A study of knot projections

(結び目射影図の研究)

論文概要書

Yusuke Takimura

Chapter 1
Regular projections of the knot 6_2

最小交点数が 5 以下の knot (Figure 1 の 0_1, 3_1, 4_1, 5_1, 5_2) の各々について、その knot が取りうる knot projection の集合が谷山公規氏によって決定されている ([12])。今回、6_2 が取りうる knot projection の集合を決定した ([10])。

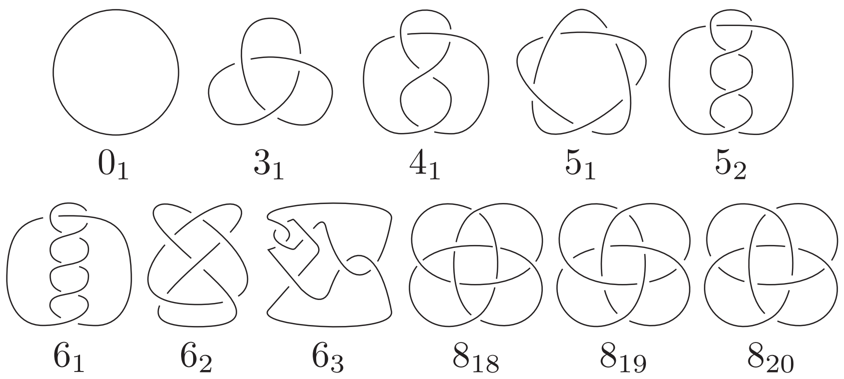

Figure 1:

$\mathbb{R}^3$ に滑らかに埋め込まれた円周を knot という。 knot を 2 次元平面に射影したものを knot projection という。その際、3 重点や接点がないようにする。平面に無限遠点をたすことで、 knot projection を球面上で扱う。2 つの位相空間対 (X, A) から (Y, B) への連続写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ が全単射で、その逆写像も連続であるとき、(X, A) と (Y, B) は同相であるといい、$\cong$ で表す。ここでは同相により knot や knot projection を同一視し、鏡像は区別しないものとする。

Definition 1. ([12]) K を knot とする。
(1) K が取りうる knot projection 全体の集合を $PROJ(K)$ と表す。
(2) K_1, K_2 において、$PROJ(K_1) \supset PROJ(K_2)$ が成り立つとき、K_1 は K_2 の minor であるといい、$K_1 \leq K_2$ と表す。

$\widehat{\mathcal{M}}$ を knot projection の集合とする。$\mathcal{W}(\widehat{\mathcal{M}})$ を $\widehat{\mathcal{M}}$ の要素の連結和からなる全ての knot projection の集合とする。

$\widehat{H}$, $\widehat{S}$, $\widehat{Q}$, $\widehat{T}_i$, $\widehat{Z}(2p_1+1, 2p_2+1, 2p_3+1)$, $\widehat{R}(2s, 2t)$ を Figure 2 の knot projection とする。$\widehat{\mathcal{T}} = \{\widehat{T}_i |\ i :$ positive integer$\}$, $\widehat{\mathcal{Z}} = \{\widehat{Z}(2p_1+1, 2p_2+1, 2p_3+1) |\ p_1, p_2, p_3 :$ non-negative integers$\}$, $\widehat{\mathcal{R}} = \{\widehat{R}(2s, 2t) |\ s, t :$ positive integers$\}$

とする。

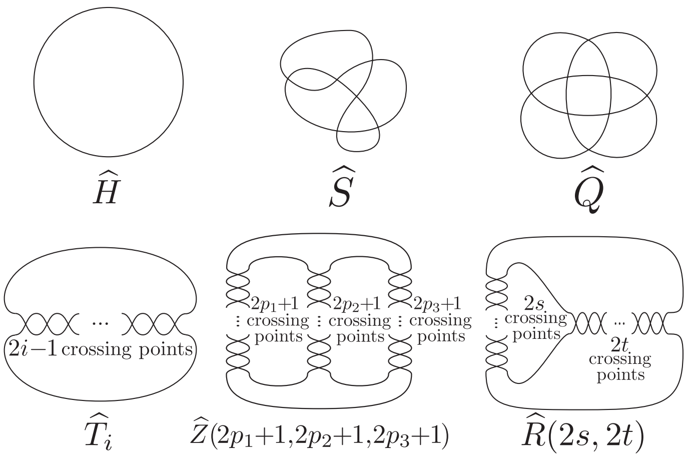

Figure 2:

Theorem 1. $\widehat{\mathcal{K}}$ を全ての knot projection からなる集合とする。
$PROJ(6_2) = \widehat{\mathcal{K}} \setminus \mathcal{W}(\{\widehat{H}, \widehat{S}, \widehat{Q}\} \cup \widehat{\mathcal{T}} \cup \widehat{\mathcal{Z}} \cup \widehat{\mathcal{R}})$.

