DESARROLLO DEL CONCEPTO DE NÚMERO A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES DE ESTRUCTURA ADITIVA EN ESTUDIANTES DE GRADO PRIMERO

EDNA MARGARITA MARTÍNEZ RAMÍREZ
YEIMY ELIANA QUIROGA VERANO

UNIVERSIDAD DE LA SABANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
SEPTIEMBRE DE 2016

DESARROLLO DEL CONCEPTO DE NÚMERO A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES DE ESTRUCTURA ADITIVA EN ESTUDIANTES DE GRADO PRIMERO

EDNA MARGARITA MARTÍNEZ RAMÍREZ
YEIMY ELIANA QUIROGA VERANO

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Magíster en pedagogía.

Asesor
YIMMY TRIANA ESTRELLA

UNIVERSIDAD DE LA SABANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
SEPTIEMBRE DE 2016

Dedicatoria

A mi hija Mariajosé, que es el motor de mis proyectos personales, a quien entrego este logro maravilloso, producto en gran parte del sacrificio hecho durante dos años; quiero que lo reciba como ejemplo y estímulo de todas sus metas. A mi esposo William por su apoyo y compañía; a mis padres y hermanos, que siguen confiando en mí y que suplieron muchas veces mis funciones de madre dándome la oportunidad de cualificarme como profesional y seguir construyendo un trascendente proyecto de vida.

Eliana Quiroga verano.

A mi esposo Jairo por su amor y apoyo incondicional para alcanzar este logro; a mis hijos Paula y Andrés por su paciencia y comprensión, ellos son la fuerza en la realización de mis sueños y el motor en momentos difíciles; a mis padres por su compañía y apoyo infinito.

Edna Margarita Martínez Ramírez.

Agradecimientos

Al Dios de la vida, que convirtió cada obstáculo en oportunidad, que fue nuestro soporte en tiempos de conflicto, duda y dificultad; a la Secretaria de Educación por esta nueva oportunidad de formación y actualización profesional; a la universidad de la sabana y a sus maestros, por permitirnos construir una visión más amplia y objetiva de la profesión docente; a los colegios Alfonso López Pumarejo y Gabriel García Márquez por su colaboración en el desarrollo de la investigación; y un agradecimiento especial a nuestro asesor YIMMY TRIANA ESTRELLA por su apoyo, compromiso y confianza en este proceso.

Margarita Martínez y Eliana Quiroga

Resumen

En los colegios distritales Gabriel García Márquez y Alfonso López Pumarejo se implementó una unidad didáctica planeada desde el ciclo de análisis didáctico de Gómez (2007) con la cual se contribuyó al desarrollo del concepto de número en estudiantes de grado primero. Esta propuesta se diseñó a partir de las dificultades encontradas en los estudiantes en relación a las técnicas para contar (Baroody, 1997) y los niveles de la secuencia numérica (Castro, 1995), procesos básicos e indispensables en la etapa infantil. La resolución de problemas se utilizó para diseñar las acciones didácticas que configuran el trabajo desarrollado en el aula, en este estudio se aplicaron los problemas verbales de estructura aditiva PVEA categoría cambio.

La investigación desarrollada está enmarcada en el enfoque cualitativo, porque pretende interpretar las acciones que los estudiantes realizan al momento de contar durante la resolución de los PVEA categoría cambio; su alcance es de tipo interpretativo y está guiada por el enfoque de investigación acción.

Los resultados obtenidos se relacionan con las habilidades adquiridas por los estudiantes para hallar la solución a situaciones problema planteadas en diferentes contextos fenomenológicos, de igual manera, se evidencia un avance en el dominio de la secuencia numérica y las técnicas para contar.

Palabras clave: concepto de número, problemas verbales de estructura aditiva, ciclo de análisis didáctico, secuencia numérica.

Abstract

In the public schools Gabriel Garcia Márquez and Alfonso López Pumarejo it developed a didactic unit planned in the setting the "Ciclo De Análisis Didáctico" of Gómez (2007), with which contributed to the development of the concept of number in first grade students; this proposal was designed from the difficulties encountered in students, in relation to techniques for counting and the levels of the numerical sequence, basic and essential processes in the infant stage. The problem-solving approach made possible the design of teaching activities that make up the work done in the classroom for this study verbal problems were applied of additive structure (PVEA) category change.

The research developed is guided by the qualitative approach, because it aims interpret the actions that students perform when counting and during resolution of the PVEA; their scope is interpretative and is guided by action research approach.

The results obtained are related to the skills acquired by students to find the solution to problem situations raised in different contexts phenomenological, likewise, is evidenced a breakthrough in the domain of numerical sequence and techniques to count.

Keywords: concept of number, verbal problems additive structure, cycle training analysis, numerical sequence.

Tabla de Contenidos

Lista de tablas

Lista de tablas

Introducción

Las investigadoras de este estudio, ejercen su labor pedagógica en las IED Gabriel García Márquez y Alfonso López Pumarejo y consideran que al no ser especialistas en el área de matemáticas, sus conocimientos teóricos y prácticos con respecto a la matemática a enseñar son insuficientes especialmente en relación con la planificación de los temas matemáticos escolares para el grado primero; por tanto esta investigación utilizó el análisis didáctico como un método de planificación dentro del currículo local para la implementación de una unidad didáctica guiada desde un análisis profundo del tema matemático específico a enseñar, los objetivos a alcanzar, las tareas a implementar y la evaluación de los procesos tanto de aprendizaje como de enseñanza.

La unidad didáctica implementada se enfocó en desarrollar el concepto de número con estudiantes de grado primero de las instituciones educativas distritales IED Gabriel García Márquez y Alfonso López Pumarejo de las localidades de Usme y Kennedy respectivamente. La principal dificultad de los estudiantes en el área de matemáticas se relaciona con el desarrollo del concepto de número asociado directamente con su desempeño al momento de realizar el conteo en diferentes rangos y contextos numéricos, la importancia del abordaje de esta capacidad se fundamenta en que las acciones de conteo son la base para la construcción de todo el andamiaje de conceptos matemáticos posteriores, por tanto, el éxito futuro de los escolares en el área de matemáticas, dependerá en gran medida del uso y la precisión de las técnicas para contar y el domino de la secuencia numérica en las actividades de conteo que realice durante los primeros años escolares (Baroody, 1997).

Con el fin de contrarrestar estas dificultades se desarrolló en las aulas de los dos colegios la intervención didáctica, para ello, se propuso la formulación de los PVEA como medio posibilitador para la adquisición de las matemáticas escolares (García, 2010), la unidad didáctica se planificó según los cuatro análisis del ciclo de análisis didáctico de Gómez (2007) a saber, (análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación) la propuesta de intervención se organizó en seis tareas, cada una justificada a partir de la teoría y apuntándole a unos objetivos específicos relacionados con la superación de las dificultades encontradas. En las 6 tareas se formularon las seis sentencias de los PVEA categoría cambio con la incógnita en *(a)*, en *(b)* o en *(c)* según la sentencia a la que pertenecieran (para cada tarea se formularon 3 sentencias diferentes); la formulación de los PVEA se fundamenta en que estos problemas son los adecuados para los grados escolares donde los estudiantes aún no leen ni escriben en forma convencional, para esto se diseñaron en cada institución educativa, situaciones significativas que le permitieran a los niños y a las niñas activar sus conocimientos informales, establecer conexiones entre estos y la situación problema planteada, y utilizar material concreto para realizar el proceso de resolución.

Esta investigación develó rutas de aprendizaje pertinentes tanto para las docentes a cargo como para los estudiantes, el ciclo de análisis didáctico guio el desarrollo de las acciones didácticas en las cuales fue posible identificar el proceso que siguieron los estudiantes al momento de resolver los PVEA categoría cambio, las estrategias que utilizan para resolverlos, los niveles por los que pasaron para su resolución, las técnicas y los principios en el proceso de contar y en el dominio progresivo de la secuencia numérica.

Con el fin de dar cuenta de los hallazgos encontrados a través de la investigación, se realizó el análisis de información de tipo cualitativo de los caminos de aprendizaje recorridos por los estudiantes al construir progresivamente el concepto de número mediante la resolución de los PVEA categoría cambio, las estrategias utilizadas por ellos y los niveles alcanzados durante su resolución, por tanto, la investigación da cuenta del desempeño de los estudiantes desde sus acciones, justificándolas con los referentes teóricos de apoyo que sustentan la planeación, la implementación, la intervención y el análisis.

Las categorías de análisis: concepto de número, niveles de RPM (resolución de problemas matemáticos) y estrategias de RPM sirvieron para analizar en forma cualitativa los hallazgos obtenidos en la intervención, se describen las acciones realizadas por los estudiantes, en cuanto a la construcción del concepto de número, las estrategias utilizadas durante la resolución de los PVEA y los niveles de resolución de los problemas formulados durante la implementación de la propuesta de intervención.

Finalmente se muestran los resultados y las conclusiones arrojadas por esta investigación, las cuales dan cuenta de los principales hallazgos arrojados por la investigación y dan respuesta a las preguntas de investigación propuestas.

1. Planteamiento del problema

En las instituciones educativas distritales (IED) Alfonso López Pumarejo y Gabriel García Márquez los estudiantes de primer grado presentan dificultades en el área de matemáticas relacionadas con las técnicas que utilizan para contar y el dominio de la secuencia numérica, manifestado en los errores que cometen al momento de contar una colección de objetos, establecer relaciones entre cantidades, realizar operaciones básicas y resolver problemas de estructura aditiva; dichos errores se relacionan con el poco uso y precisión de las técnicas para contar, dificultad al asignarle cada uno de los nombres de los términos de la secuencia a los objetos de un conjunto y bajo dominio de la secuencia numérica porque no realizan de manera convencional la sucesión con los términos o palabras numéricas (Castro, Rico, & Castro, 1999); lo anterior se evidencia en las observaciones del desempeño de los estudiantes en las actividades de conteo diarias.

Estos errores que subyacen a dificultades específicas constituyen un factor preponderante que genera bajo rendimiento en el área de matemáticas y que influyen en alguna medida en los resultados de las pruebas bimestrales y calificaciones finales; es así como, en los periodos académicos correspondientes a los años 2013, 2014 y 2015 se evidencia una cantidad considerable de reprobación en el área de matemáticas en el primer ciclo de básica primaria; del mismo modo, una de las competencias que evalúa las pruebas Saber para el grado tercero es el planteamiento y resolución de problemas y para ello, el estudiante debe, entre otros, "Reconocer equivalencias entre diferentes tipos de representaciones relacionadas con números, construir y describir secuencias numéricas y resolver problemas aditivos rutinarios de cambio, composición y transformación e interpretar las condiciones necesarias para su solución" (MEN, 2014 p.12) y de acuerdo a los resultados obtenidos en las pruebas Saber en el área de matemáticas de los tres últimos años, se observa un alto porcentaje en el nivel de insuficiente o mínimo para los dos colegios y un decremento considerable en el rendimiento en el nivel avanzado para el colegio Gabriel García Márquez. (Ver anexo 1)

1.1. Antecedentes

Las dificultades observadas en los estudiantes se relacionan en alguna medida con al proceso de enseñanza que se ha venido desarrollando en los dos colegios por parte de las docentes investigadoras de este estudio, caracterizado por acciones didácticas de tipo repetitivo y memorístico, con la utilización de actividades que priorizan el uso del lápiz y papel, estructuradas desde el plan curricular y que responden a exigencias curriculares externas, no tienen en cuenta la comprensión profunda del contenido de las matemáticas escolares a enseñar, los conocimientos informales de los estudiantes, la previsión de las dificultades, los errores y sus etapas de aprendizaje.

En concordancia con lo anterior, se evidencia que el desarrollo de la acción pedagógica a realizar en el aula de clase en relación con la matemática escolar requiere que el docente efectúe un análisis estructurado, dinámico y profundo del tema matemático que va a enseñar, de la complejidad de las nociones que lo componen, las labores escolares que los estudiantes deben realizar, prever las dificultades, los errores que pueden cometer, los procedimientos que deben realizar y el sistema de representaciones que le da significado al concepto matemático, es así como Vergnaud (2003) plantea. "Toda la formación del maestro, todo su esfuerzo deben conducirlo hacia un mejor conocimiento del niño y a permitirle ajustar de manera permanente las modalidades de su acción pedagógica" (p. 9) desafortunadamente esto no sucede, el actuar pedagógico del docente responde a los requerimientos del currículo global y local, desconociendo todo el engranaje de procesos relacionados con la didáctica de la matemática y el desarrollo cognitivo de los educandos, por tanto es necesario que el docente comprenda que su acción didáctica, además "….implica un conocimiento profundo del contenido que se va a enseñar y de las relaciones de este contenido con la actividad del niño."(Vergnaud, 2003, p.9).

En la actualidad, se están diseñando marcos de referencia desde la teoría curricular que le permiten al docente mirar su quehacer pedagógico de forma reflexiva y crítica, a partir de un análisis riguroso de su práctica que le posibilite a la vez diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2002).

De las problemáticas citadas anteriormente se deriva, además, la descontextualización del conocimiento matemático y la poca utilidad que los estudiantes ven en los conceptos desarrollados, en este sentido, la formulación y resolución de problemas puede contribuir favorablemente a la construcción de los conocimientos matemáticos del niño en relación directa con las operaciones que es capaz de hacer sobre la realidad (Vergnaud, 2003). Además, en la actualidad la resolución de problemas se prioriza como uno de los procesos generales dentro de los lineamientos curriculares en el nivel global y local, en este sentido el Ministerio de Educación Nacional MEN (2006) menciona que:

> “El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas.” (P.24).

La unidad didáctica se implementó utilizando la resolución de problemas matemáticos (RPM), como proceso general (MEN, 2006) para que el estudiante comprendiera y desarrollara las matemáticas, permitiéndole encontrar significado y funcionalidad al conocimiento matemático que fue construyendo (García, 2010). Las investigaciones realizadas con respecto al abordaje del contenido matemático a partir de RPM han consolidado un marco de referencia que posibilitó incluirlos en esta propuesta de intervención en el área de matemáticas en el grado primero, por tanto, para el caso de este estudio se propusieron los PVEA (Puig & Cerdán, 1988) (problemas matemáticos apropiados para los cursos donde los estudiantes aún no leen ni escriben en forma convencional), sus tipos, categorías y sentencias.

1.2. Justificación

En los colegios distritales Gabriel García Márquez y Alfonso López Pumarejo, los docentes de básica primaria asumen todas las áreas del conocimiento para la enseñanza de sus escolares, sin embargo, no son especialistas en todas ellas (figura 1). Las docentes autoras de este estudio, orientan la clase de matemáticas en estos colegios, sin embargo, no son especialistas en el área, por tanto carecen de las herramientas metodológicas y didácticas que les posibiliten desarrollar un mejor proceso de enseñanza y aprendizaje basado en el conocimiento profundo de la estructura matemática a enseñar.

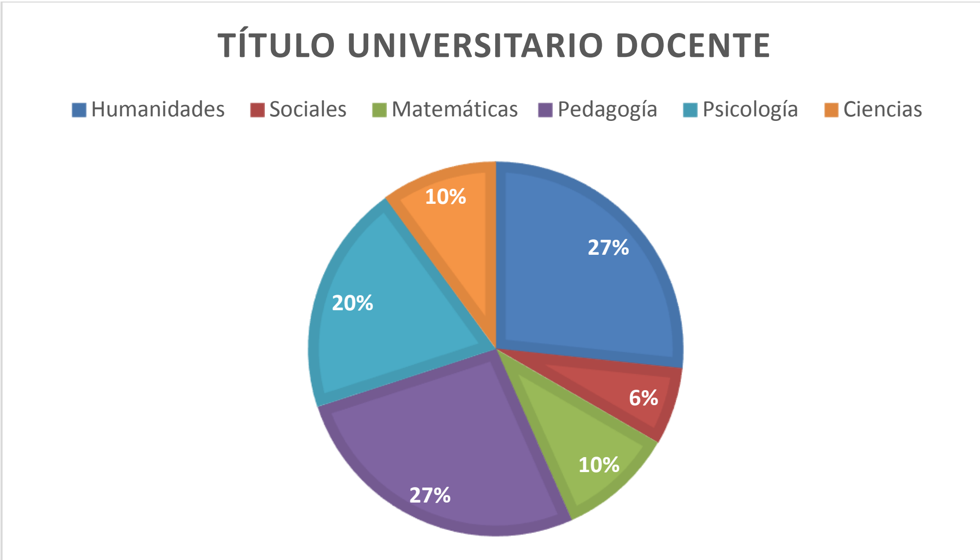


Figura 1 Título universitario por áreas, I.E.D. Gabriel García Márquez e I.E.D. Alfonso López Pumarejo, 2016, Docentes Primaria.

Como se aprecia en la distribución porcentual, los docentes que enseñan matemáticas en los grados de primaria en los colegios objeto de estudio, en su gran mayoría, no son especialistas en matemáticas; esto influye negativamente en la forma de abordar la estructura matemática a enseñar, en la competencia del profesor frente al diseño, planeación y evaluación del componente curricular local del área, en este sentido Kilpatrick, Swaffordy & Findell (2001) citado por Gómez (2007) reconocen que:

> "el profesor de matemáticas es el principal responsable de la instrucción matemática. Él es quien, con sus conocimientos y sus creencias y dentro de unos contextos culturales, sociales, políticos, curriculares e institucionales, decide qué tipo de experiencias matemáticas viven sus estudiantes en el aula" (p.29)

Es decir, el docente debe decidir cómo abordar la clase de matemáticas, pero para ello requiere de un conocimiento profundo que le posibilite desarrollar de forma eficaz, eficiente y funcional su planeación; por tanto, las investigadoras de este estudio ven la necesidad de hallar una propuesta pertinente y actual encaminada a mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemáticas escolares a partir de un conocimiento profundo del objeto matemático a enseñar, de un diseño metodológico basado en un análisis riguroso y juicioso de los aspectos cognitivos y afectivos que intervienen en el aula, por tanto, se pretende fortalecer el conocimiento didáctico de las docentes investigadoras en relación a los conceptos matemáticos que se van a enseñar. En este sentido Gómez (2007) propone organizar la instrucción matemática, desde una perspectiva conceptual dentro del currículo local con el fin de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas apuntando a mejorar el desempeño profesional de los docentes en el área de matemáticas.

Por tanto, con el fin de solucionar la problemática identificada en los IED Alfonso López Pumarejo y Gabriel García Márquez se desarrolla una unidad didáctica, diseñada a partir del ciclo de análisis didáctico, procedimiento que brinda las herramientas necesarias para organizar la enseñanza de las matemáticas y que representa una forma adecuada de la manera en que el docente debe diseñar, llevar a la práctica y evaluar las tareas para la enseñanza de un concepto matemático (Gómez, 2002).

El ciclo de análisis didáctico se propone como eje organizador de la planificación del trabajo de aula en el nivel del currículo local para la implementación de una unidad didáctica, la cual corresponde a una “unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos” (Segovia & Rico, 2001, p. 87) citados por Gómez (2002). En este sentido, la implementación de la unidad didáctica trazada desde el ciclo de análisis didáctico posibilita contrarrestar las dificultades halladas en relación con las actuaciones del docente y la comprensión profunda que él debe tener con respecto a: la estructura matemática que va a enseñar, los objetivos que desea alcanzar, la previsión de las dificultades, los errores y los procedimientos de los escolares, las tareas específicas a realizar y la evaluación formativa.

Por otro lado, la problemática específica identificada en el área de matemáticas en los estudiantes de primero de primaria de los colegios en mención, corresponde al pensamiento numérico en relación con el concepto de número, sus principales dificultades en este aspecto se relacionan con el conteo de diferentes cantidades en rangos inferiores a 20 manifestado en la poca precisión en la utilización de las técnicas de conteo, estas dificultades no les permiten establecer relaciones en la serie numérica ni dominar la secuencia numérica, además están directamente relacionadas con su desempeño matemático en las situaciones aditivas a las cuales se debe enfrentar para la resolución de problemas matemáticos.

Los resultados de las pruebas Saber de los años 2013, 2014 y 2015 muestran un alto porcentaje de estudiantes con bajos puntajes en el área de matemáticas, las notas bimestrales y anuales en los grados primero y segundo de primaria en esta área son bajos y básicos; de igual manera el nivel de reprobación de curso de los estudiantes con el área de matemáticas perdida también es considerable, en la siguientes figuras 2 y 3 se muestran algunos de estos datos.

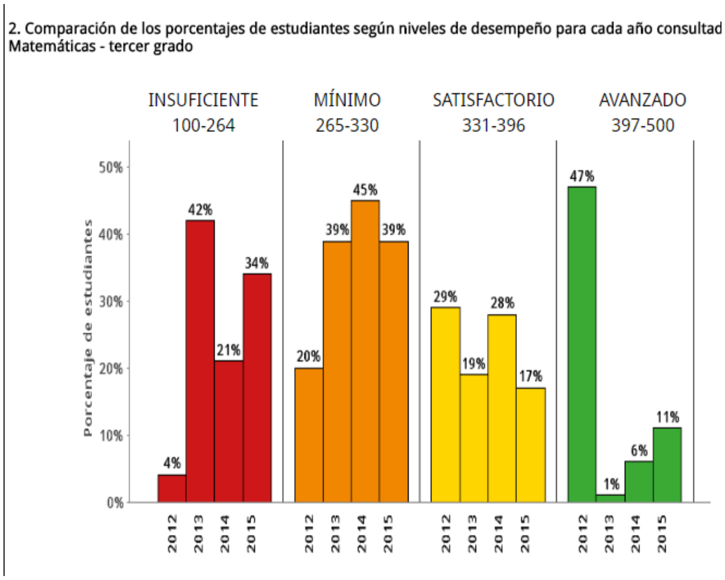


Figura 2 Resultados pruebas saber años (2012-2015) I.E.D. Gabriel García Márquez.

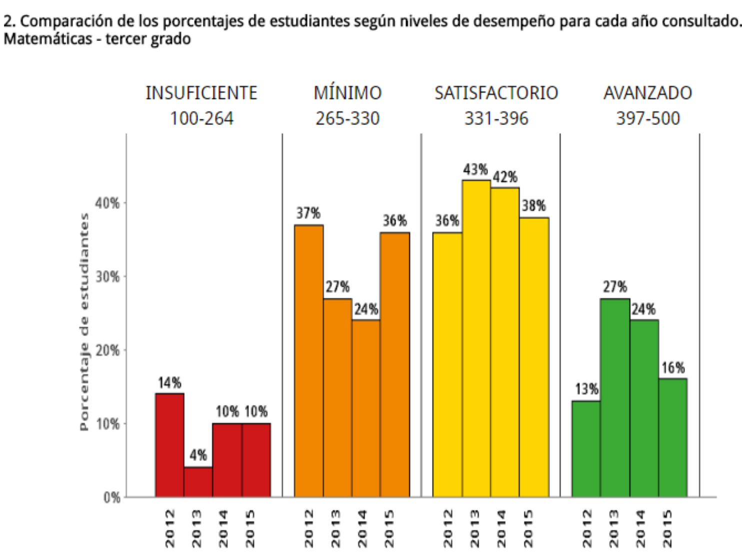


Figura 3 Resultados pruebas saber años (2012-2015) I.E.D. Alfonso López Pumarejo.

Por tanto, la estructura matemática que se abordó en la implementación de esta unidad didáctica corresponde a uno de los conocimientos básicos propuestos por el MEN. Pensamiento numérico y sistemas de numeración (MEN, 2006).

> El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos, y se manifiesta de diversas maneras de acuerdo con el desarrollo del pensamiento matemático (p. 26).

En este orden de ideas, es posible identificar que el pensamiento numérico abarca una gran variedad de significados y en el convergen diversos hechos, conceptos y estructuras conceptuales; para el caso de esta investigación se analizan las dificultades, los errores que cometen los estudiantes, los procedimientos que efectúan y/o deberían efectuar en el proceso de contar, desde el uso de la matemática informal que traen consigo " los métodos y las formulaciones de cariz1 informal o intuitivo preceden a la matemática exacta y formalizada y actúan como base de la misma" (Kline, 1974) citado por(Baroody, 2000, p.39) y que les posibilitan ir construyendo progresivamente el concepto de número. La estructura matemática a analizar con el ciclo de análisis didáctico corresponde al concepto de número en la etapa infantil, a los procesos relacionados en forma implícita y explícita en la acción de contar que efectúan los estudiantes y aunque a primera vista parecieran ser procesos simples, presentan un alto nivel de complejidad para los estudiantes durante sus primeros años escolares, Castro et al. (1999) menciona:

> Cuando al hablar de "tres", o cualquier otra palabra numérica parece que nos estamos refiriendo a una cuestión muy sencilla (quizá sea por la costumbre que tenemos de utilizarla), sin embargo, un análisis cuidadoso de la cuestión nos hace ver que la expresión "tres" o cualquiera otra expresión numérica encierran múltiples conceptos algunos de ellos complejos debido en parte a los distintos contextos en los que se utilizan los números. (p. 12).

Las evidencias que muestran las dificultades encontradas en el área de matemáticas en los estudiantes de los dos colegios inciden en su desempeño académico, de no ser resueltas durante sus primeros años de escolaridad puede llegar a impedir la construcción de los conceptos

---

1 La palabra "cariz" se define como el aspecto que presenta una determinada cuestión; el autor la utiliza con el fin de resaltar la importancia que presentan las matemáticas informales en la construcción de la matemática informal durante los primeros años de

matemáticos presentes y futuros, sin una buena base conceptual los estudiantes encontrarán cada vez mayores obstáculos a superar (Baroody, 1997) por tanto, es necesario brindarles actividades ricas en significado, aterrizadas a su contexto, con material concreto manipulable e ir acompañándolos en su ruta de aprendizaje hacia la construcción progresiva del conocimiento del objeto matemático, para este caso, la construcción del concepto de número, su importancia está en lograr por medio de esta intervención mejorar su desempeño actual, posibilitándoles las herramientas cognitivas necesarias para que se desempeñen mejor frente a los conceptos matemáticos a abordar en años posteriores.

1.3. Preguntas de investigación

¿De qué manera una unidad didáctica planificada a partir del ciclo de análisis didáctico, por medio de la resolución de problemas verbales de estructura aditiva PVEA categoría cambio, contribuye a favorecer el desarrollo del concepto de número en estudiantes de grado primero de dos colegios oficiales de Bogotá?

La investigación se desarrolló a partir de las siguientes preguntas específicas:

- ¿Cuáles son las dificultades y errores que presentan los estudiantes en cuanto al uso de las técnicas para contar, los principios en el proceso de contar y en los niveles de la secuencia numérica?
- ¿Cuáles son las estrategias que utilizan los estudiantes al momento de resolver PVEA categoría cambio, asociados a los procesos de contar?
- ¿Cómo se caracterizan los niveles de resolución de PVEA categoría cambio en estudiantes de grado primero?

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Implementar una unidad didáctica planificada a partir del ciclo de análisis didáctico (Gómez, 2007) desde la resolución de problemas verbales de estructura aditiva PVEA categoría cambio, para favorecer el desarrollo del concepto de número en estudiantes de grado primero de dos colegios oficiales de Bogotá.

1.4.2. Objetivos específicos

- Determinar las dificultades y errores que presentan los estudiantes en cuanto al uso de las técnicas para contar, los principios en el proceso de contar y en los niveles de la secuencia numérica.
- Identificar las estrategias qué utilizan los estudiantes al momento de resolver PVEA categoría cambio, asociados a los procesos de contar.
- Caracterizar los niveles de resolución de PVEA categoría cambio en estudiantes de grado primero.

2. Marco teórico

2.1. Estado del arte

Las investigaciones realizadas durante los últimos años con respecto al tema objeto de estudio, sirvieron como base teórica en cuanto a enfoques, metodología, tendencias, herramientas y procedimientos; constituyen un referente teórico en relación con la construcción del concepto de número en la etapa infantil y el abordaje de los PVEA como medio posibilitador del aprendizaje de las matemáticas.

La construcción del concepto de número en estudiantes en etapa infantil, ha sido objeto de estudio por parte de diversas investigaciones, desde la didáctica de la matemática y la psicología del desarrollo especialmente; es así, como Jean Piaget presenta su teoría sobre la génesis del número en el año 1940 (Turégano, Montañés, Parra & Sánchez, 2000) fundamentada en que el desarrollo de la competencia numérica del niño se halla relacionada con el desarrollo de su capacidad lógica, por tanto Piaget afirma que durante la etapa pre-operacional no es posible una verdadera comprensión de las nociones de número, porque, aunque los niños presentan ciertas habilidades para el conteo, no han logrado interiorizar los requisitos lógicos necesarios para la consolidación de la noción de número, el conteo, según él, en esta etapa es tan solo una habilidad social sin contenido lógico matemático (Villarroel, 2009).

Por otra parte Villarroel (2009) afirma que en los últimos tiempos están apareciendo nuevas investigaciones que obligan a replantear y a ampliar las consideraciones que se tienen con respecto a las habilidades numéricas de los niños desde la perspectiva de Jean Piaget. Gelman & Gallistel (1978) y Gelman & Meck (1986) citados por Villarroel (2009) proponen cinco principios implícitos en el proceso de contar (orden estable, correspondencia, biunivocidad, cardinalidad, irrelevancia del orden y abstracción) los cuales guían la adquisición de esta acción matemática, describen su propuesta como: "primero principios, después capacidades” para asegurar que los niños durante la etapa pre-operacional, aunque no cuenten con una capacidad conceptual totalmente estructurada sobre la acción de contar, si poseen los cimientos metodológicos del mismo.

En esta misma línea, Baroody (1997) resalta la poca importancia que se le da al proceso de construcción del concepto de número durante la etapa infantil, existe una creencia errónea de que los niños antes de los 7 años carecen de técnicas matemáticas, sin embargo Baroody (1997) advierte.

> Las investigaciones recientes demuestran que, antes de empezar la escolarización formal, la mayoría de los niños adquiere unos conocimientos considerables sobre contar, el número y la aritmética. Además, este conocimiento adquirido de manera informal actúa como fundamento para la comprensión y el dominio de las matemáticas impartidas en la escuela. En pocas palabras las raíces de las aptitudes matemáticas llegan hasta la época de primaria elemental y el éxito de la enseñanza escolar se funda en este conocimiento aprendido de manera informal. (p. 34).

Por tanto Baroody resalta la importancia de las acciones de conteo que realizan los niños durante sus primeros años escolares y la trascendencia de estas en la construcción de la matemática formal, de igual manera Baroody (2007) asegura que, “contar ofrece a los niños el vínculo entre la percepción directa concreta, si bien limitada, y las ideas matemáticas abstractas. Contar coloca el número abstracto y a la aritmética elemental al alcance del niño pequeño.” (p. 45).

Las investigaciones adelantadas por Baroody (1997) reconocen además la relevancia del proceso de contar durante los primeros años de escolaridad primaria, enfatizan la relevancia de los conocimientos informales con los que llegan los estudiantes a la escuela; el docente, por tanto, debe partir de estos conocimientos para impartir la matemática formal porque “La matemática escrita y simbólica que se imparte en las escuelas supera las limitaciones de la matemática informal,” (Baroody, 1997, p. 47) y por tanto “…liberan a los niños de los confines de su matemática relativamente concreta.” (Baroody, 1997, p. 47).

De otro lado, las investigaciones que proponen la RPM como método posibilitador para la adquisición del conocimiento matemático, los sitúa como un elemento indispensable dentro de las propuestas curriculares; es así como, García (2010) afirma que:

> “En la última década la resolución de problemas se identifica como una actividad de primer orden en el aprendizaje de las matemáticas, se sugiere que la interacción del alumno con problemas de su cotidianidad y la libertad para discutir y confrontar diversas estrategias de solución, contribuyen a que se desarrolle una disposición y un gusto por el aprendizaje de las matemáticas”. (p. 3)

Es decir, que desde esta perspectiva la RPM posibilita un acercamiento significativo de los estudiantes con el objeto matemático a desarrollar.

En concordancia con lo anterior, Godino, Font, Wilhelmi & Arreche (2003) afirman que "el significado de un objeto matemático es el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (una institución, comunidad de prácticas,…) realiza para resolver una cierta clase de situaciones-problema en las que dicho objeto interviene"; además, Vergnaud (1991) citado por Butto & Martínez (2012) propone que "los problemas son una fuente de conocimiento y el aprendizaje se produce como consecuencia del reconocimiento y resolución de éstos dentro de un contexto", se evidencia por tanto, que la resolución de problemas matemáticos está íntimamente ligado con la construcción significativa y efectiva del conocimiento matemático, que además, le permite a los estudiantes encontrar sentido y aplicación a los conocimientos adquiridos.

En otras investigaciones se plantea la RPM desde su didáctica. Existe un interés creciente de didactas e investigadores en su estudio y el desarrollo de la resolución de problemas en sus tres funciones fundamentales, como objeto, como método y como destreza básica; aportando diferentes conceptos, paradigmas y modelos que permiten caracterizar didácticamente este complejo e importante proceso (Alonso & Martínez, 2003), en este sentido, Pieranllely & Díaz (2010) proponen la implementación de la Teoría de las Situaciones Didácticas en estudiantes de grado primero con el fin de generar acciones didácticas en el aula que les posibiliten a los niños y a las niñas construir estrategias y acciones propias hacia la resolución de los problemas matemáticos basados en el conteo, la representación y la coordinación de objetos físicos.

Dichas investigaciones se han centrado en campos conceptuales y estructuras matemáticas particulares en cuanto a la RPM, es así, como se está consolidado un marco de referencia en relación a la resolución de problemas matemáticos en la etapa infantil, que desde la mirada de Puig & Cerdán (1988):

> Son los primeros que aparecen en el currículo escolar de matemáticas. Al constituir la primera actividad de resolución de problemas con la que se encuentran los niños en su vida escolar, debe ponerse toda la atención y el cuidado en ella, que merece cualquier primer paso en un nuevo campo de actividad. (p. 89)

Esta afirmación posibilita identificar la relevancia de este proceso dentro del currículo escolar durante la etapa infantil y la importancia que el docente le debe dar a la implementación de los PVEA dentro del currículo local en el área de las matemáticas a partir de un conocimiento profundo de estos, es así como, Ordoñez (2014) utiliza este tipo de problemas para implementar en el aula la Metodología Redactar para la enseñanza y aprendizaje de las estructuras aditivas, sus obstáculos y dificultades con el fin de analizar el desempeño de un grupo de estudiantes frente a la tarea de resolución de los PVEA; del mismo modo Aguilar & Navarro (2000) aplican una estrategia de resolución de problemas para niños con el fin de permitirles a los estudiantes desarrollar diferentes habilidades para la resolución de PVEA categoría cambio, combinación, igualación y comparación a partir de tres aspectos fundamentales (manipulativo, gráfico y simbólico) Los PVEA, además, le permiten a los estudiantes resolver problemas en diversas situaciones, es así como Vergnaud (2000) asegura que "por problemas de tipo aditivo entendemos aquellos cuya solución exige adiciones o sustracciones; de la misma manera que por estructuras aditivas entendemos las estructuras o las relaciones en juego que sólo están formadas de adiciones y sustracciones".

Los estudios realizados afirman también que al momento de implementar los PVEA en el aula se debe tener clara su finalidad tal como lo afirma Castro, Rico y Gil (1992) "Los problemas aritméticos verbales se incluyen en el currículo escolar con la finalidad de, facilitar al alumno un acercamiento entre aritmética y realidad, entre aritmética y aplicaciones a la vida real, que hacen más significativo y valioso su estudio." (p. 227); en este sentido, Alba y Quintero (2016) realizan un estudio de investigación que analiza las estrategias de conteo en estudiantes de grado primero tras la implementación de una Unidad Didáctica en el marco de la E_PC y centrada en la resolución de PVEA, en el cual logran identificar las estrategias de conteo y los registros realizados por los estudiantes en diversas situaciones de juego en forma significativa; Además, que es necesario tener en cuenta las dificultades que presentan los estudiantes al momento de su resolución, en dichas investigaciones se ha encontrado que las principales dificultades que presentan los estudiantes al momento de resolver los PVEA están directamente relacionados con: su estructura semántica (categoría a la cual pertenece), estructura sintáctica (posición de la incógnita) y su formulación verbal (Castro et al. 1992).

2.2. Referentes teóricos

En las últimas décadas, se han adelantado investigaciones en torno a la construcción del concepto de número durante los primeros años de escolaridad, la formulación de los PVEA como método para desarrollar los contenidos matemáticos escolares y el análisis didáctico como medio para organizar la planeación de un tema matemático en el aula de clase por parte del profesor. Son varios los autores interesados en ahondar en estos temas, quienes ofrecen teorías, enfoques, modelos rigurosos y sistemáticos fundamentados desde la teoría y la práctica en los cuales se apoya esta investigación. En lo que sigue se hará un acercamiento a las propuestas de Castro et al. (1995), Chamorro (2005) para definir el concepto de número; Vergnaud (2000), Bruno (2006), Castro et al. (1995) y Puig & Cerdán (1985) y García (2010) para especificar los PVEA y los aportes de Gómez (2007), Lupiañez (2008) y Gómez et al. (2007) constituirán la base teórica para describir el análisis didáctico.

2.3. Concepto de número.

La construcción del concepto de número en los estudiantes durante sus primeros años escolares es un proceso lento, requiere toda la atención que el docente le pueda brindar, es necesario, por tanto tener claridad con respecto a los procesos cognitivos que el estudiante va desarrollando en contacto con su entorno encaminados a favorecerle la construcción de estructuras mentales que le permitan ir adquiriendo la comprensión de número. A continuación, se presentan algunos aspectos en relación con la construcción del concepto de número.

2.4. Pensamiento matemático.

Para que el estudiante avance en su proceso de construcción del concepto de número requiere de habilidades de pensamiento específicas relacionadas con el pensamiento matemático, el pensamiento lógico matemático y el pensamiento numérico, los cuales se describe a continuación.

El pensamiento matemático hace referencia a la capacidad que tienen todas las personas para desarrollar habilidades de pensamiento en las cuales se involucran diferentes conocimientos matemáticos, es así como Cantoral (2000) citado por Bosh (2012) establece que "…el pensamiento matemático incluye, por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos, y por otro, procesos avanzados de pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis." (p. 3); desde otro punto de vista, Bosh (2012) afirma que "…el pensamiento matemático no encuentra sus raíces en las tareas propias y exclusivas de los matemáticos profesionales, sino que están incluidas todas las formas posibles de construcción de ideas matemáticas en una gran variedad de tareas." (p. 4), por lo tanto, el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos al enfrentarse cotidianamente a sus múltiples tareas, es decir, todas las personas tienen un pensamiento matemático que les permite desarrollar habilidades matemáticas específicas y que utilizan en diferentes contextos para resolver problemas, es importante resaltar, que en la escuela este tipo de pensamiento se va desarrollando en forma progresiva al permitirle a los estudiantes interactuar con diversas situaciones problema significativas para ellos pero, teniendo en cuenta su desarrollo evolutivo, sus saberes pre existentes y una finalidad específica.

2.5. Pensamiento lógico matemático.

El pensamiento lógico matemático corresponde al conjunto de habilidades que les permiten a las personas resolver las diferentes situaciones problema a las cuales se enfrenta, por medio del análisis de la información, del uso del pensamiento flexible, de los conocimientos que posee con respecto al mundo que lo rodea para aplicarlo a la vida diaria.

Las actividades que realizan los estudiantes al abordar las matemáticas escolares, les permiten desarrollar su pensamiento para lograr hacer la transición entre el nivel de pensamiento operatorio concreto y el nivel de pensamiento operatorio formal, cuya trayectoria, aunque depende en gran medida de su edad cronológica y de su madurez, también puede ser potencializada a través de la estimulación y el contacto diario con acciones en las cuales utilice su pensamiento para la solución de problemas.

