

薄板分析的线性基梯度光滑伽辽金无网格法<sup>1)</sup>邓立克 王东东<sup>2)</sup> 王家睿 吴俊超

(厦门大学土木工程系, 厦门 361005)

(厦门市交通基础设施智能管养工程技术研究中心, 厦门 361005)

**摘要** 薄板问题的控制方程为四阶微分方程, 因而当采用伽辽金法进行分析时, 形函数需要满足  $C^1$  连续性要求, 且至少使用二次基函数才能保证方法的收敛性. 无网格形函数虽然易于满足  $C^1$  连续性要求, 但由于不是多项式, 其二阶导数的计算较为复杂耗时, 同时也对刚度矩阵的数值积分提出了更高的要求. 本文提出了一种薄板分析的线性基梯度光滑伽辽金无网格法, 该方法的基础是线性基无网格形函数的光滑梯度. 在梯度光滑构造的理论框架内, 无网格形函数的二阶光滑梯度可以表示为形函数一阶梯度的线性组合, 因而可以提高形函数二阶梯度的计算效率. 分析表明, 线性基无网格形函数的光滑梯度不仅满足其固有的线性梯度一致性条件, 还满足本属于二次基函数对应的额外高阶一致性条件, 因此能够恰当地运用到薄板结构的伽辽金分析. 此外, 插值误差分析也很好验证了线性基无网格光滑梯度的收敛特性. 算例结果进一步表明, 线性基梯度光滑伽辽金无网格法的收敛率与传统二次基伽辽金无网格法相当, 但精度更高, 同时刚度矩阵所需的高斯积分点数明显减少.

**关键词** 伽辽金无网格法, 线性基函数, 薄板问题, 光滑梯度, 一致性条件

中图分类号: O242.2 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-19-004

A GRADIENT SMOOTHING GALERKIN MESHFREE METHOD FOR THIN PLATE ANALYSIS WITH LINEAR BASIS FUNCTION<sup>1)</sup>Deng Like Wang Dongdong<sup>2)</sup> Wang Jiarui Wu Junchao

(Department of Civil Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

(Xiamen Engineering Technology Center for Intelligent Maintenance of Infrastructures, Xiamen 361005, China)

**Abstract** The fourth order governing equation of thin plate necessitates the employment of  $C^1$  continuous shape functions with a minimum degree of two in a Galerkin formulation. Thus at least a quadratic basis function should be utilized in meshfree approximation to enable the Galerkin meshfree thin plate analysis. However, due to the rational nature of reproducing kernel meshfree shape functions, the computation of the second order derivatives of meshfree shape functions is quite complex and costly, which also requires expensive high order Gauss quadrature rules to properly integrate the stiffness matrix. In this work, a gradient smoothing Galerkin meshfree method with particular reference to the linear basis function is proposed for thin plate analysis. The foundation of the present development is the construction of smoothed meshfree gradients with linear basis function, where the second order smoothed gradients are expressed as combinations of standard first order gradients and the computational burden is remarkably reduced. Furthermore, it is shown that the

2019-01-02 收稿, 2019-01-31 录用, 2019-02-18 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11772280, 11472233).

2) 王东东, 教授, 主要研究方向: 计算力学与结构工程. E-mail: ddwang@xmu.edu.cn

**引用格式:** 邓立克, 王东东, 王家睿, 吴俊超. 薄板分析的线性基梯度光滑伽辽金无网格法. 力学学报, 2019, 51(3): 690-702

Deng Like, Wang Dongdong, Wang Jiarui, Wu Junchao. A gradient smoothing Galerkin meshfree method for thin plate analysis with linear basis function. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(3): 690-702

smoothed meshfree gradients with linear basis function satisfy both the linear and quadratic gradient consistency conditions and consequently they are adequate for thin plate analysis in the context of Galerkin formulation. An interpolation error study is given as well to validate the higher order consistency conditions and applicability of smoothed meshfree gradients for Galerkin analysis of thin plates. It turns out that efficient lower order Gauss integration rules now work well for the proposed method. Numerical results demonstrate that compared with the conventional Galerkin meshfree method with quadratic basis function, the proposed gradient smoothing Galerkin meshfree method with linear basis function yields similar convergence rates, but with better accuracy and less integration points for stiffness computation.

**Key words** Galerkin meshfree method, linear basis function, thin plate, gradient smoothing, consistency condition

## 引言

薄板结构具有广泛的工程应用,但其四阶控制方程给计算分析带来了相当的困难,即使采用基于弱形式的伽辽金法进行分析,也需要具有  $C^1$  连续性的二次基函数构造的形函数才能保证数值解的收敛性<sup>[1]</sup>. 受限于单元离散,有限元法仍然缺乏构造  $C^1$  形函数的简单有效的方法<sup>[1-2]</sup>. 无网格法基于节点离散,可以不依赖单元建立任意高阶连续的形函数,为薄板分析提供了一种行之有效的方法<sup>[3-7]</sup>. 例如, Krysl 和 Belytschko<sup>[8]</sup> 首先采用伽辽金无网格法分析了薄板结构, Liu 和 Chen<sup>[9]</sup> 基于伽辽金无网格法进行了薄板振动分析, 龙述尧和 Atluri<sup>[10]</sup> 将局部彼得罗夫伽辽金无网格法推广至薄板分析, Lu 等<sup>[11]</sup> 提出了形函数具有插值特性的再生核有限元薄板分析方法, 刘岩等<sup>[12]</sup> 提出了一种薄板分析的 Hermite 径向点插值无网格法, 马丽红等<sup>[13]</sup> 结合区间分析法和无网格法对 Winkler 地基薄板进行了分析. 为了使无网格形函数具有插值特性, Bui 和 Nguyen<sup>[14]</sup> 应用移动 Kriging 无网格法研究了薄板振动问题, Cui 等<sup>[15]</sup> 提出了一种薄板分析的光滑点插值方法. Milan 等<sup>[16]</sup> 研究了形函数具有凸近似特性的薄板壳结构最大熵无网格分析方法, Zhang 等<sup>[17]</sup> 基于准凸的等几何无网格耦合方法分析了含裂缝薄板振动问题. Wang 等<sup>[18-22]</sup> 系统地发展了薄板分析的 Hermite 再生核无网格法和配套的稳定子域高效数值积分方法, Tanaka 等<sup>[23]</sup> 采用 Hermite 再生核无网格法进行了薄板的几何非线性分析. 然而值得注意的是, 无网格形函数通常不是多项式, 例如常用的移动最小二乘和再生核无网格形函数<sup>[3,5]</sup>, 因此其导数计算, 尤其是高阶导数的计算较为复杂耗时, 同时也给刚度矩阵的数值积分带来了很大困难<sup>[24-26]</sup>. 已有工作虽然针对薄板问题提出了一些高效数值积分方法<sup>[18]</sup>, 但发展更为简洁高效的无网格法仍然是一个值得关

注的重要问题.

另一方面, 文献 [27] 提出了一种简洁的无网格形函数光滑梯度构造方法, 并将其用于构造二阶问题的配点型无网格法, 相应计算结果表明该方法可以有效解决奇数次基函数无网格配点法的收敛率下降问题, 实现超收敛计算. 在此基础上, 本文着重讨论了线性基无网格形函数的一阶和二阶光滑梯度, 分析了其对应的标准线性一致性条件和额外的二阶一致性条件. 因此, 仅采用线性基无网格形函数便可实现通常需要采用二次基函数才能满足的二阶一致性条件, 所以相关的二阶光滑梯度能够直接用于薄板问题的伽辽金无网格分析, 构造一种薄板分析的线性基伽辽金无网格法. 文中通过对比分析表明, 线性基无网格形函数的光滑梯度有效降低了二次基无网格形函数的标准梯度的震荡性, 因此采用较少的积分点便可保证计算精度. 例如, 二次基伽辽金无网格法通常需要采用  $6 \times 6$  的高斯积分才能达到理论收敛率, 而本文的线性基梯度光滑无网格法仅用  $2 \times 2$  的高斯积分便可以得到与之相当的结果. 文中通过系列梁和板算例验证了线性基梯度光滑无网格法的精度和收敛性.

