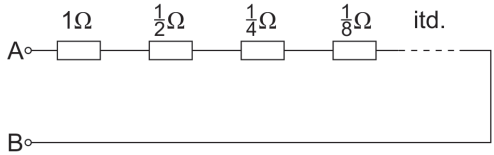
Kącik zadań olimpijskich. Kto bogatemu zabroni?

Wyobraź sobie, że jesteś bardzo bogaty i stać cię na zakup bardzo dużej liczby oporników (rezystorów), nawet nieskończenie wielu. Kupiłeś więc oporniki o oporach: $1\Omega, \frac{1}{2}\Omega, \frac{1}{4}\Omega, \frac{1}{8}\Omega$ itd., każdy kolejny opornik ma opór dwa razy mniejszy od poprzedniego. Następnie połączyłeś wszystkie oporniki szeregowo – tak, jak na poniższym schemacie.



Zadanie polega na tym, aby obliczyć opór zastępczy tego układu pomiędzy punktami A i B.

Na pierwszy rzut oka wydawać by się mogło, że opór zastępczy jest nieskończenie duży. Wiemy bowiem, że w połączeniu szeregowym oporników „opory się dodają", a oporników jest nieskończenie wiele. Jeśli jednak będziemy sukcesywnie obliczać opór zastępczy układu dwóch, potem trzech, następnie czterech itd. oporników zaczynając od lewej strony, to dostaniemy kolejno: 1,5 Ω; 1,75 Ω; 1,875 Ω itd. Widać, że co prawda wartości te rosną, ale dla dowolnej skończonej liczby oporników nie przekroczą 2 Ω, choć do tej wartości dążą. Tak więc dochodzimy do wniosku, że być może opór zastępczy całego układu jest skończony. Aby to formalnie udowodnić, zapiszmy (pomijając jednostkę Ω) wzór na opór zastępczy naszego układu nieskończenie wielu oporników:

$$R_z = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$$

Kropki oznaczają, że sumujemy po nieskończonej liczbie oporników. Sprytna metoda obliczenia tej sumy nieskończenie wielu składników polega na pomnożeniu obu stron tego wyrażenia przez 2, w wyniku czego otrzymujemy

$$2R_z = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

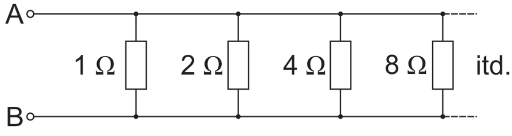
Zauważmy, że wyrażenie po prawej stronie zawiera liczbę 2 oraz identyczną sumę, jaka występuje w poprzednim wzorze. Można więc zastąpić ją niewiadomą R_z:

$$2R_z = 2 + R_z.$$

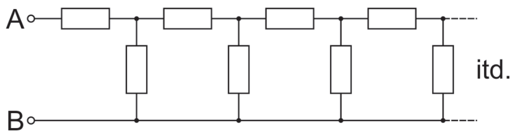
Otrzymaliśmy bardzo proste równanie, którego rozwiązaniem jest liczba 2, tak więc szukany opór zastępczy wynosi 2 Ω. Zadanie rozwiązane!

Zadanie nr 1 dla Czytelnika:

Oblicz opór zastępczy układu nieskończenie wielu oporników o oporach 1 Ω, 2 Ω, 4 Ω, 8 Ω itd. (każdy kolejny opornik ma dwa razy większy opór) połączonych równolegle, jak na schemacie:

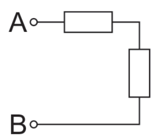


A teraz coś trudniejszego. Dysponujemy nieograniczonym budżetem i (nie wiedzieć po co) zakupiliśmy nieskończenie wiele jednakowych oporników (rezystorów) każdy o oporze równym 1 Ω, które połączyliśmy tak, jak na poniższym schemacie:



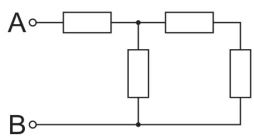
Na rysunku przedstawiono tylko kilka oporników, reszta jest połączona analogicznie tworząc nieskończoną drabinkę. Trzeba obliczyć opór zastępczy tego układu pomiędzy punktami A i B.

Jest to dość skomplikowane, mieszane (szeregowe i równoległe) połączenie oporników. Jak się za to zabrać? Otóż zacznijmy od najprostszej wersji tej „drabinki” – weźmy tylko jeden „szczebel”, czyli dwa pierwsze oporniki po lewej stronie:



Opór zastępczy tego prostego połączenia szeregowego wynosi $R_{z1} = 1 + 1 = 2$ Ω.

Teraz rozważymy dwa „szczeble” tej drabinki:



Najpierw, korzystając z odpowiedniego wzoru dla połączenia równoległego obliczymy opór zastępczy układu trzech oporników po prawej stronie. Zauważmy, że dwa oporniki połączone szeregowo to nic innego, jak rozważany wcześniej R_{z1}.

$$\frac{1}{R_{z2'}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

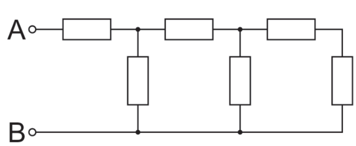
$$R_{z2'} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}.$$

Uwzględniając dołączony szeregowo opornik po lewej stronie (leżący najbliżej punktu A) otrzymamy

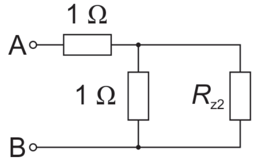
$$R_{z2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}.$$

Celowo nie doprowadzamy wyniku do najprostszej, liczbowej wartości, aby łatwiej było zauważyć „urodę” otrzymanego wyniku.

