

# 基于 Hawkes 过程的尾部风险溢酬分析<sup>①</sup>

陈淼鑫, 徐 亮

(厦门大学经济学院金融系, 厦门 361005)

**摘要:** 基于 Hawkes 过程, 利用台指期权和期货数据, 估计尾部风险溢酬及其两个组成部分(正跳和负跳的尾部风险溢酬), 并进一步探讨其对台指收益率预测力的差异, 以及与投资者情绪之间的不同关系. 实证结果发现: 中国台湾市场上负跳(正跳)的尾部风险溢酬均值为正(负), 整体的尾部风险溢酬受负跳的影响更大. 负跳(正跳)的尾部风险溢酬对未来1个月~6个月的台指收益率均有(没有)显著的预测力, 但整体的尾部风险溢酬对未来收益率预测的效果并不稳定. 投资者情绪对正跳(负跳)的尾部风险溢酬具有显著为正(负)的解释力, 但对整体的尾部风险溢酬则不具有显著的解释力.

**关键词:** 尾部风险溢酬; Hawkes 过程; 跳跃; 投资者情绪

**中图分类号:** F830.9    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1007-9807(2019)06-0097-16

## 0 引言

近年来随着各种风险事件频发, 尾部风险受到理论界和实务界的广泛关注. 所谓尾部风险(跳跃风险)主要指资产价格在短期内的大幅波动(包括暴跌和暴涨). 尽管已有不少学者尝试在资产价格所遵循的几何布朗运动过程中加入跳跃项来捕捉资产价格的大幅变动(如 Duffie 等<sup>[1]</sup>, Santa-Clara 和 Yan<sup>[2]</sup>, Christoffersen 等<sup>[3]</sup>, Andersen 等<sup>[4]</sup>, Carr 和 Wu<sup>[5]</sup>), 但大家对于跳跃的两个重要部分: 跳跃尺度分布和跳跃强度的设定, 并没有统一的结论. 现有的跳跃扩散模型大多基于泊松(或者说更一般的 Lévy)跳跃过程, 由于增量的独立性假设, 这类模型往往无法很好地刻画现实市场中跳跃的聚集性特征, 即一次跳跃本身往往会引发短时间内的多次跳跃<sup>②</sup>. 而 Hawkes<sup>[6]</sup>提出的 Hawkes 过程则可以很好地对此进行刻画, 过程中的每次跳跃都会导致跳跃强度的增大, 进而使得

再次发生跳跃的概率增大. 尽管 Hawkes 过程在地震和犯罪预测、投资者下单行为分析、以及 CDS 等信用衍生品定价中已有广泛的应用, 但引入 Hawkes 过程来刻画资产价格跳跃的研究, 国内尚未有学者做过, 国外也仅有少数学者对此进行了尝试. 少数几篇代表性的国外文献主要包括: Ait-Sahalia 等<sup>[7]</sup>构建了一个互激的(mutually exciting)跳跃模型, 对金融危机的跨国传染进行了深入的研究. Fulop 等<sup>[8]</sup>提出了一个自激的(self-exciting)资产定价模型, 在模型中同时考虑了价格与波动率之间的共跳以及自激的跳跃聚集, 并检验了其在风险管理、波动率预测和期权定价中的重要运用. Xu<sup>[9]</sup>基于扩展的包含跳跃尾部的 ICAPM 动态模型, 提出了一个新的半参数估计方法, 该模型允许时变的不对称的跳跃尺度分布以及自激的跳跃强度过程, 实证结果发现模型隐含的尾部风险溢酬对 S&P500 指数收益率具有很强

① 收稿日期: 2017-11-23; 修订日期: 2019-01-05.

基金项目: 国家自然科学基金青年项目(71301137); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(20720181004).

作者简介: 陈淼鑫(1977—), 女, 福建福州人, 博士, 副教授, Email: cutecmx@163.com

② 例如 2001-01-01~2015-01-01 中国台湾市场实行 $\pm 7\%$ 的涨跌停板制度. 经统计, 在此期间台指日收益率跌幅超过4%的天数共30天, 其中有7次都发生在2008年9月中旬到11月中旬这两个月内.