## 1 薄板控制方程

考虑图 1 所示的薄板结构, 其中面为  $\Omega$ , 边界为  $\Gamma$ , 厚度为  $t$ . 中面  $\Omega$  内一点  $\mathbf{x}$  处的挠度为  $w(\mathbf{x})$ , 其相应的转角向量  $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})$  和曲率向量  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})$  为

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

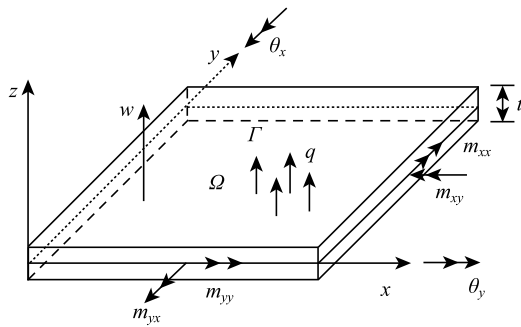


图1 薄板问题示意图

Fig. 1 Sign convention of thin plate

对于线弹性材料, 应力矩向量  $m$  和曲率向量  $\kappa$  之间的本构关系为

$$m = -D\kappa \tag{3}$$

其中

$$m = \{m_{xx} \ m_{yy} \ m_{xy}\}^T \tag{4}$$

$$D = \bar{D} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \tag{5}$$

式(5)中,  $E$  和  $\nu$  分别为材料的杨氏模量和泊松比,  $\bar{D}$  为薄板的抗弯刚度.

由于无网格形函数一般不具有插值特性, 这里采用拉格朗日乘子的方法施加挠度和转角边界条件, 相应的薄板问题等效积分弱形式为

$$\int_{\Omega} \delta \kappa^T m d\Omega + \int_{\Omega} \delta w q d\Omega + \int_{\Gamma^w} \delta \lambda^w (w - \bar{w}) d\Gamma + \int_{\Gamma^w} \lambda^w \delta w d\Gamma + \int_{\Gamma^\theta} \delta \lambda^\theta (\theta_n - \bar{\theta}_n) d\Gamma + \int_{\Gamma^\theta} \lambda^\theta \delta \theta_n d\Gamma = 0 \tag{6}$$

其中,  $q$  是作用在薄板上的竖向载荷,  $\Gamma^w$  和  $\Gamma^\theta$  是强制挠度和转角边界,  $\theta_n = w_{,n}$  是沿着边界外法向  $n$  的转角,  $\bar{w}$  和  $\bar{\theta}_n$  是给定的挠度和转角,  $\lambda^w$  和  $\lambda^\theta$  是对应于挠度和转角的拉格朗日乘子. 由于式(6)中的  $\kappa$  项包含挠度的二阶导数, 因此至少需要采用二次基函数才能保证伽辽金方法的收敛性<sup>[1]</sup>.

## 2 无网格形函数

本文采用移动最小二乘或再生核无网格形函数, 当采用多项式基函数时, 这两种无网格形函数其实是等同的. 因此, 不失一般性, 这里以再生核函

数为例说明无网格形函数的构造特点. 对于薄板问题, 一般将薄板中面  $\Omega$  及其边界  $\Gamma$  离散为一组节点  $\{x_I\}_{I=1}^{NP}$ , 每个节点  $x_I$  对应一个形函数  $\Psi_I(x)$ . 根据再生核无网格近似理论<sup>[5]</sup>, 薄板挠度  $w(x)$  对应的无网格近似解  $w^h(x)$  可表示为

$$w^h(x) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(x) d_I \tag{7}$$

其中,  $d_I$  为与节点  $x_I$  对应的节点系数. 无网格形函数  $\Psi_I(x)$  具有如下形式

$$\Psi_I(x) = p^T(x_I - x) c(x) \phi_s(x_I - x) \tag{8}$$

式中,  $c(x)$  是依赖于位置  $x$  的一个待定系数向量.  $p(x)$  为  $p$  阶单项式基向量, 即

$$p(x) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^p, \dots, y^p\}^T \tag{9}$$

式中  $p$  为基函数的阶次.  $\phi_s(x_I - x)$  为附属于节点  $x_I$  的核函数, 具有紧支性, 下标  $s$  表示其影响域:  $supp(x_I)$ . 本文采用如下的五次 B 样条核函数

$$\varphi_s(r) = \begin{cases} (3-3r)^5 - 6(2-3r)^5 + 15(1-3r)^5, & r \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5!} \begin{cases} (3-3r)^5 - 6(2-3r)^5, & \frac{1}{3} < r \leq \frac{2}{3} \\ (3-3r)^5, & \frac{2}{3} < r \leq 1 \end{cases} \\ 0, & r > 1 \end{cases} \tag{10}$$

其中,  $r$  表示相邻节点之间的相对距离. 二维核函数可以方便地通过两个一维核函数的张量积形式进行构造

$$\phi_s(x - x_I) = \phi_{s_x}(r_x) \phi_{s_y}(r_y) \tag{11}$$

其中,  $r_x = \|x - x_I\|/s_x$ ,  $r_y = \|y - y_I\|/s_y$ ,  $s_x$  和  $s_y$  分别代表了  $x$  和  $y$  方向的影响域大小.

为了保证无网格近似的一致性 or 完备性, 形函数  $\Psi_I(x)$  需要满足下列的再生条件或一致性条件

$$\sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(x) p(x_I) = p(x) \tag{12}$$

或

$$\sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(x) p(x_I - x) = p(0) \tag{13}$$

将式 (8) 代入式 (13) 中有

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (14)$$

式中  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  称作矩量矩阵

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{p}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})\phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (15)$$

由式 (14) 有  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x})$ , 将其代入式 (8) 可得无网格形函数

$$\Psi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{0})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})\phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (16)$$

对式 (16) 直接微分, 无网格形函数的一阶和二阶导数可以表示为

$$\Psi_{I,i}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{0})\{\mathbf{A}_{,i}^{-1}\mathbf{p}_I\phi_{sI} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}_{I,i}\phi_{sI} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}_I\phi_{sI,i}\} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{I,ij}(\mathbf{x}) = & \mathbf{p}^T(\mathbf{0})\{\mathbf{A}_{,ij}^{-1}\mathbf{p}_I\phi_{sI} + \mathbf{A}_{,i}^{-1}\mathbf{p}_{I,j}\phi_{sI} + \\ & \mathbf{A}_{,j}^{-1}\mathbf{p}_{I,i}\phi_{sI} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}_{I,ij}\phi_{sI} + \\ & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}_{I,i}\phi_{sI,j} + \mathbf{A}_{,j}^{-1}\mathbf{p}_I\phi_{sI,i} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}_{I,j}\phi_{sI,i} + \\ & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}_I\phi_{sI,ij}\} \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $\mathbf{p}_I = \mathbf{p}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})$ ,  $\phi_{sI} = \phi_s(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})$ , 下标中逗号为微分算子,  $\{i, j\} = \{x, y\}$ .  $\mathbf{A}_{,i}^{-1}$  和  $\mathbf{A}_{,ij}^{-1}$  为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_{,i}^{-1} &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,i}\mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{A}_{,ij}^{-1} &= -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_{,ij}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}_{,i}\mathbf{A}_{,j}^{-1} + \mathbf{A}_{,j}\mathbf{A}_{,i}^{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

由式 (16)~ 式 (19) 可以看出, 由于无网格形函数为有理式, 其导数计算相当繁琐复杂, 且计算效率较低. 此外, 无网格形函数导数的复杂特点也直接导致了通常需要采用高阶的高斯积分才能得到收敛的结果, 进一步降低了计算效率.

注意到式 (12) 定义的无网格形函数的一致性或完备条件是无网格法收敛性的保证, 对其直接微分可得到无网格形函数标准梯度应满足的一致性条件. 具体到二维二次基函数, 相应的一阶和二阶梯度的一致性条件为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,x}(\mathbf{x})y_I &= \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,y}(\mathbf{x})x_I = 0 \\ \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,x}(\mathbf{x})x_I &= \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,y}(\mathbf{x})y_I = 1 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,xx}(\mathbf{x})x_I^2 &= \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,yy}(\mathbf{x})y_I^2 = 2 \\ \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,xy}(\mathbf{x})x_Iy_I &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

值得注意的是, 要使得式 (21) 成立, 无网格形函数至少要采用二次基函数.

