中国科学: 数学　2019 年　第 49 卷　第 12 期: 1861～1878
SCIENTIA SINICA　Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
论　文

不可压缩向列型液晶系统 Cauchy 问题整体强解的存在性和大时间性质

献给伍卓群教授 90 华诞

吕博强[1], 宋思思[2], 张剑文[3*]

1. 南昌航空大学数学与信息科学学院, 南昌 330063;
2. 中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所, 北京 100190;
3. 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005
E-mail: lvbq86@163.com, songsisi44@163.com, jwzhang@xmu.edu.cn

收稿日期: 2019-01-30; 接受日期: 2019-08-29; 网络出版日期: 2019-11-05; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11601218, 11771382 和 11671333) 资助项目

摘要　本文研究非齐次不可压缩向列型液晶系统在三维全空间上的 Cauchy 问题. 对任意的 $\beta\in(1/2,1]$, 当初值的范数 $\|u_0\|_{\dot H^\beta}+\|\nabla d_0\|_{\dot H^\beta}$ 充分小时, 本文证明整体强解的存在性及大时间衰减估计, 其中初始密度可含真空或具有紧支集.

关键词　液晶系统　非齐次不可压缩流体　整体存在性　真空

MSC (2010) 主题分类　76N10, 35Q30, 35R35

1　引言

本文研究三维非齐次不可压缩向列型液晶系统:

$$\begin{cases}\rho_t+\operatorname{div}(\rho u)=0,\\ (\rho u)_t+\operatorname{div}(\rho u\otimes u)-\mu\Delta u+\nabla P=-\lambda\operatorname{div}(\nabla d\odot\nabla d),\\ d_t+(u\cdot\nabla)d=\gamma(\Delta d+|\nabla d|^2d),\\ \operatorname{div}u=0,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,+\infty)$, $\rho:\mathbb{R}^3\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是流体的密度, $u:\mathbb{R}^3\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}^3$ 是速度场, $d:\mathbb{R}^3\times[0,+\infty)\to\mathbb{S}^2$ ($\mathbb{S}^2$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面) 表示晶体分子方向场, $P:\mathbb{R}^3\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 表示压力. 正常数 μ、λ 和 γ 分别表示黏性系数、动能与势能间动势比率和分子向量场的微观弹性松弛系数.

英文引用格式: Lyu B Q, Song S S, Zhang J W. Global existence and large-time behavior of strong solutions to the Cauchy problem of the incompressible nematic liquid crystal flow (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1861–1878, doi: 10.1360/N012019-00036

不失一般性, 设 $\mu=\lambda=\gamma=1$. 符号 $\otimes$ 表示 Kronecker 张量积, 即 $u\otimes u=(u_iu_j)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. $\nabla d\odot\nabla d$ 为矩阵, 其第 i 行第 j 列 $(1\leqslant i,j\leqslant 3)$ 元素为 $\partial_i d\cdot\partial_j d$. 考虑 (1.1) 的 Cauchy 问题, 满足如下初值:

$$\rho(x,0)=\rho_0(x),\quad \rho u(x,0)=m_0(x),\quad d(x,0)=d_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^3. \tag{1.2}$$

自 Ericksen [1] 和 Leslie [2] 提出液晶连续介质理论之后, 其理论和应用研究取得很多重要进展. 从数学结构来看, 系统 (1.1) 是一个强非线性的双曲 - 抛物耦合方程组. 当 d 为常数时, 系统 (1.1) 即为不可压缩 Navier-Stokes 方程, 参见文献 [3–8] 及其参考文献; 当 ρ 为常数且 $u=0$ 时, 系统 (1.1) 变成了调和映照热流方程, 参见文献 [9,10] 及其参考文献.

下面简要介绍与本文相关的一些结果. 当密度 ρ 为常数时, 齐次不可压缩液晶流体方程组已有很多结果. 其中, Lin 等 [11] 和 Hong[12] 研究了二维初边值问题的 Leray-Hopf 弱解的全局存在性并且证明了存在至多可数个奇异点; Lin 和 Wang[13] 进一步证明了二维问题弱解的唯一性. Lin 和 Wang[14] 得到了三维问题弱解的整体存在性. 特别地, 如果初值满足某些小性条件, Li 和 Wang[15] 及 Xu 和 Zhang[16] 分别证明了三维初边值问题强解和二维 Cauchy 问题光滑解的整体存在性. 更多齐次不可压缩液晶流体方程组的研究, 参见文献 [17–19] 及其参考文献. 当密度非常数时, 系统 (1.1) 称为非齐次不可压缩液晶流体方程组. 特别地, 当初始密度不含真空且 $d_0=(d_{01},d_{02},d_{03})$ 满足如下几何结构条件, Li[20] 证明了二维 Cauchy 问题弱解和强解的整体存在性:

$$d_{03}\geqslant\delta_0,\quad \delta_0>0. \tag{1.3}$$

但正如文献 [3] 指出的, 初始密度含真空对非齐次方程的数学理论研究有非常大影响. 假设初值满足如下相容性条件:

$$\Delta u_0-\nabla P_0-\operatorname{div}(\nabla d_0\odot\nabla d_0)=\sqrt{\rho_0}g,\quad x\in\Omega, \tag{1.4}$$

其中 $(P_0,g)\in H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, Wen 和 Ding [21] 证明了有界区域上初边值问题局部强解的存在唯一性; Gao 等 [22] 研究了黏性依赖密度的三维强解的局部适定性. Fan 等 [23]、Li [24]、Yu 和 Zhang [25] 及 Liu [26] 证明了二维、三维问题小初值强解的整体存在性. 对于初始密度含真空的高维 Cauchy 问题, Liu 等 [27] 在几何条件 (1.3) 下, 研究了二维大初值强解的整体存在性和大时间行为; Li 等 [28] 去掉了文献 [27] 中条件 (1.3) 的限制, 证明了小初值二维强解的整体适定性. 假设初值满足相容性条件 (1.4), Gong 等 [29] 证明了三维强解的局部适定性; 如果初值满足相容性条件 (1.4) 和如下小性条件, Ding 等 [30] 证明了三维强解的整体存在性:

$$\|\sqrt{\rho_0}u_0\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u_0\|_{H^1(\Omega)}+\|\nabla d_0\|_{H^2(\Omega)}+\|g\|_{L^2(\Omega)}\ll 1,\quad \Omega=\mathbb{R}^3. \tag{1.5}$$

本文主要考虑三维 Cauchy 问题, 在更一般的相容性条件和初值条件下, 研究强解的整体存在性和大时间性质. 为了更清楚地阐述本文的主要结果, 首先引进如下记号:

$$\int f dx\triangleq\int_{\mathbb{R}^3} f dx.$$

对 $1\leqslant r\leqslant\infty$, $k\geqslant 1$ 和 $\beta>0$, 定义

$$\begin{cases} L^r=L^r(\mathbb{R}^3),\quad W^{k,r}=W^{k,r}(\mathbb{R}^3),\quad H^k=W^{k,2},\quad \|\cdot\|_{B_1\cap B_2}=\|\cdot\|_{B_1}+\|\cdot\|_{B_2},\\ D^{k,r}=D^{k,r}(\mathbb{R}^3)=\{v\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^3)\mid \nabla^k v\in L^r(\mathbb{R}^3)\},\quad D^1=\{v\in L^6(\mathbb{R}^3)\mid \nabla v\in L^2(\mathbb{R}^3)\},\\ C^\infty_{0,\sigma}=\{f\in C^\infty_0\mid \operatorname{div}f=0\},\quad D^1_{0,\sigma}=\{D^1 \text{ 在 } C^\infty_{0,\sigma} \text{ 中的闭包}\},\\ \dot{H}^\beta=\left\{f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^1\,\middle|\, \|f\|^2_{\dot{H}^\beta}=\int|\xi|^{2\beta}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi<\infty\right\}, \end{cases}$$

其中 $\hat{f}$ 表示 f 的 Fourier 变换.

本文的主要结果如下.

定理 1.1 给定常数 $\bar{\rho}>0$, $\beta\in(\frac{1}{2},1]$, 假设初值 (ρ_0,m_0,d_0) 满足如下条件:

$$\begin{cases}0\leqslant\rho_0\leqslant\bar{\rho}, \quad \rho_0\in L^{\frac{3}{2}}\cap H^1, \quad m_0=\rho_0u_0,\\ u_0\in\dot{H}^\beta\cap D^1_{0,\sigma}, \quad \nabla d_0\in\dot{H}^\beta\cap H^1, \quad |d_0|=1.\end{cases} \tag{1.6}$$

令 $A=\|u_0\|_{\dot{H}^\beta}+\|\nabla d_0\|_{\dot{H}^\beta}$, 则存在仅依赖于 β、$\bar{\rho}$、$\|\rho_0\|_{L^{3/2}}$、$\|\nabla d_0\|_{L^2}$ 和 A 的正常数 ε_0, 使得当

$$A=\|u_0\|_{\dot{H}^\beta}+\|\nabla d_0\|_{\dot{H}^\beta}\leqslant\varepsilon_0, \tag{1.7}$$

Cauchy 问题 (1.1) 和 (1.2) 存在唯一整体强解 (ρ,u,d,P), 使得对任意 $0<\tau<T<\infty$ 和 $q\in[2,6)$, 有

$$\begin{cases}0\leqslant\rho\in C([0,T];L^{\frac{3}{2}}\cap H^1),\\ \nabla u\in L^\infty(0,T;L^2)\cap L^\infty(\tau,T;W^{1,6})\cap C((\tau,T);H^1\cap W^{1,q}),\\ P\in L^\infty(\tau,T;W^{1,6})\cap C((\tau,T);H^1\cap W^{1,q}),\\ \nabla d\in L^\infty(0,T;H^1)\cap L^2(0,T;H^2)\cap C((\tau,T);H^2),\\ d_t\in L^\infty(\tau,T;H^2)\cap L^2(\tau,T;H^3),\\ \sqrt{\rho}u_t\in L^2(0,T;L^2)\cap L^\infty(\tau,T;L^2), \quad P_t\in L^2(\tau,T;D^1),\\ \nabla u_t\in L^\infty(\tau,T;L^2)\cap L^2(\tau,T;D^1), \quad (\sqrt{\rho}u_t)_t\in L^2(\tau,T;L^2),\end{cases} \tag{1.8}$$

且密度梯度的 L^2 范数关于时间一致有界:

$$\sup_{0\leqslant t<\infty}\|\nabla\rho\|_{L^2}\leqslant C\|\nabla\rho_0\|_{L^2}. \tag{1.9}$$

另外, 以下大时间衰减估计成立:

$$t^{3/2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2}+t^{5/2}(\|\nabla^2u(t)\|^2_{L^2}+\|\nabla P\|^2_{L^2})+t^{7/2}\|\nabla u_t(t)\|^2_{L^2}\leqslant C, \tag{1.10}$$

$$t^{1/2}(\|\nabla^2d(t)\|_{L^2}+\|d_t(t)\|_{L^2})+t(\|\nabla^3d(t)\|_{L^2}+\|\nabla d_t(t)\|_{L^2})+t^{3/2}\|\nabla^2d_t(t)\|_{L^2}\leqslant C, \tag{1.11}$$

其中 C 表示仅依赖于 $\bar{\rho}$、β、$\|\rho_0\|_{L^{3/2}}$、$\|\nabla\rho_0\|_{L^2}$、$\|\nabla d_0\|_{H^1}$ 和 $\|\nabla u_0\|_{L^2}$ 的正常数.