的预测力. 无论是互激的跳跃模型还是自激的跳跃模型, 核心点均是在跳跃强度的模型构建中引入 Hawkes 过程, 其中, 自激的跳跃模型主要考察单个资产价格跳跃对自身价格行为的影响, 而互激的跳跃模型则是进一步考虑了不同资产价格跳跃之间的相互影响.

现有关于尾部风险溢酬(跳跃风险溢酬)的研究都表明, 跳跃风险溢酬在总的股票风险溢酬中占了极高的比例, 方差风险溢酬对股票收益率的预测力也主要来源于与跳跃风险相关的部分. 例如, Pan<sup>[10]</sup>发现虽然扩散风险占据了总方差的97%, 但只要要求5.5%的风险补偿, 而跳跃风险虽然仅占总方差的3%, 却要求3.5%的风险补偿. Broadie 等<sup>[11]</sup>发现在8%的股权风险溢酬中, 跳跃风险溢酬约为3%. Bollerslev 和 Todorov<sup>[12]</sup>发现尾部风险溢酬估计值的中位数为5.2%, 是股票总体风险溢酬中极为重要的组成部分. Yan<sup>[13]</sup>发现跳跃风险对个股的横截面收益率具有显著的预测能力. Bollerslev 等<sup>[14]</sup>也发现方差风险溢酬对收益率的预测力主要来源于与尾部风险相关的部分. 但现有的相关研究往往并未区分正跳的尾部风险溢酬和负跳的尾部风险溢酬, 而显然投资者对待这两种价格跳跃的态度是不同的, 所要求的风险补偿也是不同的. 此外, 尾部风险溢酬衡量的是投资者承担价格发生大的跳跃的风险所要求的风险补偿, 投资者情绪则反映了市场参与者的投资意愿或者预期, 两者有着内在的必然联系, 但目前也并未有文献对两者之间的关系进行直接的研究.

最后, 目前关于尾部风险的研究大多集中于美国等以机构投资者为主导的成熟市场, 我国作为新兴市场, 无论是在投资者结构还是交易模式等方面, 都和成熟市场有着较大的差异. 由于我国大陆市场直到2015年才推出场内交易的期权交易, 缺乏足够长度的期权数据, 国内对于尾部风险的研究只能利用股票现货市场来进行(如柳会珍等<sup>[15]</sup>, 陈国进等<sup>[16]</sup>, 赵华等<sup>[17]</sup>), 但从股价变动中提取的事后的尾部信息, 与期权价格中所隐含的事前的尾部信息并不完全一致. 而中国台湾与大陆同属新兴市场, 台指期权是目前全球交易最活跃的股指期货品种之一, 超过80%的交易量都来自于个人投资者. 本文希望借由对台指期权市场的研究, 来探讨新兴市场和成熟市场的不同之

处, 为现有同领域的研究提供重要的补充.

本文的基本研究思路如下: 论文的研究框架主要基于 Xu<sup>[9]</sup>提出的模型, 该模型允许时变的不对称的跳跃尺度分布以及自激的跳跃强度过程, 能够很好地刻画现实市场中跳跃的关键特征. 但 Xu<sup>[9]</sup>主观假设现实测度下正跳和负跳发生的概率始终相等, 均为0.5, 而数据表明现实测度下正跳和负跳发生的概率都是时变的, 两者未必都相等. 因此, 为了更准确地估计和刻画尾部风险特征, 本文首先对 Xu<sup>[9]</sup>的模型作了进一步的改进, 允许时变的现实测度下正跳和负跳的概率, 并利用台指期权和期货数据对跳跃的形状参数和强度参数进行估计, 得到跳跃尾部风险溢酬的估计值. 然后, 将其进一步分解为正跳的尾部风险溢酬和负跳的尾部风险溢酬, 并探讨它们对台指收益率预测力的差异. 最后, 为了进一步探讨影响尾部风险溢酬的重要因素, 还构造了中国台湾投资者情绪综合指数, 分析其与尾部风险溢酬及其两个组成部分的不同关系.

