View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Jagiellonian Univeristy Repository

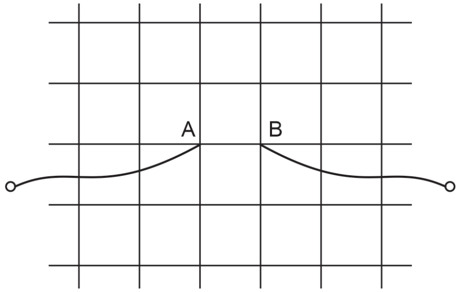
Kącik zadań olimpijskich. Sieć oporników

Kontynuujemy cykl artykułów, w których przedstawiamy wybrane zadania z Olimpiady Fizycznej i innych konkursów. Na pierwszy rzut oka niektóre z tych zadań wydają się być nierozwiązywalne, jednak prawie zawsze można znaleźć na nie jakąś metodę. Tym razem znowu zmierzymy się z sieciami oporników. Na początek stare zadanie z Olimpiady Fizycznej w 1976 r.

Uwaga. Choć wiemy iż prąd to uporządkowany ruch elektronów, to ze względów historycznych rozważa się, że prądy płynie od dodatniego do ujemnego bieguna baterii, czyli tak, jakby był uporządkowanym ruchem ładunków dodatnich.

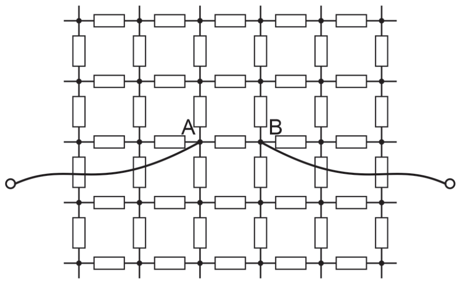
Zadanie 1

Dana jest nieskończona, płaska sieć druciana o oczkach kwadratowych (rys. 1). Opór każdego prostoliniowego odcinka drutu łączącego dwa najbliższe węzły wynosi *R*. Oblicz opór zastępczy sieci w przypadku, gdybyśmy ją włączyli do obwodu w punktach A i B.



Rys. 1

Mamy tutaj do czynienia z nieskończenie długimi, prostoliniowymi przewodami. Przewody pionowe i poziome stykają się ze sobą w punktach przecięcia. Oczywiście powyższy rysunek przedstawia tylko fragment nieskończonej, kwadratowej siatki. W zadaniach szkolnych zazwyczaj przyjmuje się, że przewody nie posiadają oporu elektrycznego. Tutaj jednak rozważane są przewody rzeczywiste, posiadające opór. Przyjmujemy natomiast, że przewody doprowadzające zasilanie do punktów A i B (przewody z zaciskami na końcach) są bezoporowe. Widocznej na powyższym rysunku części rozważanego układu odpowiada poniższy schemat. Wszystkie oporniki mają jednakowy opór *R*.

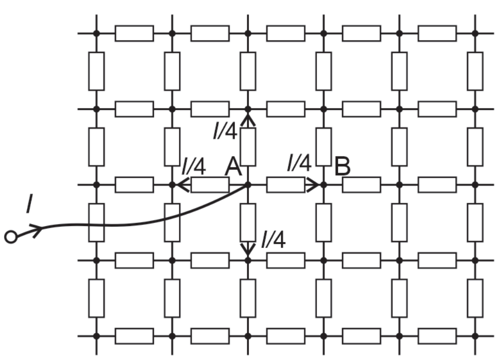


Rys. 2

Ale jak obliczyć opór zastępczy układu pomiędzy punktami A i B (rys. 2)? Mamy tutaj do czynienia ze skomplikowanym układem, a nie prostymi połączeniami szeregowymi czy równoległymi. Przyjmijmy, że dodatni biegun baterii podłączono do zacisku połączonego z punktem A, a ujemny do B. Gdyby prąd płynął „najkrótszą drogą”, to przepłynąłby tylko przez opornik znajdujący się bezpośrednio pomiędzy punktami A i B. Wtedy opór zastępczy pomiędzy tymi punktami byłby równy po prostu R. Ale prąd wpływający z baterii do węzła A obwodu rozdziela się. Część tego prądu płynie przez wspomniany opornik bezpośrednio do punktu B, część prądu płynie przez opornik znajdujący się na schemacie nad punktem A, część przez ten pod punktem A, a jeszcze inna część płynie przez opornik na lewo, po czym znowu rozdziela się w górę, w dół i na lewo i przez inne oporniki dopływa do punktu B, a dalej do baterii.