El desarrollo del pensamiento lógico requiere de una elaboración interna, que se va estructurando en forma progresiva a través del contacto de los estudiantes con la realidad, y la acción y relación que establece con los objetos físicos a partir de una reflexión individual la cual le permite adquirir las nociones de clasificación, seriación y de número.

En este sentido cabe aclarar que el pensamiento lógico no es parte del pensamiento matemático lo que se logra al potencializar en los estudiantes este tipo de pensamiento, es desarrollar mejores habilidades de pensamiento matemático que redundarán en su desempeño frente a la construcción progresiva del concepto de número.

2.6. Pensamiento numérico.

El pensamiento numérico se desarrolla progresivamente en los niños y niñas desde sus aprendizajes informales en contacto con sus acciones cotidianas, sin embargo, la escuela debe propiciar espacios que le permitan desarrollar la matemática formal a partir de estos conocimientos informales, en este sentido el MEN (2006) asegura que “Los lineamientos Curriculares de Matemáticas plantean el desarrollo de los procesos curriculares y la organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y la numeración” (p. 26), dentro de la propuesta curricular el MEN reconoce el pensamiento numérico como uno de los conocimientos básicos, entendidos como, "los que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas" (MEN, 2006, p. 25), enfatizan además, la importancia de generar en el aula experiencias con las distintas formas de conteo y con las operaciones, ya que, posibilitan una comprensión del concepto de número asociado a la acción de contar con unidades de conteo, con la reunión, la separación, la repetición y la repartición de cantidades discretas (MEN, 2006).

Por otra parte Castro (2008), citado por Bosch (2012) señala que el pensamiento numérico trata de aquello que la mente puede hacer con los números, y que está presente en todas aquellas actuaciones que realizan los seres humanos relacionadas con los números, es decir, el pensamiento numérico se desarrolla y se utiliza en la escuela y en la vida diaria y se potencializa cuando en el aula se tiene en cuenta el conocimiento matemático informal que el estudiante trae consigo, para a partir de este, estructurar los conocimientos matemáticos específicos de cada grado o nivel.

2.7. Construcción del concepto de número.

En 1941 Jean Piaget publicó su teoría con respecto a la construcción del concepto de número, de carácter estructuralista, propone que el niño construye las estructuras lógicas reconstruyendo y reestructurando lógicamente su entorno, en interacción constante. Los niños comparan, clasifican y ordenan en el espacio y en el tiempo, y gracias a estas acciones construyen sus conocimientos matemáticos, por lo tanto, la experiencia de los estudiantes con los objetos es necesaria para el descubrimiento del número (Chamorro, 2005).

Las investigaciones que se han adelantado después de la propuesta de Piaget, replantean diferentes aspectos de sus postulados, consideran que el conteo es un proceso fundamental en la construcción del concepto de número en la etapa infantil, es así como (Gelman & Gallistel, Resnick, Ford & Baroody) citados por Chamorro (2005) aseguran que "…la manera de contar de los niños es un índice de la riqueza de conocimientos matemáticos en las primeras edades así como un factor potencial del desarrollo de las conceptualizaciones numéricas." (p. 153); estas ideas son contrarias a los planteamientos de Piaget, quien afirmaba que las acciones que realizaban los estudiantes para contar eran de tipo repetitivo y mecánico copiadas de algún adulto. Los referentes teóricos en las cuales se apoya esta propuesta se basan principalmente en los aportes de Castro et al. (2005) y los de Gelman & Gallistel (1978) citados por Chamorro (2005). Sin embargo, es necesario resaltar las principales diferencias desde las dos perspectivas:

Tabla 1 Perspectivas del concepto de número.

	Gelman & Gallistel	Piaget
Cardinalidad	Utilización de la última palabra-número empleada en la acción de contar que sirve para nombrar un conjunto.	Comparación de conjuntos con el mismo número de elementos.
Correspondencia	Contar todos los objetos de un conjunto y contarlos una única vez.	Relación uno a uno entre los elementos de dos conjuntos diferentes.
Principio de orden estable	Usar las palabras-número en un orden consistente y en forma convencional.	Comprensión del significado cuantitativo que implica la serie de números; es decir, de su sentido de magnitud creciente.

2.7.1. Técnicas para contar

La capacidad de contar, según afirma Baroody (2000) se desarrolla en los niños a través de la práctica en su entorno inmediato de acuerdo a las necesidades que va encontrando, ya sea en la escuela o en su vida familiar, para esto él desarrolla técnicas para contar, las cuales le permiten contar oralmente una o varias colecciones de objetos, este proceso se da en forma progresiva, hasta que llega a utilizarlas de forma automática con gran eficiencia, de este modo puede procesar simultáneamente el uso de una o varias de las técnicas que va desarrollando. Las técnicas que el niño desarrolla de acuerdo con Baroody (2000) son las siguientes:

Serie numérica oral. Corresponde a una cadena de asociaciones aprendidas de memoria y enlazadas gradualmente entre sí, que puede o no ser convencional, gradualmente el niño logrará hacer uso de reglas que él mismo ha logrado inferir para realizar el conteo de una colección de objetos.

Numeración. Coordina la verbalización de la serie numérica con el señalamiento de cada elemento en una colección, es decir, señala con el dedo cada uno de los objetos a medida que los va contando.

Regla del valor cardinal. Al contar una colección de objetos dice el término cardinal que representa el conjunto entero, sin necesidad de realizar ningún tipo de re-conteo, consiste en recitar la última etiqueta (palabra-número de la secuencia numérica) del proceso de enumeración para indicar la cantidad de objetos contados.

Separación. Esta técnica requiere que el estudiante, observe y recuerde el número solicitado, etiquete cada elemento separado con una etiqueta numérica, controle y detenga el proceso de separación en forma correcta, lo cual le permite contar utilizando la técnica de separar los objetos solicitados y recordar cuántos ha separado.

Comparación entre magnitudes. El niño descubre que el término numérico que viene después en la secuencia es "más" que el término de un número anterior, lo cual le posibilita, comparar la magnitud de dos cantidades dadas y lograr identificar cuál es la mayor y la menor entre estas.

2.7.2. Principios en el proceso de contar

Para Gelman & Gallistel (1978) citados por Chamorro (2005) el conteo requiere que los estudiantes realicen acciones complejas de enumeración con material concreto, en las cuales los niños y niñas puedan separar los elementos contados de los que quedan por contar, ir marcando los elementos ya contados, situar los elementos en una disposición espacial, entre otros; para esto aseguran que los principios en el proceso de contar expresan las competencias que posee una persona cuando tiene que hacer frente a la tarea de contar, a continuación, se describen cada uno de los principios propuestos por Gelman & Gallistel (1978) citados por Castro et al. (1995) y Chamorro (2005).

Principio de orden estable.

Al contar, los elementos de la secuencia se han de recitar, siempre, en el orden establecido.

Principio de correspondencia.

Al contar los elementos de un conjunto, se va recitando la secuencia y a la vez, se van señalando los elementos de un conjunto.

Principio de biunivocidad.

A cada elemento del conjunto se le asignará una palabra numérica y recíprocamente; cada palabra estará asociada con un elemento.

Principio de cardinalidad.

El último término obtenido, al contar todos los objetos de la colección, indica el número de objetos que tiene dicha colección.

Principio de irrelevancia del orden.

El cardinal de un conjunto, o sea, el número de elementos obtenidos al contar sus elementos, no depende del orden en que éstos estén dispuestos para contarlos.

Principio de abstracción.

Cualquier conjunto o colección de objetos físicos es contable. Puede suceder que los elementos que forman el conjunto sean todos homogéneos (lápices), o que no lo sean (lápices y bolígrafos), en este último caso, el resultado de contar habrá que expresarlo en una categoría superior que comprenda a las dos anteriores como subconjuntos (útiles para escribir).

2.7.3. Niveles de la secuencia numérica.

Entre las primeras experiencias que los niños tienen con los números está la que surge del contacto con los términos o palabras numéricas. La sucesión convencional: uno, dos, tres... (Fuson & Hall, 1980) citado por (Castro et al, 2005) es alcanzada por los niños y las niñas en forma progresiva y requiere de actividades significativas en los cuales ellos puedan seguir la secuencia numérica en diferentes contextos numéricos.

Para lograr el dominio de la secuencia numérica el niño y la niña recorren cinco niveles (Castro, 2005).

Nivel cuerda. La sucesión empieza en uno y los términos no están diferenciados, es decir, el niño cuenta unodostrescuatrocincoseis…indiferenciando las palabras-número, por tanto, los números carecen de individualidad.

Nivel cadena irrompible. La sucesión comienza en uno y los términos están diferenciados, por tanto, la secuencia numérica solo puede ser recitada en estricto orden y no puede empezarse en cualquier número, en este nivel los niños empiezan a tener la posibilidad de realizar una correspondencia término a término, pero, la serie solo puede ser recitada partiendo de uno.

Nivel cadena rompible. La sucesión comienza en un término cualquiera, lo que implica que los niños pueden comenzar a contar empezando por cualquier número, puede pararse donde desee porque ya logra realizar una clara relación ordinal entre los elementos de la secuencia.

Nivel cadena numerable. Contar *n* términos desde *a* hasta *b*. El niño puede contar en ausencia de los objetos físicos. Aparecen dos nuevas habilidades para contar: contar *n* cantidad a partir de un número *a*, y contar de *a* hasta *b* para encontrar el número de palabras que los separan.

Nivel cadena bidimensional. Desde un término cualquiera, *a*, se puede recorrer la sucesión en ambas direcciones, lo cual permite contar con habilidad hacia adelante y hacia atrás.

Este estudio pretende desarrollar el concepto de número a través de la resolución de PVEA categoría cambio. A continuación, se conceptualiza la RPM y la forma de abordarlos en el aula de clase durante los primeros años escolares haciendo énfasis en los PVEA.

2.8. Resolución de problemas matemáticos

La resolución de problemas matemáticos ha sido un tema de discusión de varios autores debido la interpretación que se le ha dado a la definición y al enfoque de la resolución. En este sentido, la definición que se ha adoptado para esta propuesta de investigación es planteada por Castro et al. (1995) al considerar que:

> Un problema matemático es toda situación que entrañe una meta a lograr y en donde casi siempre existirá un obstáculo para alcanzar dicha meta. La situación es normalmente cuantitativa y casi siempre se requieren técnicas matemáticas para su resolución, pero es posible a veces resolverlos por una deliberación caso de no conocer el algoritmo necesario para tal ocasión. (p. 42).

Autores como Santos (1997) aseguran que aprender matemáticas no solo implica apropiarse de los conceptos acerca de los números, resolver operaciones o trazar figuras geométricas, también incluye el resolver problemas. En diferentes propuestas curriculares recientes se afirma que “la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática." Santos (1997) citado por (García 2010).

La resolución de problemas matemáticos en la escuela se ha abordado en tres enfoques diferentes (Stanic & Kilpatrick, 1988) el primero hace referencia a resolver problemas como contexto, en este primer enfoque se entiende la resolución de problemas no como una meta en sí misma, sino el medio por el cual se alcanzan otros objetivos curriculares, esto significa que el profesor propone una situación problema y, en el proceso de resolución, se van desarrollando los contenidos pertinentes. El segundo enfoque se refiere a la resolución de problemas como habilidad, es decir, el desarrollo de problemas rutinarios permite adquirir una habilidad superior y para ello el docente, primero explica los conceptos para luego proponer las situaciones en las cuales pretende poner en práctica lo aprendido. Y el tercer enfoque se sustenta bajo la idea, que el resolver problemas es un ejercicio de matemáticos y personas expertas, para ello el currículo se enfoca en la enseñanza de estrategias o heurísticas que permitan su resolución.

El enfoque bajo el cual se sustenta esta propuesta de investigación es la resolución de PVEA como contexto para que los estudiantes construyan el concepto de número. Por lo cual, se considera la resolución de problemas como la justificación para mostrar el valor, la importancia y la utilidad de las matemáticas. Al respecto el MEN (2006) menciona que "Las aplicaciones y los problemas no se deben reservar para ser considerados solamente después de que haya ocurrido el aprendizaje, sino que ellas pueden y deben utilizarse como contexto dentro del cual tiene lugar el aprendizaje" (p. 57). En los lineamientos de matemáticas (MEN, 2006), también se menciona que

> En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel. (p. 52)

2.8.1. Obstáculos metodológicos en la resolución de problemas matemáticos.

Uno de los obstáculos más comunes en la enseñanza de las matemáticas es la metodología basada en el aprendizaje de las operaciones y su algoritmo convencional, de tal forma que el proceso de resolución de problemas se concibe como un tópico aislado de menor importancia, este aprendizaje memorístico y repetitivo se enseña de manera aislada sin un contexto significativo para los estudiantes, de esta manera, los contextos metodológicos de los problemas que se plantean en la escuela carecen de relación con la realidad y vivencias de los estudiantes, esto implica que no encuentren sentido ni funcionalidad en el trabajo de clase.

Gómez Palacios (1988) citado por García (2010) afirma que:

> …un obstáculo es considerar que los problemas son enunciados que se resuelven a través de un algoritmo u operación, se cree que el niño, por el hecho de conocer el algoritmo de las operaciones, lo va a aplicar en la resolución de problemas pues es algo que ya aprendió (p. 20).

La RPM propone que se debe aprovechar los métodos informales que los niños inteligentemente descubren y llevarlos a otros más formales y generales. En este recorrido los niños descubren el sentido de las operaciones y su aplicabilidad en la toma de decisiones para ciertas situaciones. Gómez (1988) citado en García (2010) afirma que:

> Aun cuando puedan resolver algoritmos de todo tipo, no saben qué operación emplear para resolver un problema. Prueban con una y otra, incluso con operaciones tan distintas como la resta y la multiplicación, buscando un resultado que les suene lógico y muchas veces ni siquiera esto. Obtener el resultado del problema es determinante para el alumno aun cuando resulte absurdo en relación con el planteamiento del problema (p. 21)

Al respecto García (2010) menciona que:

> La enseñanza tradicional basada en que los alumnos aprendan las operaciones aritméticas para después aplicarlas en el contexto de la resolución de problemas ha ocasionado que los niños no sepan qué operación realizar al enfrentarse al planteamiento escrito o verbal de un problema. (p. 68).

Actualmente se aconseja introducir los problemas a la vez que se enseñan operaciones apropiadas para resolverlos; Kamii citada en Castro et al. (2006) considera dos razones por las cuales es importante generar espacios en la resolución de problemas al tiempo que se enseña el objeto matemático, la primera razón, se refiere a que las investigaciones han demostrado que los niños pequeños son capaces de resolver problemas, a veces, mejor que los que ya han sido sometidos a un aprendizaje para tal efecto; la segunda razón, se refiere a entender que los niños construyen su conocimiento aritmético a partir de la realidad.

Lo anterior deja en evidencia la importancia de resolver problemas para enseñar el objeto matemático, solo si, la situación que se plantea tiene relación y sentido para el estudiante y se constituye como un reto o desafío para quien lo resuelve.

2.8.2. Problemas de estructura aditiva.

La concepción que tradicionalmente se ha tenido de los problemas de estructura aditiva está relacionada con una situación que se resuelve empleando el algoritmo de la suma y la resta, sin embargo, los niños utilizan estrategias informales para resolver este tipo de problemas sin recurrir a ningún algoritmo conocido, entre estas estrategias por ejemplo está las estrategias de conteo. (García, 2010)

2.9. Clasificación de los PVEA.

Los problemas verbales de estructura aditiva pueden clasificarse de acuerdo al tipo de estructura y la relación semántica que existe entre los datos del problema. Algunos autores como Vergnaud (1991) citado en García (2010) considera que al modificar la posición de la cantidad desconocida y la colocación del resultado de la operación se incrementa la dificultad para comprender y analizar los problemas, otros autores como Carpenter & Moser (1983) plantean seis tipos de sentencias abiertas para la suma y seis para la resta.

Tipos de sentencias abiertas	
Para la suma	Para la resta
a + b = ? a +? = c ? + b = c ? = a + b c = ? + b c = a + b	a - b = ? a -? = c ? - b = c ? = a - b c =? - b c = a -?

Puig & Cerdán (1995) presentan la clasificación de los PVEA en cuatro categorías: cambio, combinación, comparación e igualación. En esta clasificación se distinguen tres cantidades presentes en todos los problemas, un estado inicial, un estado final y la transformación o diferencia entre el inicial y el final. Los problemas de cambio e igualación describen una relación dinámica, pues es necesario el aumento o la disminución para resolverlos; por el contrario, los problemas de comparación y combinación sólo plantean una relación estática[2] entre sus cantidades.

Las sentencias descritas por Carpenter & Moser (1983) son perfectamente aplicables a cada uno de los tipos de problemas descritos por Puig & Cerdán (1988). Sin embargo, en este trabajo investigativo se tendrán en cuenta las sentencias en donde la operación aparece al lado izquierdo, es decir las tres primeras sentencias para la suma y para la resta por considerarse las que presentan menor dificultad para los estudiantes Bruno (2006)

A continuación, se describen las cuatro categorías de los PVEA expuestas por Carpenter & Moser (1983) con un ejemplo para cada una, sin embargo, La categoría que se utilizará para esta propuesta de intervención es la de cambio porque al ser la primera vez que se les propone este tipo de tareas a los estudiantes, es conveniente iniciar el proceso formulándoles este tipo de categoría debido a que son las que presentan un menor nivel de dificultad para los estudiantes Bruno (2006).

2.9.1. Categoría 1. Cambio.

La categoría de cambio implica una secuencia temporal de sucesos, en los cuales se describe cómo una cantidad inicial es sometida a una acción directa que la modifica.

Iván tenía 4 caramelos. Luego, Teresa le dio 5 caramelos más. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Iván?

2.9.2. Categoría 2. Combinación.

Los problemas en esta categoría se describen como una relación entre conjuntos que responden a un esquema parte-todo; en esta categoría los dos conjuntos iniciales no se alteran, sino que se combinan en el resultado.

Iván tiene 4 caramelos, Teresa tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen los dos juntos?

[2] Estático: permanece en un mismo estado y no experimenta cambios.

2.9.3. Categoría 3. Comparación.

En esta categoría las cantidades presentan una relación estática, estos problemas son de comparación entre cantidades y es necesario emplear las expresiones “más que” y “menos que”

Iván tiene 4 caramelos, Teresa tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos más tiene Teresa que Iván?

2.9.4. Categoría 4. Igualación.

Este tipo de problemas se caracteriza porque existen en ellos una comparación entre magnitudes que aparecen relacionadas por medio del comparativo de igualdad “tantos como”

Iván tiene 4 caramelos, Teresa tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos necesita Iván para tener tantos como que Teresa?

2.10. Niveles del proceso de resolución de problemas matemáticos

Los niveles de resolución de problemas matemáticos propuestos por García (2010) proporcionan información, acerca de cómo evoluciona en el niño su capacidad para resolver problemas matemáticos, describen diferentes manifestaciones, momentos, relaciones y destrezas intelectuales que los estudiantes ponen en juego cuando se enfrentan a la tarea de resolver los problemas matemáticos.

Con el fin de comprender el proceso de resolución de problemas que siguen los estudiantes en este estudio, se creó un instrumento de recolección de datos basado en estos niveles evolutivos con el fin de captar y explicar de manera profunda el desarrollo de las capacidades de los niños y niñas frente a la RPM.

A continuación se hará una descripción de cada uno de los niveles del proceso de la resolución de los problemas matemáticos propuestos por (García, 2010) y que les facilitó a las investigadoras analizar este proceso en los estudiantes.

Nivel arbitrario.

Los estudiantes que se encuentran en este nivel al enfrentarse a la resolución de un problema matemático por lo general: no hacen nada, manifiestan que no saben o no pueden, juegan con el material concreto (en caso de que se les provea), escriben letras, seudografías o números arbitrariamente, es decir, no guardan ninguna relación con los datos presentados en el planteamiento del problema (García, 2010), sin embargo, los estudiantes transitan por tres sub niveles, a saber:

- ✓ *Realiza dibujos de los objetos que se le mencionan de manera verbal* sin respetar la conservación de la cantidad. Hacen un primer intento por representar en forma gráfica lo que han logrado interpretar por lo general realizan el dibujo o los dibujos de objetos significativos para ellos incluso se dibujan ellos mismos.

- ✓ *Copia los datos numéricos del problema*, en este momento los niños y las niñas representan lo que han logrado entender utilizando algunos números pero no en forma convencional, es decir, estos números no representan las cantidades descritas ni conducen a la solución, pero dan los primeros indicios de que entienden que los números hacen parte de las matemáticas.

- ✓ *Representa correctamente por medio de material, dibujos e incluso números*, sin embargo aún no logra establecer relaciones entre las cantidades que logran representar, al solicitarle la solución del problema manifiesta que no sabe o dice una cantidad al azar, por tanto, no realiza las acciones necesarias para resolver el problema.

En este nivel los estudiantes no logran interpretar coherentemente la información dada en el planteamiento del problema, debido en gran medida a que aún no han construido el concepto de número y las cantidades, por tanto, carecen de sentido, tampoco encuentran significado en la información brindada y al no encontrar interés por alcanzar el resultado no logran realizar una acción consciente y analítica para resolverlo. (García, 2010).

Nivel concreto manipulativo.

Cuando un estudiante se encuentra en este nivel, utiliza materiales físicos, los mencionados en el problema o cualquier otro objeto como fichas, piedras, semillas u otros, los cuales representan o sustituyen los elementos enunciados, este es el primer método que utilizan los niños y las niñas encaminado hacia la resolución del problema, este método les provee la representación mental de las acciones experimentadas a través del material concreto. (García, 2010)

Los sub niveles que hacen parte del proceso que sigue el estudiante al momento de resolver un problema, son los siguientes.

- ✓ *Dramatiza las acciones que se plantean en el problema.* En este subnivel los estudiantes utilizan material concreto con el fin de establecer una relación entre los datos que empieza a comprender y los objetos que tiene a la mano, pero, requieren que los objetos concuerden exactamente con los que se mencionan en el problema, es decir en caso de ser manzanas o lápices, él requiere tener a mano manzanas o lápices necesariamente considera imposible resolver el problema sin el apoyo del material concreto.

- ✓ *Aceptan que otros objetos puedan sustituir los objetos que se enuncian en el problema.* Es así, como logran utilizar en un problema en el que aparecen manzanas o lápices otros materiales como tapas o fichas para remplazarlos, aunque inicialmente necesariamente los objetos sustituidos deban tener alguna similitud con los descritos en el problema progresivamente el niño será capaz de utilizar otros que no guarden ningún tipo de isomorfismo con las manzanas o lápices, pero entenderá que estos también puedan representarlos (García, 2010).

Nivel pictórico

A partir del uso que le ha dado al material concreto, el estudiante ha logrado vivenciar diferentes experiencias prácticas, las cuales le permiten en este momento estructurar sus ideas en forma organizada, por tanto, es capaz de realizar ahora la representación en forma inversa, que según García (2010) se refiere a que los estudiantes "hacen uso de las interiorizaciones de los conceptos que ha adquirido en el nivel anterior para representar de manera pictórica las acciones que considera significativas." El niño necesita apoyarse en representaciones gráficas no convencionales como: líneas, círculos u otros dibujos de los elementos enunciados en el problema, esto evidencia que empieza a darse cuenta que las acciones que realiza tienen que ver con las matemáticas pero aún no tiene claro el sentido de las operaciones convencionales, por esta razón los niños y las niñas al intentar resolver un problema prefieren utilizar sus estrategias personales alejadas de las formales aunque ya se les hayan enseñado, por tanto García (2010) asegura que "…estos procedimientos informales se apoyan en los auténticos saberes y experiencias propias del alumno, por lo que están más acordes con su nivel cognitivo; además por el momento le resultan más seguros para llegar a la respuesta."

Los subniveles por los que pasan los estudiantes en este nivel son los siguientes:

- ✓ *Incluye el uso de figuras y dibujos apegados al referente real.* Según el planteamiento del problema el niño realizará dibujos fieles a los objetos que se nombran, por ejemplo en caso de ser flores, carros, pelotas, él dibujará estos elementos específicamente y de acuerdo a las relaciones que se manejen en el planteamiento, él incrementará o disminuirá los dibujos originales o bien puede realizar trazos, encerrar conjuntos para la suma o cruzar o borrar para la resta.

- ✓ *El dibujo persiste pero, el niño sustituye el isomorfismo*[3] *por un esquema que lo represente.* En este momento es capaz de remplazar los dibujos de los elementos que indica el planteamiento del problema por líneas rectas, círculos, cruces, entre otros con el fin de realizar sus representaciones gráficas propias.

- ✓ *Realiza acciones para resolver el problema sin representar el resultado.* Solo representa los datos o parte de ellos en forma verbal, sin embargo, considera que el resultado se encuentra implícito en las acciones, trazos o dibujos que realiza.

- ✓ *Manifiesta acciones donde se observan trazos que indican una transformación.* Agrupa dibujos en un círculo, tacha o separa elementos mediante un espacio o una línea, sin embargo la respuesta es incorrecta debido a errores como omisiones en el conteo, o al contar más de una vez el mismo objeto, o dibujar uno o más elementos o menos de los que debía dibujar, sin embargo, estos errores no están asociados con la comprensión del problema sino con la falta de habilidad y precisión en el proceso de contar.

- ✓ *Representa pictóricamente el resultado correcto pero no así las acciones que evidencian el proceso de resolución.* Manifiesta gráficamente el resultado más no las acciones

---

[3] Isomorfismo. Significa igual forma, con la utilización de este término se busca destacar la idea según la cual existen similitudes y correspondencias formales entre diversos tipos de sistemas, por tanto, la palabra isomorfismo se refiere entonces a la construcción de modelos de sistemas similares al modelo original, cuándo el estudiante pasa por el nivel pictórico de la RPM logra sustituir el isomorfismo por un esquema que lo represente.

previas que realizó, ha empleado una estrategia de conteo mental o se ha apoyado en el uso de sus dedos, piensa por tanto que es suficiente con comunicar la respuesta a través de una representación que las demás personas logren comprender.

- ✓ *Advierte que las acciones que indican el estado inicial y las transformaciones del problema también pueden ser representadas.* En este momento el estudiante siente la necesidad de exteriorizar las acciones que ha realizado para llegar a la solución del problema, esto se debe a las nuevas capacidades que ha adquirido, a las nuevas relaciones y significados que se le plantean llegando a alcanzar en forma progresiva una representación más compleja y explícita.

Nivel pictórico-simbólico.

Se caracteriza de acuerdo con (García, 2010) por el intento que él niño hace por abandonar la representación pictórica como procedimiento para resolver el problema, pero carece del domino necesario para hacer uso de las operaciones convencionales, por lo tanto, los niños y las niñas continúan acompañando sus procedimientos con dibujos que le dan significado y seguridad al proceso de resolución.

En este momento el niño realiza un gran esfuerzo por traducir la enseñanza recibida a un modelo propio de organización de la información y aunque las representaciones son distorsionadas adquieren un significado muy valioso para los estudiantes, estos significados se traducen en el uso de procedimientos convencionales para la resolución.

Los subniveles que recorren los estudiantes en este nivel se describen a continuación.

- ✓ *Emplea en primer término estrategias pictóricas para resolver el problema.* En este subnivel el estudiante intenta llegar a la solución identificando las relaciones y las acciones que se dan en el planteamiento del problema haciendo uso de alguna operación convencional, en este momento ya tiene claro que se trata de un problema de suma o resta, sin embargo, al intentar remplazar su estrategia pictórica por una operación convencional, el estudiante puede incurrir en errores por carecer de su dominio, al contrastar el resultado haciendo uso de su estrategia pictórica y el resultado con la operación convencional, le da más valor a la respuesta con esta última y desprecia el resultado obtenido al resolverlo en forma pictórica (García, 2010) .

- ✓ *Utiliza el procedimiento convencional como resultado del proceso que ha seguido desde el nivel pictórico.* Esto se observa en que los datos contenidos en la representación simbólica que el estudiante presenta guardan mayor relación con los procedimientos informales que ha utilizado que con los datos contenidos en la formulación del problema; en este momento el estudiante desea demostrar que es capaz de hacer uso de los procedimientos matemáticos formales.

- ✓ *Hace uso del algoritmo convencional como herramienta para comprobar el resultado.* El niño utiliza un procedimiento formal (operaciones aditivas) con el fin de comprobar un procedimiento pictórico previo y así asegurarse de que la respuesta del problema es correcta.

- ✓ *Invierte los procedimientos para resolver el problema.* Hace un primer intento por realizar procedimientos simbólicos convencionales, pero como aún no se siente seguro, vuelve a realizar el problema empleando una estrategia pictórica para comprobar que su respuesta sea la correcta.

- ✓ *Realiza los problemas mentalmente a través de hechos conocidos o derivados.* Da la respuesta correcta o incorrecta basado en cálculos mentales propios, no hace ningún tipo de representación, se limita a escribir en forma convencional el resultado del problema, no deja ninguna huella del procedimiento utilizado y la mayoría de las veces el resultado es correcto o aproximado, los niños utilizan estrategias mentales o sus dedos para hacer su propios cálculos.

Nivel simbólico con fallas en la convencionalidad

En este momento el niño logra acceder a la representación simbólica, se desprende completamente de los procedimientos de la representación pictórica. Comprende el sentido de las operaciones convencionales, sabe para que se emplean y en qué momento pero, esto no garantiza, que logre resolver los problemas planteados en forma correcta o con la operación necesaria.

Los subniveles por los que pasan los estudiantes al resolver los problemas en este subnivel son.

- ✓ *Utilizan los símbolos numéricos como apoyo para resolver el problema.* Aunque en este momento los niños utilizan los símbolos numéricos para resolver los problemas aún carecen de una estructura aritmética, no utilizan los signos u omiten alguno de los datos numéricos. El niño no necesita dibujar los elementos enunciados, ya que, logran comprender que un signo numérico puede representar la misma cantidad con un menor esfuerzo, sin embrago, no encuentran significado en los signos (+, -) porque se centran es en establecer las relaciones entre las cantidades que les "dice" el problema muy a pesar de que ya se las hayan enseñado.

- ✓ *Emplea operaciones matemáticas que no guardan relación con el planteamiento del problema.* A pesar de que los estudiantes utilicen una operación incorrecta logran resolver el problema en forma correcta, esto se debe a que aciertan en las relaciones involucradas, en el procedimiento interno que realizan al igual que en la representación numéricas que emplean, sin embrago, la abstracción que los niños hacen en este momento es limitada porque no consideran todos los aspectos de la convencionalidad, ya sea por omisión o por desconocimiento.

- ✓ *Elige una estructura convencional para resolver el problema empleando la operación inversa con la que resolvería un adulto o un niño mayor.* Es decir utiliza una suma para un problema que sugiere una resta, esto sucede "cuando el estudiante se encuentra confundido porque no logra comprender si la respuesta corresponde al dato que se encuentra después del signo igual o al dato que hacía falta en la transformación o estado inicial". (García, 2010). Esta especificidad sucede cuando al estudiante se le presenta un problema donde la incógnita no se encuentra en el estado final.

- ✓ *Sigue un procedimiento convencional adecuado pero llega a un resultado incorrecto.* En este momento el estudiante no maneja todos los aspectos de la convencionalidad de forma simultánea, por tanto incurre en errores relacionados con la colocación inadecuada de los datos numéricos, no considerar el valor posicional o cálculos equívocos.

- ✓ *Utiliza operaciones convencionales simples para resolver los problemas.* Se aferra a las operaciones matemáticas simples que ya maneja aunque ya podría utilizar una más evolucionada, por tanto, prefiere utilizar una operación convencional más laboriosa, con un nivel de abstracción más simple, pero, se asegura de este modo que el resultado sea correcto. El proceso descrito es una evidencia importante de que el estudiante pronto tendrá acceso a otros métodos que exigen una mayor abstracción y así lograr simplificar las operaciones necesarias para la resolución de un problema en forma más rápida.

Nivel simbólico convencional.

Resuelve los problemas matemáticos utilizando operaciones convencionales apropiadas y económicas, en este nivel el niño posee un grado de abstracción y representación mental superior que le permite hacer uso de procedimientos complejos evitándole la utilización de operaciones reiterativas y procedimientos laboriosos (García, 2010).

Los subniveles por los que pasan los estudiantes en este nivel son:

- ✓ *Emplea las operaciones matemáticas considerando todos los aspectos convencionales.* Es capaz de seleccionar la operación que le permite llegar con menor esfuerzo al resultado, encuentra por tanto métodos que abrevian procedimientos previos, que aunque eran de tipo convencional requerían de muchos cálculos. Este es el nivel de resolución de problemas más evolucionado en el primer ciclo de educación primaria, en este momento el estudiante construye un sistema coherente organizando los datos de forma organizada lo cual le posibilita resolver de manera eficiente los problemas que se le planteen.

2.11. Estrategias para resolver problemas.

Cuando los estudiantes se enfrentan a la resolución de problemas utilizan una serie de recursos y técnicas informales para intentar resolverlos, estas técnicas constituyen la base sobre la cual se aprenden los algoritmos formales como la suma y la resta. En este sentido, es importante permitir que los estudiantes experimenten estos procesos propios para la solución de los problemas, los cuales le van a permitir encontrar sentido y utilidad a la operación aritmética que van a aprender. (Carpenter & Moser 1989)

Del mismo modo, (Carpenter & Moser 1989) citados por Bruno (2006) realizan un extenso estudio donde clasifican los procedimientos y técnicas que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas de estructura aditiva y los categorizan en tres tipos: modelaje directo, conteo verbal y estrategias mentales.

2.11.1. Estrategias de modelaje directo.

Estas estrategias se caracterizan por la manipulación de objetos como formas de representaciones directas en las entidades del problema, en la adición es común que los niños usen alguna colección de objetos preexistentes en el salón o los dedos.

Para la suma	**Para la resta**
Contar todo: El niño representa ambas colecciones de objetos por separado, usando cubos o dedos, y vuelve después a contar desde el principio la colección compuesta.	Separar de. Los niños forman el conjunto mayor de objetos, después separa de ellos, de una sola vez, un conjunto de objetos igual al sustraendo y cuenta la cantidad de objetos restantes. Añadir. El estudiante forma el conjunto de objetos correspondiente al sustraendo y añade tantos objetos hasta tener el número que indica el minuendo. Después cuentan los objetos añadidos, encontrando así la respuesta. Emparejamiento. El niño representa las colecciones de objetos indicadas en el minuendo y sustraendo. Las compara estableciendo una correspondencia uno a uno. La respuesta es el número de objetos que no tienen pareja.

2.11.2. Estrategias de la secuencia numérica o conteo verbal.

En esta estrategia los niños no construyen físicamente los conjuntos, sino que utilizan su conocimiento sobre los números y sobre el recuento. En este procedimiento, los estudiantes introducen la serie numérica verbal en un punto diferente al uno, contando en forma ascendente o descendente,

Para la suma	**Para la resta**
Contar todo. Esta estrategia es similar a contar todo con objetos, pero el niño usa algún marcador o contador para saber cuándo tiene que parar de contar, como pueden ser los dedos. Contar a partir del número mayor. Empieza a	Contar hacia atrás desde. El niño cuenta a partir del minuendo hasta que alcanza el sustraendo. La respuesta es la cantidad de números emitidos. Contar a partir de. El niño cuenta a partir del número menor hasta que alcanza el

contar a partir del sumando mayor. En 2 + 3, dice “tres” y cuenta “cuatro” y “cinco”. Contar a partir del primer sumando. Empieza a contar a partir del primer sumando dado.	número mayor. La respuesta es la cantidad de números emitidos.

2.11.3. Estrategias mentales.

Con esta estrategia los niños utilizan hechos numéricos que recuperan de la memoria. Son las estrategias que les permiten a los estudiantes hallar la respuesta a un PVEA, desprendiéndose de los cálculos realizados con el conteo de objetos concretos.

Para la suma y la resta
Hecho memorizado: el niño memoriza sumas y restas como si fueran tablas. Hecho deducido: el niño hace un razonamiento del tipo: “si 8 + 3 = 11 entonces 7 + 3 = 10” “si 8 – 3 = 5 entonces 7 – 3 =4”

Con el fin de desarrollar el concepto de número a través de la resolución de PVEA, se diseñó una unidad didáctica planificada a partir del ciclo de análisis didáctico de Gómez (2007)**.** A continuación, se realiza una aproximación teórica con respecto a la propuesta de Pedro Gómez en su tesis doctoral.

2.12. Análisis didáctico

El análisis didáctico, Gómez (2007) como una conceptualización del modo ideal en el que el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar, actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Pedro Gómez parte de las investigaciones realizadas previamente por Rico (1997), dichas investigaciones tienen su origen en las dificultades y deficiencias que han encontrado en la planificación del profesor de matemáticas, relacionada con una estructura matemática específica dentro del currículo local, los dos participan en un plan de formación de docentes de matemáticas de secundaria en la universidad de Granada.

El trabajo desarrollado por Pedro Gómez al momento de realizar su tesis doctoral y de Luis Rico como su asesor, se encuentra enmarcado en la didáctica de la matemática y el pensamiento numérico. La inquietud que sustenta sus investigaciones se relaciona directamente con la instrucción del profesor como componente primordial dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas escolares, ya que, “las matemáticas que aprenden los escolares y cómo las aprenden depende de la instrucción que reciben en la escuela” (Ball, Lubienski & Mewbor, 2001, p.435; Wood, 2002, p. 202) citado por (Gómez, 2007, p.28), por tanto, es necesario que los profesores de matemáticas en formación (y los docentes en ejercicio) desarrollen procesos de formación que les permitan realizar un análisis profundo de los temas matemáticas escolares.

El currículo global (estándares internacionales y nacionales, directivas gubernamentales, planificación institucional que determinan los contextos, social, educativo e institucional) ofrece el conjunto de objetivos, contenidos, metodología y evaluación de la totalidad de una asignatura. El docente debe organizar con base en estos el diseño del currículo local, y así planificar y gestionar su clase; para esto, él toma como base los libros de texto, su sistema de creencias, sus experiencias previas, documentos, materiales de apoyo, pero priorizando el uso de los libros de texto (Gómez, 2007), desde esta mirada afirma Gómez (2007) que el profesor tiende a “ver la planificación como la secuenciación de contenidos matemáticos y a considerar la enseñanza como el “cubrimiento” de estos contenidos” (p. 15), dejando de lado aspectos relevantes y primordiales como: las problemáticas conceptuales, cognitivas y de instrucción de las estructuras matemáticas específicas.

El análisis didáctico se circunscribe en el nivel local del currículo como un “procedimiento en virtud del cual el profesor planifica, lleva a la práctica y evalúa una unidad didáctica, una hora de clase o una porción de una clase”. (Gómez, 2007, p. 21), en dicha unidad didáctica el objeto de instrucción es el contenido matemático, este contenido corresponde a una estructura matemática específica o más aspectos de una estructura matemática, se da en un tiempo limitado y la especificidad del contenido permite profundizar en sus múltiples significados (Gómez, 2007).

Este análisis está compuesto por cuatro análisis: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación, para comprender a profundidad cómo implementar la unidad didáctica para este estudio, a continuación, se realizará una descripción teórica de los cuatro análisis propuestos por (Gómez, 2007).

2.12.1. Análisis de contenido.

El análisis de contenido se refiere a la dimensión conceptual de las matemáticas en el nivel de la planificación local, proporciona las herramientas necesarias para analizar los temas matemáticos escolares, identificar y organizar su multiplicidad de significados; para ello se debe realizar una revisión del contenido matemático con el fin de conocer a profundidad sus diferentes significados (Gómez, 2007). El análisis de contenido se debe abordar a través de tres organizadores del currículo:

Estructura conceptual: permite identificar los elementos del campo conceptual del tema matemático a abordar considerando la estructura del propio concepto, la estructura de la que el concepto forma parte y las relaciones entre estos conceptos, para a partir de ellos identificar los procedimientos que se deben realizar. La clasificación cognitiva de los contenidos se debe llevar a cabo teniendo en cuenta el campo conceptual y el campo procedimental de la estructura matemática.

