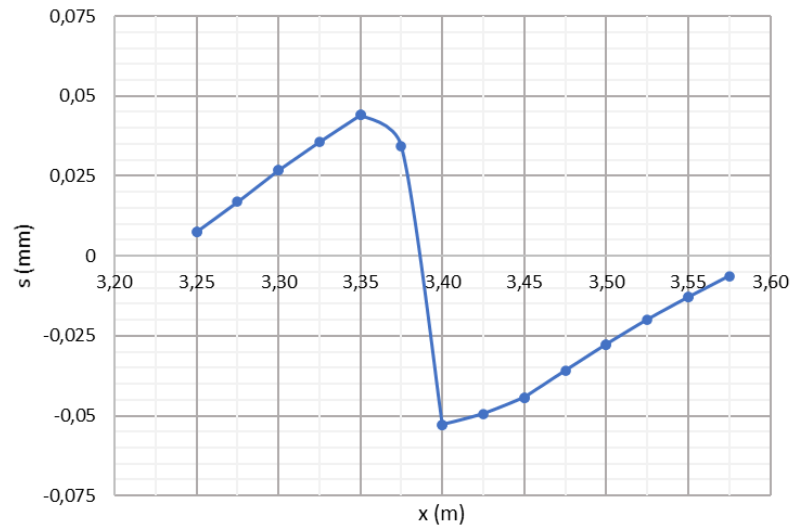
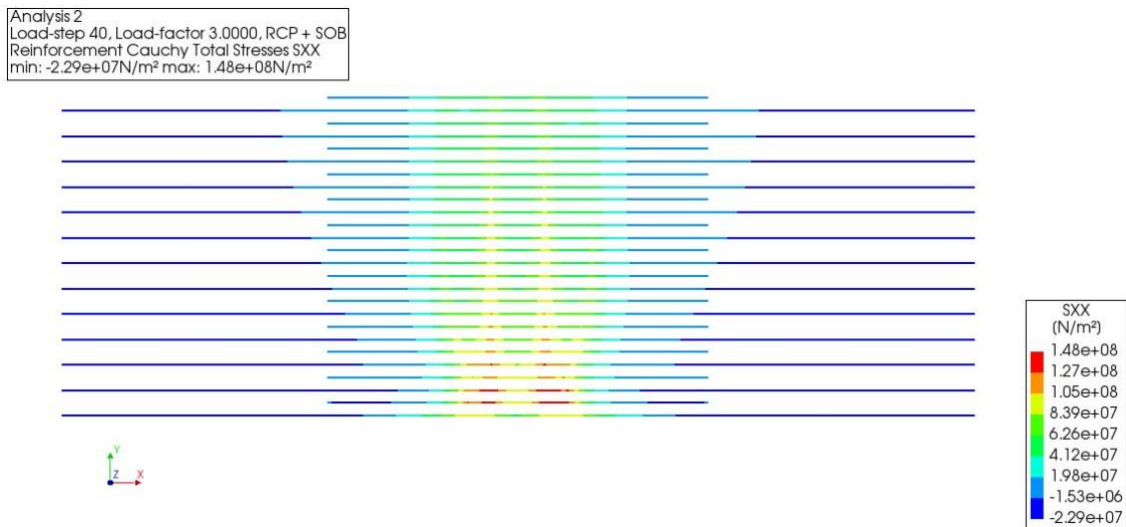


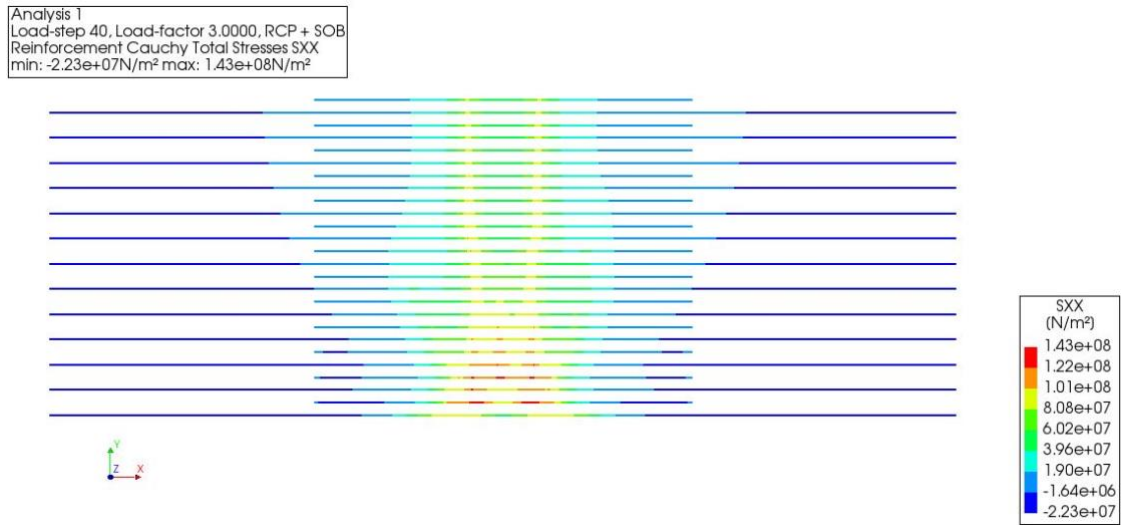
Fig. 5.7 – Gráfico do deslizamento aço-betão na armadura, na vizinhança da fenda, para  $y = 0,5$  m.

Além disso, é possível observar que a avaliação da abertura de fenda ao nível da face superior da laje com base nos deslocamentos dos nós resultou em valores ligeiramente inferiores quando comparada com a obtida através da integração das extensões de fissuração no DIANA (2020), apresentando uma pequena diferença entre os valores, sendo assim, ambas as formas de obtenção da abertura de fendas são aceitáveis.

Na Fig. 5.8 estão apresentados os mapas com tensões na armadura longitudinal superior, numa vista superior dos modelos. Os gráficos de tensões nos varões mais solicitados da armadura longitudinal superior, na zona da faixa sobre o pilar e na zona da faixa central, respetivamente, estão representados na Fig. 5.9 e na Fig. 5.10. Estas figuras mostram que as tensões mais elevadas ocorrem na secção à face do pilar, e não ao eixo do pilar, conforme seria de esperar após observação das extensões de fissuração na Fig. 5.2.

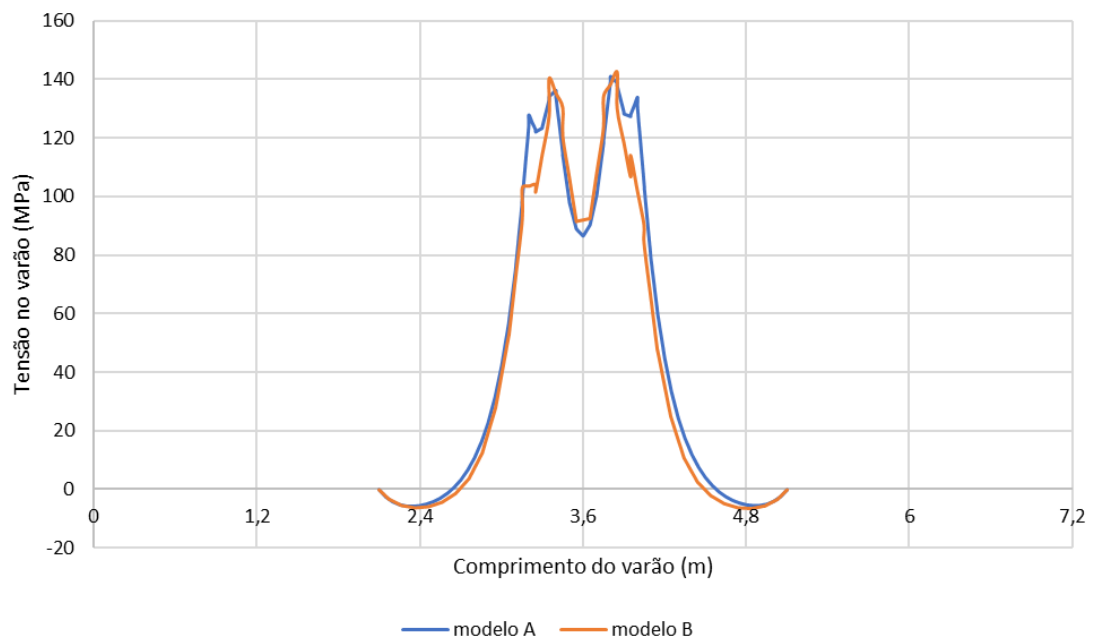


a)



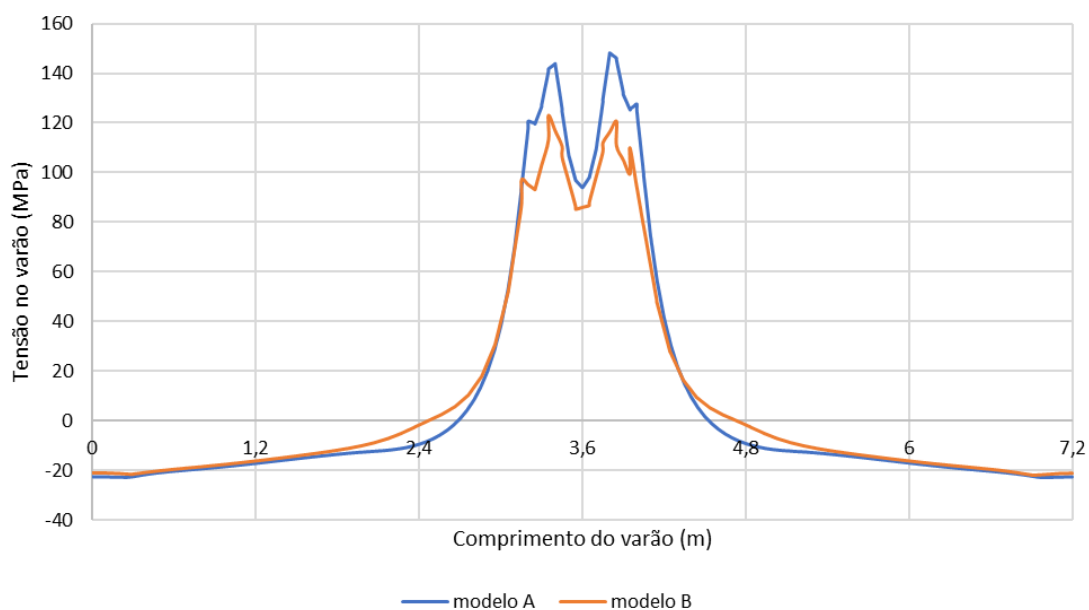
b)

Fig. 5.8 – Tensões na armadura longitudinal superior: a) modelo A; b) modelo B.



a)





b)

Fig. 5.9 – Tensões nos varões mais solicitados da armadura longitudinal superior: a) 2º varão a partir do eixo do pilar; b) 3º varão a partir do eixo do pilar.

Para efeitos de validação, foi calculada a tensão em secção fendilhada (usando os modelos apresentados no subcapítulo 3.3) no 3º varão a partir do eixo do pilar, junto à face esquerda do pilar, para isso, considerou-se o momento fletor e o esforço axial instalados nesta posição no modelo A, com auxílio de *composed lines*, que permitem calcular o momento fletor e o esforço axial resultante numa determinada secção transversal. Obtendo-se, então, um momento fletor negativo igual a -191,3 kNm/m e um esforço axial de compressão de -416,5 kN/m, resultando em uma tensão no varão de 157 MPa. Este valor é próximo das tensões máximas apresentadas na Fig. 5.9b, o que confere confiança relativamente aos resultados obtidos na análise não-linear.

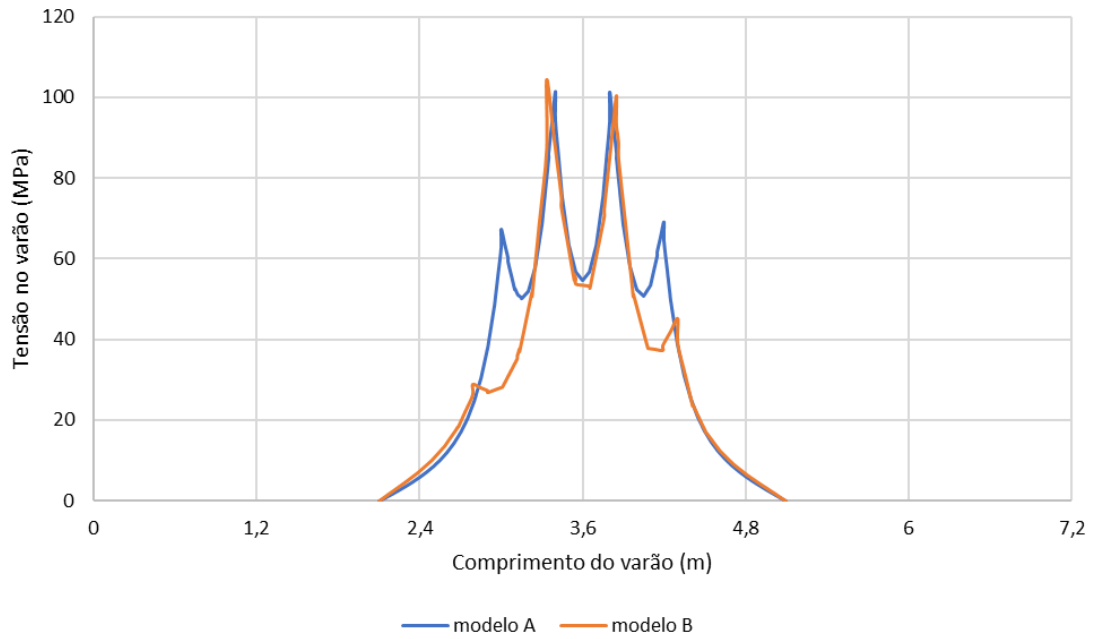
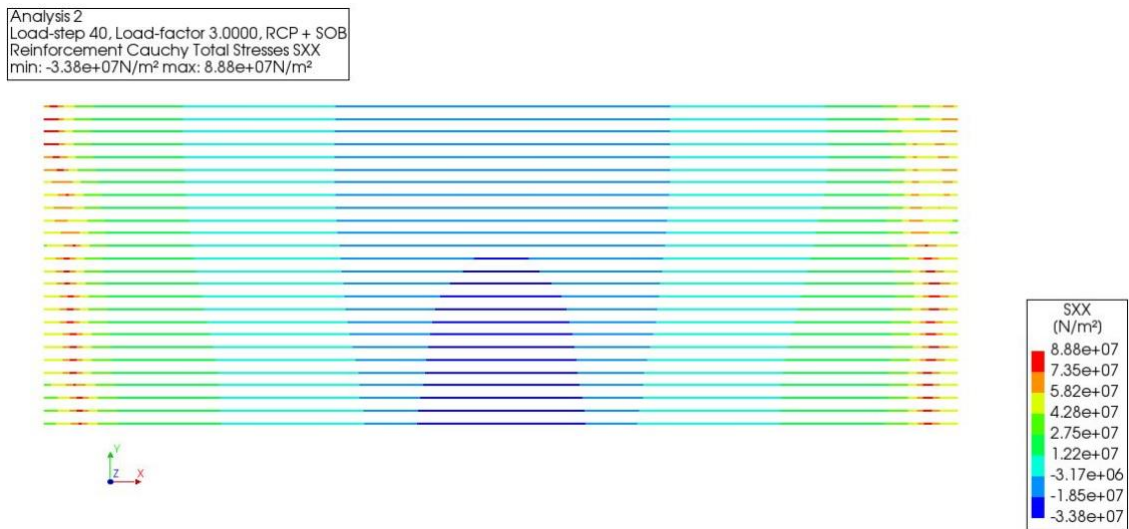


Fig. 5.10 – Tensões no varão mais solicitado da armadura longitudinal superior, na zona da faixa central.

Na Fig. 5.11 estão apresentados os mapas com tensões na armadura longitudinal inferior, por uma vista superior dos modelos. O gráfico de tensões num dos varões mais solicitados da armadura longitudinal inferior está representado na Fig. 5.12.



a)

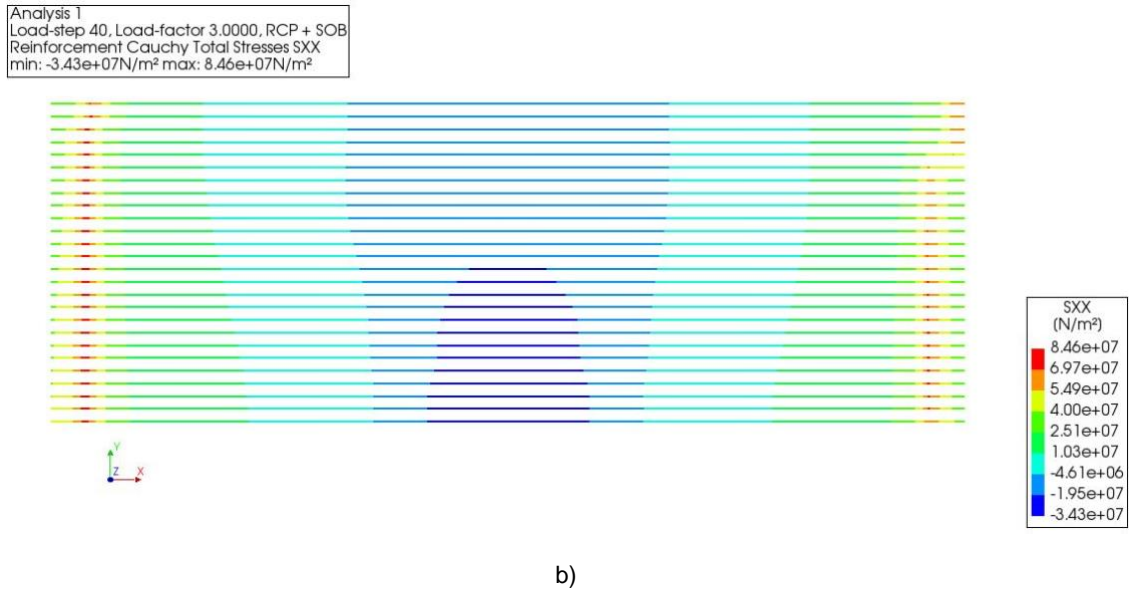


Fig. 5.11 – Tensões na armadura longitudinal inferior: a) modelo A; b) modelo B.

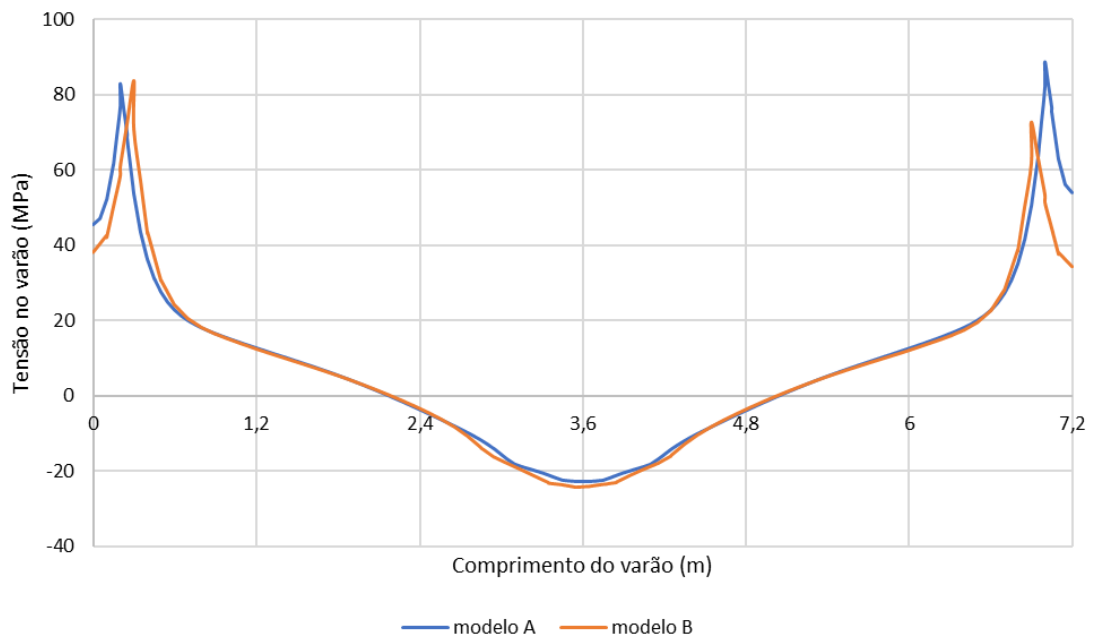


Fig. 5.12 – Tensões num varão da armadura longitudinal inferior.

Observa-se que os modelos A e B apresentam diagramas de tensões no aço que são, em geral, bastante semelhantes em termos práticos e, por isso, as análises seguintes serão feitas apenas para o modelo B, porque este modelo apresenta um menor tempo de cálculo e maior facilidade de convergência quando comparado com o modelo A. Também se observam picos nos diagramas de tensões no aço, que são correspondentes às posições das fissuras atravessadas pela armadura. À medida que a distância à fissura aumenta, a tensão diminui em resultado dos efeitos da aderência aço-betão.

### 5.3. COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DE UMA ESTRUTURA NÃO RESTRINGIDA

No final da análise (aos 30 anos), foi obtido um deslocamento vertical máximo de 12,0 mm. Na Fig. 5.13 é possível observar o mapa de deslocamentos verticais.