注 1.1 定理 1.1 改进了文献 [30] 中的结果. 一方面, 初值不需要满足强相容性条件 (1.4); 另一方面, 改进了文献 [30] 中关于初值的小性条件 (1.5), 仅需 $\|u_0\|_{\dot{H}^\beta}$ 和 $\|\nabla d_0\|_{\dot{H}^\beta}$ 适当小即可 (参见 (1.7)).

注 1.2 本文所得到的估计不依赖于时间, 详见第 2 节. 不仅 $\|\nabla\rho\|_{L^2}$ 关于时间一致有界 (参见 (1.9)), 而且我们得到大时间衰减估计 (参见 (1.10) 和 (1.11)). 这些衰减估计在现有结果中是最优的.

2 先验估计

局部强解存在性的证明类似于文献 [4, 29, 31]. 为证明整体存在性, 我们需要若干整体先验估计. 为此, 假设 (ρ,u,d,P) 是问题 (1.1) 和 (1.2) 在 $\mathbb{R}^3\times[0,T]$ 上的一个光滑解. 为方便起见, 文中的 C 表示与时间无关的正常数. 特别地, 我们有时用 $C(s)$ 表示 C 依赖于 s.

2.1 时间加权低阶估计

本小节主要证明如下先验估计.

命题 2.1 设 (ρ,u,d,P) 是初值问题 (1.1) 和 (1.2) 在 $\mathbb{R}^3\times[0,T]$ 上的一个光滑解, 满足

$$\int_0^T \|\nabla u\|_{L^2}^4 dt \leqslant 2A, \quad \int_0^T \|\nabla^2 d\|_{L^2}^4 dt \leqslant 2A, \tag{2.1}$$

则存在仅依赖于 $\bar\rho$、β、$\|\rho_0\|_{L^{3/2}}$、$\|\nabla d_0\|_{L^2}$ 和 A 的正常数 ε_0, 使得当 $A\leqslant\varepsilon_0$ 时, 有

$$\int_0^T \|\nabla u\|_{L^2}^4 dt \leqslant A, \quad \int_0^T \|\nabla^2 d\|_{L^2}^4 dt \leqslant A. \tag{2.2}$$

命题 2.1 的证明由以下系列引理构成, 将在本小节末尾完成. 首先, 由于流场与液晶分子方向场的强耦合, 为证明命题 2.1, 我们需要 ∇d 的低阶估计.

引理 2.1 设 (ρ,u,d,P) 是初值问题 (1.1) 和 (1.2) 在 $\mathbb{R}^3\times[0,T]$ 上的一个光滑解, 满足 (2.1), 则存在常数 $C=C(\bar\rho,\beta,\|\rho_0\|_{L^{3/2}},\|\nabla d_0\|_{L^2},A)$, 使得

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla d\|_{L^2}^2+\int_0^T\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2dt\leqslant C\|\nabla d_0\|_{L^2}^2, \tag{2.3}$$

且

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla d\|_{L^3}^3+\int_0^T\||\nabla d|^{1/2}|\nabla^2 d|\|_{L^2}^2dt\leqslant C\|\nabla d_0\|_{L^2}^{\frac{3(2\beta-1)}{2\beta}}\|\nabla d_0\|_{\dot H^\beta}^{\frac{3}{2\beta}}. \tag{2.4}$$

证明 方程 $(1.1)_3$ 两边同时作用算子 ∇, 得

$$\nabla d_t-\nabla\Delta d=-\nabla(u\cdot\nabla d)+\nabla(d|\nabla d|^2). \tag{2.5}$$

方程 (2.5) 两边同乘 $|\nabla d|^\kappa\nabla d$ $(\kappa\geqslant 0)$, 并在 $\mathbb{R}^3$ 上分部积分, 注意到 $|d|=1$, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\kappa+2}(\|\nabla d\|_{L^{\kappa+2}}^{\kappa+2})_t+\||\nabla d|^{\frac{\kappa}{2}}|\nabla^2 d|\|_{L^2}^2+\kappa\||\nabla d|^{\frac{\kappa}{2}}|\nabla|\nabla d||\|_{L^2}^2\\
&\leqslant\int|u||\nabla d||\nabla(|\nabla d|^\kappa\nabla d)|dx+\int|d||\nabla d|^2|\nabla(|\nabla d|^\kappa\nabla d)|dx\\
&\leqslant C(\|u\|_{L^6}+\|\nabla d\|_{L^6})\||\nabla d|^{\frac{\kappa}{2}+1}\|_{L^3}\||\nabla d|^{\frac{\kappa}{2}}|\nabla^2 d|\|_{L^2}\\
&\leqslant C(\|\nabla u\|_{L^2}+\|\nabla^2 d\|_{L^2})\||\nabla d|^{\frac{\kappa}{2}+1}\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla|\nabla d|^{\frac{\kappa}{2}+1}\|_{L^2}^{1/2}\||\nabla d|^{\frac{\kappa}{2}}|\nabla^2 d|\|_{L^2}\\
&\leqslant\frac12\||\nabla d|^{\frac{\kappa}{2}}|\nabla^2 d|\|_{L^2}^2+C(\|\nabla u\|_{L^2}^4+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^4)\||\nabla d|^{\frac{\kappa}{2}+1}\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

利用 Gronwall 不等式和 (2.1), 由 (2.6) 得

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla d\|_{L^{\kappa+2}}^{\kappa+2}+\int_0^T(\||\nabla d|^{\frac{\kappa}{2}}|\nabla^2 d|\|_{L^2}^2+\||\nabla d|^{\frac{\kappa}{2}}|\nabla|\nabla d||\|_{L^2}^2)dt\leqslant C\|\nabla d_0\|_{L^{\kappa+2}}^{\kappa+2}. \tag{2.7}$$

由于 $\beta\in(\frac12,1]$, 由 Sobolev 嵌入不等式可知, $\dot H^\beta\hookrightarrow L^{\frac{6}{3-2\beta}}$, 其中 $3<\frac{6}{3-2\beta}\leqslant 6$. 于是, 在 (2.7) 中分别令 $\kappa=0,1$, 即可得 (2.3) 和 (2.4). □

引理 2.2 设 (ρ,u,d,P) 是初值问题 (1.1) 和 (1.2) 在 $\mathbb{R}^3\times[0,T]$ 上的一个光滑解, 满足 (2.1), 则存在常数 $C=C(\bar\rho,\beta,\|\rho_0\|_{L^{3/2}},\|\nabla d_0\|_{L^2},A)$, 使得

$$\sup_{t\in[0,T]}t^{1-\beta}\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2+\int_0^T t^{1-\beta}(\|\nabla d_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 d\|_{L^2}^2)dt\leqslant C\|\nabla d_0\|_{\dot H^\beta}^2. \tag{2.8}$$

证明 设 (ρ,u,d,P) 为问题 (1.1) 和 (1.2) 的一个光滑解. 考虑如下线性方程:

$$v_t-\Delta v=-u\cdot\nabla v+d\nabla d:\nabla v,\quad v(x,0)=v_0(x). \tag{2.9}$$

首先, 类似 (2.3) 的证明, 有

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla v\|_{L^2}^2+\int_0^T\|\nabla^2 v\|_{L^2}^2dt\leqslant C\|\nabla v_0\|_{L^2}^2. \tag{2.10}$$

其次, 方程 (2.9) 两边作用算子 ∇, 得

$$\nabla v_t-\nabla\Delta v=-\nabla(u\cdot\nabla v)+\nabla(d\nabla d:\nabla v). \tag{2.11}$$

利用分部积分、Hölder 不等式、Sobolev 不等式和 $|d|=1$, 由 (2.11) 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\nabla^2 v\|_{L^2}^2+\|\nabla v_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 v\|_{L^2}^2\\&\quad\leqslant C\|\nabla(u\cdot\nabla v)\|_{L^2}^2+C\|\nabla(d\nabla d:\nabla v)\|_{L^2}^2\\&\quad\leqslant C(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2)\|\nabla v\|_{L^\infty}^2+C\|\nabla d\|_{L^6}^4\|\nabla v\|_{L^6}^2+C(\|u\|_{L^6}^2+\|\nabla d\|_{L^6}^2)\|\nabla^2 v\|_{L^3}^2\\&\quad\leqslant C(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2)\|\nabla^2 v\|_{L^2}\|\nabla^3 v\|_{L^2}+C\|\nabla^2 d\|_{L^2}^4\|\nabla^2 v\|_{L^2}^2\\&\quad\leqslant\frac12\|\nabla^3 v\|_{L^2}^2+C(\|\nabla u\|_{L^2}^4+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^4)\|\nabla^2 v\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{2.12}$$