总之, 近年来, 一方面, 由于受金融危机和各种黑天鹅事件的影响, 人们最为恐惧、对投资者心态影响最严重的尾部风险成为了市场关注的焦点之一; 另一方面, 期权作为多维交易市场, 包含了大量重要的信息(如尾部风险信息等), 如何从期权交易数据中提取隐含信息已成为国外金融学术研究的一个热点. 本文基于 Hawkes 过程对台指期权中提取的尾部风险溢酬进行了深入细致的研究, 无论在实践中还是学术上都有着重要的意义. 就市场的实践而言, 准确地估计和刻画尾部风险, 有助于投资者提高避免重大损失或者获得巨额收益发生的概率, 也有助于监管者提高市场应对极端事件时的稳定性. 就学术研究而言, 本文的主要贡献在于: 首先, 尽管已有不少学者尝试在资产价格所遵循的几何布朗运动过程中加入跳跃项来捕捉资产价格的大幅变动, 但引入 Hawkes 过程来刻画资产价格跳跃的研究国内尚未有学者做过, 国外也仅有少数学者对此进行了尝试. 本文假设跳跃强度遵循 Hawkes 过程, 基于改进的 Xu<sup>[9]</sup>的模型对中国台湾市场的尾部风险溢酬进行了深入细致的研究, 丰富了该领域的研究成果. 其次, 现有关于尾部风险溢酬的研究往往并未区分正跳和负跳的尾部风险溢酬, 而显然投资者对待这两种

价格跳跃的态度是不同的,所要求的风险补偿也是不同的.而且尾部风险溢酬和投资者情绪之间有着内在的必然联系,但目前也并未有文献对两者之间的关系进行过直接的研究.因此,本文在得到尾部风险溢酬的同时,进一步将其分解为正跳和负跳的尾部风险溢酬,并探讨它们对台指收益率预测力的差异,以及与投资者情绪之间的不同关系,从而拓展了该领域的相关研究.最后,与美国这样以机构投资者为主导的成熟市场不同,中国台湾市场是一个以个人投资者为主导的新兴市场,对它的研究结果有助于更深入地探讨新兴市场和成熟市场的不同之处,为现有同领域的研究提供重要的补充.

## 1 理论模型

### 1.1 股票市场回报的动态过程

令  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是信息流  $(F_t)_{t \geq 0}$  的概率空间,在这一空间里,假设股票市场的累计回报  $R_t$  遵循以下跳跃扩散过程

$$\frac{dR_t}{R_t} = a_t dt + \sigma_{m,t} dW_{m,t} + \int_B (e^x - 1) \tilde{J}(dt, dx) \quad (1)$$

其中  $a_t$  为瞬时漂移率,  $\sigma_{m,t}$  为随机波动率,  $W_{m,t}$  为标准布朗运动,  $a_t$  和  $\sigma_{m,t}$  都是局部有界的 cad-lag (右连左极) 过程.  $J$  是一个在  $[0, \infty) \times B$  上的跳跃计数的随机测度,包含一个可预测的跳跃补偿项  $\vartheta_t(dx) dt$ , 且  $\int_B \vartheta_t(dx) dt < \infty$ ;  $B$  被定义为实线上的一个子集,  $B = [-\infty, b^-] \cup [b^+, +\infty]$ , 其中  $b^-$  和  $b^+$  均为正数. 因此, 补偿的跳跃测度  $\tilde{J}(dt, dx) = J(dt, dx) - \vartheta_t(dx) dt$  是一个鞅测度,  $\int_B (e^x - 1) \tilde{J}(dt, dx)$  是一个鞅过程.

在该模型中, 给定信息流  $F_t$ , 股票市场的未来收益率主要暴露于两种类型的冲击: 一个连续的鞅  $(\sigma_{m,t} dW_{m,t})$  和一个不连续的鞅(已实现大跳的加总). 所谓“大跳”指少数位于头尾分位点之外的极端事件,  $b^-$  和  $b^+$  即为头尾分位点的临界点.

令跳跃测量  $\mathcal{J}([0, t] \times B)$  依赖于一个独立于跳跃尺度的潜在的计数过程  $N_t$ . 假设每单位时间发生跳跃的次数服从泊松分布, 即  $dN_t \sim$

$Poisson(\lambda_t dt)$ , 从而可得到一个分离可乘的强度测量  $\vartheta_t(dx) dt = \lambda_t f_t(x) dx dt$ , 其中,  $\lambda_t$  是跳跃发生的瞬时强度,  $f_t(x)$  是跳跃尺度的密度函数. 因此, 强度测量有两个随机源: 跳跃强度  $\lambda_t$  和密度函数  $f_t(x)$ .