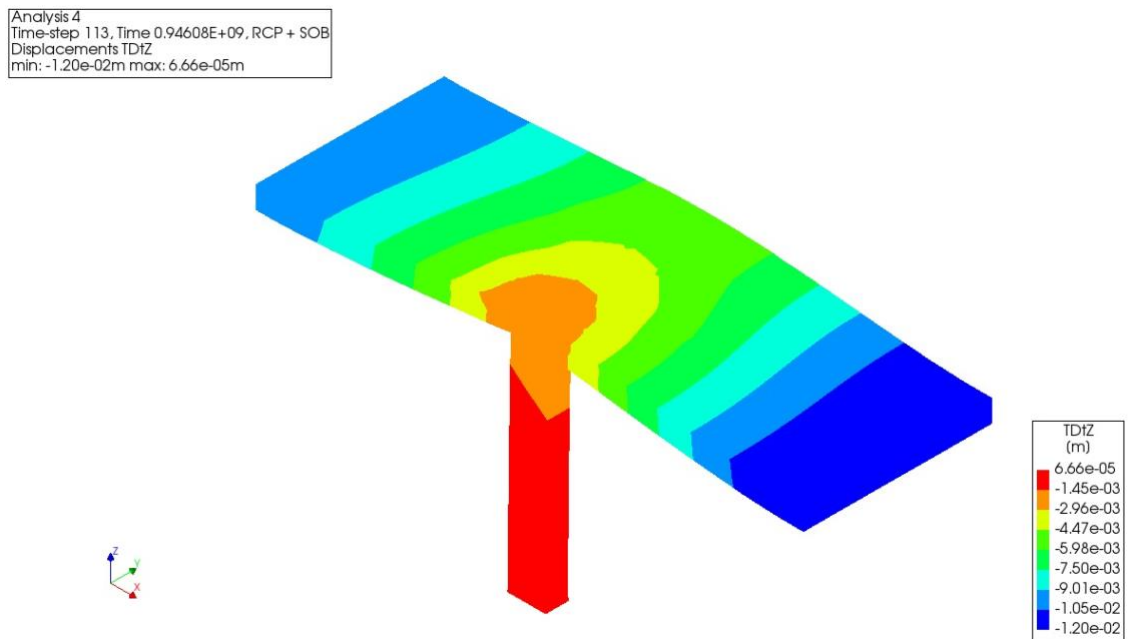


Fig. 5.13 – Mapa de deslocamentos verticais no final da análise.

A Fig. 5.14 apresenta a evolução do deslocamento vertical ao longo do tempo para o ponto mais desfavorável (posição de deslocamento máximo).

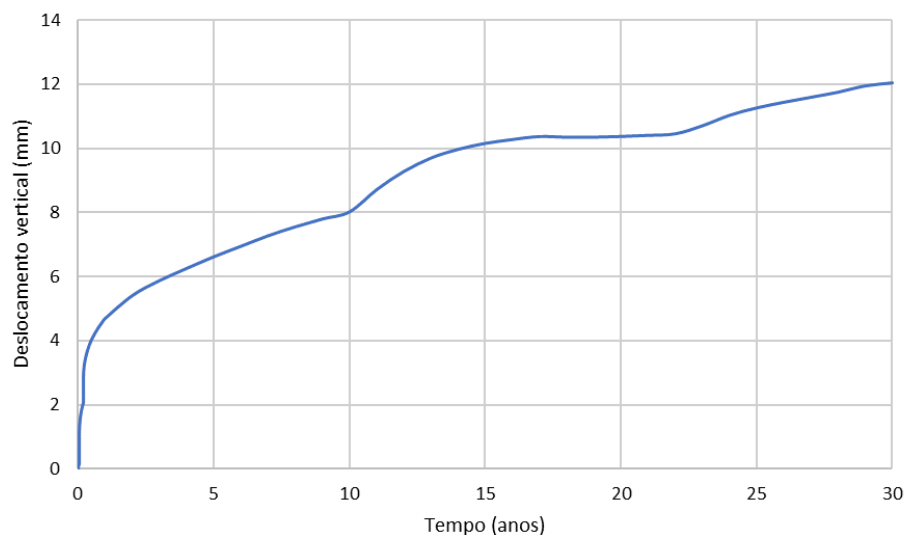


Fig. 5.14 – Evolução do deslocamento vertical ao longo do tempo para o ponto mais desfavorável da estrutura.

A Fig. 5.15 apresenta as extensões de fissuração, no final da análise, por uma vista em perspetiva do modelo.

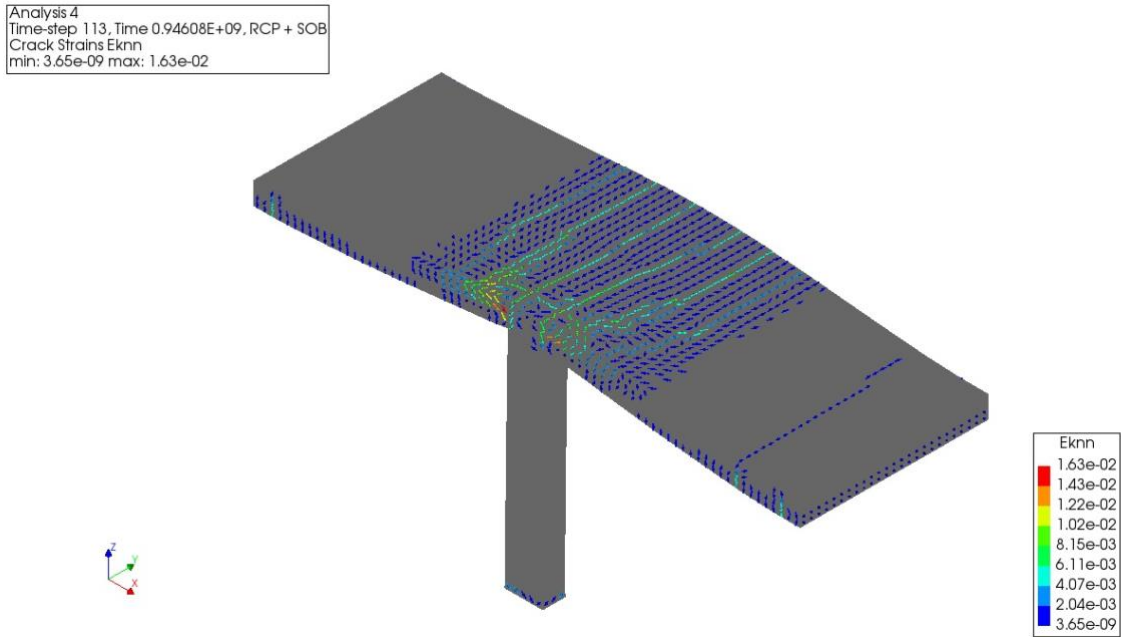


Fig. 5.15 – Extensões de fissuração no final da análise.

Na Fig. 5.16 está apresentado o mapa com tensões na armadura longitudinal superior, no final da análise, por uma vista superior do modelo, e na Fig. 5.17 estão representados os gráficos de tensões no varão mais solicitado da armadura longitudinal superior, na zona da faixa sobre o pilar e na zona da faixa central, respetivamente.

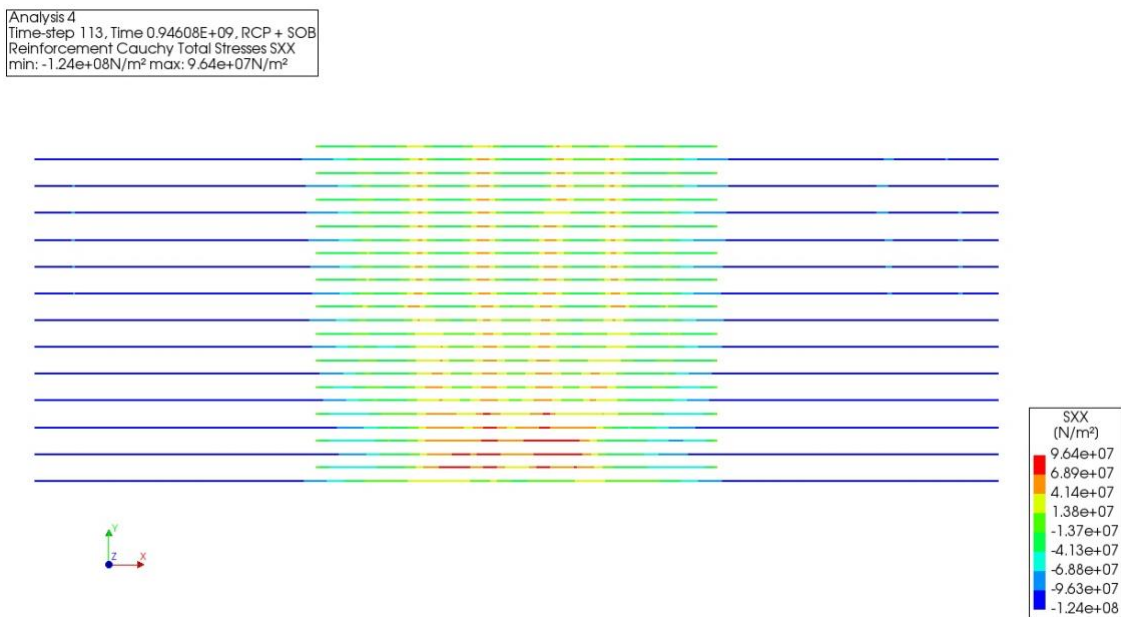
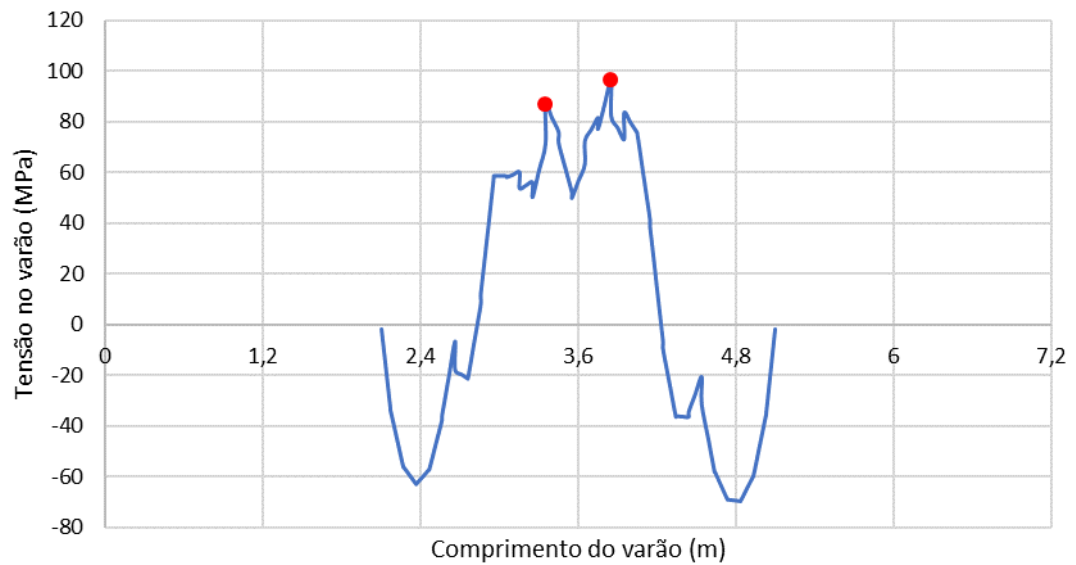
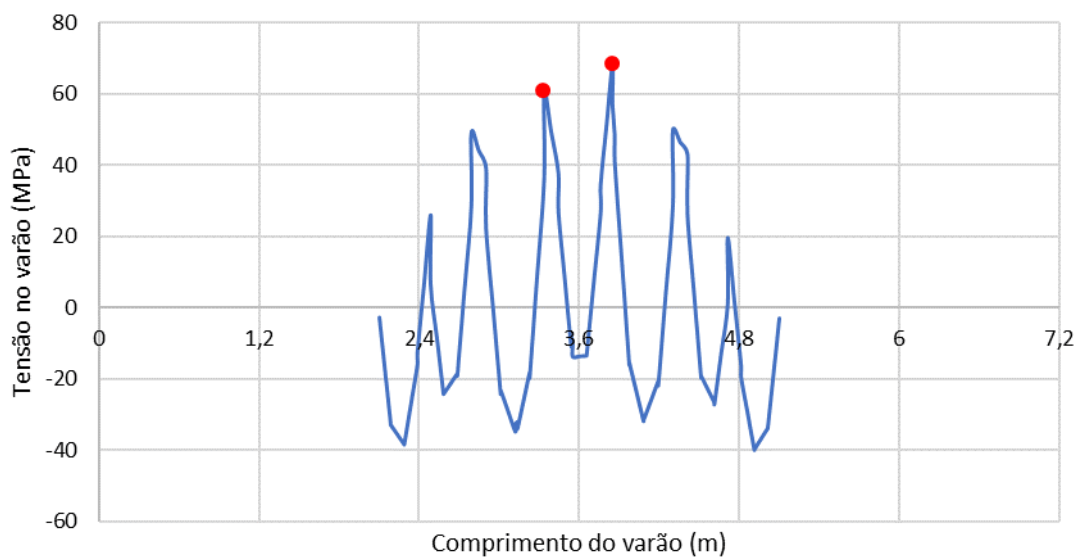


Fig. 5.16 – Tensões na armadura longitudinal superior no final da análise.



a)



b)

Fig. 5.17 – Tensões no varão mais solicitado da armadura longitudinal superior: a) na zona da faixa sobre o pilar; b) na zona da faixa central.

As tensões mais altas nos varões ocorrem junto à face do pilar (pontos a vermelho na Fig. 5.17). Portanto, é nestas posições que é mais importante avaliar a abertura de fendas. Isso foi feito determinando a evolução da abertura de fendas causadas por momentos fletores negativos ao longo das duas linhas indicadas na Fig. 5.18. Note-se que, junto ao pilar, as aberturas de fendas máximas ocorrem à face do pilar, tal como aconteceu nas análises sob carregamento monotónico. A Fig. 5.19 apresenta, então, os diagramas de abertura das fissuras marcadas na Fig. 5.18. Estas aberturas foram calculadas através dos deslocamentos dos nós ao nível da face superior da laje e ao nível da armadura.

Analysis 4  
 Time-step 113, Time 0.94608E+09, RCP + SOB  
 Crack Strains Eknn  
 min: 3.65e-09 max: 1.63e-02

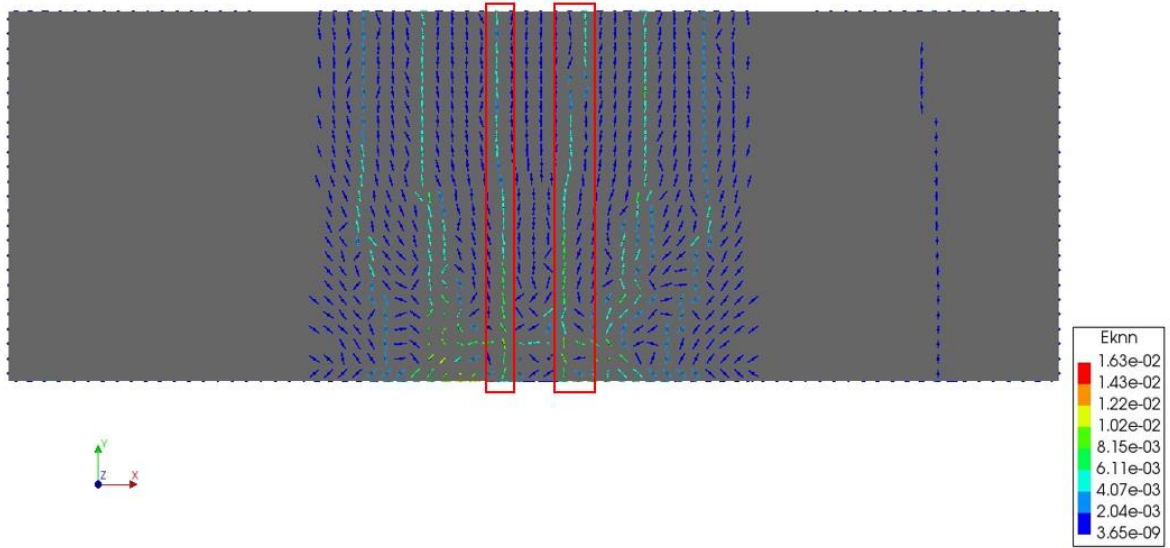
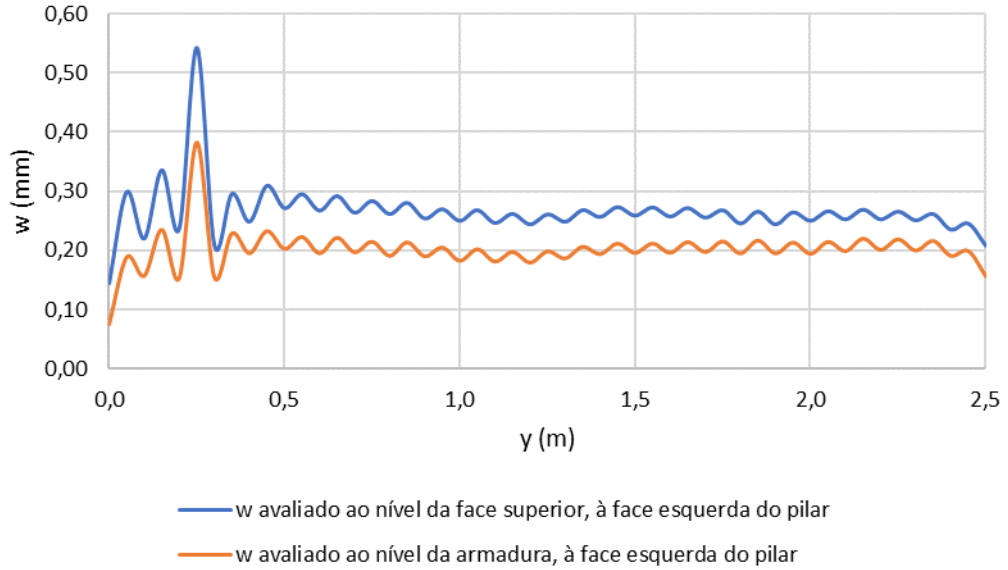


Fig. 5.18 – Fendas em análise na face superior da laje, no final da análise, por uma vista superior do modelo.



a)

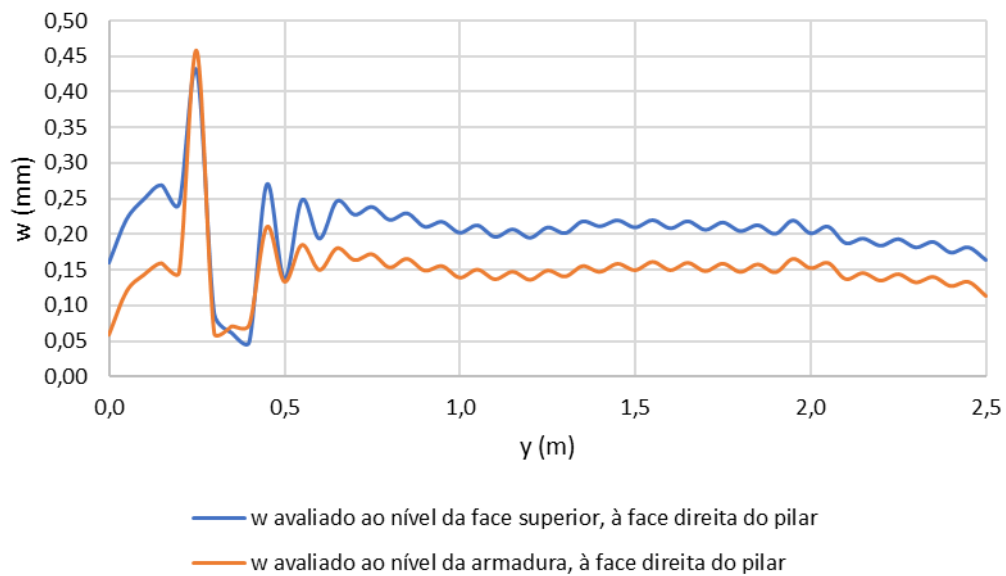


Fig. 5.19 – Variação da abertura de fenda junto à: a) face esquerda do pilar; b) face direita do pilar.

A Fig. 5.19 mostra que a abertura de fendas atinge um valor de pico na posição dos vértices do pilar. Nestes pontos, a fenda atinge uma abertura que é aproximadamente igual ao dobro da abertura atingida ao longo do restante desenvolvimento das fendas marcadas na Fig. 5.18.

Por outro lado, assinala-se que, sendo a tensão máxima nas armaduras superiores, na faixa sobre os pilares, relativamente baixa ( $\sim 100$  MPa, conforme é possível observar na Fig. 5.17a), a Fig. 5.19 mostra uma abertura máxima de fendas na superfície superior da laje relativamente elevada (valor de pico  $\sim 0,55$  mm e valor máximo ao longo da generalidade da fissura  $\sim 0,3$  mm).

Na Fig. 5.20 está apresentado o mapa com tensões na armadura longitudinal inferior, no final da análise, por uma vista superior do modelo e na Fig. 5.21 está representado o gráfico de tensões num dos varões mais solicitados da armadura longitudinal inferior.



