计算机科学与探索
Journal of Frontiers of Computer Science and Technology
ISSN 1673-9418,CN 11-5602/TP

《计算机科学与探索》网络首发论文

题目：　　不协调决策形式背景的矩阵型属性约简
作者：　　张呈玲，李进金，林艺东
网络首发日期：　　2019-06-13
引用格式：　　张呈玲，李进金，林艺东．不协调决策形式背景的矩阵型属性约简[J/OL]．计算机科学与探索．
http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.5602.TP.20190612.1553.018.html

网络首发时间：2019-06-13 11:38:33
网络首发地址：http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.5602.TP.20190612.1553.018.html

doi: 10.3778/j.issn.1673-9418.1905014

不协调决策形式背景的矩阵型属性约简*

张呈玲 [1]，李进金 [1+]，林艺东 [1,2]

1. 闽南师范大学 数学与统计学院，福建 漳州 363000

2. 厦门大学 数学科学学院，福建 厦门 361005

Matrix-type Attribute Reduction for Inconsistent Formal Decision Contexts*

ZHANG Chengling[1], LI Jinjin[1+], LIN Yidong[1,2]
1.School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou, Fujian 363000, China
2. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China
+ Corresponding author: E-mail: jinjinli@mnnu.edu.cn

ZHANG Chengling, LI Jinjin, LIN Yidong. Matrix-type attribute reduction for inconsistent formal decision contexts. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology

Abstract: Attribute reduction is a powful tool about knowledge representation and data analysis in formal concept analysis. There have been many approaches of attribute reduction for inconsistent formal decision contexts. In this paper, the generalized matrix consistent set based on Boolean matrix operations are firstly defined, and we propose the measurement of similarity between attributes.Subsequently, conditional attributes are divided into core attributes and non-core attributes depending on the importance of attributes in the process of attribute reduction. The equivalent judgment of whether an attribute is a core attribute is proposed, and a method to attribute reduction is provided. Finally, we develop a heuristic attribute-reduction algorithm in terms of the above framework and an example is conducted to illustrate that the algorithm is reasonable and feasible. Through attribute reduction, the computation of concept lattice in this form is more simple. The above results in this paper provide a research basis for the further study in application and theoretical basis for the study of matrix approach in formal conceptual analysis.

Key words: attribute reduction; heuristic algorithm; inconsistent formal decision contexts; similarity

摘 要：形式概念分析的属性约简是知识表达和数据处理的一种有力的工具。对于不协调决策形式背景，已有多种属性约简的方法。文中从布尔矩阵运算的角度研究不协调决策形式背景的属性约简问题，提出属性约简的新的刻画。首先，借助矩阵的运算给出广义矩阵协调集的定义，并研究属性之间相似性的度量。接着，针对在属性约

* The National Natural Science Foundation of China under Grant Nos. 11871259, 61379021, 117 01258 (国家自然科学基金项目); the Natural Science Foundation ofFujian Provice under Grant Nos. 2019J01748, 2017J01507 (福建省自然科学基金项目).

简过程中起不同作用的属性，将条件属性区分为核心属性和非核心属性，提出一个属性是否是核心属性的充要判断条件，以及得出属性约简的判别方法。最后，在此框架上设计出不协调决策形式背景属性约简的一种启发式算法，通过例题说明此算法的可行性和合理性。通过属性约简，该形式背景下的概念格计算更为简便。上述结果有助于进一步的应用及为研究形式概念分析的矩阵方法提供了理论基础。
关键词：属性约简；启发式算法；不协调决策形式背景；相似度

文献标志码：A　　中国法分类号：019

1　引言

形式概念分析（FCA）是由德国数学家 Wille[1-2]提出的一种分析数据的有效工具。它的核心是形式背景和概念格。形式背景是由对象集，属性集以及对象和属性之间的二元关系构成的。而概念格是将形式背景里的对象子集和属性子集以一种概念层次体现出来。近年来，形式概念分析已被广泛应用于概念认知[3]、知识提取[4]等领域。

