

# 斜向缠绕复合材料悬臂管混合应力场及其剪力效应

张灿辉<sup>1,2\*</sup>, 李 安<sup>1</sup>

(1. 厦门大学建筑与土木工程学院, 福建 厦门 361005; 2. 厦门市交通基础设施智能管养工程技术研究中心, 福建 厦门 361005)

**摘要:** 提出一种求解一般斜向缠绕复合材料悬臂管的混合应力场, 包括正比于轴线坐标的比例应力部分和不随轴线变化的应力部分. 各分量中的比例应力部分可以利用纯弯曲公式由比例弯矩计算, 而不变应力部分可以结合所获得应力的梯度确定其环向三角函数形式, 根据这些三角函数刚好和比例应力部分的环向三角函数相反, 可得横截面上混合应力场的对称轴绕原点产生了转动, 这是一般斜绕复合材料悬臂管中剪力所引起的特殊效应. 数值算例对 5 根简单复合材料悬臂管进行了数值模拟, 结果验证了上述特殊剪力效应.

**关键词:** 复合材料悬臂管; 斜向缠绕角度; 混合应力场; 剪力效应

中图分类号: O 343.8

文献标志码: A

文章编号: 0438-0479(2019)05-0767-07

复合材料结构相对于其他材料结构具有质量轻、比刚度大、比强度高并且可设计的特点, 在实际工程中得到了广泛的应用<sup>[1-2]</sup>, 其中复合材料厚壁管逐渐成为主要承力构件, 在设计中需要准确计算<sup>[3]</sup>. 由于其管壁厚且曲率大, 经典层合板近似难以达到精度要求<sup>[4-5]</sup>; 又由于其单层薄、层数多, 精细有限元模拟十分困难<sup>[6]</sup>. 因此, 三维弹性理论求解十分迫切. 在弹性理论方面, Lekhnitskii<sup>[7]</sup> 最先采用双应力函数柔度法求解各向异性复合材料结构, 目前已经进行了广泛研究<sup>[8-11]</sup>. 复合材料管的拉伸、扭转和内外压等问题由于变形过程中轴线始终保持直线从而较为简单, 研究已经比较成熟<sup>[12-13]</sup>; 但弯曲问题由于变形过程中轴线不再保持直线从而较为复杂, 目前只有弯矩不随轴线变化的纯弯曲问题得到了较好的解决<sup>[11,14]</sup>. 悬臂管问题虽然实际工程中更为普遍, 但是由于弯矩随着轴线变化而更加复杂, 还没有得到很好的解决, 目前只有 Lekhnitskii<sup>[7]</sup> 较好地求解了  $90^\circ$  特殊横向缠绕的情况. 众所周知, 对于各向同性材料悬臂管, 其应力场比较单一, 可以采用纯弯曲公式直接计算正比于轴线坐标的弯曲正应力, 再用其他方法计算沿轴线不变的面外切应力<sup>[15]</sup>; 对于复合材料悬臂管, Lekhnitskii<sup>[7]</sup> 求解的  $90^\circ$  特殊横绕情况应力仍比较单一, 本质上依然采

用纯弯曲公式直接计算正比于轴线坐标的弯曲正应力以及面内应力, 再用其他方法计算沿轴线不变的面外切应力. Sarvestani 等<sup>[16-17]</sup> 采用分层理论 (layerwise theory, LWT)<sup>[18]</sup> 方法分析了  $\varphi \neq 90^\circ$  的一般斜绕复合材料悬臂管, 但所用位移场是由不随轴线变化的应变导出, 这显然与沿轴线变化的应力不一致, 因此还需要进一步研究.

本文中提出了求解一般缠绕复合材料悬臂管的混合应力场, 所有应力分量都同时包含正比于轴线坐标的应力部分和不随轴线坐标变化的应力部分, 其中比例应力部分可以采用纯弯曲公式计算, 而不随轴线变化的应力部分可以结合所获得应力的梯度确定其环向的三角函数形式, 并进一步指出横截面上混合应力场的对称轴绕原点产生转动是一般斜绕复合材料悬臂管剪力所引起的特殊效应.

## 1 复合材料悬臂管的混合应力场

图 1 所示为杆端作用集中力  $P$  的复合材料悬臂管  $[\varphi_1/\varphi_2 \cdots \varphi_k/\varphi_{k-1} \cdots \varphi_{N-1}/\varphi_N]$ , 其中  $\varphi_k (k = 1, 2, \dots, N)$  为每层的缠绕角. 复合材料管是一个高度各向异性的结构, 一般采用柱坐标系求解,  $r$  和  $\theta$  坐标轴所在平面

收稿日期: 2018-07-14 录用日期: 2018-11-26

\*通信作者: chzhang@xmu.edu.cn

引文格式: 张灿辉, 李安. 斜向缠绕复合材料悬臂管混合应力场及其剪力效应[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2019, 58(5): 767-773.