$PROJ(6_2)$ に含まれない knot projection の例として、Figure 3 がある。

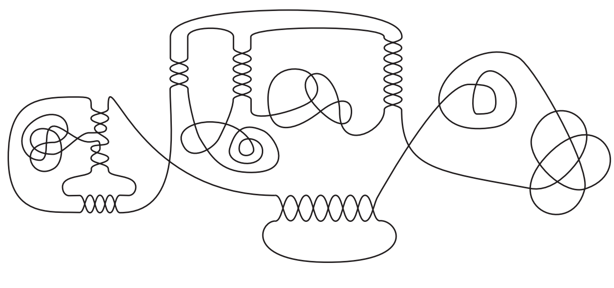

Figure 3:

$\widehat{K}$ を knot projection とする。$\widehat{K}$ に交点の上下の情報を与えて得られる全ての knot からなる集合を $KNOT(\widehat{K})$ と表す。$KNOT(\widehat{\mathcal{M}}) = \bigcup_{\widehat{K} \in \widehat{\mathcal{M}}} KNOT(\widehat{K})$ とする。

$\mathcal{K}$ を全ての knot からなる集合とする。$\mathcal{M}$ を knot の集合とする。$\mathcal{W}(\mathcal{M})$ を $\mathcal{M}$ の要素の連結和からなる全ての knot の集合とする。$\mathcal{T} = KNOT(\widehat{\mathcal{T}})$, $\mathcal{Z} = KNOT(\widehat{\mathcal{Z}})$ とする。

Corollary 1. K を knot とする。$6_2 \leq K$ であるための必要十分条件は、K が $\mathcal{K} \setminus \mathcal{W}(\{6_3, 8_{18}, 8_{19}, 8_{20}\} \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{Z})$ の要素であることである。