决策形式背景是形式背景的一个延伸。其中，属性约简是决策形式背景的一个研究热点。目前，研究工作者已获得了多种属性约简方法[4-16]。它旨在寻找极小的属性子集使得决策形式背景的决策分析更加简洁。而决策形式背景分为两类，一类是决策形式背景是协调的；另一类是决策形式背景是不协调的。针对第一类，魏玲等[8]给出了强协调和弱协调决策形式背景的定义，以及相应的协调集的判定定理。针对强协调决策形式背景研究了保持概念外延不变的属性约简的问题。而弱协调决策形式背景借助蕴含映射刻画了属性约简。陈秀[9]从等价关系的角度给出了协调决策形式背景的定义。并且通过构造等价关系的辨识矩阵，提出了属性约简的方法。裴铎等在文献[10]中针对协调决策形式背景，从并不可约元角度给出了 irr-型协调集的概念。李仲玲等[11]借助集合交集讨论了协调决策形式背景下的交约简方法，并说明了概念格协调集与交协调集是等价的。然而，由于辨识矩阵和辨识函数的约简方法的时间复杂度较大，在实际中不容易实现。李金海等[4,12-14]针对决策形式背景提出了必要属性和不必要属性的等价刻画，并设计出了保持决策规则的属性约简的启发式算法。

然而，属性约简同样是不协调决策形式背景里的重要研究课题，其的是删除冗余、不必要属性。文献[7,15-21]已对属性约简作了目深入的研究，并取得了重要的结果。郭松涛等[15]基于文献[4]的属性约简的框架下，考虑一般决策形式背景的属性约简问题。给出了一个属性是否是必要的等价刻画，进而设计出了适用一般决策形式背景的属性约简的启发式算法。王亚丽等[16-17]针对下近似函数提出了保持条件属性子集在每个决策类不变的近似约简的问题，并给出了约简方法。基于对象幂集的同余关系，文献[18,21]给出了不协调决策形式背景下的属性约简方法。Wang 等[18]从同余关系的角度讨论了上、下近似的属性约简问题。在此基础上，通过构造辨识矩阵可以得到所有的约简集。Li 等[21]基于文献[18]约简的框架下，提出了分布属性约简和极大分布属性约简的概念。接着，讨论了两者之间的关系，并给出了计算约简集的方法。Huang 等[7]在吴伟志等[5]研究的基础上，考虑了决策形式背景是不协调时，从信息粒角度，利用条件信息熵刻画了属性重要度，进而设计了计算一个极小近似约简的启发式算法。但此约简方法依赖信息粒之间的关系，并且在约简过程中计算量大。本文在文献[7]的基础上，借助布尔矩阵的运算，刻画不协调决策形式背景的属性重要度，并设计出更较为简便的属性约简的启发式算法。

本文首先给出不协调决策形式背景下广义矩阵协调集的定义。然后通过矩阵刻画出属性之间的相似度，接着给出一个属性是否是核心属性的充要条件。最后，

提出一种比 Huang 等[7]的约简算法时间复杂度更低的约简方法。

2 预备知识

在这节中，主要介绍形式概念分析的基本定义和矩阵的运算等。为下文讨论方便，假设论域U是一个非空有限集合。

定义 1[1] 设 $F=(U,A,I)$ 是形式背景，其中为对 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 象集，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 为属性集，I 是U 和 A 之间的二元关系，且 $I\subseteq U\times A$。若 $(x,a)\in I$，表示对象 x 具有属性 a；若 $(x,a)\notin I$，表示对象 x 不具有属性 a。

对于 $X\subseteq U, B\subseteq A$，Wille 给出形式背景$F$ 下的一对算子：

$$X^*=\{a\in A:\forall x\in X,(x,a)\in I\},$$
$$B^*=\{x\in U:\forall a\in B,(x,a)\in I\}.$$

对于论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$X\subseteq U$，那么 X 的特征向量为$\lambda(X)=(\lambda_X(x_1),\lambda_X(x_2),\cdots,\lambda_X(x_n))$.

$$\text{其中，}\ \lambda_X(x_i)=\begin{cases}1, & x_i\in X,\\ 0, & x_i\notin X.\end{cases}$$