Citation: ZHANG C H, LI A. Mixed stress field for inclined winding composite cantilever tube as well as its shear force effect[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2019, 58(5): 767-773. (in Chinese)



<http://jxmu.xmu.edu.cn>

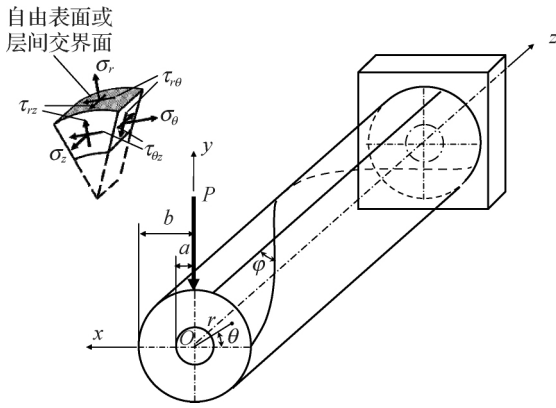


图1 复合材料悬臂管

Fig.1 Composite cantilever tube

与横截面平行,而  $z$  坐标轴为沿复合材料悬臂管的轴线,其应力应变关系如下<sup>[7]</sup>:

$$\begin{cases} \varepsilon_r(r, \theta, z) \\ \varepsilon_\theta(r, \theta, z) \\ \varepsilon_z(r, \theta, z) \\ \gamma_{\theta z}(r, \theta, z) \\ \gamma_{rz}(r, \theta, z) \\ \gamma_{r\theta}(r, \theta, z) \end{cases} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_r(r, \theta, z) \\ \sigma_\theta(r, \theta, z) \\ \sigma_z(r, \theta, z) \\ \tau_{\theta z}(r, \theta, z) \\ \tau_{rz}(r, \theta, z) \\ \tau_{r\theta}(r, \theta, z) \end{cases} \quad (1)$$

为了分析方便,引进如下减缩弹性常数:

$$\beta_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{3j}}{C_{33}} \quad (2)$$

对于纯弯曲复合材料管,由于弯矩不随轴线坐标  $z$  变化求解比较简单,其应力均为  $r$  和  $\theta$  的函数而与  $z$  无关.然而当杆端受集中力  $P$  作用时悬臂管在任意横截面上都包含弯矩和剪力,虽然剪力  $F_s = -P$  仍不随  $z$  变化,但是弯矩  $M_x = Pz$  正比于  $z$ . Lekhnitskii<sup>[7]</sup> 分析了  $90^\circ$  特殊横绕复合材料悬臂管.

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_r^I(r, \theta, z) = z\sigma'_r(r, \theta), \\ \sigma_\theta = \sigma_\theta^I(r, \theta, z) = z\sigma'_\theta(r, \theta), \\ \sigma_z = \sigma_z^I(r, \theta, z) = z\sigma'_z(r, \theta), \\ \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^I(r, \theta, z) = z\tau'_{r\theta}(r, \theta), \end{cases} \begin{cases} \tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}^{II}(r, \theta), \\ \tau_{rz} = \tau_{rz}^{II}(r, \theta). \end{cases} \quad (3)$$

其中,第 I 部分正比于轴线坐标  $z$  从而可以写成  $z$  乘以相应的应力梯度,第 II 部分仅为  $r$  和  $\theta$  的函数而与  $z$  无关.然而,对于  $\varphi \neq 90^\circ$  的一般斜向缠绕复合材料悬臂管,需要引进如下的混合应力场:

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_r^I(r, \theta, z) + \sigma_r^{II}(r, \theta) = z\sigma'_r(r, \theta) + \sigma_r^{II}(r, \theta), \\ \sigma_\theta = \sigma_\theta^I(r, \theta, z) + \sigma_\theta^{II}(r, \theta) = z\sigma'_\theta(r, \theta) + \sigma_\theta^{II}(r, \theta), \\ \sigma_z = \sigma_z^I(r, \theta, z) + \sigma_z^{II}(r, \theta) = z\sigma'_z(r, \theta) + \sigma_z^{II}(r, \theta), \\ \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^I(r, \theta, z) + \tau_{r\theta}^{II}(r, \theta) = z\tau'_{r\theta}(r, \theta) + \tau_{r\theta}^{II}(r, \theta), \\ \tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}^I(r, \theta, z) + \tau_{\theta z}^{II}(r, \theta) = \\ z\tau'_{\theta z}(r, \theta) + \tau_{\theta z}^{II}(r, \theta), \\ \tau_{rz} = \tau_{rz}^I(r, \theta, z) + \tau_{rz}^{II}(r, \theta) = \\ z\tau'_{rz}(r, \theta) + \tau_{rz}^{II}(r, \theta). \end{cases} \quad (4)$$

在混合应力场(4)中,由于所有应力分量都不再是单一的应力,而是同时包含了第 I 部分(正比于  $z$  的比例应力部分)和第 II 部分(不随  $z$  变化的应力部分),所以无法像各向同性材料悬臂管或者  $90^\circ$  特殊横绕复合材料悬臂管那样,应用纯弯曲公式直接求得任何完整的应力分量.