Figure 4 の hasse diagram は、線分の下方にある knot が 上方にある knot の minor であることを表わしている。

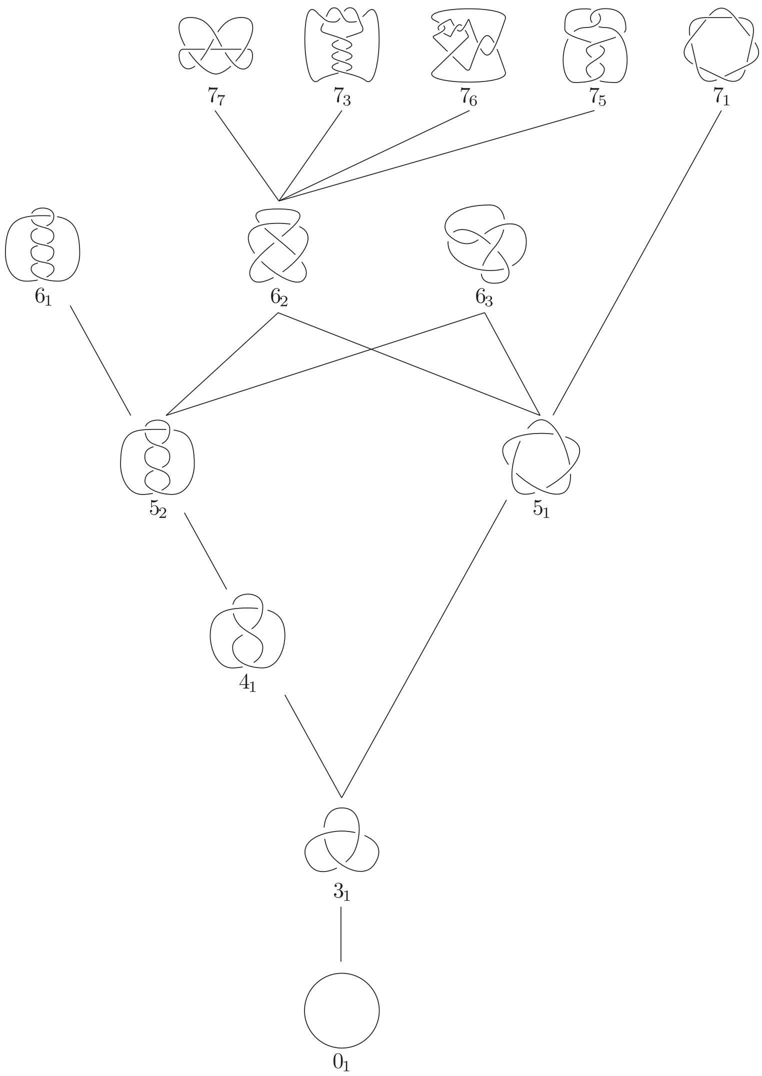

Figure 4:

Chapter 2
A pre-order of chord diagrams

この Chapter では、knot projection を P と表す。

円周上に偶数個の点が配置され、2 点ずつ chord で結ばれたものを chord diagram という。knot projection を、円周の球面へのはめ込みとしたときの逆像において、同一の交点となる 2 点をつなぐことにより、chord diagram が得られる。chord diagram における pre-order を定義し、knot projection の集合の特徴付けを行った ([11])。

Definition 2. 円周上に偶数個の点を、2 点ずつペアにして配置したものを chord diagram といい、CD と表す。CD の円周上のペアの 2 点は、chord で結ぶことにする。knot projection P の交点の逆像を chord で結ぶことによって、P の chord diagram が得られ、CD_P と表す (例 : Figure 5)。CD を実現する knot projection が存在するとき、CD を実現可能と呼ぶ。

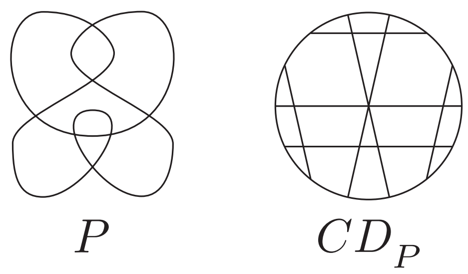

Figure 5:

Definition 3. $CD^{(A)}, CD^{(B)}$ を chord diagram とする。chord diagram CD_P が $CD^{(A)}$ を含むような knot projection P 全体の集合を $PROJ(CD^{(A)})$ と表す。$PROJ(CD^{(A)}) \supset PROJ(CD^{(B)})$ が成り立つとき、$CD^{(B)}$ は $CD^{(A)}$ の *minor* であるといい、$CD^{(A)} \geq CD^{(B)}$ または $CD^{(B)} \leq CD^{(A)}$ と表す。

Proposition 1. 任意の chord diagram CD において、 $PROJ(CD) \neq \emptyset$ である。

Proposition 2. $CD^{(A)}, CD^{(B)}$ を chord diagram とする。
(1) $CD^{(B)}$ が $CD^{(A)}$ を含んでいれば、 $PROJ(CD^{(A)}) \supset PROJ(CD^{(B)})$ で

ある。
(2) $CD^{(B)}$ が実現可能で、$PROJ(CD^{(A)}) \supset PROJ(CD^{(B)})$ であれば、$CD^{(B)}$ は $CD^{(A)}$ を含んでいる。

Proposition 3. 全ての chord diagram からなる集合を $\mathcal{ACD}$ と表す。次の (1), (2) が成り立つため、($\mathcal{ACD}$, $\leq$) は pre-ordered set になる。
(1) $CD^{(A)} \leq CD^{(A)}$ (the reflexive law)
(2) $CD^{(A)} \leq CD^{(B)}$ かつ $CD^{(B)} \leq CD^{(C)}$ ならば $CD^{(A)} \leq CD^{(C)}$ (the transitive law)

Proposition 4. 全ての実現可能な chord diagram からなる集合を $\mathcal{ARCD}$ と表す。Proposition 2 より、Proposition 3 の (1), (2) と次の (3) が成り立つため、($\mathcal{ARCD}$, $\leq$) は partially ordered set になる。
(3) $CD^{(A)} \leq CD^{(B)}$ かつ $CD^{(B)} \leq CD^{(A)}$ ならば $CD^{(A)} \cong CD^{(B)}$ (the antisymmetric law)

$PROJ(CD^{(X)})(X \in \{2, 3a, 3b\})$ については、[9, 3] で研究されている。今回、$PROJ(CD^{(Y)})(Y \in \{4a, 4b, 4c, 4d, 4e, 4f\})$ について、次の結果を得た (Figure 6 参照)。