例如：$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$X=\{x_1,x_3,x_5\}$，则 X 的特征向量为$\lambda(X)=\{1,0,1,0,1\}$。

通常，形式背景是以 0-1 数值表呈现。1 是指对象具有 x 属性 a，即 $(x,a)\in I$；0 是指对象 x 不具有属性 a，即 $(x,a)\notin I$。为表述方便，因此，形式背景可看成布尔矩阵 $M_I=(c_{ij})_{n\times m}$，称 M_I 是 F 的一个关系矩阵。

$$\text{其中，}\ c_{ij}=\begin{cases}1, & (x_i,a_j)\in I,\\ 0, & (x_i,a_j)\notin I.\end{cases}$$

$\forall x_i\in U,\forall a_j\in A$，矩阵 M_I 的每一行是 x_i^* 的特征向量 $\lambda(x_i^*)$；M_I 的每一列是 a_j^* 的特征向量 $\lambda(a_j^*)$。

注： 本文中，$M_I(i,:)$ 指矩阵 M_I 的第 i 行；$M_I(:,j)$ 指 M_I 矩阵的第 j 列；$M_I(i,j)$ 指矩阵 M_I 的第 i 行第 j 列。

定义 2[5] 设 $F=(U,A,I)$ 是形式背景，$Q\subseteq A$，$I_Q=I\cap(U\times Q)$，则 $F_Q=(U,Q,I_Q)$ 称为 F 的一个子背景。

与形式背景 F 类似，我们也可给出在子背景 $F_Q(U,Q,I_Q)$ 中的一对算子：$Y\subseteq U$，$C\subseteq Q$，

$$Y^{*Q}=\{b\in Q:\forall o\in Y,(o,b)\in I_Q\},$$
$$C^{*Q}=\{o\in U:\forall b\in C,(o,b)\in I_Q\}.$$

引理 1 $A=(a_{ij})_{n\times m}, B=(b_{ij})_{n\times m}, C=(c_{ij})_{m\times p}$ 是布尔矩阵，有以下运算性质：

(1) $A\le B\Leftrightarrow a_{ij}\le b_{ij}, i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m$.

(2) $A\vee B=(a_{ij}\vee b_{ij})_{n\times m}$；

(3) $A\wedge B=(a_{ij}\wedge b_{ij})_{n\times m}$；

(4) $A\cdot C=(d_{ij})_{n\times p}$，其中 $d_{ij}=\bigvee_{1\le k\le m}(a_{ik}\wedge c_{kj})$；

(5) $A-B=(a_{ij}\wedge(1-b_{ij}))_{n\times m}$；

(6) $\sim A=(1-a_{ij})_{n\times m}$.

接着，通过上面的矩阵的运算给出对象的粒矩阵描述。

定义 3[6]设 $F=(U,A,I)$ 是形式背景，M_I 是 I 的关系矩阵，令 $M=\sim(M_I\cdot(\sim M_I^T))$，矩阵 M 的第 i 行为对象 x_i 内涵的外延的特征向量 $\lambda(x_i^{**})$，称 M 为对象粒矩阵。

从定义 3 可以得出，对象粒矩阵 M 的第 i 行 $M(i,:)=\lambda(x_i^{**})$，$\forall x_i\in U$。

定义 4[8]设 (U,A,I) 和 (U,D,J) 是两个形式背景，并且 $A\cap D=\phi$。A 和 D 分别是条件属性集和决策属性集，称 $S=(U,A,I,D,J)$ 是决策形式景。

吴伟志等在文献[5]中提出了决策形式背景是粒协调的定义。然而，现实中不协调的决策形式背景要比协调决策形式背景出现的可能性要大。那应当如何定义协调性的程度？Huang 等在文献[7]中给出如下说明。