Tabla 2 Elementos de la estructura conceptual.

CAMPO CONCEPTUAL	CAMPO PROCEDIMENTAL
✓ Hechos: términos, notaciones, convenios, resultados. ✓ Conceptos: conjunto de hechos y relaciones entre ellos. ✓ Estructuras conceptuales: sistemas de conceptos relacionados entre sí	✓ Destrezas: se ejecutan procesando datos. ✓ Razonamientos: se ejecutan sobre conceptos. ✓ Estrategias: se ejecutan sobre estructuras conceptuales.

Para realizar un análisis de contenido riguroso es necesario que el docente utilice diferentes fuentes de información (su propio conocimiento, documentos curriculares, libros de texto, internet, literatura en educación matemática, textos de matemática avanzada), hacer luego un listado de los elementos propios del tema matemático y con base en estos elementos construir un mapa conceptual en el cual represente en forma visual la estructura matemática, su campo conceptual, su campo procedimental y las relaciones entre estos.

Sistema de representación: hace referencia a los sistemas de signos que permiten designar un concepto referido a una estructura conceptual, permiten representar los conceptos y los procedimientos matemáticos que la configuran.

En la estructura matemática que pretende analizar este estudio, se pueden considerar los siguientes sistemas de representación: numérico, verbal, pictórico y manipulativo

Fenomenología: es el tercer organizador del currículo del análisis de contenido, se apoya en la información proveniente de la estructura conceptual y los sistemas de representación. La relevancia de este organizador, está en que brinda los referentes conceptuales y metodológicos encaminados a desarrollar en los estudiantes "…una formación matemática en los escolares que desarrolle sus capacidades para enunciar y abordar problemas expuestos en contextos no matemáticos y resolverlos con el uso de las herramientas matemáticas que corresponden…" (Gómez, 2007, p. 47), para ello es necesario que en las aulas de clase se planifiquen tareas escolares, encaminadas a resolver problemas con el uso de conceptos y procedimientos matemáticos en diferentes contextos y situaciones (Gómez, 2007).

La fenomenología, por tanto, se centra en dar un sentido práctico al propósito de establecer una relación entre una estructura matemática y los grupos de fenómenos asociados a ella.

Los fenómenos de una estructura matemática se deben organizar en: contextos fenomenológicos y subestructuras.

2.12.2. Análisis cognitivo.

Este análisis se realiza en el nivel de la planificación del profesor en cuanto al tema matemático concreto, teniendo en cuenta la visión funcional de las matemáticas y la posición constructivista del aprendizaje, en este análisis se hace una descripción de lo que el profesor espera que el estudiante aprenda sobre el tema matemático y sobre sus previsiones acerca del modo en que el estudiante va a desarrollar ese aprendizaje (Gómez, 2007).

El análisis cognitivo le posibilita al docente, establecer las expectativas de aprendizaje que desea desarrollar en el tema matemático y caracterizar las expectativas de aprendizaje del tema, en este sentido (Gómez, 2007) aclara que"…se presentarán distintas herramientas que permitirán expresar las hipótesis del profesor sobre cómo se puede desarrollar el aprendizaje al abordar tareas matemáticas" (p. 3), además hace especial énfasis al afirmar que dichas herramientas "tendrán en cuenta las capacidades que activen los estudiantes al resolver problemas, las dificultades y los errores que surjan en el proceso de aprendizaje" (Gómez, 2007, p. 3).

Después de realizar el análisis cognitivo del tema matemático, el docente formulará los objetivos de la unidad didáctica, los cuales se convertirán en la información de referencia para el análisis de instrucción y el de actuación.

2.12.3. Análisis de instrucción.

El análisis de instrucción, se sustenta en una visión funcional de las matemáticas escolares, al considerar que el aprendizaje de las matemáticas implica que el estudiante encuentre utilidad en los conocimientos que va aprendiendo y los utilice en diversos contextos para la resolución de problemas; en una visión del aprendizaje, en la cual, los estudiantes aprenden matemáticas cuando al abordar tareas complejas ponen en juego los conocimientos y las destrezas con las cuales cuentan, interactúan con sus compañeros y docente, reflexionan sobre las tareas propuestas y encuentran su solución; y una visión de la enseñanza en la cual la función del docente (desde las expectativas de aprendizaje que tiene con respecto a lo que los estudiantes deben aprender y de la detección de las dificultades y los errores) es la de proporcionar las oportunidades de aprendizaje necesarias para que el estudiante logre esas expectativas y supere las limitaciones iniciales. (Gómez, 2007).

De acuerdo con lo anterior, el docente propone las tareas que considere necesarias para brindarles las oportunidades de aprendizaje a sus estudiantes; Por lo tanto, el análisis de instrucción posibilita que el docente reflexione y analice cuidadosamente las tareas escolares que va a poner en escena, entendiendo el término tareas escolares desde la mirada de Gómez (2007) como:

> …una demanda estructurada, con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje, que el profesor propone a los estudiantes. Una tarea incluye, además de su formulación, elementos como sus requisitos y metas, el uso de materiales y recursos, formas de agrupar a los estudiantes, estrategias de interacción entre los estudiantes y con el profesor, y su temporalidad. (p. 32).

El análisis de instrucción se basa en la información que surge del análisis de contenido y del análisis cognitivo, a partir de esta información, el docente formula las tareas que considere pertinentes y necesarias.

2.12.4. Análisis de actuación.

El análisis de actuación es el cuarto y último análisis que componen el análisis didáctico, con él se cierra un ciclo y se comienza un nuevo ciclo, en este se planifica y analiza el seguimiento del aprendizaje de los estudiantes y el proceso de enseñanza del profesor, está vinculado a la evaluación interna o de aula, aunque no es equivalente a ella.

En este análisis se registra, se recoge y se analiza la información sobre el aprendizaje de los escolares y sobre la enseñanza del profesor, por tanto, el análisis de actuación ofrece información relevante en cuanto al proceso de enseñanza aprendizaje, permite identificar los avances y dificultades de los estudiantes, el proceso de enseñanza que ha seguido el docente, por tanto, esta información le posibilita realizar las modificaciones necesarias a lo planificado, a las tareas propuestas y busca nuevos camino que le permitan a los estudiantes, en forma progresiva, resolver las dificultades identificadas inicialmente.

3. Metodología

Este capítulo hace referencia a los juicios por los cuales se ha tomado el enfoque cualitativo para el desarrollo de la investigación, por qué se asume el diseño de la investigación acción como ruta para alcanzar los objetivos, cuáles son las características de la población objeto de estudio, cómo están organizadas las categorías para el desarrollo y análisis de la intervención, cómo se estructura la propuesta de intervención y cuáles son los instrumentos que permitieron recolectar dicha información.

3.1. Enfoque metodológico

El análisis de un fenómeno observable en las aulas de clase de los colegios distritales Gabriel García Márquez y Alfonso López Pumarejo de Bogotá dio origen a una investigación guiada por el enfoque **cualitativo**, este fenómeno se relaciona con las dificultades que tienen los estudiantes de grado primero en el proceso de contar y el dominio de la secuencia numérica; es así, como el fenómeno se conoce, se interviene y se intenta interpretar a partir de una captación holística de la realidad por cuanto la realidad es entendida como una construcción social que está delimitada por un contexto y unas variables específicas. En palabras de Hernández, Fernández y Baptista (2010) “la investigación cualitativa se caracteriza por comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto” (p. 364).

Este enfoque facilita la organización en fases que, están sujetas a modificaciones según los hallazgos o dificultades encontradas; sugiere, además, la revisión constante de la literatura como apoyo a la interpretación del fenómeno y a los cambios que se estén presentando.

3.2. Alcance

La investigación tuvo un alcance interpretativo del fenómeno objeto de estudio, se interpretaron y caracterizaron las acciones, dificultades y avances de los estudiantes con la implementación de la propuesta, asimismo, se le dio un enfoque interpretativo al progreso de los estudiantes en la construcción del concepto de número y a la resolución de los PVEA Martínez (2011) plantea que “la interpretación se construye con base en los marcos de referencia de los actores que intervienen; la interacción permite un cambio recíproco entre el investigador y el objeto investigado" (p. 138), por tanto, el problema o fenómeno cambia por la intervención y a la vez el investigador modifica su visión de la realidad observada.

En este sentido, se intervino el problema del concepto de número y de la secuencia numérica en estudiantes de grado primero con una propuesta desde la resolución de problemas de estructura aditiva PVEA; los avances y resultados permitieron un cambio significativo en el rendimiento académico de los estudiantes y una reflexión de la práctica docente de las investigadoras.

3.3. Diseño de la investigación

Teniendo en cuenta el fenómeno o problema observado en las aulas de clase de los dos colegios oficiales, se planteó e implementó una propuesta didáctica enmarcada en el diseño de la investigación acción con el propósito de mejorar la problemática relacionada con el desarrollo del pensamiento numérico. De acuerdo a Sandín (2003) el objetivo de la investigación acción consiste en "Aportar información que guíe la toma de decisiones y los procesos de cambio para la mejora de la misma. Justamente, el objetivo prioritario de la investigación-acción consiste en mejorar la práctica en vez de generar conocimientos" (p. 33). En este sentido la investigación emerge por un lado, por el interés investigativo de las autoras y por otro, por la identificación de un problema en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares; luego, se diseñó una propuesta de intervención con el fin de solventar las dificultades y el problema observado; ésta propuesta se diseñó a partir del ciclo de análisis didáctico con el objetivo de intervenir las dificultades de enseñanza y con un enfoque en la resolución de problemas verbales de estructura aditiva para mejorar los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Esta investigación se desarrolló siguiendo las fases propuestas por Hernández et al. (2010)

> La investigación acción comprende tres fases esenciales: observar (construir un bosquejo del problema y recolectar datos), pensar (analizar e interpretar) y actuar (resolver problemas e implementar mejoras), las cuales se dan de manera cíclica, una y otra vez, hasta que el problema es resuelto, el cambio se logra o la mejora se introduce satisfactoriamente (p. 511).

3.4. Población

El problema de investigación se identificó en estudiantes de grado primero de los colegios distritales Alfonso López Pumarejo de la localidad de Kennedy y Gabriel García Márquez de la localidad de Usme.

El estrato socioeconómico 0, 1 y 2, el bajo nivel académico de los padres de familia, y el tipo de familia disfuncional son condiciones comunes en los dos colegios y son variables que intervienen en los procesos matemáticos que se desarrollan en la escuela, Baroody (1997) reconoce que el niño requiere de múltiples experiencias que favorezcan el pensamiento intuitivo e informal antes de llegar a la matemática formal, en este sentido, se ha observado en los últimos años que los niños que ingresan a grado primero pertenecientes a los contextos de los dos colegios carecen en gran medida de experiencias que enriquezcan su pensamiento matemático informal.

La población con la que se desarrolla la investigación son los estudiantes de grado primero 102 en el colegio Alfonso López Pumarejo (34 estudiantes) y 101 en el colegio Gabriel García Márquez (32 estudiantes), niños en edades comprendidas entre los 5 – 7 años de edad.

La propuesta de intervención se aplicó en todos los niños de los dos grados, sin embargo, para la recolección y análisis de datos se tomó una muestra correspondiente a casos-tipo con 12 participantes, 6 del colegio Alfonso López Pumarejo y 6 del colegio Gabriel García Márquez, se seleccionaron estos estudiantes con el fin de realizar un análisis riguroso y sistemático de acuerdo a las categorías de análisis que resultaría demasiado complejo si se realizará con todos los estudiantes de los dos grados de los dos colegios; para seleccionar esta muestra se tuvo en cuenta que fuera un grupo de nivel intermedio o básico en su rendimiento académico. Para la intervención y recolección de información fue necesario diligenciar los consentimientos informados con los padres de familia de los grupos seleccionados en la muestra.

Para conocer las características específicas de la población objeto de estudió, se diseñó e implementó una prueba de entrada relacionada con las técnicas y principios en el proceso de contar y los niveles de la secuencia numérica; A partir de los datos obtenidos en la prueba de entrada se presenta a continuación, un consolidado de las fortalezas y dificultades que presentan los estudiantes en cada una de las categorías.

3.4.1. Técnicas para contar

En la prueba de entrada se tuvo en cuanta las cinco técnicas que utilizan los niños para contar a partir de lo propuesto por Baroody (2000) serie numérica oral, numeración, regla del valor cardinal, comparación y correspondencia. (Ver figura 4)

Los resultados obtenidos nos permiten evidenciar que el 25% de los estudiantes de los dos colegios no dominan la técnica de la serie numérica oral, es decir, no nombran en el orden adecuado los números en un rango superior a 10, se saltan un número o nombran dos veces el mismo número. En la técnica de numeración el 25% de los estudiantes en los dos colegios tienen dificultades es decir, no señalan cada uno de los elementos de una colección al momento de realizar el conteo, asignan la misma etiqueta a dos elementos o dejan uno o más elementos sin etiqueta. Para la técnica de la regla del valor cardinal el 50% de los estudiantes no dominan esta regla, manifestado en que requieren realizar reconteo para decir el número cardinal de un conjunto. En la técnica de separación el 25% de los estudiantes no separan los objetos que se les solicitan y tampoco son capaces de recordar los que separaron. La comparación entre magnitudes es la técnica con mayor dificultad para los estudiantes, el 75% no comparan la magnitud de dos cantidades y no logran identificar cuál es el mayor y el menor.

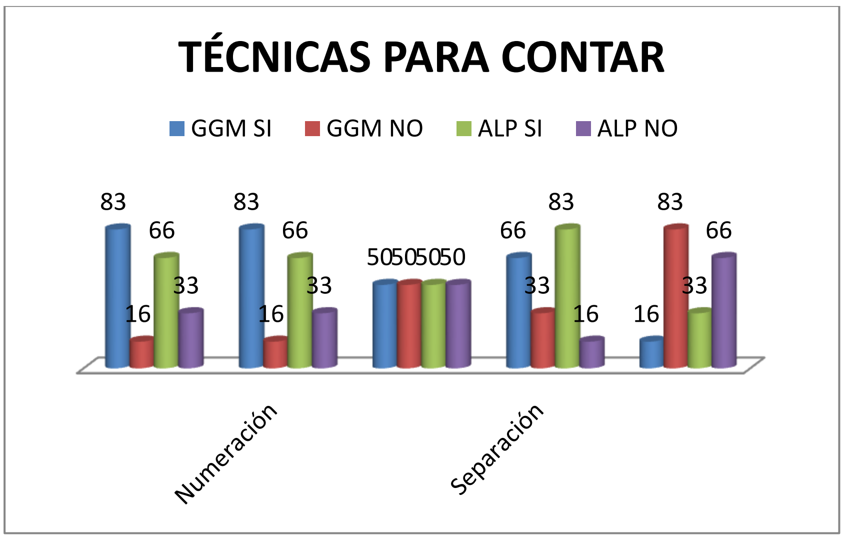


Figura 4 Dificultades en las técnicas para contar.

3.4.2. Principios en la secuencia numérica

Los principios implícitos en el proceso de contar según Castro (1999) que se analizan en la prueba de entrada son: principio de orden estable, de correspondencia, de biunuvocidad, de cardinalidad, irrelevancia del orden y abstracción.

El 25% de los estudiantes no cumplen con el principio de orden estable, porque no recitan los términos de la secuencia numérica en el orden establecido. De igual manera el 25% de los estudiantes no cumplen con el principio de correspondencia, por lo tanto, no recitan la secuencia ni señalan los elementos de la colección, además le asignan más de un nombre numérico a un objeto de la colección. En el principio de biunivocidad, el 50% de los estudiantes no realiza la correspondencia biunívoca, es decir, no le asignan una palabra numérica a cada elemento del conjunto ni asocian cada palabra numérica con su elemento. El 50% de los estudiantes no cumplen con el principio de cardinalidad, ya que no logran determinar el valor cardinal de una colección de objetos. En el principio de irrelevancia de orden, el 83% de los estudiantes no logran determinar la cantidad de objetos cuando se les cambia el orden de los elementos de una colección. El principio de abstracción es el que les causa mayor dificultad, el 92% de los estudiantes en los dos colegios no cumplen con este principio porque, no establecen una categoría superior cuando tienen que contar dos subconjuntos, es decir, al contar dos subconjutos como triángulos y círculos, no es capaz de establecer la categoría de figuras geométricas y cuenta los subconjuntos por separado. (Ver figura 5)

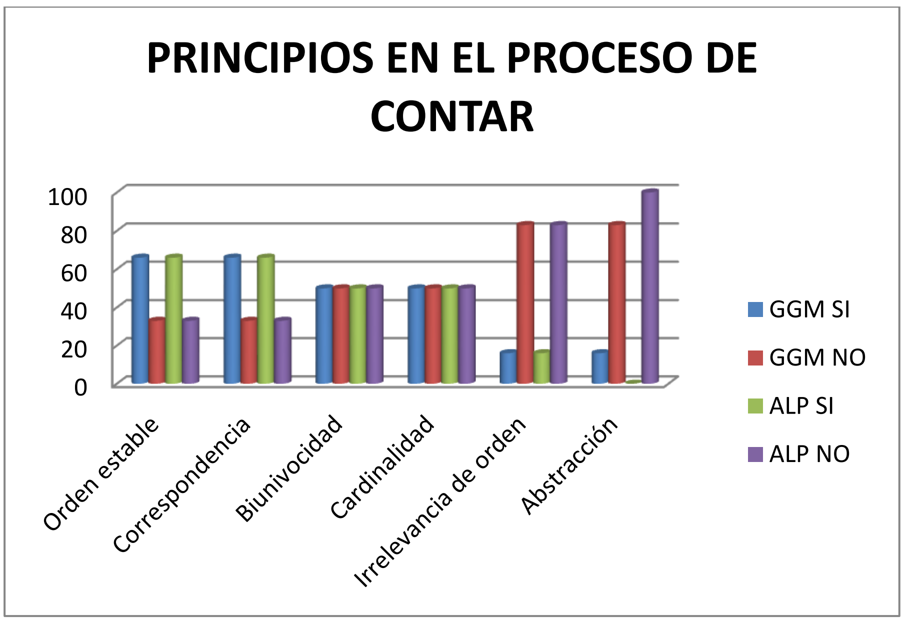


Figura 5 Dificultades en los principios en el proceso de contar.

3.4.3. Niveles de la secuencia numérica

Los niveles que recorren los niños para lograr el dominio de la secuencia numérica según Fuson & Hall citados por Castro et al. (1999) son: nivel cuerda, cadena irrompible, cadena rompible, cadena numerable y cadena bidimensional.

El 41 % de los estudiantes se encuentran en el nivel de cuerda, es decir que los estudiantes al establecer la secuencia numérica empiezan en uno y los términos no están diferenciados. El 25% de los estudiantes recitan la secuencia numérica empezando necesariamente en uno y no son capaces de repetir esta secuencia si se les pide que lo digan empezando en un término distinto de uno, por tanto, están en el nivel de cadena irrompible. El 16% de los estudiantes están en el nivel de cadena rompible, es decir, que al establecer la secuencia, la sucesión de los términos que conocen puede empezar en un término cualquiera. Otro 16% de los estudiantes son capaces de establecer la secuencia, pueden recitar *n* términos de la secuencia desde *a* hasta *b*, por tanto, están en el nivel de cadena numerable. Ningún estudiantes está en el nivel de cadena bidimensional, ya que no son capaces de establecer la secuencia desde un término cualquiera recorriendo la sucesión en ambas direcciones. (Ver figura 6)

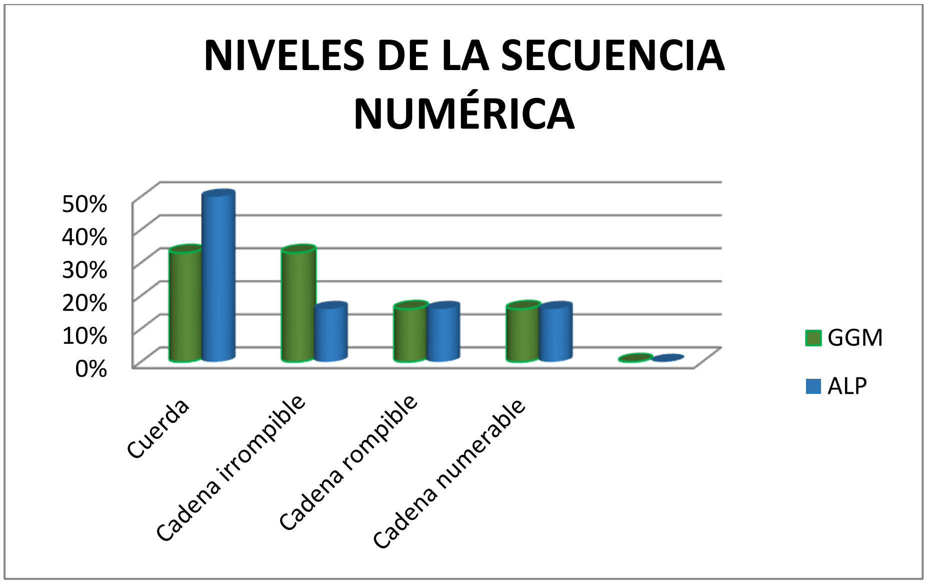


Figura 6 Niveles en la secuencia numérica.

3.5. Plan de análisis

La información recolectada a través de la observación, el diario del profesor y los registros en video fue sistematizada y codificada en las tres categorías mencionadas anteriormente. Siguiendo la metodología de la investigación acción de Hernández et al. (2010) y en concordancia con el ciclo de análisis didáctico de Gómez (2007) se plantea un esquema para presentar el análisis de la información y los resultados obtenidos del proceso investigativo.

Figura 7 Plan de análisis de información, elaborado por las investigadoras.

Las acciones realizadas por los estudiantes se describen detalladamente en el capítulo de resultados y análisis de la información, para presentar el análisis de estas acciones se organizó la información por tareas, teniendo en cuenta para cada una de ellas las tres categorías de análisis: concepto de número, niveles de la resolución de problemas matemáticos y estrategias para la resolución de PVEA.

3.6. Categorías de análisis.

A continuación, se presentan las categorías y las sub-categorías que guiaron el análisis de la información; adicionalmente, se exponen los referentes teóricos que sustentan cada categoría, las herramientas de recolección de información y las fuentes de información que permitieron, por un lado, dar soporte a los instrumentos y por otro, dentro del enfoque de investigación acción se retomaron para realizar los ajustes necesarios.

Tabla 3 Categorías de análisis.

Categorías	**Subcategorías**	**Soporte teórico**	**Instrumentos**	**Fuentes de información**
Concepto de número	✓ Niveles en la secuencia numérica ✓ Principios en el proceso de contar ✓ Técnicas para contar	Concepto de número, contextos numéricos y secuencia numérica, (Castro, et al. 2005) Principios en el proceso de contar (Gelman & Gallistel, 1978) (Chamorro, 2005), (Castro, et al. 2005). Técnicas para contar (	Perfil de entrada tipo taller. Observación. Lista de chequeo	Taller prueba inicial. Diario del profesor Lista de chequeo 1

		Baroody, 1997)		
Niveles en la resolución de problemas matemáticos	✓ Categoría PVEA cambio ✓ Nivel arbitrario ✓ Nivel concreto-manipulativo ✓ Nivel pictórico ✓ Nivele pictórico-simbólico ✓ Nivel simbólico con fallas en la convencionalidad ✓ Nivel simbólico convencional.	Categorías de PVEA (Puig & Cerdán, 1995) Clasificación de los PVEA (Carpenter & Moser, 1983) Niveles de resolución de problemas (García, 2010)	Observación. Entrevistas.	Videos de los niños resolviendo las actividades Audio de las entrevistas Lista de chequeo 2
Estrategias para resolver PVEA	✓ Modelaje directo ✓ Conteo verbal ✓ Estrategias mentales.	Estrategias para resolver Problemas (Carpenter & Moser 1989 citados por Bruno, 2006)	Observación	Videos de los niños resolviendo PVEA Lista de chequeo 3

3.6.1. Categoría I concepto de número.

Esta categoría hace referencia al objetivo principal del proyecto de investigación, tiene en cuenta tres aspectos importantes para su desarrollo y análisis: los niveles de la secuencia numérica en donde se establece el dominio que tiene el estudiante de la serie numérica en un rango de 0 a 30, esto implica que pueda alcanzar el nivel de cadena bidimensional, es decir, que pueda recorrer la secuencia en ambas direcciones; las técnicas que utilizan los estudiantes para contar y los principios que están implícitos en este proceso.

Los autores que sustentan esta categoría son principalmente Baroody (1997), Fuson & Hall (1980) y Gelman & Gallistel (1978) citados por Castro et al. (1999) y por Chamorro (2005), se espera entonces que la teoría permita no solo guiar la propuesta investigativa, sino también, establecer la viabilidad de la misma.

3.6.2. Categoría II Niveles en la resolución de problemas matemáticos.

La estrategia de intervención en el proceso investigativo utiliza los PVEA como medio facilitador del concepto de número en estudiantes de grado primero, por tanto, la segunda categoría de análisis corresponde a los niveles por los que pasan los estudiantes para resolver problemas matemáticos (García, 2010), empezando en el nivel arbitrario en donde sus acciones no reflejan la comprensión del enunciado ni las estrategias que pueden o deben utilizar para resolverlos, hasta llegar al nivel simbólico convencional en el cual emplean los recursos matemáticos necesarios para resolver problemas con la utilización de las operaciones convencionales.

3.6.3. Categoría III. Estrategias para resolver PVEA.

La tercera categoría analiza las estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de los PVEA propuestos por Carpenter & Moser (1989), sin embargo, para esta propuesta de intervención se recoge el análisis y síntesis de éstas estrategias planteadas por Bruno (2006); clasificadas en 3 categorías: modelaje directo, secuencia numérica o conteo verbal y estrategias mentales.

Para cada una de las tareas que se plantean en la propuesta de intervención se analizan las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver cada tipo de problema teniendo en cuenta que el dominio de una estrategia no garantiza el éxito en todos los tipos de problemas (García, 2010) por tanto, es necesario analizar las estrategias utilizadas en cada tipo de problemas y cuáles son las que presentan mayor dificultad con respecto a las sentencias de los PVEA categoría cambio.

3.7. Instrumentos de recolección de información

Para la recolección de la información se presentan tres técnicas: la observación, las pruebas diagnósticas y la entrevista no estructurada.

3.7.1. Observación.

Consiste en la percepción sistemática y dirigida a captar los aspectos más significativos de los objetos, hechos, realidades sociales y personas en el contexto donde se desarrollan normalmente, sin distorsionar la información, pues lleva a establecer la verdadera realidad del fenómeno. Proporciona la información empírica necesaria para plantear nuevos problemas, formular hipótesis y su posterior comprobación.

Para su registro y sistematización el grupo investigador utiliza el diario del profesor propuesto por Gómez (2007) en el ciclo de análisis didáctico y las listas de chequeo como herramientas para organizar la información observada.

Lista de chequeo 1 concepto de número

En esta lista de chequeo se recoge la información relacionada con el proceso de construcción del concepto de número en relación con las técnicas que utilizan los estudiantes para contar (Baroody, 1997), los principios implícitos en el proceso de contar Gelman & Gallistel (1978) citados por (Castro, et al. 1995) y (Chamorrro, 2005) y los niveles que recorren los niños para adquirir un dominio de la secuencia numérica Fuson y Hall citados por (Castro et al. 1995) y (Chamorrro, 2005).

Lista de chequeo 2. Estrategias de resolución de problemas.

En esta lista de chequeo se recoge la información relacionada con las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver los problemas verbales de estructura aditiva tomando como referencia la clasificación que plantea Carpenter y Moser (1989) y Bruno (2006).

Lista de chequeo 3. Niveles de la resolución de PVEA.

En esta lista se recoge la información relacionada con los niveles en los que se encuentran los niños y las niñas en la resolución de PVEA planteados por García (2010).

3.7.2. La Entrevista.

Es una técnica orientada a establecer contacto directo con las personas que se consideren fuente de información, si bien puede soportarse en un cuestionario flexible, tiene como propósito obtener información espontánea y abierta. Esta técnica cobra gran importancia en el desarrollo de esta investigación porque los PVEA se formulan debido a que los estudiantes del grado primero aún no han consolidado su proceso de lectura y escritura en el nivel convencional, en este sentido los estudiantes responden de manera oral sobre las técnicas, dificultades y procedimientos utilizados, dichas apreciaciones se graban con el fin de obtener datos verídicos que puedan ser analizados metódicamente, estas grabaciones se realizan directamente por las investigadoras en cada una de las instituciones educativas mencionadas, con ellas se pretende obtener información puntual, explícita y minuciosa de cada uno de los estudiantes con relación a su desempeño durante el desarrollo de cada una de las tareas realizadas en la propuesta de intervención en relación con el desarrollo del concepto de número, los niveles de RPM y las estrategias de resolución de los problemas.

3.8. Propuesta de intervención

El ciclo de análisis didáctico contiene cuatro análisis que contribuyen al diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de las matemáticas escolares: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación (Gómez, 2007), a continuación, se presenta la propuesta de intervención planeada a partir del ciclo de análisis didáctico y con el cual se diseñó la unidad didáctica desarrollada.

3.8.1. Análisis de contenido

El análisis de contenido referido a la dimensión conceptual se enfoca en organizar y analizar los contenidos del objeto matemático, en este sentido, Gómez (2007) sugiere utilizar tres organizadores del currículo: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología. La figura 1 presenta el análisis de contenido a partir de la estructura conceptual representada en un mapa donde se ubican los conceptos, los procedimientos y las relaciones entre ellos.

La estructura matemática que se presenta corresponde al concepto de número en niños y niñas de primer grado de primaria a partir de los aportes de Baroody (2000), Castro, et al. (1999) y Chamorro (2005), se propone como procedimiento la implementación de los PVEA con aportes de García (2000), Vergnaud (2003) Castro, et al. (1999) y Bruno (2006)

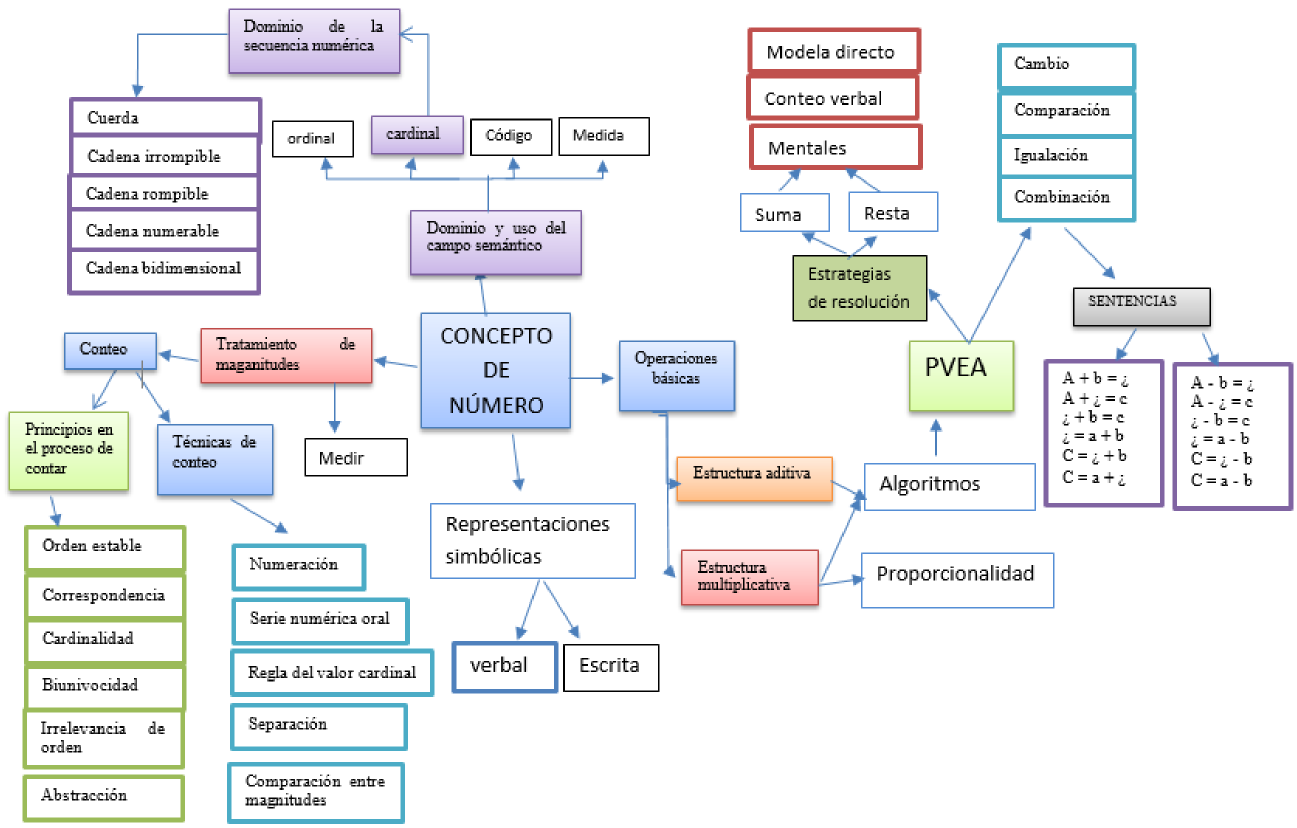


Figura 8 Mapa conceptual del concepto de número y los PVEA.

Nota 1 Mapa conceptual elaborado por el grupo de investigación.

Los sistemas de representación constituyen el segundo organizador del currículo, éste organizador permite que el docente pueda identificar el sistema de reglas, los signos, las operaciones y determinar las relaciones entre ellos, por tanto, éste organizador permite analizar la forma en que se expresan los elementos de la estructura conceptual que de acuerdo con Gómez (2007) posibilitan "identificar los modos en que el concepto se presenta" (p. 19), para el caso de esta investigación se utilizarán: el sistema de representación numérico, el sistema de representación pictórico, el sistema de representación pictórico y el sistema de representación manipulativo, propuestos por Gómez (2007).

El tercer organizador del currículo es el análisis fenomenológico, este se apoya en la información proveniente de la estructura conceptual y los sistemas de representación. La relevancia de este organizador, está en que brinda los referentes conceptuales y metodológicos encaminados a desarrollar en los estudiantes, según Gómez (2007) "…una formación matemática en los escolares que desarrolle sus capacidades para enunciar y abordar problemas expuestos en contextos no matemáticos y resolverlos con el uso de las herramientas matemáticas que corresponden…" (p. 34), para ello es necesario que en las aulas de clase se planifiquen tareas escolares, encaminadas a resolver problemas con el uso de conceptos y procedimientos matemáticos en diferentes contextos y situaciones (Gómez, 2007).

La fenomenología, por tanto, se centra en dar un sentido práctico al propósito de establecer una relación entre una estructura matemática y los grupos de fenómenos asociados a ella. Los fenómenos de una estructura matemática se deben organizar en: contextos fenomenológicos y subestructuras.

A partir de la información del análisis en la estructura conceptual, se formulan a continuación, los fenómenos, problemas y contextos fenomenológicos en los cuales se identifican y enumeran los fenómenos vinculados con el concepto, estableciendo la relación entre sub estructuras y fenómenos y clasificando los fenómenos de acuerdo con las sub estructuras con las que están relacionados. (Tabla 4.)

Tabla 4 Análisis fenomenológico.

Estructura	Sub estructura	Contexto fenomenológico. Problemas de tipo cambio.	Fenómenos	Ejemplo
Estructura aditiva	PVEA	Sentencia 1 a + b =?	Implica el aumento de una cantidad inicial hasta crear una serie final.	Iván tenía 4 caramelos. Luego, Teresa le dio 5 caramelos más. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Iván?
		Sentencia 2 a – b =?	Implica la disminución de una cantidad inicial hasta crear una serie final	Pedro tenía 9 caramelos. Luego, le dio 5 a Paula, ¿Cuántos caramelos tiene ahora Pedro?
		Sentencia 3 a + ¿ = c	La cantidad inicial y el resultado son conocidos y la magnitud de cambio aumenta y es desconocida.	Marcos tenía 4 caramelos. Luego, María le dio algunos más. Ahora Marcos tiene 9 caramelos. ¿Cuántos caramelos le dio María?
		Sentencia 4	La cantidad inicial y el	Carlos tenía 9 caramelos.

		a – ¿ = c	resultado son conocidos y la magnitud de cambio disminuye y es desconocida.	Luego, le dio algunos a Sofía. Ahora Carlos tiene 4 caramelos. ¿Cuántos caramelos le dio a Sofía?
		Sentencia 5 ¿ + b = c	La incógnita es la magnitud inicial, se conoce la magnitud de cambio (aumento) y el resultado final.	José tenía algunos caramelos. Luego, Lina le dio 5 caramelos más. Ahora José tiene 9 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía José al principio.
		Sentencia 6 ¿ - b = c	La incógnita es la magnitud inicial, se conoce la magnitud de cambio (disminución) y el resultado final.	Alejandro tenía algunos caramelos. Luego, le dio 5 a Fernanda. Ahora Alejandro tiene 4 caramelos ¿Cuántos caramelos tenía Alejandro al comienzo?

3.8.2. Análisis cognitivo

Después de realizar el análisis de contenido, es fundamental identificar la utilidad de los conceptos matemáticos "al abordar problemas o situaciones que requieran utilizar conceptos, procedimientos y representaciones matemáticas" (Gómez, 2006, p. 13) por tanto, al momento de planificar un tema matemático concreto, el análisis cognitivo posibilita hacer una descripción de lo que se espera que el estudiante aprenda y de las previsiones acerca del modo en que el estudiante va a desarrollar ese aprendizaje. En este sentido, se tienen en cuenta los objetivos para cada proceso matemático, una secuencia de capacidades, las estrategias en la resolución de problemas, los errores y la lista de dificultades.

Objetivos

Los objetivos que se establecen para la propuesta de investigación tienen en cuenta los procesos básicos en el área de matemáticas. (Tabla 5)

Tabla 5 Objetivos en el análisis cognitivo.

Procesos	Comunicación	Representación	Razonamiento y	Diseño de

matemáticos			argumentación	estrategias para resolver problemas
Demostrar buen dominio de los números cuando los emplea en la resolución de PVEA categoría cambio.	Proponer, comunicar y argumentar las estrategias y la solución de un problema haciendo uso del lenguaje matemático.	Utilizar operaciones convencionales y representaciones concretas y pictóricas para resolver los PVEA.	Formular y verificar conjeturas matemáticas para resolver problemas.	Usar diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas.

Estrategias qué utilizan los estudiantes para resolver los PVEA

Los estudiantes al enfrentarse a la resolución de un PVEA experimentan procesos propios para la solución de los problemas, los cuales se convierten en las herramientas básicas que les permiten hacer el análisis necesario y que en forma progresiva culminaran en el aprendizaje de las operaciones aritméticas convencionales, desde la reflexión y el razonamiento y no en forma mecánica y repetitiva Carpenter & Moser (1989).

Es así como a continuación, se presentan las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver los PVEA, en interacción con el material concreto, el objeto matemático y el docente. Las estrategias que se presentan a continuación, son adaptación realizada por Bruno (2006) basadas en la propuesta de Carpenter & Moser (1989).

Estrategias de modelaje directo.

Estas estrategias se caracterizan por la manipulación de objetos como formas de representaciones directas en las entidades del problema, en la adición es común que los niños usen alguna colección de objetos preexistentes en el salón o los dedos.