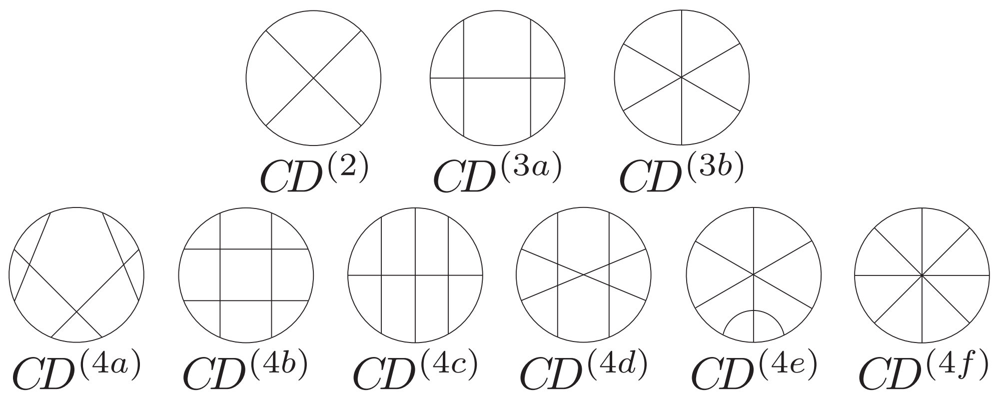

Figure 6:

Theorem 2. $CD^{(4e)}$ は $CD^{(4d)}$ の minor である。

Theorem 3. P を prime knot projection とする ($\widehat{T}$, $\widehat{Z}$, $\widehat{R}$ は Figure 2 を参照)。
(1) CD_P が $CD^{(3b)}$ を含み、$CD^{(4d)}$ を含まないなら、P は $\widehat{T}_i$ $(i \geq 2)$ である。

(2) CD_P が $CD^{(3b)}$ を含み、$CD^{(4e)}$ と $CD^{(4f)}$ を含まないなら、P は $\widehat{Z}(2p_1+1, 2p_2+1, 2p_3+1)$ である。
(3) CD_P が $CD^{(3a)}$ を含み、$CD^{(4a)}$ と $CD^{(4d)}$ を含まないなら、P は $\widehat{R}(2s, 2t)$ である。

Theorem 4. CD_P が $CD^{(4d)}$ を含むなら、CD_P は $CD^{(4a)}$, $CD^{(4b)}$, $CD^{(4c)}$ のどれかを少なくとも 1 つ含む。

Proposition 5.
(1) CD_P が $CD^{(3a)}$ を含むなら、CD_P は $CD^{(4b)}$ または $CD^{(4d)}$ を含む。
(2) CD_P が $CD^{(4a)}$ を含むなら、CD_P は $CD^{(4c)}$ または $CD^{(4d)}$ を含む。

Proposition 2 (1) と Theorem 1 より、Figure 7 の Hasse diagram が得られる。線の上側の chord diagram は、線の下側の chord diagram の minor であることを表している。

chord diagram CD_P が $CD^{(A)}$ を含むような prime knot projection P 全体の集合を $\mathcal{P}\text{-}PROJ(CD^{(A)})$ と表す。以上より、Figure 8、Figure 9 の Venn diagram が得られる。$\emptyset$ は空集合である。