### 3 无网格梯度光滑方法及一致性条件

#### 3.1 无网格形函数的光滑梯度

根据梯度光滑理论<sup>[24]</sup>, 无网格形函数的光滑梯度, 记作  $\tilde{\Psi}_{I,i}(\mathbf{x})$ , 可以表示成

$$\tilde{\Psi}_{I,i}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \vartheta(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Psi_{I,i}(\mathbf{y})d\Omega \quad (22)$$

其中  $\vartheta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  是光滑函数. 方便起见, 计算中可以选择无网格形函数作为光滑函数<sup>[27-29]</sup>, 即  $\vartheta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J) = \Psi_J(\mathbf{x})$ . 因而, 在离散情况下, 无网格形函数的一阶光滑导数, 记作  $\tilde{\Psi}_{I,i}(\mathbf{x})$ , 可以表示为如下形式

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{I,i}(\mathbf{x}) &= \sum_{J=1}^{NP} \vartheta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J)\Psi_{I,i}(\mathbf{x}_J) = \\ & \sum_{J=1}^{NP} \Psi_J(\mathbf{x})\Psi_{I,i}(\mathbf{x}_J) \end{aligned} \quad (23)$$

对式 (23) 直接微分可得无网格形函数的二阶光滑梯度

$$\tilde{\Psi}_{I,ij}(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^{NP} \Psi_{J,j}(\mathbf{x})\Psi_{I,i}(\mathbf{x}_J) \quad (24)$$

图 2 和图 3 分别对比了一维和二维无网格形函数的标准梯度与光滑梯度之间的区别, 其中标准梯度采用的是二次基函数 ( $p = 2$ ), 光滑梯度采用的是线性基函数 ( $p = 1$ ). 从图中可以看出, 线性基无网格形函数的光滑梯度甚至比采用二次基函数的无网格形函数的标准梯度更加光滑, 震荡性更小. 同时, 经过梯度光滑构造, 形函数光滑梯度的影响域出现叠加效应, 其影响域大于标准梯度的影响域. 因此, 基于梯度光滑方法, 采用线性基函数仍然可以得到光滑的二阶梯度.



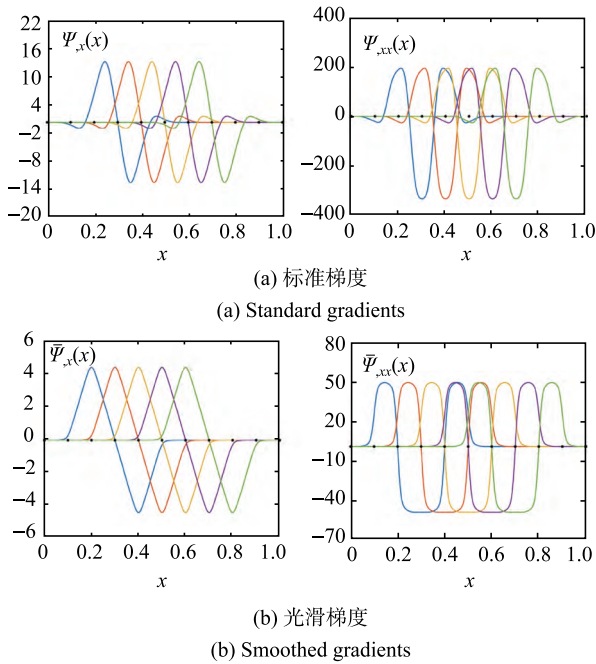


图2 一维无网格形函数标准梯度与光滑梯度对比

Fig. 2 Comparison of 1D standard and smoothed meshfree gradients

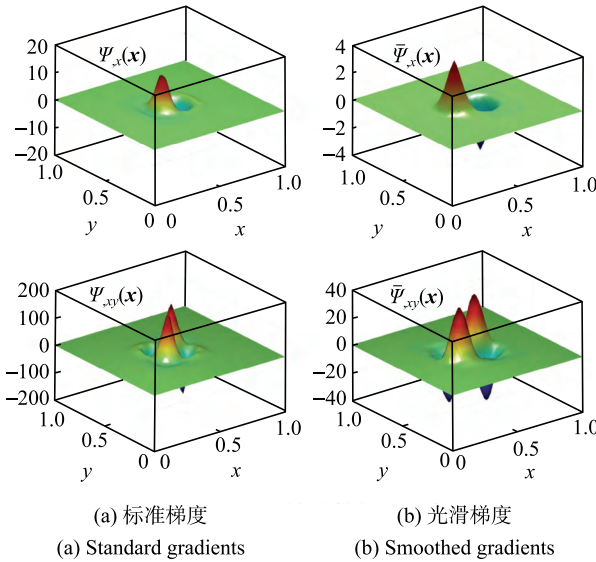


图3 二维无网格形函数标准梯度与光滑梯度对比

Fig. 3 Comparison of 2D standard and smoothed meshfree gradients

3.2 线性基形函数光滑梯度的线性一致性条件

如前所述, 形函数的一致性条件是收敛性的保证. 因此这里首先证明线性基无网格形函数的光滑梯度满足类似于式 (20) 给出的无网格形函数标准梯度对应的常规一致性条件. 对于一阶光滑梯度, 有

$$\sum_{I=1}^{NP} \bar{\Psi}_{I,y}(x) x_I = \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \Psi_J(x) \Psi_{I,y}(x_J) x_I =$$

$$\sum_{J=1}^{NP} \Psi_J(x) \underbrace{\sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,y}(x_J) x_I}_{=0} = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^{NP} \bar{\Psi}_{I,x}(x) x_I &= \sum_{I=1}^{NP} \sum_{J=1}^{NP} \Psi_J(x) \Psi_{I,x}(x_J) x_I = \\ &= \sum_{J=1}^{NP} \Psi_J(x) \underbrace{\sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,x}(x_J) x_I}_{=1} = \\ &= \sum_{J=1}^{NP} \Psi_J(x) = 1 \end{aligned} \quad (26)$$

式 (25) 和式 (26) 的推导使用了式 (12). 同理可得

$$\sum_{I=1}^{NP} \bar{\Psi}_{I,x}(x) y_I = 0, \quad \sum_{I=1}^{NP} \bar{\Psi}_{I,y}(x) y_I = 1 \quad (27)$$

图 4(a) 验证了在一维情况下, 线性基无网格形

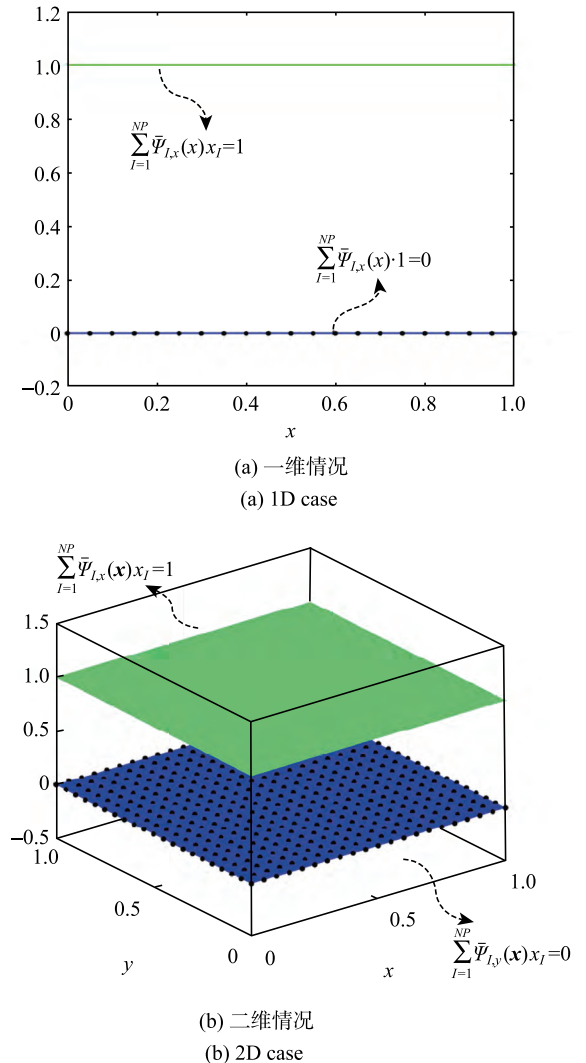


图4 线性基无网格形函数一阶光滑梯度的常规一致性条件  
Fig. 4 Standard consistency conditions for the first order smoothed meshfree gradients with linear basis function

函数光滑梯度的常规一致性条件. 可以看出, 线性基无网格形函数的一阶光滑梯度是满足式 (26) 和式 (27) 给出的一致性条件. 与一维情况类似, 图 4(b) 验证了二维线性基无网格形函数的一阶光滑梯度满足一致性条件.