于是, 利用 Gronwall 不等式和 (2.1), 由 (2.12) 得

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla^2 v\|_{L^2}^2+\int_0^T(\|\nabla v_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 v\|_{L^2}^2)dt\leqslant C\|\nabla^2 v_0\|_{L^2}^2. \tag{2.13}$$

另外, 将 (2.12) 两边同乘 t 并在 $[0,T]$ 上积分, 由 (2.1) 和 (2.10) 得

$$\sup_{t\in[0,T]}(t\|\nabla^2 v\|_{L^2}^2)+\int_0^T t(\|\nabla v_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 v\|_{L^2}^2)dt\leqslant C\int_0^T\|\nabla^2 v\|_{L^2}^2dt\leqslant C\|\nabla v_0\|_{L^2}^2. \tag{2.14}$$

利用线性方程的 Riesz-Thorin 插值理论 [32], 由 (2.13) 和 (2.14) 可知, 对任意 $\theta\in[0,1]$, 有

$$\sup_{t\in[0,T]}(t^{1-\theta}\|\nabla^2 v\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^{1-\theta}(\|\nabla v_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 v\|_{L^2}^2)dt\leqslant C\|\nabla v_0\|_{\dot H^\theta}^2. \tag{2.15}$$

在 (2.9) 中令 $v_0=d_0$, 则由解的唯一性理论可知, $v=d$. 特别地, 取 $\theta=\beta\in(1/2,1]$, 由 (2.15) 即可得 (2.8). 引理 2.2 证毕. □

注 2.1 由引理 2.2 或 (2.15) 的证明可知, 估计 (2.8) 对 $\beta=0$ 仍然成立, 即

$$\sup_{t\in[0,T]}(t\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2)+\int_0^T t(\|\nabla d_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 d\|_{L^2}^2)dt\leqslant C\|\nabla d_0\|_{L^2}^2. \tag{2.16}$$

接下来作速度场梯度的 L^2 估计.

引理 2.3 设 (ρ,u,d,P) 是初值问题 (1.1) 和 (1.2) 在 $\mathbb{R}^3\times[0,T]$ 上的一个光滑解, 满足 (2.1), 则存在常数 $C=C(\bar\rho,\beta,\|\rho_0\|_{L^{3/2}},\|\nabla d_0\|_{L^2},A)$, 使得

$$\sup_{t\in[0,T]}(t^{1-\beta}\|\nabla u\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^{1-\beta}\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2dt\leqslant C(\|u_0\|_{\dot H^\beta}^2+\|\nabla d_0\|_{\dot H^\beta}^2). \tag{2.17}$$

证明 首先, 由方程 $(1.1)_1$ (参见文献 [3]) 易知,

$$0 \leqslant \inf \rho(x,t) \leqslant \sup \rho(x,t) \leqslant \bar{\rho}, \quad \|\rho(t)\|_{L^{\frac{3}{2}}} = \|\rho_0\|_{L^{\frac{3}{2}}}, \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{2.18}$$

设 (ρ, u, d, P) 为问题 (1.1) 和 (1.2) 的一个光滑解, 定义线性算子 $\mathcal{L}$:

$$(\mathcal{L}w)^j \triangleq \rho w_t^j + \rho u \cdot \nabla w^j - \Delta w^j, \quad j = 1,2,3. \tag{2.19}$$

设 v 是线性方程 (2.9) 的解. 考虑如下两个线性 Stokes 问题:

$$\mathcal{L}w_1 + \nabla \tilde{P}_1 = 0, \quad \mathrm{div} w_1 = 0, \quad w_1(x,0) = w_{10}(x), \tag{2.20}$$

以及

$$\mathcal{L}w_2 + \nabla \tilde{P}_2 = -\mathrm{div}(\nabla d \odot \nabla v), \quad \mathrm{div} w_2 = 0, \quad w_2(x,0) = 0. \tag{2.21}$$

利用 Riesz-Thorin 插值理论, 类似 (2.15) 的证明 (参见文献 [33, 引理 3.5] 和 [5, 引理 3.2]), 由 (2.20) 易得

$$\sup_{t\in[0,T]} t^{1-\beta} \|\nabla w_1\|_{L^2}^2 + \int_0^T t^{1-\beta} \|\sqrt{\rho} w_{1t}\|_{L^2}^2 dt \leqslant C\|w_{10}\|_{H^\beta}^2, \quad \beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \tag{2.22}$$

接下来估计 w_2. 首先, 方程 (2.21) 两边同乘 w_2, 并在 $\mathbb{R}^3$ 上分部积分, 得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho} w_2\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_2\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla w_2\|_{L^2}^2 + C\|\nabla d\|_{L^3}^2 \|\nabla^2 v\|_{L^2}^2. \tag{2.23}$$

利用 (2.4) 和 (2.10), 由 (2.23) 得

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\sqrt{\rho} w_2\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\nabla w_2\|_{L^2}^2 dt \leqslant C\Big(\sup_{t\in[0,T]} \|\nabla d\|_{L^3}^2\Big) \int_0^T \|\nabla^2 v\|_{L^2}^2 dt \leqslant C\|\nabla v_0\|_{L^2}^2. \tag{2.24}$$

为估计 $\|\nabla w_2\|_{L^2}^2$, 方程 (2.21) 两边同乘 w_{2t}, 并在 $\mathbb{R}^3$ 上分部积分, 得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w_2\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\rho} w_{2t}\|_{L^2}^2 &= \frac{d}{dt}\int (\nabla d \odot \nabla v) : \nabla w_2 dx - \int (\nabla d \odot \nabla v_t) : \nabla w_2 dx \\
&\quad - \int (\nabla d_t \odot \nabla v) : \nabla w_2 dx - \int \rho u \cdot \nabla w_2 \cdot w_{2t} dx \\
&\triangleq \frac{d}{dt}\int (\nabla d \odot \nabla v) : \nabla w_2 dx + \sum_{i=1}^3 I_i.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

利用 (2.4)、Hölder 不等式、Sobolev 不等式和 Young 不等式, 可估计 I_i $(i = 1,2,3)$ 如下:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant \|\nabla v_t\|_{L^2} \|\nabla d\|_{L^3} \|\nabla w_2\|_{L^6} \leqslant C\|\nabla v_t\|_{L^2}^2 + \delta\|\nabla^2 w_2\|_{L^2}^2, \\
I_2 &\leqslant C\int |d_t||\nabla^2 v||\nabla w_2| dx + C\int |d_t||\nabla v||\nabla^2 w_2| dx \\
&\leqslant \|d_t\|_{L^2} (\|\nabla^2 v\|_{L^3} \|\nabla w_2\|_{L^6} + \|\nabla v\|_{L^\infty} \|\nabla^2 w_2\|_{L^2}) \\
&\leqslant C\|d_t\|_{L^2} \|\nabla^2 v\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla^3 v\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla^2 w_2\|_{L^2} \\
&\leqslant C\|d_t\|_{L^2}^4 \|\nabla^2 v\|_{L^2}^2 + C\|\nabla^3 v\|_{L^2}^2 + \delta\|\nabla^2 w_2\|_{L^2}^2, \\
I_3 &\leqslant \|\sqrt{\rho} w_{2t}\|_{L^2} \|u\|_{L^6} \|\nabla w_2\|_{L^3} \\
&\leqslant \delta(\|\sqrt{\rho} w_{2t}\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 w_2\|_{L^2}^2) + C\|\nabla u\|_{L^2}^4 \|\nabla w_2\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

利用 Stokes 估计、Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式、Hölder 不等式和 (2.18), 由 (2.21) 可知,

$$\begin{aligned}
&\|\nabla^2 w_2\|_{L^2}+\|\nabla\tilde{P}_2\|_{L^2}\\
&\quad\leqslant C(\|\rho w_{2t}\|_{L^2}+\|\rho u\cdot\nabla w_2\|_{L^2}+\|\mathrm{div}(\nabla d\odot\nabla v)\|_{L^2})\\
&\quad\leqslant C(\|\sqrt{\rho}w_{2t}\|_{L^2}+\|u\cdot\nabla w_2\|_{L^2}+\|\nabla^2 d\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^\infty}+\|\nabla d\|_{L^6}\|\nabla^2 v\|_{L^3})\\
&\quad\leqslant C(\|\sqrt{\rho}w_{2t}\|_{L^2}+\|u\|_{L^6}\|\nabla w\|_{L^3}+\|\nabla^2 d\|_{L^2}\|\nabla^2 v\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla^3 v\|_{L^2}^{1/2})\\
&\quad\leqslant \frac{1}{2}\|\nabla^2 w_2\|_{L^2}+C(\|\sqrt{\rho}w_{2t}\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\nabla w_2\|_{L^2}+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2\|\nabla^2 v\|_{L^2}+\|\nabla^3 v\|_{L^2}).
\end{aligned}\tag{2.26}$$

将 I_1、I_2 和 I_3 的估计代入 (2.25), 并选取 δ 充分小, 利用 (2.26), 有

$$\begin{aligned}
&F'(t)+\|\sqrt{\rho}w_{2t}\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 w_2\|_{L^2}^2\\
&\quad\leqslant C\|\nabla u\|_{L^2}^4\|\nabla w_2\|_{L^2}^2+C(\|\nabla v_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 v\|_{L^2}^2)+C(\|d_t\|_{L^2}^4+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^4)\|\nabla^2 v\|_{L^2}^2,
\end{aligned}\tag{2.27}$$

其中 $F(t)\triangleq\|\nabla w_2\|_{L^2}^2-\int(\nabla d\odot\nabla v):\nabla w_2 dx$ 满足

$$\frac{1}{2}\|\nabla w_2\|_{L^2}^2-C\|\nabla d\|_{L^3}^2\|\nabla^2 v\|_{L^2}^2\leqslant F(t)\leqslant C\|\nabla w_2\|_{L^2}^2+C\|\nabla d\|_{L^3}^2\|\nabla^2 v\|_{L^2}^2.\tag{2.28}$$

注意到, 利用 (2.1)、(2.4)、Sobolev 不等式和 Hölder 不等式, 由 $(1.1)_3$ 有

$$\begin{aligned}
\int_0^T\|d_t\|_{L^2}^4dt&\leqslant\int_0^T(\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla d\|_{L^3}+\|\nabla^2 d\|_{L^2}+\|\nabla^2 d\|_{L^2}\|\nabla d\|_{L^3})^4dt\\
&\leqslant C\int_0^T(\|\nabla u\|_{L^2}^4+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^4)dt\leqslant C.
\end{aligned}\tag{2.29}$$

