

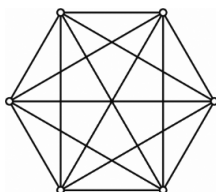
Kącik zadań olimpijskich. Sieć oporników – cz. 3

Zadanie 1

Na płytce montażowej znajduje się 2019 punktów połączeniowych. Punkty – każdy z każdym – łączymy przewodem o oporze R . Oblicz opór zastępczy układu pomiędzy dwoma punktami.

Rozwiązanie

Punktów jest tak dużo, że nawet trudno sobie wyobrazić taki układ oporników, a co dopiero narysować. Dlatego naszkicujmy układ z jakąś bardziej rozsądną liczbą punktów, np. sześcioma:



Rysunek został uproszczony, gdyż zgodnie z treścią zadania, wszystkie przewody łączące punkty powinny mieć taką samą długość. Rysunek dobrze obrazuje ogólny wygląd siatki połączeń oraz liczbę odcinków.

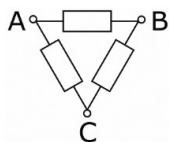
Zadajmy sobie jedno (matematyczne) pytanie: ile odcinków przewodu zawiera rozważany układ z 2019 punktami? Gdybyśmy dysponowali rysunkiem układu, to wystarczyłoby policzyć odcinki, choć nie byłoby to łatwe zadanie z uwagi na możliwość pomyłki i ominięcie któregoś przewodu. Jednak rysunek nie jest niezbędny i zadanie można rozwiązać algebraicznie. Z każdego z 2019 punktów „odchodzi” po 2018 odcinków, więc wydaje się, że powinno być 2019×2018 przewodów. Takim sposobem każdy odcinek liczymy jednak dwukrotnie - raz jako idący od punktu A do punktu B i drugi raz jako idący od punktu B do punktu A. W rzeczywistości odcinków jest więc dwa razy mniej, czyli $2019 \times 2018 : 2 = 2\,037\,171$.

Przy tak dużej liczbie punktów trudno jest rozwiązać postawiony problem i obliczyć opór zastępczy układu. Musimy rozważyć prostsze przypadki, z mniejszą liczbą punktów. Zaczniemy od najprostszego, czyli dla $n = 2$ punktów:



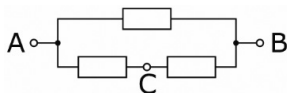
Zamiast odcinka przewodu na rysunku przedstawiono opornik. Oczywiście jest, że opór zastępczy obwodu pomiędzy dwoma punktami (A i B) jest równy oporowi pojedynczego odcinka przewodu, czyli R .

Teraz przypadek z $n = 3$ punktami:



Do każdego punktu podłączonych jest tyle samo przewodów (oporników) i wszystkie one mają taki sam opór, więc opór zastępczy pomiędzy każdą parą punktów jest taki sam. Możemy dowolnie wybrać dwa punkty, pomiędzy który-

mi obliczamy opór zastępczy. Wybieramy więc punkty oznaczone A i B, i układ przerysowujemy następująco:



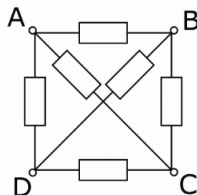
Mamy do czynienia z połączeniem mieszanym: jeden opornik znajduje się bezpośrednio pomiędzy rozważanymi punktami, a równolegle do niego podłączone są dwa oporniki połączone ze sobą szeregowo. Opór zastępczy połączenia szeregowego jest równy $2R$, a opór zastępczy układu R_z obliczymy, korzystając z odpowiedniego równania dla połączenia równoległego:

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R'}$$

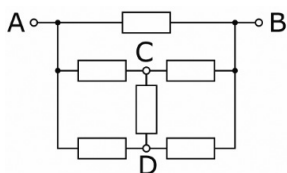
Skąd otrzymujemy

$$R_z = \frac{2}{3} R.$$

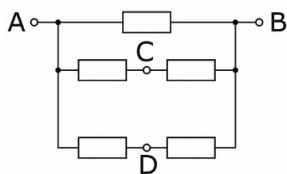
Zwiększmy liczbę punktów do $n = 4$:



Przewody leżące na przekątnych kwadratu krzyżują się, ale nie stykają ze sobą. Łatwo zauważyć, że – podobnie jak w poprzednim przypadku – jeden opornik jest połączony bezpośrednio pomiędzy punktami A i B. Pozostałe oporniki są połączone w dość skomplikowany sposób, nie będący ani czystym połączeniem szeregowym, ani równoległym. Wydawać by się mogło, że prąd płynie przez wszystkie oporniki. Aby się przekonać, że tak nie jest, układ ten narysujemy trochę inaczej:



Zróbmy prosty eksperyment myślowy: wyobraźmy sobie układ elektryczny tak jak rozważany, ale bez opornika podłączonego pomiędzy punktami C i D:



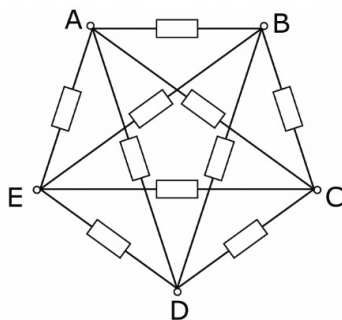
Każda z dwóch par połączonych szeregowo oporników stanowi tak zwany dzielnik napięcia. Jeśli do punktów A i B podłączymy źródło napięcia, to napięcie pomiędzy tymi punktami podzieli się na połączonych szeregowo opornikach w stosunku równym stosunkowi oporów. Skoro wszystkie oporniki mają taki sam opór, to napięcie na każdym z połączonych szeregowo oporników będzie równe połowie napięcia pomiędzy punktami A i B. Z tego z kolei wynika, że napięcie pomiędzy punktami C i D jest równe zero (fizycy mówią, że punkty te mają taki sam potencjał elektryczny). Zastanówmy się teraz, co by się stało, gdybyśmy usunęli opornik z powrotem podłączyli pomiędzy punkty C i D. Otóż nic by się nie stało – skoro napięcie pomiędzy A i C jest równe zero, to przez opornik nie popłynie prąd. Czyli jego wpięcie nie zmieni natężeń prądów płynących przez oporniki, a zatem opór zastępczy układu z tym opornikiem jest taki sam jak opór zastępczy układu bez niego. Opór zastępczy pomiędzy punktami A i B obliczamy ze znanego już równania dla połączenia równoległego:

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R},$$

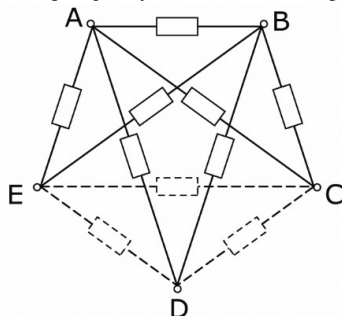
skąd otrzymujemy wynik

$$R_z = \frac{1}{2}R.$$

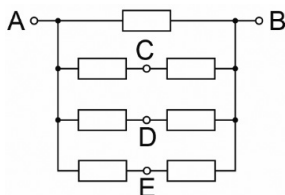
A jak wygląda sytuacja dla $n = 5$?



Przewody – przekątne figury, nie stykają się ze sobą. Tak, jak poprzednio, jeden opornik jest podłączony bezpośrednio pomiędzy punktami A i B. Pozostałe 9 oporników tworzy skomplikowany układ. Podobnie, jak w poprzednim przypadku, okazuje się, że nie przez wszystkie oporniki płynie prąd elektryczny. Poprzednio prąd nie płynął przez ten opornik, który nie był bezpośrednio połączony ani z punktem A, ani z punktem B. W układzie czterech punktów był tylko jeden taki opornik, tutaj są trzy – zaznaczono je linią przerywaną.



Pozostałe oporniki (oprócz jeszcze tego bezpośrednio włączonego pomiędzy punkty A i B), tworzą trzy gałęzie połączone równolegle, każda z dwoma opornikami połączonymi szeregowo. Układ można narysować tak:



Opór zastępczy pomiędzy punktami A i B obliczamy analogicznie jak poprzednio.

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R'}$$

skąd otrzymujemy wynik

$$R_z = \frac{2}{5}R.$$

Chyba już widać, jak zabrać się za zadanie z $n = 2019$ punktami. Jeden spośród ponad 2 000 000 przewodów (oporników) jest połączony bezpośrednio do obu punktów A i B. Drugą grupę stanowią te oporniki, które są bezpośrednio połączone do punktu A albo punktu B i tworzą szeregowe połączenie dwóch oporników pomiędzy tymi punktami. Ile jest takich oporników? Rozważamy przypadek z 2019 punktami, więc oprócz punktów A i B jest jeszcze 2017 punktów – i tyle też jest par oporników. Trzecią grupę oporników stanowią te, które bezpośrednio nie są połączone ani z punktem A, ani z punktem B. I te oporniki można usunąć z układu, co nie zmieni ani natężeń prądów płynących przez oporniki, ani oporu zastępczego układu. A zatem opór zastępczy układu pomiędzy punktami A i B spełnia równanie

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R} + 2017 \cdot \frac{1}{2R}.$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy wynik:

$$R_z = \frac{2}{2019}R.$$

Zadanie nr 1 dla Czytelnika

Rozwiąż powyższe zadanie dla płytki, na której znajduje się 2020 punktów połączeniowych.

Zadanie nr 2 dla Czytelnika

Wyprowadź ogólny wzór na opór zastępczy rozważanego wyżej układu posiadającego n punktów połączeniowych.

Odpowiedzi w tym numerze.

Witold Zawadzki