### 3.3 线性基形函数光滑梯度的二阶一致性条件

除了常规的线性一致性条件, 这里进一步证明, 在均布离散条件下, 线性基函数无网格形函数的二阶光滑梯度还满足二次基函数无网格形函数标准二阶梯度对应的式 (21) 给出的一致性条件.

首先考虑式 (21) 的第一个条件, 即

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^{NP} \bar{\Psi}_{I,xx}(x)x_I^2 &= \sum_{J=1}^{NP} \Psi_{J,x}(x) \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,x}(x_J)(x_I - x_J + x_J)^2 = \\ &= \sum_{J=1}^{NP} \Psi_{J,x}(x)x_J^2 + \underbrace{\sum_{J=1}^{NP} \Psi_{J,x}(x)x_J}_{=0} + \\ &+ 2 \sum_{J=1}^{NP} \Psi_{J,x}(x)x_J \underbrace{\sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,x}(x_J)x_{IJ}}_{=1} + \\ &+ \sum_{J=1}^{NP} \Psi_{J,x}(x) \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,x}(x_J)x_{IJ}^2 = \\ &= 2 \sum_{J=1}^{NP} \Psi_{J,x}(x)x_J + \\ &+ \sum_{J=1}^{NP} \Psi_{J,x}(x) \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,x}(x_J)x_{IJ}^2 = \\ &= 2 + \sum_{J=1}^{NP} \Psi_{J,x}(x) \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,x}(x_J)x_{IJ}^2 \end{aligned} \quad (28)$$

其中,  $x_{IJ} = x_I - x_J$ . 此外, 注意到对于均布无网格离散, 形函数周期性分布的特点使得如下关系成立

$$\sum_{I=1}^{NP} \Psi_{I,x}(x_J)x_{IJ}^2 = \sum_{K=1}^{NP} \Psi_{K,x}(x_L)x_{KL}^2 \quad (29)$$

因而, 式 (28) 可以进一步简化为

$$\sum_{I=1}^{NP} \bar{\Psi}_{I,xx}(x)x_I^2 = 2 + \sum_{K=1}^{NP} \Psi_{K,x}(x_L)x_{KL}^2 \underbrace{\sum_{J=1}^{NP} \Psi_{J,x}(x)}_{=0} = 2 \quad (30)$$

于是有

$$\sum_{I=1}^{NP} \bar{\Psi}_{I,xx}(x)x_I^2 = 2 \quad (31)$$

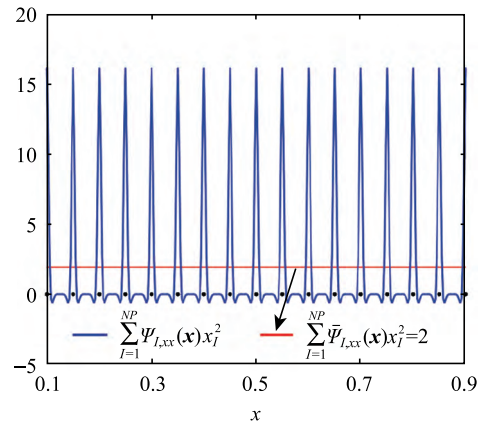
按照类似的方法, 可以进一步证明

$$\sum_{I=1}^{NP} \bar{\Psi}_{I,yy}(x)y_I^2 = 2 \quad (32)$$

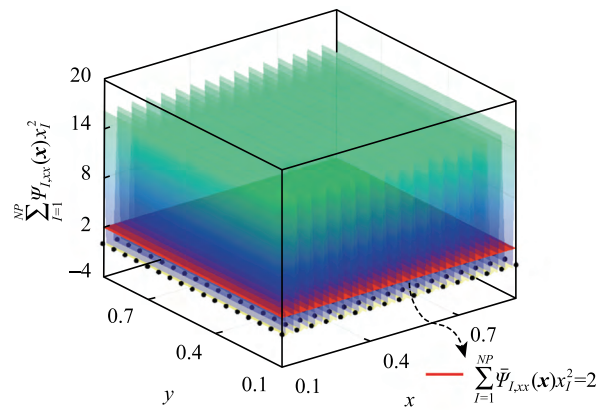
$$\sum_{I=1}^{NP} \bar{\Psi}_{I,xy}(x)x_I y_I = 1 \quad (33)$$

值得注意的是, 式 (31)~ 式 (33) 的证明过程并不依赖于式 (21) 所给出的二阶一致性条件. 因此, 在仅采用线性基函数构造无网格形函数的情况下, 通过梯度光滑的方法可以构造出满足二阶一致性条件的二阶光滑梯度. 而在标准无网格形函数的范畴, 只有采用二次基函数的无网格形函数才能满足二阶一致性条件, 所以这里将式 (31)~ 式 (33) 称之为额外高阶一致性条件.

图 5(a) 和图 5(b) 分别验证了一维和二维线性基无网格形函数二阶光滑梯度满足的额外高阶一致性



(a) 一维情况  
(a) 1D case



(b) 二维情况  
(b) 2D case

图 5 线性基无网格形函数二阶光滑梯度的二阶一致性条件  
Fig. 5 Extra quadratic consistency conditions for the second order smoothed meshfree gradients with linear basis function

条件. 为了便于对比, 图中也给出了线性基无网格形函数标准二阶梯度对应的二阶一致性条件. 由图可知, 线性基无网格形函数的二阶光滑梯度可以满足额外高阶一致性条件, 而线性基无网格形函数的标准二阶梯度则不满足. 这为构造薄板分析的线性基无网格梯度光滑伽辽金方法提供了必要条件.

### 3.4 插值误差分析

为了更深入研究线性基无网格形函数光滑梯度, 本小节根据下面的误差形式对其进行插值精度分析

$$L_2 \text{error} = \left( \int_{\Omega} (w - w^h)^2 d\Omega \right)^{1/2} / \left( \int_{\Omega} w^2 d\Omega \right)^{1/2} \quad (34)$$

$$H_{s_1} \text{error} = \left( \int_{\Omega} (w_{,i} - w_{,i}^h)^2 d\Omega \right)^{1/2} / \left( \int_{\Omega} w_{,i}^2 d\Omega \right)^{1/2} \quad (35)$$

$$H_{s_2} \text{error} = \left( \int_{\Omega} (w_{,ij} - w_{,ij}^h)^2 d\Omega \right)^{1/2} / \left( \int_{\Omega} w_{,ij}^2 d\Omega \right)^{1/2} \quad (36)$$

其中,  $w$ ,  $w_{,i}$  和  $w_{,ij}$  及  $w^h$ ,  $w_{,i}^h$  和  $w_{,ij}^h$  分别表示精确解及无网格近似解, 这些变量分别对应于薄板结构的挠度、转角和曲率.

在插值精度分析中, 考虑如下的一维和二维挠度函数

$$w(x) = e^x + \frac{1}{6}(1 - e)x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \left( \frac{4}{3} - \frac{5}{6}e \right)x - 1 \quad (37)$$

$$w(\mathbf{x}) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (38)$$

另一方面,  $w^h$  由式 (7) 给出,  $w_{,i}^h$  和  $w_{,ij}^h$  分别为

$$w_{,i}^h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{NP} \bar{\Psi}_{l,i}(\mathbf{x}) d_l \quad (39)$$

$$w_{,ij}^h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{NP} \bar{\Psi}_{l,ij}(\mathbf{x}) d_l \quad (40)$$

式中  $d_l = w(\mathbf{x}_l)$ .

图 6 给出了一维和二维线性基无网格形函数及其光滑梯度的插值误差. 从图中可见, 一维和二维线性基无网格形函数光滑梯度的插值误差有类似的收敛特性, 其中对应  $L_2$ ,  $H_{s_1}$  和  $H_{s_2}$  三种不同度量形式的收敛率分别为 2, 2, 1, 具有与二次基无网格形函数标准梯度相同的收敛特性, 但无网格形函数所采用的基函数阶次降低了一次.