设 $S=(U,A,I,D,J)$ 是一个决策形式背景，$B\subseteq A$，定义 $POS_B(D)=\{x\in U: x^{*B*B}\subseteq x^{*D*D}\}$，正域是由子背景 (U,B,I) 的对象粒含在 (U,D,J) 的对象粒构成的。而子背景 (U,B,I_B,D,J) 的协调性的程度是

$$\tau_B(D)=\frac{|POS_B(D)|}{|U|}。$$

定义 5[7] 设 $S=(U,A,I,D,J)$ 是一个不协调决策形式背景，$B\subseteq A$，若 $\tau_B(D)=\tau_A(D)$，则 B 称为 S 的一个广义粒协调集。如果 B 是 S 的一个广义粒协调集，且 B 的任意真子集都不再是 S 的广义粒协调集，则 B 称为是 S 的一个粒约简。

3 基于布尔矩阵的不协调决策形式背景的属性约简

在文献[5]中，吴伟志等给出决策形式背景协调性的定义。基于此，本文利用矩阵的表达形式给出决策形式背景的相关概念。在决策形式背景 $S=(U,A,I,D,J)$ 中，与定义 3 类似，M_I 是 I 的条件关系矩阵，M_J 是 J 的决策关系矩阵，则 $M_A=\sim(M_I\cdot(\sim M_I^T))$ 是 S 的条件对象粒矩阵，$M_D=\sim(M_J\cdot(\sim M_J^T))$ 是 S 的决策对象粒矩阵。若 $\forall B\subseteq A$，令 R_B 是任意一行均为 $\lambda(B)$ 的 $|U|\times|A|$ 的矩阵。那么，在子背景 $S_B=(U,B,I_B,D,J)$ 中有 $M_B=\sim((M_I\wedge R_B)\cdot(\sim(M_I\wedge R_B)^T))$。根据条件对象粒矩阵 M_A 和决策对象粒矩阵 M_D，可给出 S 协调的定义。

定义 6 设 $S=(U,A,I,D,J)$ 是决策形式背景，M_A 和 M_D 分别是 S 的条件对象粒矩阵和决策对象粒矩阵，若 $M_A\le M_D$，则称 S 是协调的；否则 S 是不协调的。

例 1 表 1 为一决策形式背景，其中对象集、条件属性集、决策属性集分别为 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ 和 $D=\{d_1,d_2,d_3,d_4\}$。

Table1 decision formal context $S=(U,A,I,D,J)$

表 1 决策形式背景 $S=(U,A,I,D,J)$

U	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	d_1	d_2	d_3	d_4
x_1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
x_2	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
x_3	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
x_4	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0
x_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

从表 1 中可知，决策形式背景 S 的条件关系矩阵和决策关系矩阵分别为

$$M_I=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix},\ M_J=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

那么，S 的条件对象粒矩阵和决策粒矩阵分别为

$$M_A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&1\end{pmatrix},\ M_D=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

可以看出 $M_A\le M_D$ 不成立。由定义 6 可知，S 是不协调的。

设 $S=(U,A,I,D,J)$ 是一个不协调决策形式背景，$B\subseteq A$，定义当 $M_B(i,:)\le M_D(i,:),1\le i\le n$ 时，那么有

$$V_B(D)=\sum_{i=1}^{n}\left|(\sim M_B(i,:))\wedge(\sim M_D(i,:))\right|。$$

从上述等式可以看出，在 M_B 的每行在小于等于 M_D 对应行的情况下，$V_B(D)$ 是由 M_B 和 M_D 共有的 0 的基数构成的。因此，我们可以给出在决策形式背景 S 下的协调性程度的定义。

定义 7 设 $S=(U,A,I,D,J)$ 是一个不协调决策形式背景，$B\subseteq A$。定义子背景 $S_B=(U,B,I_B,D,J)$ 的协调性程度为 $\Gamma_B(D)=\dfrac{V_B(D)}{|U|^2}$。

定义 8 设 $S=(U,A,I,D,J)$ 是一个不协调决策形式背景，$B\subseteq A$，若 $\Gamma_B(D)=\Gamma_A(D)$，B 称为 S 的一个广义矩阵协调集。若 B 是 S 的一个广义矩阵协调集且 $\forall C\subset B$，C 都不再是 S 的广义矩阵协调集，那么 B 称为 S 的一个约简集。记 $B_t(t\le r)$ 是 S 所有的约简集，且有 $Core(S)=\bigcap_{t\le r} B_t$ 是 S 的核心。