考虑到在现实市场中跳跃虽然很少发生但是往往在时间上有聚集性, 本文将跳跃强度  $\lambda_t$  构建为一个平稳的路径依赖的自激过程, 即 Hawkes 过程

$$d\lambda_t = \kappa_\lambda (u_\lambda - \lambda_t) dt + \int_B \phi_\lambda J(dt, dx) \quad (2)$$

其中  $\kappa_\lambda$  是均值回复速度,  $u_\lambda$  是跳跃强度的长期均值, 对于任意  $x \in B$  都有  $\phi_\lambda > 0$ , 因此, 当收益率  $R_t$  发生跳跃时, 跳跃强度总是向上跳跃, 即无论收益率发生正跳还是负跳, 跳跃强度都会增大, 然后均值回复直到发生下一次跳跃.

同时, 为了尽可能准确地刻画跳跃尺度的时变分布, 采用 Kou 和 Wang<sup>[18]</sup> 的双指数模型

$$f_t^\pm(x) = \alpha_t^\pm \pi_t^\pm e^{\alpha_t^\pm |k^* \pm x|} e^{-\alpha_t^\pm |x|} \quad (3)$$

其中  $\alpha_t$  描述了衰减率, 是跳跃的形状参数,  $\pi_t^+$  表示正的大跳发生的概率,  $\pi_t^- = 1 - \pi_t^+$  表示负的大跳发生的概率,  $f_t^\pm(x)$  则表示正跳或负跳的密度函数. 因此, 与 Xu<sup>[9]</sup> 假设  $\pi^- = \pi^+ = 0.5$  不同, 本文假设现实测度下正跳和负跳发生的概率都是可变的, 且两者未必都相等.

### 1.2 带随机波动和跳跃项的跨期模型

假设代表性投资者每期拥有一个消费流  $C_t$ , 并且假设其效用函数为 Epstein-Zin-Weil 效用函数

$$U_t = [(1 - e^{-\delta\psi}) C_t^{\frac{1-\psi}{\theta}} + e^{-\delta\psi} (E[U_{t+\Delta}^{1-\psi} | F_t])^{\frac{1}{\theta}}]^{\frac{\theta}{1-\psi}} \quad (4)$$

其中  $\delta$  是时间折现率,  $\gamma$  是风险厌恶系数,  $\psi$  是跨期替代弹性, 且  $\theta = \frac{\gamma - 1}{\psi^{-1} - 1}$ . 根据 Bollerslev 等<sup>[19]</sup>, 代表性投资者通过对终生的消费选择来最大化其效用, 从而使得随机贴现因子  $M_t$  是对数消费  $\ln C_t$  和所有被投资资产(即总财富)对数回报  $\ln R_{c,t}$  的线性函数

$$d \ln M_t = -\theta \delta dt - \theta \psi^{-1} d \ln C_t + (\theta - 1) d \ln R_{c,t} \quad (5)$$

为了保留定价核的仿射性质以便于处理, 参

考 Eraker 和 Shaliastovich<sup>[20]</sup> 的做法,进行对数线性化后可得

$$d \ln R_{c,t} \approx \kappa_0 dt + \kappa_1 d\omega_t - (1 - \kappa_1) \omega_t dt + d \ln C_t \quad (6)$$

其中  $\omega_t = \ln(P_{c,t}/C_t)$ ,  $\kappa_0 = \ln(1 + e^{E(\omega)}) - \kappa_1 E(\omega)$ ,  $\kappa_1 = e^{E(\omega)} / (1 + e^{E(\omega)})^{-1}$ . 根据公式(5)~公式(6),消除  $\ln C_t$ ,并定义套保需求  $h_t = \kappa_0 + \kappa_1 \omega_t$ ,可得到下式

$$d \ln M_t = -\gamma d \ln R_{c,t} + \theta \psi^{-1} \left( dh_t - \left( \psi \delta - \frac{\kappa_0}{\kappa_1} + \frac{1 - \kappa_1}{\kappa_1} h_t \right) dt \right) \quad (7)$$

公式(7)中的第一项作为一个“坏的时间”的指示器,代表了禀赋风险(即对总财富回报率  $\ln R_{c,t}$  的负冲击).由于投资者不喜欢市场下跌的风险并愿意为能够对冲该风险的资产支付更多,因此一个能够提供市场下跌保护的资产是有价值的,从而只能获得一个比较低的溢酬.公式(7)中的第二项则来自于影响定价核的其它类型风险.