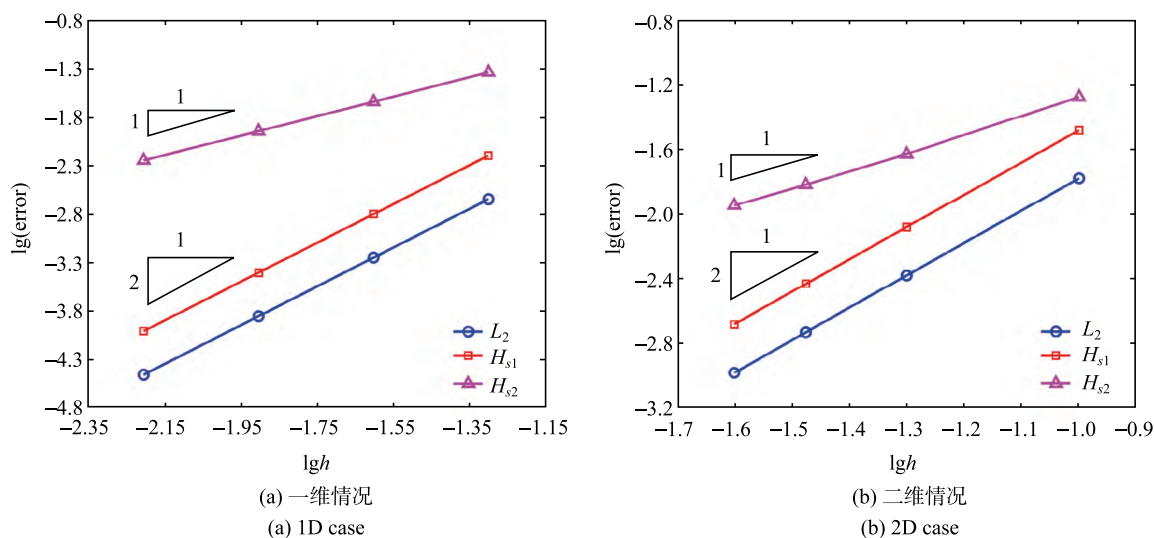


图 6 线性基无网格形函数及光滑梯度的插值误差

Fig. 6 Comparison of interpolation errors of smoothed meshfree gradients with linear basis function

## 4 薄板分析的线性基梯度光滑伽辽金无网格法离散方程

将式 (7)~式 (39) 及式 (40) 的无网格离散代入薄板问题的等效积分弱形式 (6), 可得线性基梯度光滑伽辽金无网格法的离散方程

$$\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (41)$$

其中

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G}^{wT} & \mathbf{G}^{\theta T} \\ \mathbf{G}^w & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\bar{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\lambda}^w \\ \boldsymbol{\lambda}^\theta \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q}^w \\ \mathbf{q}^\theta \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{I,J=1}^{NP} [K_{IJ}], \mathbf{G}^w = \mathbf{A}_{I,K=1}^{NP,NW} [G_{IK}^w], \mathbf{G}^\theta = \mathbf{A}_{I,L=1}^{NP,NR} [G_{IL}^\theta] \quad (44)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}_{I=1}^{NP} [d_I], \boldsymbol{\lambda}^w = \mathbf{A}_{K=1}^{NW} [\lambda_K^w], \boldsymbol{\lambda}^\theta = \mathbf{A}_{L=1}^{NR} [\lambda_L^\theta] \quad (45)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}_{I=1}^{NP} [f_I], \mathbf{q}^w = \mathbf{A}_{K=1}^{NW} [q_K^w], \mathbf{q}^\theta = \mathbf{A}_{L=1}^{NR} [q_L^\theta] \quad (46)$$

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}_I^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}_J d\Omega, \bar{\mathbf{B}}_I = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\Psi}_{I,xx} \\ \bar{\Psi}_{I,yy} \\ \bar{\Psi}_{I,xy} + \bar{\Psi}_{I,yx} \end{array} \right\} \quad (47)$$

$$G_{IK}^w = - \int_{\Gamma^w} \Psi_I N_K d\Gamma, G_{IL}^\theta = - \int_{\Gamma^\theta} \bar{\Psi}_{I,n} N_L d\Gamma \quad (48)$$

$$f_I = \int_{\Omega} \Psi_I q d\Omega \quad (49)$$

$$q_K^w = - \int_{\Gamma^w} N_K \bar{w} d\Gamma, q_L^\theta = - \int_{\Gamma^\theta} N_L \bar{\theta}_n d\Gamma \quad (50)$$

式中,  $\mathbf{A}$  为组装算子<sup>[2]</sup>,  $NW$  和  $NR$  分别表示边界  $\Gamma^w$  和  $\Gamma^\theta$  的无网格离散点个数,  $N_K$  为对应于拉格朗日乘子离散的一维拉格朗日插值函数. 对于刚度矩阵, 本文采用高斯积分进行计算. 例如, 二维情况下, 对于线性基梯度光滑伽辽金方法, 采用  $2 \times 2$  的高斯积分方案, 而对于标准的二次基伽辽金方法则使用  $6 \times 6$  的高斯积分方案.

### 5 算例

本小节通过 3 个典型算例, 对线性基梯度光滑伽辽金无网格法的精度进行了系统的分析. 方便起见, 分别用“QMF”和“LGSMF”代表标准二次基伽辽金无网格法和线性基梯度光滑伽辽金无网格法. 算例中的影响域大小均为相对影响域尺度, 即节点之间距离的倍数.

#### 5.1 欧拉梁问题

首先, 考虑与薄板问题具有相同性质的一维梁问题. 本算例简支梁的材料与几何参数为: 长度  $L = 10$ , 截面宽度  $b = 0.1$ , 高度  $t = 0.2$ , 杨氏模量  $E = 2 \times 10^6$ , 受到均布载荷  $q(x) = -1$  的作用. 计算中取 21, 41, 81, 161 个节点进行收敛率分析, QMF 的核函数影响域取 2.3, LGSMF 的核函数影响域取 1.3. 图 7 为相应的挠度, 转角和曲率的收敛率结果, 即 2, 2 和 1, QMF 和 LGSMF 两种方法的收敛率基本相同, 与前述的插值误差分析结果一致, 但本文所提的基于线性基函数的 LGSMF 方法的精度高于采用二次基函数的 QMF 方法. 图 8 和图 9 给出了 21 个节点无网格离散模型对应的挠度、