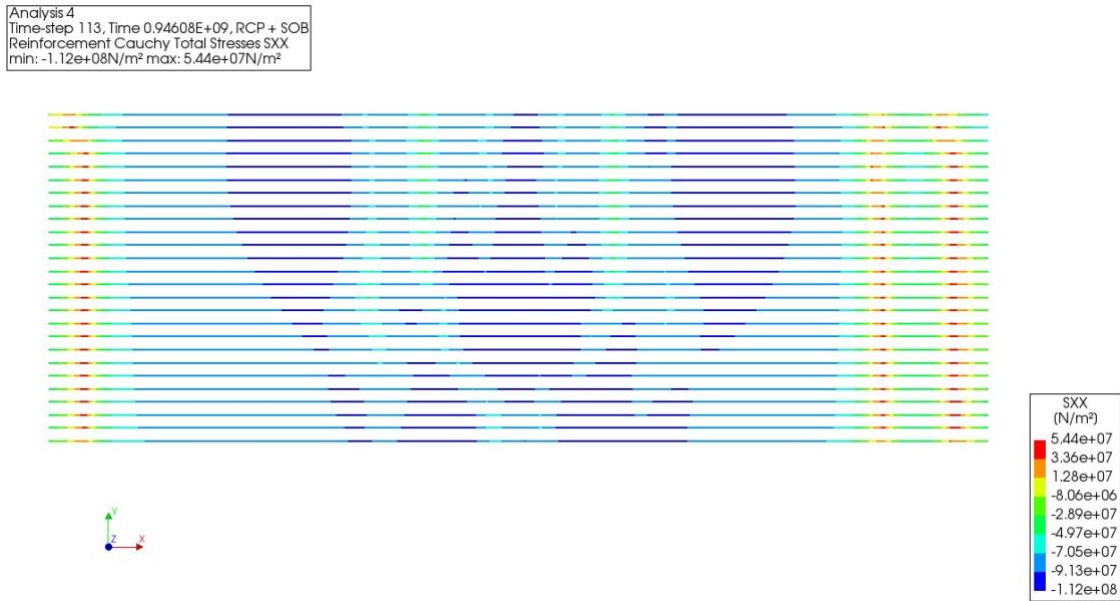


Fig. 5.20 – Tensões na armadura longitudinal inferior no final da análise.

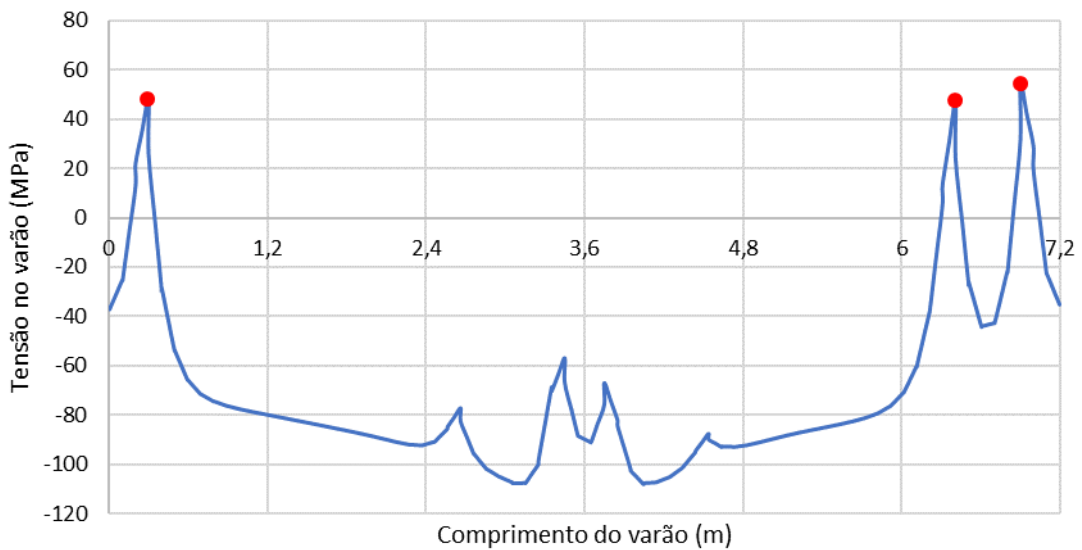


Fig. 5.21 – Tensões num varão da armadura longitudinal inferior.

As tensões mais altas no varão ocorrem nos pontos a vermelho na Fig. 5.21. É na posição do ponto à esquerda que será avaliada a abertura de fenda, indicada na Fig. 5.22, porque na zona dos pontos à direita existem duas fendas e, portanto, as extensões de fissuração são distribuídas em duas fissuras, esperando-se, por isso, que a abertura de fendas, nesta zona, seja mais baixa. Na Fig. 5.23 está apresentada a variação da abertura de fenda ao longo do ponto à esquerda, obtida através dos deslocamentos dos nós ao nível da face inferior da laje e ao nível da armadura. À semelhança do que se verificou na face superior da laje, na face inferior, para uma tensão máxima na armadura relativamente baixa (~55 MPa), a abertura da fissura à face da laje é relativamente elevada (~0,25 mm, conforme se vê na Fig. 5.23).

Isto acontece porque a abertura da fissura é um resultado não apenas da tensão de tração existente na armadura na secção da fenda, mas também do encurtamento do betão por retração, que origina deslizamento relativamente à armadura ao longo do comprimento de transferência.

Por outro lado, a Fig. 5.21 mostra que, nas posições de momentos fletores negativos, são atingidas tensões de compressão nas armaduras elevadas (~110 MPa). Essas compressões são o resultado não apenas dos momentos fletores aplicados, mas também dos efeitos do encurtamento do betão por retração.

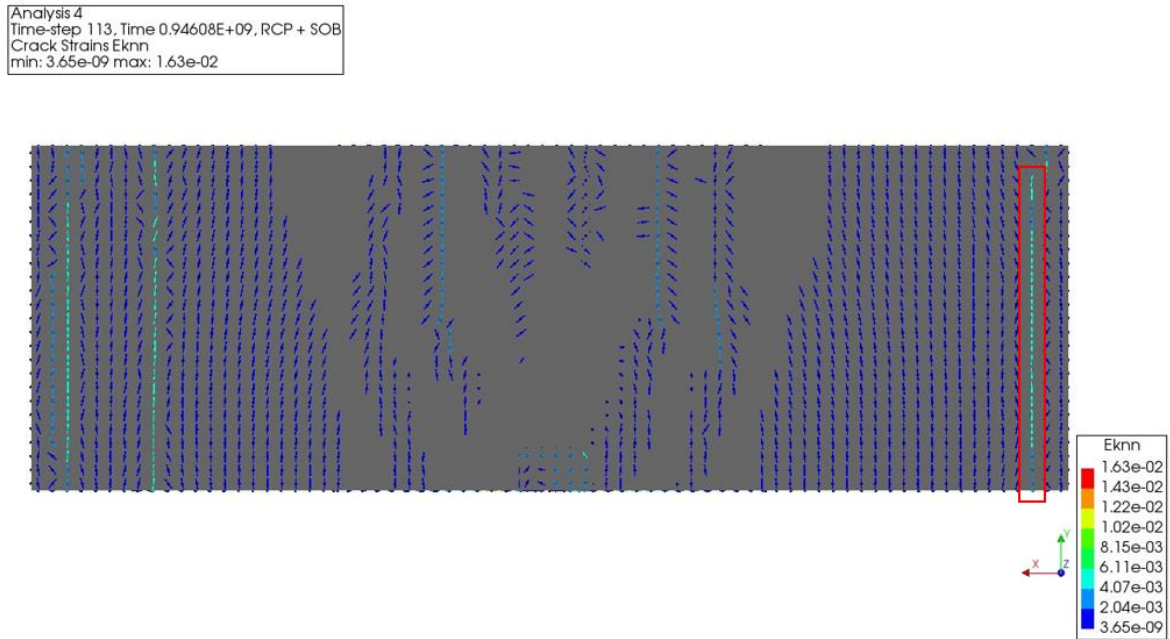


Fig. 5.22 – Fenda em análise na face inferior da laje, no final da análise, por uma vista inferior do modelo.

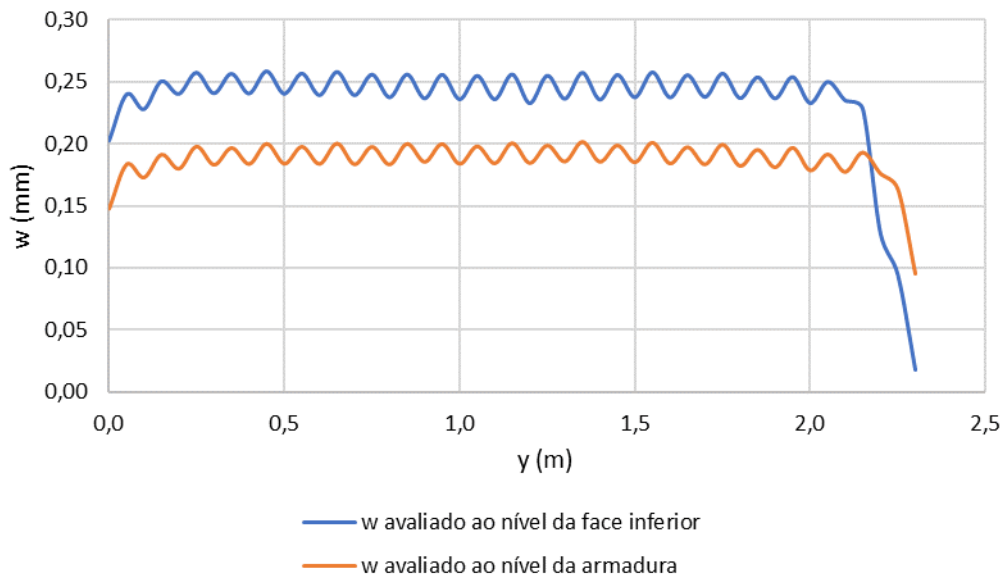


Fig. 5.23 – Variação da abertura da fenda em destaque na Fig. 5.22.

Nesta análise é possível observar uma abertura de fenda máxima superior à obtida no subcapítulo 5.2, mesmo sendo a carga distribuída aplicada à laje inferior à considerada no subcapítulo 5.2. Isto acontece principalmente por causa dos efeitos da retração, que contribuem de forma importante para o aumento da abertura de fendas.

#### 5.4. COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DE UMA ESTRUTURA RESTRINGIDA

Os resultados apresentados a seguir referem-se ao modelo em que o apoio elástico foi quantificado considerando um grau de restrição axial  $R = 1/3$ . No final da análise, o modelo B apresentou um deslocamento vertical máximo de 12,9 mm. O efeito da restrição à deformação axial da laje conduziu, portanto, a um aumento da flecha, conforme era expectável, uma vez que a fissuração aumenta com o crescimento da restrição.

A Fig. 5.24 apresenta a evolução do deslocamento vertical ao longo do tempo para o ponto mais desfavorável da estrutura.

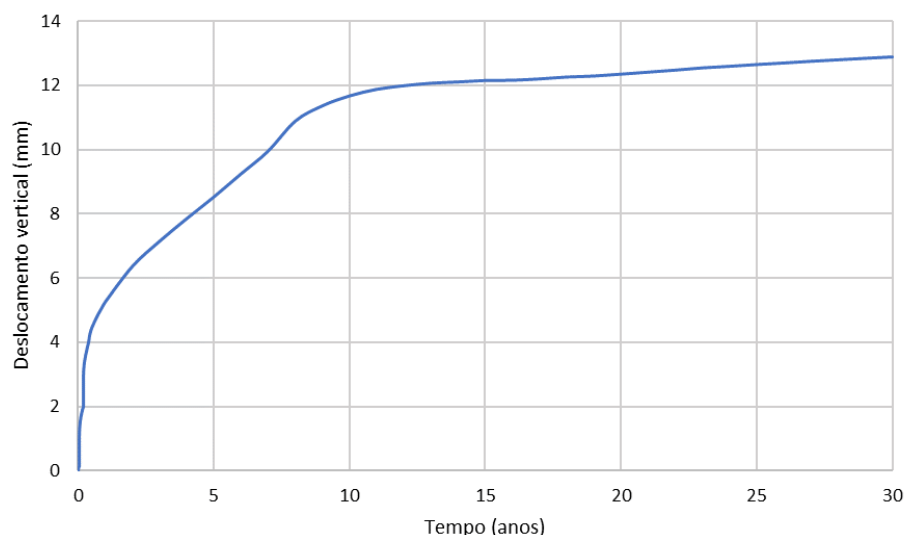


Fig. 5.24 – Evolução do deslocamento vertical ao longo do tempo para o ponto mais desfavorável da estrutura.

A Fig. 5.25 apresenta as extensões de fissuração, no final da análise, por uma vista em perspetiva do modelo. Conforme seria de esperar, o número de fissuras é maior do que na análise sem restrição à deformação axial.

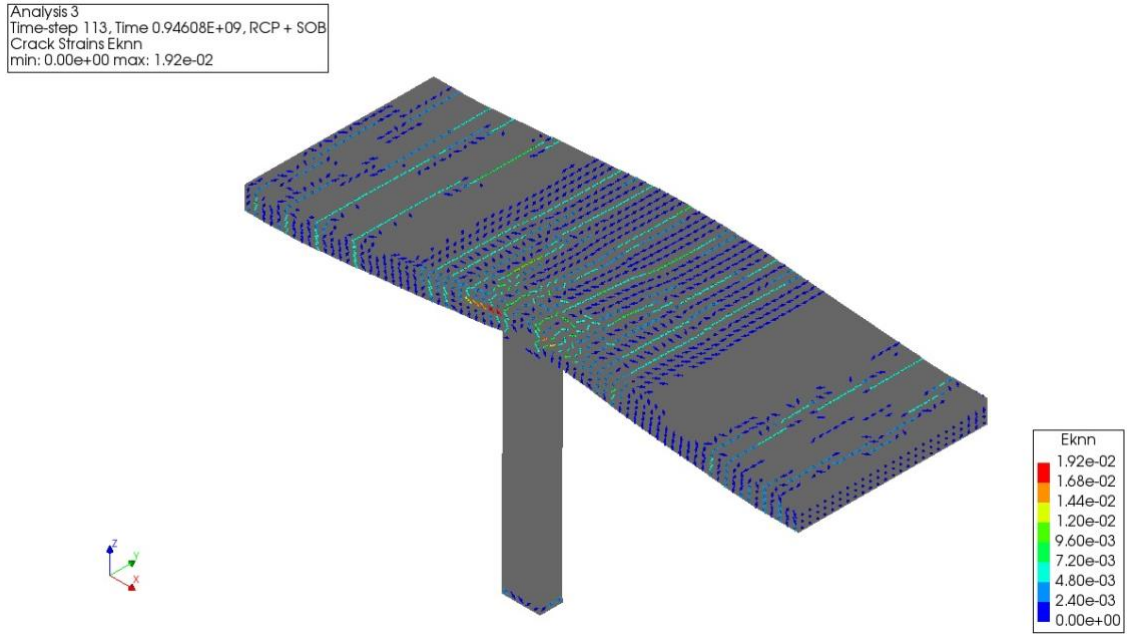


Fig. 5.25 – Extensões de fissuração no final da análise.

Na Fig. 5.26 está apresentado o mapa com tensões na armadura longitudinal superior, no final da análise, por uma vista superior do modelo, e na Fig. 5.27 estão representados os gráficos de tensões no varão mais solicitado da armadura longitudinal superior, na zona da faixa sobre o pilar e na zona da faixa central, respetivamente.

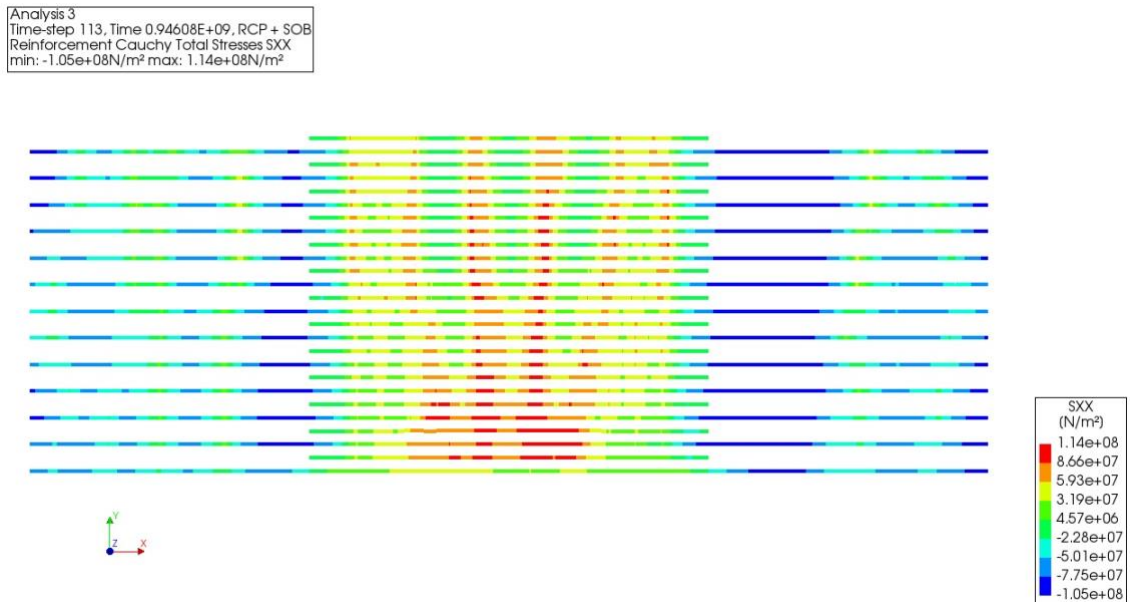
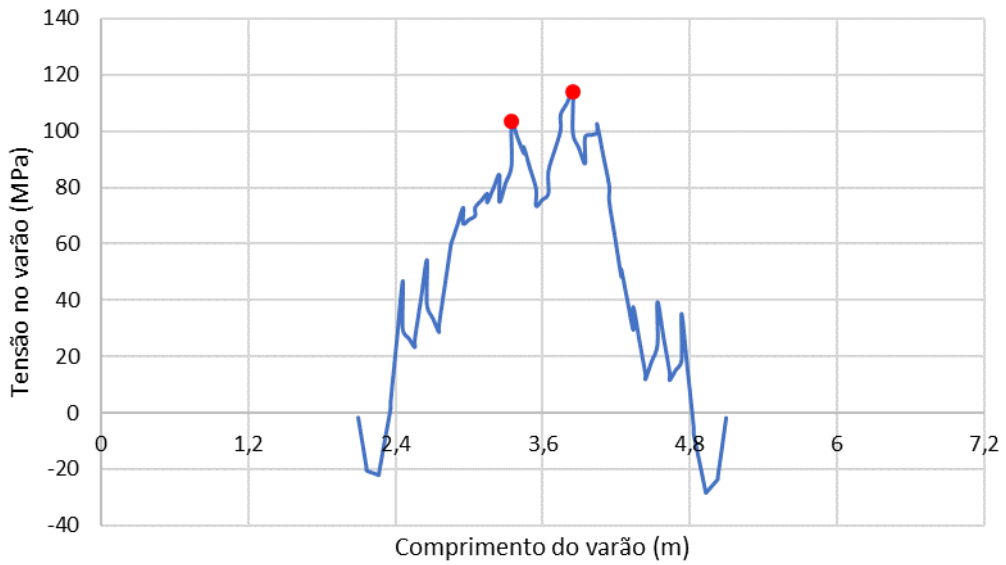
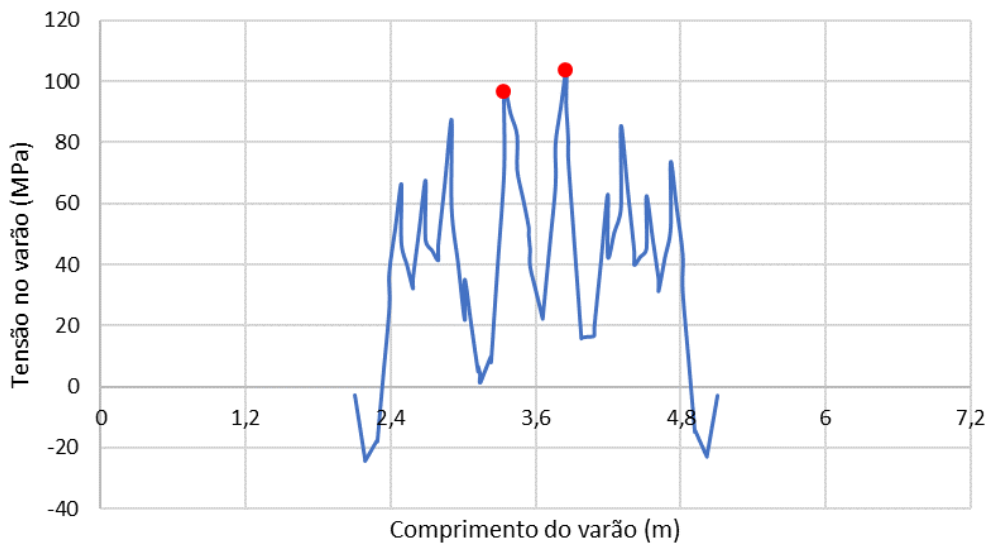


Fig. 5.26 – Tensões na armadura longitudinal superior no final da análise.



a)



b)

Fig. 5.27 – Tensões no varão mais solicitado da armadura longitudinal superior: a) na zona da faixa sobre o pilar; b) na zona da faixa central.

Tal como no subcapítulo 5.3, as tensões mais altas nos varões ocorrem junto à face do pilar (posições assinaladas com pontos a vermelho na Fig. 5.27). Portanto, a avaliação da abertura de fendas é feita para as posições indicadas na Fig. 5.28. Na Fig. 5.29 está apresentada a variação da abertura de fenda junto à face esquerda e à face direita do pilar, respetivamente, obtida através dos deslocamentos dos nós ao nível da face superior da laje e ao nível da armadura. Os resultados apresentados na Fig. 5.29b mostram aberturas de fendas pouco superiores àquelas que foram obtidas para a estrutura não restringida axialmente.