于是, 利用 (2.1)、(2.4)、(2.13)、(2.28) 和 (2.29), 由 (2.27) 和 Gronwall 不等式, 得

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla w_2\|_{L^2}^2+\int_0^T\|\sqrt{\rho}w_{2t}\|_{L^2}^2dt&\leqslant C\|\nabla d_0\|_{L^3}^2\|\nabla^2 v_0\|_{L^2}^2+C\int_0^T(\|\nabla v_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 v\|_{L^2}^2)dt\\
&\quad+C\sup_{t\in[0,T]}(\|\nabla^2 v\|_{L^2}^2)\int_0^T(\|d_t\|_{L^2}^4+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^4)dt\\
&\leqslant C\|\nabla^2 v_0\|_{L^2}^2.
\end{aligned}\tag{2.30}$$

类似地, (2.27) 两边同乘 t 并在 $[0,T]$ 上积分, 由 (2.24) 和 (2.14) 得

$$\sup_{t\in[0,T]}(t\|\nabla w_2\|_{L^2}^2)+\int_0^T t\|\sqrt{\rho}w_{2t}\|_{L^2}^2dt\leqslant C\|\nabla v_0\|_{L^2}^2.\tag{2.31}$$

因此, 由 (2.30) 和 (2.31), 利用 Riesz-Thorin 插值理论 [32] 可知, 对任意 $\beta\in(1/2,1]$, 有

$$\sup_{t\in[0,T]}(t^{1-\beta}\|\nabla w_2\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^{1-\beta}\|\sqrt{\rho}w_{2t}\|_{L^2}^2dt\leqslant C\|\nabla v_0\|_{\dot{H}^\beta}^2.\tag{2.32}$$

在 (2.20) 和 (2.21) 中取 $w_{10}=u_0$ 和 $v_0=d_0$, 则由解的唯一性可知, $w_1+w_2=u$ 和 $v=d$. 于是, 联合 (2.22) 和 (2.32) 即得 (2.17). 引理 2.3 证毕. □

引理 2.4 设 (ρ,u,d,P) 是初值问题 (1.1) 和 (1.2) 在 $\mathbb{R}^3\times[0,T]$ 上的一个光滑解, 满足 (2.1), 则存在常数 $C=C(\bar\rho,\beta,\|\rho_0\|_{L^{3/2}},\|\nabla d_0\|_{L^2},A)$, 使得

$$\sup_{t\in[0,T]}(t^{\frac{1-\beta}{2}}\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^{\frac{1-\beta}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}^2dt\leqslant C(\|u_0\|_{\dot H^\beta}^2+\|\nabla d_0\|_{\dot H^\beta}), \tag{2.33}$$

$$\sup_{t\in[0,T]}(t^{\frac{3-\beta}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^{\frac{3-\beta}{2}}\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2dt\leqslant C(\|u_0\|_{\dot H^\beta}^2+\|\nabla d_0\|_{\dot H^\beta}). \tag{2.34}$$

证明 方程 $(1.1)_2$ 的两端乘以 u, 然后在 $\mathbb{R}^3$ 上分部积分, 得

$$\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2\leqslant C\|\nabla d\|_{L^3}^2\|\nabla d\|_{L^6}^2. \tag{2.35}$$

利用 (2.3)、(2.4) 和 (2.18), 由上式可得

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}^2+\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2}^2dt&\leqslant\|\sqrt{\rho_0}u_0\|_{L^2}^2+C\int_0^T\|\nabla d\|_{L^3}^2\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2dt\\&\leqslant\|\rho_0\|_{L^{\frac{3}{2\beta}}}\|u_0\|_{L^{\frac{6}{3-2\beta}}}^2+C\Big(\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla d\|_{L^3}^2\Big)\int_0^T\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2dt\\&\leqslant C\|u_0\|_{\dot H^\beta}^2+C\|\nabla d_0\|_{\dot H^\beta}^{1/\beta}\\&\leqslant C\|u_0\|_{\dot H^\beta}^2+C\|\nabla d_0\|_{\dot H^\beta}.\end{aligned} \tag{2.36}$$

对 $\beta\in(1/2,1)$, (2.35) 两边同乘 $t^{\frac{1-\beta}{2}}$ 并在 $[0,T]$ 上积分, 利用 (2.8)、(2.18) 和 (2.36), 得

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}(t^{\frac{1-\beta}{2}}\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^{\frac{1-\beta}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}^2dt\\&\leqslant C\int_0^T t^{\frac{1-\beta}{2}}\|\nabla d\|_{L^2}\|\nabla^2 d\|_{L^2}^3dt+C\int_0^T t^{-\frac{1+\beta}{2}}\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}^2dt\\&\leqslant C\sup_{t\in[0,T]}(t^{\frac{1-\beta}{2}}\|\nabla d\|_{L^2}\|\nabla^2 d\|_{L^2})\int_0^T\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2dt\\&\quad+C\sup_{t\in[0,1]}\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}^2\int_0^1 t^{-\frac{1+\beta}{2}}dt+C\int_1^T\|\rho\|_{L^{\frac32}}\|\nabla u\|_{L^2}^2dt\\&\leqslant C\|u_0\|_{\dot H^\beta}^2+C\|\nabla d_0\|_{\dot H^\beta}.\end{aligned} \tag{2.37}$$

于是, 联合 (2.36) 和 (2.37) 即得 (2.33).

下证 (2.34). 类似 (2.25)–(2.28) 的推导, 方程 $(1.1)_2$ 的两端乘以 u_t, 在 $\mathbb{R}^3$ 上分部积分, 有

$$G'(t)+\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2\leqslant C\|\nabla u\|_{L^2}^4\|\nabla u\|_{L^2}^2+C\|\nabla^2 d\|_{L^2}^3\|\nabla^3 d\|_{L^2}+C\|\nabla d\|_{L^3}^2\|\nabla d_t\|_{L^2}^2, \tag{2.38}$$

其中 $G(t)\triangleq\|\nabla u\|_{L^2}^2-\int(\nabla d\odot\nabla d):\nabla udx$ 满足

$$\frac12\|\nabla u\|_{L^2}^2-C\|\nabla d\|_{L^2}\|\nabla^2 d\|_{L^2}^3\leqslant G(t)\leqslant C\|\nabla u\|_{L^2}^2+C\|\nabla d\|_{L^2}\|\nabla^2 d\|_{L^2}^3. \tag{2.39}$$

在 (2.38) 两边乘以 $t^{\frac{3-\alpha}{2}}(\alpha\in[0,1])$, 由 (2.39) 得

$$(t^{\frac{3-\alpha}{2}}G(t))'+t^{\frac{3-\alpha}{2}}(\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\|\nabla u\|_{L^2}^4(t^{\frac{3-\alpha}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}^2)+Ct^{\frac{1-\alpha}{2}}(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla d\|_{L^2}\|\nabla^2 d\|_{L^2}^3)\\
&\quad+Ct^{\frac{3-\alpha}{2}}(\|\nabla^2 d\|_{L^2}^3\|\nabla^3 d\|_{L^2}+\|\nabla d\|_{L^2}\|\nabla^2 d\|_{L^2}\|\nabla d_t\|_{L^2}^2).
\end{aligned}\tag{2.40}
$$

在 (2.40) 中取 $\alpha=\beta\in(1/2,1]$, 由 (2.1)、(2.3)、(2.8)、(2.16)、(2.36)、(2.37) 和 Gronwall 不等式, 得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}(t^{\frac{3-\beta}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^{\frac{3-\beta}{2}}(\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2)dt\\
&\leqslant C(\|u_0\|_{\dot{H}^\beta}^2+\|\nabla d_0\|_{\dot{H}^\beta})+C\sup_{t\in[0,T]}[(t^{\frac{1-\beta}{2}}\|\nabla^2 d\|_{L^2})(t\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2)\|\nabla d\|_{L^2}]\\
&\quad+C\sup_{t\in[0,T]}[(t^{\frac{1-\beta}{2}}\|\nabla^2 d\|_{L^2})\|\nabla d\|_{L^2}]\int_0^T(\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2+t\|\nabla d_t\|_{L^2}^2)dt\\
&\quad+C\sup_{t\in[0,T]}[(t^{\frac{1-\beta}{2}}\|\nabla^2 d\|_{L^2})(t^{\frac12}\|\nabla^2 d\|_{L^2})]\int_0^T\|\nabla^2 d\|_{L^2}(t^{\frac12}\|\nabla^2 d\|_{L^2})dt\\
&\leqslant C(\|u_0\|_{\dot{H}^\beta}^2+\|\nabla d_0\|_{\dot{H}^\beta}).
\end{aligned}\tag{2.41}
$$

于是, 引理 2.4 证毕. □

利用引理 2.1–2.4 即可证明命题 2.1.

命题 2.1 的证明 由估计 (2.8)、(2.16)、(2.17) 和 (2.34) 可知, 对任意的 $\beta\in(1/2,1]$, 有

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2}^4dt+\int_0^T\|\nabla^2 d\|_{L^2}^4dt&\leqslant\sup_{t\in[0,1]}[t^{1-\beta}(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2)]^2\int_0^1 t^{2\beta-2}dt\\
&\quad+\sup_{t\in[1,T]}(t^{\frac{3-\beta}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}^2)^2\int_1^T t^{-3+\beta}dt\\
&\quad+\sup_{t\in[1,T]}(t^{1-\beta}\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2)^{\frac23}(t\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2)^{\frac43}\int_1^T t^{-2+\frac23\beta}dt\\
&\leqslant C\|u_0\|_{\dot{H}^\beta}^4+C\|\nabla d_0\|_{\dot{H}^\beta}^{4/3}\leqslant C_1A^{4/3}.
\end{aligned}\tag{2.42}
$$

于是, 若 $\varepsilon_0\triangleq\min\{1,C_1^{-3}\}$, 则当 $A\leqslant\varepsilon_0$ 时, 由 (2.42) 即得 (2.2). 命题 2.1 证毕. □

2.2 高阶导数估计

为证明强解的整体存在性和衰减估计, 我们还需要高阶导数估计. 为方便起见, 以下如无特别说明, 常数 C 还依赖于 $\bar{\rho}$、β、$\|\rho_0\|_{L^{3/2}}$、$\|\nabla\rho_0\|_{L^2}$、$\|\nabla u_0\|_{L^2}$ 和 $\|\nabla d_0\|_{H^1}$.