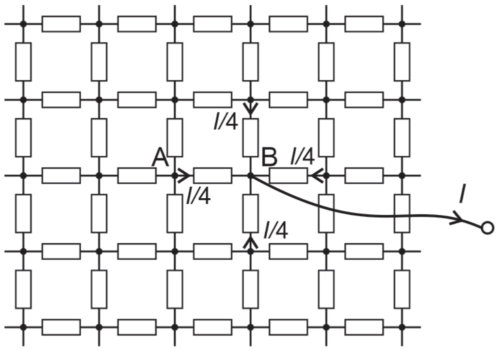
Można spróbować rozwiązać to zadanie rozważając skończoną sieć oporników, zwiększając stopniowo ich liczbę. Czyli najpierw rozważyć układ zawierający jeden opornik (ten bezpośrednio pomiędzy A i B), następnie np. 7 oporników (tworzących siatkę o kształcie cyfry 8) położonych najbliżej podanych punktów itd. Po obliczeniu oporu zastępczego każdego takiego układu trzeba będzie przeanalizować otrzymane wyniki i sprawdzić, do jakiej liczby one zmierzają. Matematycy nazywają to granicą. Wymaga to jednak wykonania wielu żmudnych obliczeń, a i wynik końcowy może być niedokładny.

Okazuje się, że jest inna metoda. Otóż, wyobraźmy sobie, że dodatni biegun baterii podłączamy do punktu A, a biegun ujemny podłączamy do rozważanej sieci, bardzo daleko od punktu A (w nieskończoności), na całym obwodzie nieskończonej siatki. Oczywiście, może trudno sobie to wyobrazić tak od razu, więc można rozważać bardzo dużą, ale skończoną sieć, i stopniowo ją powiększać, aż do nieskończoności. Zastanówmy się najpierw, jak rozpływa się prąd wpływający do węzła A. Układ ma symetrię obrotową o 90°, co oznacza, że jeśli obrócimy układ wokół punktu A o taki kąt, to otrzymamy ten sam układ. Wynika z tego, że przez każdy opornik połączony do punktu A płynie prąd o takim samy natężeniu, czyli $I/4$, gdzie I oznacza natężenie prądu wpływającego do węzła A z baterii (rys. 3.).



Rys. 3

Rozważmy teraz inną sytuację: ujemny biegun baterii podłączamy do punktu B, a biegun dodatni do rozważanej sieci, bardzo daleko od punktu B (w nieskończoności), na całym jej obwodzie. Powołując się na wspomnianą już symetrię układu, można stwierdzić, że przez każdy opornik połączony do punktu B płynie prąd o takim samym natężeniu, czyli $I/4$, gdzie I oznacza natężenie prądu wypływającego z węzła B w stronę baterii (rys. 4.).



Rys. 4

Teraz najważniejsze: wyobraźmy sobie złożenie tych dwóch sytuacji, czyli podłączamy dodatni biegun baterii do punktu A, a ujemny do punktu B. Do węzła A dopływa z baterii prąd o natężeniu I, i taki sam prąd „wraca” z punktu B do baterii. Z teorii obwodów elektrycznych zawierających tak zwane elementy liniowe, czyli np. oporniki, wynika, że w takim złożeniu sytuacji, natężenia prądów się dodają. W takim razie przez opornik znajdujący się pomiędzy punktami A i B płynie prąd o natężeniu $I/4 + I/4 = I/2$. Z prawa Ohma dla tego opornika wynika, że napięcie pomiędzy A i B wynosi $U = R \cdot I/2 = ½\, RI$. Z kolei opór zastępczy to

$$R_z = \frac{U}{I} = \frac{\frac{1}{2}RI}{I} = \frac{1}{2}R.$$

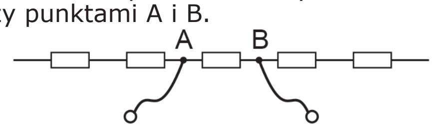
Czyli opór zastępczy obwodu mierzony pomiędzy punktami A i B stanowi połowę oporu pojedynczego odcinka przewodu. Mamy wynik!

Wyjaśnienia wymaga jeszcze założenie, że zwarcie wszystkich węzłów na obwodzie nieskończonej siatki nie ma wpływu na poprawność rozwiązania zadania. Po pierwsze, węzłów na obwodzie siatki jest nieskończenie wiele i dlatego przez każdy z nich prąd już właściwie nie płynie (zarówno prąd z węzła A w pierwszej sytuacji, jak i prąd z węzła B w drugiej sytuacji, rozdzielają się na nieskończenie wiele węzłów/oporników). Po drugie, w obu sytuacjach przez sąsiednie oporniki znajdujące się na obwodzie (i węzły również) bardzo odległe od węzłów A i B płyną prądy o tych samych (znikomo małych) natężeniach, a więc w złożeniu obu rozważanych sytuacji prądy się znoszą. Tak więc natężenie prądu płynącego przez każdy opornik bardzo odległy od punktów A i B szybko spada do zera, gdy odległość od punktów A i B rośnie do nieskończoności.

Zastosujmy poznaną metodę do rozwiązania prostszego problemu – jednowymiarowej wersji powyższego zadania.