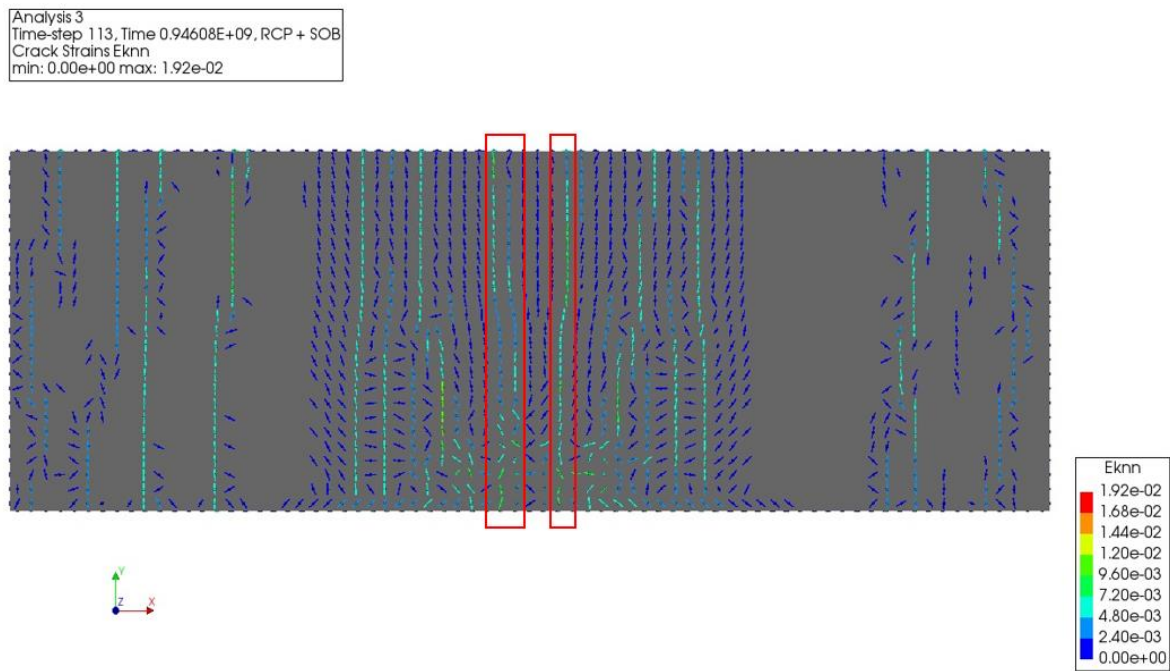
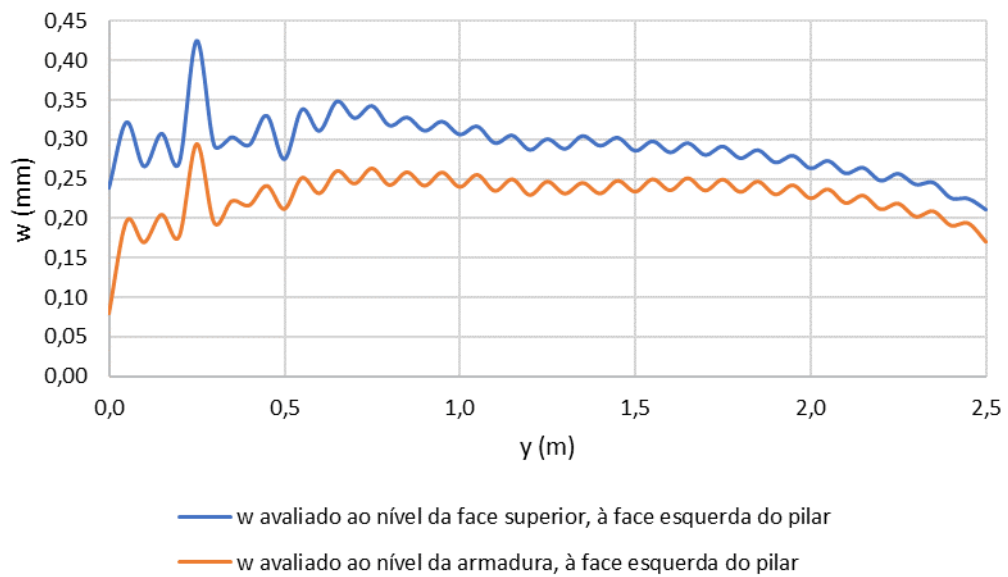
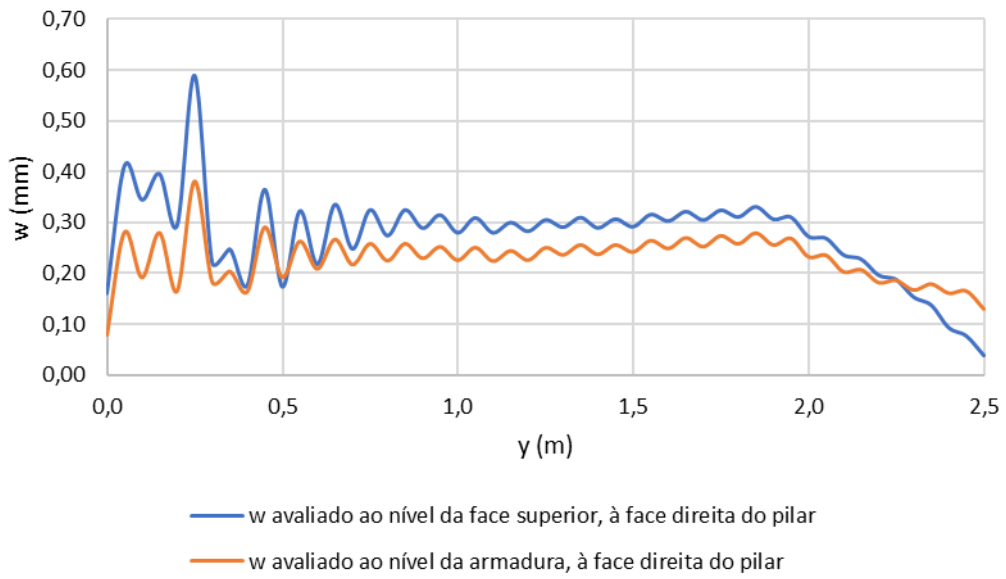


Fig. 5.28 – Fendas em análise na face superior da laje, no final da análise, por uma vista superior do modelo.



a)





b)

Fig. 5.29 – Variação da abertura de fenda junto à: a) face esquerda do pilar; b) face direita do pilar.

Na Fig. 5.30 está apresentado o mapa com tensões na armadura longitudinal inferior, no final da análise, por uma vista superior do modelo, e na Fig. 5.31 está representado o gráfico de tensões num dos varões mais solicitados da armadura longitudinal inferior. Este gráfico apresenta vários picos, em correspondência às várias “macro-fendas” na face inferior da laje.

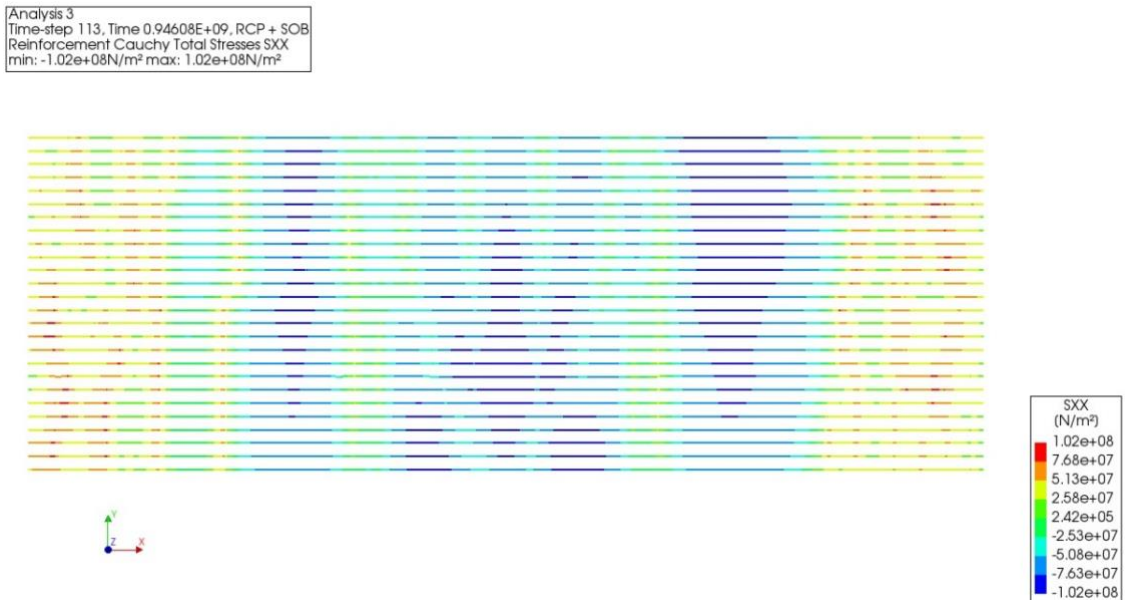


Fig. 5.30 – Tensões na armadura longitudinal inferior no final da análise.

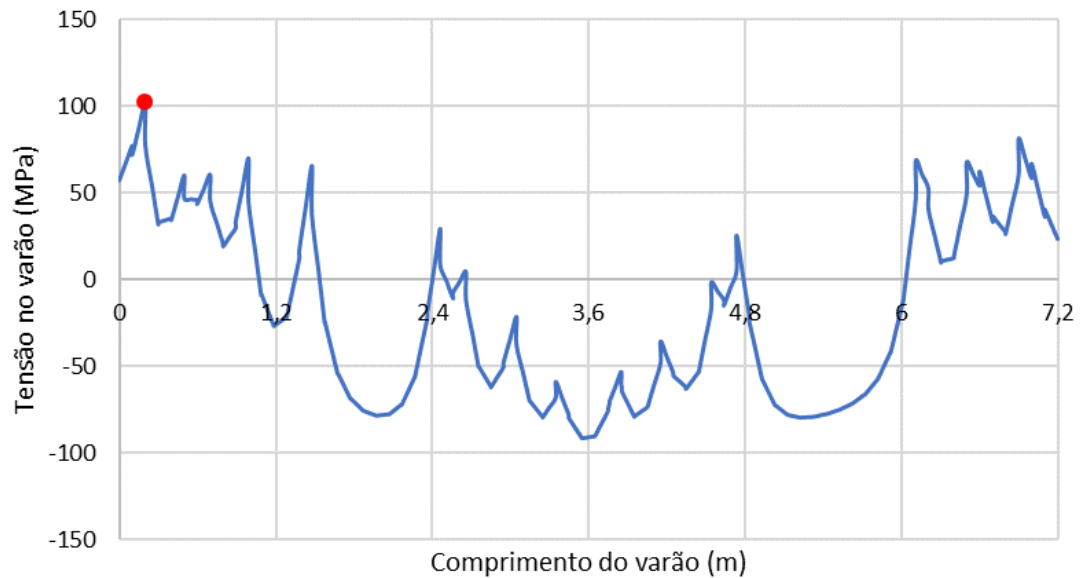


Fig. 5.31 – Tensões num varão da armadura longitudinal inferior.

A tensão mais alta no varão ocorre no ponto a vermelho na Fig. 5.31. É nesta posição que será avaliada a abertura de fenda, indicada na Fig. 5.32. Na Fig. 5.33 está apresentada a variação da abertura de fenda ao longo deste alinhamento, obtida através dos deslocamentos dos nós ao nível da face inferior da laje e ao nível da armadura.

Verifica-se que o gráfico da Fig. 5.33 apresenta uma irregularidade ao longo de Y, isto acontece porque a fissura onde foram calculados os resultados apresentados é irregular, mesmo considerando as extensões de fissuração correspondentes à abertura de uma “macro-fissura” em três filas adjacentes de elementos finitos, conforme indicado na Fig. 5.32. Esta dificuldade no cálculo da abertura de fendas em estruturas onde o padrão de fissuração é irregular, pode ser ultrapassada recorrendo ao cálculo baseado nos resultados obtidos para o deslizamento aço-betão ao longo do comprimento do varão. No entanto, esta alternativa só é válida para determinação da abertura da fissura ao nível da armadura, não ao nível das fibras extremas de betão.



Analysis 3  
 Time-step 113, Time 0.94608E+09, RCP + SOB  
 Crack Strains Eknn  
 min: 0.00e+00 max: 1.92e-02

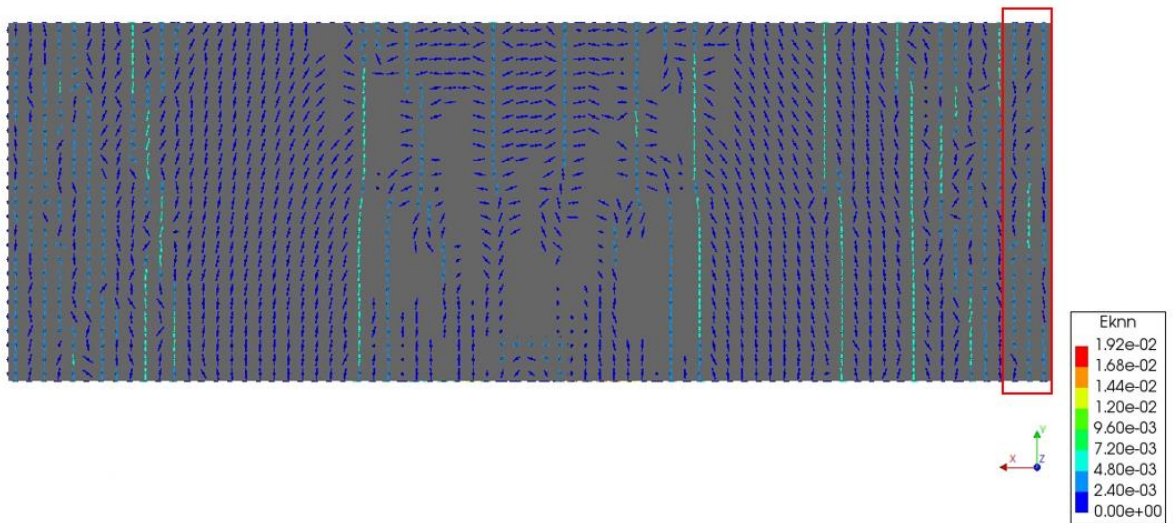


Fig. 5.32 – Fenda em análise na face inferior da laje, no final da análise, por uma vista inferior do modelo.

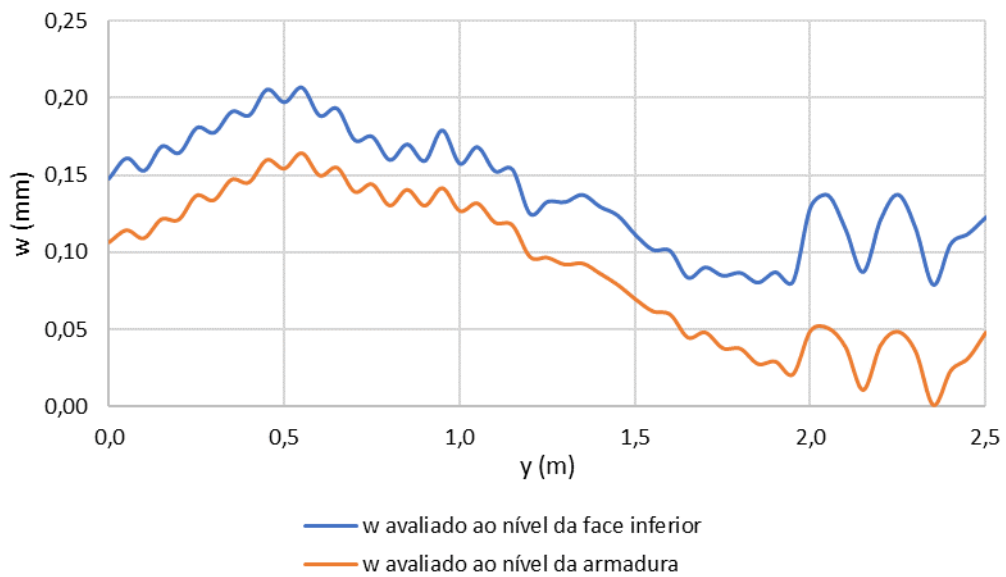


Fig. 5.33 – Variação da abertura da fenda em destaque na Fig. 5.32.

Os resultados apresentados a seguir referem-se ao modelo em que o apoio elástico foi quantificado considerando um grau de restrição axial  $R = 2/3$ . No final da análise, o modelo B apresentou um deslocamento vertical máximo de 13,0 mm.

A Fig. 5.34 apresenta a evolução do deslocamento vertical ao longo do tempo para o ponto de deslocamento máximo.

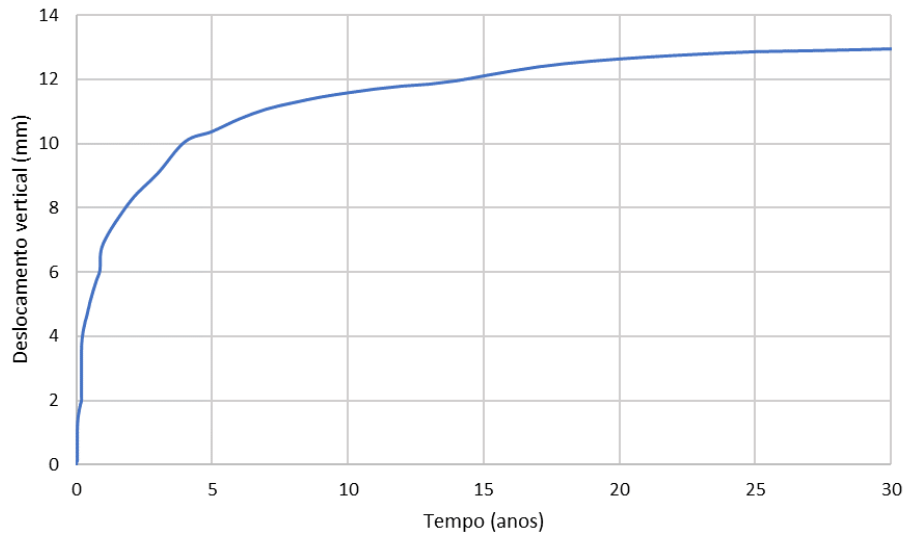


Fig. 5.34 – Evolução do deslocamento vertical ao longo do tempo para o ponto mais desfavorável da estrutura.

A Fig. 5.35 apresenta as extensões de fissuração, no final da análise, por uma vista em perspetiva do modelo.

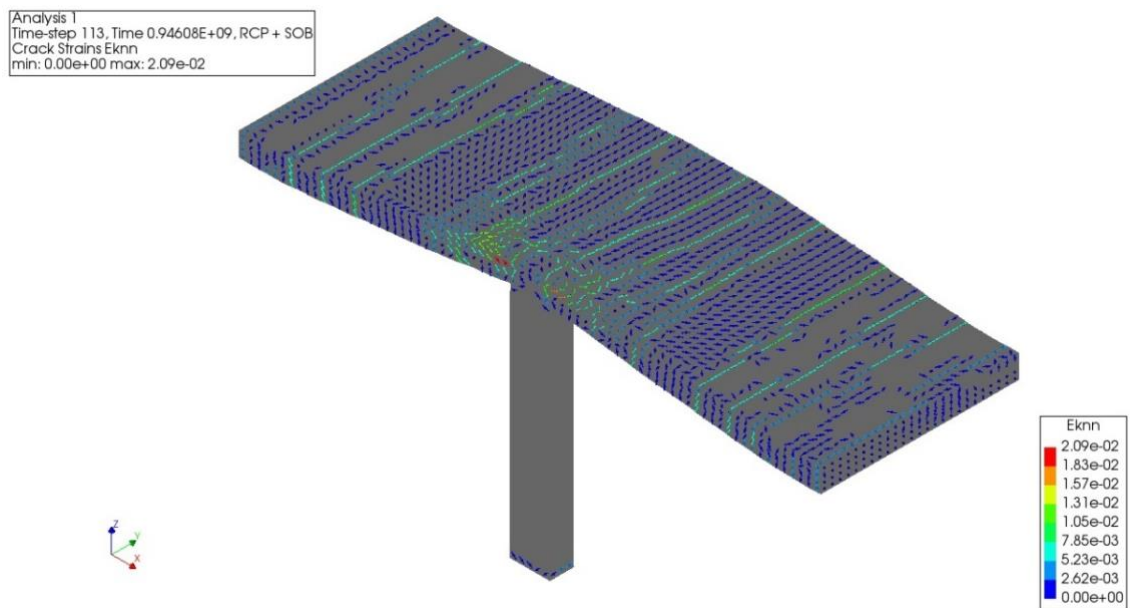


Fig. 5.35 – Extensões de fissuração no final da análise.

Na Fig. 5.36 está apresentado o mapa com tensões na armadura longitudinal superior, no final da análise, por uma vista superior do modelo, e na Fig. 5.37 estão representados os gráficos de tensões no varão mais solicitado da armadura longitudinal superior, na zona da faixa sobre o pilar e na zona da faixa central, respetivamente.