为了证明上述结论,采用反证法.假设仍可应用纯弯曲公式由比例弯矩直接计算得到弯曲正应力分量及其面内应力分量,换言之,这些应力分量仅包含正比于  $z$  的应力部分而不包含不随  $z$  变化的应力部分,如下:

$$\sigma_r^{II}(r, \theta) = \sigma_\theta^{II}(r, \theta) = \sigma_z^{II}(r, \theta) = \tau_{r\theta}^{II}(r, \theta) = 0. \quad (5)$$

为证明式(5)的不合理性,把式(4)代入平衡方程并考虑对于整个管长度  $0 \leq z \leq L$  都要满足,可以得到如下两个独立的平衡方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma'_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma'_r - \sigma'_\theta}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau'_{r\theta}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau'_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau'_{rz}}{r} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

和

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r^{II}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^{II}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r^{II} - \sigma_\theta^{II}}{r} + \tau'_{rz} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^{II}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta^{II}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}^{II}}{r} + \tau'_{\theta z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}^{II}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}^{II}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}^{II}}{r} + \sigma'_z = 0. \end{cases} \quad (7)$$

进一步把式(5)代入平衡方程(7)的前两个方程可得

$$\tau'_{rz} = \tau'_{\theta z} = 0. \quad (8)$$

式(8)表明,只要应力场(4)中的面内应力和弯曲正应力不包含与  $z$  无关的第 II 部分应力,则面外切应力也不可能包含正比于  $z$  的第 I 部分应力,此时所对应的应力场完全等价于 Lekhnitskii<sup>[7]</sup> 所考虑的  $90^\circ$  特殊横绕复合材料悬臂管的应力场(3),换言之,复合材料悬臂管问题将退化到  $90^\circ$  特殊横绕的情况.以上过程说

明,对于  $\varphi \neq 90^\circ$  的一般斜绕复合材料悬臂管,纯弯曲公式所得结果只是应力的一部分,因此不能像各向同性材料悬臂管或者  $90^\circ$  特殊横绕复合材料悬臂管那样,通过纯弯曲公式来计算单一的弯曲正应力分量以及面内应力分量.因此,对于  $\varphi \neq 90^\circ$  的一般斜绕复合材料悬臂管问题,所有应力分量必须同时包含比例应力部分和不随  $z$  变化的应力部分,即必须采用本文中假设如式(4)所示的混合应力场,这是一般斜绕  $\varphi \neq 90^\circ$  的复合材料悬臂管所特有的,也是它与  $90^\circ$  特殊横绕复合材料悬臂管的本质区别.

把式(4)代入式(1)可得一般斜绕复合材料悬臂管的混合应变场,显然该应变场与混合应力场(4)具有类似的形式.引进

$$\begin{cases} D'(r, \theta) = C_{13}\sigma'_r + C_{23}\sigma'_\theta + C_{33}\sigma'_z + C_{34}\tau'_{\theta z}, \\ D''(r, \theta) = C_{13}\sigma''_r + C_{23}\sigma''_\theta + C_{33}\sigma''_z + C_{34}\tau''_{\theta r}, \end{cases} \quad (9)$$

即将轴向应变表示为

$$\epsilon_z = zD'(r, \theta) + D''(r, \theta). \quad (10)$$

利用几何方程可以求得

$$\begin{cases} D'(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + B_1 r \sin \theta, \\ D''(r, \theta) = -A_2 r \cos \theta - B_2 r \sin \theta, \end{cases} \quad (11)$$

以及

$$\begin{cases} u_r = u_r^I + u_r^{II} + u'_r, \\ u_\theta = u_\theta^I + u_\theta^{II} + u'_\theta, \\ w = w^I + w^{II} + w', \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $u'_r, u'_\theta, w'$  为刚体位移,而  $u_r^I, u_\theta^I, w^I$  和  $u_r^{II}, u_\theta^{II}, w^{II}$  分别为第 I 部分和第 II 部分的应力所对应的位移

$$\begin{cases} u_r^I = -\frac{1}{6}z^3(A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) + zU'(r, \theta), \\ u_\theta^I = -\frac{1}{6}z^3(-A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta) + zV'(r, \theta), \\ w^I = \frac{1}{2}z^2(A_1 r \cos \theta + B_1 r \sin \theta) + zW'(r, \theta), \end{cases} \quad (13)$$

和

$$\begin{cases} u_r^{II} = \frac{1}{2}z^2(A_2 \cos \theta + B_2 \sin \theta) + U''(r, \theta), \\ u_\theta^{II} = \frac{1}{2}z^2(-A_2 \sin \theta + B_2 \cos \theta) + V''(r, \theta), \\ w^{II} = z(-A_2 r \cos \theta - B_2 r \sin \theta) + W''(r, \theta). \end{cases} \quad (14)$$

需要指出的是,由于复合材料悬臂管所受载荷不包含轴力和扭矩,所以式(11)~(14)中不考虑结构的拉伸和扭转变形.式(13)和(14)中的  $U', V', W'$  和

$U'', V'', W''$  与横截面的局部变形有关,需要满足如下方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial U'}{\partial r} = \beta_{11}\sigma'_r + \beta_{12}\sigma'_\theta + \beta_{14}\tau'_{\theta z} + \frac{C_{13}}{C_{33}}D', \\ \frac{\partial V'}{\partial r} + \frac{U'}{r} = \beta_{12}\sigma'_r + \beta_{22}\sigma'_\theta + \beta_{24}\tau'_{\theta z} + \frac{C_{23}}{C_{33}}D', \\ \frac{\partial V'}{\partial r} + \frac{\partial U'}{r\partial\theta} - \frac{V'}{r} = \beta_{56}\tau'_{rz} + \beta_{66}\tau'_{r\theta}, \\ \frac{\partial W'}{\partial r} = \beta_{55}\tau'_{rz} + \beta_{56}\tau'_{r\theta}, \\ \frac{\partial W'}{r\partial\theta} = \beta_{14}\sigma'_r + \beta_{24}\sigma'_\theta + \beta_{44}\tau'_{\theta z} + \frac{C_{34}}{C_{33}}D', \end{cases} \quad (15)$$