定理 1 设 $S=(U,A,I,D,J)$ 是一个不协调决策形式背景，$C\subseteq B\subseteq A$，则 $\Gamma_C(D)\le\Gamma_B(D)$。

证明 由 $C\subseteq B\subseteq A$，则 $M_A\le M_B\le M_C$。要说明 $\Gamma_C(D)\le\Gamma_B(D)$，只需证明 $V_C(D)\le V_B(D)$。由于当 $M_C(i,:)\le M_D(i,:),\ i=1,2,\cdots,n.$ 时，一定会有 $M_B(i,:)\le M_D(i,:)$。那么 $|(\sim M_C(i,:))\wedge(\sim M_D(i,:))|\le |(\sim M_B(i,:))\wedge(\sim M_D(i,:))|$，故有 $V_C(D)\le V_B(D)$，所以 $\Gamma_C(D)\le\Gamma_B(D)$。

从定理 1 可以看出，S 中的条件属性集越小，它所对应的协调性的程度越低。为了获得不协调决策形式背景下的一个约简集，下面给出条件属性子集的相似度的概念。

定义 9 设 $S=(U,A,I,D,J)$ 是一个不协调决策形式背景，$B\subseteq A$，称 $E(B|A,D)=\dfrac{V_B(D)}{V_A(D)}$ 为属性 B 关于 A 的 D 的相似度。

定理 2 设 $S=(U,A,I,D,J)$ 是一个不协调决策形式背景，$B\subseteq A$，B 是广义矩阵协调集的充要条件是 $E(B|A,D)=1$。

证明 $(\Rightarrow)$ 由于 B 是 S 的广义矩阵协调集，则 $\Gamma_B(D)=\Gamma_A(D)$。从定义 7 可得，$V_B(D)=V_A(D)$。所以 $E(B|A,D)=1$。

$(\Leftarrow)$ 由 $E(B|A,D)=1$ 可知，$V_B(D)=V_A(D)$。根据定义 7 和 8 知，B 是 S 的一个广义矩阵协调集。

例 2（续例 1）不妨设 $B_1=\{a_1,a_3,a_5\}$，$B_2=\{a_1,a_2,a_5,a_6\}$。有下面结果：

$$M_{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0\\1&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

根据定义 9 和定理 2 可知，$E(B_1/A,D)=\dfrac{V_{B1}(D)}{V_A(D)}=\dfrac{3}{7}\neq1$。故 B_1 不是广义矩阵协调集。同样地，也能得到：

$$M_{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

而 $E(B_2/A,D)=\dfrac{V_{B_2}(D)}{V_A(D)}=1$。那么 B_2 是广义距阵协调集。

定义 10 设 $S=(U,A,I,D,J)$ 是一个不协调决策形式背景，$B\subseteq A$，$\forall a\in B$，则 a 关于 B 的内重要度为

$$Sig(B|a)=E(B|A,D)-E(B-\{a\}|A,D).$$

从定义 10 可以看出，$a\in B$ 的重要度是通过 $E(B|A,D)$ 和 $E(B-\{a\}|A,D)$ 之间的差异得到的。换句话说，当 a 从 B 中删去时，a 在 B 中的重要度是通过 M_B 和 $M_{B-\{a\}}$ 对 M_D 之间的相似度变化大小来衡量的。

利用定义 10 可得如下核心判定定理，为下面设计启发式算法提供了简单的方法。

定理 3 设 $S=(U,A,I,D,J)$ 是一个不协调决策形式背景，$a\in A$ 是核心属性的充要条件是 $Sig(A|a)>0$；或者 $a\in A$ 不是核心属性的充要条件是 $Sig(A|a)=0$。