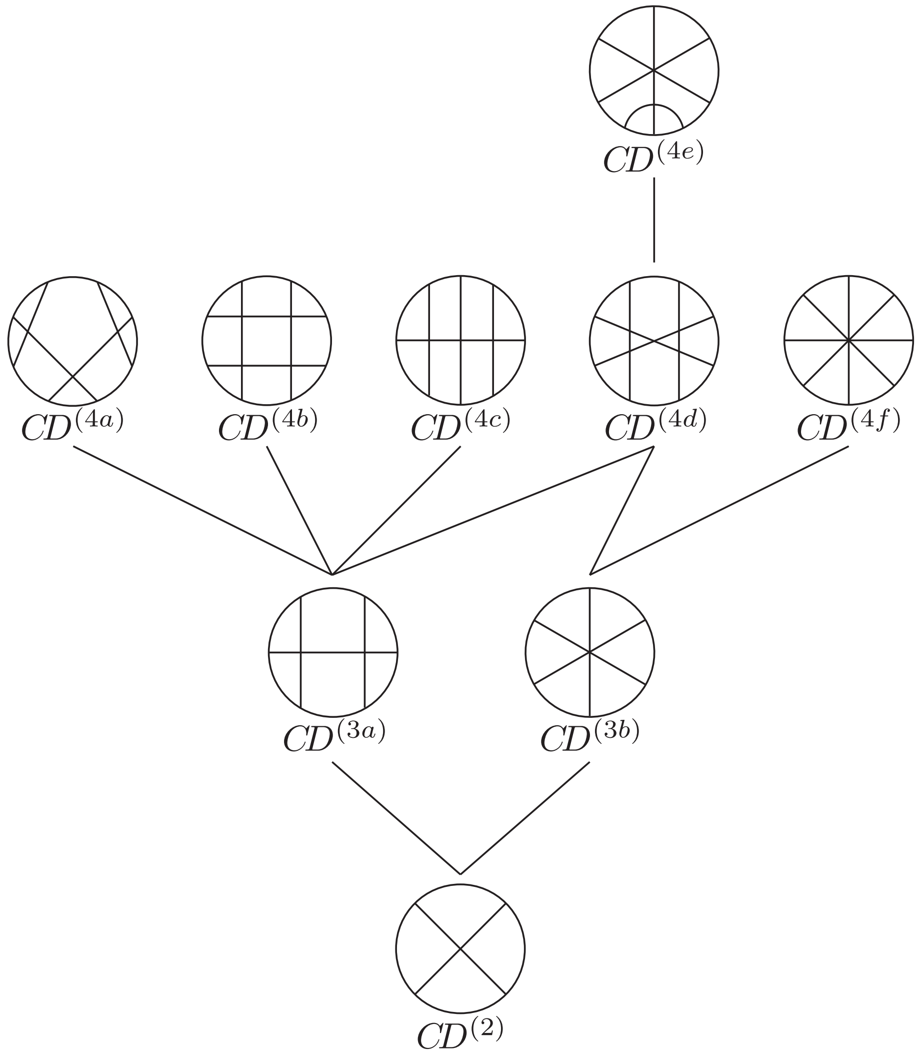

Figure 7:

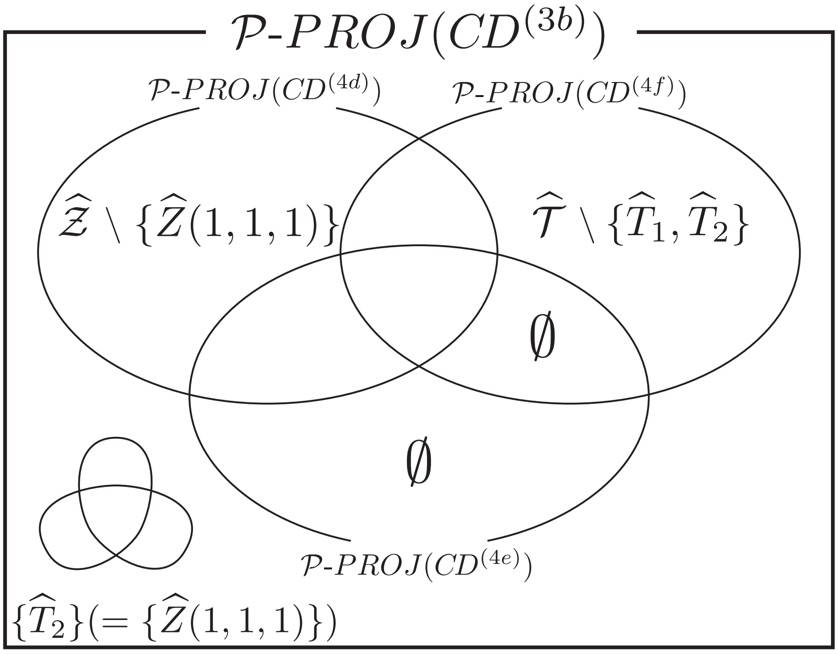

Figure 8:

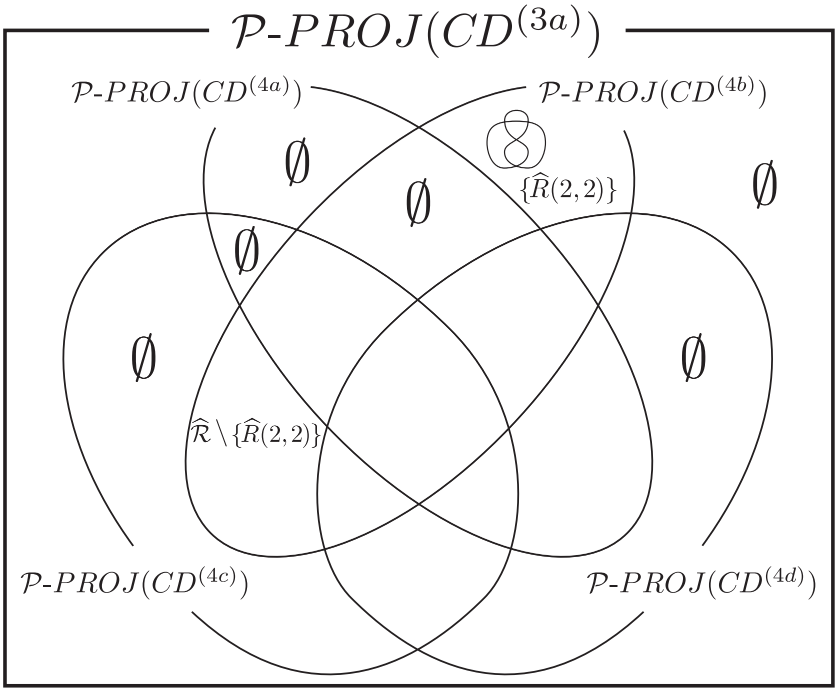

Figure 9:

Chapter 3
Equivalence relations on knot projections

この Chapter は、Ito-Takimura-Taniyama [8]、Ito-Takimura [4, 5, 6, 7] に基づいて記載する。

knot projection において、Figure 10 の局所変形を定義する。

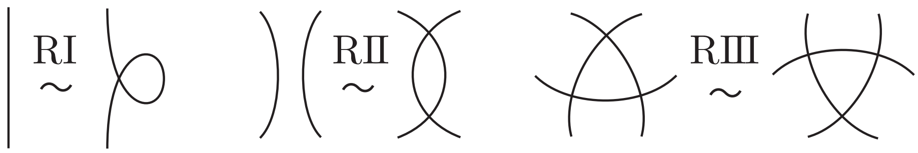

Figure 10:

RⅡ, RⅢ をさらに細かく strong RⅡ, weak RⅡ, strong RⅢ, weak RⅢ として Figure 11 のように定義する。点線は、つながり方を表している。

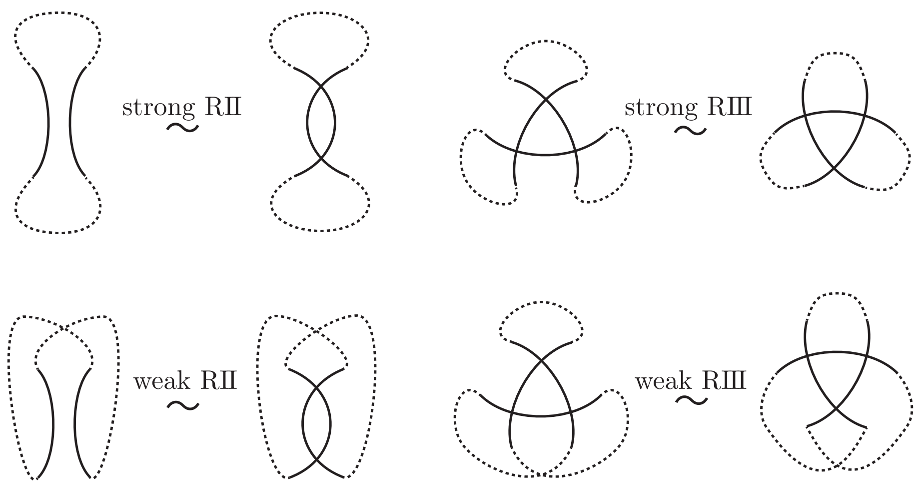

Figure 11:

$N = \{$RI, strong RⅡ, weak RⅡ, strong RⅢ, weak RⅢ$\}$ とし、M を N の部分集合とする。M の要素の局所変形によって生成される同値関係を $\{M\}$ と表す。strong/weak RⅡ をまとめて RⅡ と表す。これについて、以下の結果

を得た。以後、knot projection を P と表す。

・{RI, RII} ([4])

Definition 4. RI, RⅡ において、1b, 2b を Figure 12 のように定義する。P を 1b, 2b で 1 辺形と 2 辺形を全て除去したものを P^r と表す。