和

$$\begin{cases} \frac{\partial U''}{\partial r} = \beta_{11}\sigma''_r + \beta_{12}\sigma''_\theta + \beta_{14}\tau''_{\theta r} + \frac{C_{13}}{C_{33}}D'', \\ \frac{\partial V''}{\partial r} + \frac{U''}{r} = \beta_{12}\sigma''_r + \beta_{22}\sigma''_\theta + \beta_{24}\tau''_{\theta r} + \frac{C_{23}}{C_{33}}D'', \\ \frac{\partial V''}{\partial r} + \frac{\partial U''}{r\partial\theta} - \frac{V''}{r} = \beta_{56}\tau''_{rz} + \beta_{66}\tau''_{r\theta}, \\ \frac{\partial W''}{\partial r} = \beta_{55}\tau''_{rz} + \beta_{56}\tau''_{r\theta} - U'(r, \theta), \\ \frac{\partial W''}{r\partial\theta} = \beta_{14}\sigma''_r + \beta_{24}\sigma''_\theta + \beta_{44}\tau''_{\theta r} + \frac{C_{34}}{C_{33}}D'' - V'(r, \theta). \end{cases} \quad (16)$$

Sarvestani 等<sup>[16-17]</sup>在其分析复合材料悬臂管问题的 LWT 方法<sup>[18]</sup>中,推导位移场所用应变场仅是  $r$  和  $\theta$  的函数而与  $z$  无关,显然不可能对应正比于  $z$  的弯矩及其应力,也与 Lekhnitskii<sup>[7]</sup>在  $90^\circ$  特殊横绕悬臂管分析中正比于  $z$  的应力结果相矛盾.

## 2 应力场特征及其对称性分析

在复合材料管悬臂管的分析中,除了物理方程和平衡方程以及几何方程之外,需要满足内外自由表面上的应力边界条件和各层之间交界面上的应力和位移连续性条件,同时还要满足杆端的载荷条件.考察沿着轴线  $z$  的应力梯度所满足的平衡方程(6)及其位移梯度所满足的几何方程(15),发现它们完全等价于纯弯曲复合材料管问题.进一步把本文中所假设的应力场(4)代入复合材料悬臂管的自由边界条件和层间连续性条件以及杆端载荷条件,考虑对于整个管长度  $0 \leq z \leq L$  都要满足,可得应力梯度和位移梯度在相应自由表面上需要满足的边界条件也完全等价于在弯矩梯度作用下的纯弯曲复合材料管问题.因此,可以直接利用统一参数法<sup>[14]</sup>求解,所得应力梯度可以表示为

$$\begin{cases} \sigma'_r(r, \theta) = S'_r(r)\kappa'_x \sin \theta, \\ \sigma'_\theta(r, \theta) = S'_\theta(r)\kappa'_x \sin \theta, \\ \sigma'_z(r, \theta) = S'_z(r)\kappa'_x \sin \theta, \\ \tau'_{r\theta}(r, \theta) = S'_{r\theta}(r)\kappa'_x \cos \theta, \\ \tau'_{rz}(r, \theta) = S'_{rz}(r)\kappa'_x \cos \theta, \\ \tau'_{\theta z}(r, \theta) = S'_{\theta z}(r)\kappa'_x \sin \theta, \end{cases} \quad (17)$$

其中,  $S'_r(r), S'_\theta(r), S'_z(r), S'_{r\theta}(r), S'_{rz}(r), S'_{\theta z}(r)$  为典型应力梯度, 需通过内外表面的自由边界条件和层间连续条件求得. 把式(17)代入复合材料纯弯曲管的杆端载荷条件可得

$$A_1 = 0, B_1 = \kappa'_x = \frac{M'_x}{(EI)} = \frac{P \times 1}{(EI)}. \quad (18)$$

式中:  $P$  为悬臂管的杆端所作用集中力;  $M'_x$  为弯矩梯度, 即单位长度的弯矩;  $EI$  为等效抗弯刚度.

利用应力场可以进一步得到相应的局部位移梯度及其位移, 把式(17)代入式(15)进行积分可以得到第 I 部分的局部位移梯度为

$$\begin{cases} U'(r, \theta) = G'_1(r)\kappa'_x \sin \theta, \\ V'(r, \theta) = G'_2(r)\kappa'_x \cos \theta, \\ W'(r, \theta) = G'_3(r)\kappa'_x \cos \theta, \end{cases} \quad (19)$$

其中,  $G'_1(r), G'_2(r), G'_3(r)$  为典型位移梯度.