假设总财富回报率  $R_{c,t}$  遵循以下跳跃扩散过程

$$\frac{dR_{c,t}}{R_{c,t}} = a_{c,t} dt + \sigma_{c,t} dW_{c,t} + \int_B (e^{\frac{\gamma J_t}{\gamma} x} - 1) \tilde{J}(dt, dx) \quad (8)$$

其中  $\sigma_{c,t} dW_{c,t} = \sigma_c dW_{c^\perp,t} - \phi_c \sqrt{q_t} dW_{q,t}$ ,  $\sigma_{c,t}^2 = \sigma_c^2 + \phi_c^2 q_t$ .

公式(8)的最后一项代表总财富回报率  $R_{c,t}$  与股票市场回报率  $R_t$  的共跳,其中比例参数为  $\frac{\gamma_{J,t}}{\gamma}$ . 尽管总财富回报率和股票市场回报率依赖于共同的跳跃计数过程,但两者的跳跃尺度可以不同,因此,本文允许  $\gamma_{J,t}$  为时变的且可以不同于  $\gamma$ .

假设公式(1)中对于股票市场回报率  $R_t$  有

$$\sigma_{m,t} dW_{m,t} = \sigma_c dW_{c^\perp,t} - \phi_m \sqrt{q_t} dW_{q,t} + \sigma_m dW_{m^\perp,t}, \sigma_{m,t}^2 = \sigma_c^2 + \phi_m^2 q_t + \sigma_m^2.$$

其中  $dW_{c^\perp,t}$ ,  $dW_{m^\perp,t}$  和  $dW_{q,t}$  是相互独立的冲击.

假设波动率成分  $q_t$  服从 Heston 模型或平方根过程

$$dq_t = \kappa_q (\mu_q - q_t) dt + \phi_q \sqrt{q_t} dW_{q,t} \quad (9)$$

在无套利条件下,求解可得公式(1)中的漂移项

$$a_t = r_{f,t} + \gamma \sigma_c^2 + \phi_m (\gamma \phi_c + \phi_q) q_t + \lambda_t \left( \int_B (e^x - 1) f_t(x) dx - \int_B (e^x - 1) \times e^{-\gamma J_t x + \phi_{\lambda,t}} f_t(x) dx \right) \quad (10)$$

其中  $\phi_q$  和  $\phi_{\lambda,t}$  为定价系数.

定义漂移项  $a_t$  与无风险收益率  $r_{f,t}$  之差为瞬时权益(股票)风险溢酬,即:  $ERP_t = a_t - r_{f,t}$ , 则  $ERP_t$  可分为两个部分:波动部分  $ERP_{V,t}$  和跳跃部分  $ERP_{J,t}$ . 具体如下:

$$ERP_t = ERP_{V,t} + ERP_{J,t} \quad (11)$$

$$ERP_{V,t} = \gamma \sigma_c^2 + \phi_m (\gamma \phi_c + \phi_q) q_t \quad (12)$$

$$ERP_{J,t} = \lambda_t \left( \int_B (e^x - 1) f_t(x) dx - \int_B (e^x - 1) e^{-\gamma J_t x + \phi_{\lambda,t}} f_t(x) dx \right) \quad (13)$$

$ERP_{V,t}$  和  $ERP_{J,t}$  分别代表了对扩散风险和跳跃风险的补偿. 如果没有跳跃,即  $\lambda_t = 0$ , 权益风险溢酬变为  $ERP_{V,t} > 0$ , 暂时性的变化仅仅由波动率因子  $q_t$  解释; 如果存在跳跃,即  $\lambda_t > 0$ , 权益风险溢酬同时包含  $ERP_{V,t}$  和  $ERP_{J,t}$ . 平均而言,  $ERP_{J,t}$  应该为正,代表对极端坏的事件的补偿. 当跳跃强度  $\lambda_t$  不再是随机波动因子  $q_t$  的仿射形式时,这样的分离变得尤其重要.