证明 ($\Rightarrow$) 因为 $a\in A$ 是核心属性，则 $A-\{a\}$ 不是广义矩阵协调集，即 $\Gamma_{A-\{a\}}(D)\neq\Gamma_A(D)$。根据 $A-\{a\}\subseteq A$，由定理 1 知，$\Gamma_{A-\{a\}}(D)\leq\Gamma_A(D)$，故 $\Gamma_{A-\{a\}}(D)<\Gamma_A(D)$。由定义 10 得：$Sig(A|a)=E(A|A,D)-E(A-\{a\}|A,D)$

$$=1-\frac{V_{A-\{a\}}(D)}{V_A(D)}>0.$$

($\Leftarrow$) 由 $Sig(A|a)>0$ 知，$E(A-\{a\}|A,D)<1$。假设 a 不是核心属性，则至少存在一个约简集 Q，使得 $a\notin Q$ 且 $Q\subseteq A-\{a\}$。由定理 1 知，$\Gamma_Q(D)\leq\Gamma_{A-\{a\}}(D)$，即 $V_Q(D)\leq V_{A-\{a\}}(D)$。则 $E(Q|A,D)\leq E(A-\{a\}|A,D)<1$，与 Q 是一个约简集矛盾。所以 a 是核心属性。

推论 1 设 $S=(U,A,I,D,J)$ 是一个不协调决策形式背景，则 $Core(S)=\{a\in A:Sig(A|a)>0\}$。

证明由定理 3 可直接得到。

定理 4 设 $S=(U,A,I,D,J)$ 是一个不协调决策形式背景，$B\subseteq A$，若 $E(B|A,D)=1$ 并且 $\forall b\in B$，$Sig(B|b)>0$，则 B 是 S 的一个约简集。

证明由 $E(B|A,D)=1$ 及定理 2 可知，B 是 S 的一个广义矩阵协调集。$\forall E\subset B$，$\exists b_0\in B\setminus E$，使得 $E\subseteq B\setminus\{b_0\}$。由定理 1 可以得到，$\Gamma_E(D)\leq\Gamma_{B\setminus\{b_0\}}(D)\leq\Gamma_A(D)$。同样地有，$V_E(D)\leq V_{B\setminus\{b_0\}}(D)\leq V_A(D)$。由假设 $\forall b\in B$，$Sig(B|b)=\dfrac{V_B(D)-V_{B-\{b\}}(D)}{V_A(D)}>0$。由上述知 $b_0\in B$，故 $V_B(D)>V_{B-\{b_0\}}(D)$，从而就可以得到 $V_E(D)\leq V_{B\setminus\{b_0\}}(D)<V_B(D)\leq V_A(D)$。故能得到 $V_E(D)<V_A(D)$，那么 $E(E|A,D)<1$。所以 E 不是 S 的广义矩阵协调集。综上所述，B 是 S 的一个约简集。

定义 11 设 $S=(U,A,I,D,J)$ 是一个不协调决策形式背景，$B\subseteq A$，$\forall a\in A-B$，则 a 关于 B 的外重要度为

$$Sig(a|B)=E(B\cup\{a\}|A,D)-E(B|A,D).$$

根据上述的讨论，我们可以设计一个启发式算法寻找不协调决策形式背景下的一个极小约简。

算法 1 不协调决策形式背景 $S=(U,A,I,D,J)$ 的一个约简集的启发式算法.

输入：S 的关系矩阵 M_I 和 M_J，其中 $|U|=n$，$|A|=m$，$|D|=t$.

输出：S 的一个约简集 P.

1. 计算条件对象粒矩阵 M_A 和决策对象粒矩阵 M_D，以及令 $P=\phi$，$Core(S)=\phi$.

2. 将 i 从 1 到 m，若满足 $Sig(A|a_i)>0$，则 $Core(S)\leftarrow Core(S)\cup\{a_i\}$.

3. 如果 $E(Core(S)|A,D)=1$，令 $P=Core(S)$，然后进行第 6 步.

4. 计算 $Sig(a|P)$，$\forall a\in A\setminus P$.

5. 选择一个属性 $Sig(c|P)=\max\limits_{a\in A\setminus P}\{Sig(a|P)\}$，将 $P\leftarrow P\cup\{c\}$，然后返回第 3 步.

6. 若 $Sig(P|r)>0$，$\forall r\in P$，然后进行第 8 步.

7. 如果 $Sig(P|d)=0$，$\exists d\in P$，将 $P\leftarrow P-\{d\}$，然后返回第 6 步.