Para la suma	Para la resta
<u>Contar todo:</u> El niño	<u>Separar de</u>. Los estudiantes forman el conjunto mayor de objetos,

representa ambas colecciones de objetos por separado, usando cubos o dedos, y vuelve después a contar desde el principio la colección compuesta.	después separan de ellos, de una sola vez, un conjunto de objetos igual al sustraendo y cuenta la cantidad de objetos restantes. Añadir. Los niños forman el conjunto de objetos correspondiente al sustraendo y añaden tantos objetos hasta tener el número que indica el minuendo. Después cuentan los objetos añadidos, encontrando así la respuesta. Emparejamiento. Representa las colecciones de objetos indicadas en el minuendo y sustraendo. Las compara estableciendo una correspondencia uno a uno. La respuesta es el número de objetos que no tienen pareja.

Estrategias de la secuencia numérica o conteo verbal.

En esta estrategia los niños no construyen físicamente los conjuntos, sino que utilizan su conocimiento sobre los números y sobre el recuento. En este procedimiento, los estudiantes introducen la serie numérica verbal en un punto diferente al uno, contando en forma ascendente o descendente,

Para la suma	**Para la resta**
Contar todo. Esta estrategia es similar a contar todo con objetos, pero el niño usa algún marcador o contador para saber cuándo tiene que parar de contar, como pueden ser los dedos. Contar a partir del número mayor. Empieza a contar a partir del sumando mayor. En 2 + 3, dice “tres” y cuenta “cuatro” y “cinco”. Contar a partir del primer sumando. Empieza a contar a partir del primer sumando dado.	Contar hacia atrás desde. El niño cuenta a partir del minuendo hasta que alcanza el sustraendo. La respuesta es la cantidad de números emitidos. Contar a partir de. El niño cuenta a partir del número menor hasta que alcanza el número mayor. La respuesta es la cantidad de números emitidos.

Estrategias mentales.

Con esta estrategia los niños utilizan hechos numéricos que recuperan de la memoria. Son las estrategias que les permiten a los estudiantes hallar la respuesta a un PVEA, desprendiéndose de los cálculos realizados con el conteo de objetos concretos.

Para la suma y la resta

Hecho memorizado: el niño memoriza sumas y restas como si fueran tablas.

Hecho deducido: el niño hace un razonamiento del tipo: "si 8 + 3 = 11 entonces 7 + 3 = 10" "si 8 – 3 = 5 entonces 7 – 3 =4"

Capacidades y secuencias de capacidades

Con el objetivo de organizar la secuencia de las actuaciones que realizan los estudiantes se propone a continuación una serie de capacidades con su respectiva secuencia procedimental con respeto a la tarea del objeto matemático que se va a abordar (tabla 7), tomando como referencia la propuesta por niveles de García (2010).

Tabla 6 Capacidades y secuencia de capacidades.

Capacidades	**Secuencia de capacidades**
Nivel arbitrario.	✓ Realiza dibujos de los objetos que se le mencionan de manera verbal sin respetar la conservación de la cantidad. ✓ Copia los datos numéricos del problema, pero no conoce la cantidad que representan. ✓ Representa correctamente por medio del material dibujos e incluso números, pero no realiza alguna acción para resolver el problema.
Nivel concreto manipulativo	✓ Dramatiza las acciones que se plantean en el problema y procura contar con los mismos objetos que se mencionan. ✓ Aceptan que otros objetos distintos a los que se mencionan pueden tener la misma función.
Nivel Pictórico	✓ Usa figuras y dibujos apegados al referente real que se describe en el enunciado del problema. ✓ Sustituye el isomorfismo por un esquema que lo represente. ✓ Representa únicamente los datos del problema sin evidenciar el resultado.

	✓ Intenta resolver el problema, pero comete errores de conteo. ✓ Representa pictóricamente el resultado correcto, pero no así las acciones que evidencian el proceso de resolución.
Nivel pictórico-simbólico	✓ Emplea estrategias pictóricas para resolver el problema con alguna operación convencional. ✓ Emplea el algoritmo convencional como una herramienta para comprobar el resultado. ✓ Emplea las operaciones convencionales, pero comprueba el resultado con el uso de estrategias pictóricas.
Nivel Simbólico con fallas en la convencionalidad	✓ Utiliza los símbolos numéricos como apoyo para resolver el problema, pero carece de una estructura aritmética. ✓ Emplea operaciones matemáticas que no guardan relación con el planteamiento del problema. ✓ Elige una estructura convencional para resolver el problema empleando la operación inversa con la que la resolvería un adulto o un compañero más capaz. ✓ Sigue un procedimiento convencional adecuado para resolver un problema, pero llega a un resultado incorrecto por no poder manejar aún todos los aspectos de la convencionalidad simultáneamente. ✓ Utiliza operaciones convencionales simples para resolver problemas cuyo resultado se obtendrían más fácilmente empleando otra operación más evolucionada.
Nivel Simbólico convencional	✓ Emplea las operaciones matemáticas considerando todos los aspectos convencionales. ✓ Selecciona la operación que le permite llegar con menor esfuerzo al resultado.

3.8.3. Análisis de instrucción

El análisis didáctico sugiere un tercer análisis referido a la instrucción, en donde el docente diseña, analiza y selecciona las tareas de aprendizaje complejas que implican problemas contextualizados con la intensión de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje que han establecido, superando sus limitaciones de aprendizaje. (Gómez, 2015).

Las tareas que se presentan a en este apartado surgen de las dificultades evidenciadas en los estudiantes en relación a la construcción del concepto de número y a los resultados de la prueba de entrada o diagnóstica y están planeadas y fundamentadas a partir de cuatro aspectos fundamentales: el nivel de la secuencia numérica, las técnicas de conteo, los principios en el proceso de contar y los PVEA. Para cada una de las categorías se han tenido en cuenta procesos específicos que le ayudan al estudiante a construir progresivamente el concepto de número.

En concordancia con lo anterior, las tareas que se presentan están organizadas en forma secuencial siguiendo los niveles de la secuencia numérica, cada tarea le apunta a solventar las dificultades específicas que presentan los estudiantes en los niveles, los principios y las técnicas para contar, para ello, por cada tarea se le formuló a los niños PVEA categoría cambio que les permitieran realizar los procesos necesarios para transitar una ruta de aprendizaje desde la matemática informal hasta lograr utilizar procedimientos matemáticos convencionales. Así mismo, en esta intervención se tuvo en cuenta el nivel de dificultad que presentan las diferentes sentencias para los estudiantes que de acuerdo con Bruno (2006) se les deben formular desde los de menor dificultad para ir avanzando en forma progresiva hacia sentencias que exijan un mayor nivel de abstracción, por tanto se les formularon en primera instancia los problemas para cuya solución se requiere una suma o una resta con la incógnita en *c*, para luego formularle los que requieren para su resolución una suma o resta con incógnita en *a* o en *b.*

TAREA # 1

PELÍCULA CARS

Meta.

Con la tarea, se pretende contribuir a que los estudiantes se motiven para el desarrollo de las actividades.

Formulación de la tarea:

Se proyectará a los estudiantes la película Cars con el fin de darle apertura a la implementación de la propuesta de intervención, en esta tarea se le explicará a los estudiantes el trabajo pedagógico que se pretende realizar.

TAREA # 2

LA GRAN CARRERA

Tal como se evidencia en el análisis de la prueba de entrada y de acuerdo a las dificultades que emergieron en los hallazgos, se formula la tarea # 2: diseñada para que el estudiante supere las dificultades iniciales relacionadas con: nivel cadena irrompible, estrategia serie numérica oral, principio de orden estable. Resolución de PVEA categoría cambio sentencia 1, 3 y 5

Justificación

Esta actividad le apunta a solventar las dificultades encontradas en el nivel de cadena irrompible, en la técnica serie numérica oral y principio de orden estable, para ello, se les presenta los PVEA sentencia 1, 3 y 5, donde los estudiantes deben contar los puntos de avance en la carrera empezando desde el punto de partida, lo cual les dará herramientas para avanzar en cuanto a:

- ✓ Repetir la secuencia al pedirle que lo haga desde un término distinto a uno.
- ✓ Recitar los términos de la secuencia en el orden establecido.
- ✓ Repetir la secuencia numérica al pedirle que la diga desde un término distinto a uno.

Requisitos.

Establece la secuencia de una colección dada, empieza en uno y los términos no están diferenciados.

Meta.

Con la tarea, se pretende contribuir a que los estudiantes generen sistemáticamente de manera oral los números en el orden establecido empezando necesariamente en uno en un rango del 0-20.

Formulación de la tarea.

El juego consiste en hacer una simulación de una carrera de atletismo de 100 metros planos, pero en este caso se adaptará a 20 metros planos. La pista tiene 20 casillas sin numeración de tal forma que el estudiante se vea en la necesidad de contar las casillas recorridas para llevar la cuenta.

Cada estudiante recorre la pista a toda velocidad durante 5 segundos por cronómetro, cada uno tiene dos oportunidades de avanzar y registrar la información en una tabla de datos general elaborada en un pliego de cartulina. (Ver tabla 7)

Tabla 7 Tabla de datos general

ESTUDIANTES	turno 1	turno 2	total
E1AL			
E2AL			
E3AL			

Con el fin de formular el PVEA de cambio se les planteó a los estudiantes los siguientes problemas durante y después de la carrera.

Tabla 8 Planteamiento del problema tarea 2

Tipo de problema	**Planteamiento del problema**	**Preguntas orientadoras**
Sentencia 1 **a + b =?**	Duván avanzó 5 casillas en el primer turno. Luego avanzó 7 casillas más. ¿Cuántas casillas avanzó al terminar la carrera?	✓ ¿Cuántas casillas avanzó en el primer turno? ✓ ¿Cuántas casillas avanzó en el segundo turno? ✓ ¿Cuántas casillas avanzó en toda la carrera?
Sentencia 3 **a + ¿ = c**	Estefanía avanzó 7 casillas, luego avanza algunas casillas más. Al finalizar la carrera Estefanía llegó a la casilla 15. ¿Cuántas casillas avanzó en el segundo turno?	✓ ¿Cuántas casillas avanzó en el primer turno? ✓ ¿Cuántas casillas avanzó al finalizar la carrera? ✓ ¿Cuántas casillas avanzó en el segundo turno?
Sentencia 5 **¿ + b = c**	Nicolás avanzó algunas casillas en el primer turno. Luego, avanza 10 casillas más. Al finalizar la carrera llega a la casilla 18. ¿Cuántas casillas avanzó en el primer turno?	✓ ¿Cuántas casillas avanzó en el segundo turno? ✓ ¿Cuántas casillas avanzó al finalizar la carrera? ✓ ¿cuántas casillas avanzó en el primer turno?

Materiales y recursos. Pista para la simulación de carreras. Tabla de puntuación

Agrupamiento. La tarea se sugiere de manera individual donde cada estudiante pueda llevar la cuenta de sus avances y la registre en la tabla. La formulación de los problemas se plantea cuando el niño está registrando la información en la tabla.

Comunicación e interacción en clase. Interacción entre pares, interacción docente-estudiante, estudiante-docente, interacción docente-grupo y grupo-docente; estas interacciones se dan en forma continua durante todo el proceso de implementación de la propuesta, contribuyeron significativamente para que los estudiantes avanzaran en la construcción del concepto de número, para que las docentes investigadoras acompañaran el proceso y para lograr hallar e interpretar la información.

Temporalidad. Una hora de clase durante tres días.

TAREA # 3

BMX

Tal como se evidencia en el análisis de la prueba de entrada y de acuerdo a las dificultades que emergieron en los resultados obtenidos, se formula la tarea # 3: diseñada para que el estudiante supere las dificultades iniciales relacionadas con nivel de cadena rompible, estrategia de numeración, principio de correspondencia. Resolución de PVEA sentencias 1, 2 y 3 como medio posibilitador de adquisición de las matemáticas.

Justificación

Esta actividad le apunta a solventar las dificultades encontradas en el nivel de cadena rompible, en la técnica de numeración y principio de correspondencia, para ello, se les presenta los PVEA sentencia 1, 2 y 3 lo cual les dará herramientas para avanzar en cuanto a:

- ✓ Comenzar la sucesión de la secuencia numérica desde un término cualquiera.
- ✓ Coordinar la verbalización de la serie numérica, es decir no dejar ningún término sin nombrar, ni asignarle más de una etiqueta a un término.
- ✓ Recitar la secuencia y a la vez ir señalando los elementos de la colección, sin saltarse ninguno.

Requisitos.

Recita los números en el rango del 0 al 20 en el orden establecido a partir de uno.

Meta:

Con la tarea, se pretende contribuir a que los estudiantes coordinen la verbalización de la serie numérica con el señalamiento de cada elemento en una colección empezando en un término cualquiera.

Formulación de la tarea.

Para esta tarea se pide a los estudiantes que lleven una bicicleta, se organiza una pista de carreras en la cancha delimitando los puntos de avance. Estos puntos determinan la distancia que avanza cada participante. La pista tiene un cono color rojo que indica una penalización de cinco casillas, si el estudiante llega a este cono, deberá devolverse cinco casillas en la pista.

Durante 5 segundos los niños pueden avanzar en la pista y al sonar el silbato tienen que detenerse inmediatamente, contar cuántos puntos avanzaron e ir a registrarlos en la tabla de puntuación, donde además deben escribir el total de puntos de avance que alcanzaron, así pasará cada participante y tendrán además otra oportunidad para competir.

Terminada la carrera, se les formulan a los participantes los PVEA revisando la tabla de puntuación a la cual se le han tapado algunos de los datos.

Tabla 9 Planteamiento del problema tarea 3

Tipo de problema	**Planteamiento del problema**	**Preguntas orientadoras**
Sentencia 1 **a + b =?**	Duván avanza 12 puestos en el primer turno. Luego avanza 5 puestos más. ¿Cuántos puestos avanzó al terminar la carrera?	· ¿Cuántos puestos avanzó en el primer turno? · ¿Cuántos puestos avanzó en el segundo turno? · ¿Cuántos puestos avanzó al terminar la carrera?
Sentencia 2 **a - b =?**	Camila avanza 10 casillas en el primer turno. Luego, retrocede 5 casillas. ¿En cuál casilla está ahora?	✓ ¿Cuántas casillas avanzó en el primer turno? ✓ ¿Cuántas casillas retrocedió? ✓ ¿En cuál casilla está ahora?
Sentencia 3 **a + ¿ = c**	Estefanía avanzó 7 puestos, luego avanzó algunos puestos más. Al finalizar la carrera Estefanía llegó al puesto 15. ¿Cuántos puestos	· ¿Cuántos puestos avanzó en el primer turno? · ¿Cuántos puestos avanzó al finalizar la carrera?

	avanzó en el segundo turno?	· ¿Cuántos puestos avanzó en el segundo turno?

Materiales y recursos. Bicicletas, carros, pista de carreras con puntos definidos sin numeración.

Agrupamiento. La tarea se propone de manera individual y la resolución de problemas se plantea al finalizar el registro de datos.

Comunicación e interacción en clase. Interacción entre pares, interacción docente-estudiante, estudiante-docente, interacción docente-grupo y grupo-docente; estas interacciones se dan en forma continua durante todo el proceso de implementación de la propuesta, contribuyeron significativamente para que los estudiantes avanzaran en la construcción del concepto de número, para que las docentes investigadoras acompañaran el proceso y para lograr hallar e interpretar la información.

Temporalidad. Una hora de clase durante tres días.

TAREA # 4

PISTA DE CARS

Tal como se evidencia en el análisis de la prueba de entrada y de acuerdo a las dificultades que emergieron en los resultados obtenidos, se formula la tarea # 4: diseñada para que el estudiante supere las dificultades iniciales relacionadas con: nivel de cadena numerable, estrategia regla del valor cardinal, principio de cardinalidad. Resolución de PVEA sentencia 2, 3 y 4 como medio posibilitador de adquisición de las matemáticas.

Justificación

Esta actividad le apunta a solventar las dificultades encontradas en el nivel de cadena numerable, en la técnica de regla del valor cardinal y principio de cardinalidad, para ello, se les presentará los PVEA sentencia 2, 3 y 4, lo cual les dará herramientas para avanzar en cuanto a:

- ✓ Recitar *n* términos desde *a* hasta *b*, es decir, cuenta la cantidad de palabras desde un término cualquiera hasta un término determinado.
- ✓ Decir el término cardinal que representa el conjunto sin necesidad de realizar ningún tipo de re-conteo.
- ✓ Indicar con el último término obtenido, el número de objetos que tiene dicha colección.

Requisitos

Coordina la verbalización de la serie numérica con el señalamiento de cada elemento en una colección empezando en un término cualquiera.

Meta

Con la tarea, se pretende contribuir a que los estudiantes al contar una colección de objetos digan el término cardinal que representa el conjunto entero, sin necesidad de realizar ningún tipo de reconteo.

Formulación de la tarea. A cada grupo se le entrega una pista de carreras, 1 carro y un dado.

El juego consiste en lanzar el dado y avanzar en la pista tantas casillas como indiquen los puntos del dado. Cada participante tiene dos oportunidades para avanzar en la pista, por turnos lanzan el dado y avanzan tantas casillas como indiquen los puntos. Al caer en la casilla de penalización debe devolverse 3 casillas. El estudiante debe contar las tres casillas porque éstas no están numeradas.

Con el fin de formular el PVEA de cambio se les plantean a los estudiantes los siguientes problemas:

Tabla 10 Planteamiento del problema tarea 4

Tipo de problema	Planteamiento del problema	Preguntas orientadoras
Sentencia 2 **a - b =?**	Camila avanza 10 casillas en el primer turno. Luego, retrocede 3 casillas. ¿En cuál casilla está ahora?	✓ ¿Cuántas casillas avanzó en el primer turno? ✓ ¿Cuántas casillas retrocedió? ✓ ¿En cuál casilla está ahora?
Sentencia 3 a + ¿ = c	Juan lanza los dados y avanza 9 casillas, su compañero lanza el dado y el carro avanza a la casilla 13; ¿Cuántas casillas avanzó el carro en el segundo turno?	✓ ¿Cuántas casillas avanzó el primer jugador? ✓ ¿Cuántas casillas avanzó el carro en total? ✓ ¿Cuántas casillas avanzó el carro al segundo turno?
Sentencia 4 a - ¿ = c	María avanzó 6 casillas en el primer turno. Luego, retrocedió algunas casillas. Ahora está en la	✓ ¿Cuántas casillas avanzó en el primer turno? ✓ ¿En qué casilla está ahora?

	casilla 3. ¿Cuántas casillas retrocedió?	✓ ¿Cuántas casillas retrocedió?

Materiales y recursos. Pista para la simulación de carreras de carros, dados, carros pequeños de juguete.

Agrupamiento. Por equipos de parejas. Socialización grupal con todos los integrantes.

Comunicación e interacción en clase. Interacción entre pares, interacción docente-estudiante, estudiante-docente, interacción docente-grupo y grupo-docente; estas interacciones se dan en forma continua durante todo el proceso de implementación de la propuesta, contribuyeron significativamente para que los estudiantes avanzaran en la construcción del concepto de número, para que las docentes investigadoras acompañaran el proceso y para lograr hallar e interpretar la información.

Temporalidad. Una hora de clase durante 3 días.

TAREA # 5:

EL CONCESIONARIO

Tal como se evidencia en el análisis de la prueba de entrada y de acuerdo a las dificultades que emergieron en los resultados obtenidos, se formula la tarea # 5: diseñada para que el estudiante supere las dificultades iniciales relacionadas con: nivel de cadena bidimensional, estrategia de separación, principio de biunivocidad y resolución de PVEA sentencia 2, 4 y 6 como medio posibilitador de adquisición de las matemáticas.

Justificación

Esta actividad le apunta a solventar las dificultades encontradas en el nivel de cadena numerable, en la técnica de separación y principio de biunivocidad, para ello, se les presentará los PVEA sentencia 2, 4 y 6 , lo cual les dará herramientas para avanzar en cuanto a:

✓ Recorrer la sucesión de la secuencia numérica desde un término cualquiera (*a*), en ambas direcciones.

✓ Utilizar la técnica de separación al contar una colección y recordar cuántos objetos ha separado.

✓ Realizar la correspondencia biunívoca, en el proceso de contar, asignándole una palabra numérica a cada elemento de una colección.

Requisitos

Cuenta una colección de objetos y dice el término cardinal que representa el conjunto entero, sin necesidad de realizar ningún tipo de reconteo.

Meta

Con la tarea, se pretende contribuir a que el estudiante realice la correspondencia biunívoca, es decir, que a cada elemento del conjunto le asignará una palabra numérica y recíprocamente cada palabra estará asociada con un elemento.

Formulación e instrucción de la tarea.

Se organizan los estudiantes en dos grupos, los vendedores y los compradores, cada vendedor recibe como base 5 fichas, cada comprador recibe 15 fichas para realizar sus compras, es decir, los carros se "pagan" con fichas en lugar de dinero. Cada vendedor le asigna un valor a su auto, según las características que posea entre una y quince fichas, al iniciar la situación de compra y venta, los compradores eligen el carro que les interesa y se dirigen a comprarlo.

En este momento el docente plantea los PVEA, formulando las siguientes preguntas:

Tabla 11 Planteamiento del problema tarea 5

Tipo de problema	Planteamiento del problema	Preguntas orientadoras
Sentencia 2 a – b =?	Pablo tenía 14 carros, luego vendió 5 carros; ¿Cuántos carros tiene ahora?	✓ ¿Cuántos carros tenía Pablo? ✓ ¿Cuántos carros vendió Pablo? ✓ ¿Cuántos carros le quedaron?
Sentencia 4 a – ¿ = c	Paula tenía 12 carros, vendió algunos y al terminar la tarde le quedaron 6; ¿Cuántos carros vendió Paula?	✓ ¿Cuántos carros tenía Paula? ✓ ¿Cuántos carros le quedaron sin vender? ✓ ¿Cuántos carros vendió en el día?

Sentencia 6 ¿ - b = c	José tenía algunos carros, luego vendió 6 carros. Ahora José tiene 8 carros. ¿Cuántos carros tenía José al principio?	✓ ¿Cuántos carros vendió José? ✓ ¿Cuántos carros tiene José ahora? ✓ ¿Cuántos carros tenía José al principio?

Materiales y recursos. Carros de juguete y fichas

Agrupamiento. Se divide el grupo en compradores y vendedores, la compra se realiza en forma individual.

Comunicación e interacción en clase. La interacción se da entre compradores y vendedores y las intervenciones que realiza el docente; estas interacciones se dan en forma continua durante todo el proceso de implementación de la propuesta, contribuyeron significativamente para que los estudiantes avanzaran en la construcción del concepto de número, para que las docentes investigadoras acompañaran el proceso y para lograr hallar e interpretar la información.

Temporalidad. 1 horas de clase durante 3 días.

TAREA # 6

GUÍA

Tal como se evidencia en el análisis de la prueba de entrada y de acuerdo a las dificultades que emergieron en los hallazgos, se formula la tarea # 6: diseñada para que el estudiante supere las dificultades iniciales relacionadas con: nivel de cadena bidimensional, técnica de comparación entre magnitudes, principio de irrelevancia del orden. Resolución de PVEA sentencia 1, 4 y 5 como medio posibilitador para la adquisición de las matemáticas.

Justificación

Esta actividad le apunta a solventar las dificultades encontradas en el nivel de cadena irrompible, en la técnica serie numérica oral y principio de orden estable, para ello, se les presentará los PVEA sentencia 1, 4 y 5 lo cual les dará herramientas para avanzar en cuanto a:

- ✓ Recorrer la sucesión de la secuencia numérica desde un término cualquiera *(a)*, en ambas direcciones.

- ✓ Comparar la magnitud de dos cantidades dadas y lograr identificar cuál es la mayor y la menor entre estas.

- ✓ Determinar el cardinal de un conjunto, sin importar el orden en que estén organizados sus elementos.

Requisito

Realiza la correspondencia biunívoca, es decir, que a cada elemento del conjunto le asigna una palabra numérica y recíprocamente cada palabra estará asociada con un elemento.

Meta

Con la terea, se pretende contribuir a que los estudiantes comparen la magnitud de dos cantidades dadas y logren identificar cuál es la mayor y la menor entre estas, donde el número de elementos obtenidos al contar no dependa del orden en que estén dispuestos los elementos para contarlos.

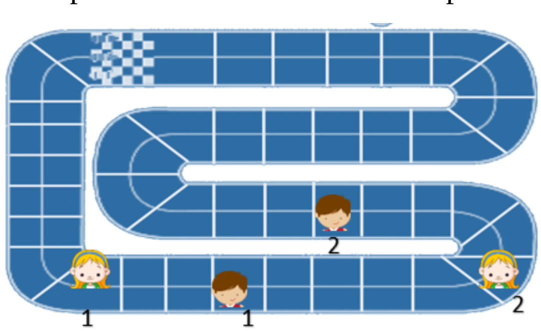
Tabla 12 Planteamiento del problema tarea 6

Tipo de problema	**Planteamiento del problema**	**Preguntas orientadoras**
Sentencia 1 **a + b =?**	Susana avanzó 9 casillas en el primer turno, luego avanzó 8 casillas más. ¿En qué casilla está ahora Susana?	✓ ¿Cuántas casillas avanzó en el primer turno? ✓ ¿Cuántas casillas avanzó en el segundo turno? ✓ ¿Cuántas casillas avanzó al terminar la carrera?
Sentencia 4 ✓ **¿ = c**	Tatiana avanza a la casilla 15. Pero debe devolverse algunas casillas por el tobogán. Ahora	✓ ¿Cuántas casillas avanzó en el segundo turno? ✓ ¿Cuántas casillas avanzó al finalizar

	Tatiana está en la casilla 5. ¿Cuántas casillas se devolvió Tatiana?	la carrera? ✓ ¿cuántas casillas se devolvió?
Sentencia 5 **¿ +b = c**	Camilo avanza algunas casillas. Luego, lanza el dado y avanza 6 casillas más. Ahora Camilo está en la casilla 8. ¿En qué casilla estaba Camilo al comienzo?	✓ ¿Cuántas casillas avanzó en el segundo turno? ✓ ¿Cuántas casillas avanzó al finalizar la carrera? ✓ ¿cuántas casillas avanzó en el primer turno?

UNIVERSIDAD DE LA SABANA
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
GUÍA DE TRABAJO

1. Mateo y Susana han participado en una carrera de carros. Cada uno ha tenido la oportunidad de avanzar en la pista dos veces. Observa las casillas que avanzó cada participante en la pista y resuelve los problemas.



a. Susana avanzó 9 casillas en el primer turno, luego avanzó 8 casillas más. ¿En qué casilla está ahora Susana?

Representación	Respuesta

2. Tatiana y Camilo están jugando al juego de la escalera, lanzan los dados y avanzan tantas casillas como lo indique. Pero hay que tener cuidado con los toboganes porque los devuelve algunas casillas. También pueden avanzar otras casillas por las escaleras.

a. Tatiana avanza a la casilla 15. Pero debe devolverse algunas casillas por el tobogán. Ahora Tatiana está en la casilla 5. ¿Cuántas casillas se devolvió Tatiana?

Representación	Respuesta

b. Camilo lanza el dado y avanza algunas casillas. Luego debe devolverse por el tobogán 10 casillas. Ahora Camilo está en la casilla 8. ¿En qué casilla estaba Camilo al comienzo?

Representación	Respuesta

3.8.4. Análisis de actuación

El último análisis que propone Gómez (2007) dentro del ciclo de análisis didáctico hace referencia al análisis de actuación, el cual cierra un ciclo y se enlaza con el comienzo de un nuevo ciclo “el interés de este módulo se centra en la planificación del seguimiento del aprendizaje de los escolares y del propio proceso de enseñanza durante la implementación planificado en el análisis de instrucción” (Gómez, 2007 p. 18).

A continuación, se presentan los instrumentos que permiten registrar, recoger y analizar la información sobre el aprendizaje de los escolares y la enseñanza del profesor siguiendo los principios de la evaluación formativa:

✓ **Lista de chequeo concepto de número**

En esta lista de chequeo se recoge la información relacionada con el proceso de construcción del concepto de número en relación con las técnicas que utilizan los estudiantes para contar, los principios implícitos en el proceso de contar y los niveles que recorren los niños para adquirir un dominio de la secuencia numérica. (Ver anexo 2)

✓ **Lista de chequeo estrategias de resolución de problemas**

En esta lista de chequeo se recoge la información relacionada con las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver los PVEA tomando como referencia la clasificación que plantea Carpenter & Moser (1989) pero, desde la adaptación que propone Bruno (2006). (Ver anexo 3)

- ✓ **Lista de chequeo niveles de la resolución de PVEA**

En esta lista se recoge la información relacionada con los niveles en los que se encuentran los niños en la resolución de PVEA planteados por García (2010) (Ver anexo 4).

- ✓ **Diario del profesor**

Corresponde al diseño de un formato que le permite al docente registrar rápida y sistemáticamente la información relevante en relación con las observaciones que realice en cada clase y las actuaciones de los estudiantes en cada una de las tareas. (Ver anexo 5)

4. Análisis de la información y resultados

4.1. Análisis de la información

A continuación, se presenta el análisis de la información con respecto al desarrollo del concepto de número en los estudiantes del colegio Gabriel García Márquez y Alfonso López Pumarejo a partir de los PVEA categoría cambio

El análisis está organizado por tarea, en cada tarea se describen las acciones observadas e interpretadas en las tres categorías de análisis para que se evidencie el proceso de los estudiantes desde el comienzo de la propuesta hasta la última tarea.

Para presentar los resultados de cada tarea se muestra una tabla de datos por cada categoría; la información presentada en las tablas es el resultado del análisis de los instrumentos y las técnicas de recolección de la información propuestos para esta investigación y que se describen en el capítulo de la metodología.

Se utilizan las siguientes convenciones para la presentación y organización de los resultados de las tareas y el análisis de los mismos:

RPM= Resolución de problemas matemáticos

PVEA= Problemas verbales de estructura aditiva

$T_{(n)}$= Tarea n, donde *n*= 1, 2, 3, 4, 5, 6 o 7

GM= I.E.D Gabriel García Márquez.

AL= I.E.D. Alfonso López Pumarejo

$E_{(n)\ AL}$= Estudiante n colegio Alfonso López Pumarejo, donde n= 1, 2, 3, 4, 5, o 6.

$E_{(n)\ GM}$= Estudiante n Gabriel García Márquez, donde n= 1, 2, 3, 4, 5, o 6.

$D_{AL=}$ Docente Alfonso López Pumarejo

$D_{GM=}$ Docente Gabriel García Márquez

$PVEA_{(s,\ n)}$= problemas verbales de estructura aditiva sentencia n, donde n= 1, 2, 3, 4, 5, o 6.

Del mismo modo se etiquetaron los estudiantes que pertenecen a la muestra, 6 estudiantes del GM y 6 estudiantes del AL los cuales se seleccionaron con el fin de realizar un análisis rigoroso y sistemático de las categorías de análisis para encontrar hallazgos específicos y precisos con respecto al desarrollo del concepto de número, de los niveles y las estrategias de resolución de los PVEA:

Tabla 13 Etiquetas para los estudiantes, muestra de la investigación.

Gabriel García Márquez	Alfonso López Pumarejo
$E1_{GM}$	$E1_{AL}$
$E2_{GM}$	$E2_{AL}$
$E3_{GM}$	$E3_{AL}$
$E4_{GM}$	$E4_{AL}$
$E5_{GM}$	$E5_{AL}$
$E6_{GM}$	$E6_{AL}$

La organización del análisis de la información se presenta para cada una de las tareas de la siguiente forma:

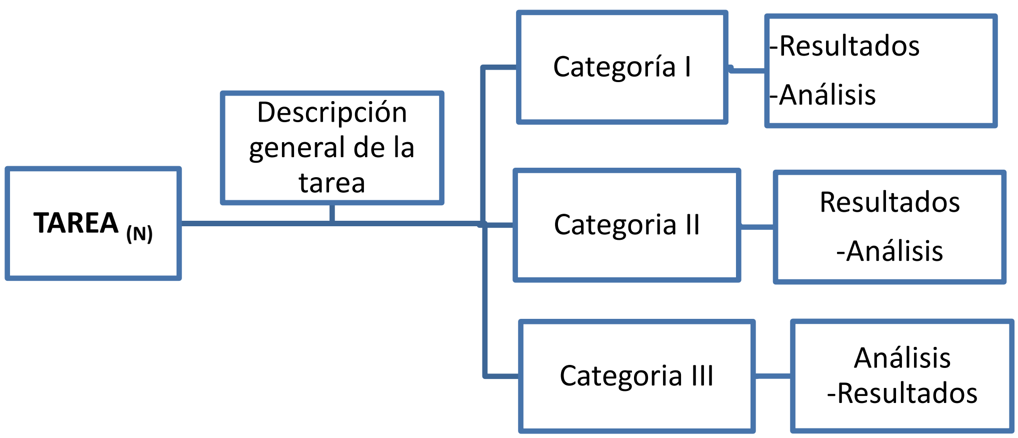


Figura 9 Organigrama análisis de las tareas.

4.1.1. Tarea 1 Película Cars

Con la tarea, se pretende contribuir a que los estudiantes se motiven para el desarrollo de las actividades. Se proyectó la película Cars con el fin de darle apertura a la implementación de la propuesta de intervención, en esta tarea se explicó a los estudiantes el trabajo pedagógico a realizar.

De acuerdo a la meta propuesta para esta tarea se logró despertar en los estudiantes expectativas frente a la propuesta de intervención manifestada en el entusiasmo, el interés, y la alegría; además, el nivel de atención del grupo durante la terea se mantuvo tanto para los niños como para las niñas.

Esta tarea sirvió como preámbulo para el desarrollo de las tareas siguientes, se les explicó a los estudiantes la propuesta de intervención, su finalidad, el proceso de desarrollo con las tareas a realizar y su participación dentro de ésta.

4.1.2. Tarea 2 LA GRAN CARRERA

✓ **Descripción general de la T_2**

Para el diseño de esta tarea se tuvo en cuenta dentro del análisis de contenido el concepto de número en cuanto a: la técnica de la serie numérica, el nivel de cadena irrompible y el principio de orden estable, para ello, se formularon los $PVEA_{S\ 1,3,5}$. categoría cambio.

El juego consiste en hacer una simulación de una carrera de atletismo de 100 metros planos, pero en este caso se adaptará a 20 metros. La pista tiene 20 casillas sin numeración de tal forma que el estudiante se vea en la necesidad de contar las casillas recorridas para llevar la cuenta.

La T_1 comienza con la presentación y explicación del juego, cada estudiante tiene dos oportunidades para avanzar en la pista y registrar los puntos de avance en la tabla de datos, después del registro, se le formulan los $PVEA_{S\ 1,3,5,}$ la duración de la actividad fue de 60 minutos y se repitió en tres días.

Figura 10 La gran carrera AL

Figura 11 La gran carrera GM

Categoría I. Concepto de número T2

✓ Resultados T_2 categoría I

El proceso de adquisición del concepto de número en esta investigación fue planeado para que en un principio los estudiantes actuaran dentro de la situación problema haciendo uso de estrategias informales luego, participaron en juegos que simulaban el planteamiento de los prblemas con la posibilidad de emplear estrategias y técnicas formales e informales y finalizaron con una tarea que exigía el uso de diferentes representaciones (pictóricas, gráficas, convencionales).

El proceso descrito anteriormente permite evidenciar avances significativos en los estudiantes y posibilita que los niños que presentaron dificultades en una tarea, puedan superarlos en tareas siguientes; sin embargo, éstos niños fueron apoyados por las investigadoras haciendo modelizaciones o explicitaciones pertinentes a cada tarea.

Al inicio del trabajo se encontró que los estudiantes de ambos grupos tuvieron un buen desempeño debido al alto nivel de motivación que mostraron al ejecutar la situacion de juego propuesta. El desempeño de los estudiantes en esta actividad respecto al propósito de la tarea se consolida en la siguiente tabla donde sólo se contemplan los datos e información propuesta para esta tarea.

Tabla 14 Resultado categoría 1, concepto de número, T2, sentencias 1, 3, 5.

	Descripción	Estudiantes GM	Estudiantes AL

Técnica: serie numérica oral	Genera sistemáticamente de manera oral los nombres de los números en el orden adecuado.	100%	83,3%
Principio: orden estable	Al contar, los términos de la secuencia, el estudiante recita siempre en el orden establecido.	100%	83,3%
Nivel: cadena irrompible	La sucesión comienza en uno y los términos que conoce están diferenciados. Uno, dos, tres, cuatro. No es capaz de repetir esta secuencia si se le pide que la diga empezando en un término distinto del uno.	100%	83,3%

✓ Análisis T_2. Categoría I

La situación de juego que se presenta en ésta tarea le permitió a los estudiantes practicar la secuencia numérica siguiendo el orden convencional, pues en un comienzo, se observó que los niños cometen errores al recitarla, por ejemplo el estudiante $E3_{AL}$ sólo recitaba los números hasta 10 y en adelante omitía algunos números siguiendo una serie numérica no convencional (11, 15, 16, 18, 20) por tanto, realizaba la actividad contando los conos o puntos de avance, pero su respuesta era incorrecta, de modo similar el estudiante $E6_{GM}$ podía recitar la serie numérica hasta 19, pero en adelante continuaba contando dieci diez, dieci once o preguntaba:

$E6_{GM}$: -¿Profe, que va después de dieciocho?.

Al respecto Baroody (1997) menciona que:

> Estos errores indican claramente que los niños no se limitan a imitar a los adultos, sino que tratan de construir sus propios sistemas de reglas, se trata de errores razonables porque son ampliaciones lógicas, aunque incorrectas, de las pautas de la serie numérica que el niño ha abstraído.(p. 90)

Estas dificulatades, para ser superadas, necesitaron el apoyo de las docentes investigadoras haciendo que los niños repitieran la actividad y ayudándoles a recitar la serie numérica en el orden convencional, de esta manera, el 100% de los estudinates del GM y el 83,3% de los estudiantes del AL al terminar la tarea alcanzaron el principio de orden estable y la técnica de la serie numérica oral para contar.

En relación al nivel de la secuencia numérica el 100% del GM y el 83,3% del AL al terminar la T_2 alcanzaron el nivel de cadena irrompible, sin embargo, dan indicios de ir avanzando hacia un nivel superior, por ejemplo los estudiantes $E4_{GM}$, $E5_{AL}$ y $E6_{AL}$ fueron capaces de resolver los PVEA propuestos para esta tarea siguiendo estrategias de resolución "*contar a partir del primer sumando* o *contar a partir de*", es decir, son capaces de recitar la serie numérica empezando en un término distinto a uno (nivel de cadena rompible); el estudiante $E3_{AL}$ que no alcanzó el nivel propuesto para esta tarea no coordina la verbalización de la serie numérica en el orden establecido, es decir, cuenta la cantidad de puntos de avance siguiendo una cantinela4 no convencional (8, 12, 13, 15, 18).

Lo anterior, permite inferir que la mayoría de estudiantes de los dos colegios pueden realizar el conteo de cantidades en el rango del 0-29 en forma correcta y sólo un estudiante presenta dificultades.

Categoría II niveles de resolución de problemas T_2

En la siguiente tabla se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes en la T_2 en relación a las sentencias 1, 3 y 5 de los dos colegios y registrados en la lista de chequeo. Los resultados presentados en la tabla corresponden a un nivel incial, puesto que es la primera vez que los estudiantes se enfrentan a este tipo de situaciones.

Tabla 15Resultados niveles de resolución de problemas, Tarea 2, sentencias 1, 3, 5.