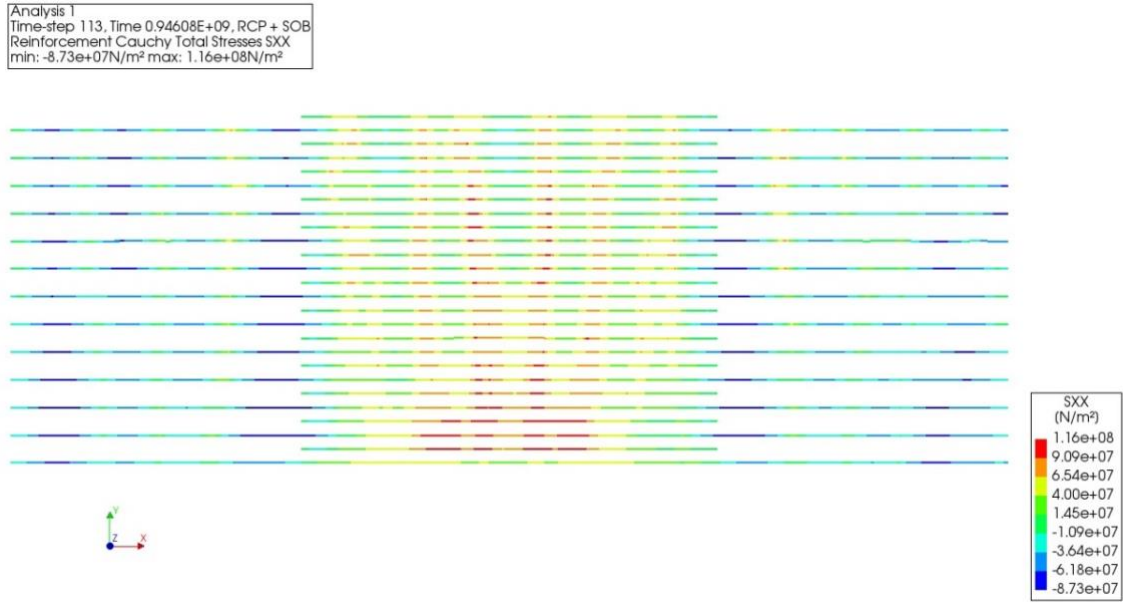
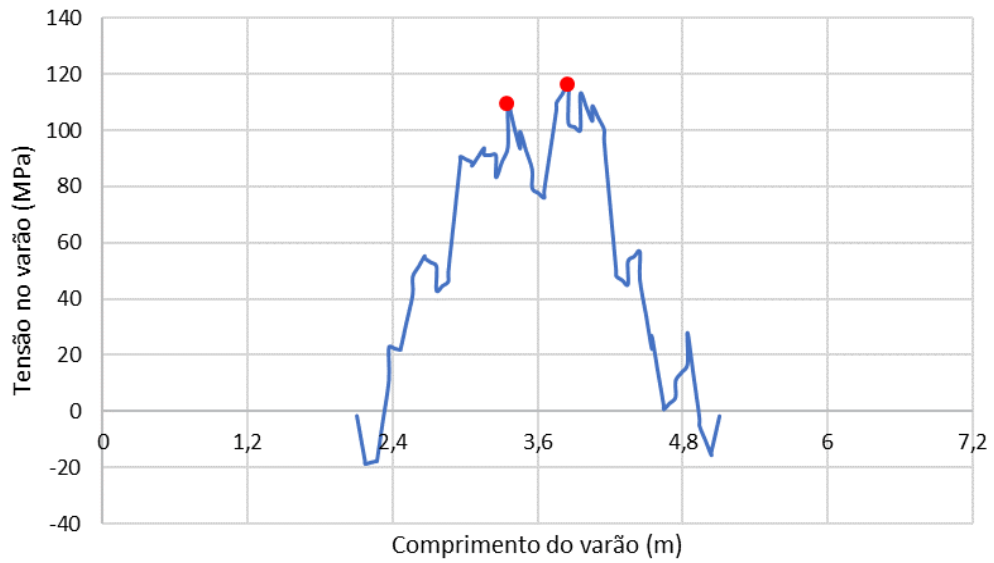
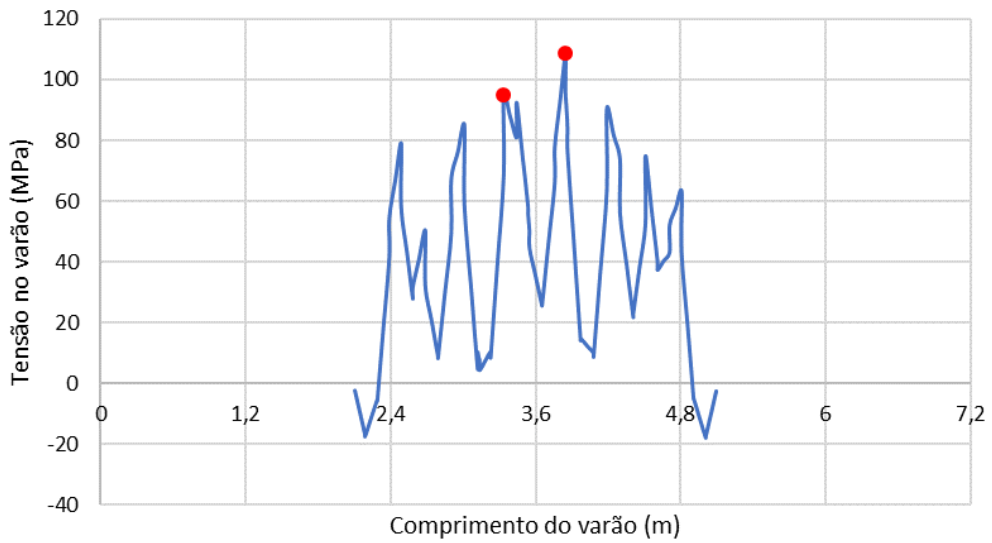


Fig. 5.36 – Tensões na armadura longitudinal superior no final da análise.



a)



b)

Fig. 5.37 – Tensões no varão mais solicitado da armadura longitudinal superior: a) na zona da faixa sobre o pilar; b) na zona da faixa central.

Como no subcapítulo 5.3, as tensões mais altas nos varões ocorrem junto à face do pilar, correspondendo aos pontos a vermelho na Fig. 5.37. Portanto, a avaliação da abertura de fendas é feita para as posições indicadas na Fig. 5.38. Na Fig. 5.39 está apresentada a variação da abertura de fenda junto à face esquerda e à face direita do pilar, respetivamente, obtida através dos deslocamentos dos nós ao nível da face superior da laje e ao nível da armadura.

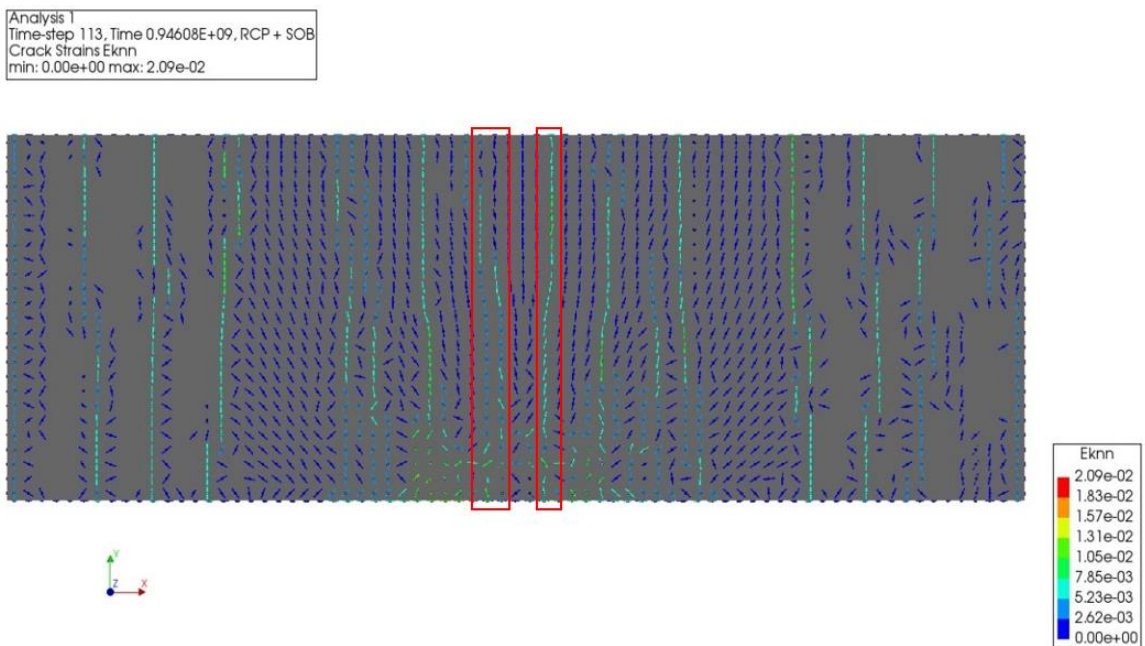
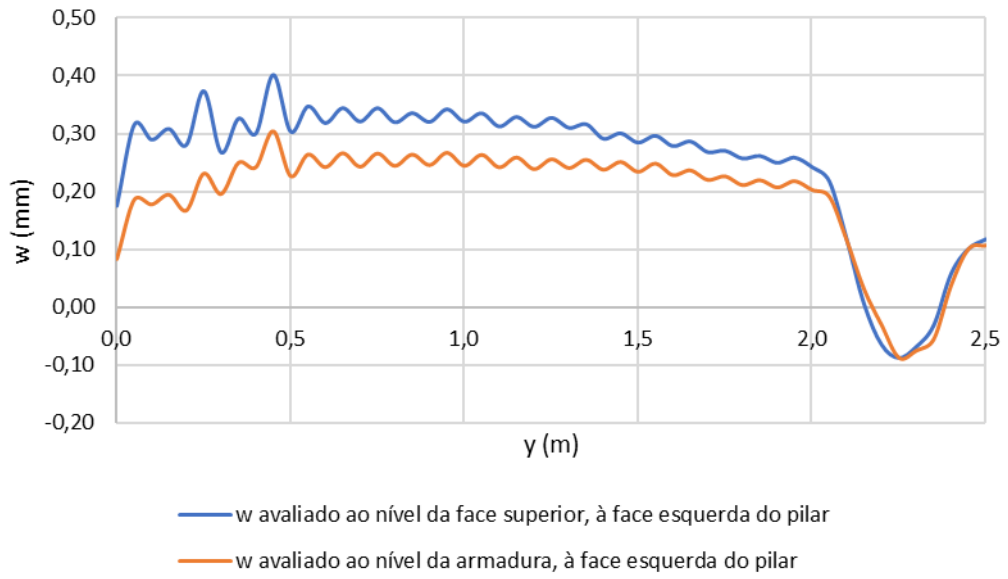
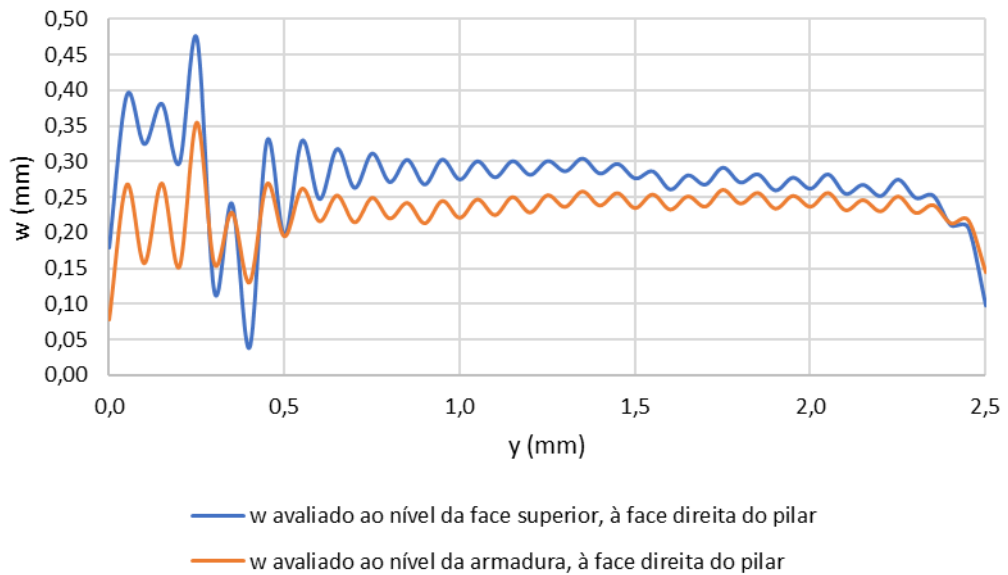


Fig. 5.38 – Fendas em análise na face superior da laje, no final da análise, por uma vista superior do modelo.



a)



b)

Fig. 5.39 – Variação da abertura de fenda junto à: a) face esquerda do pilar; b) face direita do pilar.

Na Fig. 5.40 está apresentado o mapa com tensões na armadura longitudinal inferior, no final da análise, por uma vista superior do modelo e na Fig. 5.41 está representado o gráfico de tensões num dos varões mais solicitados da armadura longitudinal inferior.

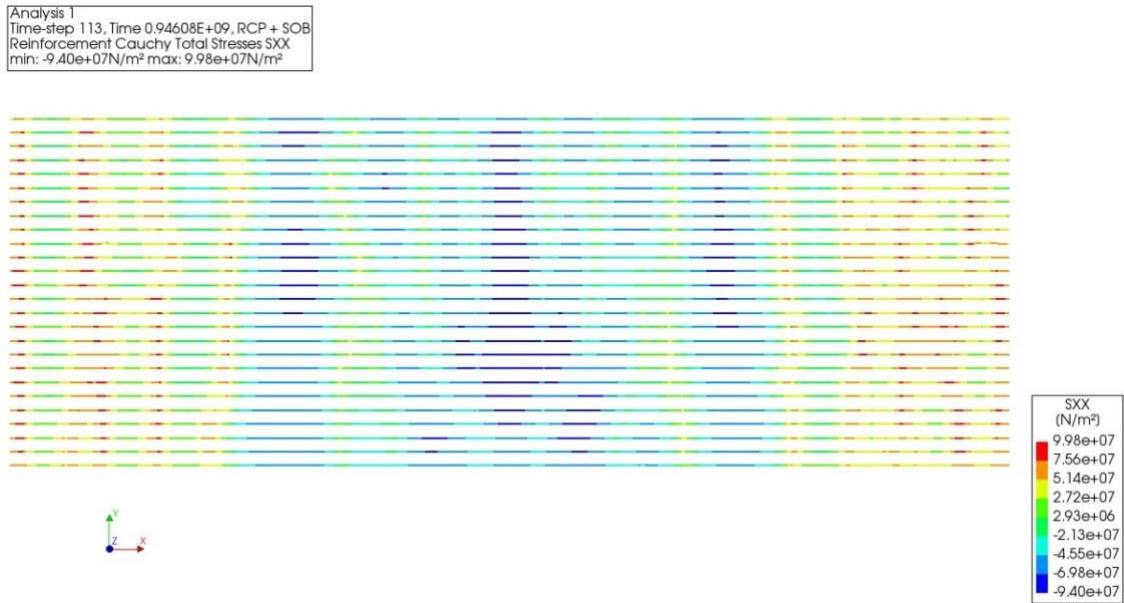


Fig. 5.40 – Tensões na armadura longitudinal inferior no final da análise.

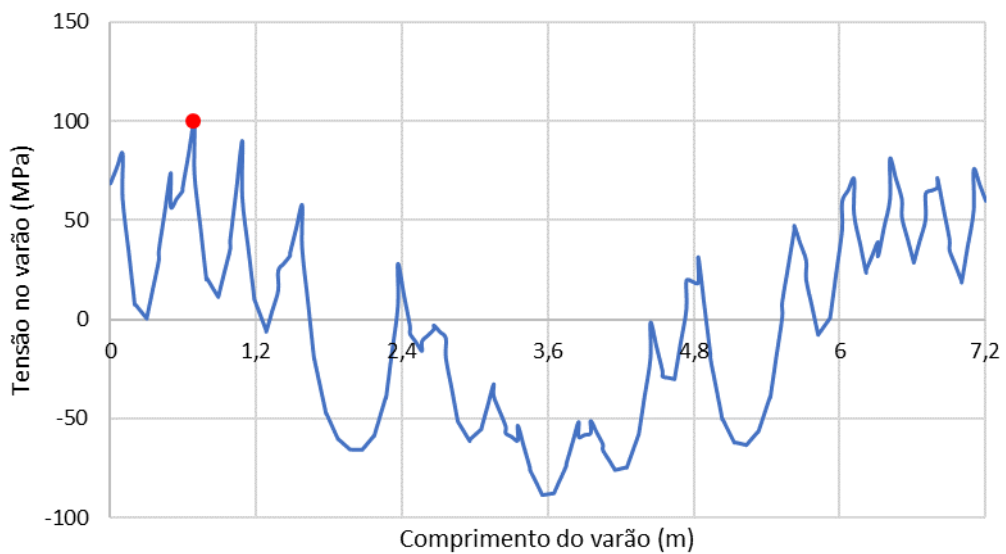


Fig. 5.41 – Tensões num varão da armadura longitudinal inferior.

A tensão mais alta no varão ocorre no ponto a vermelho na Fig. 5.41. É nesta posição que será avaliada a abertura de fenda, indicada na Fig. 5.42. Na Fig. 5.43 está apresentada a variação da abertura de fenda ao longo deste ponto, obtida através dos deslocamentos dos nós ao nível da face inferior da laje e ao nível da armadura.

O gráfico da Fig. 5.43 apresenta uma irregularidade ao longo de Y, assim como ocorreu para a abertura de fendas na face inferior da estrutura com  $R = 1/3$ , devido, também, à irregularidade da fissura onde foram calculados os resultados.



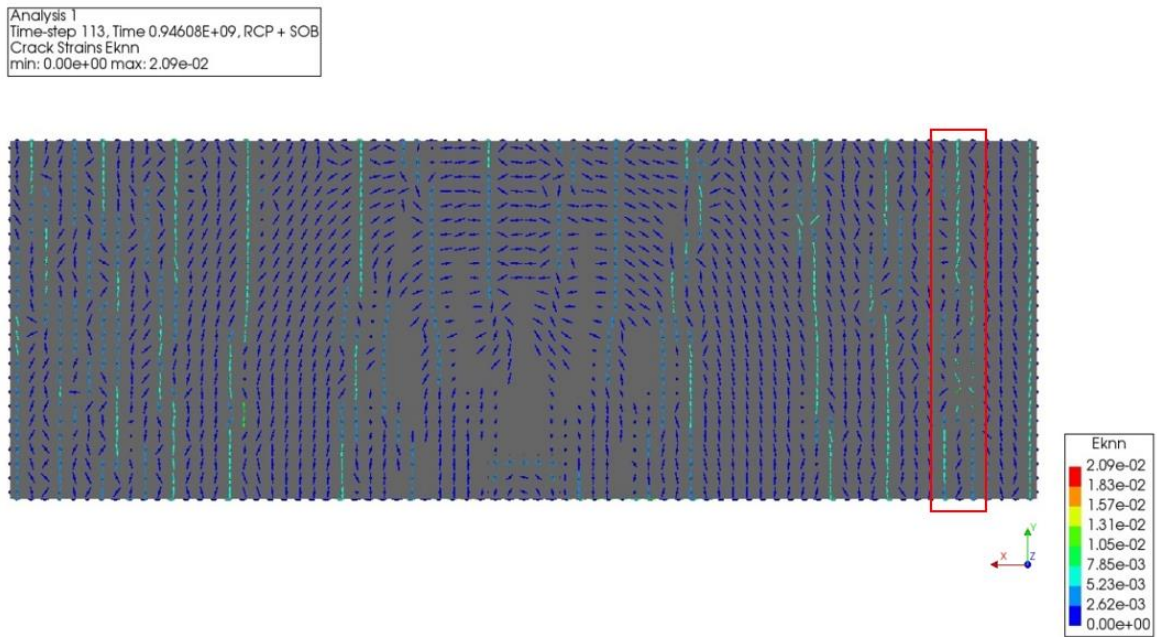


Fig. 5.42 – Fenda em análise na face inferior da laje, no final da análise, por uma vista inferior do modelo.

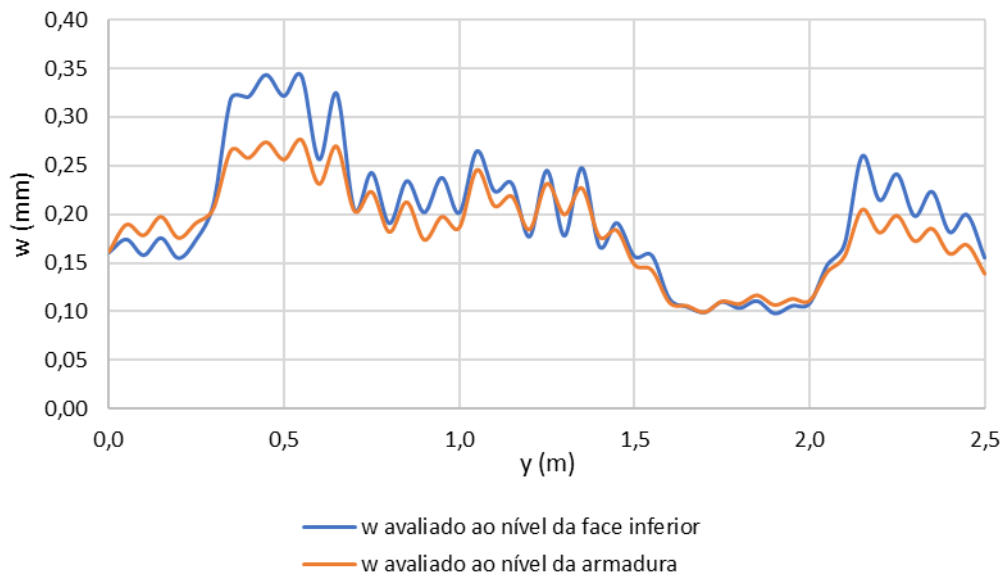


Fig. 5.43 – Variação da abertura da fenda em destaque na Fig. 5.42.

## 5.5. COMPARAÇÃO ENTRE AS ANÁLISES EM SERVIÇO COM DIFERENTES GRAUS DE RESTRIÇÃO AXIAL

### 5.5.1. ESFORÇOS AXIAIS

Foram obtidos os diagramas de esforço axial na laje, no final da análise, que resulta do efeito da restrição à deformação por retração, para as análises em serviço com diferentes graus de restrição axial. Estes esforços foram calculados através das reações de apoio na extremidade fixa da laje, e são apresentados

na Fig. 5.44. É possível observar que os esforços de compressão mais elevados se encontram na zona próxima ao pilar e que o esforço axial atuante na laje aumenta conforme aumenta-se o grau de restrição axial da laje, como era esperado. A figura apresenta também, a tracejado, o valor médio do esforço axial ao longo da largura da laje. Conforme seria de esperar, o valor médio é próximo de zero para a situação da laje não restringida.