8. 输出约简集 P.

此算法第 1 步的时间复杂度为 $O(|U|^2|A|)$；第 2 步用于找出所有的核心属性，此时间复杂度为 $O(|U|^2|A|^2)$；在第 4-5 步的过程中，时间复杂度不超过 $O(|U|^2|A|^2)$，故算法 1 的时间复杂度为 $O(|U|^2|A|^2)$。相较于文献[7]的时间复杂度 $O(|U|^2(|A|^3+|D|))$ 更低。

例 3（续例 1）

从例 1 中可知，S 是不协调决策形式背景以及 S 的协调性程度为 $\Gamma_A(D)=\frac{14}{25}$.

根据算法 1 计算 $\forall a\in A$ 的重要度：$Sig(A|a_1)=\frac{3}{7}$，$Sig(A|a_2)=\frac{2}{7}$，$Sig(A|a_i)=0$，$(i=3,4,5,6)$。根据推论 1 知 $Core(S)=\{a_1,a_2\}$。则 $E(Core(S)|A,D)=\frac{5}{7}\neq 1$。

根据定义 11 $\{a_3,a_4,a_5,a_6\}$ 关于 $Core(S)$ 的外重要度分别为 $Sig(a_i|Core(S))=0$ $(i=3,4,5)$，以及 $Sig(a_6|Core(S))=\frac{2}{7}$，从而有 $P=\{a_1,a_2,a_6\}$。由定理 4 可以得到，$E(P|A,D)=1$ 且 $Sig(P|a)>0$，$\forall a\in P$。故而有 $P=\{a_1,a_2,a_6\}$ 是 S 的一个约简集。可以看出把 a_3,a_4,a_5 从不协调决策形式背景 S 的条件属性集 A 中删去，子背景 (U,P,I_P,D,J) 的协调性程度仍为 $\Gamma_P(D)=\frac{14}{25}$。

4 结束语

属性约简是决策形式背景的重要研究热点之一。本文针对不协调决策形式背景的属性约简给出了相应的启发式算法。首先通过布尔矩阵的运算刻画属性之间的相似度。接着讨论了判断广义矩阵协调集和核心属性的等价条件。基于此基础上，提出了启发式的约简算法，并通过实例说明该算法的有效性。值得注意的的是，此方法的提出，为借助矩阵研究形式概念分析拓宽了新视角。本文下一步要考虑的是，在模糊概念格，基于矩阵运算，研究属性约简的方法。

References:

[1] Wille R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies ofconcept[M]//Ordered sets. Springer, Dordrecht, 1982: 445-470.

[2] GanterB, Wille R.Formal concept analysis: mathematical foundations[M]. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] Yao Y Y. Concept lattices in rough set theory[C]//Proceedings of the IEEE Annual Meeting of the Fuzzy Information,Banff, Jun27-30, 2004. Piscataway: IEEE,2004: 796-801.

[4] Li J H, Mei C L, Lv Y J. A heuristic knowledge-reduction method for decision formal contexts[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 61(4): 1096-1106.

[5] Wu W Z, Leung Y, Mi J S. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. IEEE transactions on knowledge and data engineering, 2009, 21(10): 1461-1474.

[6] Zhang Q X. Attribute reduction method for concept lattices based on boolean matrices[D]. Zhangzhou: Minnan Normal University, 2012.

[7] Huang C C, Li J H, Dias S M. Attribute significance, consistency measure and attribute reduction in formal concept analysis[J]. Neural Network World, 2016, 26(6): 607-623.

[8] Wei L, Qi J J, Zhang W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts[J]. Science in China Series E: InformationSciences,2008, 38(2):195-208.

[9] Chen X. Attribute reduction in consistent decision formal contexts[J]. Computer engineering and applications, 2006, 45(26): 56-57.

[10] Pei D, Mi J S, Li M Z. Type-irr Attribute reduction in decision formal concept[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2011, 5(1): 75-80.

[11] Li Z L, Mi J S. Meet-reduction in formal context[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2010, 4(12): 1147-1152.