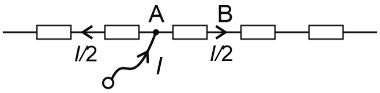
Zadanie 2

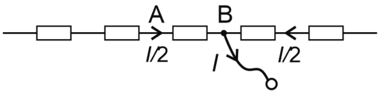
Dany jest układ nieskończenie wielu połączonych szeregowo jednakowych oporników o oporze R każdy. Oblicz opór zastępczy układu pomiędzy punktami A i B.



Zadanie jest bardzo proste, a odpowiedź oczywista: $R_z = R$. O ile w wersji dwuwymiarowej prąd płynący z węzła A w lewo mógł „skręcić” i dopłynąć do węzła B dookoła przez kilka oporników, to w tej sytuacji prąd z węzła A (załóżmy, że plus baterii podłączamy do A, a minus do B) płynie tylko w prawo przez jeden opornik do punktu B, a w lewo nie płynie.

Chcemy jednak zastosować metodę z poprzedniego zadania. Rozważmy więc najpierw oddzielnie dwie sytuacje: 1) biegun dodatni baterii podłączamy do punktu A, a biegun ujemny po obu stronach układu, nieskończenie daleko od punktu A; 2) biegun ujemny baterii podłączamy do punktu B, a biegun dodatki po obu stronach układu, nieskończenie daleko od punktu B. Z uwagi na symetrię układu lewo-prawo, prąd dopływający z baterii do węzła A w pierwszej sytuacji rozpływa się po połowie, analogicznie prąd w węźle B w drugiej sytuacji.





Następnie rozważmy złożenie tych dwóch sytuacji, czyli normalne podłączenie baterii do węzłów A i B. Wtedy przez opornik pomiędzy punktami A i B płynie prąd o natężeniu

$$I/2 + I/2 = I.$$

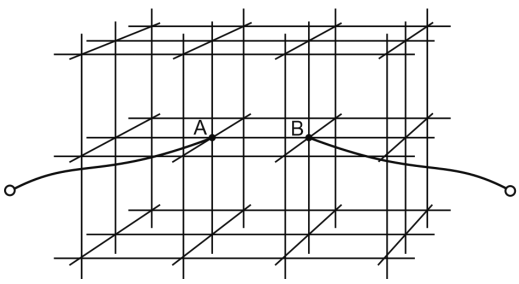
Z prawa Ohma dla tego opornika wynika, że napięcie pomiędzy A i B wynosi $U = R{\cdot}I$. Z kolei opór zastępczy to

$$R_z = \frac{U}{I} = \frac{RI}{I} = R.$$

Czyli opór zastępczy obwodu mierzony pomiędzy punktami A i B jest równy, jak oczekiwaliśmy, oporowi pojedynczego opornika. Warto również zauważyć, że przez pozostałe oporniki prąd nie płynie, bo w obu rozważanych sytuacjach płynące przez te oporniki prądy mają tę samą wartość, ale przeciwny zwrot.

Zadanie nr 1 dla Czytelnika

Dana jest nieskończona, przestrzenna (trójwymiarowa) sieć druciana o oczkach kwadratowych. W każdym węźle przecinają się trzy wzajemnie prostopadłe nieskończone, prostoliniowe przewody. Opór każdego prostoliniowego odcinka drutu łączącego dwa najbliższe węzły wynosi R. Oblicz opór zastępczy sieci w przypadku, gdybyśmy ją włączyli do obwodu w dwóch sąsiednich punktach sieci.

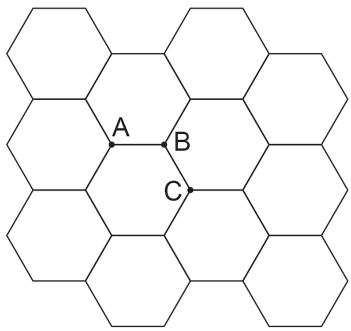


Odpowiedź w tym numerze.

Nietrywialnym problemem jest obliczenie oporu zastępczego pomiędzy węzłami znajdującymi się od siebie w większej odległości. Zainteresowanych tym tematem odsyłamy do literatury, np. [1, 2].

Zadanie nr 2 dla Czytelnika (35. Olimpiada Fizyczna)

Oblicz opór nieskończonej sieci oporów tworzących oczka w kształcie sześciokąta, raz gdybyśmy ją włączyli do obwodu w punktach A i B, a raz w punktach A i C (rys. 5). Opór każdego wyizolowanego z sieci odcinka przewodów między sąsiednimi węzłami wynosi R. Na rysunku przedstawiono tylko fragment sieci.



Rys. 5

Literatura:
[1] http://fizycznesciezki.pl/wp-content/uploads/2015/03/Przestrzenne-układy-oporników.pdf
[2] https://www.mathpages.com/home/kmath668/kmath668.htm

Witold Zawadzki