由于应力梯度可以通过式(17)采用弯矩梯度求得, 根据线性问题的性质, 只要在式(8)中把弯矩梯度换成比例弯矩即可得到第 I 部分比例应力

$$\begin{cases} \sigma^I_r(r, \theta, z) = zS'_r(r)\kappa'_x \sin \theta, \\ \sigma^I_\theta(r, \theta, z) = zS'_\theta(r)\kappa'_x \sin \theta, \\ \sigma^I_z(r, \theta, z) = zS'_z(r)\kappa'_x \sin \theta, \\ \tau^I_{r\theta}(r, \theta, z) = zS'_{r\theta}(r)\kappa'_x \cos \theta, \\ \tau^I_{rz}(r, \theta, z) = zS'_{rz}(r)\kappa'_x \cos \theta, \\ \tau^I_{\theta z}(r, \theta, z) = zS'_{\theta z}(r)\kappa'_x \sin \theta. \end{cases} \quad (20)$$

这种通过复合材料纯弯曲管在常弯矩梯度作用下的公式计算对应悬臂管在比例弯矩作用下的比例应力, 与各向同性材料悬臂管以及  $90^\circ$  特殊横绕悬臂管类似. 然而需要指出的是, 一般斜绕复合材料悬臂管所得比例应力只是各应力分量中的第 I 部分, 这不同于各向同性材料悬臂管所得弯曲正应力是该分量的全部(该分量只有第 I 部分比例应力而没有第 II 部分常应力), 也不同于  $90^\circ$  特殊横绕悬臂管所得弯曲正应力及其面内应力是这些分量的全部(这些分量也只有第 I 部分比例应力而没有第 II 部分常应力). 由式(20)可见, 复合材料悬臂管混合应力场中第 I 部分应力的所有分量沿环向只是单纯正弦或者余弦函数, 由于

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \quad (21)$$

所以在横截面上第 I 部分比例应力分布是关于  $x$  轴

和关于  $y$  轴对称的.

为了考察本文中所提出混合应力场(4)中与  $z$  无关的第 II 部分常应力, 把式(17)代入式(7)可得

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma^II_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau^II_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma^II_r - \sigma^II_\theta}{r} = -S'_{rz}\kappa'_x \cos \theta, \\ \frac{\partial \tau^II_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma^II_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau^II_{r\theta}}{r} = -S'_{\theta z}\kappa'_x \sin \theta, \\ \frac{\partial \tau^II_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau^II_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau^II_{rz}}{r} = -S'_z\kappa'_x \sin \theta. \end{cases} \quad (22)$$

一般而言, 虽然式(22)所对应的齐次微分方程的通解仍可以采用双应力函数求解, 但是对于满足该非齐次微分方程的特解很难构造, 因此理论求解式(22)比较困难, 需要结合其他方法如 LWT 方法<sup>[18]</sup> 进行求解. 然而, 根据其非齐次项的已知环向三角函数形式可以进行变量分离, 获得第 II 部分常应力解答的以下形式:

$$\begin{cases} \sigma^II_r(r, \theta) = S^II_r(r) \cos \theta, \\ \sigma^II_\theta(r, \theta) = S^II_\theta(r) \cos \theta, \\ \sigma^II_z(r, \theta) = S^II_z(r) \cos \theta, \\ \tau^II_{r\theta}(r, \theta) = S^II_{r\theta}(r) \sin \theta, \\ \tau^II_{rz}(r, \theta) = S^II_{rz}(r) \sin \theta, \\ \tau^II_{\theta z}(r, \theta) = S^II_{\theta z}(r) \cos \theta. \end{cases} \quad (23)$$

利用式(23)可以进一步考察第 II 部分位移的情况. 首先, 由式(9)和(11)可得

$$\sigma^II_z(r, \theta) = \frac{1}{C_{33}}(-A_2 r \cos \theta - B_2 r \sin \theta - C_{13} \sigma^II_r - C_{23} \sigma^II_\theta - C_{34} \tau^II_{r\theta}). \quad (24)$$

把式(23)代入式(24), 对比方程两边可得

$$B_2 = 0, \quad (25)$$

$$\text{即 } D^II = -A_2 r \cos \theta. \quad (26)$$

然后, 把式(23), (26)和(19)代入式(16)可得

$$\begin{cases} \frac{\partial U^II}{\partial r} = (\beta_{11} S^II_r + \beta_{12} S^II_\theta + \beta_{14} S^II_{\theta z} - A_2 r \frac{C_{13}}{C_{33}}) \cos \theta, \\ \frac{\partial V^II}{r \partial \theta} + \frac{U^II}{r} = (\beta_{12} S^II_r + \beta_{22} S^II_\theta + \beta_{24} S^II_{\theta z} - A_2 r \frac{C_{23}}{C_{33}}) \cos \theta, \\ \frac{\partial V^II}{\partial r} + \frac{\partial U^II}{r \partial \theta} - \frac{V^II}{r} = (\beta_{56} S^II_{rz} + \beta_{66} S^II_{r\theta}) \sin \theta, \\ \frac{\partial W^II}{\partial r} = (\beta_{55} S^II_{rz} + \beta_{56} S^II_{r\theta} - G'_1 \kappa'_x) \sin \theta, \\ \frac{\partial W^II}{r \partial \theta} = (\beta_{14} S^II_r + \beta_{24} S^II_\theta + \beta_{14} S^II_{\theta z} - A_2 r \cos \theta \frac{C_{34}}{C_{33}} - G'_2 \kappa'_x) \cos \theta. \end{cases} \quad (27)$$