在风险中性测度下,跳跃尺度分布的函数形式为

$$f_t^{Q^\pm}(x) = \alpha_t^{Q^\pm} \pi_t^{Q^\pm} e^{\alpha_t^{Q^\pm} |k^* \pm|} e^{-\alpha_t^{Q^\pm} |x|} \quad (14)$$

其中  $\alpha_t^{Q^+} = \alpha_t^+ + \gamma_{J,t}$ ,  $\alpha_t^{Q^-} = \alpha_t^- - \gamma_{J,t}$ .  $\gamma_{J,t}$  度量了两个测度下形状参数的差异,因此被称为形状溢酬.

在风险中性测度下,任何负跳或正跳发生的概率都是  $\gamma_{J,t}$  的函数

$$\pi_t^{Q^-}(\gamma_{J,t}) = \frac{1}{1 + \frac{\pi_t^+}{\pi_t^-} e^{-\gamma_{J,t}(\lambda_t k_t^* + -k_t^*)} \frac{\alpha_t^+ \alpha_t^{Q^-}}{\alpha_t^{Q^+} \alpha_t^-}} \quad (15)$$

$$\pi_t^{Q^+}(\gamma_{J,t}) = 1 - \pi_t^{Q^-}(\gamma_{J,t}) = \frac{\frac{\pi_t^+}{\pi_t^-} e^{-\gamma_{J,t}(\lambda_t k_t^* + -k_t^*)} \frac{\alpha_t^+ \alpha_t^{Q^-}}{\alpha_t^{Q^+} \alpha_t^-}}{1 + \frac{\pi_t^+}{\pi_t^-} e^{-\gamma_{J,t}(\lambda_t k_t^* + -k_t^*)} \frac{\alpha_t^+ \alpha_t^{Q^-}}{\alpha_t^{Q^+} \alpha_t^-}} \quad (16)$$

在风险中性测度下,跳跃强度的公式为

$$\lambda_t^Q = \lambda_t e^{\phi_{\lambda,t}} \int_B e^{-\gamma J_t x} f_t(x) dx \quad (17)$$

其中  $\phi_\lambda$  度量了两个测度下跳跃强度的大部分差异, 因此, 也被称为强度溢酬.

## 2 尾部风险溢酬的估计

### 2.1 样本选择

台指期权 (TXO) 是目前全球市场交易最为活跃的股指期货品种之一, 因此本文以台指期权作为研究对象. 综合考虑了数据的可获得性并尽可能涵盖不同的市场波动状况, 样本期为 2007 年 1 月 1 日到 2012 年 11 月 30 日. 图 1 描绘了样本期内中国台湾加权指数日对数收益率与台指期权 VIX 指数的走势. 从图中可以明显看出跳跃的聚集现象, 尤其是在金融危机期间. 整个样本期间既包括市场波动较为温和的时期, 也包括市场大幅波动的时期, 涵盖了不同的市场波动状况, 具有比较好的代表性.

根据 Xu<sup>[9]</sup> 提出的半参数估计方法, 需要同时

运用台指期权和台指期货的数据来估计相关的参数. 就台指期权而言, 本文选择短期、深度虚值、有着相同到期日的期权合约, 即对于每个交易日  $t$ , 选择剩余期限为 8 天 ~ 35 天具有相同到期日  $T$  的深度虚值期权. 所谓深度虚值看涨 (看跌) 期权是指期权在值程度的自然对数 ( $\ln$  moneyness)  $k = \ln(K/F_{t-T})$  高于 (低于)  $k^* = 1.75 \sigma_t^{ATM} \sqrt{\tau}$  ( $k^* = -2 \times \sigma_t^{ATM} \sqrt{\tau}$ ). 其中,  $K$  是期权的执行价格,  $F_{t-T}$  是到期时间为  $T$  的期货价格,  $\sigma_t^{ATM}$  是平值期权的 BS 隐含波动率,  $\tau$  是期权的剩余期限. 之所以使用短期深度虚值的期权来进行参数估计, 主要是因为随着到期日的临近, 深度虚值期权仅仅被用来对冲极端的大的跳跃风险, 其价格主要反映的是投资者对于市场在短期发生暴涨或暴跌的预期. 就台指期货而言, 本文还需要用到台指期货 5min 的高频数据, 即对于每个交易日  $t$  选择与期权具有相同到期日  $T$  的台指期货合约从开盘到收盘每 5min 的价格数据.