Teraz trzy szczeble:



Cztery oporniki, licząc od prawej strony, to rozważany już wcześniej układ, którego opór zastępczy to R_{z2}. A zatem możemy uprościć układ do postaci



Postępując analogicznie jak poprzednio obliczamy opór zastępczy połączonych równolegle dwóch oporów:

$$\frac{1}{R_{z3'}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{R_{z2}}$$

$$R_{z3'} = \frac{1}{1+\frac{1}{R_{z2}}},$$

a następnie opór zastępczy uwzględniając dołączony do nich szeregowo opornik po lewej stronie

$$R_{z3} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{R_{z2}}}.$$

Jeżeli uwzględnimy uprzedni wynik dla R_{z2}, to otrzymamy

$$R_{z3} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}.$$

Bardzo ładny ułamek! Widać powtarzający się schemat „jeden plus jeden nad”. Kontynuując podobne rozumowanie, można wykazać, że szukany opór zastępczy układu zawierającego nieskończenie wiele oporników można zapisać w postaci ułamka

$$R_z = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}},$$

w którym trzy kropki oznaczają, że ułamek „ciągnie się w nieskończoność”. I zasadnicze pytanie: czemu on jest równy? Otóż, aby uzyskać prostszy wynik, zastosujemy podobny trik, jak dla pierwszego układu omawianego w tym artykule. Skoro ułamek ciągnie się w nieskończoność, to mianownik głównego ułamka również jest równy R_z, a to pozwala nam zapisać równanie:

$$R_z = 1 + \frac{1}{R_z}.$$

Jeśli pomnożymy obie strony tego równania przez R_z i przeniesiemy wszystkie wyrazy na lewą stronę, to otrzymamy kolejne równanie

$$R_z^{\,2} - R_z - 1 = 0.$$

Jest to tzw. równanie kwadratowe, bo występuje w nim niewiadoma podniesiona do kwadratu. Sposobu rozwiązywania tego typu równań czytelnik nauczy się dopiero w szkole ponadpodstawowej, teraz skorzystamy z pomocy komputera, a właściwie strony internetowej www.wolframalpha.com, która wykonuje obliczenia, przedstawia dane statystyczne, rozwiązuje równania itp. Jeżeli w pole otoczone ramką wpiszemy równanie x^2-x-1=0 (*x* to nasza niewiadoma R_z, symbol ^ oznacza potęgę) i wciśniemy „Enter" albo klikniemy znak równości po prawej stronie pola, to po chwili pojawi się wykres, kilka informacji odnośnie funkcji kwadratowej oraz to, co nas najbardziej interesuje, czyli *Solutions* (rozwiązania równanie). Pewnie zdziwi nas fakt, że otrzymujemy dwa różne wyniki:

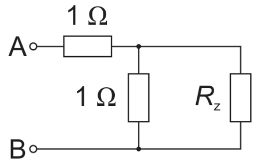
$$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Pierwsza z tych liczb jest ujemna, a więc sprzeczna z założeniem, że opór elektryczny jest dodatni. Odrzucamy więc ten wynik. Rozwiązaniem naszego zadania jest zatem

$$R_z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\ \Omega.$$

Otrzymany wynik wydaje się „brzydki", bo jest liczbą niewymierną. Jednak dla matematyków jest to tak zwana „złota liczba". Posiada ona pewne „walory estetyczne" – wykorzystuje się ją w estetycznych kompozycjach architektonicznych, malarskich i fotograficznych.

W zasadzie, znając już matematyczny sposób rozwiązania postawionego problemu, można dojść do wniosku, że zadanie dało się rozwiązać krócej. Otóż, skoro drabinka oporników „ciągnie się w nieskończoność", to można było od razu jej część od drugiego „szczebla" aż do nieskończoności w prawo, zastąpić jednym opornikiem o szukanym oporze R_z. Podobnie, jak mianownik dużego ułamka zastąpiliśmy niewiadomą.



Obliczając, podobnie jak to zrobiono wcześniej, opór zastępczy układu pomiędzy punktami A i B, otrzymujemy wyrażenie

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{R_z}},$$

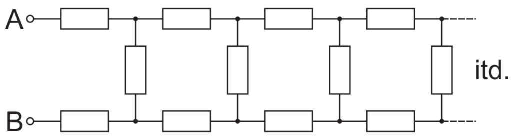
które musi być równe oporowi R_z. Mamy więc równanie

$$R_z = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{R_z}},$$

które jak się okazuje można przekształcić do postaci wcześniej otrzymanego równania kwadratowego lub od razu wprowadzić do WolframAlpha. Rozwiązanie jest takie samo, jak uzyskane poprzednio.

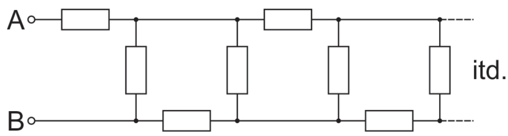
Zadanie nr 2 dla Czytelnika:

Oblicz opór zastępczy pomiędzy punktami A i B układu nieskończenie wielu jednakowych oporników, każdy o oporze 1 Ω, połączonych tak, jak na poniższym schemacie.



Zadanie nr 3 dla Czytelnika:

Oblicz opór zastępczy pomiędzy punktami A i B układu nieskończenie wielu jednakowych oporników, każdy o oporze 1 Ω, połączonych tak, jak na poniższym schemacie.



Odpowiedzi do zadań szukaj w tym numerze.

WZ