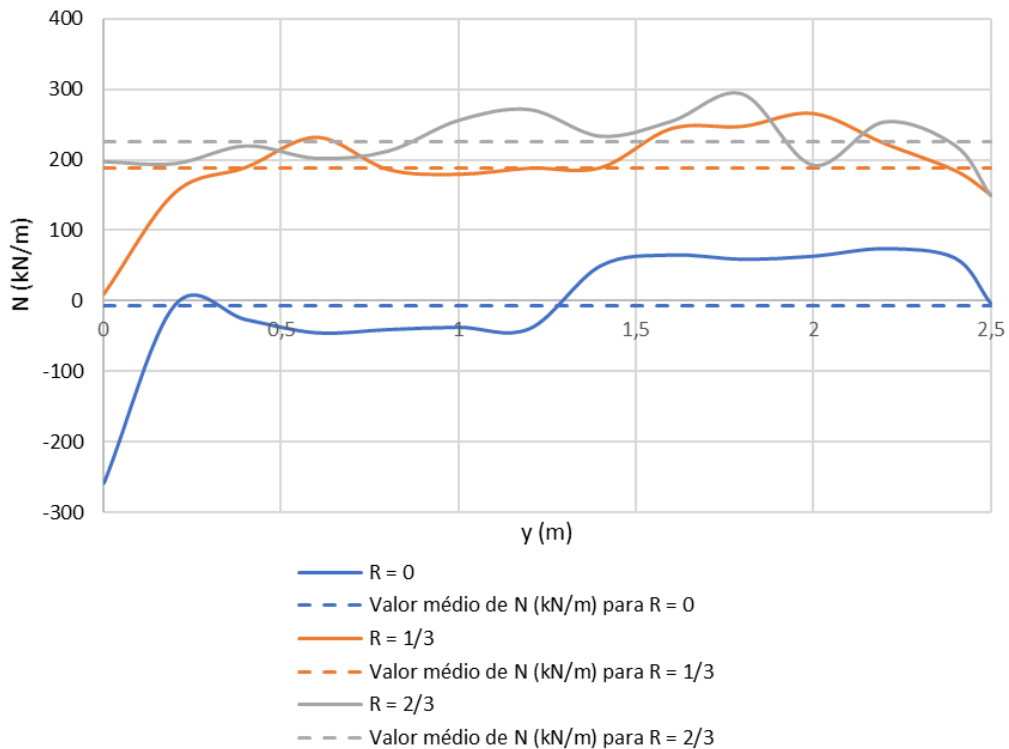


Fig. 5.44 – Diagrama de esforço axial instalado na laje nas análises com diferentes graus de restrição axial, no final da análise.

### 5.5.2. GRAU DE RESTRIÇÃO AXIAL EFETIVO ( $R_{EFF}$ )

$R$  é o grau de restrição axial utilizado para quantificar a rigidez da restrição à deformação axial introduzida no modelo e foi calculado através de uma abordagem simplificada, não considerando fissuração na laje. A ocorrência de fissuração faz com que o encurtamento da laje não seja igual ao encurtamento imposto, na análise com  $R = 0$ , porque as fendas de flexão contribuem para aumentar o comprimento da estrutura. Nas análises com um apoio elástico para simular a restrição axial, a fissuração contribui também para que o movimento das extremidades da laje seja inferior do que aquele previsto na quantificação da rigidez do apoio elástico. Isto é, o efeito da fissuração faz com que o grau de restrição efetivo seja superior ao valor de  $R$  referido na quantificação de  $K_R$ .

Por isso, é feita a análise da deformação média da laje, obtida nas análises não-lineares em serviço, para calcular os graus de restrição efetivos, correspondentes a essas deformações médias, que são determinados a partir da seguinte equação:



$$R_{eff}(t) = 1 - \frac{\left| \frac{\Delta L(t)}{L} \right|}{\varepsilon_{cs}(t)} \quad (5.1)$$

em que:

- $R_{eff}$  é o grau de restrição axial efetivo, a calcular;
- $\Delta L(t)$  é o encurtamento da laje, obtido na análise não-linear, no instante de tempo  $t$ ;
- $L$  é o comprimento da laje;
- $\varepsilon_{cs}(t)$  é a extensão de retração (deformação imposta), no instante de tempo  $t$ .

Na Fig. 5.45 estão apresentadas as curvas do grau de restrição axial efetivo,  $R_{eff}$ , ao longo do tempo para as análises em serviço da estrutura com diferentes graus de restrição axial,  $R$ .

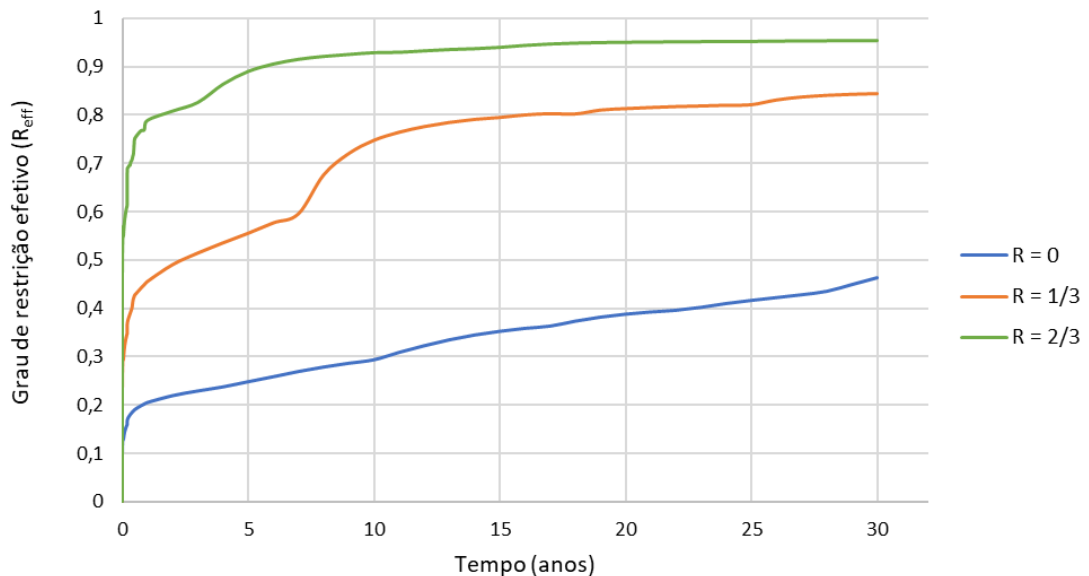


Fig. 5.45 – Graus de restrição axial efetivos ao longo do tempo para as análises em serviço da estrutura.

Estas curvas dos graus de restrição axial efetivos ao longo do tempo confirmam o esperado, conforme explicado no subcapítulo 2.1, sendo possível observar o aumento do grau de restrição axial, principalmente para  $R = 1/3$  e  $R = 2/3$  devido aos efeitos da fissuração.

O grau de restrição efetivo começa em valores próximos dos de referência ( $R = 1/3$  e  $R = 2/3$ ) para  $t = 0$ . À medida que o tempo aumenta, o nível de fissuração na laje aumenta também, e, conseqüentemente, o grau de restrição efetivo aumenta. No final da análise, os graus de restrição efetivos obtidos para as análises legendadas com  $R = 1/3$  e  $R = 2/3$  são próximos entre si, e não diferem significativamente de  $R_{eff} = 1$ .



# 6

## COMPARAÇÃO ENTRE ANÁLISES NÃO-LINEARES E MÉTODOS SIMPLIFICADOS DE ANÁLISE

### 6.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas as comparações entre os momentos fletores obtidos nas análises não-lineares sob carregamento monotonicamente crescente e no método do pórtico equivalente, assim como as aberturas de fendas calculadas por métodos simplificados de análise, utilizando as formulações do MC2010 (fib, 2013) e EC2 (CEN, 2010), e as obtidas a partir das análises não-lineares. São apresentadas, também, as comparações entre os esforços axiais obtidos nas análises não-lineares da estrutura em serviço e através do método baseado no ábaco de Fehling e Leutbecher (2003) e do método de Câmara e Luís (2006b).

### 6.2. MOMENTOS FLETORES

Foram analisados os momentos fletores, apresentados na Fig. 6.2, obtidos na análise não-linear sob carregamento monotonicamente crescente, para as cargas de ELS e ELUR, com a armadura dimensionada para ELS, distribuídos ao longo das *composed lines*, indicadas na Fig. 6.1. As *composed lines* são uma ferramenta disponibilizada pelo software DIANA para, em modelos com elementos finitos sólidos, serem calculados os esforços ao longo da linha. Através desta ferramenta, é automaticamente calculado no DIANA o esforço (momento fletor, esforço axial ou esforço transversal) por integração das tensões numa secção transversal perpendicular ao eixo da *composed line*. Para isso, o utilizador define a área da secção transversal, fazendo o DIANA a integração das tensões nos elementos finitos dentro dessa secção transversal. Os resultados apresentados a seguir foram obtidos para *composed lines* cuja secção transversal tem uma largura de 0,25 m e uma altura igual à espessura da laje.

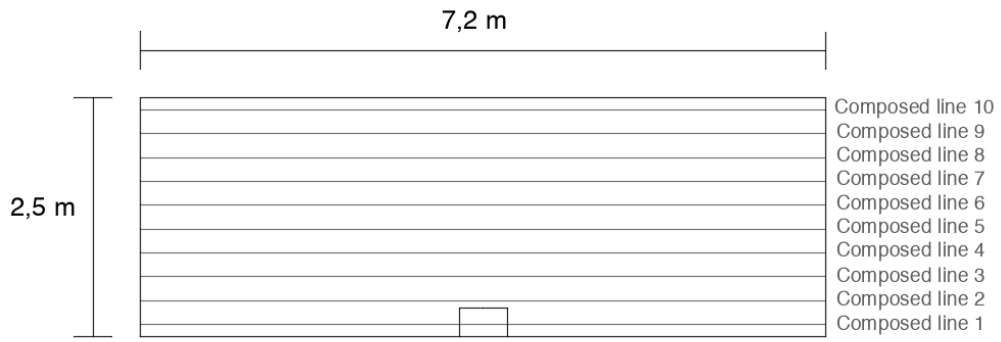
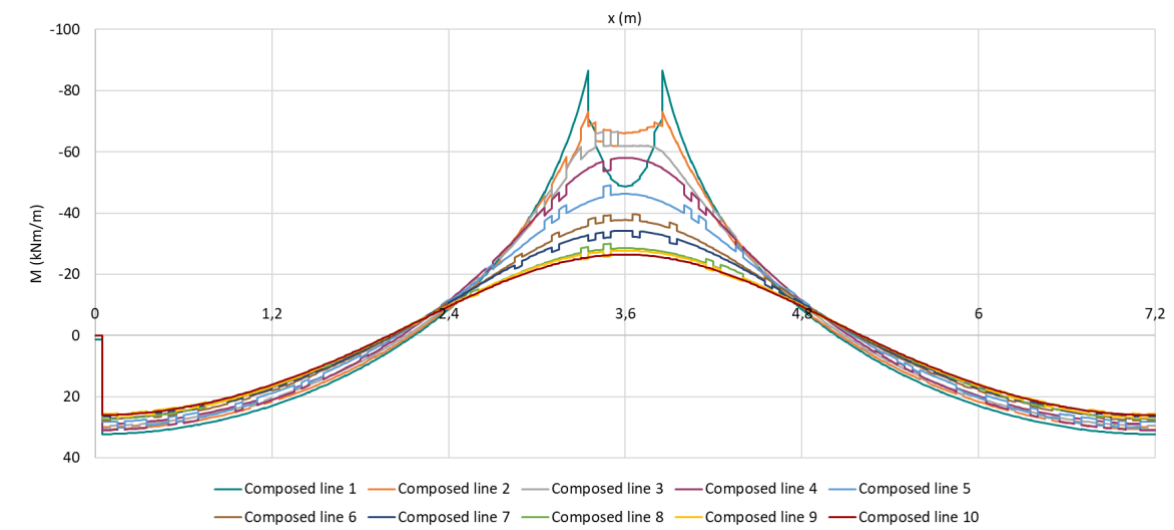
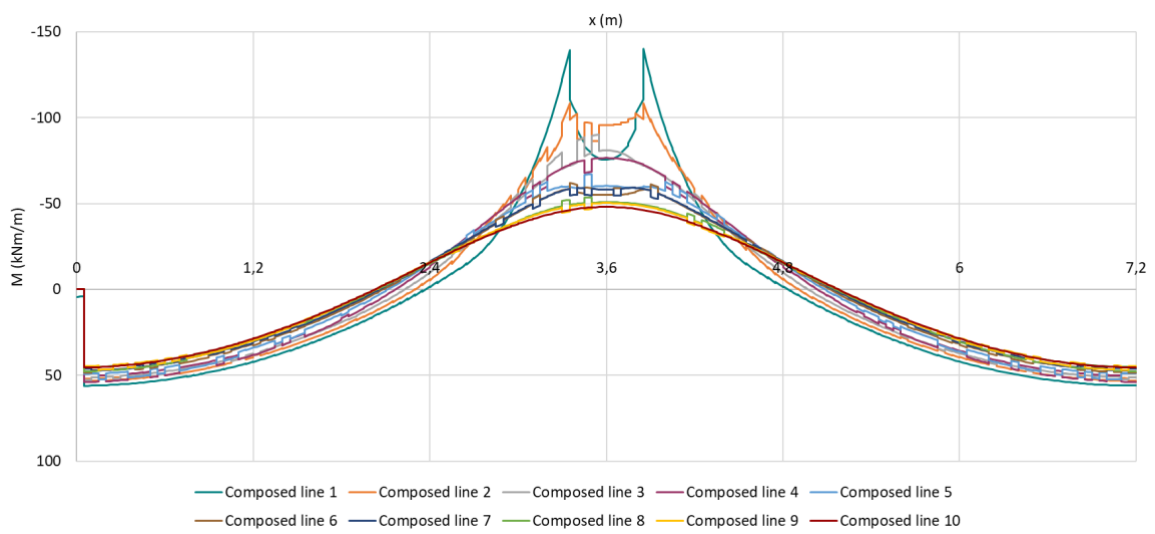


Fig. 6.1 – Distribuição das composed lines consideradas ao longo da laje, numa vista em planta.



a)



b)

Fig. 6.2 – Diagrama de momentos ao longo das composed lines para as cargas de: a) ELS; b) ELUR.

Observa-se que os maiores momentos fletores negativos se encontram junto à face do pilar, por isso, a comparação dos momentos fletores obtidos através das análises não-lineares com os momentos fletores obtidos pelo método do pórtico equivalente será feito para os eixos indicados na Fig. 6.3, zonas de momentos fletores máximos. Os resultados dos momentos fletores para a carga de ELS estão apresentados na Fig. 6.4 e para a carga de ELUR estão apresentados na Fig. 6.5.

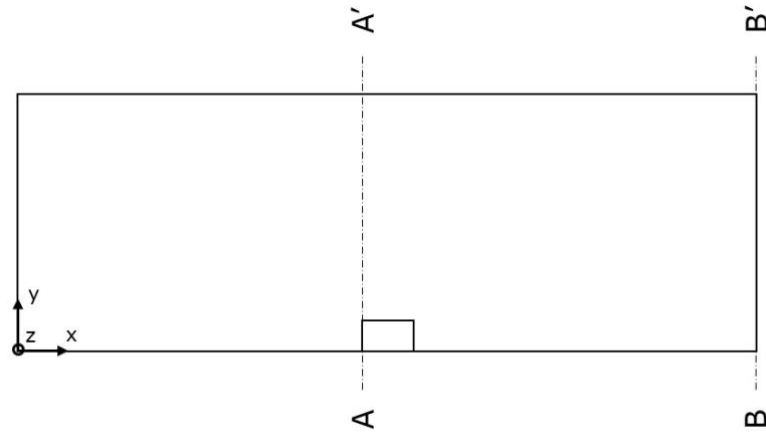
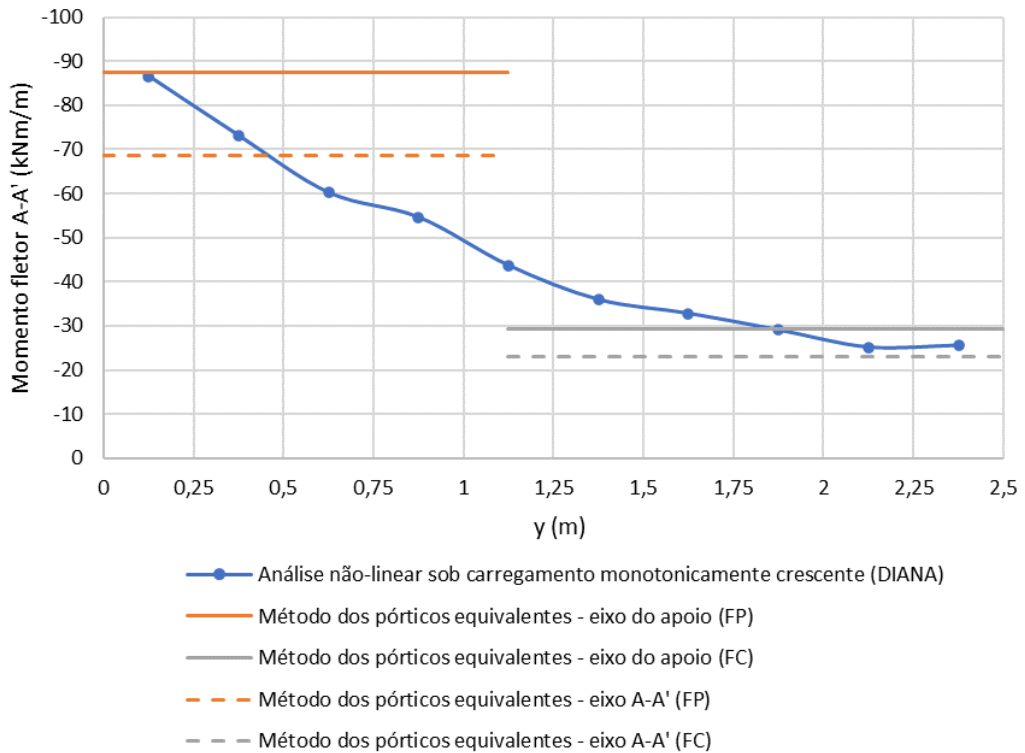
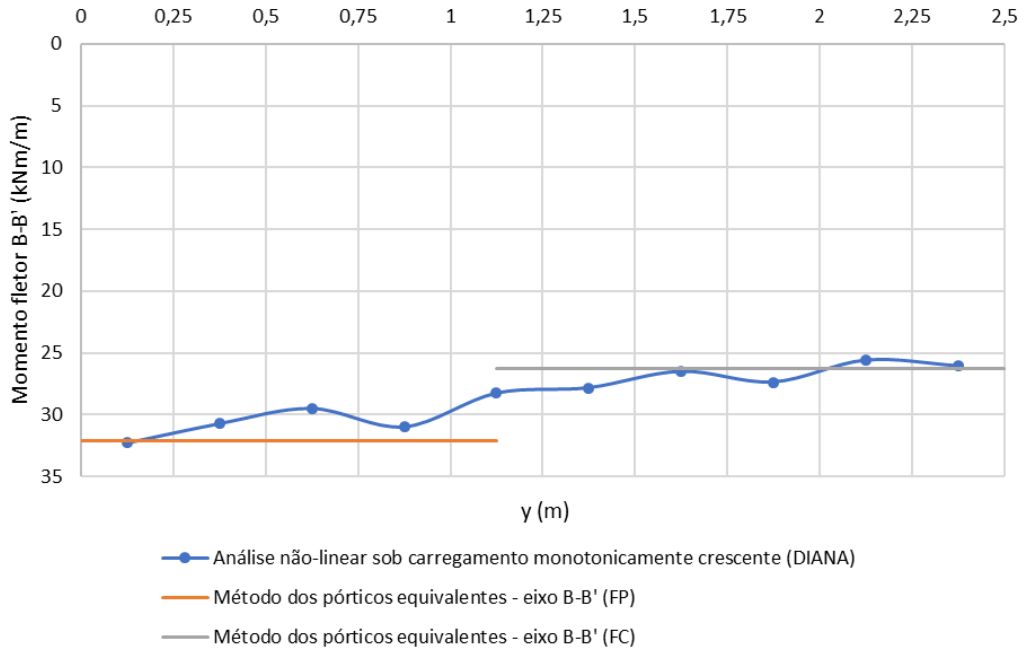


Fig. 6.3 – Eixos considerados para avaliação dos momentos fletores na laje.