Nivel	**Sentencia 1**		**Sentencia 3**		**Sentencia 5**	
	GM	AL	GM	AL	GM	AL
Arbitrario	33,3%	50%	66.6 %	66.6%	100%	100%
Concreto manipulativo	66,6%	50%	33.3 %	33.3%	0 %	0 %
Pictórico	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Pictórico simbólico	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Simbólico con fallas en la convencionalidad	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Simbólico convencional	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

4 La cantinela es una lista de palabras-número que el niño ha de ir aprendiendo poco a poco para aprender a contar. La cantinela está relacionada con el principio de orden estable.

✓ Análisis T_2. Categoría II

En esta actividad el estudiante tiene el primer acercamiento con los $PVEA_{S\ 1,\ 3,\ 5.}$ (sentencias abierta de suma), se evidencia mediante la observación, las grabaciones en video que los problemas propuestos inicialmente no fueron comprendidos por los estudiantes, por tanto, fue necesario repetir el enunciado del problema y ampliar la descripción del contexto fenomenológico, para ello, la situación se les explícita, las preguntas orientadoras que se enuncian en cada problema apoyan la comprensión del mismo y les ayudan a entender la situación que están vivenciando.

En el $PVEA_{S\ 1}$ el 33,3% del GM y el 50% del AL (incógnita en *c*) para esta tarea se encontraban en el nivel arbitrario porque representaban en el nivel de las acciones los datos numéricos del problema, es decir, requerían material concreto para realizar sus cuentas pero no realizaban ninguna acción encaminada hacia la resolución del problema, por tanto, en este momento y para esta sentencia, los estudiantes formaban un grupo con las primeras 5 casillas de avance, luego formaban otro grupo con las 7 casillas de avance del segundo turno pero, no realizaban ninguna acción para hallar el estado final, en este caso la incógnita estaba en *(c).* Por ejemplo, al formularles el siguiente problema: "Duván avanza 5 casillas en el primer turno. Luego avanza 7 casillas más. ¿Cuántas casillas avanzó al terminar la carrera?" Los estudiantes respondieron:

$E6_{GM}$: "¿Cómo 15 profe?"

$E3_{AL}$: "Da 7"

$E4_{GM}$: " ¿Qué tenemos que hacer ahí?"

$E1_{AL}$: "No entendí"

$E4_{AL}$: "¿5?

Lo anterior permite afirmar que en este momento la información enunciada en el planteamiento del problema no constituye aún un problema para el niño, García (2010) afirma que esto sucede porque:

> En un principio todavía no ha construido el concepto de número, por lo que las cantidades expuestas carecen de sentido y, por consecuencia, tampoco el niño ha creado un modelo que organice la información de tal manera que pueda atribuir significados y actuar de forma que le dé solucion al problema (p. 129).

Por tanto, se les amplió la explicación de las acciones del enunciado y se les modelizaron los dos puntos de avance en una pista en el tablero y a patir de esto se logró que el 66.6 % de los estudiantes del GM y el 50% del AL se ubicaran en el nivel concreto manipulativo en el primer subnivel porque dramatizaban las acciones que se les planteaban en el problema y procuraban contar con los mismos objetos que se mencionaban, es decir requerían representar los puntos de avance en la pista de carreras o en una pista dibujada en el tablero, en donde: primero avanzaban las 5 casillas iniciales, luego las 7 casillas de avance del segundo turno, en este momento se devolvían a contar a partir de la primera casilla de avance, sin embargo, los estudiantes cometieron errores al asignarle las etiquetas a cada uno de los puntos de avance contaban uno o varios puntos más de una vez o dejaban algunos sin contar; el estudiante $E4_{GM}$ empezó a llevar la cuenta a partir del número 5 (puntos de avance iniciales) y de ahí empezó a agregar de uno en uno los 7 puntos de avance del segundo turno hasta llegar a 12.

En los $PVEA_{S\ 3}$ (incógnita en *b*) el 66.6 % de estudiantes de los dos colegios se mantuvieron en el nivel arbitrario en el segundo subnivel porque representaron correctamente los datos o uno de los datos numéricos del problema pero, no lograron realizar ninguna acción que les permitieran resolver el problema, en este caso los niños representaron las 7 casillas de avance inicial, o las 15 de llegada, o los dos datos pero no comprendían que debían hacer con ellos, por tanto, para la sentencia "Estefanía avanzó 7 casillas, luego avanza algunas casillas más. Al finalizar la carrera Estefanía llegó a la casilla 15. ¿Cuántas casillas avanzó en el segundo turno? se les formularon las preguntas orientadoras:

$D_{AL:}$ "¿Cuántas casillas avanzó Estefanía en el primer turno?"

$E1_{AL}$: "Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete: avanzó 7 casillas".

$E2_{AL}$: "Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete: siete".

$E3_{AL}$: "Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete: avanzó 7 casillas".

$E4_{AL}$: "Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete: avanzó 7".

$E5_{AL}$: Sin necesidad de contar, - "7".

$E6_{AL}$: Sin necesidad de contar, - "Avanzó 7".

$D_{AL:}$ ¿Cuántas casillas avanzó Estefanía al finalizar la carrera?

$E1_{AL}$: Empieza a partir de uno etiquetando correctamente hasta el número 10, pero luego cuenta- "uno, dos, tres…diez, once, quince, diez y seis, diez y ocho y veinte avanzó, 20 casillas"

$E2_{AL}$: Le asigna cada etiqueta a cada casilla que cuenta a partir de uno: -"uno, dos, tres, cuatro…catorce y quince, 15"

$E3_{AL}$: Empieza a partir de uno etiquetando correctamente hasta el número 8, pero luego deja algunas casillas sin etiqueta, cuenta –"diez, once, trece, catorce, avanzó 14"

$E4_{AL}$: Empieza a partir de uno etiquetando correctamente hasta el número 15, -"uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis…15, avanzó 15".

$E5_{AL}$: Cuenta a partir de la casilla 7 que corresponde a los primeros puntos de avance, dice siete y empieza, -ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce y quince, avanzó 15 casillas".

$E6_{AL}$: Cuenta a partir de la casilla 7 que corresponde a los primeros puntos de avance, señala la siete y empieza, -ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce y quince, llegó a la 15".

$D_{AL:"}$ ¿Ahora dime cuántas casillas avanzó Estefanía en el segundo turno? Mira desde donde llegó en el primer turno y mira ahora donde llegó al finalizar". Señalando el espacio entre las primeras 7 casillas de avance inicial y las 15 de avance total, es decir, entre 7 y 9.

$E1_{AL}$: ¿Quince?

$E2_{AL}$: Cuenta los dos datos, los reúne y dice, -"22"

$E3_{AL}$: No se

$E4_{AL}$: Siete

$E5_{AL}$: Cuenta a partir de las siete casillas de avance, dice:-"siete, coloca una marca y empieza a contar: ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce y quince, luego cuenta estas casillas y dice:-recorrió 8".

$E6_{AL}$: Cuenta los dos datos, los reúne y dice, -"22"

Luego se les modelaron las acciones en una pista elaborada en el tablero:

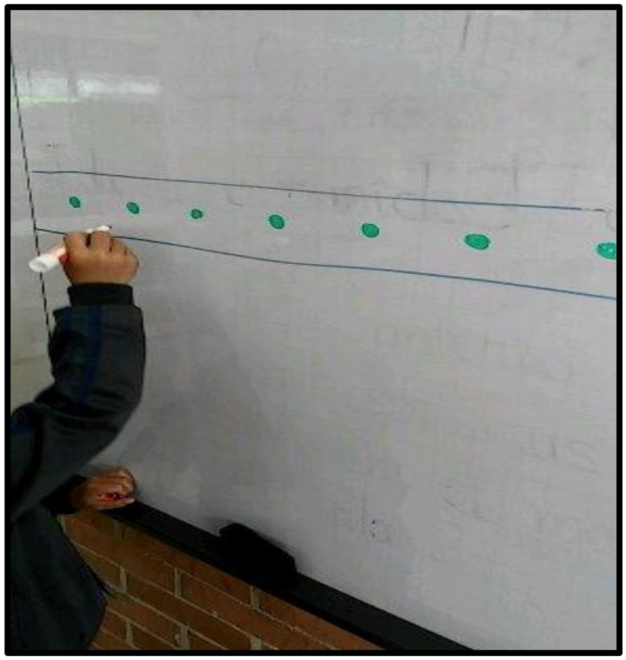


Figura 12 Modelización pista de carreras

Entonces, los niños hacían intentos por resolver el problema utilizando las mismas estrategias empleadas en los PVEA$_{S\ 1}$, es decir, contaban los datos que habían representado en su totalidad, a partir de uno, al contar seguían equivocándose en la asignación de las etiquetas de cada uno de las cantidades señaladas, por tanto la respuesta era incorrecta; por otro lado el 33.3 % de los estudiantes de los dos colegios lograron resolver el problema contando a partir del número 7, es decir, contaron a partir de los primeros puntos de avance para luego ir agregando de a uno a uno hasta llegar al 15 (punto de avance total), esta cantidad hallada constituía la respuesta, sin embargo, continuaban cometiendo errores al asignarle la etiqueta a cada uno de los puntos de avance.

En los PVEA$_{S\ 5}$ (incógnita en *a*) el 100% de los estudiantes de ambos colegios se encontraban en el nivel arbitrario; al plantearles el problema en un comienzo manifestaron no comprenderlo, es decir, no realizaron ninguna acción encaminada hacia la resolución del problema, por tanto, los estudiantes se limitaron a representar en forma gráfica los datos enunciados en la formulación del problema, para esta sentencia donde la incógnita aparece en *(a)* y en este momento de la intervención, los niños corrieron las 10 casillas de avance del segundo turno y luego recorrieron las 18 casillas de llegada pero, intentaron fue buscar el estado final y no uno de los estados de cambio por lo cual los estudiantes intentaron nuevamente contar todas las casillas (las 10 de avance y las 18 de llegada) a partir de uno y el resultado fue erróneo.

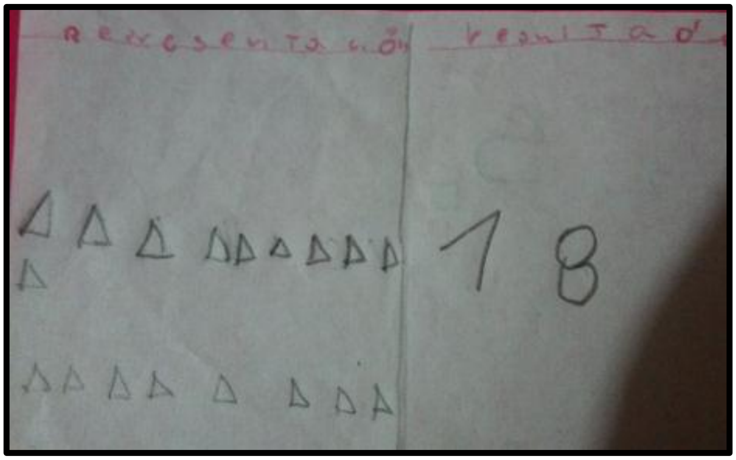


Figura 13 Resolución de problemas sentencia 5

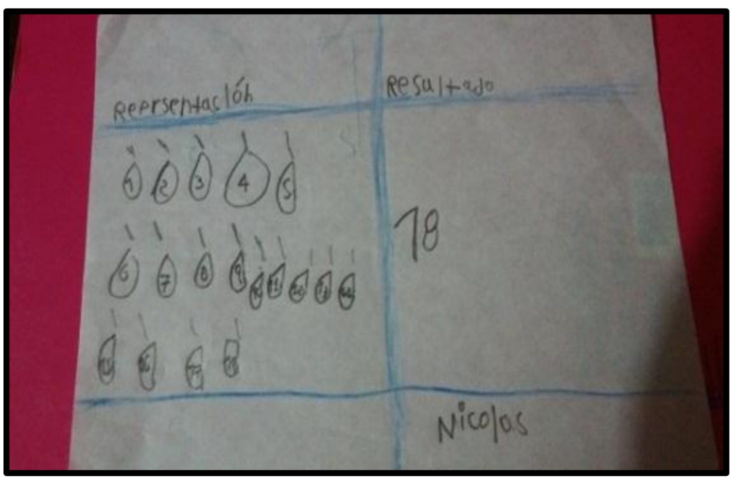


Figura 14 Representación pictórica sentencia 5

Categoría III Estrategias de resolcuión de PVEA T_2

✓ Resultados T_2. Categoría III

A continuación, se presentan los resultados relacionados con las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver los problemas y que son independientes al nivel de resolución de los PVEA y de la construcción del concepto de número que haya alcanzado, estas estrategias son utilizadas por los niños como herramientas para solucionar el problema, pero no siempre conducen a encontrar el resultado correcto del problema.

Tabla 16 Estrategias de resolución PVEA, T2, sentencias 1, 3, 5.

Estrategias de la resolución de problemas matemáticos	**PVEAS$_1$**		**PVEAS$_3$**		**PVEAS$_5$**	
	GM	**AL**	**GM**	**AL**	**GM**	**AL**
No utiliza ninguna estrategia	0 %	0 %	0 %	0 %	66,6%	83,3%
Estrategias de modelaje directo						
Contar todo	83,3%	100%	66,6%	66,6%	33,3%	16,6%
Separar de	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Añadir	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Emparejamiento	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Estrategias de la secuencia numérica o conteo verbal						
Contar todo	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Contar a partir de número mayor	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Contar a partir del primer sumando	16,6%	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Contar hacia atrás desde	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Contar a partir de	0 %	0 %	33,3%	33,3%	0 %	0 %
Estrategias mentales						
Hecho memorizado	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Hecho deducido	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

- ✓ Análisis T_2. Categoría III

Durante la resolución de los $PVEA_{S\ 1}$ los estudiantes utilizaron estrategias propias según el nivel de comprensión del problema; en las grabaciones de video, las observaciones y los registros del diario del profesor se identificó que: el 83,3% en GM y el 100% de AL los estudiantes utilizaron la estrategia de modelaje directo *contar todo*, contaron los puntos de avance en los dos turnos por separado, para luego, contar todo nuevamente desde el principio, el resultado es el número total de puntos contados. En la siguiente figura se muestra la representación con material concreto de la estrtaegia *contar todo.*

Figura 15 Representación con material concreto

El estudiante $E3_{AL}$ que no alcanzó el nivel de cadena irrompible, al utilizar esta estrategia se equivocó en el conteo, por tanto, el resultado del $PVEA_{S\ 1}$ fué erróneo. El estudiante $E4_{GM}$ empleó la estrategia de *contar a partir del primer sumando* para resolver los $PVEA_{S\ 1}$, es decir, luego de contar los puntos de avance en los dos turnos, no necesitó regresar a hacer el reconteo desde el principio de la carrera sino que, partió de los puntos de avance del primer turno para luego seguir contando de uno en uno los puntos de avance del segundo turno, y así hallar el resultado.

Al momento de resolver los $PVEA_{S\ 3}$ los estudiantes que tuvieron éxito en la resolución del problema utilizaron la estrategia de conteo verbal *contar a partir de* , el 33,3% del GM y 33,3% del AL emplearon esta estrategia, contaron los puntos de avance en el primer turno, luego a partir a ahí contaron los puntos avanzados hasta llegar al punto de avance final. Por otro lado, el 66,6% en los dos colegios emplearon la estrategia de *contar todo* tal y como lo hicieron en el $PVEA_{S\ 1,}$ porque no comprendieron con exactitud qué acciones debían realizar para resolver en forma correcta el problema.

Para resolver los $PVEA_{S\ 5}$ el 33,3% del GM y el 16% del AL emplearon la estregia de *contar todo* para intentar resolver el problema, esta acción que realizaron los estudiantes puede obedecer a que es una estrategia conocida por ellos y con la que tuvieron éxito en la sentencia 1, sin embargo, los estudiantes se muestran confundidos y son conscientes de que ese no es el procedimiento correcto. Por otra parte el 66% del GM y el 83,3% del AL no evidenciaron la utilización de alguna estrategía para la resolución del problema, se mostraron confundidos, dicen un resultado cualquiera, pero no surge de un proceso, por tanto, intentan adivinar la respuesta con una cantidad aleatoria.

4.1.3. Tarea 3 BMX.

✓ Descripción general de la tarea 3

Para el diseño de esta tarea se tuvo en cuenta dentro del análisis de contenido el concepto de número en cuanto a: la técnica de numeración, el nivel de cadena rompible y el principio de correspondencia, para ello, se formularon los $PVEA_{S\ 1,\ 2,\ 3,}$ categoría cambio.

Para el desarrollo de esta actividad los estudiantes llevaron una bicicleta, en este caso, el juego consistía en hacer una carrera de ciclismo en una pista con 20 casillas (representadas con conos) sin numeración de tal forma que el estudiante debía contar las casillas recorridas para llevar la cuenta, la pista tenía un cono de color rojo que indicaba una penalización de cinco puntos, es decir, al llegar a este cono el estudiante retrocedía cinco puntos.

La T_3 comienza con la presentación y explicación del juego, cada estudiante tiene dos oportunidades para avanzar en la pista y registrar los puntos de avance en la tabla de datos, después del registro, se le formulan los $PVEA_{S1,\ 2,\ 3,}$ la duración de la actividad fue de 60 minutos y se repitió en tres días.

Figura 16 BMX AL

Figura 17 BMX GM

Categoría I. Concepto de número T_3

✓ Resultados T_3 categoria I

Teniendo en cuenta el propósito de la T_3 se presenta en la tabla 17 el número de estudiantes que alcanzaron o superaron cada aspecto, sin embargo, estos resultados van cambiando en la medida que avanzan las tareas, es decir, un estudiante que a pesar de no alcanzar el propósito de una tarea, avanza en su proceso y por tanto, una tarea modifica los resultados de la tarea anterior.

Tabla 17 Resultado categoría 1, concepto de número, T3 sentencias1, 2, 3, 5 .

	Descripción	Estudiantes GM	Estudiantes ALP
Técnica: numeración.	Coordina la verbalización de la serie numérica con el señalamiento de cada elemento en una colección.	83,3%	66,6%
Principio: correspondencia	Al contar, los elementos de un conjunto, los niños recitan la secuencia y a la vez van señalando los elementos de la colección, sin asignar más de un nombre numérico a cada uno de los objetos de la colección.	83,3%	66,6%
Nivel: rompible	La sucesión de los términos que conocen la pueden comenzar en un término cualquiera.	66,6%	50.0%

✓ Análisis T_3. Categoría I

El contexto fenomenológico que se presenta en esta tarea genera en los estudinates la motivación para resolverla con mayor éxito que en la tarea anterior, en este sentido, se observa que los niños sienten gusto por participar y entienden con mayor presición la dinámica del juego.

Siguiendo el análisis de las técnicas de recolección de información propuestas para esta investigación, se precisa que al terminar la T_3 el 66,6% de los estudiantes del GM y el 50% del AL superaron el nivel de cadena rompible en la serie numérica, esto se observó en el momento que tenían que contar a partir del primer turno de avance, es decir, contaron primero (5 puntos) y de ahí continuaban la cuenta hasta el punto final (5, 6, 7, …), sin embargo, 2 estudiantes del GM y 3 del AL tenían que empezar la cuenta total de avance siempre desde 1; a pesar de contar con gran facilidad los puntos de avance en el primer turno, pareciera que no recordaran la cantidad de puntos anteriores y debían hacer el recuento para estar seguros de la cantidad que avanzaron en el primer turno; adicional a esto, se observa que el estudiante $E3_{AL}$ que en la tarea anterior no alcanzó al nivel de cadena irrompible, en ésta tarea ya tiene mejor dominio de la serie numérica, es capaz de recitar la serie de 0 a 29 con mayor facilidad y si se equivoca, es consciente de su error y se devuelve a empezar la cuenta, este estudiante avanzó del nivel cuerda al nivel de cadena irrompible, pero no alcanzó el proposito de la $T_{3.}$

Para el principio y la técnica en el proceso de contar se puede inferir que estos dos elementos estan muy relacionados y por tanto, la mima cantidad de estudiantes que logran dominar la técnica de numeración avanzaron también al principio de correspondencia, es así como, el 83,3% del GM y el 66,6% del AL recitan y coordinan la verbalización de la serie numérica con el señalamiento de cada punto de avance, se observó que tienen mayor control de los puntos y asignan una etiqueta numérica a cada punto tocandolo, señalandolo con el dedo o con la mirada (algunos niños mueven la cabeza al contar).

Figura 18 Señalamiento con los dedos.

Categoría II niveles de resolución de problemas T_3

✓ Resultados $T_{3.}$ Categoría II

En la siguiente tabla se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes en la T_3 en relacion al nivel de resolución de problemas de los $PVEA_{S\ 1,\ 2,\ 3}$ en los dos colegios y que se registraron en la lista de chequeo. Los resultados presentados en la tabla corresponden a un segundo momento de la implementación, los estudiantes demostraron un mejor nivel de comprención lo cual les posibilitó tener mayor éxito, especialmente en la resolución de los $PVEA_{S\ 1,\ 2.}$

Tabla 18 Resultados niveles de resolución de problemas, Tarea 3, sentencias 1, 2, 3.

Nivel	**Sentencia 1**		**Sentencia 2**		**Sentencia 3**	
	GM	AL	GM	AL	GM	AL
Arbitrario	16,6%	16,6%	16,6%	16,6%	66,6%	83,3%
Concreto manipulativo	83,3%	83,3%	83,3%	83,3%	33,3%	16,6%
Pictórico	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Pictórico simbólico	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Simbólico con fallas en la convencionalidad	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

Simbólico convencional	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

✓ Análisis T_3. Categoría II

En esta actividad los estudiantes se enfrentaban a la resolución de los $PVEA_{S\ 1,\ 2,\ 3}$. Se evidencia mediante la observación, las grabaciones en video y los registros del diario del profesor (ver anexo 1) un mayor nivel de efectividad por parte de los niños y niñas, sin embargo, fue necesario modelizar algunas de las acciones descritas en los problemas (representando en forma gráfica en el tablero la pista de carreras de las bicicletas y las acciones del enunciado del problema) con el fin de apoyarlos en la comprensión del enunciado del problema ya que esto les ayudaba a entender la situación que se les planteaba y a encontrar caminos de solución efectivos.

Al momento de resolver los $PVEA_{S\ 1}$ (incógnita en c) formulados, se evidenció que el $E6_{GM}$ y el $E3_{AL}$ de los estudiantes de los dos colegios, se encontraban en el nivel arbitrario en el primer subnivel, es decir, realizaban dibujos de los objetos que se les mencionaban de manera verbal sin respetar la conservación de la cantidad, por tanto, señalaban en la pista los 12 puestos recorridos, luego representaban los 5 puntos de avance del segundo turno pero, cometían errores en el conteo porque le asignaban más de una etiqueta a un punto o le asignaban dos a un solo punto de avance, a pesar de que se les ha explicado en forma individual, se les han formulado las preguntas orientadoras y se les han modelado las acciones y ampliado el contexto fenomenológico del problema estos estudiantes continúan presentando dificultad, manifestado en que no lograron realizar las acciones con las representaciones de los datos realizadas que les permitieran hallar la solución al problema; por otra parte, el 83.3 % de los estudiantes de ambos colegios se encontraban en el nivel concreto-manipulativo en el primer subnivel porque dramatizaban las acciones que se le planteaban en el problema y procuraban contar con los mismos objetos que se mencionaban, es decir, para llevar la cuenta representaban los 12 puntos de avance inicial, luego representaban los 5 puntos de avance del segundo turno, en este momento se devolvían y contaban a partir de uno todos los puntos de avance y así daban la respuesta que podía ser o no correcta de acuerdo a la precisión en el proceso de contar, como se puede evidenciar, los estudiantes representaron gráficamente los puntos de avance de la carrera, es decir, dibujaron los conos o algún otro tipo de objetos para llevar la cuenta, luego lograron comprender que para hallar el resultado debían contar todos los puntos de avance, por tanto, la resolución del problema en esta sentencia y en este porcentaje de estudiantes fue correcta, esto sucede en gran medida debido a lo que afirma García (2010)

> En este nivel el alumno tiene la noción de cantidad por lo que los datos que se refieren a ella ya poseen un significado que va a derivar en la exploración y manipulación del material con el propósito de resolver el problema. (p. 130).

El $E4_{GM}$ resolvió el problema sin necesidad de representar los dos datos numéricos, él partió del número 12 (puntos de avance primer turno), luego empezó a añadir de uno en uno los 5 puntos de avance del segundo turno, contó 13, 14, 15, 16 y 17 y así halló el resultado correcto.

Al momento de resolver los $PVEA_{S\ 2}$ (incógnita en *c*) el $E6_{GM}$ y el $E3_{AL}$ de los dos colegios se encontraban en el nivel arbitrario en el primer subnivel, es decir, realizaban dibujos de los objetos que se les mencionaban en forma verbal, por tanto, dibujaron las 10 casillas avanzadas, luego las 5 casillas que debían retroceder pero no sabían qué hacer con estos datos.

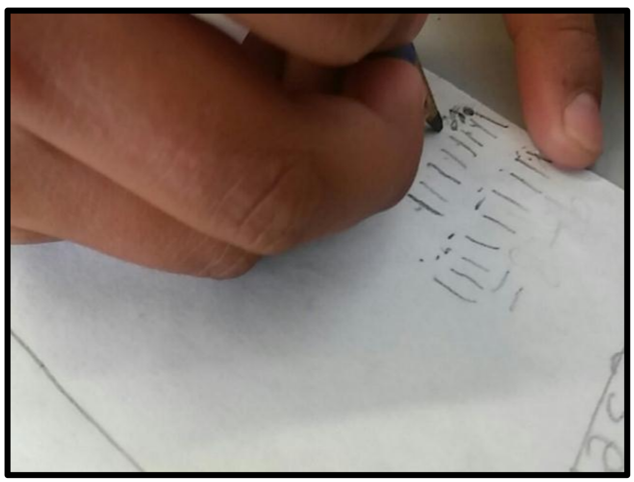


Figura 19 Representación pictórica sentencia 2

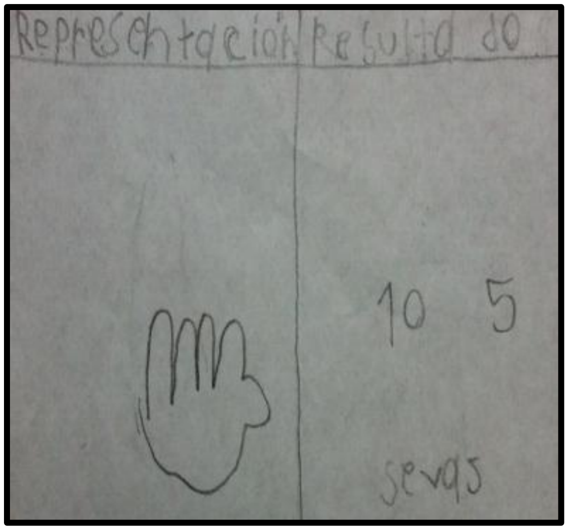


Figura 20 Representación pictórica sentencia 2.

En el momento que los estudiantes presentaron dificultad para resolver el PVEA se les ayudó por medio de las preguntas orientadoras, de la modelización de las acciones en una pista dibujada en el tablero y se les amplió el contexto fenomenológico para hacer más explícita la situación que se describía en el problema.

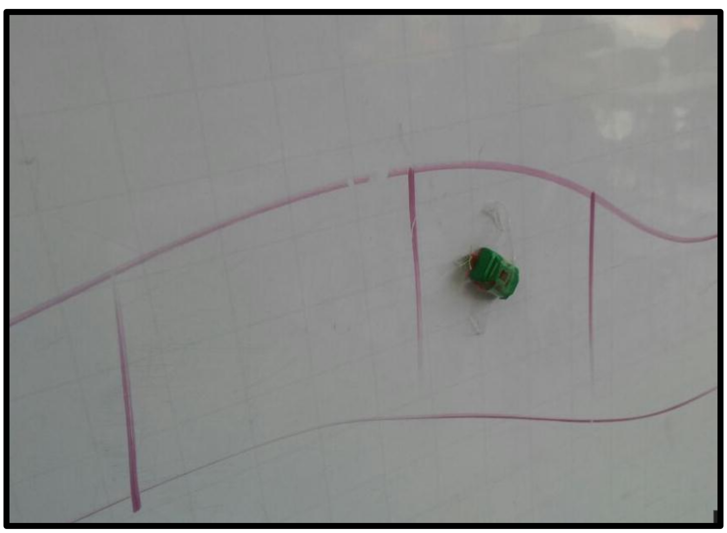


Figura 21 Modelización de las profesoras.

A pesar de esto, los estudiantes mencionados continúan haciendo acciones que no les permiten resolver en forma acertada el problema, cuentan todo o dan uno de los datos; por otro lado, el 83.3% de los estudiantes de los dos colegios se encontraban en el nivel concreto manipulativo en el primer subnivel, ya que, dramatizaban con apoyo del material concreto que se les facilitaba las acciones que se planteaban en el problema y además lograban, a partir de esto, hallar la respuesta correcta, es así, como avanzaban 10 casillas, luego retrocedían contando hacía atrás 5 casillas y finalmente contaban las casillas que les quedaban dando como resultado: 5, durante este proceso la precisión en el proceso de contar fue alta debido al rango numérico y a las experiencias previas vividas.

En el $PVEA_{S\ 3}$ incógnita en (*b*) el 66.6 % de los estudiantes del GM y el 83.3 % del AL en este momento se encontraban en el nivel arbitrario en el tercer subnivel porque lograban representar por medio del material concreto facilitado las cantidades que se describían en el problema pero no realizaban las acciones convencionales necesarias para su resolución.

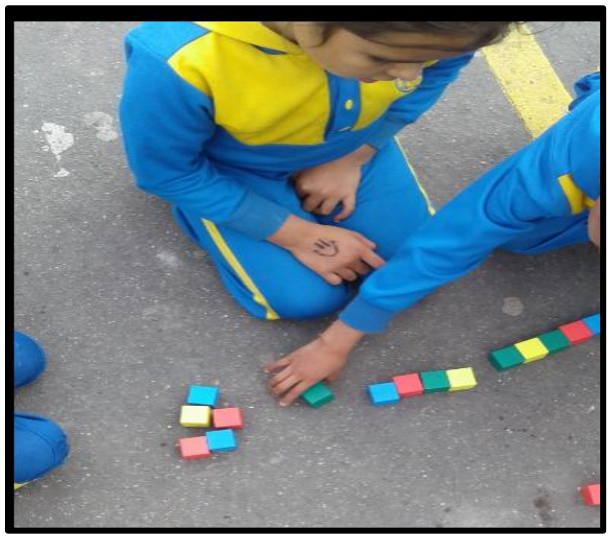


Figura 22 Representación con material concreto

Por tanto, los estudiantes representaban los 7 puntos de avance del primer turno, luego, representaron los 15 puntos de avance total, los contaban por separado, al intentar resolver el problema, los niños buscan el estado final y no uno de los estados de cambio, por tanto contaban todos los datos representados y daban este dato como respuesta, en este sentido, Bruno (2006) afirma "tanto para la suma como para la resta, los problemas de incógnita 1 y 2 son más difíciles que los problemas de incógnita 3" (p. 14) fue necesario por tanto, que las investigadoras utilizaran la representación de la pista de avance dibujando los puntos avanzados en el primer turno y los avanzados en total en el tablero, ubicando una imagen de una bicicleta en el punto de avance del primer turno y el punto de avance total con el fin de que los estudiantes lograran visualizar con mayor claridad la situación que se planteaba en el enunciado, sin embargo, el porcentaje de estudiantes mencionados contaron y reunieron las dos cantidades dadas y este resultado fue el que dieron como respuesta.

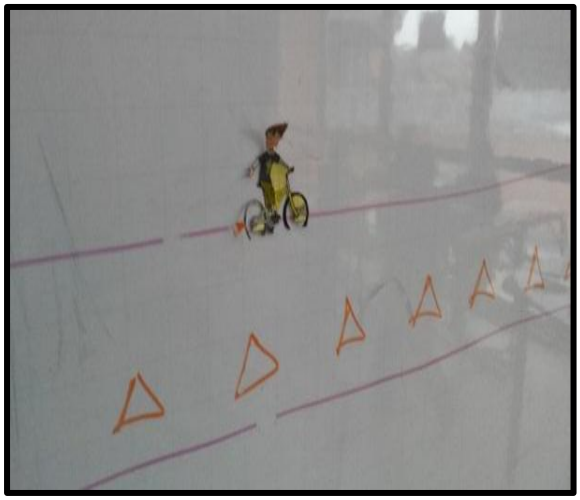


Figura 23 Modelización Tarea 3

Por otro lado el 33.3% de los estudiantes del GM y el 16.6 % del AL en este momento se encontraban en el nivel concreto-manipulativo en el primer subnivel en donde el estudiante requería estrictamente representar los puntos de avance en la pista de carreras e incluso requerían ubicar la bicicleta en los puntos de avance descritos en el problema; a partir de estas acciones los niños lograban hallar la respuesta correcta al identificar el sector de la pista que faltaba haciendo sus cuentas de acuerdo a la construcción del concepto de número alcanzado hasta este momento y utilizando estrategias de resolución diferentes, las cuales se describen en el análisis de la siguiente categoría, por tanto los estudiantes $E3_{GM}$, $E4_{GM}$ y $E5_{AL}$ que se encontraban en este nivel lograron resolver el problema llevando la cuenta, en el nivel de las acciones contando a partir del número 7 (primer punto de avance), contando 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15.

Categoría III Estrategias de resolución de PVEA T_3

✓ Resultados T_3. Categoría III

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en relación al porcentaje de estudiantes y la estrategia de resolución de PVEA utilizada para las sentencias 1, 2 y 3

Tabla 19 Estrategias de resolución PVEA, T3, sentencias 1, 2, 3

Estrategias de la resolución de	**$PVEAS_1$**	**$PVEAS_2$**	**$PVEAS_3$**

problemas matemáticos	GM	AL	GM	AL	GM	AL
No utiliza ninguna estrategia	16,6 %	16,6%	16,6%	16,6%	0 %	0 %
Estrategias de modelaje directo						
Contar todo	66,6 %	83,3%	0 %	0 %	66,6 %	83,3%
Separar de	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Añadir	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Emparejamiento	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Estrategias de la secuencia numérica o conteo verbal						
Contar todo	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Contar a partir de número mayor	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Contar a partir del primer sumando	16,6 %	0 %	0 %	0 %	33,3 %	16,6%
Contar hacia atrás desde	0 %	0 %	83,3%	83,3%	0 %	0 %
Contar a partir de	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Estrategias mentales						
Hecho memorizado	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Hecho deducido	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

✓ Análisis T_3. Categoría III

Para la sentencia $PVEA_{S\ 1}$ el 16,6% de los estudiantes de los dos colegios no emplearon ninguna estrategia para resolver los problemas, contaron por separado los puntos de avance registrados en la tabla de datos, pero no realizaron ninguna otra acción; el 66,6% de GM y el 83,3% del AL emplearon la estrategia de contar todo basados en los datos registrados en la tabla y haciendo uso del material concreto facilitado o de sus dedos. Adicional a esto, el 16,6% de los estudiantes del GM utilizó la estrategia de contar a partir del primer sumando, este estudiante a partir del primer dato contó los puntos recorridos en el segundo avance de uno en uno hasta hallar el resultado; por ejemplo, ante el problema de Duvan avanza 12 puestos en el primer turno.

Luego avanza 5 puestos más. ¿Cuántos puestos avanzó al terminar la carrera? , el estudiante $E4_{GM}$ empieza a contar a partir del primer sumando dado (12 +5) empieza por 12 y luego cuenta 13, 14, 15, 16, 17.

El 16,6% de los estudiantes de los dos colegios al resolver el PVEA $_{S2}$ no utilizaron ninguna estrategia, al igual que en la sentencia anterior representaron con los dedos o con el material concreto facilitado los datos del problema pero no realizaron ninguna acción hacia su resolución; por otro lado, el 83,3% de los estudiantes de los dos colegios utilizaron la estrategia de *contar hacia atrás desde*, la situación de juego y el enunciado del problema (la palabra retrocedió) les facilitó utilizar esta estrategia; los estudiantes contaron a partir del datos que representaba el minuendo hasta encontrar el sustraendo.

Figura 24 Conteo con los dedos

Figura 25 Conteo con los dedos

Al enfrentarse a la resolución del $PVEA_{S\ 3}$ el 66,6% del GM y el 83,3% del AL utilizaron la estrategia de *contar todo*, porque era una estrategia ya conocida y que tuvo éxito en sentencias anteriores, sin embargo, la respuesta no fue correcta. Por otro lado, el 33,3% del GM y el 16,6% del AL utilizaron la estrategia de *contar a partir del primer sumando,* pero en esta ocasión, el objetivo era hallar el estado de cambio en *b* y no el estado final, contaron a partir del primer dato (7) hasta llegar al dato del estado final (8, 9, 10, 11), el resultado era la cantidad de puntos contados (4).

Los estudiantes que presentaron dificultades para resolver esta sentencia, necesitaron apoyo de las docentes investigadoras haciendo modelizaciones o utilizando las preguntas orientadoras, aunque mostraron mayor comprensión del enunciado del problema respondiendo adecuadamente a las preguntas orientadoras, no lograron resolver con éxito este tipo de sentencias.

4.1.4. Tarea 4 PISTA DE CARS

✓ Descripción general de la tarea 4

Para el diseño de esta tarea se tuvo en cuenta dentro del análisis de contenido el concepto de número en cuanto a: la técnica del valor cardinal, el nivel de cadena numerable y el principio de cardinalidad, para ello, se formularon los $PVEA_{S\ 2,\ 3,\ 4,}$ categoría cambio.

Para esta actividad se diseñó una pista de carros con 20 casillas, los niños llevaron carros en miniatura, el juego consistía en lanzar un dado y avanzar en la pista tantas casillas como indicaban los puntos del dado, cada participante tuvo dos oportunidades para avanzar en la pista por turnos, lanzaban el dado y avanzaban tantas casillas como indicaba la cara del dado. Al caer en la casilla de penalización debían retroceder 3 casillas.

La T_4 iniciaba con la presentación y explicación del juego, cada estudiante tenía dos oportunidades para avanzar en la pista y registrar los puntos de avance en la tabla de datos, después del registro, se le formulaban los $PVEA_{S\ 2,\ 3,\ 4}$ la duración de la actividad fue de 60 minutos y se repitió durante 3 días.

Figura 26 Pista de carros

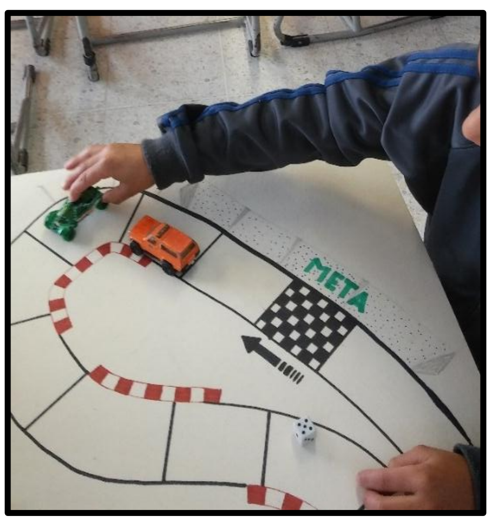


Figura 27 Juego pista de carro

Categoría I. Concepto de número T_4

✓ Resultados T_4 categoria I

Las tareas que se presentan en esta propuesta tienen dos componentes que han favorecido avanzar hacia la contrucción del concepto de número: la primera esta relacionada con la experincia vivencial y por tanto significativa para el estudiante, se observó que se sienten más comprometidos e interesados en participar en cada tarea y por eso su evolución notable en los niveles, principios y técnicas, Baroody (1997) afirma:

> Normalmente, el dominio incompleto de las técnicas básicas para contar suele atribuirse a una falta de experiencia o interés. Si los ejercicios no son interesantes, algunos niños no se sentirán comprometidos con ellos y no alcanzarán la experiencia necesaria para el dominio de la técnica" (p.14).