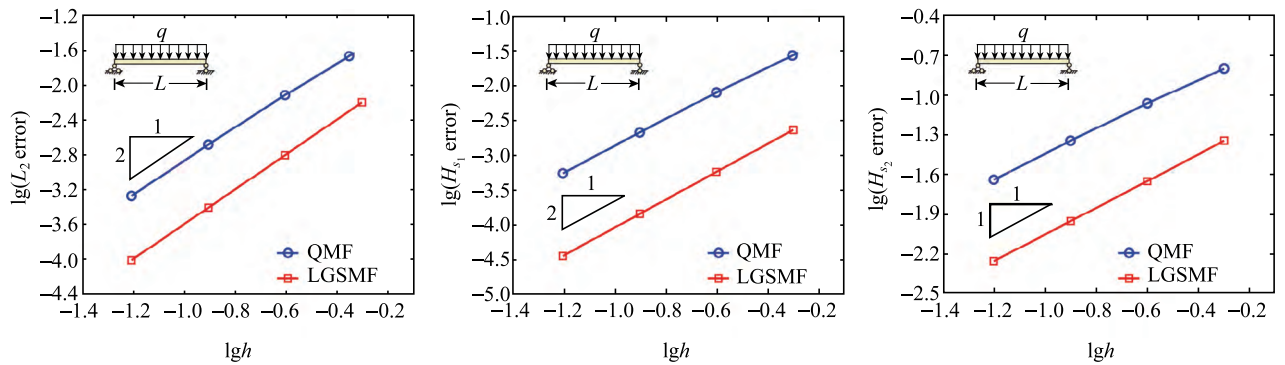


图 7 简支梁问题的收敛率对比

Fig. 7 Convergence comparison for the simply supported beam problem

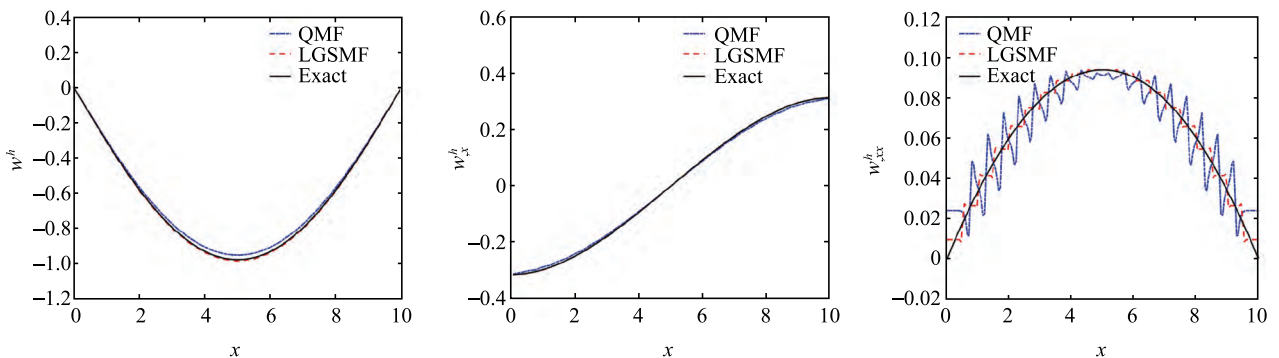


图 8 简支梁问题的结果对比

Fig. 8 Comparison of results for the simply supported beam problem



转角、曲率的计算结果及其误差分布图，进一步表明 LGSMF 方法的计算误差小于传统的 QMF 方法。此外，图 10 为线性分布载荷  $q(x) = -x$  作用下悬臂

梁问题的收敛特性分析，其结果与简支梁问题的结果完全一致，仍然说明 LGSMF 方法的计算精度优于 QMF 方法。

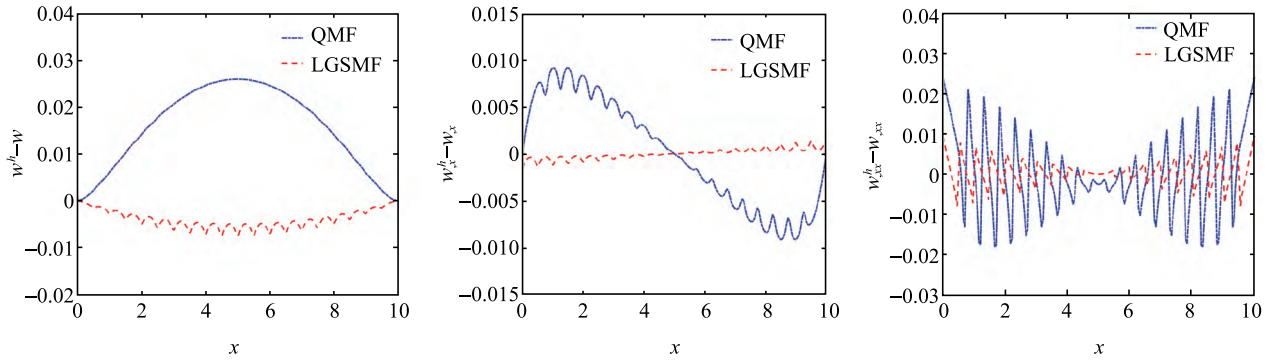


图 9 简支梁问题的误差对比

Fig. 9 Error comparison for the simply supported beam problem

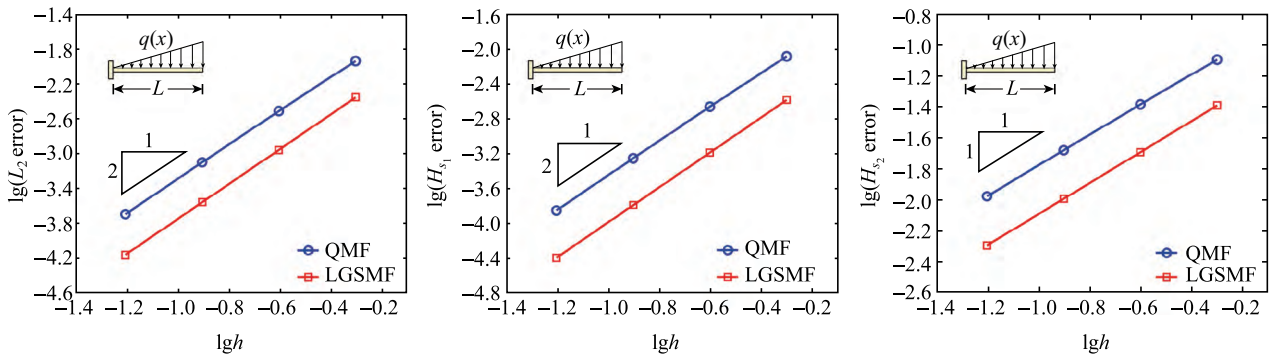


图 10 悬臂梁问题的收敛率对比

Fig. 10 Convergence comparison for the cantilever beam problem

5.2 简支方板和矩形板问题

考虑图 11 所示的简支板，其长度为  $L_x$ ，宽度为  $L_y$ ，厚度  $t = 0.1$ ，杨氏模量  $E = 2.0 \times 10^6$ ，泊松比  $\nu = 0.3$ 。该问题的解析解为

$$w(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \tag{51}$$

其对应的分布载荷为  $q(x) = \bar{D}\nabla^2\nabla^2w(x)$ 。

$$q(x) = -\bar{D}\left(\frac{\pi^2}{L_x^2} + \frac{\pi^2}{L_y^2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right)$$

首先考虑简支方板问题，其几何尺寸为  $L_x = L_y = 10$ ，无网格离散模型见图 12，其中 4 个模型的无网格节点数分别  $11 \times 11$ ， $21 \times 21$ ， $31 \times 31$  和  $41 \times 41$ 。计算中 QMF 方法的核函数影响域取 2.4，而 LGSMF 方法的核函数影响域取 1.1。图 13 给出了该板问题

的挠度、转角和曲率收敛率分析，相应的收敛率为 2, 2, 1, QMF和LGSMF两种方法的收敛率大致相同。

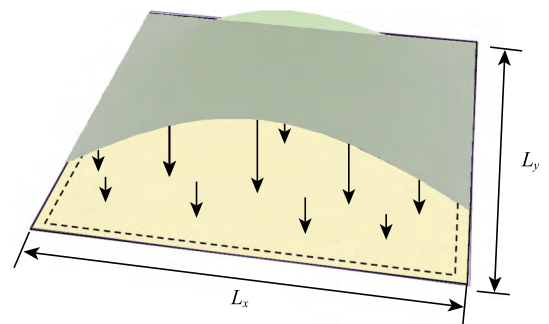


图 11 简支方板问题示意图

Fig. 11 Description of the simply supported square plate problem

图 14 给出了  $41 \times 41$  个节点无网格离散模型对应的挠度、转角、曲率误差分布图，图 13 和图 14 的结果均表明 LGSMF 方法的精度更高。对于  $L_x = 10$ ， $L_y = 5$

的矩形板问题，采用  $11 \times 11$ ,  $21 \times 21$ ,  $31 \times 31$  和  $41 \times 41$  的无网格离散模型对应收敛率的结果见图 15，同样表明 LGSMF 方法具有更高的计算精度。