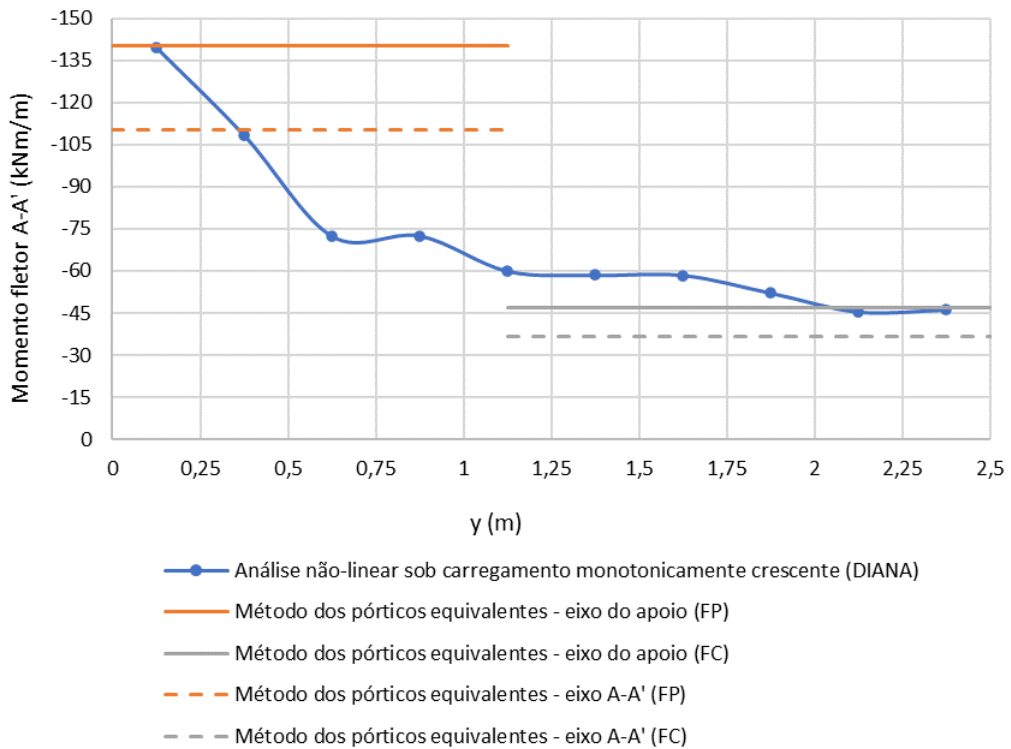


a)

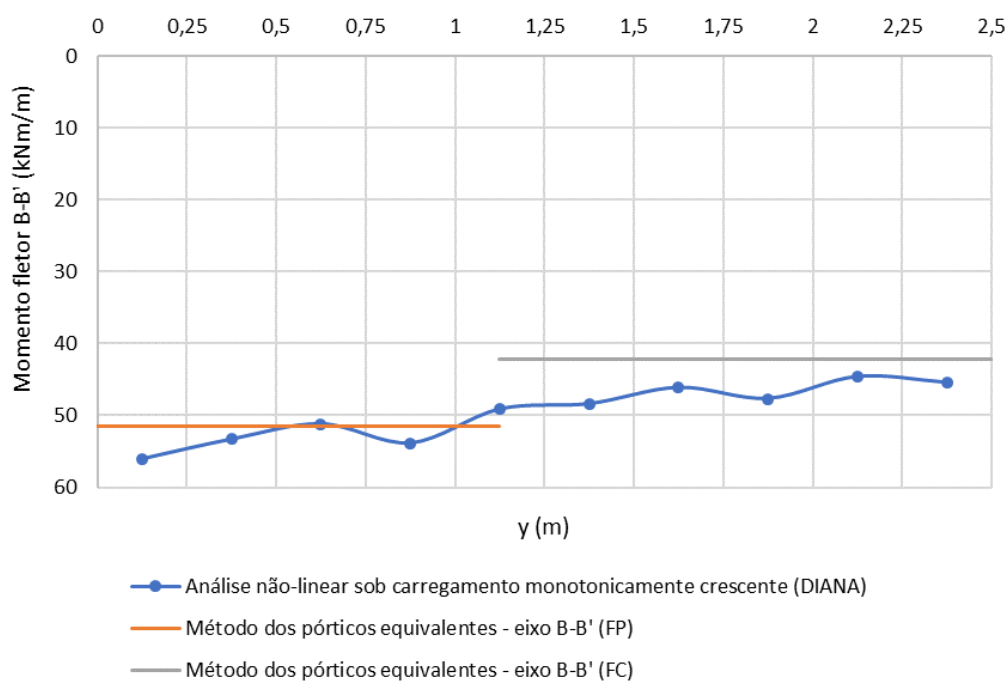


b)

Fig. 6.4 – Momentos fletores para a carga de ELS para os eixos: a) eixo A-A'; b) eixo B-B'.



a)



b)

Fig. 6.5 – Momentos fletores para a carga de ELUR para os eixos: a) eixo A-A'; b) eixo B-B'.

A Tabela 6.1 apresenta a comparação da soma dos momentos obtidos em cada *composed line*, para as cargas de ELS e ELUR e para ambos os eixos, com os momentos calculados manualmente pelo método do pórtico equivalente, observando-se valores relativamente próximos. Esta comparação entre os resultados fornecidos pelos dois métodos de análise foi realizada com o objetivo principal de validar os procedimentos usados na análise não linear. Sendo os momentos resultantes bastante parecidos (quer a meio vão, quer à face do apoio), consideram-se validados os resultados.

Se, em vez de se comparar os resultados numa determinada secção transversal (eixo A-A' ou eixo B-B'), forem comparados os valores da diferença entre o momento positivo e o momento negativo (última linha na Tabela 6.1), observa-se ainda uma maior concordância entre o resultado da análise não-linear e o valor obtido pelo método do pórtico equivalente, o que constitui uma validação adicional dos resultados.

Observando na tabela os resultados para o momento fletor negativo com a carga de ELUR, verifica-se que o resultado da análise não-linear corresponde a uma redistribuição do momento fletor negativo igual a  $(183,6 - 178,3) / 183,6 = 0,029$ , isto é, 2,9%. Esta é a redistribuição em relação ao resultado da análise linear elástica considerada no método do pórtico equivalente. Trata-se de uma pequena redistribuição, porque, para a quantidade de armadura considerada na análise não-linear, não ocorre cedência das armaduras para este valor de carga.

Tabela 6.1 – Valores de momentos obtidos pelo DIANA e pelo método do pórtico equivalente.

	Carga de ELS		Carga de ELUR	
	Momento obtido pelo DIANA (kNm)	Momento calculado pelo método do pórtico equivalente (kNm)	Momento obtido pelo DIANA (kNm)	Momento calculado pelo método do pórtico equivalente (kNm)
Eixo A-A'	-116,6	-114,4	-178,3	-183,6
Eixo B-B'	71,3	72,9	124,0	117,0
Diferença	187,9	187,3	302,3	300,6

### 6.3. ABERTURA DE FENDAS

Para a fenda em análise no subcapítulo 5.2, foram calculados os valores das aberturas de fendas, com base no MC2010 (fib, 2013) e EC2 (CEN, 2010), a partir das tensões nas armaduras, obtidas na análise não-linear, e comparados com os valores já calculados anteriormente pelos diferentes métodos de avaliação. Os resultados estão apresentados na Fig. 6.6.

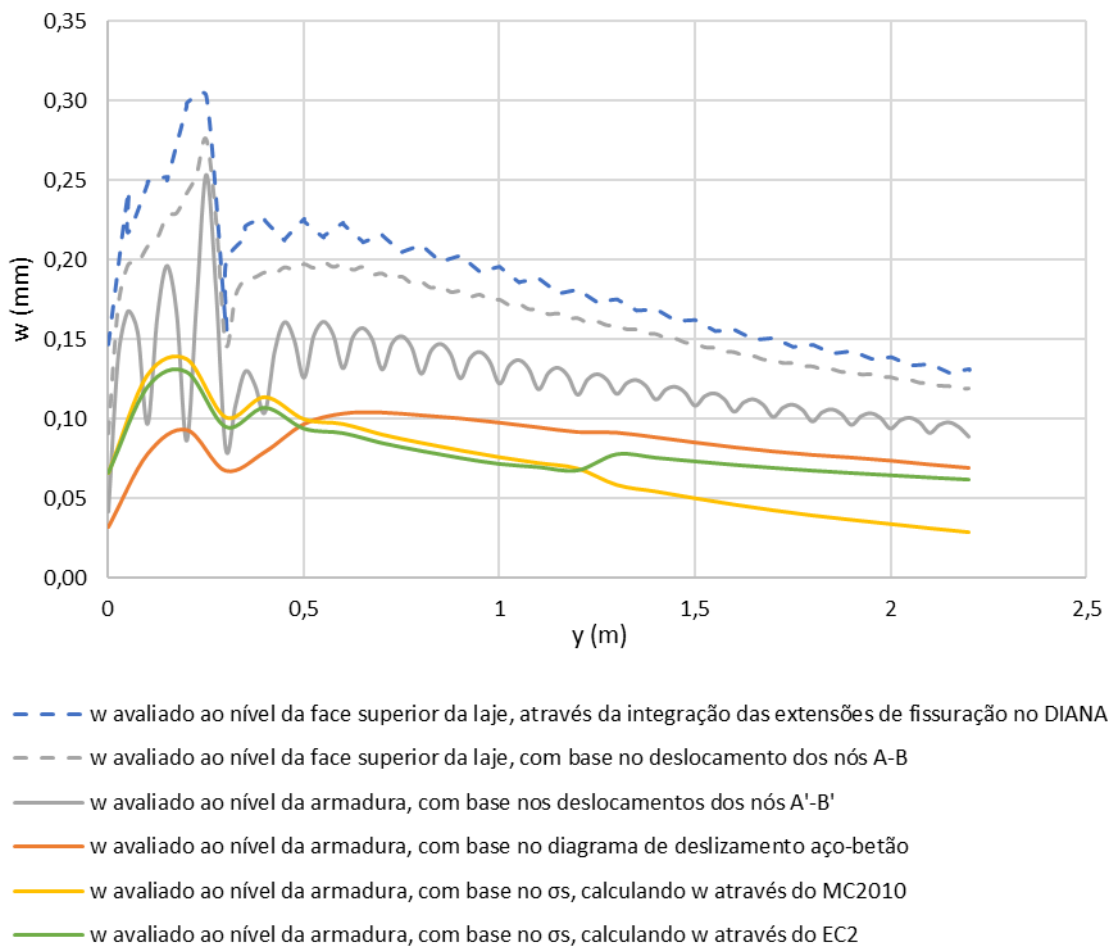


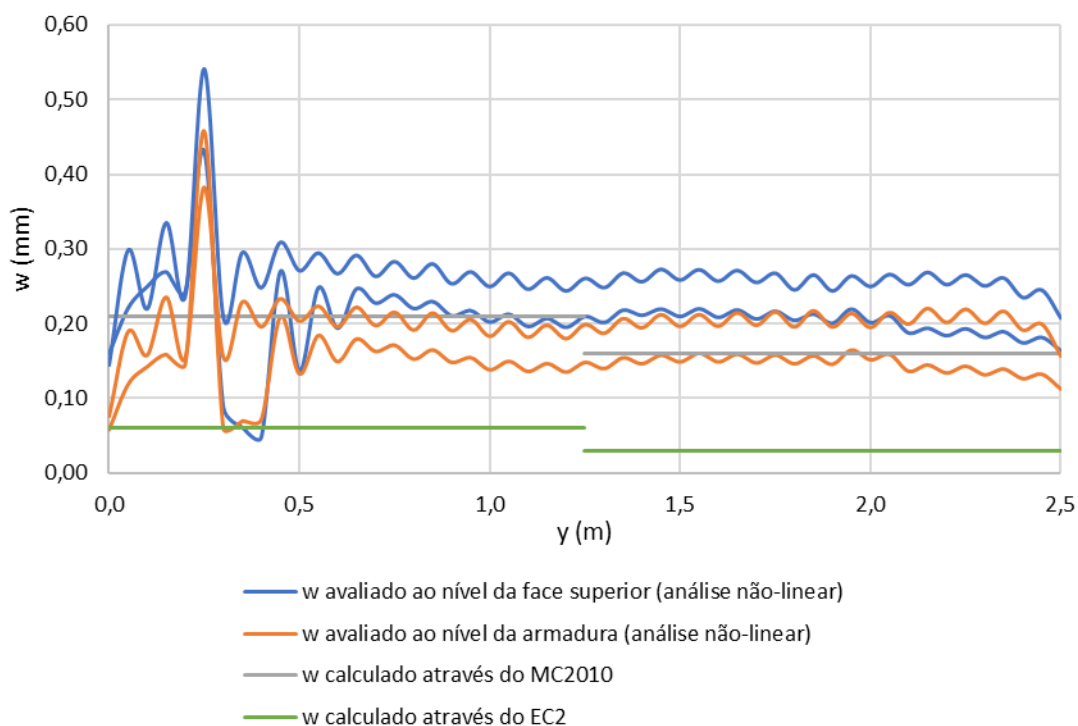
Fig. 6.6 – Comparação da abertura de fenda, em função de y, obtida pela análise não-linear e por métodos simplificados de análise.



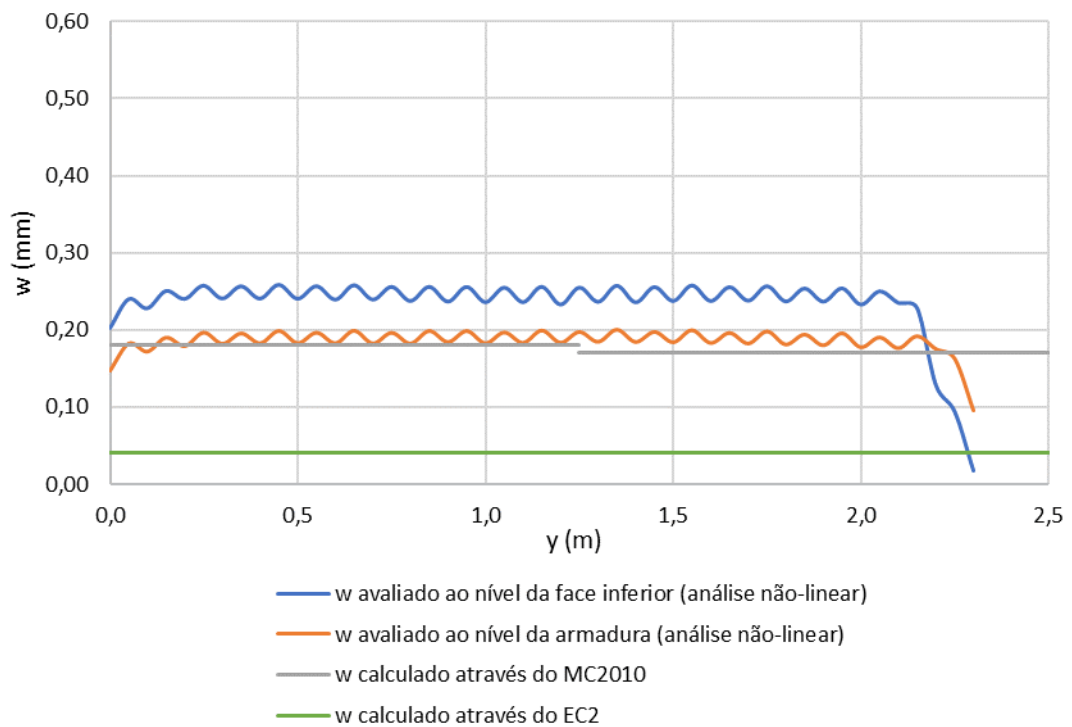
Observa-se que, na zona de valores máximos de aberturas de fendas, os resultados obtidos pelos diferentes métodos de avaliação com base no modelo de elementos finitos e pelos métodos simplificados de análise são relativamente próximos.

Para este caso, as diferenças entre os valores das aberturas de fendas obtidas através do MC2010 (fib, 2013) e EC2 (CEN, 2010) não são muito grandes, principalmente nas zonas de aberturas de fendas máximas, nas zonas próximas ao pilar, mas as análises não-lineares do comportamento em serviço da estrutura apresentarão valores mais discrepantes entre estes dois métodos de avaliação, porque, neste caso, serão considerados os efeitos da retração.

Os resultados das aberturas de fendas para a análise não-linear em serviço e métodos simplificados de análise da estrutura não restringida ( $R = 0$ ) estão apresentados na Fig. 6.7. Para o cálculo da abertura de fenda pelo MC2010 (fib, 2013) e EC2 (CEN, 2010) foram utilizados os momentos fletores obtidos através do método do pórtico equivalente para a posição em questão e um esforço axial obtido com recurso à Fig. 3.5. As fendas analisadas foram as mesmas apresentadas no subcapítulo 5.3, e os resultados aqui apresentados referem-se ao final da análise.



a)

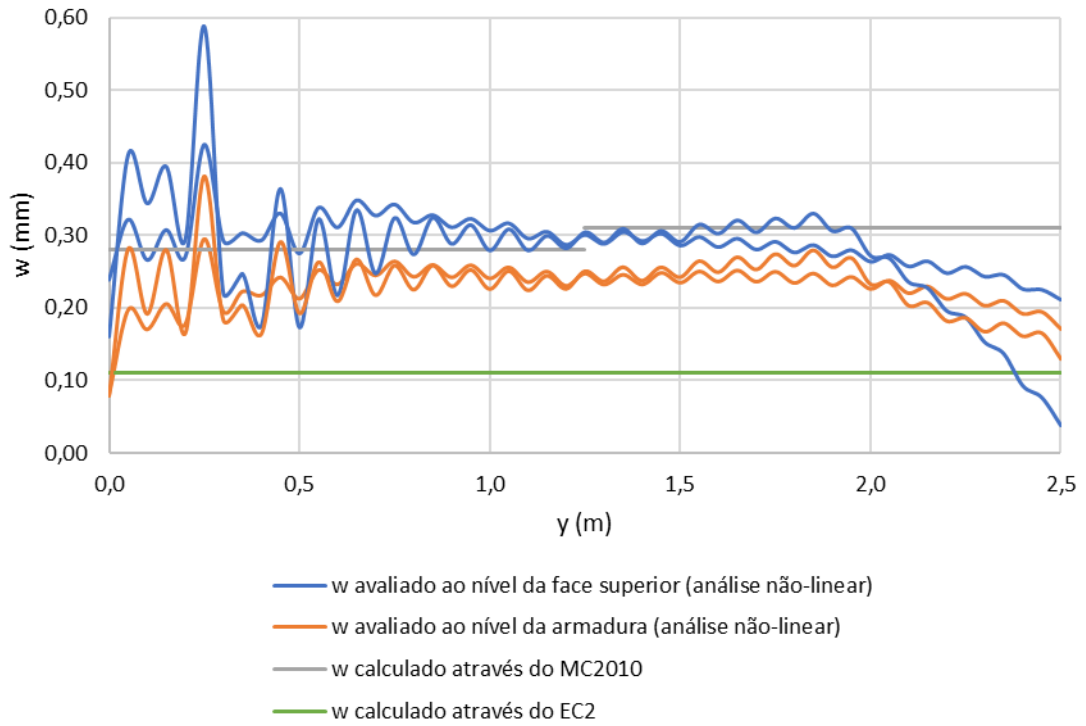


b)

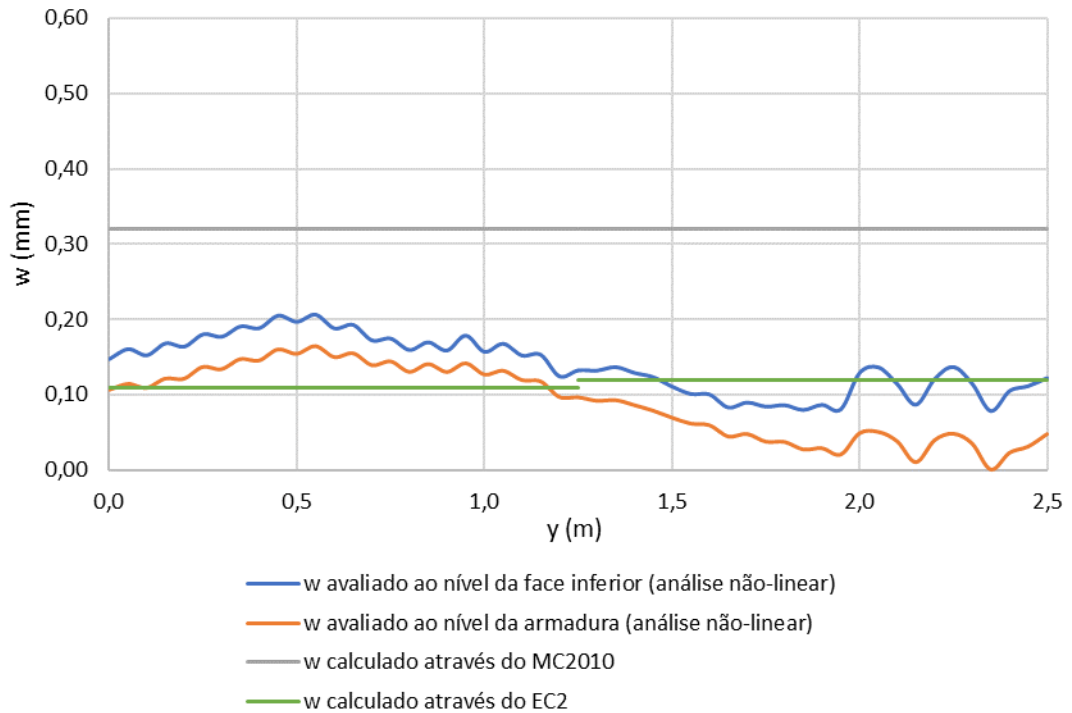
Fig. 6.7 – Comparação da abertura de fenda, em função de  $y$ , obtida pela análise não-linear e por métodos simplificados de análise, para diferentes posições da estrutura não restringida ( $R = 0$ ): a) face superior da laje; b) face inferior da laje.

Nota-se que os resultados para o EC2 (CEN, 2010) são muito inferiores aos resultados para o MC2010 (fib, 2013), porque no cálculo da abertura de fendas a partir do EC2 (CEN, 2010) não está incluída a extensão por retração,  $\epsilon_{cs}$ , tornando os resultados menos coerentes com os obtidos nas análises não-lineares.

Foram feitas as mesmas comparações para as aberturas de fendas obtidas na análise não-linear em serviço e nos métodos simplificados de análise da estrutura restringida. Os resultados estão apresentados na Fig. 6.8 e na Fig. 6.9, para a estrutura com  $R = 1/3$  e  $R = 2/3$ , respetivamente. A abertura de fenda foi avaliada nas fendas que foram apresentadas no subcapítulo 5.4.