Y la segunda, se refiere a la organización secuencial y jerárquica de las tareas, esto le ofreció a los estudiantes un ejercicio regular con diferentes actividades que posibilitó la práctica constante de cada aspecto.

Lo anterior le posibilitó a los estudiantes avanzar en la construcción del concepto de número, estos avances se presentan en la tabla siguiente.

Tabla 20 Resultado categoría 1, concepto de número, T4, sentencias 2, 3, 4.

	Descripción	Estudiantes GM	Estudiantes ALP
Técnica: valor cardinal	Al contar una colección de objetos dice el término cardinal que representa el conjunto entero, sin necesidad de realizar ningún tipo de re-conteo.	83,3%	83,3%
Principio: cardinalidad	El último término obtenido, al contar todos los objetos de la colección, indica el número de objetos que tiene dicha colección.	83,3%	83,3%
Nivel: cadena numerable	Puede recitar n términos de la secuencia numérica desde a hasta b.	66,6%	66,6%

✓ Análisis T_4. Categoría I

De acuerdo a lo planteado anteriormente la T_4 permitió que los estudiantes practicaran la técnica del valor cardinal y por tanto lograran el principio de cardinalidad, el 83% de estudiantes de los dos colegios alcanzaron el propósito de la tarea, son capaces de establecer el cardinal de un conjunto de casillas sin necesidad de hacer reconteo, este grupo de estudiantes luego de practicar varias veces la tarea, desarrolló la capacidad de decir de forma súbita (subitización) la cantidad de puntos de los dados sin necesidad de enumerar o re-contar, incluso cuando jugaban con dos dados decían la suma de los puntos con gran rapidez; sin embargo, el 16% de estudiantes en ambos colegios no lograron estalecer el principio de cardinalidad, cuando se les preguntó cuántos puntos sacaron en los dados o cuantas casillas avanzaron (a pesar de ya haberlos contado) estos dos estudiantes $E3_{AL}$ y $E6_{GM}$ no respondían con el cardinal sino que enumeraban de nuevo la colección, en otro momento, estos niños intentaron adivinar la cantidad de puntos obtenidos en los dados, pero sus anticipaciones fueron erróneas y afectaban las respuestas de los PVEA. Siguiendo el análisis de los diarios del profesor se puede mencionar que una de las posibles razones por las cuales los dos estudiantes presentaran estas dificultades, obedece al afán por jugar o por querer imitar la misma técnica de sus compañeros.

Castro et al. (1992) menciona que: “se considera un momento importante en el desarrollo del concepto de número aquel en que el estudiante descubre la cardinalidad”(p.12), lo anterior, para mencionar que el 83,3 % de la población objeto de estudio ha avanzado en la construcción del concepto de número y que el proceso investigativo con la unidad didáctica está alcanzando buenos resultados.

En cuanto al dominio de la secuencia numérica, el 66% de niños de los dos colegios alcanzaron el nivel de cadena numerable, este grupo de estudiantes fueron capaces, comenzando desde cualquier número, de contar un número determinado de casillas y detenerse en la pista en el número o casilla que correspondiera, los estudiantes que no alcanzaron este nivel, ya pueden en comparación a la tarea anterior, recitar una porción de la secuencia numérica desde un término cualquiera, por tanto, avanzan la cantidad de casillas en el primer turno y de ahí continúan con la cantidad de puntos del segundo lanzamiento pero no paran la cuenta, “pasar de largo”. Por ejemplo, el estudiante $E2_{AL}$ en el primer turno debe avanzar a la casilla 8 y en el segundo 3 casillas más, el estudiante empieza el conteo en 8 y continúa 9, 10, 11, 12, 13… parece tener el control de los puntos pero, no supo en dónde detenerse, entonces los estudiantes hicieron preguntas como:

$E3_{AL}$ – "¿Hasta dónde profe?"

$E6_{GM}$- "¿Es como 15?."

Esto evidencia que a pesar de avanzar hacia el dominio de la secuencia, todavía no alcanzan el nivel de cadena numerable.

Categoría II niveles de resolución de problemas T_4

✓ Resultados T_4. Categoría II

En la siguiente tabla se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes en la T_4 en relación al nivel de resolución de problemas de los $PVEA_{S\ 2,\ 3,\ 4}$ en los dos colegios y que se registraron en la lista de chequeo. Corresponden a un tercer momento de la implementación, los estudiantes demuestran un mejor nivel de comprensión lo cual les posibilita tener mayor éxito, especialmente en la resolución de la sentencia 2, del mismo modo, se observa un avance en el nivel de comprensión de la sentencia 3 y aunque es la primera vez que se les presenta la sentencia 4, los niños demuestraron un buen desempeño

Tabla 21 Resultados niveles de resolución de problemas, Tarea 4, sentencias 2, 3, 4.

Nivel	**Sentencia 2**		**Sentencia 3**		**Sentencia 4**	
	GM	AL	GM	AL	GM	AL
Arbitrario	0 %	0 %	50,0%	16,6%	33,3%	33,3%
Concreto manipulativo	83,3%	83,3%	50,0%	83,3%	50 %	66.6 %
Pictórico	16,6%	16,6%	0 %	0 %	16.6 %	0 %
Pictórico simbólico	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Simbólico con fallas en la convencionalidad	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Simbólico convencional	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

✓ Análisis T_4. Categoría II

En esta actividad los estudiantes se enfrentaban a la resolución de los $PVEA_{S\ 2,\ 3,\ 4,}$ se evidencia mediante la observación, las grabaciones en video y los registros del diario del profesor (ver anexo 2) un mayor nivel de efectividad por parte de los niños y niñas, se les continúan formulando las preguntas orientadoras y se les siguen modelizando algunas de las acciones descritas en los problemas, especificamente para los PVEA$_{S\ 3,\ 4}$ con el fin de lograr un mayor nivel de comprensión del enunciado del problema.

El desempeño de los estudiantes al enfrentarse a la resolución del PVEA$_{S\ 2}$ (incógnita en *c*) evidenciaba que ninguno de los estudiantes de los dos colegios se encontraban para este momento de la implementación en el nivel arbitrario, por tanto, se dedujó que habían logrado avanzar en relación al proceso de comprensión del enunciado de los problemas y por tanto al nivel de RPM, es así, como el 83.3 % de los estudiantes de los dos colegios lograron avanzar al nivel concreto manipulativo, esto evidenciado en que lograban sustituir los elementos enunciados en el problema por materiales físicos con el propósito explícito de resolver el problema, lo cual según afirma García (2010) les permite realizar las representaciones mentales necesarias a través de las acciones que experimentan con los objetos para hallar la solución al problema propuesto.

Figura 28 Representación con material concreto

Figura 29 Representación con material concreto.

Adicional a esto utilizaban una pista dibujada en el tablero para recorrer las 10 casillas de avance del primer turno, luego iban retrocediendo de una a una las 3 casillas que debían retroceder, a partir de lo que habían escuchado en el encunciado del problema, la palabra “retrocedió” les dio pistas significativas con respecto a las acciones que debían realizar para resolver el problema, entonces borraban o tachaban las 3 casillas retrocedidas y daban como respuesta: está en la casilla 7, aunque, algunos estudiantes cometían errores en el conteo (asignación de etiquetas, una etiqueta de más a un objeto o dejar un objeto sin etiqueta) y daban como resultado otro número aproximado a 7.

Por otro lado, el $E3_{GM}$ al resolver los $PVEA_{S\,2}$ se encontraba en el nivel pictórico, en el primer subnivel, por tanto, utilizaba representaciones gráficas no convencionales (rayas, círculos u otros objetos) como apoyo para encontrar la solución, a partir de estas representaciones el estudiante llevaba la cuenta, es decir dibujaba 10 objetos, luego, tachaba 5 y contaba los que le quedaban limpios y daba como respuesta 5.

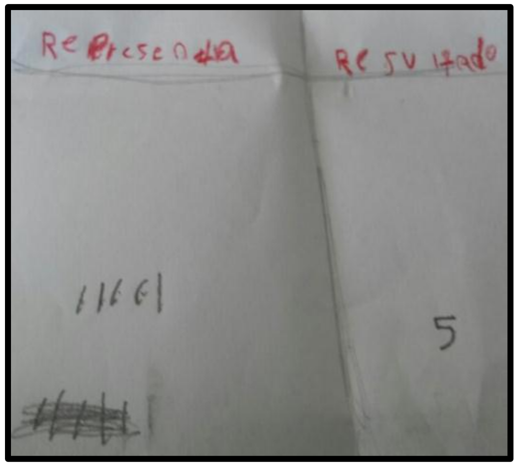


Figura 30 Representación pictórica

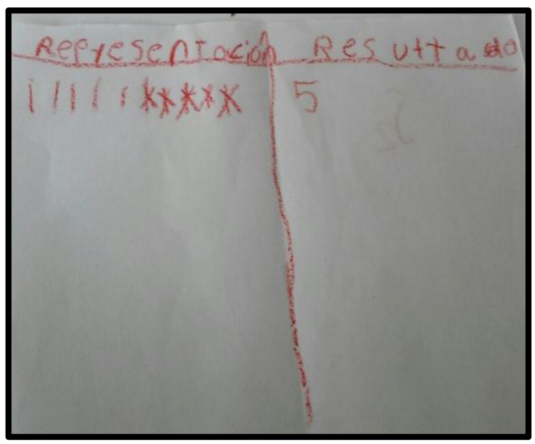


Figura 31 Representación pictórica

Además, el E5$_{AL}$ dio la respuesta convencional cómo resultado, es decir dijo: "da 7", al preguntarle cómo lo sabía, respondió: fácil profe: 10-3 da 7, sin embargo al sustentar su respuesta se apoyó en alguna representación gráfica o en sus dedos.

D$_{AL:}$ Tenías 10 carros, luego vendiste 3 carros. ¿Cuántos carros tienes ahora?

E5$_{AL}$: -Fácil, profe, 10 – 3 da 7.

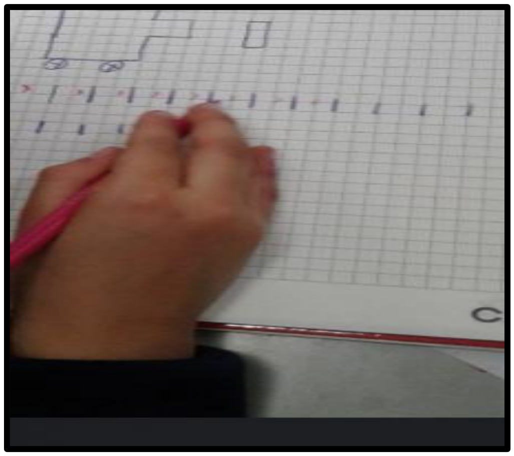


Figura 32 Representación de la solución del PVEA

Para el $PVEA_{S\ 3}$ el 50 % del GM Y EL 16.6 % del AL se encontraban en el nivel arbitrario en el tercer subnivel, es decir, representaban correctamente por medio del material o de dibujos los datos del enunciado del problema, pero no realizaban las acciones necesarias para resolverlo, simplemente "reunían" las 9 casillas de avance inicial con las 13 casillas de avance final.

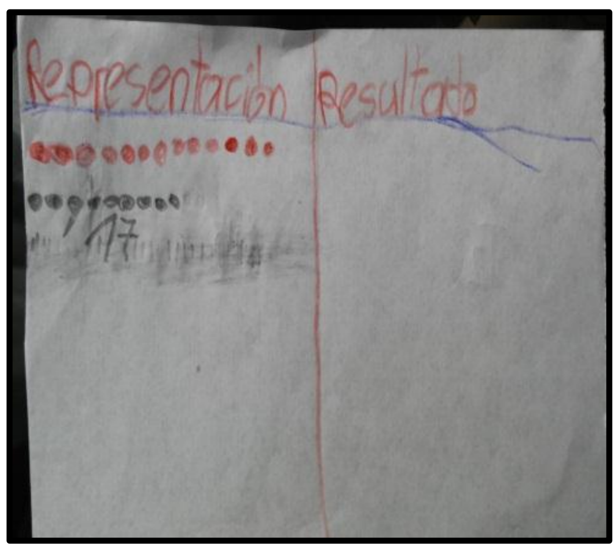


Figura 33 Representación pictórica sentencia 3

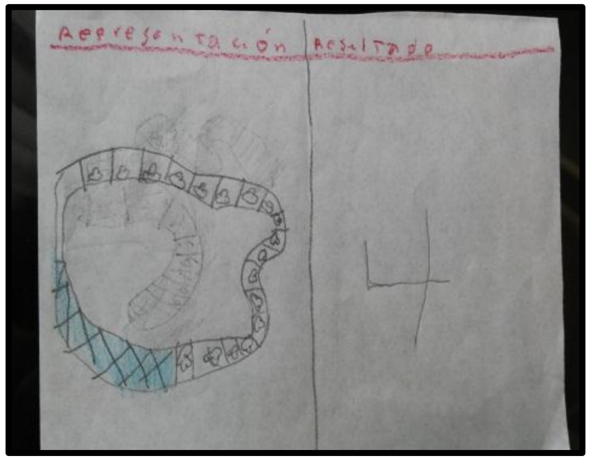


Figura 34 Representación pictórica sentencia 3

Daban como respuesta una cantidad al azar, o uno de estos datos, o el resultado de reunir estos dos datos, al preguntarle a los estudiantes las razones de este resultado y de su procedimiento, no sabían dar una explicación, entonces, para la formulación del problema: Juan lanza los dados y avanza 9 casillas, su compañero lanza el dado y el carro avanza a la casilla 13; ¿Cuántas casillas avanzó el carro en el segundo turno? se les formularon las preguntas orientadoras:

D_{GM}: ¿Cuántas casillas avanzó el primer jugador?

$E1_{GM}$: Cuenta señalando las casillas y etiquetando en forma correcta cada una de las casillas:- uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y 9, recorrió 9 casillas.

$E2_{GM}$: Cuenta señalando las casillas y etiquetando en forma correcta cada una de las casillas:- uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y 9, 9 casillas.

$E3_{GM}$: Cuenta rápidamente las casillas, no realiza ningún re conteo, -uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve, dice-9.

$E5_{GM}$: - Realiza el conteo en forma lenta pero precisa: -uno, dos, tres, cuatro…9, recorre 9 casillas.

$E6_{GM}$: Cuenta señalando las casillas, al etiquetar comete un error, es consciente de ese error sacude su cabeza, se devuelve, realiza el re conteo esta vez en forma correcta señalando cada una de las casillas: - uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y 9, 9 profe, 9 casillas.

D_{GM}: ¿Cuántas casillas avanzó el carro en total?

$E1_{GM}$: Cuenta a partir de uno las trece casillas etiquetando las casillas correctamente: -uno, dos, tres…hasta llegar a 13. Avanzó 13 casillas”.

$E2_{GM}$: Cuenta empezando en uno y etiqueta en forma correcta: -uno, dos, tres…llega a la casilla 13 y dice:” -en total avanzó13 casillas”.

$E4_{GM}$: Empieza a contar a partir de las 9 casillas de avance del primer turno, dice –“9”, y añade, -“10, 11, 12, 13, recorrió 13 casillas en total”.
$E5_{GM}$: Empieza a contar a partir de las 9 casillas del primer avance, pero incluye la casilla 9, asignándoles dos etiquetas a este número pero él no es consciente de esto, en el conteo que va a realizar, dice-“nueve, diez, once, doce, trece, 13 casillas en total.
$E6_{GM}$: Cuenta a partir de uno, se equivoca, es consciente de su error, retrocede varias veces pero, siempre etiqueta más de una vez o deja alguna casilla sin etiqueta, dice: -“uno, dos, tres…hasta diez en forma correcta, luego…doce, catorce, diez y seis y diez y siete, recorre diez y siete casillas e total.
D_{GM}: Haciendo énfasis y señalando el espacio de la casillas que corresponden al dato desconocido (incógnita en) y que corresponde a las casillas de avance del segundo turno ¿Cuántas casillas avanzó el carro en el segundo turno?
$E1_{GM}$: Cuenta los dos puntos de avance en forma precisa, por separado de uno en uno, dice:-“uno, dos, tres…hasta 9”, y luego se devuelve y partir de uno cuenta hasta la casilla total de avance, dice-“uno, dos, tres…”hasta llegar a trece, luego dice: -avanzó 9 casillas
$E4_{GM}$: Empieza a contar a partir de las 9 casillas, donde ha dejado una marca, luego añade 1 y dice: -“10”, se ayuda con sus dedos, y añade tres dedos en forma súbita y dice: -“4, avanzó 4 casillas”.
$E6_{GM}$: Cuenta la cantidad de casillas que representa el número mayor a partir de uno: dice: -“uno, do, tres…diez, doce, trece, catorce, recorrió 14 casillas en el segundo turno”

Las investigadoras realizaron la modelización del problema, graficando la pista de la carreras y haciendo énfasis en cada uno de los datos (ampliando el contexto fenomenológico) los que ofrecía el problema y el dato que se debería hallar y a partir de esto los niños y las niñas lograban establecer relaciones entre los datos numéricos que se les presentaban, es así como el 50% del GM y el 83.3 % del AL llegaron al nivel concreto manipulativo en el primer subnivel al dramatizar en la pista de carros las acciones que se le planteaban en el enunciado del problema encontrando la solución por medio del conteo de las 9 casillas de avance inicial en donde dejaban una marca, luego, contaban las casillas de avance total, en este momento retrocedían y miraban el sector de la pista que iba desde la casilla 9 hasta la casilla 13, contaban las casillas desde la 9 hasta la 13 y daban el resultado, sin embargo, iniciaban el conteo a partir de la casilla 9 o de la casilla 10 para llegar a 13, por tanto el resultado era aproximado o correcto dependiendo de la casilla desde donde se iniciara el conteo. Los estudiantes $E4_{GM}$ y $E6_{AL}$ lograron resolver este problema (9+?=13), en este mismo nivel pero, al observar las cantidades representadas lograron encontrar el 4 de la respuesta al completar 10 de 9 + 1 y luego a este 1 le agregaron los 3, por tanto, 3+1= 4, entonces en el segundo turno recorrió 4 casillas.

Al resolver los $PVEA_{S\ 4}$ el 33.3 % de los estudiantes de los dos colegios se encontraban en el nivel arbitrario en el subnivel tres, es decir, representaban correctamente por medio del material dibujos e incluso números, pero no realizaban alguna acción para resolver el problema, aunque la pista les brindaba la posibilidad de llevar la cuenta con los carros y las casillas, estos estudiantes no lograron hallar la solución, la formulación de las preguntas orientadoras y la modelización contribuyó en alguna medida a la comprensión de la sentencia pero de igual manera estos estudiantes buscaban como respuesta un estado final, por tanto, no sabían qué hacer en este momento cuando el estado final ya estaba, sin embargo, este problema por ser el primero, se les formuló en un rango numérico pequeño porque según Bruno (2006) "Los problemas con números pequeños, pueden llevar a procedimientos de recordar hechos numéricos más que los problemas con números mayores (p. 42) y como se ha evidenciado dificultad por parte de los estudiantes frente a las sentencias con incógnita en *(a)* o en *(b),* la palabra "retrocedió" les brindo "pistas" para encontrar el camino hacia la resolución, esto concuerda con los planteamientos de Bruno (2006) cuando afirma que "En ocasiones los niños hacen una traducción lineal del enunciado y se apoyan en las "palabras clave" que aparecen (más, menos, añadir, quitar…) y en función al sentido de estas palabras, resuelven el problema." (p. 15), es así, como al resolver el $PVEA_{S4}$ tenía la incógnita en *(b)* el 50 % de los estudiantes del GM y el 33.3 % del AL para esta sentencia se encontraban en el nivel concreto manipulativo en el primer subnivel porque dramatizaban las acciones que se les planteaban en el problema, haciendo uso de la pista de carreras, de los puntos obtenidos en los dados y de los puntos de avance y retroceso que iban realizando con sus carritos, al formularle el problema los niños requerían realizar la acción, y como se les pedía hallar el estado de cambio que se encontraba en *(b)* requerían dejar una marca en el punto de avance total para a partir de esta, contar los puntos de retroceso y de esta manera encontrar el resultado correcto; también el $E4_{GM}$ logró avanzar al nivel pictórico ya que hacía uso de figuras apegadas estrictamente al referente real que se describe en el enunciado del problema, es decir, para lograr hallar la solución, se apoyaba en la representación gráfica no convencional que le brindaba la situación de juego vivida siendo consciente de las acciones realizadas, las expresaba en forma explícita encontrando la respuesta correcta.

Categoría III Estrategias de resolcuión de PVEA T_4

✓ Resultados $T_{4.}$ Categoría III

De acuerdo a los instrumentos de recolección de información propuestos para esta investigación se puede inferir que los estudiantes usan más estrategias de resolución de los PVEA y tienen mayor confianza al emplearlas. En la siguiente tabla se muestra el porcentaje de estudiantes y las estrategias que utilizan en cada sentencia.

Tabla 22 Estrategias de resolución PVEA, T4, sentencias 2, 3, 4.

Estrategias de la resolución de problemas matemáticos	**PVEAS$_2$**		**PVEAS$_3$**		**PVEAS$_4$**	
	GM	**AL**	**GM**	**AL**	**GM**	**AL**
No utiliza ninguna estrategia	0 %	0 %	0 %	0 %	33,3%	16,6%
Estrategias de modelaje directo						
Contar todo	0 %	0 %	50%	33,3%	0 %	0 %
Separar de	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Añadir	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Emparejamiento	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Estrategias de la secuencia numérica o conteo verbal						
Contar todo	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Contar a partir de número mayor	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Contar a partir del primer sumando	0 %	0 %	33,3%	50%	0 %	0 %
Contar hacia atrás desde	83,3 %	100 %	0 %	0 %	50%	83,3%
Contar a partir de	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Estrategias mentales	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Hecho memorizado	16,6 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Hecho deducido	0 %	0 %	16,6%	16,6%	16,6%	0 %

✓ Análisis T$_4$. Categoría III

De acuerdo a la información registrada en la tabla anterior se evidencia que los estudiantes al resolver el PVEA $_{S\ 2}$ utilizan las estrategias de resolución con mayor eficiencia y presicion, esto les permiten hallar el resultado correcto del problema y comuncar la razón por la cual emplearon una estrategia determinada, en este sentido, el 83,3% y el 100% del AL emplearon estrategias de contar hacia atrás o contar a partir de, es decir, contaron hacia atrás desde el estado final la cantidad de casillas que debían retroceder, (colocaron una marca o tacharon los puntos de retroceso), luego contaron los puntos reecorridos en el primer avance. En la siguiente figura se observa la representación gráfica con las marcas que hizo un estudiante cuando resolvió el $PVEA_{S\ 2.}$

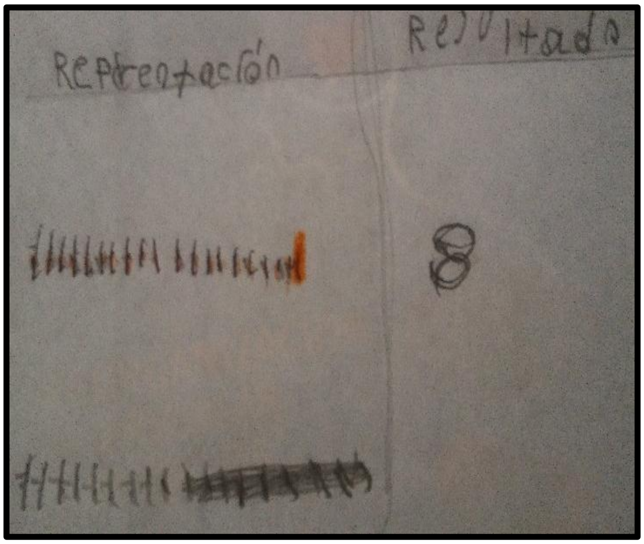


Figura 35 Representación pictórica

El estudiante $E4_{GM}$ utilizó un *hecho memorizado* para dar el resultado, es este caso avanzó a la casilla 16 y tenía que retroceder 8 casillas, rápidamente responde 8, al preguntarle cómo halló la respuesta, el niño constestó:

D_{GM}: ¿Por qué dices eso?

$E4_{GM}$:"-Fácil, 8 más 8 da 16, entonces a 16 le quito 8 da 8"

Al resolver el PVEAs $_3$ el 50% de los estudiantes del GM y el 33,3% del AL emplearon la estrategia de modelaje directo *contar todo*, porque representaron todos los datos del problema, luego los contaron todos y dieron este dato como respuesta, sin embargo el resultado es erróneo porque debían hallar el segundo estado y no el estado final. En la figura siguiente se muestra la representación que hizo un estudiante para resolver el problema (7 + ¿ = 15).

En la siguiente figura se muestra cómo los estudiantes intentaron representar la forma de resolver los problemas siguiendo el esquema propuesto por Garcia (2010), este esquema se presenta como una forma de comunicar el proceso de resolución y para que las investigadoras puedan visualizar las estrategias de resolución de los PVEA.

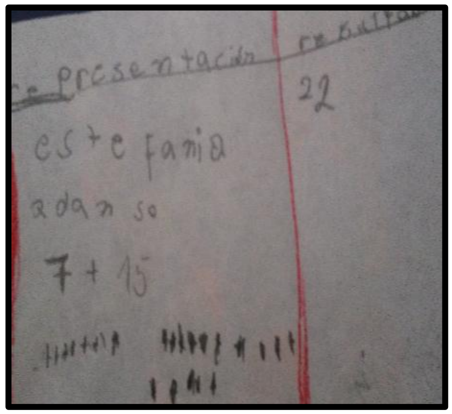
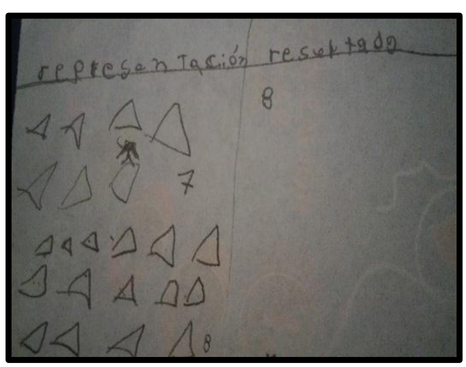


Figura 36 Representación PVEA sentencia 3

El 33,3 % de los estudiantes del GM y el 50% del AL utilizaron la estrategia de contar a partir del primer sumando para resolver los PVEA$_{S\ 3}$, en este caso los estudiantes utilizan el primer dato como referente para seguir contando los puntos hasta llegar al punto de avance total, la respuesta es la cantidad de puntos contados, por tanto el resultado es correcto dependiendo de la construcción del concepto de número alcanzado hasta este momento.

El 33,3% del GM y el 16,6% del AL no emplearon ninguna estrategia para resolver el problema, representaron los datos con las cantidades que se presentan en el enunciado, pero no se evidencia ninguna acción para resolverlos. En la siguiente figura un estudiante dibujó los datos del problema pero no hizo ninguna acción que le permitiera hallar el resultado.



.

El 50% de los estudiantes del GM y el 83,3% AL emplearon la estrategia de *contar hacia atrás desde* para reolver los $PVEA_{S\ 4}$ realizando esta acción en la pista de carros es decir, se devolvían desde el primer avance contando las casillas hasta el punto de avance final. Por ejemplo avanzaron en la pista 6 casillas, luego se devolvieron contando hasta la casilla 3, el resultado son las casillas contadas (3). El estudiante $E6_{GM}$ empleó una estrategia de hechos numéricos "*hecho deducido*" sin necesidad de contar en la pista de carros, al momento de formular el problema (12-¿=5), dijo rápidamente el resultado, al preguntarle cómo lo había hecho respondió

D_{GM}: Avanzaste 12 casillas en el primer turno. Luego, retrocediste algunas casillas. Ahora estas en la casilla 5. ¿Cuántas casillas retrocediste?

$E6_{GM}$: Retrocedí 7 casillas.

D_{GM}: ¿Cómo lo hiciste?

$E6_{GM}$: "- profe, 5 y 5 da 10 más 2 da 12 y 5+2 da 7, retrocedí 7 casillas".

4.1.5. Tarea 5 EL CONSECIONARIO

- ✓ Descripción general de la T_5

Para el diseño de esta tarea se tuvo en cuenta dentro del análisis de contenido el concepto de número en cuanto a: la técnica de separación, el nivel de cadena bidimensional y el principio de biunivocidad, para ello, se formularon los $PVEA_{S\ 2,\ 4,\ 6}$ categoría cambio.

Para realizar esta tarea, los estudiantes conformaron dos grupos (vendedores y compradores) cada vendedor recibió como base 5 fichas, cada comprador recibió 15 fichas para realizar sus compras, es decir, los carros se "pagaban" con fichas en lugar de dinero. Cada vendedor le asignaba un valor a su auto, según las características que tuviera entre una y quince fichas, al iniciar la situación de compra y venta, los compradores elegían el carro que les interesaba y se dirigían a comprarlo.

La T_5 iniciaba con la presentación y explicación del juego, cada estudiante podía ser o vendedor o comprador en dos oportunidades, al finalizar la simulación de compra y venta se le formulaban los $PVEA_{S\ 2,\ 4,\ 6}$ categoría cambio relacionándolos con las situaciones vividas durante la actividad, la duración de la actividad fue de 60 minutos y se repitió durante tres días.

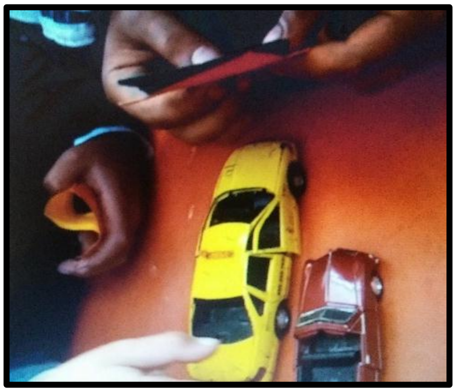


Figura 37 El concesionario

Categoría I. Concepto de número T_5

✓ Resultados T_5 categoria I

Para la T_5 los estudiantes ya comprendían mejor los eninciados de los PVEA y por tanto, mejoraron el desempeño en la tarea, en este momento se observa que al tener más confianza en como resolver la situación problema, van adquiriendo mejor dominio y seguridad con la secuencia numérica y las técnicas para contar. En la tabla siguiente se pueden observar los resultados en cuanto al desarrollo del concepto de número.

Tabla 23 Resultado categoría 1, concepto de número, T5, sentencias 2, 4, 6.

	Descripción	Estudiantes GM	Estudiantes ALP
Técnica: separaciòn	Cuenta utilizando la técnica de separar los objetos solicitados y es capaz de recordar cuántos ha separado.	100%	83,3%%
Principio: biunivocidad	En el proceso de contar, el estudiante realiza la correspondencia biunívoca, es decir, que a cada elemento del conjunto se le asignará una palabra numérica y recíprocamente, cada palabra estará asociada con un elemento.	100%	83,3%

Nivel: cadena bidimension al	Desde un término cualquiera, a, se puede recorrer la sucesión en ambas direcciones.	83,3%	83,3%

✓ Análisis T_5. Categoría I

De acuerdo a la información registrada en la tabla anterior y a los registros de diario del profesor se puede afirmar que el desempeño de los estudiantes en cuando al concepto de número ha mejorado considerablemente. Se aprecia que la totalidad de estudiantes del colegio GM dominan la técnica de separación y solo un estudiante del colegio AL todavía presenta difcultades en separar de manera controlada una colección de objetos recordando cuántos ha separado o cuántos debe separar; este estudiante participa en la actividad con mucho interés e intenta resolver los PVEA que se presentan en la tarea, por ejemplo, debía contar el pago de dos carros, el primero costaba 16 fichas y el segundo 8, el niño contó muy bien las primeras 16 fichas, luego contó por separado el otro conjunto pero no paró la cuenta en el 8 sino, siguió contando hasta el 15, olvidó la cantidad que debía separar, por eso, en varias oportunidades preguntó: ¿Cuántas eran profe?; Baroody (1997) menciona que utilizar la técnica de separación ímplica entre otras, la capacidad de controlar y detener el proceso de separación, “En otras palabras, se requiere almacenar el objetivo en la memoria de trabajo, un proceso de enumeración y, al mismo tiempo, ir comparando los números del proceso de enumeración con el número almacenado y detener este proceso cuando se llegan a igualar (Resnick y Ford, 1981 citado por Baroody, 1997).

En cuanto a los principios en el proceso de contar, los estudiantes alcanzan un buen dominio del principio de biunivocidad, en esta tarea se observó que la mayoría de los estudiantes tuvo el control de la cuenta de un conjunto de fichas aún cuando éstas estuvieran desordenadas (sin alineación), se observa que establecen la correspondencia entre la etiqueta numérica y las fichas, por tanto, no cuenta dos veces la misma ficha porque ya le han asignado una etiqueta antes. Se puede apreciar en los registros de video que los niños son capaces de controlar la cuenta estableciendo la relación biunívoca sin necesidad de tocar los elementos del conjunto.

El nivel de cadena bidimensional supone un esfuerzo mayor para los estudiantes, pues exige el dominio en ambas direcciones de la secuencia numérica, sin embargo, en esta tarea se observó que sin necesidad de explicarles a los niños ambas direcciones de la secuencia, ellos la emplearon con gran facilidad en la situación de juego, por ejemplo, los niños que jugaban de vendedores de carros al plantearles los $PVEA_{s2,\ 4,\ 6.}$ emplearon estrategias de sepración y contaban de una cantidad mayor a una menor, por ejemplo al formularles la sentencia:

D_{AL}: -"Pablo tenía 14 carros, luego vendió 5 carros; ¿Cuántos carros tiene ahora?"

$E1_{AL}$: -Cuenta equivocándose en la asignación de etiquetas, retrocede, inicia el re conteo y a partir de uno, dice-"uno, dos, tres…"hasta llegar a 14, dice 14 y va quitando los 5 carros vendidos, dice: -"1, 2, 3, 4 y 5," cuenta los carros que le quedan, -"uno dos, tres…", llega a 9 –"me quedan 9 carros".

$E2_{AL}$: -"Tenía 14 carros, vendí 5, entonces dice: -14, luego empieza a contar hacia atrás 13, 12, 11, 10 y 9 me quedan 9 carros"

$E3_{AL}$: Cuenta todos los 14 carros que tenía, luego va separando de este grupo los carros 9 vendidos, dice-", 1, 2, 3, 4 y 5, luego cuenta los que le quedaron de uno en uno, dice: -"uno, dos, treas, cuatro cino, seis, siete, ocho y 9, me quedan 9 carros".

$E5_{AL}$: Mira los carros, escucha el problema y dice-"a 14 le quito 9 da 4, profe vendí 4 carros"

Esta estrategia permite ver cómo agunos de los niños son capaces de recorrer en ambas direcciones la secuencia numérica sin perder el control de las cantidades, sin embargo, el 16% de los estudiantes en ambos colegios intentaron contar desde una cantidad mayor, pero se equivocaban al recitar la secuencia numérica conservando siempre la relación de mayor a menor (10, 8, 7, 5, 3, 2, 1).

Categoría II niveles de resolución de problemas T_5

✓ Resultados $T_{5.}$ Categoría II

En la siguiente tabla se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes en la T_5 en relación al nivel de resolución los $PVEA_{S\ 2,\ 4,\ 6}$ en los dos colegios y que se registraron en la lista de chequeo. Corresponden a un cuarto momento de la implementación, los estudiantes demuestran un mejor nivel de comprensión lo cual les posibilita tener mayor éxito especialmente en la resolución de la sentencia 2, del mismo modo, se observa un avance significativo en el nivel de comprensión de la sentencia 4 y 6

Tabla 24 Resultados niveles de resolución de problemas, Tarea 5, sentencias 2, 4, 6.

Nivel	Sentencia 2		Sentencia 4		Sentencia 6	
	GM	AL	GM	AL	GM	AL
Arbitrario	0 %	0 %	16,6%	16,6%	100 %	100%
Concreto manipulativo	33.3 %	66,6%	50,0%	66,6%	0 %	0 %
Pictórico	33,3 %	33,3%	33,3%	16,6%	0 %	0 %
Pictórico simbólico	16.6 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Simbólico con fallas en la convencionalidad	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Simbólico convencional	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

✓ Análisis T_5. Categoría II

En esta actividad los estudiantes se enfrentaban a la resolución de los $PVEA_{S\ 2,\ 4,\ 6}$ se evidencia mediante la observación, las grabaciones en video un mayor nivel de efectividad por parte de los niños y niñas. Se les continúan formulando las preguntas orientadoras y se les siguen modelizando algunas de las acciones descritas en los problemas.

En este momento de la intervención los estudiantes han recorrido un camino didáctico que les permite resolver con mayor facilidad los $PVEA_{S\ 2}$ (incógnita en c) por tanto, ninguno de los estudiantes de los dos colegios se encontraba en el nivel arbitrario, lo cual, daba indicios, de que para ellos la estructura del enunciado del problema había adquirido un significado, y por tanto era posible encontrar el resultado. En este momento y en esta sentencia el 33.3 % del GM y el 66.6 % del AL se encontraban en el nivel concreto-manipulativo en el segundo subnivel porque eran capaces de recurrir al material concreto que se les facilitaba para hallar el resultado del problema o, hacían uso de sus dedos para llevar las cuentas a partir de las acciones vivenciadas en las situaciones de compra-venta, es así como, estos estudiantes por medio del material concreto que se les facilitaba, contaban los 18 carros que tenían, luego quitaban los 8 carros vendidos, y contaban las que les quedaban, daban como resultado: vendió 8 carros, este dato lo hallaron rápidamente realizando el conteo en forma súbita: "da 8 profe" sin necesidad de reconteo o de volver a iniciar en uno.

Figura 38 Representación con los dedos

Por otro lado el 33.3% del GM y el 33.3 % del AL se encontraban en el nivel pictórico en el subnivel tres por tanto, lograban sustituir el isomorfismo por un esquema que lo representara, es decir, no necesariamente debían tener las acciones del enunciado presentes para poder llevar sus cuentas, hacían uso de palitos, círculos u otros objetos (con los cuales remplazaban los carros) y de esta manera representaban las acciones que les permitían hallar el resultado, para el caso de esta sentencia (tachaban, borraban o colocaban una marca) para averiguar la cantidad de carros vendidos, estos estudiantes, por ejemplo, dibujaban 18 palitos, bolitas u otros objetos, luego, iban marcándolos uno a uno hacía atrás (los 8 que vendieron) los tachaban uno a uno o todos a la vez y daban como respuesta. "vendió 8 carros", por otro lado, el $E4_{GM}$ avanzó al nivel pictórico simbólico en el primer subnivel, porque, empleó estrategias pictóricas para resolver el problema con alguna operación convencional, es decir, este niño representó su respuesta en forma convencional, pero, al preguntarle cómo lo había hecho, el respondió: fácil profe, 8 + 8= 16, entonces si a 16 le quito 8 me da 8.