引理 2.5 设命题 2.1 的条件成立, 则对 $\sigma\in\{0,1\}$, 有

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}t^{\frac{\sigma}{2}}[\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}^2+t^\sigma\|\nabla u\|_{L^2}^2+t^{\sigma+1}(\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2+\|\nabla P\|_{L^2}^2)]\\
&\quad+\sup_{t\in[0,T]}t^\sigma[\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2+t(\|\nabla d_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 d\|_{L^2}^2)+t^{\frac12}\|\nabla d\|_{L^\infty}^2]\\
&\quad+\int_0^T t^{\frac{\sigma}{2}}[\|\nabla u\|_{L^2}^2+t^\sigma(\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2+\|\nabla P\|_{L^2}^2)]dt\\
&\quad+\int_0^T t^{\frac{3\sigma}{2}+1}(\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u\|_{L^6}^2+\|\nabla P\|_{L^6}^2)dt
\end{aligned}
$$

$$+\int_0^T t^\sigma(\|\nabla d_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 d\|_{L^2}^2+t\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}^2)dt$$
$$\leqslant C. \tag{2.43}$$

证明 首先, 注意到引理 2.2 和 2.3 对任意的 $\beta\in[0,1]$ 都成立. 于是, 对 $\sigma\in\{0,1\}$, 有

$$\sup_{t\in[0,T]}(t^\sigma\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2+t^\sigma\|\nabla u\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^\sigma(\|\nabla d_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 d\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2)dt\leqslant C. \tag{2.44}$$

方程 $(1.1)_2$ 关于 t 求导, 得

$$\rho u_{tt}+\rho u\cdot\nabla u_t-\Delta u_t=-\rho_t(u_t+u\cdot\nabla u)-\rho u_t\cdot\nabla u-\nabla P_t-\operatorname{div}(\nabla d\odot\nabla d)_t. \tag{2.45}$$

上式两端乘以 u_t 并在 $\mathbb{R}^3$ 上积分, 利用分部积分和方程 $(1.1)_1$, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla u_t\|_{L^2}^2&=-2\int\rho u\cdot\nabla u_t\cdot u_t dx-\int\rho u\cdot\nabla(u\cdot\nabla u\cdot u_t)dx\\&\quad-\int\rho u_t\cdot\nabla u\cdot u_t dx+\int(\nabla d\odot\nabla d)_t:\nabla u_t dx\\&\triangleq I,\end{aligned} \tag{2.46}$$

其中, 利用 Hölder 不等式、Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式, 易得

$$I\leqslant\frac{1}{8}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C(\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2)\|\nabla u\|_{L^2}^4+C\|\nabla d\|_{L^\infty}^2\|\nabla d_t\|_{L^2}^2. \tag{2.47}$$

利用 Stokes 方程正则性理论和 Sobolev 不等式, 由 $(1.1)_2$ 可得, 对于任意 $p\in[2,6]$, 有

$$\begin{aligned}\|\nabla^2 u\|_{L^p}+\|\nabla P\|_{L^p}&\leqslant C\|\rho u_t+\rho u\cdot\nabla u\|_{L^p}+C\|\operatorname{div}(\nabla d\odot\nabla d)\|_{L^p}\\&\leqslant C\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^{\frac{6-p}{2p}}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{\frac{3p-6}{2p}}+C\|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^{\frac{6p}{6-p}}}+C\|\nabla d\|_{L^\infty}\|\nabla^2 d\|_{L^p}\\&\leqslant C\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^{\frac{6-p}{2p}}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{\frac{3p-6}{2p}}+C\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{p}{5p-6}}\|\nabla^2 u\|_{L^p}^{\frac{4p-6}{5p-6}}\\&\quad+C\|\nabla d\|_{L^\infty}\|\nabla^2 d\|_{L^2}^{\frac{6-p}{2p}}\|\nabla^3 d\|_{L^2}^{\frac{3p-6}{2p}}\\&\leqslant\frac{1}{2}\|\nabla^2 u\|_{L^p}+C(\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^{\frac{6-p}{2p}}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{\frac{3p-6}{2p}}+\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{6p-6}{p}}+C\|\nabla^2 d\|_{L^2}^{\frac{3}{p}}\|\nabla^3 d\|_{L^2}^{\frac{2p-3}{p}}).\end{aligned} \tag{2.48}$$

特别地, 在 (2.48) 中分别取 $p=2,6$, 得

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2}+\|\nabla P\|_{L^2}\leqslant C(\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{L^2}^3+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\nabla^3 d\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}), \tag{2.49}$$

$$\|\nabla^2 u\|_{L^6}+\|\nabla P\|_{L^6}\leqslant C(\|\nabla u_t\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{L^2}^5+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^3 d\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}). \tag{2.50}$$

于是, 将 (2.47) 代入 (2.46), 由 (2.49) 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla u_t\|_{L^2}^2&\leqslant C(\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^6+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^3\|\nabla^3 d\|_{L^2})\|\nabla u\|_{L^2}^4\\&\quad+C(\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 d\|_{L^2}^2)\|\nabla d_t\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{2.51}$$

另外, 方程 (2.5) 关于 t 求导, 得

$$\nabla d_{tt}-\nabla\Delta d_t=-\nabla u_t\cdot\nabla d-\nabla u\cdot\nabla d_t-u_t\cdot\nabla^2 d-u\cdot\nabla^2 d_t+\nabla(|\nabla d|^2 d)_t. \tag{2.52}$$

上式两端乘以 ∇d_t 并在 $\mathbb{R}^3$ 上分部积分, 由 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla d_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}^2 &\leqslant C\|\nabla u_t\|_{L^2}\|\nabla^2 d\|_{L^2}\|\nabla d_t\|_{L^3}+C\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla d_t\|_{L^3}\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}\\ &\quad+C\|d_t\|_{L^6}\|\nabla d\|_{L^6}^2\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}+C\|\nabla d\|_{L^6}\|\nabla d_t\|_{L^3}\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}\\ &\leqslant \frac{1}{4}(\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}^2)+C(\|\nabla^2 d\|_{L^2}^4+\|\nabla u\|_{L^2}^4)\|\nabla d_t\|_{L^2}^2. \end{aligned}\tag{2.53}$$

联合 (2.51) 和 (2.53), 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla d_t\|_{L^2}^2)+\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}^2\\ &\quad\leqslant C(\|\nabla u\|_{L^2}^4+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^4+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 d\|_{L^2}^2)(\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla d_t\|_{L^2}^2)\\ &\qquad+C\|\nabla u\|_{L^2}^{10}+C\|\nabla u\|_{L^2}^4\|\nabla^2 d\|_{L^2}^3\|\nabla^3 d\|_{L^2}. \end{aligned}\tag{2.54}$$

于是, (2.54) 乘以 $t^{\sigma+1}$ 并在 $[0,T]$ 上积分, 利用 (2.2)、(2.3) 和 (2.44), 由 Gronwall 不等式得

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]} t^{\sigma+1}(\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla d_t\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^{\sigma+1}(\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}^2)dt\\ &\quad\leqslant C+C\int_0^T t^{\sigma+1}(\|\nabla u\|_{L^2}^{10}+\|\nabla u\|_{L^2}^4\|\nabla^2 d\|_{L^2}^3\|\nabla^3 d\|_{L^2})dt\\ &\quad\leqslant C+C\sup_{t\in[0,1]}(\|\nabla u\|_{L^2}^{10}+\|\nabla u\|_{L^2}^4\|\nabla^2 d\|_{L^2}^3)\int_0^1(1+\|\nabla^3 d\|_{L^2}^2)dt\\ &\qquad+C\int_1^T t^{\sigma+1}(t^{-5}+t^{-6}+t^{-1}\|\nabla^3 d\|_{L^2}^2)dt\\ &\quad\leqslant C. \end{aligned}\tag{2.55}$$

为估计 $\|\nabla^3 d\|_{L^2}$, 利用 Hölder 不等式、Sobolev 不等式和 $|d|=1$, 由 (2.5) 得

$$\begin{aligned}\|\nabla^3 d\|_{L^2}&\leqslant C\|\nabla d_t\|_{L^2}+C\|\nabla u\|_{L^2}(\|\nabla d\|_{L^\infty}+\|\nabla^2 d\|_{L^3})+C\|\nabla^2 d\|_{L^2}\|\nabla d\|_{L^\infty}+C\|\nabla d\|_{L^6}^3\\ &\leqslant\frac{1}{2}\|\nabla^3 d\|_{L^2}+C(\|\nabla d_t\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\nabla^2 d\|_{L^2}+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^3). \end{aligned}\tag{2.56}$$

于是, 利用 (2.3)、(2.44) 和 (2.55), 由 (2.56) 有

$$\sup_{t\in[0,T]}(t^{\sigma+1}\|\nabla^3 d\|_{L^2}^2+t^{1/2+\sigma}\|\nabla d\|_{L^\infty}^2)+\int_0^T t^{1/2}\|\nabla d\|_{L^\infty}^2dt\leqslant C.\tag{2.57}$$

另外, 利用估计 (2.3)、(2.44)、(2.55) 和 (2.57), 由 (2.49) 和 (2.50) 易得

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]} t^{\sigma+1}(\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2+\|\nabla P\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^{\sigma}(\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2+\|\nabla P\|_{L^2}^2)\\ &\quad+\int_0^T t^{\sigma+1}(\|\nabla^2 u\|_{L^6}^2+\|\nabla P\|_{L^6}^2)dt\leqslant C. \end{aligned}\tag{2.58}$$