由式(27)发现第 II 部分局部位移也具有如下变量可分离的形式:

$$\begin{cases} U^{\text{II}}(r, \theta) = G_1^{\text{II}}(r) \cos \theta, \\ V^{\text{II}}(r, \theta) = G_2^{\text{II}}(r) \sin \theta, \\ W^{\text{II}}(r, \theta) = G_3^{\text{II}}(r) \sin \theta. \end{cases} \quad (28)$$

如前所述,复合材料悬臂管混合应力场(4)的第 I 部分比例应力的分布是关于  $x$  轴和  $y$  轴对称的;由式(23)可见第 II 部分常应力只是单纯的正弦或者余弦函数,其分布也是关于  $x$  轴和  $y$  轴对称的. 因此,在  $90^\circ$  特殊横绕复合材料悬臂管的应力场(3)中,弯曲正应力及其面内应力分量只包含第 I 部分比例应力,而面外切应力分量只包含第 II 部分常应力,即不同应力分量只各自包含第 I 部分或第 II 部分应力而没有彼此混合,因此各分量都分别关于  $x$  轴和  $y$  轴对称. 把式(17)和(23)代入式(4)可得

$$\begin{cases} \sigma_r = zS'_r(r)\kappa'_x \sin \theta + S_r^{\text{II}}(r) \cos \theta, \\ \sigma_\theta = zS'_\theta(r)\kappa'_x \sin \theta + S_\theta^{\text{II}}(r) \cos \theta, \\ \sigma_z = zS'_z(r)\kappa'_x \sin \theta + S_z^{\text{II}}(r) \sin \theta, \\ \tau_{r\theta} = zS'_{r\theta}(r)\kappa'_x \cos \theta + S_{r\theta}^{\text{II}}(r) \sin \theta, \\ \tau_{\theta z} = zS'_{\theta z}(r)\kappa'_x \sin \theta + S_{\theta z}^{\text{II}}(r) \cos \theta, \\ \tau_{rz} = zS'_{rz}(r)\kappa'_x \cos \theta + S_{rz}^{\text{II}}(r) \sin \theta. \end{cases} \quad (29)$$

由式(29)可见,在一般斜绕复合材料悬臂管混合应力场(4)中,由于第 I 部分比例应力和第 II 部分常应力的环向三角函数形式刚好正弦和余弦相反,所以所有分量都同时包含了正弦和余弦函数,因此其对称性产生了变化,在横截面上应力分布的对称轴不再是  $x$  轴和  $y$  轴. 由式(29)可得

$$\begin{cases} \sigma_r = S_r(r) \sin(\theta + \alpha_r), \\ \sigma_\theta = S_\theta(r) \sin(\theta + \alpha_\theta), \\ \sigma_z = S_z(r) \sin(\theta + \alpha_z), \end{cases} \begin{cases} \tau_{r\theta} = S_{r\theta}(r) \sin(\theta - \alpha_{r\theta}), \\ \tau_{\theta z} = S_{\theta z}(r) \sin(\theta + \alpha_{\theta z}), \\ \tau_{rz} = S_{rz}(r) \sin(\theta - \alpha_{rz}), \end{cases} \quad (30)$$

其中

$$\begin{cases} S_r = \sqrt{(zS'_r\kappa'_x)^2 + (S_r^{\text{II}})^2}, \\ S_\theta = \sqrt{(zS'_\theta\kappa'_x)^2 + (S_\theta^{\text{II}})^2}, \\ S_z = \sqrt{(zS'_z\kappa'_x)^2 + (S_z^{\text{II}})^2}, \\ S_{r\theta} = \sqrt{(zS'_{r\theta}\kappa'_x)^2 + (S_{r\theta}^{\text{II}})^2}, \\ S_{\theta z} = \sqrt{(zS'_{\theta z}\kappa'_x)^2 + (S_{\theta z}^{\text{II}})^2}, \\ S_{rz} = \sqrt{(zS'_{rz}\kappa'_x)^2 + (S_{rz}^{\text{II}})^2}, \end{cases} \quad (31)$$

和

$$\begin{aligned} \tan \alpha_r &= \frac{S_r^{\text{II}}}{zS'_r\kappa'_x}, \tan \alpha_\theta = \frac{S_\theta^{\text{II}}}{zS'_\theta\kappa'_x}, \tan \alpha_z = \frac{S_z^{\text{II}}}{zS'_z\kappa'_x}, \\ \tan \alpha_{r\theta} &= \frac{zS'_{r\theta}\kappa'_x}{S_{r\theta}^{\text{II}}}, \tan \alpha_{\theta z} = \frac{S_{\theta z}^{\text{II}}}{zS'_{\theta z}\kappa'_x}, \end{aligned}$$

$$\tan \alpha_{rz} = \frac{zS'_{rz}\kappa'_x}{S_{rz}^{\text{II}}}. \quad (32)$$

式(30)表明复合材料悬臂管的应力虽然仍保持对称性,但是对称轴绕原点有不同程度的转动. 如前所述,一般斜绕复合材料纯弯曲管和  $90^\circ$  特殊横绕复合材料悬臂管的应力分布都关于  $x$  轴和  $y$  轴对称,可见应力分布对称轴绕原点转动是一般斜绕复合材料悬臂管中剪力作用引起的特殊效应,且需要同时满足纤维斜绕和剪力作用才会产生这种效应. 对于一般斜绕复合材料纯弯曲管,由于没有剪力作用所以没有剪力效应;而对于特殊横绕复合材料悬臂管,由于没有纤维斜绕所以也没有剪力效应.