Para el PVEA $_{S4}$ (incógnita en *b*) el $E6_{GM}$ y el $E6_{AL}$ de los dos colegios se encontraban en el nivel arbitrario en el tercer subnivel, es decir, lograban representar correctamente por medio del material concreto los datos presentes en el enunciado del problema pero no realizaban las acciones necesarias para su resolución, esta sentencia tenía la incógnita en (*b)* y para ellos continuaba presentando dificultad este tipo de sentencias, por tanto, aunque estos estudiantes lograban identificar los datos presentes en el enunciado y los representaban en forma correcta por medio del material concreto utilizado en la tarea, simulando la situación de compra y venta, al intentar encontrar la solución seguían buscando el estado final y al darse cuenta que ya estaba se mostraban confundidos y por tanto daban como respuesta uno de los datos, o los separaban del número mayor y al preguntarle el porqué de esa acción los estudiantes no sabían dar una respuesta; por otro, lado el 50 % de los estudiantes del GM y el 66.6% del AL se encontraban en el nivel concreto-manipulativo en el primer subnivel, ya que, dramatizaban las acciones que se planteaban en el problema y llevaban la cuenta con los mismos objetos que se mencionaban, para este caso utilizaban los carritos simulando las acciones de compra y venta realizando el proceso hacía la resolución, es decir, representaban los 12 carros que tenía Paula, luego le quitaban los 6 carros que había vendido separándolos en un solo grupo de los 12 que tenían inicialmente, el éxito en la tarea dependía del conteo realizado, por tanto, si al etiquetar un objeto le daban una etiqueta de más o no le asignaban la etiqueta correspondiente el grupo separado o la cantidad total de carros no correspondía correctamente, por tanto, el resultado era aproximado pero, no correcto. En el nivel pictórico se encontraban el $E3_{GM}$, el $E4_{GM}$ y el $E5_{AL}$ en el primer subnivel, es decir, necesitaban apoyarse en la representación gráfica no convencional (dibujos de pequeñas líneas, círculos, objetos que se enunciaban en el problema) para realizar el proceso de resolución, para este caso, este porcentaje de estudiantes requirió representar gráficamente los carros y tachar los vendidos y así hallar el resultado.

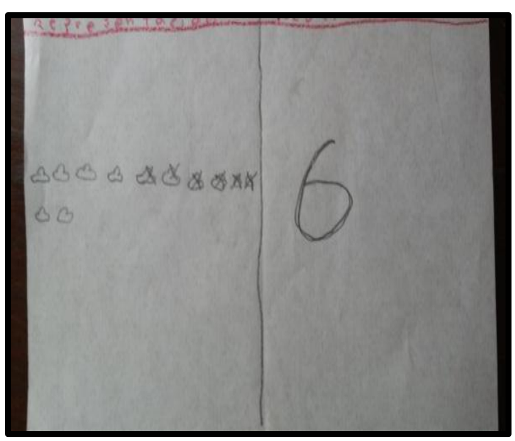


Figura 1 Representación pictórica

Al momento de resolver los $PVEA_{S6}$ el 100 % de los estudiantes de los dos colegios se encontraban en el nivel arbitrario, en el subnivel 3, es decir, lograban representar correctamente por medio del material concreto facilitado los datos enunciados en el problema, pero, no realizaban las acciones necesarias para resolver el problema manifestando que no comprendían que se debían hacer.

Categoría III Estrategias de resolcuión de PVEA T_5

✓ Resultados T_5. Categoría III

En la siguiente tabla se presentan los resultados que obtuvieron los niños en cuanto a las estrategias empleadas en la T_5

Tabla 25 Estrategias de resolución PVEA, T5, sentencias 2, 4, 6

Estrategias de la resolución de problemas matemáticos	$PVEAS_2$		$PVEAS_4$		$PVEAS_6$	
	GM	AL	GM	AL	GM	AL
No utiliza ninguna estrategia	0 %	0 %	0 %	0 %	100%	100 %
Estrategias de modelaje directo						
Contar todo	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Separar de	83,3 %	83,3 %	66,6%	83,3%	0 %	0 %
Añadir	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Emparejamiento	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Estrategias de la secuencia numérica o conteo verbal						
Contar todo	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Contar a partir de número mayor	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Contar a partir del primer sumando	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Contar hacia atrás desde	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Contar a partir de	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Estrategias mentales						
Hecho memorizado	16,6	16,6	33,3%	16,6%	0 %	0 %

	%	%				
Hecho deducido	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

✓ Análisis T_5. Categoría III

Al resolver el PVEA $_{S\,2}$ el 83,3 % de los estudiantes de los dos colegios utilizaron la estrategia de *separar de,* es decir, el estudiante forma el conjunto mayor de carros, después separa de ellos, la cantidad de carros vendidos y luego cuenta la cantidad de carros que le quedan. El 16,6% en los dos colegios utilizaron para resolver esta sentencia la estrategia de *hecho memorizado*, en la situación de juego los estudiantes daban el resultado rápidamente si se trataba de operaciones comunes para ellos como: 10-5, 10-8, 15-5, 6-3, entre otras.

Para los PVEA $_{S4}$ el 66,6% del GM y el 83,3% del AL emplearon la estrategia de *separar de*, nuevamente la situación de juego les posibilitó utilizar los carros con el fin de encontrar el resultado, es así como los estudiantes agruparon la cantidad inicial de carros, luego separaron de estos los que le quedaron y de este modo lograron encontrar la cantidad de carros vendidos. Por otro lado el 33,3% del GM y el AL utilizaron la estrategia del *hecho memorizado* siempre y cuando las cantidades se les presentaran en rangos numéricos pequeños y en datos numéricos familiares para ellos como 6-¿=2 , 4-¿=2 , 10-¿=5.

En cuanto a los PVEA$_{S6}$ se observó que el total de los estudiantes en ambos colegios identificaron los datos del problema y los representaron correctamente por medio del material concreto facilitado, pero no se evidenció el uso de alguna de las estrategias de resolución de PVEA.

4.1.6. Tarea 6 GUÍA

✓ Descripción general de la T_6

Para el diseño de esta tarea se tuvo en cuenta dentro del análisis de contenido el concepto de número en cuanto a: la técnica de comparación entre magnitudes, el nivel de cadena bidimensional y el principio de irrelevancia del orden, para ello, se formularon los PVEA$_{S\,1,\,4,\,6}$ categoría cambio.

Esta actividad se desarrolló en forma de guía, cada estudiante recibió una guía de trabajo con la formulación escrita de los $PVEA_{S\ 1,\ 4,\ 6}$ (los cuales fueron leídos por las investigadoras) relacionados con las tareas previas, con espacios específicos para que los estudiantes pudieran representar en forma gráfica la forma en la cual resolvían los problemas y de igual manera graficar el resultado obtenido.

La T_6 comenzaba con la presentación y explicación de la guía, cada estudiante debía resolver la guía de acuerdo a las instrucciones dadas y a la lectura de cada uno de los $PVEA_{S1,\ 4,\ 6}$ cada sentencia requirió de 60 minutos y se desarrolló durante tres días.

Categoría I. Concepto de número T_6

✓ Resultados T_6 categoria I

Los resultados que se presentan en la siguiente tabla corresponden a la última tarea propuesta en la unidad didáctica, por tanto, éstos resultados pertencen al resultado final de la investigación respecto al concepto de número.

Tabla 26 Resultado categoría 1, concepto de número, T6.

	Descripción	Estudiantes GM	Estudiantes ALP
Técnica: comparación entre magnitudes	Compara la magnitud de dos cantidades dadas y logra identificar cuál es la mayor y la menor entre estas.	100%	100%
Principio: irrelevancia de orden	El cardinal de un conjunto, o sea, el número de elementos obtenidos al contar, no depende del orden en que estén dispuestos los elementos para contarlos. Al contar una colección el resultado no depende de a qué elemento le asignemos el uno, el dos etc.	100%	83,3%
Nivel: cadena bidimensiona l	Desde un término cualquiera, a, se puede recorrer la sucesión en ambas direcciones.	100%	100%

✓ Análisis T_6. Categoría I

Las actividades de juego que se desarrollaron favorecieron el uso de la técnica comparación entre magnitudes, el total de estudiantes en ambos colegios fue capaz de comparar dos cantidades de puntos o casillas dentro de la tarea, se observó que tiene más facilidad y sus respuestas son más rápidas cuando se les presentan dos cantidades distantes (8 y 2), pero se demoraron en dar la respuesta cuando las cantidades son seguidas (7 y 8); también se observó que sus respuestas son más ágiles cuando el número o la cantidad menor se presenta de primeras (4 y 5) y se detienen a pensar cuando la cantidad menor va después (7 y 2).

$E2_{AL}$: -"usted sacó 7 y yo 9, yo saqué más que usted, le gané"

Comentarios como este, permiten ver que los estudiantes son capaces de comparar dos magnitudes, la dificultad para muchos de los niños fue entender situaciones de comparación tales como:

"Susana sacó 7 puntos en el primer turno, luego 3 más; Mateo sacó 12 puntos pero debe retroceder 5, entonces susana avanzó más casillas en la pista de juego o escalera".

Los niños se tardan en comprender que Mateo aunque haya sacado una cantidad mayor y Susana una menor en el primer turno, las condiciones del segundo turno alteran el resultado final, por tanto esa comparación en estados de cambio fue un poco más compleja para los estudiantes.

En cuanto al nivel de la secuancia numérica, en esta tarea se trabajó el nivel de cadena bidimensional al igual que en la tarea anterior, por tanto, en esta tarea se observó que después de practicar varias veces, los niños alcanzaron el propósito de la tarea, en este sentido, pueden recorrer la serie numérica oral en ambas direcciones controlando los puntos con cantidades menores de 30, sin embargo, al regresarse en la secuencia númerica tienden a equivocarse cuando pasan del 20 al 19, pero son conscientes si se equivocan y corrigen rápidamente. Éstos resultados suponen un nejor dominio de los estudiantes en la serie numérica oral con cantidades entre 0 - 29.

Categoría II niveles de resolución de problemas T_6

✓ Resultados T_6 Categoría II

En la siguiente tabla se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes en la T_6 en relación al nivel de resolución los $PVEA_{S\ 1,\ 4,\ 5}$ en los dos colegios y que se registraron en la lista de chequeo. Corresponden a la última tarea de la implementación, la guía permitió evidenciar el desempeño de los estudiantes en formatos convencionales, demostraron un mayor nivel de comprensión en las sentencias fromuladas lo que contribuyó a que tuvieran más éxito en la resolución.

Tabla 27 Resultados T6 categoría II, PVEA 1,4,5.

Nivel	Sentencia 1		Sentencia 4		Sentencia 5	
	GM	AL	GM	AL	GM	AL
Arbitrario	0 %	0 %	16,6%	16,6%	16.6 %	33.3 %
Concreto manipulativo	50 %	66,6%	50,0%	66,6%	50 %	66.6 %
Pictórico	33,3%	33,3%	33,3%	16,6%	16.6 %	0 %
Pictórico simbólico	16.6 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Simbólico con fallas en la convencionalidad	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Simbólico convencional	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

✓ Análisis T6-Categoría II

En esta actividad los estudiantes se enfrentaban a la resolución de los $PVEA_{S\ 1,\ 4,\ 5}$ se evidencia mediante la observación, las grabaciones en video un mayor nivel de efectividad por parte de los niños y niñas especialmente frente a la sentencia 1.

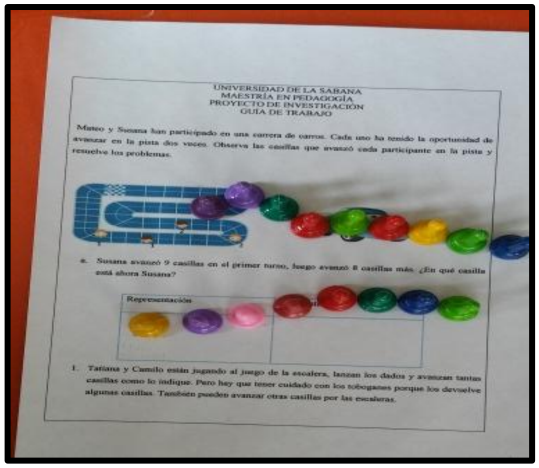


Figura 39 Uso de material concreto en la guía

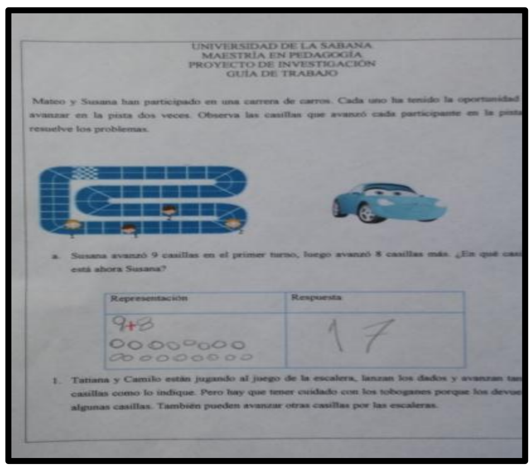


Figura 40 Resolución de PVEA en la guía

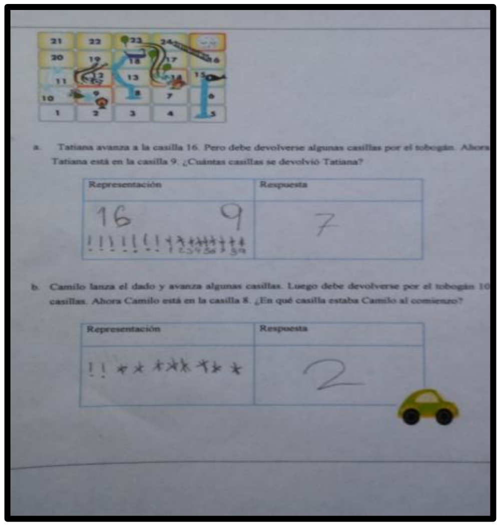


Figura 41 Resolución de los PVEA en guía

Al formularle el PVEA $_{S\ 1}$ se observaba que ninguno de los estudiantes de los dos colegios se ubicaba en el nivel arbitrario, por tanto, el 50 % de los estudiantes del GM y el 66.6 % del AL avanzaron al nivel concreto-manipulativo en el segundo subnivel porque requerían del uso de material concreto para resolver el problema, para este momento escucharon el enunciado, tomaron el material de apoyo e hicieron las acciones que les permitieron hallar con exactitud el resultado del problema, es decir, contaron las 9 casillas de avance inicial y conformaron un grupo, luego, las otras 8 casillas de avance con las cuales formaron otro grupo, posteriormente las reunieron y contaron los dos grupos a partir de un sumando, dando como respuesta17, además el 33.3 % de los estudiantes de los dos colegios se encontraban en el nivel pictórico en el quinto subnivel, manifestado en que lograban representar pictóricamente el resultado correcto pero no así las acciones que evidenciaban el proceso de resolución, es decir, en este momento los estudiantes eran capaces de resolver el problema haciendo uso de sus esquemas mentales, un poco más estructurados y a partir de esto con apoyo del material concreto facilitado o con el uso de sus dedos los niños llevan sus cuentas y "daban" la respuesta correcta pero no lograban representar en el papel el proceso desarrollado, al preguntarles el cómo lo habían hecho, los estudiantes no son capaces de expresar el proceso realizado con claridad por tanto responden: "- pensando o sumando o - porque eso da". Por otro lado el 16.6 % del GM se encontraba en el nivel pictórico simbólico porque lograba hacer uso de una operación convencional, sin embargo, requiere apoyarse en el uso de una estrategia pictórica, es decir realizó la operación 9+8=17, pero, dibujó palitos para comprobar si la respuesta era correcta.

Frente al PVEA $_{S\ 4}$ el 16.6 % de los estudiantes de los dos colegios se encontraban en el nivel arbitrario en el tercer subnivel porque aunque eran capaces de representar correctamente por medio del material los datos o un dato del problema, es decir, representaban las 10 casillas recorridas y la casilla 5, no lograban "devolverse" hacía esta última casilla porque el dato de la cantidad de casillas devueltas no aparecía en el problema y por tanto, no lograban hallar la cantidad de casillas que debían devolverse en el segundo turno (incógnita en *b)*; por otro lado, el 50 % de los estudiantes del GM y el 66.6 % del AL se encontraban en el nivel concreto manipulativo, en el primer subnivel, dramatizaron las acciones que se planteaban en el problema y procuraron llevar la cuenta utilizando los mismos objetos que se mencionaban, por tanto, en la sentencia (10 - ¿= 5) avanzaron las 10 casillas recorridas, luego marcaron la casilla que corresponde al estado final y contaron las casillas restantes 1, 2, 3, 4 y 5 , esta sentencia presenta la incógnita en *(b)* y ha sido una constante la dificultad de los estudiantes frente a este tipo de sentencia, sin embargo, las palabras "debe devolverse" les ayudaron a encontrar el camino hacia la solución, además las experiencias previas frente a esta sentencia y la pista de apoyo les ayudó, por tanto, se vio un mayor porcentaje de estudiantes con éxito; el 33.3 % del GM y el 16.6 % del AL se encontraban en el nivel pictórico, realizaron las mismas acciones descritas pero en forma gráfica, es decir, representaron las 10 casillas recorridas, luego fueron tachando, devolviéndose de a una en una hasta que les quedaron 5 señales (palitos, bolitas u otros) contaron las que les quedaron sin marca y dieron como resultado se devolvió 5 casillas en el segundo turno.

Al resolver el PVEA$_{S\ 5}$ (incógnita en a) el E6$_{GM}$ y el 33.3 % del AL se encontraban en el nivel arbitrario en el tercer subnivel, porque eran capaces de dramatizar las acciones que se planteaban en el problema y procuraban contar con los mismos objetos que se mencionaban, es decir, requerían la pista de avance para llevar sus cuentas entonces, en la sentencia (¿ + 8 = 10) se ubicaban en la pista, como el enunciado del problema decía "recorrió algunas" entonces recorrían algunas casillas al azar y luego las siguientes 8, la respuesta de este grupo de niños era el número de la casilla a la que llegaron (15), en este sentido, se les dificultó comprender que debían encontrar el primer avance y no el estado final por tanto, sus respuestas fueron incorrectas; por otro lado, el 50 % del GM y el 66.6 % del AL se encontraban en el nivel concreto manipulativo en el segundo subnivel porque recurrían a material manipulativo para intentar resolver el problema, sin embargo, algunos acertaron con la respuesta pero otros no, porque no lograron establecer en forma precisa las relaciones entre las acciones enunciadas en el problema, es decir representaron con palitos, fichas u otro material la casillas de avance: 8 palitos de avance inicial y los 10 de avance del estado final y luego los reunían o le quitaban al grupo mayor, la cantidad menor, en este caso 2, por tanto, daban como respuesta en la casilla 2 o en la casilla10; el $E4_{GM}$ se encontraba en el nivel pictórico en el primer subnivel porque necesitaba apoyarse en la representación gráfica no convencional (palitos, bolitas u otros) para hallar la respuesta, por tanto este estudiante representaba la casilla 10 (punto de llegada) y luego le quitaba 8 (punto de avance del segundo turno), el resultado era la cantidad de casillas sobrantes.

Categoría III Estrategias de resolcuión de PVEA T_6

✓ Resultados $T_{6.}$ Categoría III

En la siguiente tabla se presentan los resultados que obtuvieron los niños en cuanto a las estrategias empleadas en la T_6

Tabla 28 Estrategias de resolución PVEA, T6, sentencias 1, 4, 5

Estrategias de la resolución de problemas matemáticos	$PVEAS_1$		$PVEAS_4$		$PVEAS_5$	
	GM	AL	GM	AL	GM	AL
No utiliza ninguna estrategia	0 %	0 %	16,6%	16,6%	16,6%	16,6%
Estrategias de modelaje directo						
Contar todo	33,3%	16,6%	0 %	0 %	0 %	0 %
Separar de	0 %	0 %	33,3%	16,6%	50%	66,6%
Añadir	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Emparejamiento	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Estrategias de la secuencia numérica o conteo verbal						
Contar todo	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Contar a partir de número mayor	33,3%	33,3%	0 %	0 %	0 %	0 %
Contar a partir del primer sumando	16,6%	33,3%	0 %	0 %	0 %	
Contar hacia atrás desde	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Contar a partir de	0 %	0 %	50%	66,6%	33,3%	16,6%
Estrategias mentales	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Hecho memorizado	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

Hecho deducido	16,6%	16,6%	0 %	0 %	0 %	0 %

✓ Análisis T_6. Categoría III

El nivel de la resolución de los PVEA ha mejorado y por tanto el uso de estrategias es cada vez más variado y con mejor dominio por los estudiantes, cada niño ha encontrado las estrategias que mejor domina e intenta utilizarlas para resolver todos los tipos de sentencias, esto indica que no necesariamente aprenden todas las estrategias sino, que van descubriendo dos o tres que mejor se acomodan a sus necesidades y a las características del enunciado del problema, por ejemplo los estudiantes $E3_{AL}$ y $E6_{GM}$ emplearon únicamente estrategias de modelaje directo, incluso, cuando no se les facilitaba material concreto, ellos recurrían a sacar los colores u otros elementos para contar; al estudiante $E3_{AL}$ se le planteó el $PVEA_{S1}$ y el niño a pesar de haber resuelto problemas con este tipo de sentencias, dijo que no sabía resolverlo sin las fichas. En este sentido, para resolver el PVEA $_{S1}$ el 33,3% del GM y el 16% del AL emplearon con más facilidad la estrategia "contar todo" pero siempre recurriendo a material concreto y representando los dos conjuntos por separado para luego contar todos los elementos. Para esta misma sentencia el 33,3% del GM y el 33,3% del AL emplearon la estrategia "contar a partir del primer sumando", este grupo de estudiantes ya no necesitaron de material concreto para hacer sus representaciones, en cambio, emplearon representaciones no convencionales (palitos o bolitas en el papel), pero estas marcas que utilizaron los niños es sólo para representar y comprender el enunciado del problema pero ya no las utilizan para contar, pues son capaces de empezar a contar a partir del primer dato del problema hasta encontrar el estado final. Otro grupo de estudiantes 16,6% del GM y 33,3% del AL, del mismo modo que el grupo anterior fueron capaces de emplear estrategias de conteo verbal sin recurrir al material concreto pero, estos niños pudieron identificar el mayor de los datos del problema y contar a partir de ese dato la cantidad menor hasta encontrar el resultado del problema. Por ejemplo, en la sentencia 5 +10= 15, los niños empiezan a contar a partir del 10. Algunos niños como $E4_{GM}$ y $E6_{AL}$ para este tipo de sentencia recurrieron a hechos deducidos, se evidencia que las experiencias previas con las estructuras aditivas propias de los PVEA les permiten resolver los problemas de forma más precisa con sus propias deducciones, el estudiante $E6_{AL}$ emplea las decenas para hacer las cuentas con cantidades mayores de 10, por ejemplo, para la sentencia 12 + 14 =¿ el niño dice rápidamente "-10 más 10 igual 20 y 2 más 4 igual 6 entonces da 26".

Para la sentencia PVEA$_{S4}$ los estudiantes a pesar de entender mejor el enunciado del problema todavía tienen dificultades cuando la incógnita está en *a* o en *b*, en este caso, el 16,6% en ambos colegios a pesar de representar los datos del problema con el material que se les facilitó, no lograron resolverlo; el 33,3% y 16,6% comprendieron el enunciado del problema evidenciado en el momento de hacer la representación con líneas o puntos en el papel y emplear la estrategia de "separar de", representaban el total de casillas recorridas, luego tachaban con el lápiz los puntos hasta encontrar el primer dato, el resultado era la cantidad de puntos tachados, por ejemplo en la sentencia 15 -¿ = 5 la estudiante E5$_{AL}$ representó los 15 puntos con bolitas, luego tachó los datos del sustraendo, el resultado fue 10.

De igual manera, para la misma sentencia PVEA $_{S4}$ el 50% del GM y el 66,6% del AL han encontrado que para los problemas de resta pueden emplear la estrategia *"contar a partir de"* cuentan a partir del estado final hasta llegar al minuendo, es decir, en la sentencia (15-¿= 8) los niños cuentan a partir de 8 con ayuda de los dedos hasta llegar al 15, la respuesta es la cantidad de dedos que levantaron. Ésta es una de las estrategias que más emplearon los estudiantes para resolver las sentencias de resta y que se evidencia en la siguiente imagen.

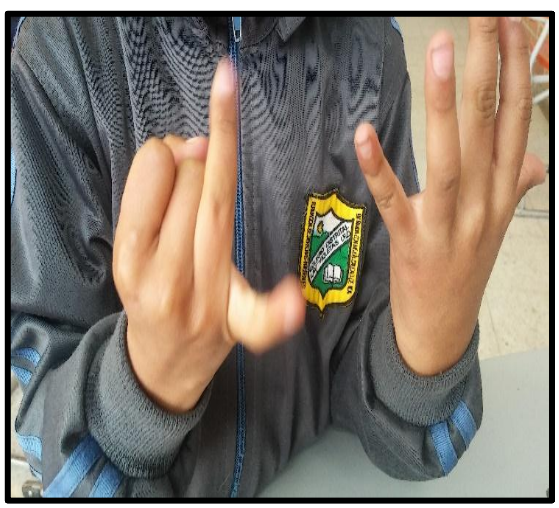


Figura 42 Representación con los dedos

Para los $PVEA_{S5}$ la mayoría de estudiantes se les dificultó comprender el enunciado del problema, por eso en el principio de la tarea utilizaron diferentes estrategias sin tener éxito en la respuesta; al repetir los problemas y emplear las preguntas orientadoras, el estudiante $E6_{GM}$ y $E3_{AL}$, aunque hacían intentos por resolver el problema representando los datos que se enunciaban, no lograron resolverlo, estos dos estudiantes no mostraron evidencia del uso de alguna estrategia de resolución de PVEA. La mitad de los estudiantes del GM lograron resolver el problema empleando la estrategia de *"separar de",* aunque es una estrategia propuesta por (Bruno 2006) para los problemas de resta, los niños la emplearon para intentar resolver este tipo de sentencia, entonces en el problema (¿ + 8 = 10) los niños representaron la cantidad final (10), luego quitaron la otra cantidad mencionada (8) y su respuesta fue la cantidad que quedó; esta estrategia resultó ser la más empleada para este tipo de sentencias. El 33,3% del GM y el 16 del AL emplearon la estrategia *"contar a partir de",* simplemente contaron a partir del segundo sumando hasta encontrar el estado final, este grupo de niños no lograron comunicar la estrategia empleada ni la razón por la cual la eligieron, tampoco fueron capaces de explicarle a sus compañeros el problema, posiblemente porque no comprendieron el problema.

4.2. Resultados de la investigación

Los resultados que se presentan a continuación, están fundamentados en el análisis de la información de cada una de las categorías propuestas, los cuales permitieron dar respuesta a las preguntas de investigación.

¿De qué manera una unidad didáctica planificada a partir del ciclo de análisis didáctico, por medio de la resolución de problemas verbales de estructura PVEA categoría cambio contribuye a favorecer el desarrollo del concepto de número en estudiantes de grado primero?

La resolución de los PVEA categoría cambio contribuye en gran medida al desarrollo del concepto de número en relación a las técnicas y principios de conteo y a la secuencia numérica ya que los estudiantes lograron utilizar diferentes técnicas para contar en forma precisa a medida que iban resolviendo las diferentes sentencias de los PVEA categoría cambio, se evidenció además un mayor nivel de competencia frente a los principios implícitos en el proceso de contar lo que a su vez le posibilitó a los estudiantes un alto dominio de la secuencia numérica, es necesario especificar además que de acuerdo con el análisis de la información se puede afirmar que la formulación de la sentencia y el proceso de resolución por si solos no bastan, sino que se requiere se de una serie de situaciones didácticas en las cuales el estudiante pueda hacer uso de sus conocimientos informales hacia la comprensión y utilización de procesos de la matemática formal ver figura 51.

Por tanto, la resolución de los PVEA categoría cambio posibilita la construcción del concepto de número por cuanto, proporciona situaciones que dan significado al número en diferentes contextos, es así como el estudiante al verse obligado a solucionar problemas utiliza técnicas de conteo que al ser empleadas contribuyen a que él se ejercite en los diferentes aspectos del concepto de número.

Por otro lado se puede afirmar que al momento de resolver los PVEA categoría cambio, la comprensión del enunciado del problema por parte del estudiante depende de sus conocimientos informales, del escenario del contexto fenomenológico (situación que se recrea en el aula) y de la intervención del docente (modelización y formulación de preguntas orientadoras); asimismo, el uso de las estrategias de resolución subyace a la interacción del estudiante con las situaciones problema, al uso de los objetos físicos y a la activación de sus esquemas mentales; en consecuencia, en el momento en el que el estudiante alcanza la armonía de estos dos aspectos (comprensión del enunciado y uso preciso de las estrategias de resolución) logra no solo resolver el problema en forma correcta sino, la construcción progresiva del concepto de número.

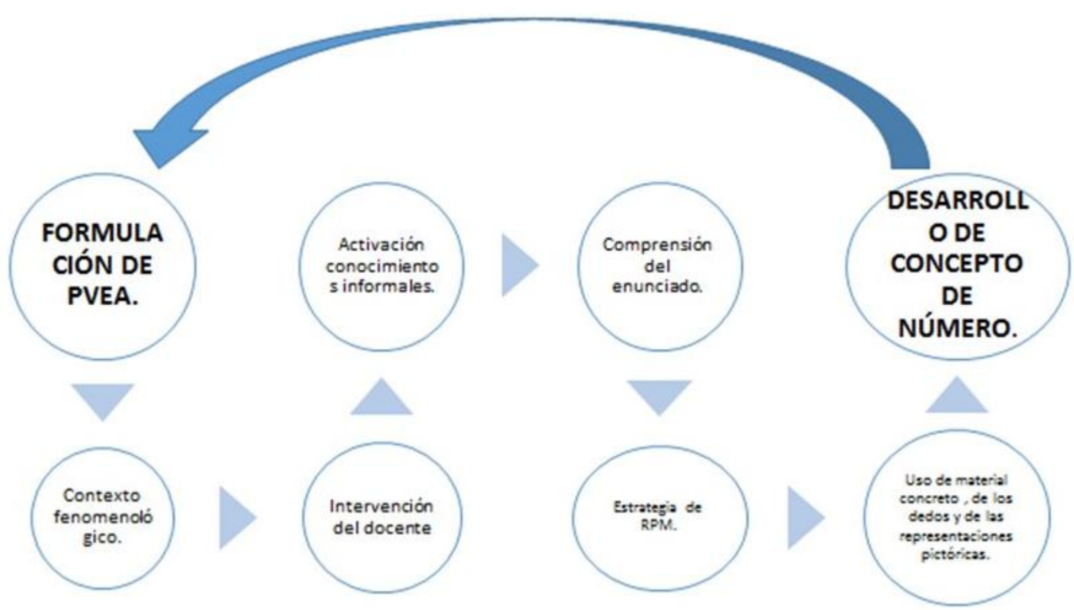


Figura 43 Construcción del concepto de número

¿Cuáles son las dificultades y errores que presentan los estudiantes en cuanto al uso de las técnicas y principios en el proceso de contar y los niveles de la secuencia numérica?

En concordancia con la primera categoría se pudo determinar que los estudiantes de grado primero de los colegios Gabriel García Márquez y Alfonso López Pumarejo, al resolver los PVEA categoría cambio, realizan un proceso en la construcción del concepto de número pasando por diferentes niveles en relación con las técnicas, los principios en el proceso de contar y los niveles de la secuencia numérica. El uso de las técnicas y principios en el proceso de contar están directamente relacionados con el nivel de la secuencia numérica en la que se encuentren, es decir, quienes alcanzan un nivel mayor en el dominio de la secuencia numérica logran un mejor desempeño en las técnicas para contar y en consecuencia alcanzan los principios implícitos en este proceso, por ejemplo, un estudiante que avanza del nivel cuerda al nivel de cadena irrompible (recita la secuencia siempre desde uno), ya es capaz de emplear la técnica de la serie numérica oral para contar los elementos de una colección (genera sistemáticamente de manera oral los nombres de los números en el orden adecuado) y alcanza también el principio de orden estable (al contar, los términos de la secuencia, el estudiante recita siempre en el orden establecido) en este sentido, los errores que se cometen en las técnicas y principios se atribuyen a las dificultades presentes en el dominio de la secuencia numérica, estos errores y dificultades se presentan a continuación, mencionándolos por cada aspecto.

Técnicas para contar

Alrededor de los 6 años de edad los niños ya emplean una serie de técnicas propias que han utilizado durante su proceso de aprendizaje informal Baroody (1997), sin embargo, algunos niños que ingresan al grado primero aunque ya han tenido experiencias de conteo anteriores, cometen errores que se van modificando en la medida que utilicen la serie numérica y las técnicas para contar; los errores más frecuentes en el uso de la técnica más básica para contar (serie numérica oral) evidenciado en el proceso investigativo es emplear una cantinela o serie numérica no convencional, es decir se saltan cuando cuentan o repiten un número al contar, esta dificultad se evidenció con 1 estudiantes de AL Y 1 estudiante del GM con cantidades mayores de 15; la dificultad que se evidenció en esta técnica es el desconocimiento de la serie numérica convencional, los estudiantes $E6_{GM}$ Y $E3_{AL}$ al empezar la propuesta de intervención no conocían la serie numérica en un rango mayor de 5, sin embargo avanzaron al dominio de técnicas superiores; luego de dominar la serie numérica, los niños deben utilizar esta serie para enumerar elementos de un conjunto (técnica de numeración), el error más frecuente que presentaron los niños en los dos colegios en ésta técnica es el etiquetar dos elementos con la misma palabra numérica o dejar elementos sin asignar, estos errores pueden atribuirse a que los niños todavía no tenían el control de los elementos cuando se les presentaba en forma no lineal, al respecto Baroody (1997) menciona que:

> Cuando los elementos se ponen en fila, hace falta poco esfuerzo para no perder la cuenta si se empieza desde uno de los extremos. Si la colección está colocada en círculo, el niño sólo necesita recordar el elemento por el que ha empezado a contar. Con distribuciones desordenadas, el niño debe recordar qué elementos ha etiquetado y cuáles quedan por etiquetar. (p. 95)

Los errores y dificultades que se presentan en la técnica de numeración hacen que los estudiantes quieran tener el control de los elementos de un conjunto y por tanto empiezan a utilizar la técnica de separación, sin embargo, los estudiantes de los dos colegios cuando empezaron a emplear esta técnica cometieron dos errores principales, el primero fue no controlar los elementos de la colección y el segundo fue olvidar cuántos elementos debían separar o separar más de los elementos mencionados, Baroody (1997) reconoce éstos dos errores como “frenesí” y “pasar de largo” y los describe como: ”en el primero (frenesí) el niño empieza con una correspondencia biunívoca pero no la mantiene hasta el final, y el segundo (pasar de largo) no intenta establecer la correspondencia al empezar o terminar el proceso de enumeración o no mantiene la memoria de trabajo para contar” (p. 96).

En el momento que los niños logran dominar las técnicas de numeración y separación se les facilitó emplear la técnica de la regla del valor cardinal, pero para dominar esta técnica los estudiantes deben pasar por una serie de experiencias con material concreto que les permita estar seguros que el último número corresponde al cardinal, mientras tanto, para establecer el cardinal de una colección los estudiantes $E2_{AL}$, $E3_{AL}$ Y $E6_{GM}$ a pesar de ya haber contado los elementos, necesitaron hacer re-conteo para estar seguro de la cantidad del conjunto.

La técnica de comparación entre magnitudes no presenta mayor dificultad para los niños de grado primero cuando se presenta con cantidades menores de 29 por tanto, no se hallaron errores y/o dificultades en el proceso.

Principios en el proceso de contar

El dominio de las técnicas hace que los estudiantes alcancen los principios implícitos en el proceso de contar, por tanto, los errores y dificultades tienen relación con las técnicas para contar; en el principio de orden estable la dificultad que se evidenció es que los niños sigan la secuencia numérica en el orden establecido; en el principio de correspondencia, el error más frecuente fue contar dos veces e mismo elemento o saltarse alguno; en el principio de biunivocidad, los niños al no tener el control de los elementos de un conjunto, etiquetaron dos elementos con la misma palabra numérica.

Niveles de la secuencia numérica

Como se mencionó anteriormente las técnicas y principios en el proceso de contar tienen una relación directa con el dominio de la secuencia numérica, sin embargo la secuencia parece no depender ni de las técnicas ni de los principios, por tanto su desarrollo avanza en la medida que los niños tengan experiencias con los números; en este sentido, el error que se presenta en un nivel es porque todavía se encuentran en el nivel anterior y no han logrado superar la dificultad que se les presenta en cada uno.

La principal dificultad que se evidenció en los dos estudiantes $E3_{AL}$ Y $E6_{GM}$ para pasar del nivel cuerda al nivel de cadena irrompible es entender que la serie numérica no se trata de una cantinela infantil (unodostrescuatro) sino que los términos son individuales (uno, dos, tres). El paso del nivel de cadena irrompible al nivel de cadena rompible supone la dificultad de comprender que al tener la secuencia los términos individualizados puede empezar en cualquier término distinto de uno (5, 6, 7), este nivel les causó mayor dificultad para los estudiantes en los dos colegios, pues, en las tareas 2 y 3 la mayoría de los niños contaba siempre desde uno. La principal dificultad para avanzar al nivel de cadena numerable es establecer que de la secuencia numérica se pueden extraer segmentos con un punto de inicio *a* (distinto de uno) y un punto final *b.* en este nivel, las estrategias de resolución de los PVEA en las sentencias de resta o las que tienen la incógnita en *a* o en *b* les ayudó a entender que podían recitar una porción de la serie numérica con un punto de inicio y punto final establecidos; finalmente, para pasar del nivel de cadena numerable al nivel más avanzado de cadena bidimensional se cometen los mismo errores con el nivel cuerda, pero esta vez, la serie numérica se recita regresivamente, por eso, los niños pueden cometieron errores como saltarse o decir dos veces el mismo número, sin embargo, estos errores fueron corregidos rápidamente por el desarrollo de las estrategias de resta.

¿Cuáles son las estrategias qué utilizan los estudiantes al momento de resolver PVEA categoría cambio, asociados a los procesos de contar?

A partir del análisis realizado a la segunda categoría con respecto a las estrategias utilizadas por los estudiantes de los colegios Gabriel García Márquez y Alfonso López Pumarejo se puede establecer que los estudiantes necesitan material de apoyo para llevar sus cuentas, especialmente utilizan sus dedos, de este modo, los estudiantes experimentan procesos propios para la solución de problemas, los cuales les proveen las herramientas básicas y el análisis necesario para transitar hacía el aprendizaje de las operaciones aritméticas convencionales, este aprendizaje se obtiene como una construcción del estudiante y no en forma meramente mecánica (García, 2010) en este sentido, los estudiantes, utilizaban estrategias propias fruto, por un lado, de las interacciones con las situaciones de juego propuestas y con el material concreto de cada juego (conos, dados, carros, fichas), de las experiencias vividas en el desarrollo de estos juegos por otro lado y de las acciones didácticas y de aprendizaje propias que requerían el proceso de resolución de cada una de las sentencias propuestas (interpretación del enunciado, elección de la estrategia de RPM, conteo al llevar las cuentas); este estudio identificó las siguientes estrategias de RPM, en estos estudiantes.

Modelaje directo

El uso de esta estrategia está íntimamente ligado con el uso de material concreto, a partir de esto los estudiantes generalmente conforman grupos con los objetos enunciados en el problema y de acuerdo al nivel de comprensión de la sentencia formulada, los estudiantes logran utilizar para la suma *contar todo*, es decir forman dos grupos, luego los reúnen y los cuentan todos, este dato es la respuesta, sin embargo los estudiantes utilizan también esta estrategia para resolver problemas cuyo enunciado no comprenden, es decir, lo utilizan para resolver sentencias con incógnita en *a* o en *b*; por otro lado para la resta y cuando el enunciado del problema "dice" palabras como: quitó, retrocedió, vendió el estudiante utiliza la estrategia de *separar de*, es decir conforman el grupo mayor de objetos y de este separan los que deben quitar o vender o retroceder y el número de objetos que queda es la respuesta.