类似 (2.37) 的推导, 由 (2.3)、(2.36) 和 (2.44), 得

$$\sup_{t\in[0,T]}(t^{\frac{1}{2}}\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}^2dt\leqslant C+\sup_{t\in[0,T]}\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}^2\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}dt+C\int_1^T\|\nabla u\|_{L^2}^2dt\leqslant C.\tag{2.59}$$

同理, 类似 (2.40) 的证明, 由 Gronwall 不等式、(2.3)、(2.8)、(2.44)、(2.55) 和 (2.59), 得

$$\sup_{t\in[0,T]}(t^{\frac{3}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^{\frac{3}{2}}\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2dt\leqslant C. \tag{2.60}$$

在 (2.51) 两端乘以 $t^{5/2}$ 并在 $[0,T]$ 上积分, 由 (2.2)、(2.44)、(2.55)、(2.57) 和 (2.60), 得

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}(t^{\frac{5}{2}}\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^{\frac{5}{2}}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2dt\\
&\quad\leqslant C\int_0^T t^{\frac{3}{2}}\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2dt+C\int_0^T t^{\frac{5}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}^{10}dt\\
&\qquad+C\int_0^T t^{\frac{5}{2}}(\|\nabla u\|_{L^2}^4\|\nabla^2 d\|_{L^2}^3\|\nabla^3 d\|_{L^2}+\|\nabla^2 d\|_{L^2}\|\nabla^3 d\|_{L^2}\|\nabla d_t\|_{L^2}^2)dt\\
&\quad\leqslant C+C\int_0^T(\|\nabla u\|_{L^2}^5+\|\nabla u\|_{L^2}^4+t\|\nabla d_t\|_{L^2}^2)dt\\
&\quad\leqslant C.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

最后, 类似 (2.58) 的推导, 利用 (2.44)、(2.60) 和 (2.61), 由 (2.49) 和 (2.50) 得

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}t^{\frac{5}{2}}(\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2+\|\nabla P\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^{\frac{3}{2}}(\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2+\|\nabla P\|_{L^2}^2)dt\\
&\quad+\int_0^T t^{\frac{5}{2}}(\|\nabla^2 u\|_{L^6}^2+\|\nabla P\|_{L^6}^2)dt\\
&\qquad\leqslant C.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

于是, 联合 (2.36)、(2.44)、(2.55) 和 (2.57)–(2.62) 即得 (2.43). 引理 2.5 证毕. □

接下来证明 $\|\nabla\rho\|_{L^2}$ 关于时间的一致有界性.

引理 2.6 设命题 2.1 的条件成立, 则有

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla\rho\|_{L^2}+\int_0^T\|\nabla u\|_{L^\infty}dt\leqslant C. \tag{2.63}$$

证明 当 $t\in(0,1]$ 时, 由 Sobolev 不等式、(2.43) 和 (2.48) 可知, 对于 $r\in(3,6)$, 有

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^\infty}&\leqslant C\|\nabla u\|_{L^2}+C\|\nabla^2 u\|_{L^r}\\
&\leqslant C\|\nabla u\|_{L^2}+C\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^{\frac{6-r}{2r}}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{\frac{3r-6}{2r}}+C\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{6r-6}{r}}+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^{\frac{3}{r}}\|\nabla^3 d\|_{L^2}^{\frac{2r-3}{r}}\\
&\leqslant C+C\Big(\sup_{t\in[0,1]}t^{\frac{1}{2}}\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}\Big)^{\frac{6-r}{2r}}(t\|\nabla u_t\|_{L^2}^2)^{\frac{3r-6}{4r}}t^{-\frac{1}{2}}+C\|\nabla^3 d\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

从而,

$$\int_0^1\|\nabla u\|_{L^\infty}dt\leqslant C+C\Big(\int_0^1 t^{-\frac{2r}{r+6}}dt\Big)^{\frac{r+6}{4r}}\Big(\int_0^1 t\|\nabla u_t\|_{L^2}^2dt\Big)^{\frac{3r-6}{4r}}\leqslant C. \tag{2.64}$$

当 $t\in[1,T]$ 时, 由 (2.43) 和 (2.48) 可知, 对于 $r\in(3,6)$, 有

$$\int_1^T t^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 u\|_{L^r}dt\leqslant C\int_1^T t^{\frac{1}{2}}(\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^{\frac{6-r}{2r}}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{\frac{3r-6}{2r}}+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^{\frac{3}{r}}\|\nabla^3 d\|_{L^2}^{\frac{2r-3}{r}}+\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{6r-6}{r}})dt$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\sup_{t\in[1,T]}(t^{\frac52}\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2)^{\frac{6-r}{4r}}\left(\int_1^T t^{\frac52}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2dt\right)^{\frac{3r-6}{4r}}\left(\int_1^T t^{-\frac{3r}{6+r}}dt\right)^{\frac{r+6}{4r}}\\
&\quad+C\sup_{t\in[1,T]}[(t\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2)^{\frac{3}{2r}}(t^2\|\nabla^3 d\|_{L^2}^2)^{\frac{r-3}{2r}}]\left(\int_1^T t\|\nabla^3 d\|_{L^2}^2dt\right)^{\frac12}\left(\int_1^T t^{-\frac{2r-3}{r}}dt\right)^{\frac12}\\
&\quad+C\sup_{t\in[1,T]}(t^{\frac32}\|\nabla u\|_{L^2}^2)^{\frac{6r-6}{2r}}\int_1^T t^{-\frac{8r-9}{2r}}dt\\
&\leqslant C.
\end{aligned}
$$

于是, 利用 Sobolev 不等式和 (2.60), 由上式得

$$
\begin{aligned}
\int_1^T\|\nabla u\|_{L^\infty}dt&\leqslant C\int_1^T\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{2r-6}{5r-6}}\|\nabla^2 u\|_{L^r}^{\frac{3r}{5r-6}}dt\\
&\leqslant C\sup_{t\in[1,T]}(t^{\frac34}\|\nabla u\|_{L^2})^{\frac{2r-6}{5r-6}}\left(\int_1^T t^{\frac12}\|\nabla^2 u\|_{L^r}dt\right)^{\frac{3r}{5r-6}}\left(\int_1^T t^{-\frac{6r-9}{4r-12}}dt\right)^{\frac{2r-6}{5r-6}}\\
&\leqslant C.
\end{aligned}\tag{2.65}
$$

联合 (2.64) 和 (2.65), 得

$$
\int_0^T\|\nabla u\|_{L^\infty}dt\leqslant C.\tag{2.66}
$$

由方程 $(1.1)_1$ 可知,

$$
\frac{d}{dt}\|\nabla\rho\|_{L^2}\leqslant C\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla\rho\|_{L^2}.\tag{2.67}
$$

因此, 利用 (2.66) 和 Gronwall 不等式, 由 (2.67) 即得引理 2.6. □

我们还可进一步得到更高阶的导数估计.

引理 2.7 设命题 2.1 的条件成立, 则有

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}[t^{\frac72}(\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u\|_{L^6}^2+\|\nabla P\|_{L^6}^2)+t^3\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}^2]\\
&\quad+\int_0^T[t^3(\|\nabla d_{tt}\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 d_t\|_{L^2}^2)+t^{\frac72}(\|(\rho u_t)_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla P_t\|_{L^2}^2)]dt\\
&\quad\leqslant C.
\end{aligned}\tag{2.68}
$$

证明 首先, 利用 Sobolev 不等式和 Hölder 不等式, 经分部积分后, 由 (2.52) 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}^2+\|\nabla d_{tt}\|_{L^2}^2+\|\nabla^3 d_t\|_{L^2}^2\\
&\quad\leqslant C(\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\nabla^2 d\|_{H^1}^2+\|\nabla^2 d\|_{L^2}^4)(\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}^2+\|\nabla u_t\|_{L^2}^2)\\
&\quad\quad+C\|\nabla^2 d\|_{L^2}^2\|\nabla^3 d\|_{L^2}^2\|\nabla d_t\|_{L^2}^2.
\end{aligned}\tag{2.69}
$$

于是, (2.69) 两端同乘 t^3 并在 $[0,T]$ 上积分, 利用 (2.1)、引理 2.1 和 2.5, 由 Gronwall 不等式得

$$
\sup_{t\in[0,T]}(t^3\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^3(\|\nabla d_{tt}\|_{L^2}^2dt+\|\nabla^3 d_t\|_{L^2}^2)\leqslant C.\tag{2.70}
$$

方程 (2.45) 乘以 u_{tt} 并在 $\mathbb{R}^3$ 上分部积分, 得

$$
\frac12\frac{d}{dt}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho}u_{tt}\|_{L^2}^2=-\int\rho(u\cdot\nabla u_t+u_t\cdot\nabla u)\cdot u_{tt}dx-\int\rho_t(u_t+u\cdot\nabla u)\cdot u_{tt}dx
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int(\nabla d\odot\nabla d)_t:\nabla u_{tt}dx\\
&\triangleq\sum_{i=1}^{3}I_i,
\end{aligned}\tag{2.71}
$$

其中, 右端各项可估计如下. 首先,

$$
I_1\leqslant\varepsilon\|\sqrt{\rho}u_{tt}\|_{L^2}^2+C\|\nabla u\|_{H^1}^2\|\nabla u_t\|_{L^2}^2.\tag{2.72}
$$

其次, 由引理 2.6, 有

$$
\|\rho_t\|_{L^2\cap L^{3/2}}=\|u\cdot\nabla\rho\|_{L^2\cap L^{3/2}}\leqslant C\|\nabla\rho\|_{L^2}\|\nabla u\|_{H^1}\leqslant C\|\nabla u\|_{H^1}.\tag{2.73}
$$