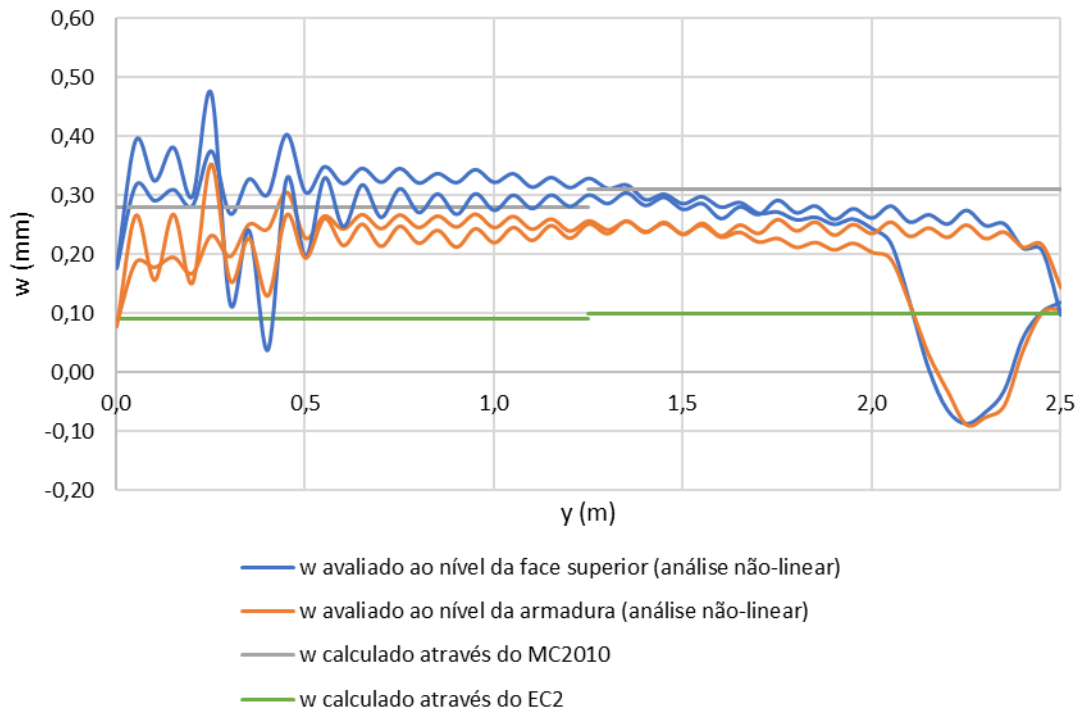


a)

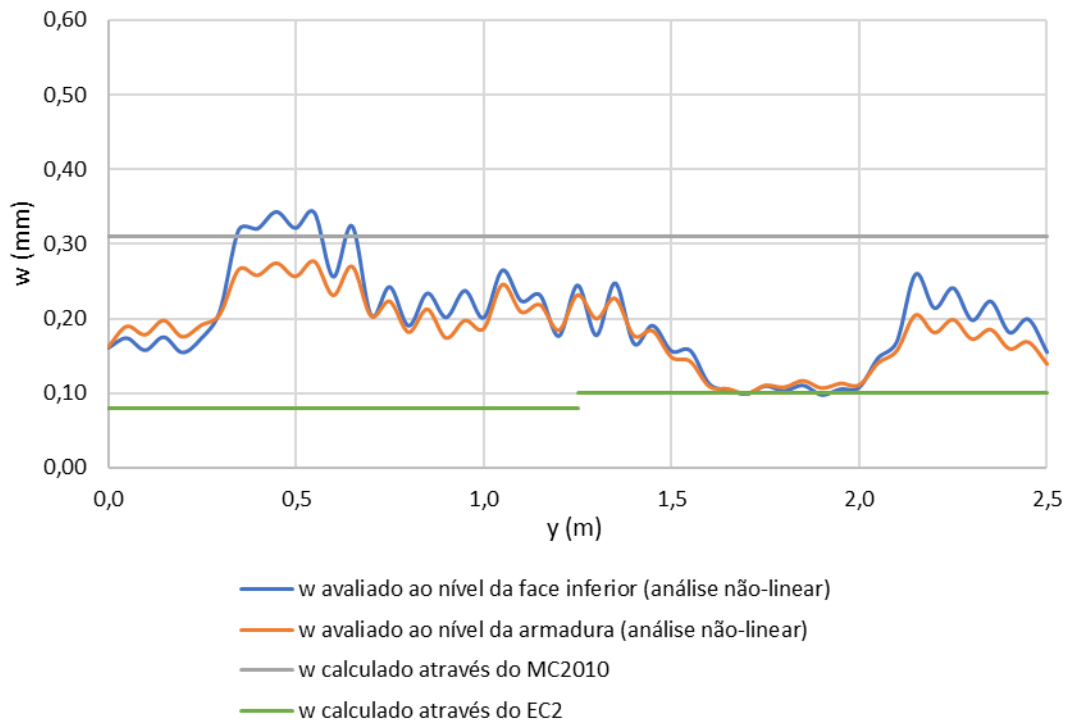


b)

Fig. 6.8 – Comparação da abertura de fenda, em função de  $y$ , obtida pela análise não-linear e por métodos simplificados de análise, para diferentes posições da estrutura restringida ( $R = 1/3$ ): a) face superior da laje; b) face inferior da laje.



a)



b)

Fig. 6.9 – Comparação da abertura de fenda, em função de  $y$ , obtida pela análise não-linear e por métodos simplificados de análise, para diferentes posições da estrutura restringida ( $R = 2/3$ ): a) face superior da laje; b) face inferior da laje.

Os resultados previstos pelo MC2010 (fib, 2013), através de métodos simplificados de análise, apresentam uma aproximação em relação aos obtidos através de análises não-lineares, excepto nas zonas de picos de aberturas de fendas.

Como já citado anteriormente, pelo facto do EC2 (CEN, 2010) não incluir a extensão por retração,  $\epsilon_{cs}$ , no cálculo da abertura de fendas, os resultados previstos com a sua utilização, através de métodos simplificados de análise, resultaram em valores inferiores aos obtidos pelas análises não-lineares.

#### 6.4. ESFORÇOS AXIAIS

Na Fig. 6.10 estão apresentados os diagramas de esforço axial no final da análise da estrutura em serviço e os valores dos esforços axiais obtidos através do método baseado no ábaco de Fehling e Leutbecher (2003) e do método de Câmara e Luís (2006b), que apresentaram valores superiores aos obtidos nas análises da estrutura em serviço.

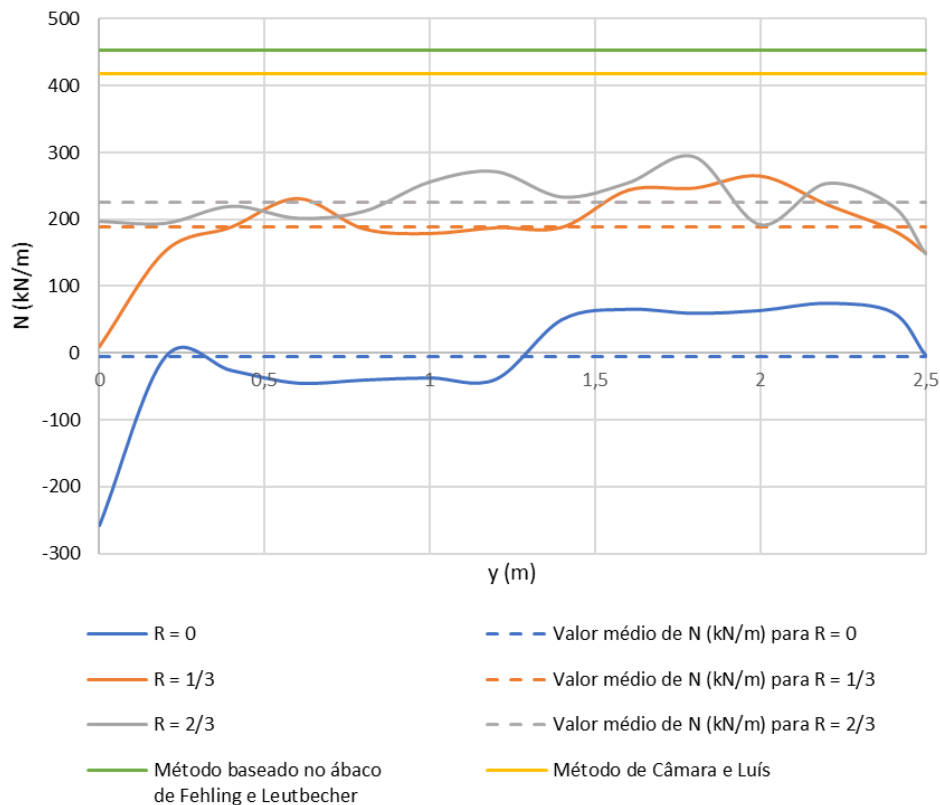


Fig. 6.10 – Comparação entre os valores de esforços axiais obtidos no final das análises não-lineares da estrutura em serviço e através do método baseado no ábaco de Fehling e Leutbecher (2003) e do método de Câmara e Luís (2006b).



# 7

## CONCLUSÕES

### 7.1. CONCLUSÕES GERAIS

A presente dissertação tem como principal objetivo o estudo do comportamento estrutural de lajes fungiformes maciças restringidas axialmente que, em serviço, estão sujeitas aos efeitos das cargas gravíticas e de esforços axiais devido à restrição das deformações impostas. Estes efeitos provocam o aumento das tensões de tração no betão, ocasionando fissuras caso as tensões ultrapassem a resistência à tração do betão, devendo ser feito um dimensionamento adequado das armaduras para controlo da fissuração.

Nesse sentido foram, em primeiro lugar, apresentadas as características geométricas, ambientais e dos materiais utilizados na estrutura em análise, assim como as ações atuantes e o faseamento construtivo. De seguida foi feito o dimensionamento das armaduras dos elementos estruturais, para ELUR e ELS, baseado em métodos simplificados de análise, considerando que a laje estava totalmente restringida na direção longitudinal e não restringida na direção transversal.

Em seguida, apresenta-se o modelo da estrutura, utilizado nas análises não-lineares realizadas no software DIANA (2020), descrevendo-se as malhas de elementos finitos, apoios e ações consideradas. Apresentam-se, também, os modelos que foram usados para simular o comportamento dos materiais e da ligação aço-betão e os métodos utilizados para determinar a abertura de fendas nestas análises.

Foram apresentados, então, os resultados das análises não-lineares da estrutura sob carregamento monotonicamente crescente e em serviço, com diferentes graus de restrição axial, podendo-se observar o comportamento estrutural desta tipologia de laje sob as diferentes situações de restrição.

Foi possível verificar que as análises feitas com apoios elásticos com rigidezes diferentes apresentaram resultados próximos para os graus de restrição axial efetivos. Com isso, pode-se concluir que, mesmo que não se saiba exatamente qual é a rigidez dos elementos que conferem a restrição à deformação axial da laje, o projetista pode considerar, neste tipo de estrutura restringida, que se tem um grau de restrição axial efetivo bastante elevado ou até mesmo próximo de se considerar  $R = 1$ .

Na análise não-linear da estrutura sem apoios elásticos, obteve-se um esforço axial instalado na laje próximo de zero, conforme esperado. Nas análises não-lineares da estrutura com apoios elásticos de rigidezes quantificadas a partir de graus de restrição axial  $R = 1/3$  e  $R = 2/3$ , obtiveram-se esforços axiais instalados na laje de ~22% e ~26% do esforço axial de fissuração, respetivamente. Estes esforços são inferiores quando comparados com o método desenvolvido por Fehling e Leutbecher (2003), baseado no ábaco apresentado na Fig. 3.5, que resultou um esforço axial igual a 52% do esforço axial de fissuração e com o método de Câmara e Luís (2006b), com um esforço axial de 48% do esforço axial de fissuração. Isto porque, por causa do efeito da restrição interna à deformação do betão devido à

quantidade elevada de armadura que foi considerada, houve muita fissuração no modelo, diminuindo o esforço axial instalado na laje. Vale ressaltar que nas análises foi considerada uma quantidade elevada de armadura, porque foi a obtida a partir do método simplificado considerando a formulação do MC2010 (fib, 2013) para o cálculo da abertura de fendas.

A partir das análises feitas no software DIANA verificou-se que, para a laje analisada neste estudo, a formulação do EC2 (CEN, 2010) para a estimativa da abertura de fendas resultou em valores inferiores comparativamente com os resultados obtidos através das análises não-lineares, já o MC2010 (fib, 2013) forneceu aberturas de fendas próximas à estes resultados, mesmo não tendo em conta o fator  $(h - x)/(d - x)$  para se obter o valor da abertura de fenda ao nível das fibras de betão extremas mais tracionadas.

## **7.2. DESENVOLVIMENTOS FUTUROS**

No seguimento do estudo realizado e, também, levando em consideração alguns aspetos que não foram abordados na presente dissertação, os futuros trabalhos deverão envolver:

- Realizar outra análise não-linear da mesma laje em estudo, mas com uma menor quantidade de armadura, como, por exemplo, a armadura obtida no dimensionamento através de métodos simplificados de análise para ELS através do EC2 (CEN, 2010). Dessa forma, será possível verificar a influência da quantidade de armadura sobre a abertura de fendas obtida na análise não-linear. A abertura de fendas obtida neste estudo é muito condicionada pela extensão de retração do betão porque, ao longo do comprimento de transferência, onde há deslizamento entre o aço e o betão, o betão encurta por retração, contribuindo para a abertura de fendas. Sendo que este aspeto não é algo que depende muito da quantidade de armadura utilizada na laje;
- Fazer observações em obras reais desta tipologia de laje, após a ocorrência da deformação por retração do betão, verificando, dessa forma, a abertura de fendas, a longo prazo, existentes em uma laje fungiforme maciça real. E calcular a abertura de fendas obtida em uma análise não-linear de um modelo numérico ou através do método do pórtico equivalente, utilizando as formulações do MC2010 (fib, 2013) ou EC2 (CEN, 2010) para a abertura de fendas, de forma a se obter a comparação entre resultados experimentais e de análises não-lineares ou métodos simplificados de análise, para se confirmar qual é o modelo de cálculo da abertura de fendas que está mais adequado para as lajes maciças fungiformes;
- Avaliar os efeitos estruturais, nesta tipologia de laje, das variações de temperatura nas primeiras idades resultantes do calor de hidratação do cimento.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azenha, M., Sousa, C., Granja, J., Faria, R., Zahabizadeh, B. (2019). *Reinforcement design for the combined effect of restrained shrinkage and applied loads in slabs: a design challenge*. International Conference on Sustainable Materials, Systems and Structures (SMSS 2019) - Challenges in Design and Management of Structures. 20-22 March 2019, Rovinj, Croatia.

Azenha, M., Sousa, C., Zahabizadeh, B., Granja, J., Faria, R. (2017). *Design challenge for reinforcement in a highly restrained slab*. In: Design of reinforcement for RC elements under the combined effect of applied loads and restrained shrinkage - Seminar. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.800693>. May 19, Porto, Portugal.

Câmara, J., Luís, R. (2006a). *Imposed Deformation Effects on Slabs and Walls to Control Cracking: Non Linear Analysis and Design Criteria*. European Symposium on Service Life and Serviceability of Concrete Structures, ESCS-2006, June 2006. Helsinki, Finland.

Câmara, J., Luís, R. (2006b). *Structural Response and Design Criteria for Imposed Deformations Superimposed to Vertical Loads Effects*. Fédération Internationale du Béton, Proceedings of the 2nd International Congress, Session 3 - Modelling and design. June 5-8, 2006, Naples, Italy.

Carvalho, J. F. de (2013). *Estudo da Fendilhação em lajes restringidas, devida ao efeito conjunto da retração e das ações distribuídas no piso*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Casal, A. I. C. (2013). *O Efeito das Deformações Impostas em Edifícios com Dimensões Significativas em Planta: Análise de Pilares e/ou Paredes de Alvenaria*. Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico da Universidade de Lisboa.

CEN, Comité Européen de Normalisation (2009). *Eurocódigo - Bases para o projecto de estruturas*.

CEN, Comité Européen de Normalisation (2010). *Eurocódigo 2 - Projecto de estruturas de betão - Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios*.

Costa, A., Appleton, J. (2002). *Estruturas de Betão I - Parte II - Materiais*. Instituto Superior Técnico.

DIANA, Finite Element Analysis (2020). *DIANA User's Manual release 10.4*. Delft, The Netherlands, TNO Building and Construction Research Institute. Department of Computational Mechanics.

Fehling, E., Leutbecher, T. (2003). *Beschränkung der Rissbreite bei kombinierter Beanspruchung aus Last und Zwang*, Beton- und Stahlbetonbau 98 (2003), Vol. 7, S. 377, Verlag Ernst & Sohn.

fib, Fédération Internationale du Béton (2013). *fib Model Code for Concrete Structures 2010*. Ernst & Sohn, Berlin, Germany.

fib, Fédération Internationale du Béton (2019). *Serviceability Limit State of Concrete Structures*. Bulletin n° 92.

Gilbert, R. I., Ranzi, G. (2011). *Time-Dependent Behaviour of Concrete Structures*. Spon Press, USA and Canada.

Gomes, J. G., Granja, J., Sousa, C., Zahabizadeh, B., Faria, R., Schlicke, D., Azenha, M. (2020a). *A new test setup for simulation of the combined effect of bending and axial restraint in slab-like specimens*. Engineering Structures, Volume 225, 15/12/2020.

Gomes, J., Carvalho, R., Sousa, C., Granja, J., Faria, R., Schlicke, D., Azenha, M. (2020b). *3D numerical simulation of the cracking behaviour of a RC one-way slab under the combined effect of*

*thermal, shrinkage and external loads*. Engineering Structures, Volume 212, 01/06/2020, Elsevier. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110493>.

Kwak, H. G., Filippou, F. C. (1990). *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads*. Report n° UCB/SEMM-90/14. Structural Engineering, Mechanics and Materials. Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley.

REBAP, Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado. (1983). Decreto-Lei n.º 349-C/83.

Rots, J. G., Nauta, P., Kusters, G. M. A., Blaauwendraad, J. (1985). *Smearred Crack Approach and Fracture Localization in Concrete*. The Netherlands: Delft University of Technology.

Schlicke, D., Viet Tue, N., Gomes, J., Sousa, C., Azenha, M. (2020) *Analytical assessment of restraint forces and crack widths in end-restrained building slabs*. Engineering Structures, Volume 224. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111218>.

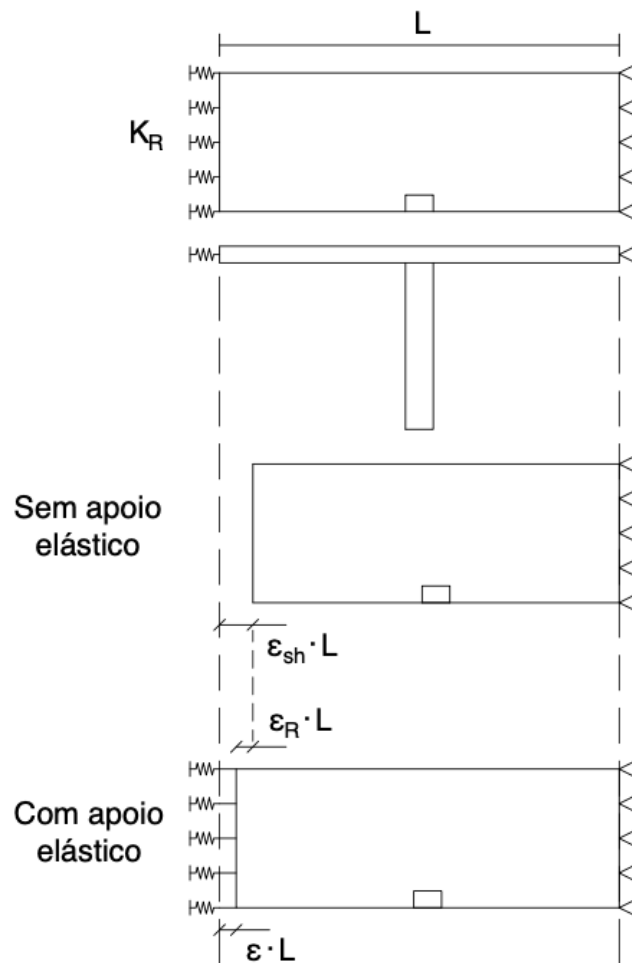
Sousa, C. (2012). *Analysis of cyclic and long-term effects in continuous precast railway bridge decks*. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. DOI: 10.13140/RG.2.1.3895.2163.

Sousa, C., Faria, R., Felisberto, E. (2017). *Dimensionamento de armaduras mínimas em lajes restringidas considerando a interação solo-estrutura*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, série III, n.º 5, Novembro 2017, pp. 73-79.

Walther, R., Miehlsbradt, M. (1990). *Dimensionnement des structures en béton - Bases et technologie - Volume 7*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Switzerland.

# **Anexo A**

## **DEDUÇÃO DA RIGIDEZ $K_R$**



A partir da figura tem-se:

$$\varepsilon_{sh} \cdot L = \varepsilon_R \cdot L + \varepsilon \cdot L$$

O grau de restrição axial é dado por:

$$R = \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_{sh}} \Leftrightarrow \varepsilon_R = R \cdot \varepsilon_{sh} \Leftrightarrow \varepsilon = (1 - R) \cdot \varepsilon_{sh}$$

A relação entre o esforço (N) no apoio elástico e a deformação do apoio elástico é:

$$N = K_R \cdot \varepsilon \cdot L$$

A relação entre o esforço (N) na laje e a deformação da laje é:

$$\varepsilon_R \cdot L = \frac{N \cdot L}{E_{c,adj} \cdot A} \Leftrightarrow N = \varepsilon_R \cdot E_{c,adj} \cdot A$$

Então:

$$K_R \cdot \varepsilon \cdot L = \varepsilon_R \cdot E_{c,adj} \cdot A \Leftrightarrow K_R = \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon} \cdot \frac{E_{c,adj} \cdot A}{L} \Leftrightarrow K_R = \frac{R}{1 - R} \cdot \frac{E_{c,adj} \cdot A}{L}$$

em que:

$\varepsilon_{sh}$	é a deformação por retração (deformação imposta);
$\varepsilon_R$	é a deformação restringida;
$\varepsilon$	é a deformação real da laje;
$L$	é o comprimento da laje;
$R$	é o grau de restrição axial;
$N$	é o esforço de tração no apoio elástico e na laje;
$K_R$	é a rigidez do apoio elástico;
$E_{c,adj}$	é o módulo de elasticidade ajustado do betão;
$A$	é a área da secção transversal da laje.