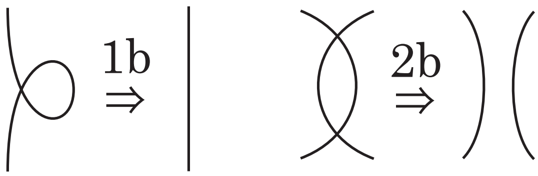

Figure 12:

Theorem 5 ([4, Theorem 1]). P_1 と P_2 が RI, RⅡ で移り合うための必要十分条件は、$P_1^r \cong P_2^r$ であることである。

Corollary 2 ([4, Corollary 1]). P において、P^r は一意的に定まる。

例えば、Figure 13 において P と P' は {RI, RⅡ} では同値ではない。

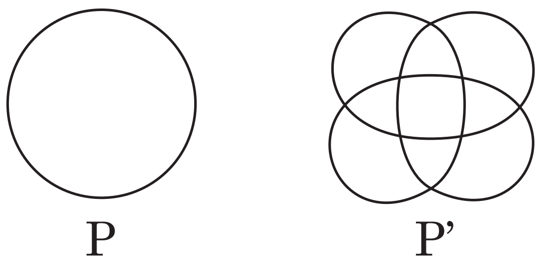

Figure 13:

Theorem 5 と本質的に同様の結果が、 Khovanov [2] によって与えられている [5]。

・{RI, strong RⅢ}, {RI, weak RⅢ} ([6, 8])

Definition 5 (Hanaki [1, Theorem 13]). P において、次の値を定義する (cf. Figure 6)。

$tr(P) = \min\{CD_P$ において $CD^{(2)}$ がなくなるまでコードを抜きとる数$\}$.

Theorem 6 ([8, Theorem 1]).
(1) RI において、$tr(P)$ は不変である。
(2) weak RⅢ において、$tr(P)$ は不変である。
(3) strong RⅢ において、$tr(P)$ は不変か ± 2 変化する。
特に、{RI, weak RⅢ} において　$tr(P)$ は不変である。

Definition 6. Figure 14 の操作を positive 化するという。P に向きをつけ positive 化すると、向きの付け方によらず knot が一意的に得られる。P を positive 化して得られる knot を $K^{pos}(P)$ と表す。

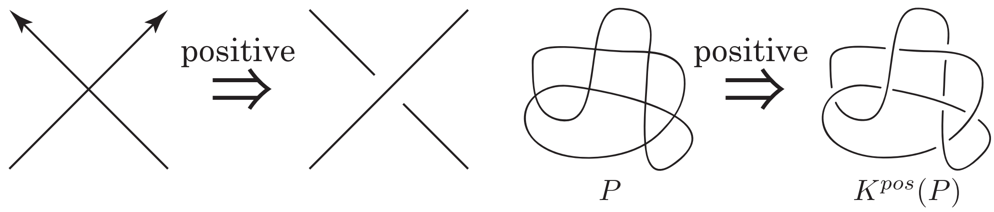

Figure 14:

Theorem 7 ([8, Section 3]). knot projection P_1, P_2 が {RI, weak RⅢ} で同値であるならば、 $K^{pos}(P_1) \cong K^{pos}(P_2)$

Definition 7. CD_P において、$CD^{(2)}$、$CD^{(3a)}$、$CD^{(3b)}$ の総数をそれぞれ $X(P)$, $H(P)$, $T(P)$ と表す (cf. Figure 6)。

Theorem 8 ([8, Theorem 2]).
(1) RI において、$X(P)$ は不変である。
(2) weak RⅢ において、$X(P)$ は $\pm$ 1 変化する。
(3) strong RⅢ において、$X(P)$ は $\pm$ 3 変化する。
特に、{RI, strong RⅢ} において $X(P)$ は mod 3 で不変である。

Theorem 9 ([6, Theorem 1.2]). $\lambda(\mathrm{P}) = \frac{1}{4}\{3H(P) - 3T(P) + X(P)\}$ とする。λ(P) は整数であり、RI, strong RⅢ で不変である。

Theorem 10 ([8, Theorem 4]). P が Figure 15 の (a), (b), (c), (d) のいずれも含まず、P と P' が {RI, strong RⅢ} で同値ならば、P' は P に (e), (f) を有限個連結和したものである。