需要指出的是,虽然本文中只是从理论上证明了斜绕复合材料悬臂管必然存在这种剪力效应,需要结合其他方法(如 LWT 方法)进行定量求解,但是本研究为进一步简化 LWT 方法求解创造了一定的基础:不仅提供了比文献[16-17]更完整的位移公式(12),而且可以利用纯弯曲公式得到第 I 部分比例应力及其位移,从而减少了大量待定系数和待定函数;同时由于分离了第 II 部分常应力(23)及其对应位移(28)中环向三角函数,从而避免了传统 LWT 方法中利用特征分析<sup>[16-17]</sup>确定环向近似函数所存在的截断误差.

### 3 数值算例

数值算例包括 5 根复合材料悬臂管,左端固支而右端作用集中力  $P = 1$  kN, 其长度为 600 mm, 内半径 25.0 mm, 外半径 39.0 mm, 从内向外的铺层分别为  $[90^\circ]$ 、 $[30^\circ]$ 、 $[90^\circ/0^\circ]$ 、 $[90^\circ/45^\circ]$  和  $[30^\circ/45^\circ]$ . 复合材料层采用工程中常见的碳纤维增强复合材料,其材料参数如表 1 所示.

表 1 复合材料参数(石墨/聚合物)

名称	数值
$E_{11}$ /GPa	155
$(E_{22} = E_{33})$ /GPa	12.1
$G_{23}$ /GPa	3.2
$(G_{13} = G_{12})$ /GPa	4.4
$\nu_{23}$	0.458
$\nu_{13} = \nu_{12}$	0.248

对简单的复合材料悬臂管算例进行精细有限元数值模拟,模拟中采用六面体单元,总单元个数为 21 600,

<http://jxmu.xmu.edu.cn>

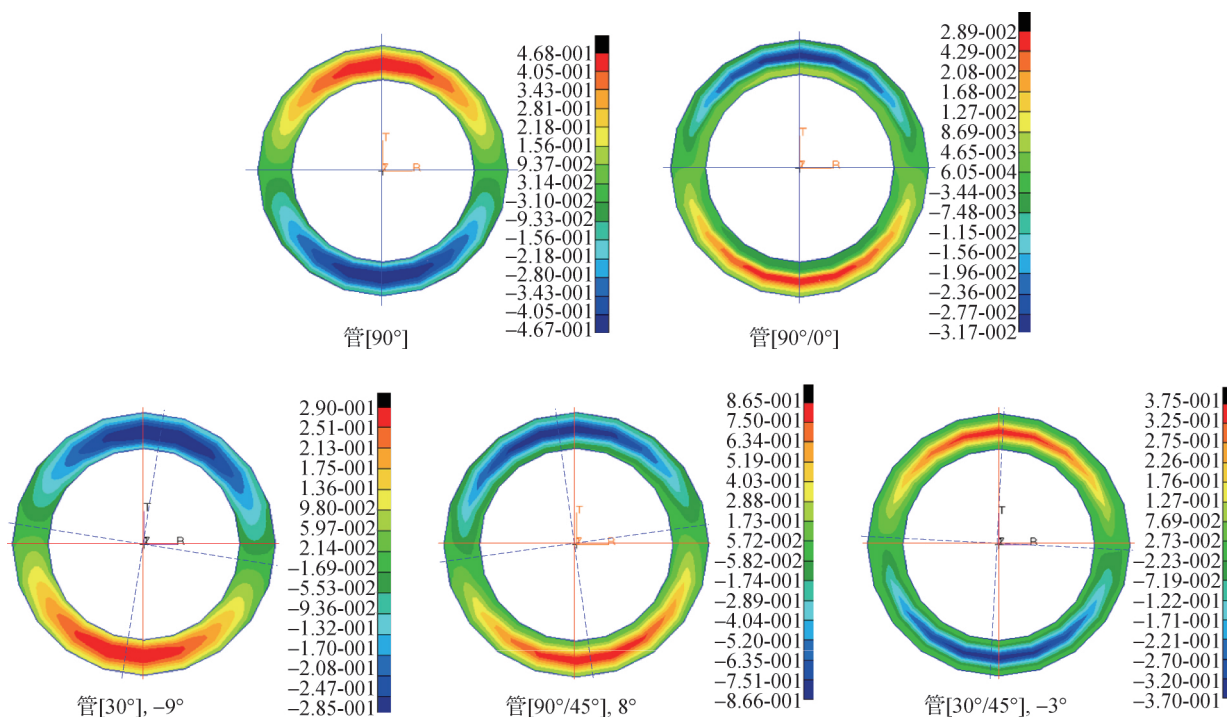


图 2 复合材料悬壁管横截面上应力  $\sigma_r$  的分布规律 ( $z = 300 \text{ mm}$ )

Fig. 2 Stress  $\sigma_r$  in cross section for composite cantilever tube ( $z = 300 \text{ mm}$ )