[12] Li J H. Novel algorithm for attribute reduction of concept lattice[J]. Computer Engineering and Applications, 2006, 44(20): 148- 151.

[13] Li J H, Mei C L, Lv Y J. Knowledge reduction in decision formal contexts[J]. Knowledge-Based Systems, 2011, 24(5): 709-715.

[14] Li J H, lv Y J. Attribute reduction and rules extraction in decision formal context based on concept lattice[J]. Mathematics Practices and Theory, 2009, 39(7):182-188.

[15] Guo S T, Li J H, Lv Y J, et al. Heuristic attribute reduction algorithm for decision formal contexts[J]. Computer Engineering and Applications, 2012, 48(10): 20-24.

[16] Wang Y L, Zhai Y H, Qu K S. Study on attribute reduction method in inconsistent decision formal contexts[J]. Computer Engineering and Applications, 2012, 48(5): 124-126.

[17] Wang Y L. Discussion on the attribute reduction method in inconsistent decision formal contexts[D]. Taiyuan: Shanxi University, 2012.

[18] Wang X, Wu W Z. Approximate reduction in inconsistent formal decision contexts[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Granular Computing, Hangzhou, China, Aug 11-13, 2012. Washington, DC: IEEE, 2012: 1-6.

[19] Wan Q, Wei L. Approximate concepts acquisition based on formal contexts[J]. Knowledge-based systems, 2015, 75: 78-86.

[20] Li Y J, Wang X. Inconsistent decision reduction of object oriented concept lattices[J]. Journal of Nanjing University: Natural Sciences, 2016, 52(5):853-860.

[21] Li J Y, Wang X, Wu W Z,et al. Attribute reduction in inconsistent formal decision contexts based on congruence relations[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017, 8(1): 81-94.

附中文参考文献:

[6] 张清新. 基于布尔矩阵的概念格属性约简方法[D]. 漳州: 闽南师范大学, 2012.

[8] 魏玲, 祁建军, 张文修. 决策形式背景的概念格属性约简[J]. 中国科学(E 辑:信息科学), 2008, 38(2):195-208.

[9] 陈秀. 协调决策形式背景及其属性约简[J]. 计算机工程与应用, 2006, 45(26):56-57.

[10] 裴铎, 米据生, 李美争. 决策形式背景的 irr-型属性约简[J]. 计算机科学与探索, 2011, 5(1): 75-80.

[11] 李仲玲, 米据生. 形式背景的交约简[J]. 计算机科学与探索, 2010, 4(12):1147-1152.

[12] 李金海. 一种新颖的概念格属性约简算法[J]. 计算机工程与应用, 2006, 44(20):148-151.

[14] 李金海, 吕跃进. 基于概念格的决策形式背景属性约简及规则提取[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(7):182-188.

[15] 郭松涛, 李金海, 吕跃进, 等. 决策形式背景的启发式属性约简算法[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(10):20-24.

[16] 王亚丽, 翟岩慧, 曲开社. 不协调决策形式背景属性约简方法研究[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(5):124-126.

[17] 王亚丽. 不协调决策形式背景属性约简方法探讨[D]. 太原: 山西大学, 2012.

[20] 李俊余, 王霞. 对象定向概念格的不协调决策约简[J]. 南京大学学报: 自然科学版, 2016, 52(5):853-860.

ZHANG Chengling was born in 1994. She is an M.S. candidate at Minnan Normal University. Her research interests include concept latticces.

张呈玲(1994–), 女, 山西怀仁人, 闽南师范大学硕士研究生, 主要研究领域为概念格。

LI Jinjin was born in 1960. He is a professor and Ph.D. supervisor at Minnan Normal University. His research interests include topology, rough set, and concept lattices, etc.

李进金(1960–), 男, 福建泉州人, 闽南师范大学教授、博士生导师, 主要研究领域为拓扑学, 粗糙集和概念格等。

LIN Yidong was born in 1989. He is a Ph.D. candidate at Xiamen University. His research interests include rough set and concept lattices, etc.

林艺东(1989-), 男, 福建漳州人, 厦门大学博士研究生, 主要研究领域为粗糙集和概念格等。