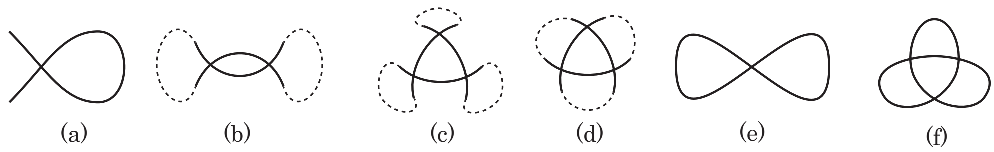

Figure 15:

・$\{$RI, weak RⅡ, weak RⅢ$\}$ ([7])

Theorem 11 ([7, Theorem 2]). P の交点数を $c(P)$ と表す。P の canonical genus を $g(P)$ と表し、$W(P) = tr(P) - 2g(P)$ とする。
(1) $W(P)$ は $\{$RI, weak RⅡ, weak RⅢ$\}$ において不変であり、偶数である。
(2) $W(P)$ は連結和において加法性が成り立つ。
(3) $0 \leq W(P) \leq c(P) - 1$.
(4) $W(P) = c(P) - 1$ であるとき、 P は Figure 15 の (e) である。

Figure 16 の P_1 において、a_1, a_2 は偶数、$a_1 \geq a_2 \geq 2$ とすると、$W(P) = a_2 - 2$ である。P_2 において、 b_1, b_2, b_3 は奇数、$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq 1$ とすると、$W(P) = b_2 + b_3 - 2$ である。

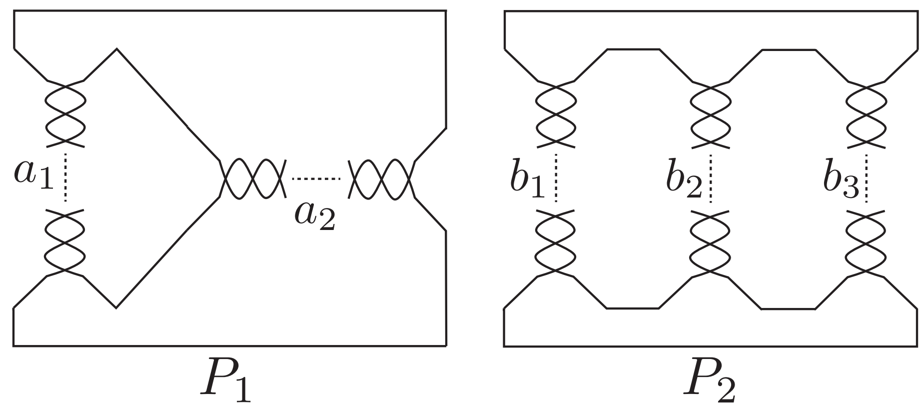

Figure 16:

References

[1] R. Hanaki, Trivializing number of knots, *J. Math. Soc. Japan* **66** (2014), 435–447.

[2] M.Khovanov, Doodle groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997), 2297-2315.

[3] N. Ito and Y. Takimura, Any nontrivial knot projection with no triple chords has a monogon or a bigon, preprint.

[4] N. Ito and Y. Takimura, (1, 2) and weak (1, 3) homotopies on knot projections, *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), 1350085, 14pp.

[5] N. Ito and Y. Takimura, Addendum: (1, 2) and weak (1, 3) homotopies on knot projections. *J. Knot Theory Ramifications* **23** (2014), no. 8, 1491001, 2 pp.

[6] N. Ito and Y. Takimura, Sub-chord diagrams of knot projections, *Houston J. Math.* **41** (2015) no. 2, 701–725.

[7] N. Ito and Y. Takimura, Strong and weak (1, 2, 3) homotopies on knot projections, *Internat. J. Math.* **26** (2015) 1550069 (8 pages).

[8] N. Ito, Y. Takimura, and K. Taniyama, Strong and weak (1, 3) homotopies on knot projections, *Osaka J. Math.* **52** (2015) 617–646.

[9] M. Sakamoto and K. Taniyama, Plane curves in an immersed graph in $\mathbb{R}^2$, *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), 1350003, 10pp.

[10] Y. Takimura, Regular projections of the knot 6_2 knot, *J. Knot Theory Ramifications* **27** (2018), no. 14, 1850081, 31 pp.

[11] Y. Takimura, A preorder of chord diagrams, coming from spherical curve, *Kobe J. Math.*, accept.

[12] K. Taniyama, A partial order of knots, *Tokyo J. Math.* **12** (1989), 205–229.