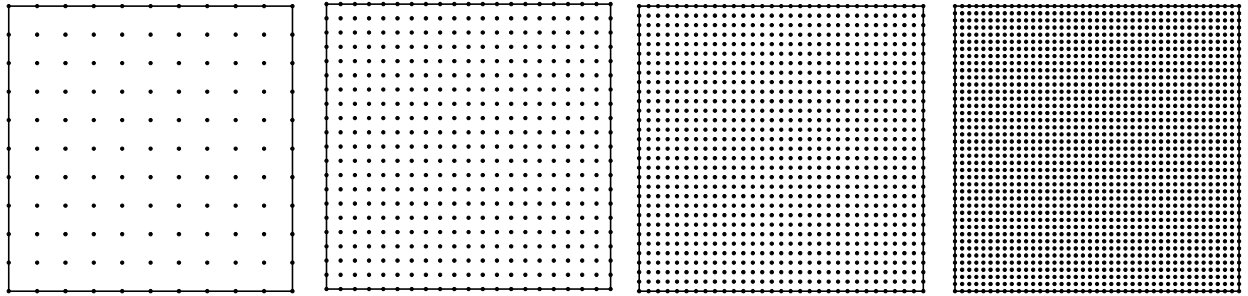


图 12 简支方板的无网格离散模型

Fig. 12 Meshfree discretizations for the simply supported square plate problem

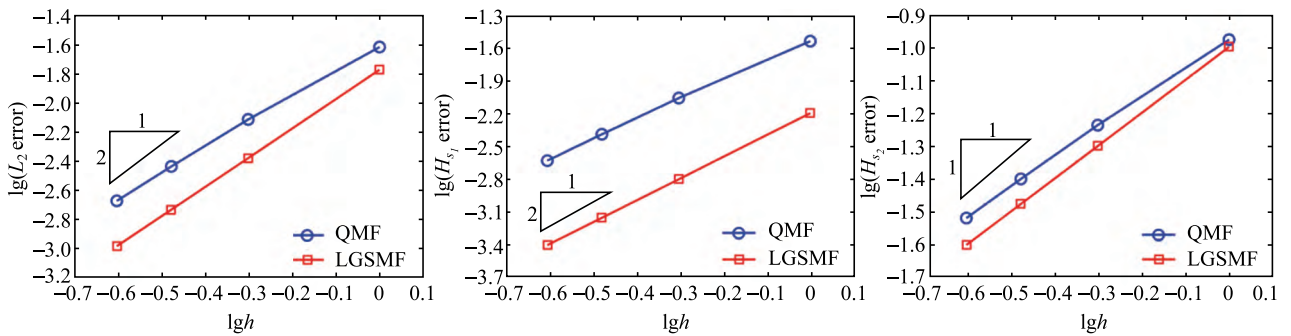


图 13 简支方板问题的收敛率对比

Fig. 13 Convergence comparison for the simply supported square plate problem

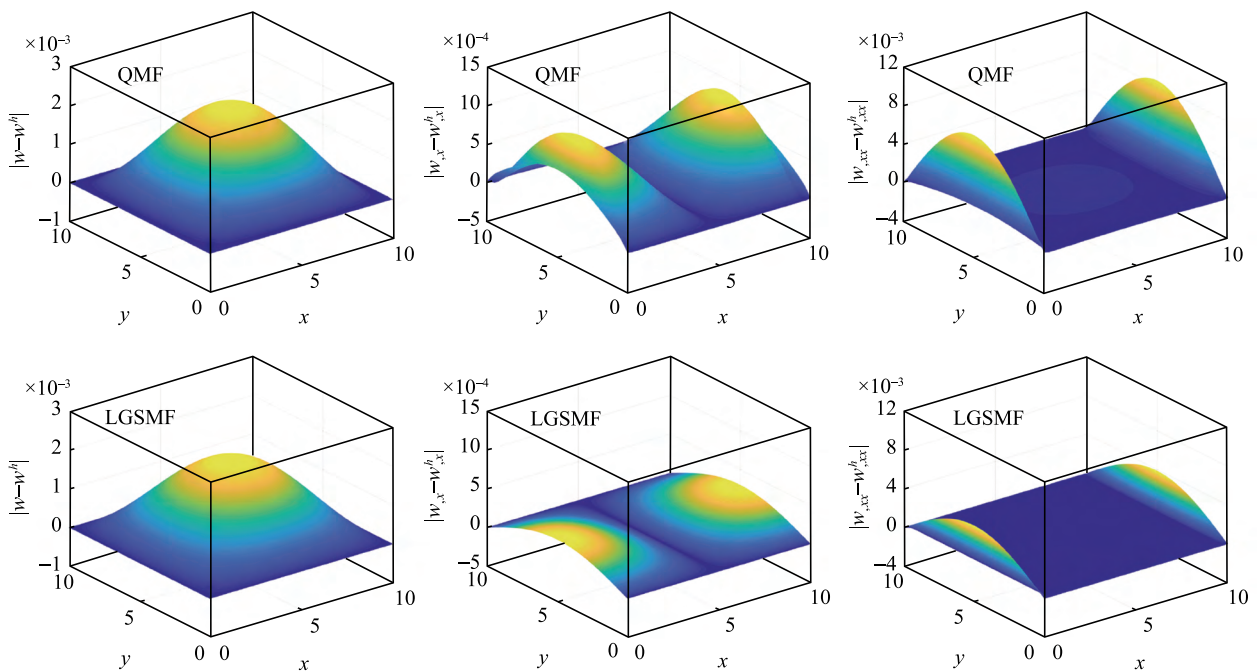


图 14 简支方板问题的误差对比

Fig. 14 Error comparison for the simply supported square plate problem

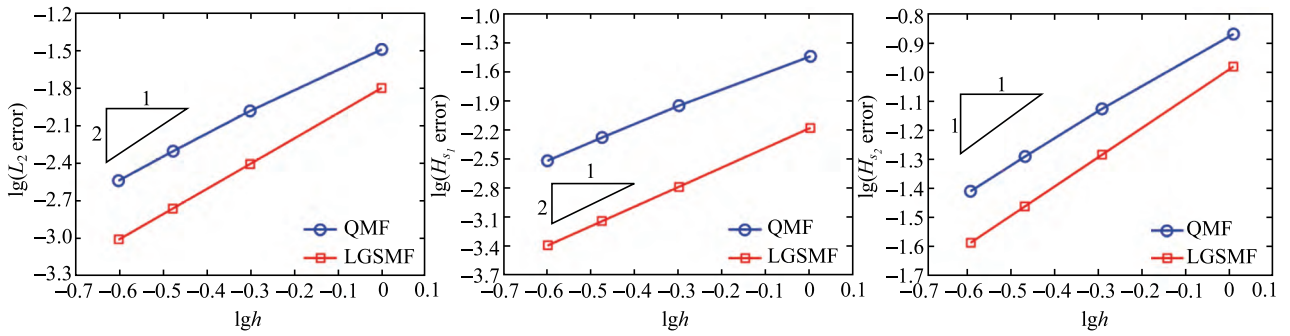


图 15 简支矩形板问题的收敛率对比

Fig. 15 Convergence comparison for the simply supported rectangular plate problem

5.3 固支圆板问题

考虑图 16 所示的受均布载荷  $q = -10$  作用周边固支圆板, 其几何和材料参数为: 半径  $R = 5$ , 厚度  $t = 0.1$ , 杨氏模量  $E = 2.0 \times 10^6$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ . 该问题的精确解<sup>[30]</sup>为

$$w(x) = \frac{q}{64D}(R^2 - x^2 - y^2)^2 \quad (52)$$

图 17 列出了圆板问题的无网格离散模型, 分别对应 121, 361, 729, 1089 个无网格离散节点. 由于圆板本身的几何特性, 无网格离散模型中节点呈现非均匀分布特性. 伽辽金无网格分析中, 采用二次基函数的 QMF 方法的核函数影响域为 2.2, 采用线性基函数的 LGSMF 方法的核函数影响域为 1.5. 注意到由于基函数阶次不同, QMF 方法的影响域至少要大于 2, 而 LGSMF 方法的最小影响域为 1. 图 18 给出

了圆板问题的挠度、转角和曲率的收敛率计算结果. 可见, 对于非均匀节点离散的圆板问题, 虽然线性基函数光滑梯度不严格满足二阶一致性条件, 但采用线性基函数的 LGSMF 方法的精度仍然高于采用二次基函数的传统 QMF 方法, 并能达到与方板问题相当的收敛率.