于是, 利用 (2.18)、(2.73) 和 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式, 得

$$
\begin{aligned}
I_2=&-\frac{d}{dt}\int\rho_t\left(\frac12|u_t|^2+u\cdot\nabla u\cdot u_t\right)dx+\int(\rho u)_t(u_t\cdot\nabla u_t+\nabla(u\cdot\nabla u\cdot u_t))dx\\
&+\int\rho_t(u_t\cdot\nabla u\cdot u_t+u\cdot\nabla u_t\cdot u_t)dx\\
\leqslant&-\frac{d}{dt}\int\rho_t\left(\frac12|u_t|^2+u\cdot\nabla u\cdot u_t\right)dx+C\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^{3/2}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla^2u_t\|_{L^2}\\
&+C\|\rho_t\|_{L^2}\|\nabla u\|_{H^1}^3\|\nabla u_t\|_{L^2}+C\|\rho_t\|_{L^2}\|\nabla u\|_{H^1}^2\|\nabla^2u\|_{L^6}\|\nabla u_t\|_{L^2}\\
&+C\|\rho_t\|_{L^2}\|\nabla u\|_{H^1}^3\|\nabla^2u_t\|_{L^2}+C\|\nabla u\|_{H^1}^2\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C\|\rho_t\|_{L^2}\|\nabla u\|_{H^1}^3\|\nabla u_t\|_{L^2}\\
&+C\|\rho_t\|_{L^2}\|\nabla u\|_{H^1}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C\|\rho_t\|_{L^2}\|\nabla u\|_{H^1}\|\nabla u_t\|_{L^2}\|\nabla^2u_t\|_{L^2}\\
\leqslant&-\frac{d}{dt}\int(\rho u\cdot\nabla u_t\cdot u_t+\rho_tu\cdot\nabla u\cdot u_t)dx+\varepsilon\|\nabla^2u_t\|_{L^2}^2+C\|\nabla u\|_{H^1}^6+C\|\nabla u\|_{H^1}^8\\
&+C\|\nabla u\|_{H^1}^4\|\nabla^2u\|_{L^6}^2+C(\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\nabla u\|_{H^1}^4)\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^3\|\nabla u_t\|_{L^2}.
\end{aligned}\tag{2.74}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
I_3\leqslant&\frac{d}{dt}\int(\nabla d\odot\nabla d)_t:\nabla u_tdx+C(\|\nabla d_{tt}\|_{L^2}\|\nabla d\|_{L^\infty}+\|\nabla d_t\|_{L^3}\|\nabla d_t\|_{L^6})\|\nabla u_t\|_{L^2}\\
\leqslant&\frac{d}{dt}\int(\nabla d\odot\nabla d)_t:\nabla u_tdx+C(\|\nabla^3d\|_{L^2}+\|\nabla d_t\|_{L^2})\|\nabla u_t\|_{L^2}^2\\
&+C\|\nabla^2d\|_{L^2}\|\nabla d_{tt}\|_{L^2}^2+C\|\nabla^2d_t\|_{L^2}^3.
\end{aligned}\tag{2.75}
$$

利用 Stokes 方程正则性理论、Sobolev 不等式、Hölder 不等式、(2.73) 和 (2.18), 由 (2.45) 得

$$
\begin{aligned}
\|\nabla^2u_t\|_{L^2}+\|\nabla P_t\|_{L^2}\leqslant&C\|\rho u_{tt}\|_{L^2}+C\|\rho u\cdot\nabla u_t\|_{L^2}+C\|\rho_t(u_t+u\cdot\nabla u)\|_{L^2}\\
&+C\|\rho u_t\cdot\nabla u\|_{L^2}+C\|\mathrm{div}(\nabla d\odot\nabla d)_t\|_{L^2}\\
\leqslant&C\|\sqrt{\rho}u_{tt}\|_{L^2}+C\|u\|_{L^\infty}\|\nabla u_t\|_{L^2}+C\|\rho_t\|_{L^2}(\|u_t\|_{L^\infty}+\|u\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^\infty})\\
&+C\|u_t\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}+C\|\nabla d\|_{L^\infty}\|\nabla^2d_t\|_{L^2}+C\|\nabla^2d\|_{L^3}\|\nabla d_t\|_{L^6}\\
\leqslant&C\|\sqrt{\rho}u_{tt}\|_{L^2}+C\|\nabla u\|_{H^1}\|\nabla u_t\|_{L^2}+C\|\nabla u\|_{H^1}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla^2u_t\|_{L^2}^{1/2}\\
&+C\|\nabla u\|_{H^1}^{5/2}\|\nabla^2u\|_{L^6}^{1/2}+C\|\nabla^2d\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla^3d\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla^2d_t\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{2}\|\nabla^2 u_t\|_{L^2}+C\|\sqrt{\rho}u_{tt}\|_{L^2}+C\|\nabla u\|_{H^1}\|\nabla u_t\|_{L^2}+C\|\nabla u\|_{H^1}^2\|\nabla u_t\|_{L^2}\\
&\quad +C\|\nabla u\|_{H^1}^3+C\|\nabla u\|_{H^1}^2\|\nabla^2 u\|_{L^6}+C\|\nabla^2 d\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla^3 d\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}.
\end{aligned}\tag{2.76}
$$

将 (2.72)、(2.74) 和 (2.75) 代入 (2.71), 选取 $\varepsilon>0$ 充分小, 利用 (2.76), 有

$$
\frac{d}{dt}(\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+2\Psi(t))+\|\sqrt{\rho}u_{tt}\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u_t\|_{L^2}^2\leqslant \mathcal{H}(t),\tag{2.77}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\Psi(t)&\triangleq \int \rho u\cdot\nabla u_t\cdot u_t dx+\int \rho_t u\cdot\nabla u\cdot u_t dx-\int(\nabla d\odot\nabla d)_t:\nabla u_t dx,\\
\mathcal{H}(t)&\triangleq C\|\nabla u\|_{H^1}^6+C\|\nabla u\|_{H^1}^8+C\|\nabla u\|_{H^1}^4\|\nabla^2 u\|_{L^6}^2+C\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^3\|\nabla u_t\|_{L^2}\\
&\quad +C(\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\nabla u\|_{H^1}^4+\|\nabla^3 d\|_{L^2}+\|\nabla d_t\|_{L^2})\|\nabla u_t\|_{L^2}^2\\
&\quad +C\|\nabla^2 d\|_{L^2}\|\nabla d_{tt}\|_{L^2}^2+C\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}^3+C\|\nabla^2 d\|_{L^2}\|\nabla^3 d\|_{L^2}\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

由 (2.73), 有

$$
\begin{aligned}
|\Psi(t)|&\leqslant C(\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}\|\nabla u_t\|_{L^2}\|\nabla u\|_{H^1}+\|\rho_t\|_{L^2}\|\nabla u\|_{H^1}^2\|\nabla u_t\|_{L^2}+\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}\|\nabla d\|_{L^3}\|\nabla u_t\|_{L^2})\\
&\leqslant \frac{1}{4}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C(\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\nabla u\|_{H^1}^6+\|\nabla^2 d\|_{L^2}\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}^2).
\end{aligned}
$$

于是, 由引理 2.5、(2.70) 和 (2.58), 有

$$
\begin{aligned}
t^{\frac{7}{2}}|\Psi(t)|&\leqslant \frac{t^{\frac{7}{2}}}{4}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C(t^{\frac{5}{2}}\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2)(t\|\nabla u\|_{H^1}^2)\\
&\quad +C(t\|\nabla u\|_{H^1}^2)^2(t^{\frac{3}{2}}\|\nabla u\|_{H^1}^2)+C(t^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 d\|_{L^2})(t^3\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}^2)\\
&\leqslant \frac{t^{\frac{7}{2}}}{4}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C,
\end{aligned}\tag{2.78}
$$

且

$$
\begin{aligned}
\int_0^T t^{\frac{5}{2}}|\Psi(t)|dt&\leqslant C\int_0^T t^{\frac{5}{2}}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2dt+C\sup_{t\in[0,T]}(t^{\frac{5}{2}}\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2)\int_0^T\|\nabla u\|_{H^1}^2dt\\
&\quad +C\sup_{t\in[0,T]}(t\|\nabla u\|_{H^1}^2)^2\int_0^T t^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{H^1}^2dt\\
&\quad +C\sup_{t\in[0,T]}(t^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 d\|_{L^2})\int_0^T t^2\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}^2dt\\
&\leqslant C.
\end{aligned}\tag{2.79}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T t^{\frac{7}{2}}\mathcal{H}(t)dt&\leqslant C\sup_{t\in[0,T]}[(t^{\frac{3}{2}}\|\nabla u\|_{H^1}^2)^2+(t\|\nabla u\|_{H^1}^2)^3]\int_0^T t^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{H^1}^2dt\\
&\quad +C\sup_{t\in[0,T]}(t\|\nabla u\|_{H^1}^2)^2\int_0^T t^{\frac{3}{2}}(\|\nabla^2 u\|_{L^6}^2+\|\nabla u_t\|_{L^2}^2)dt\\
&\quad +C\sup_{t\in[0,T]}t(\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\nabla^3 d\|_{L^2}+\|\nabla d_t\|_{L^2})\int_0^T t^{\frac{5}{2}}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+C\sup_{t\in[0,T]}(t^{\frac{3}{2}}\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2}^2)\int_0^T(t^{\frac{3}{4}}\|\sqrt{\rho}u_t\|_{L^2})(t^{\frac{5}{4}}\|\nabla u_t\|_{L^2})dt\\
&+C\sup_{t\in[0,T]}t^{\frac{3}{2}}(\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}+\|\nabla^2 d\|_{L^2}\|\nabla^3 d\|_{L^2})\int_0^T t^2\|\nabla^2 d_t\|_{L^2}^2dt\\
&+C\sup_{t\in[0,T]}(t^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 d\|_{L^2})\int_0^t t^3\|\nabla d_{tt}\|_{L^2}^2dt\\
\leqslant{}& C. \qquad (2.80)
\end{aligned}
$$

利用 (2.78)–(2.80), 由 (2.77) 即得

$$
\sup_{t\in[0,T]}(t^{\frac{7}{2}}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2)+\int_0^T t^{\frac{7}{2}}(\|\sqrt{\rho}u_{tt}\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u_t\|_{L^2}^2)dt\leqslant C. \qquad (2.81)
$$

最后, 注意到 $\|(\rho u_t)_t\|_{L^2}^2\leqslant C\|\rho_t\|_{L^2}^2\|\nabla u_t\|_{L^2}\|\nabla^2 u_t\|_{L^2}+C\|\sqrt{\rho}u_{tt}\|_{L^2}^2$, 利用 (2.50)、(2.76)、(2.43)、(2.70) 和 (2.81), 类似上面的证明, 有

$$
\sup_{t\in[0,T]}t^{\frac{7}{2}}(\|\nabla^2 u\|_{L^6}^2+\|\nabla P\|_{L^6}^2)+\int_0^T t^{\frac{7}{2}}(\|(\rho u_t)_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla P_t\|_{L^2}^2)dt\leqslant C. \qquad (2.82)
$$