Secuencia numérica o conteo verbal

Este tipo de estrategias es utilizada por los estudiantes para resolver problemas con incógnita en *b* o en *c*, para la suma utilizan *contar a partir del número mayor, esta estrategia* es utilizada por los estudiantes especialmente para resolver problemas de suma con incógnita en *c*, al comprender el enunciado parten del dato mayor y a partir de este van agregando de a uno en uno el número menor y así obtienen el resultado; cuando la incógnita está en *b* y además el estudiante comprende el enunciado *cuenta a partir del primer sumando* hasta llegar al estado final y el número de elementos contados es el resultado, al resolver problemas de resta con incógnita en *b* donde aparece el dato inicial y el resultado, el niño debe "quitar" la magnitud de cambio que disminuye (no aparece en el enunciado del problema) pero, si ha comprendido claramente el enunciado, entonces, el estudiante *cuenta a hacia atrás desde* el dato que aparece como resultado (estado final) de uno en uno hasta alcanzar el dato del estado inicial, aquí coloca una marca y cuenta los elementos que están entre el dato del estado inicial y el dato del resultado (estado final) y dan este nuevo dato hallado como respuesta.

Estrategias mentales

Cuando los estudiantes hacen uso de este tipo de estrategias han adquirido un nivel mayor de comprensión del enunciado de los problemas y, además han logrado un mayor dominio de la secuencia numérica porque logran representar esquemas mentales tanto de la situación que se enuncia en el problema como de la secuencia numérica porque logran en su mente realizar cálculos en los cuales parten números, retroceden, avanzan, quitan, ponen o los traen a su memoria aprendidos como si fueran tablas.

Sin importar la sentencia cuando un estudiante utiliza *hechos memorizados* simplemente da la respuesta de memoria, es decir, al proponerle las diferentes sentencias y si los datos corresponden a números pequeños o a números pares y si la formulación de la sentencia es comprendida por el estudiante, responden por ejemplo: 10-5=5 o 6+6=12, esta respuesta se da en forma súbita, el estudiante la dice porque la ha aprendido de memoria a través de la experimentación en las diferentes situaciones problemas propuestas; por otro lado cuando usan *hechos deducidos*, son capaces de descomponer y volver a componer datos numéricos desde sus propias representaciones mentales, como en el caso en el que el estudiante parte el número 12 en 5 + 5 = 10 más 2 da doce y luego vuelve y le agrega a uno de los 5 el 2 y, halla así el 7 de la respuesta, sin embargo, el niño no es consciente de lo que acaba de hacer para él este procedimiento es tan sencillo que no comprende cómo un adulto no lo comprende, porque cuando se le pregunta ¿Cómo así? o se le pide que lo explique más detalladamente él dice: fácil y comienza su aclaración.

¿Cuáles son los niveles del proceso de resolución que siguen los estudiantes al momento de resolver PVEA categoría cambio y que contribuyen al proceso de contar?

De acuerdo con el análisis realizado a la tercera categoría, los estudiantes del colegio Gabriel García Márquez y Alfonso López Pumarejo del grado primero, transitan una ruta de resolución por 4 niveles frente a los PVEA categoría cambio, dicho proceso se relaciona directamente con el tipo de sentencia que se le presente a los estudiantes, el rango numérico y el lugar que ocupe la incógnita, además el éxito o fracaso de los estudiantes frente al proceso de resolución depende en gran medida de la comprensión del enunciado del problema y de la construcción del concepto de número alcanzado. A continuación, se describirán los resultados obtenidos en cada nivel.

Nivel arbitrario

En este nivel los estudiantes no comprenden el enunciado del problema, por tanto las acciones que realizan no están encaminadas hacia su resolución. En primera instancia los niños hacen muy poco o nada para hallar la respuesta manifestando no entender o no saber y al preguntarles qué no entienden, no saben dar una respuesta, a medida que se les formulan las sentencias los estudiantes hacen intentos por comprender el enunciado del problema y logran representar en el nivel de las acciones con material concreto o por medio de representaciones gráficas uno de los datos o los dos datos pero, sin lograr comprender las relaciones que se establecen en el enunciado, más adelante en este nivel los estudiantes reúnen todos los datos y los cuentan pero no dan indicios de comprender si el problema se resuelve con una suma o con una resta. Los estudiantes, aunque ya hayan avanzado a otros niveles de RPM pueden devolverse a este nivel cuando se les presentan sentencias de mayor dificultad o con rangos numéricos mayores o con la incógnita en *a* o en *b*.

Nivel concreto-manipulativo

Los estudiantes al pasar por este nivel, hacen uso del material concreto que se les brinda y, por medio de este hacen esfuerzos por resolver las sentencias que se les formulan. en un primer momento los estudiantes representan con los materiales propios de la situación de juego realizada, los datos que aparecen en el enunciado, el éxito en el proceso de resolución depende del domino de la secuencia numérica alcanzado y de la precisión y pertinencia de las estrategias de resolución utilizadas; las sentencias con incógnita en *c* son fácilmente resueltas por los estudiantes, independientemente si se resuelven con suma o resta el lugar de la incógnita les facilita la interpretación y resolución del problema Bruno (2006), sin embargo, el material utilizado en la situación de juego y la misma situación en sí les ayuda a comprender las sentencias con incógnita en *a* o en *b* lo cual posibilita un mejor desempeño de los estudiantes frente a estas sentencias en este nivel. En un segundo momento los estudiantes se van desprendiendo progresivamente de los materiales del juego y hacen uso de otros materiales, sus lápices u otros objetos facilitados por las investigadoras, pero en especial empiezan a hacer uso de sus dedos para llevar sus cuentas y así encontrar el resultado que en ocasiones es correcto y en ocasiones no.

Nivel pictórico

Las experiencias vividas, producto de las acciones que ha experimentado con el material concreto en los niveles anteriores le permite a los estudiantes estructurar sus ideas de forma organizada García (2010) y, por tanto, en este nivel, los niños comienzan a hacer uso de representaciones gráficas no convencionales, en especial: dibujos de los objetos que enuncia el problema, palitos, rayas, marcas, bolitas u otros para representar los datos que lograban identificar, en este momento, con mayor claridad en el enunciado del problema, estas representaciones pueden estar apegadas al referente real del enunciado, es decir, si el problema enuncia carros el niño necesariamente dibujara carros, poco a poco y fruto de la experimentación, él niño va remplazando el isomorfismo por un esquema que lo represente, el uso de sus dedos en este nivel sigue siendo importante, aunque represente los datos y el proceso de resolución en forma gráfica, él niño busca apoyo, o una forma de verificar su respuesta en el uso de sus dedos; en este nivel él niño además empieza a utilizar marcas para hallar el resultado, es decir, si la incógnita está en *c* y es un problema que implica una resta puede, tachar los elementos o puede colocar una marca: un punto, una línea o encerrar los elementos para identificar el conjunto que debe “quitar”; los aciertos y errores en la resolución del problema depende del domino de la secuencia numérica y de la precisión y pertinencia del uso de las estrategias de RPM, por tanto el resultado puede ser correcto o incorrecto.

Nivel pictórico-simbólico

El estudiante E6GM logró avanzar a este nivel de RPM, porque además de representar de manera pictórica el proceso de resolución, recurría al uso de una operación convencional, este estudiante realizaba, en primera instancia la operación convencional pero, requería necesariamente apoyarse en la representación pictórica, además únicamente logró avanzar a este nivel al resolver sentencias con incógnita en *c* de suma o de resta, esto posiblemente se debe a que aún no identifica con claridad la operación convencional que se debe realizar para solucionar problemas con incógnita en *a* o en *b*.

5. Conclusiones

Esta investigación se desarrolló a partir de las dificultades que presentaban los estudiantes de grado primero de dos colegios distritales de Bogotá en relación con el desarrollo del concepto de número y se puede decir que en relación con la prueba inicial que se les aplicó a los estudiantes, se lograron avances significativos en cuanto al dominio de la secuencia numérica al realizar acciones de conteo en diferentes contextos y rangos numéricos a partir de la resolución de los PVEA categoría cambio.

El ciclo de análisis didáctico posibilitó en forma efectiva planear la unidad didáctica desde un conocimiento profundo del objeto matemático a enseñar y ahondar en el proceso de enseñanza aprendizaje que se da en las aulas de estos dos colegios, por tanto, se logró realizar un proceso de reflexión de la práctica pedagógica en cuanto a la forma como se ha venido desarrollando la clase de matemáticas, observando e interpretando de manera profunda los procesos metodológicos que siguen los estudiantes al construir el concepto de número a través de la resolución de PVEA en diferentes contextos.

En este mismo sentido, se observó e interpretó la intervención docente desde una mirada objetiva identificando errores y aciertos en cuanto a la forma cómo se dan las instrucciones, cómo se acompañan los procesos de construcción de la estructura matemática y cómo esto influye en el desempeño de los escolares, lo cual posibilitó mejorar la práctica pedagógica en diferentes aspectos en los conocimientos teóricos propios de las matemáticas escolares, en la identificación de las dificultades y errores de los escolares pero, especialmente con la forma de intervenir para contribuir favorablemente a que el estudiante comprenda no solo la instrucción sino los caminos que le permiten ir pasando en forma progresiva de un nivel a otro en su aprendizaje.

Cada estudiante mantiene una individualidad que lo hace único, tanto a nivel cognitivo como afectivo, en este sentido, se logró observar que cada estudiante desarrolla procesos propios y únicos, también, en relación con la construcción del concepto de número y la resolución de los PVEA; por tanto, durante la implementación de la propuesta fue posible interpretar las acciones puntuales que los estudiantes realizaban para cumplir con tareas complejas, las cuales emergían en forma natural pero, en contacto con situaciones problema ricas en significado y acompañadas de la orientación efectiva del docente.

Los errores que cometen los estudiantes al enfrentarse a la resolución de los PVEA tienen origen en una dificultad específica, estas dificultades se relacionan directamente con las capacidades de los estudiantes para cumplir con la tarea, por tanto es función del docente observar e interpretar con claridad las acciones que realizan sus estudiantes tanto en el conteo, como en el proceso de resolución y así encontrar vías de acompañamiento eficaces que le permitan superar en forma gradual las dificultades y adquirir mayor competencia frente a la tarea.

6. Reflexión pedagógica

Hace un poco más de dos años la Universidad de la Sabana nos abrió sus puertas al aceptarnos en la convocatoria para los docentes de la Secretaria de Educación, interesados en adelantar sus estudios en maestrías. El programa al cual nos inscribimos fue al de Maestría en Pedagogía, y desde ese momento nuestra vida cambio tanto a nivel personal como a nivel profesional, el hecho de haber sido aceptadas nos llenó de confianza, alegría y optimismo. El trabajo ha sido arduo, exigente y constante pero, los logros valen la pena, hemos mejorado en forma progresiva en diferentes aspectos relacionados con nuestra práctica: en la didáctica, en los conocimientos teóricos y prácticos y en la forma de encontrarnos con el otro, en las relaciones interpersonales con las personas que hacen parte de la comunidad educativa, esto se debe principalmente a las acciones didácticas desarrolladas en los diferentes seminarios porque en ellos se abrieron espacios para la reflexión, la indagación, la confrontación y la socialización de experiencias que enriquecieron nuestra labor pedagógica y nuestra propia vida.

De igual manera es necesario resaltar el fuerte ejercicio cognitivo demandado para llevar a cabo este proceso de investigación, fue necesario leer, pensar, construir, desbaratar y volver a armar para consolidar estas páginas que son el fruto de un trabajo de campo guiado por referentes teóricos y que nos posibilitó comprender mejor los procesos de enseñanza aprendizaje que vivimos en nuestras aulas, vernos a nosotras mismas desarrollando nuestra labor nos posibilitó hallar riquezas y fortalezas pero, también debilidades y errores en nuestro actuar, especialmente al abordar las matemáticas escolares propias del grado primero, todo lo anterior, nos permite afirmar que es necesario dar continuidad a este proceso para seguir investigando en relación a los procesos de construcción del conocimiento matemático a partir de la implementación de los PVEA categoría cambio y ampliarlo hacia la indagación de la RPM en las demás categorías (comparación, igualación y combinación).

Por otro lado, es necesario resaltar que de acuerdo a los antecedentes de esta investigación logramos identificar que los docentes de Básica Primaria que desarrollan su labor en nuestras instituciones educativas, incluyéndonos nosotras mismas, no somos especialistas en las áreas del conocimiento que enseñamos, y por tanto, los conceptos que abordamos carecen, en algunos casos, del rigor científico necesario. Urge, entonces, que desarrollemos procesos de investigación rigurosos que nos permitan utilizar nuestros conocimientos prácticos y nuestro sistema de creencias para consolidar procesos de investigación que le apunten a solventar las dificultades académicas y de convivencia que se nos presentan en el día a día en nuestras aulas de clase, basados en un conocimiento profundo de los temas que vamos a enseñar.

En este orden de ideas, la investigación en el aula es viable y necesaria porque nuestro actuar cotidiano como educadores debe y necesita estar sustentado desde un conocimiento profundo de las estructuras conceptuales a enseñar, de una comprensión reflexiva del proceso de enseñanza aprendizaje que se da en nuestras aulas, de los actores que en ella convergen, de sus necesidades específicas, de los errores que cometen nuestros estudiantes y que subyacen a unas dificultades puntuales, con el fin de prever la forma más eficaz y pertinente de intervenir, pero todo esto no se logra de manera espontánea, se requiere de un proceso de investigación de campo, porque según Restrepo (2004).

> La adaptación de la teoría, transformación intelectual y práctica, es el resultado de un ir y venir entre la teoría y la práctica pedagógica, que puede realizarse espontánea o sistemáticamente. Si se hace de manera sistemática y rigurosa, constituye un proceso de investigación sobre la práctica en el laboratorio de las aulas (p. 47).

De acuerdo con lo anterior, nuestras aulas de clase son laboratorios de investigación en ocasiones sin explorar, en otras a medio explorar. El proceso de investigación que realizamos durante estos dos años ha abierto una puerta hacía la exploración de nuestra labor docente en las instituciones educativas distritales Gabriel García Márquez y Alfonso López Pumarejo donde laboramos, lo cual nos posibilitó ahondar en conocimientos profundos con respecto a la estructura matemática a enseñar, al reconocimiento de nuestros estudiantes como protagonistas de la construcción de sus conocimientos, sus dificultades, errores y aciertos de forma profunda y a nuestro propio reconocimiento como docentes profesionales capaces de indagar, comprender y transformar nuestra realidad pedagógica, en este sentido, (Schon, 1983-1987) citado por Restrepo (2004) insiste.

> En que el maestro se despegue del discurso pedagógico aprendido en las instituciones formadoras de maestros y, a través de la “reflexión en la acción” o conversación reflexiva con la situación problemática, construya saber pedagógico, critique su práctica y la transforme haciéndola más pertinente a las necesidades de medio. (P.48)

Este trabajo responde a un proceso de investigación teórica y práctica que a partir de necesidades específicas tanto de nosotras como docentes investigadoras al enseñar las estructuras matemáticas para el grado primero de primaria, como de los estudiantes en su desempeño en el área de matemáticas en relación con el desarrollo del concepto de número se fue consolidando y permeando las aulas de clase, En este sentido, la investigación generó cambios significativos en la dinámica de aula en los dos colegios.

A través del proceso de investigación descubrimos los PVEA sus categorías y sentencias, la forma más adecuada para formulárselos a los estudiantes, los niveles de resolución y logramos prever las estrategias que podían llegar a utilizar nuestros estudiantes para resolver estos problemas, sus dificultades y errores, además, descubrimos nuevas y variadas estrategias didácticas que le posibilitaron a los estudiantes un acercamiento más efectivo con el objeto matemático a aprender y del mismo modo descubrimos como intervenir en forma efectiva para contribuir en el proceso de enseñanza aprendizaje de nuestros escolares.

En síntesis, la experiencia de vida al realizar nuestros estudios de Maestría en Pedagogía en la Universidad de la Sabana constituye un momento crucial en nuestra carrera profesional que nos ha posibilitado mejorar nuestra práctica y proyectarnos como docentes investigadoras inquietas por ahondar en el laboratorio de las aulas.

Bibliografía

Aguilar Villagrán, M., & Navarro Cruz, J. I. (2000). Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños. *Psicología . General y aplicada*, 63-83.

Alba Velásquez, J. A., & Quintero Tobón, A. L. (2016). ¿Cómo cuentan los niños al momento de resolver problemas? *Infancias Imágenes*, 129-138.

Baroody, A. (1997). *El pensamiento matemático de los niños.* Madrid: Visor DIS.

Berenguer, I., & Martínez, N. (2003). La resolución de problemas matemáticos. Una caracterización histórica de su aplicación como vía eficaz para la enseñanza de la matemática. *Revista Pedagógica Unievrsitaria* , vol.8.

Blanco , J. (1996). La resolución de problemas, una revisión teórica. *Suma 21*, 11-20.

Bosh, M. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y. *Educación Matemática en la infancia.*

Butto , C., & Cruz Ramírez, F. A. (2011). Resolución de problemas de estructura aditiva con alumnos de segundo y tercer grado de educación primaria. *CIAEM.* Recife.

Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas matemáticos . *Educación Vol. 32*, 123-138.

Castro , E., Cañadas , M., & Castro , H. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Educación matemática en la infancia*.

Castro , E., Rico, L., & Gil, F. (1992). *Enfoques de investigación en problemas verbales artméticos aditivos .* Universidad de Granada.

Castro, E., Rico , L., & Castro , E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano.

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas.* Madrid: Pearson educación.

Chamorro, M. (2005). *Didáctica de las matemáticas para educación preescolar.* Madrid: Pearson educación .

García , S. R. (15 de Marzo de 2011). *Didáctica de la resolución de problemas matemáticos.* Recuperado el 12 de Enero de 2016, de http://resoluciondeproblemates.blogspot.com.co/

García Martínez, S. R. (2010). *Resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria .* México: Trillas.

García, S. (2010). Qué es la resolución de problemas matemáticos y por qué enseñar matemáticas y no aritmética. Mexico *Trillas*.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del. *Revista Iberoamericana de educación Matemática.* , 13-31.

Godino, J., Font Moll, V., Wilelmi, M., & Arreche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es el número? *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 34-46.

Gómez Guzmán, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Andalucía: Editorial de la universidad de la Granada.

Gómez, P. (2002). Análisis Didáctico y diseño curricular en matemáticas. *EMA VOL. 7*, 251-292.

Hernández Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación 5ta Edición.* Mc Graw and Hill Interamericana de España.

Hernández, J. (1994). Modelos de competencia para resolución de problemas basados en los sistemas de representación en Matemáticas. En *Seminario nacional sobre lenguaje y matemáticas* (págs. 81-90). Suma.

Lupiáñez, J. L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias. *PNA*, 35-48.

Ministerio de educación nacional . (2006). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio De Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Puig Espinosa, L., & Cerdán Pérez, F. (1988). *Problemas Aritméticos Escolares .* Madrid: Sintesis .

Sandín , E. (2003). *Investigación Cualitativa en Educación. Fundamentos y Tradiciones.* Madrid: Mc Graw and Hill Interamericana de España.

Santos Trigo, L. M. (2008). La resolución de problemas matemáticos . *Dialnet*.

Tiurégano, P., Montanéz , J., Parra, M., & Sanchéz , M. T. (2000). El concepto de número natural y las cuatro operaciones básicas. *Dialnet*, 283-316.

Vergnaud, G. (2003). *El niño, las matemáticas y la realidad.* Trillas.

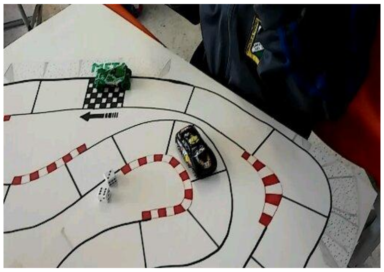
Apéndice

Diario del profesor colegio AL.

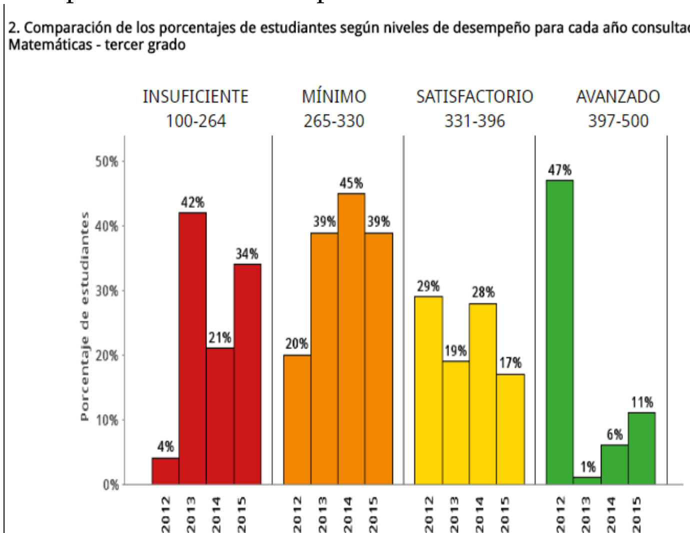
<table>
<tr><th colspan="2">Diario del profesor AL</th></tr>
<tr><td>Fecha: abril</td><td>Tarea: BMX</td></tr>
<tr><td colspan="2">Meta: Con la tarea, se pretende contribuir a que los estudiantes coordinen la verbalización de la serie numérica con el señalamiento de cada elemento en una colección empezando en un término cualquiera.</td></tr>
<tr><td>Observaciones generales en el concepto de número:
3 estudiantes son capaces de contar a partir del primer turno de avance, es decir ya alcanzaron el nivel de cadena rompible, los otros 3 estudiantes tienen que empezar a contar a partir de 1, no pueden hacerlo al iniciar la cuenta a partir de otro número, el estudiante E3 ya cuenta mejor con la serie numérica convencional, pero todavía no es capaz de hacerlo desde un término distinto a uno, este niño no tiene control de los puntos de avance (no los señala), mientras que los demás señalan con el dedo los conos.</td><td>Observaciones generales en la resolución de PVEA:
S1: el niño E3 no sabe cómo resolver el problema y simplemente representó los datos con el material. Señala los puntos sin evidenciar el control de los mismos. El resto de los niños contaron los puntos y llevaron la cuenta haciendo representaciones con palitos o los conos, empezaban a contar desde uno.
S2: E3 dibujó los datos pero no entendía el problema, los otros niños emplearon el material para intentar comprende el enunciado del problema.
S3. Con este problema no tuvieron éxito, intentaron resolverlo encontrando el punto de avance final, pero la incógnita era en b. solamente el E5 si pudo resolverlo contando a partir del número 7 y luego 8,9, 10.</td></tr>
<tr><td>Evidencia fotográfica:
</td><td>Evidencia fotográfica
</td></tr>
</table>

Diario del profesor colegio GM

Diario del profesor GM	
Fecha: mayo	**Tarea: Pista de cars**
Meta: Con la tarea, se pretende contribuir a que los estudiantes al contar una colección de objetos digan el término cardinal que representa el conjunto entero, sin necesidad de realizar ningún tipo de reconteo.	
Observaciones generales en el concepto de número: **En este momento los estudiantes al enfrentarse a la resolución de los problemas logran realizar variadas acciones de conteo ya no se equivocan tanto al asignar las etiquetas y por tanto realizan el conteo en forma precisa. 5 de los estudiantes ya no requieren hacer re conteo y cuando las cantidades son pequeñas miran los elementos y dan la cantidad de forma súbita, también logran contar a partir de uno de los datos por la necesidad que tienen de hallar el dato que se les pide, sin embargo requieren empezar a partir de uno para estar seguros de haber realizado bien sus cuentas, 2 niños se equivocan en el conteo pero se dan cuenta de que no lo han hecho bien y sin necesidad de decirles se devuelven y empiezan a partir de uno y así realizar en forma adecuada el conteo. Las acciones de conteo realizadas hasta ahora les han posibilitado hallar el cardinal de una cantidad.**	**Observaciones generales en la resolución de PVEA:** S2: los estudiantes en este momento logran comprender este tipo de sentencias con gran facilidad además la situación de juego vivida contribuyó positivamente para que entendieran el enunciado, la palabra retrocedió les dio pistas para realizar las acciones necesarias para hallar la solución, usan el material concreto de la pista, los carros, las casillas y los dados para llevar sus cuentas y logran retroceder las casillas que se les piden en el problema, un niño represento los datos con palitos para llevar la cuenta S3: las sentencias con incógnita en *b* se les siguen dificultando, sin embargo, tres niños fueron capaces de resolver el problema llevando la cuenta a partir del dato del primer avance y de ahí en adelante hicieron sus cuentas pero, tres estudiantes cuentan correctamente los datos del problema pero luego no saben qué hacer con estos datos. S4. La incógnita de ésta sentencia se encuentra en *b* y es de resta pero la situación vivida en el juego y el rango numérico pequeño contribuyo para que 4 de los estudiantes lograran resolverlo en el nivel de las acciones, dramatizando los datos que aparecen en el enunciado, nuevamente la palabra retrocedió contribuyo para que tuvieran éxito en la tarea.

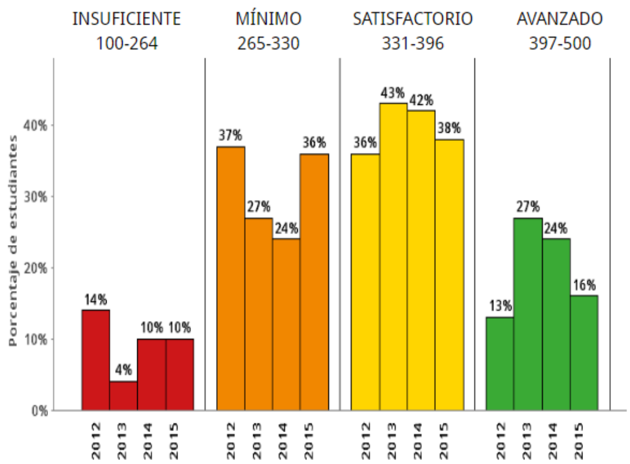
Evidencia fotográfica:	**Evidencia fotográfica**
	

Comparativo resultados pruebas saber



Colegio Gabriel García Márquez.

2. Comparación de los porcentajes de estudiantes según niveles de desempeño para cada año consultado.
Matemáticas - tercer grado



Colegio Alfonso López Pumarejo.

Lista de chequeo concepto de número.

ESTUDIANTES		**E.1. AL.**	**E.2. AL**	**E.3. AL**	**E.4. AL**	**E.5. AL**	**E.6. AL**	**%**
Técnicas para contar								
Serie numérica oral	Genera sistemáticamente de manera oral los nombres de los números en el orden adecuado.							
Numeración	Coordina la verbalización de la serie numérica con el señalamiento de cada elemento en una colección.							
Regla del valor cardinal	Al contar una colección de objetos el estudiante dice el término cardinal que representa el conjunto entero, sin necesidad de realizar ningún tipo de reconteo.							
Separación	Cuenta utilizando la técnica de separar los objetos solicitados y es capaz de recordar cuántos ha separado.							

Comparación entre magnitudes	Compara la magnitud de dos cantidades dadas y logra identificar cuál es la mayor y la menor entre estas.							
Principios en el proceso de contar								
Orden estable	Al contar, los términos de la secuencia, el estudiante los recita siempre en el orden establecido.							
Correspondencia	Al contar los elementos de un conjunto, los niños recitan la secuencia y a la vez van señalando los elementos de la colección, sin asignar más de un nombre numérico a cada uno de los objetos de la colección.							
Biunivocidad	En el proceso de contar, el estudiante realiza la correspondencia biunívoca, es decir, que a cada elemento del conjunto se le asignará una palabra numérica y recíprocamente, cada palabra estará asociada con un elemento.							
Cardinalidad	El último término obtenido, al contar todos los objetos de la colección, indica el número de objetos que tiene dicha colección.							
Irrelevancia de orden	El cardinal de un conjunto, o sea, el número de elementos obtenidos al contar, no depende del orden en que estén dispuestos los elementos para contarlos. Al contar una colección el resultado no depende de a qué elemento le asignemos el uno, el dos etc.							
Niveles de la secuencia numérica								
Cuerda	Al establecer la secuencia de una colección dada el estudiante empieza en uno y los términos no están diferenciados.							
Cadena	La sucesión comienza en uno y los términos que							

irrompible	conoce están diferenciados. Uno, dos, tres, cuatro. No es capaz de repetir esta secuencia si se le pide que lo haga empezando en un término distinto del uno.							
Cadena rompible	La sucesión de los términos que conoce la puede comenzar en un término cualquiera.							
Cadena numerable	Puede recitar n términos de la secuencia numérica desde a hasta b.							
Cadena bidimensional	Desde un término cualquiera, a, se puede recorrer la sucesión en ambas direcciones.							

Niveles en la resolución de problemas matemáticos.

Niveles en la resolución de problemas matemáticos	**E.1. AL**	**E.2. AL**	**E.3. AL**	**E.4. AL**	**E.5. AL**	**E.6 .AL**
NIVEL ARBITRARIO						
✓ Realiza dibujos de los objetos que se le mencionan de manera verbal sin respetar la conservación de la cantidad.						
✓ Copia los datos numéricos del problema, pero no conoce la cantidad que representan.						
✓ Representa correctamente por medio del material dibujos e incluso números, pero no realiza alguna acción para resolver el problema.						
NIVEL CONCRETO MANIPULATIVO						
✓ Dramatiza las acciones que se plantean en el problema y procura contar con los mismos objetos que se mencionan.						

✓ Recurre a material manipulativo para intentar resolver el problema.						
NIVEL PICTÓRICO						
✓ Necesita apoyarse en la representación gráfica no convencional (dibujos de pequeñas líneas, círculos, objetos que se enuncian en el problema, esquemas que relacionan o separan dos conjuntos de elementos, etc.)						
✓ Uso de figuras y dibujos apegados al referente real que se describe en el enunciado del problema.						
✓ Sustituye el isomorfismo por un esquema que lo represente.						
✓ Representa únicamente los datos del problema sin evidenciar el resultado.						
✓ Representa pictóricamente el resultado correcto pero no así las acciones que evidencias el proceso de resolución.						
NIVEL PICTÓRICO SIMBÓLICO						
✓ Emplea estrategias pictóricas para resolver el problema con alguna operación convencional.						
✓ Emplea el algoritmo convencional como una herramienta para comprobar el resultado.						
✓ Emplea las operaciones convencionales pero comprueba el resultado con el uso de estrategias pictóricas.						
NIVEL SIMBÓLICO CON FALLAS EN LA CONVENCIONALIDAD						

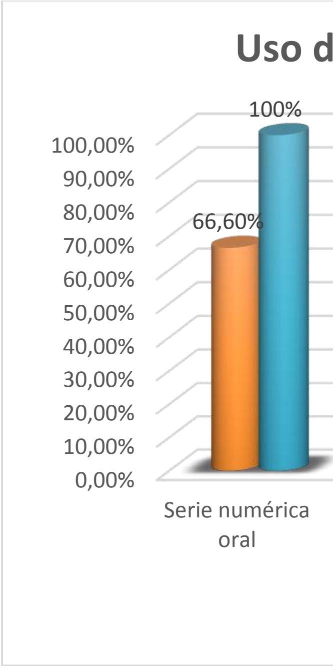
✓ Utiliza los símbolos numéricos como apoyo para resolver el problema pero carece de una estructura aritmética.						
✓ Emplea operaciones matemáticas que no guardan relación con el planteamiento del problema.						
✓ Eligen una estructura convencional para resolver el problema empleando la operación inversa con la que la resolvería un adulto o un compañero más capaz.						
✓ Sigue un procedimiento convencional adecuado para resolver un problema, pero llega a un resultado incorrecto por no poder manejar aún todos los aspectos de la convencionalidad simultáneamente.						
NIVEL SIMBÓLICO CONVENCIONAL						
✓ Emplea las operaciones matemáticas considerando todos los aspectos convencionales.						
✓ Selecciona la operación que le permite llegar con menor esfuerzo al resultado.						

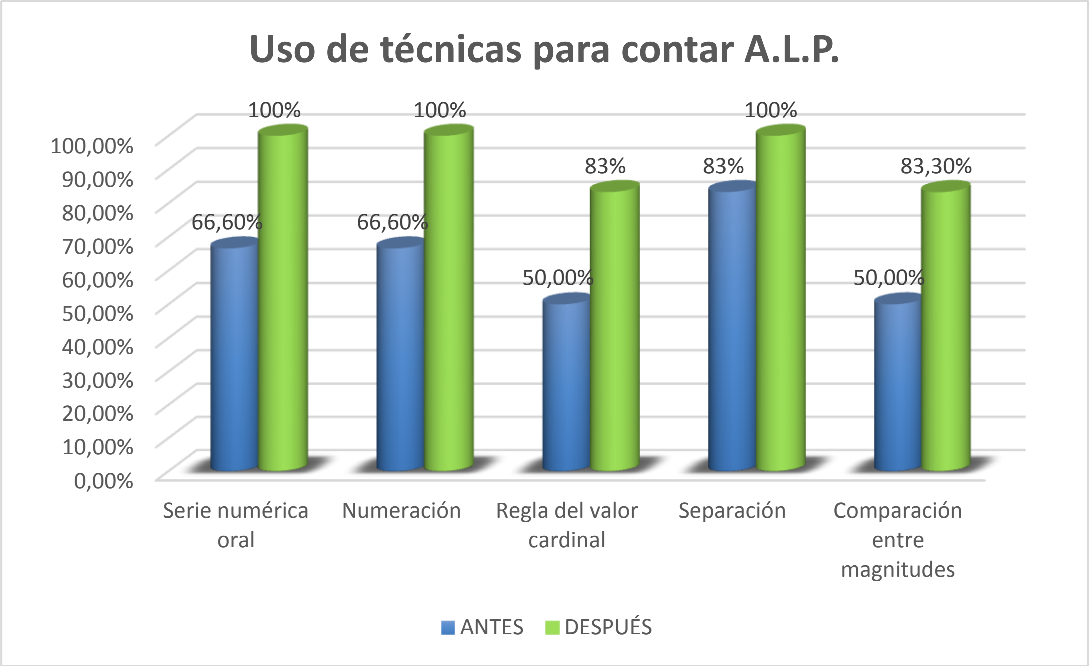
Lista de chequeo Estrategias de la resolución de problemas matemáticos.

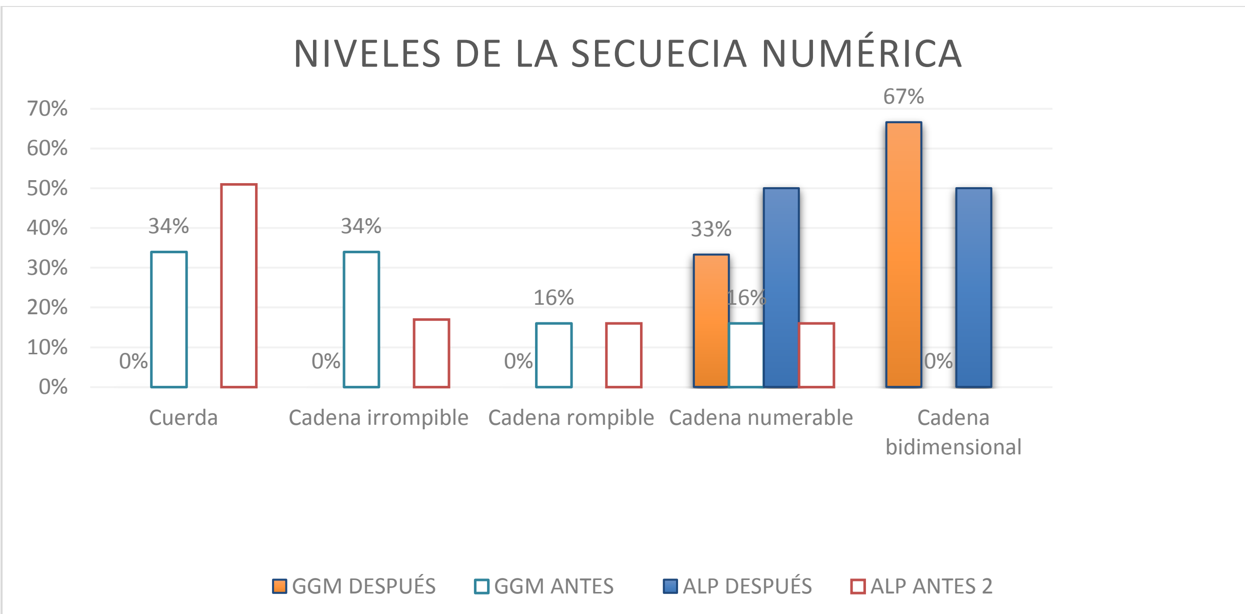
Estrategias de resolución de problemas matemáticos	**E.1. GM**	**E.2. GM**	**E.3. GM**	**E.4. GM**	**E.5. GM**	**E.6 .G M**
ESTRATEGIAS DE MODELAJE DIRECTO						
Contar todo						
Separar de						
Emparejamiento						
ESTRATEGIAS DE LA SECUENCIA NUMÉRICA O CONTEO VERBAL						

Contar todo						
Contar a partir de número mayor						
Contar a partir del primer sumando						
Contar hacia atrás desde						
Contar a partir de						
ESTRATEGIAS MENTALES						
Hecho memorizado						
Hecho deducido						

Gráficas de los resultados obtenidos.







CONSENTIMIENTO INFORMADO A PADRES DE FAMILIA

AUTORIZACIÓN PARA COLEGIO ALFONSO LÓPEZ PUMAREJO IED

Bogotá, D.C. 2016

Señores:

PADRES DE FAMILIA

ASUNTO: **CONSENTIMIENTO INFORMADO A PADRES DE FAMILIA**

Cordial saludo.

Dentro del trabajo desarrollado en la institución se promueve el mejoramiento académico de los estudiantes. Es así como durante dos meses se estará implementando un proyecto de investigación que busca el desarrollo del concepto de número mediante la resolución de problemas de estructura aditiva en el marco del ciclo de análisis didáctico con estudiantes de grado primero.

Dentro de este proceso se recogerán datos, escritos, experiencias orales, entrevistas dentro de la clase, fotografías y videos. Esta información es de uso académico únicamente y corresponde a un proyecto de investigación de la maestría en pedagogía de la universidad de la sabana; los resultados obtenidos serán sistematizados y publicados por la universidad. En todos los casos, se tratará la información que provenga de sus hijos de manera confidencial y no se usará para otros propósitos fuera de los de la investigación.

Agradecemos su colaboración. Firmando la siguiente autorización

Atentamente:

YEIMY ELIANA QUIROGA VERANO

EDNA MARGARITA MARTINEZ RTAMÍREZ

DOCENTES INVESTIGADORAS UNIVERSIDAD DE LA SABANA.

Yo, ____ mayor de edad identificado con la cédula de ciudadanía No. ______________________________ De __________________ padre, madre o acudiente del estudiante ____ del grado ______________ en uso de mis plenas facultades, AUTORIZO QUE:

- ✓ Conozco el propósito de este proyecto de investigación y estoy informado de las actividades que se van a realizar para cumplir con sus objetivos.

- ✓ Acepto utilizar los materiales necesarios para la investigación como videos, fotografías, escritos y entrevistas orales en donde participa mi hijo o acudido.
- ✓ Reconozco además, que no existe ninguna expectativa sobre los eventuales efectos económicos de la divulgación, o sobre el tipo de campaña publicitaria que pueda realizar LA INSTITUCIÓN.
- ✓ Declaro que conozco los propósitos del COLEGIO referentes al beneficio de la comunidad educativa, hecho por el cual en las emisiones de este video, no habrá uso indebido del material autorizado.

La vigencia de autorización corresponde al término establecido en la Ley 23 de 1982, durante el cual El Colegio es titular de los derechos sobre los videos o imágenes a emitir.

.

Atentamente

Firma del padre o madre: ____

Nombre del padre o madre: ____

C.C. del padre o madre ____

Manifiesto que he leído y comprendido perfectamente lo anterior y que todos los espacios en blanco han sido completados antes de mi firma y me encuentro en capacidad de expresar mi consentimiento