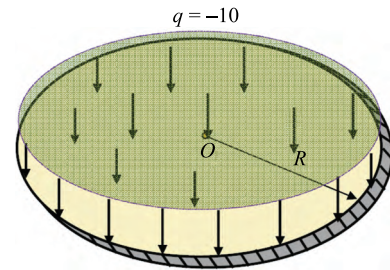


图 16 固支圆板问题示意图

Fig. 16 Description of the clamped circular plate problem

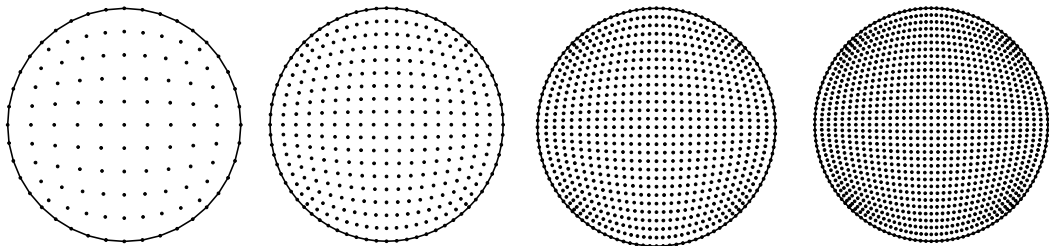


图 17 固支圆板无网格离散模型

Fig. 17 Meshfree discretizations for the clamped circular plate problem

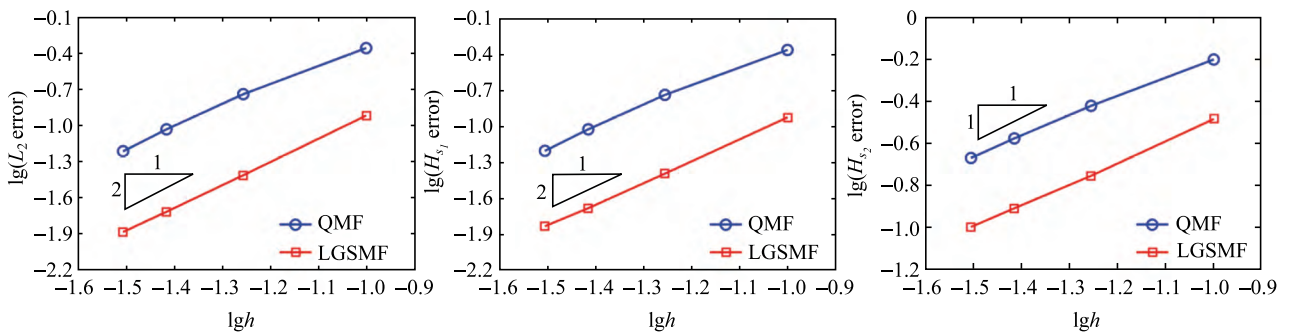


图 18 固支圆板问题的收敛率对比

Fig. 18 Convergence comparison for the clamped circular plate problem

## 6 结论

薄板分析的四阶控制方程要求采用至少二次基无网格形函数来保证伽辽金方法的收敛性. 本文通过引入梯度光滑理论, 构建了线性基无网格形函数的光滑梯度, 进而建立了一种薄板分析的线性基梯度光滑伽辽金无网格法. 该方法采用的线性基无网格形函数的光滑梯度不仅满足常规的线性梯度一致性条件, 而且在一定条件下还满足二次基无网格形函数对应的标准二阶梯度一致性条件, 使得采用线性基无网格形函数就能够进行薄板问题分析, 降低了计算复杂度, 为采用低次基函数快速求解高阶问题提供了一种有效的数值工具.

与二次基伽辽金无网格法相比, 线性基梯度光滑伽辽金无网格法避免了繁琐的无网格形函数二阶梯度计算, 而且光滑梯度有效降低了无网格形函数二阶梯度的震荡性, 因而采用较少的积分点就可以保证计算精度. 例如, 文中线性基梯度光滑伽辽金无网格法仅需采用 2 点高斯积分方案, 而传统的二次基伽辽金无网格法需要采用 6 点高斯积分方案. 文中通过插值误差分析和数值算例, 系统地验证了线性基梯度光滑伽辽金无网格法的精度. 结果表明, 线性基梯度光滑伽辽金无网格法和二次基伽辽金无网格法的收敛率相当, 但前者精度更优, 且所需基函数阶次降低了一次.

## 参 考 文 献

- Zienkiewicz OC, Taylor RL, Zhu JZ. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals (7th Edition). Singapore: Elsevier, 2015
- Hughes TJR. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. New York: Dover Publications, 2000
- Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 1992, 10(5): 307-318
- Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37(2): 229-256
- Liu WK, Jun S, Li S, et al. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 38(10): 1655-1679
- 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用. *力学进展*, 2009, 39(1): 1-36 (Zhang Xiong, Liu Yan, Ma Shang. Meshfree methods and their applications. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(1): 1-36(in Chinese))
- Chen JS, Hillman M, Chi SW. Meshfree methods: progress made after 20 years. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 2017, 143(4): 04017001
- Krysl P, Belytschko T. Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 1995, 17(1-2): 26-35
- Liu GR, Chen XL. A mesh-free method for static and free vibration analyses of thin plates of complicated shape. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 241(5): 839-855
- Long SY, Atluri SN. A meshless local Petrov-Galerkin method for solving the bending problem of a thin plate. *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2002, 3(1): 53-63
- Lu H, Li S, Simkins DC, et al. Reproducing kernel element method Part III: Generalized enrichment and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193: 989-1011
- Liu Y, Hon YC, Liew KM. A meshfree Hermite-type radial point interpolation method for Kirchhoff plate problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, 66(7): 1153-1178
- 马丽红, 邱志平, 王晓军等. Winkler 地基板的区间无网格 Galerkin 方法. *岩土工程学报*, 2008, 30(3): 384-389 (Ma Li-hong, Qiu Zhiping, Wang Xiaojun, et al. Interval element-free Galerkin method for plates on Winkler foundation. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*. 2008, 30(3): 384-389 (in Chinese))
- Bui TQ, Nguyen MN. A moving Kriging interpolation-based mesh-free method for free vibration analysis of Kirchhoff plates. *Computers & Structures*, 2011, 89(3-4): 380-394
- Cui XY, Liu GR, Li GY, et al. A thin plate formulation without rotation DOFs based on the radial point interpolation method and triangular cells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 85(8): 958-986
- Millan D, Rosolen A, Arroyo M. Thin shell analysis from scattered points with maximum-entropy approximants. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 85(6): 723-751
- Zhang HJ, Wu JC, Wang DD. Free vibration analysis of cracked thin plates by quasi-convex coupled isogeometric-meshfree method. *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, 2015, 9(4): 405-419
- Wang DD, Chen JS. A Hermite reproducing kernel approximation for thin-plate analysis with sub-domain stabilized conforming integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, 74(3): 368-390
- Wang DD, Lin ZT. Free vibration analysis of thin plates using Hermite reproducing kernel Galerkin meshfree method with sub-domain stabilized conforming integration. *Computational Mechanics*, 2010, 46(5): 703-719
- Wang DD, Lin ZT. Dispersion and transient analyses of Hermite reproducing kernel Galerkin meshfree method with sub-domain stabilized conforming integration for thin beam and plate structures. *Computational Mechanics*, 2011, 48(1): 47-63
- Wang DD, Peng HK. A Hermite reproducing kernel Galerkin meshfree approach for buckling analysis of thin plates. *Computational Mechanics*, 2013, 51(6): 1013-1029
- Wang DD, Song C, Peng HK. A circumferentially enhanced Hermite reproducing kernel meshfree method for buckling analysis of Kirchhoff-Love cylindrical shells. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2015, 15(6): 1450090
- Tanaka S, Sadamoto S, Okazawa S. Nonlinear thin-plate bending analyses using the Hermite reproducing kernel approxima-



- tion. *International Journal of Computational Methods*, 2012, 9(1): 1240012
- 24 Chen JS, Wu CT, Yoon S, et al. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2015, 50(2): 435-466
- 25 吴俊超, 邓俊俊, 王家睿等. 伽辽金型无网格法的数值积分方法. 固体力学学报, 2016, 37(3):208-233 (Wu Junchao, Deng Junjun, Wang Jiarui, et al. A review of numerical integration approaches for Galerkin meshfree methods. *Chinese Journal of Solid Mechanics*. 2016, 37(3):208-233 (in Chinese))
- 26 王冰冰, 段庆林, 李锡夔等. 薄板弯曲分析的高阶高效无网格法. 固体力学学报, 2018, 39(2): 152-161 (Wang Bingbing, Duan Qinglin, Li Xikui, et al. An efficient higher-order meshfree method for thin plate analysis. *Chinese Journal of Solid Mechanics*. 2018, 39(2): 152-161(in Chinese))
- 27 Wang DD, Wang JR, Wu JC. Superconvergent gradient smoothing meshfree collocation method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 340: 728-766
- 28 Wang DD, Li ZY. A two-level strain smoothing regularized mesh-free approach with stabilized conforming nodal integration for elastic damage analysis. *International Journal of Damage Mechanics*, 2013, 22(3): 440-459
- 29 Wu YC, Wang DD, Wu CT. Three dimensional fragmentation simulation of concrete structures with a nodally regularized meshfree method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2014, 72: 89-99
- 30 Timoshenko S, Krieger W. *Theory of Plates and Shells*. New York: McGraw-Hill, 1959