总节点个数为 26 030.5 根简单复合材料悬壁管横截面上应力分布规律如图 2 所示,管[90°]和管[90°/0°]由于是 90°特殊横绕及其组合(0°特殊顺轴铺层实际上相当于另一种正交各向异性材料的 90°横绕),所以对对称轴仍然是  $x$  轴和  $y$  轴,但管[30°]、管[90°/45°]和[30°/45°]由于包含了其他缠绕角的铺层,所以对对称轴绕原点产生了不同程度的旋转,验证了斜绕复合材料悬壁管确实存在剪力效应。

#### 4 结 论

本文中提出了求解一般斜绕复合材料悬壁管的混合应力场,同时包含正比于轴线坐标的比例应力部分和不随轴线变化的不变应力部分.其中比例应力部分可以利用纯弯曲公式由比例弯矩直接获得,而不变应力部分可以结合所得应力的梯度确定其环向三角函数形式.由于和比例应力部分的环向三角函数形式刚好相反,横截面上的混合应力场虽仍然保持对称但对称轴绕原点产生了转动,这是一般斜绕复合材料悬壁管中剪力所引起的特殊效应。

#### 参考文献:

[1] 肖加余,曾竟成,彭超义.碳纤维复合材料作用主承力结构在航空航天上的应用[C]//第十三届全国复合材料学术会议.成都:[s. n.],2004:1258-1264.

<http://jxmu.xmu.edu.cn>

[2] 杜善义.先进复合材料与航空航天[J].复合材料学报,2007,13(4):1-12.

[3] 钟天麟,周祝林.碳纤维复合材料圆管性能研究[J].纤维复合材料,2003(3):1-6.

[4] 易洪雷,周祝林,吴妙生.复合材料圆管弯曲强度研究[J].纤维复合材料,2008(2):1-10.

[5] SHADMEHRI F, DERISI B, HOA S V. On bending stiffness of composite tubes[J]. Composite Structures, 2011,93(9):2173-2179.

[6] DERISI B, HOA SV, XU D, et al. Mechanical behavior of Carbon/PEKK thermoplastic composite tube under bending load [J]. Journal of Thermoplastic Composite Materials, 2011, 29: 29-49.

[7] LEKHNITSKII S G. Theory of elasticity of an anisotropic body[M]. Moscow: Mir Publishers, 1981: 314-351.

[8] TING T C T. Anisotropic elasticity, theory and applications [M]. Oxford: Oxford University Press, 1996: 118-163.

[9] JOLICOEUR C, CARDOU A. Analytical solution for bending of coaxial orthotropic cylinders [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1994, 120(12): 2556-2574.

[10] GEUCHY AHMAD M I, HOA S V. Flexural stiffness of thick walled composite tubes [J]. Composite Structures, 2016, 149(1): 125-133.

[11] ZHANG C H, HOA S V. A limit-based approach to the

- stress analysis of cylindrically orthotropic composite cylinders( $0/90$ ) subjected to pure bending[J]. *Composite Structures*, 2012, 94(8):2610-2619.
- [12] 张亮泉,李惠,欧进萍. 纤维缠绕 CFRP 圆管强度特性分析及试验研究[J]. *玻璃钢/复合材料*, 2010(3):3-6.
- [13] TARN J Q, WANG Y M. Laminated composite tubes under extension, torsion, bending, shearing and pressuring: a state space approach[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(50/51):9053-9075.
- [14] ZHANG C H, HOA S V, LIU P. A method to analyze the pure bending of tubes of cylindrically anisotropic layers with arbitrary angles including  $0^\circ$  or  $90^\circ$  [J]. *Composite Structures*, 2014, 109:57-67.
- [15] TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. *Theory of elasticity* [M]. New York: McGraw-Hill, 1970:354-359.
- [16] SARVESTANI H Y, HOA S V, HOJJATI M. Stress analysis of thick orthotropic cantilever tubes under transverse loading[J]. *Advanced Composite Materials*, 2017, 26(4):335-362.
- [17] SARVESTANI H Y, HOA S V, HOJJATI M. Effects of shear loading on stress distributions at sections in thick composite tubes[J]. *Composite Structures*, 2016, 140(15):433-445.
- [18] ROBBINS JR D H, REDDY J N. Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 36(4):655-677.
- [15] TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. *Theory of elasticity*

## Mixed stress field for inclined winding composite cantilever tube as well as its shear force effect

ZHANG Canhui<sup>1,2\*</sup>, LI An<sup>1</sup>

(1. School of Architecture and Civil Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China; 2. Xiamen Engineering Technology Center for Intelligent Maintenance of Infrastructures, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** A mixed-stress field is introduced for the inclined winding composite cantilever tube, including a proportional stress part in direct ratio to the axis coordinate and an invariant stress part along the axis. The proportional stress part in every component can be obtained by the proportional moment using the pure bending formulae. Furthermore, with the gradient of obtained stresses, the trigonometric function in circumferential direction for the invariant stress part can be determined. Since these trigonometric functions are opposite to those for the proportional stress part, the axis of symmetry of the mixed stress field in the cross section rotates around the origin. This special effect results from the shear force in the inclined winding composite cantilever tubes. Five simple composite cantilever tubes are simulated in numerical examples and results obtained in this study demonstrate the above shear force effect.

**Keywords:** composite cantilever tube; inclined winding angle; mixed stress field; shear force effect