因此, 联合 (2.70)、(2.81) 和 (2.82) 即得 (2.68). 引理 2.7 证毕. □

3 定理 1.1 的证明

定理 1.1 的证明 首先, 类似文献 [4,31] 的证明可知, 存在 $T_0>0$, 使得 (1.1) 和 (1.2) 在 $\mathbb{R}^3\times(0,T_0]$ 上存在强解 (ρ,u,d,P). 令

$$
T^*\triangleq\sup\{T\mid(\rho,u,d,P)\text{ 是 (1.1) 和 (1.2) 在 }\mathbb{R}^3\times(0,T]\text{ 上的强解且满足 (2.1)}\}. \qquad (3.1)
$$

由 (2.1)、(2.18)、引理 2.6 和文献 [3, 引理 2.3] 可知, 对 $0<\tau<T\leqslant T^*$, 有

$$
\rho\in C([0,T];L^{\frac{3}{2}}\cap H^1). \qquad (3.2)
$$

根据嵌入定理, 有

$$
L^\infty([\tau,T];H^1\cap W^{1,6})\cap H^1([\tau,T],L^2)\hookrightarrow C([\tau,T];L^2)\cap C(\overline{\mathbb{R}^3}\times[\tau,T]).
$$

于是, 由 (2.43) 和 (2.68), 有

$$
\nabla u,P\in C([\tau,T];L^2)\cap C(\overline{\mathbb{R}^3}\times[\tau,T]). \qquad (3.3)
$$

类似地, 利用 (2.43) 和 (2.68), 得

$$
\nabla d\in C(0,T;L^2)\cap C(\tau,T;H^2). \qquad (3.4)
$$

下证 $T^*=\infty$. 事实上, 若不然, 则有 $0<T^*<\infty$. 由命题 2.1 可知, (2.2) 在 $T=T^*$ 时成立. 令

$$
(\rho_*,u_*,d_*)\triangleq(\rho,u,d)(x,T^*)=\lim_{t\to T^*}(\rho,u,d)(x,t),
$$

则由 (3.2) 和 (3.4), 得

$$\rho_* \in L^{\frac{3}{2}} \cap H^1, \quad u_* \in D^1_{0,\sigma}, \quad \nabla d_* \in H^1. \tag{3.5}$$

于是, 由 (2.2)、(3.5) 和局部存在性结果可知, 存在 $T^{**} > T^*$ 使得 (2.1) 在 $[0, T^{**}]$ 上成立. 这与 T^* 的定义 (3.1) 矛盾, 从而, $T^* = \infty$.

接下来证明

$$\nabla u, P \in C([\tau, T]; D^1 \cap D^{1,q}), \quad \forall\, q \in [2, 6). \tag{3.6}$$

事实上, 由 (2.43) 和 (2.68), 有

$$\rho u_t \in H^1(\tau, T; L^2) \hookrightarrow C([\tau, T]; L^2). \tag{3.7}$$

因此, 若记 $V \triangleq -\rho u_t - \rho u \cdot \nabla u - \mathrm{div}(\nabla d \odot \nabla d)$, 则 (u, P) 满足如下 Stokes 方程:

$$-\Delta u + \nabla P = V, \quad \mathrm{div} u = 0.$$

由 (3.7) 和 (3.2)–(3.4) 可得 $V \in C([\tau, T]; L^2)$. 于是, 由 Stokes 方程正则性理论即得 (3.6).

最后, (1.10) 和 (1.11) 中的衰减估计可由引理 2.5 和 2.7 直接得到. 定理 1.1 证毕. □

致谢 作者对审稿人的宝贵意见和建议表示衷心的感谢.

参考文献

1 Ericksen J L. Hydrostatic theory of liquid crystals. Arch Ration Mech Anal, 1962, 9: 371–378
2 Leslie F. Some constitutive equations for liquid crystals. Arch Ration Mech Anal, 1968, 28: 265–283
3 Lions P L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. I: Incompressible Models. Oxford: Oxford University Press, 1996
4 Lü B, Song S. On local strong solutions to the three-dimensional nonhomogeneous Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity and vacuum. Nonlinear Anal Real World Appl, 2019, 46: 58–81
5 He C, Li J, Lü B. On the Cauchy problem of 3D nonhomogeneous Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity and vacuum. ArXiv:1709.05608, 2017
6 Lü B, Shi X, Zhong X. Global existence and large time asymptotic behavior of strong solutions to the Cauchy problem of 2D density-dependent Navier-Stokes equations with vacuum. Nonlinearity, 2018, 31: 2617–2632
7 Huang X, Wang Y. Global strong solution of 3D inhomogeneous Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity. J Differential Equations, 2015, 259: 1606–1627
8 Zhang J. Global well-posedness for the incompressible Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity coefficient. J Differential Equations, 2015, 259: 1722–1742
9 Lei Z, Li D, Zhang X. Remarks of global wellposedness of liquid crystal flows and heat flows of harmonic maps in two dimensions. Proc Amer Math Soc, 2014, 142: 3801–3810
10 Wang C. Well-posedness for the heat flow of harmonic maps and the liquid crystal flow with rough initial data. Arch Ration Mech Anal, 2011, 200: 1–19
11 Lin F, Lin J, Wang C. Liquid crystal flows in two dimensions. Arch Ration Mech Anal, 2010, 197: 297–336
12 Hong M. Global existence of solutions of the simplified Ericksen-Leslie system in dimension two. Calc Var Partial Differential Equations, 2011, 40: 15–36
13 Lin F, Wang C. On the uniqueness of heat flow of harmonic maps and hydrodynamic flow of nematic liquid crystals. Chin Ann Math Ser B, 2010, 31: 921–938
14 Lin F, Wang C. Global existence of weak solutions of the nematic liquid crystal flow in dimension three. Comm Pure Appl Math, 2016, 69: 1532–1571
15 Li X, Wang D. Global solution to the incompressible flow of liquid crystals. J Differential Equations, 2012, 252: 745–767
16 Xu X, Zhang Z. Global regularity and uniqueness of weak solution for the 2-D liquid crystal flows. J Differential Equations, 2012, 252: 1169–1181

17 Lin F, Liu C. Nonparabolic dissipative systems modeling the flow of liquid crystals. Comm Pure Appl Math, 1995, 48: 501–537
18 Lin F, Liu C. Partial regularities of the nonlinear dissipative systems modeling the flow of liquid crystals. Discrete Contin Dyn Syst, 1996, 2: 1–23
19 Liu Q, Zhang T, Zhao J. Well-posedness for the 3D incompressible nematic liquid crystal system in the critical L^p framework. Discrete Contin Dyn Syst, 2016, 36: 371–402
20 Li J. Global strong and weak solutions to inhomogeneous nematic liquid crystal flow in two dimensions. Nonlinear Anal, 2014, 99: 80–94
21 Wen H, Ding S. Solutions of incompressible hydrodynamic flow of liquid crystals. Nonlinear Anal Real World Appl, 2011, 12: 1510–1531
22 Gao J, Tao Q, Yao Z. Strong solutions to the density-dependent incompressible nematic liquid crystal flows. J Differential Equations, 2016, 260: 3691–3748
23 Fan J, Li F, Nakamura G. Global strong solution to the 2D density-dependent liquid crystal flows with vacuum. Nonlinear Anal, 2014, 97: 185–190
24 Li J. Global strong solutions to the inhomogeneous incompressible nematic liquid crystal flow. Methods Appl Anal, 2015, 22: 201–220
25 Yu H, Zhang P. Global regularity to the 3D incompressible nematic liquid crystal flows with vacuum. Nonlinear Anal, 2018, 174: 209–222
26 Liu Y. Global strong solutions for the incompressible nematic liquid crystal flows with density-dependent viscosity coefficient. J Math Anal Appl, 2018, 462: 1381–1397
27 Liu Q, Liu S, Tan W, et al. Global well-posedness of the 2D nonhomogeneous incompressible nematic liquid crystal flows. J Differential Equations, 2016, 261: 6521–6569
28 Li L, Liu Q, Zhong X. Global strong solution to the two-dimensional density-dependent nematic liquid crystal flows with vacuum. Nonlinearity, 2017, 30: 4062–4088
29 Gong H, Li J, Xu C. Local well-posedness of strong solutions to density-dependent liquid crystal system. Nonlinear Anal, 2016, 147: 26–44
30 Ding S, Huang J, Xia F. Global existence of strong solutions for incompressible hydrodynamic flow of liquid crystals with vacuum. Filomat, 2013, 27: 1247–1257
31 Song S. On local strong solutions to the three-dimensional nonhomogeneous incompressible magnetohydrodynamic equations with density-dependent viscosity and vacuum. Z Angew Math Phys, 2018, 69: 23
32 Bergh J, Lofstrom J. Interpolation Spaces: An Introduction. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1976
33 Li J, Xu Z, Zhang J. Global existence of classical solutions with large oscillations and vacuum to the three-dimensional compressible nematic liquid crystal flows. J Math Fluid Mech, 2018, 20: 2105–2145

Global existence and large-time behavior of strong solutions to the Cauchy problem of the incompressible nematic liquid crystal flow

Boqiang Lyu, Sisi Song & Jianwen Zhang

Abstract This paper concerns the Cauchy problem of the 3D nonhomogeneous incompressible nematic liquid crystal flow. The global existence of strong solutions with large oscillations and vacuum is proved, provided the initial norm $\|u_0\|_{\dot{H}^\beta} + \|\nabla d_0\|_{\dot{H}^\beta}$ with $1/2 < \beta \leqslant 1$ is suitably small. Moreover, the large-time behavior is also studied and the decay rates are obtained.

Keywords nematic liquid crystal flow, nonhomogeneous incompressible fluids, global existence, vacuum

MSC(2010) 76N10, 35Q30, 35R35

doi: 10.1360/N012019-00036