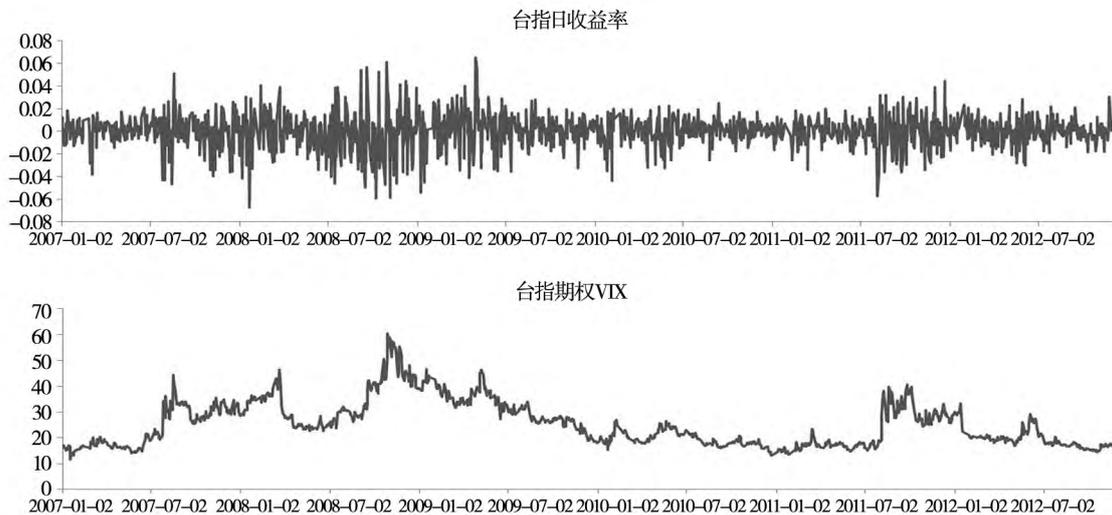


图 1 中国台湾加权指数日收益率与台指期权 VIX 指数走势

Fig. 1 TAIEX returns and VIX

### 2.2 现实测度下负跳发生的概率

首先利用台指期货 5 min 的高频数据来计算现实测度下负跳发生的概率: 当  $\Delta_{t,j}f > \omega_{j,t}$  时, 记录一次正跳; 当  $\Delta_{t,j}f < -\omega_{j,t}$  时, 记录一次负跳. 其中  $f$  表示期货价格的对数,  $\Delta_{t,j}f = f_{t,j} - f_{t,j-1}$  表示  $t$  日第  $j$  个 5 min 的期货对数价格之差,  $\omega_{j,t} = 3\left(\frac{1}{n}\right)^{0.49} \sqrt{ICV_{t-1}}$   $TOD_j$  为界定价格跳跃的临界值, 每天每个 5 min 时段都不同. 台指期货每日的交易时间从 8: 45 到

13: 45, 因此每个交易日共划分为  $n = 60$  个 5 min 时段.  $ICV_{t-1}$  是前一日期货价格的连续变动,  $TOD_j$  是第  $j$  个 5 min 的时间因子 (time-of-day factor).

图 2 显示了中国台湾期货市场时间因子的估计结果. 与美国市场  $TOD_j$  因子呈 U 型不同, 中国台湾市场  $TOD_j$  因子在日内大致呈 L 型, 开盘 1h 内的时间因子最大, 这表明中国台湾市场在每天开盘时段波动较大. 此外, 隔夜的时间因子值高达 24.88 (图中未表示), 这说明中国台湾市场受隔

夜信息影响最大,大跳主要集中在隔夜收益率中.

图3显示了中国台湾市场每月负跳发生的实际概率.从图中可以看出,每月负跳发生的实际概率差别较大,最小值为0.432、最大值为0.565,最

大值与最小值之差达到了13.3%.所以与Xu<sup>[9]</sup>主观假设 $\pi^- = \pi^+ = 0.5$ 不同,为了更准确地估计和刻画尾部风险溢酬,本文在后续估计每个月参数时,都采用当月负跳发生的实际概率.

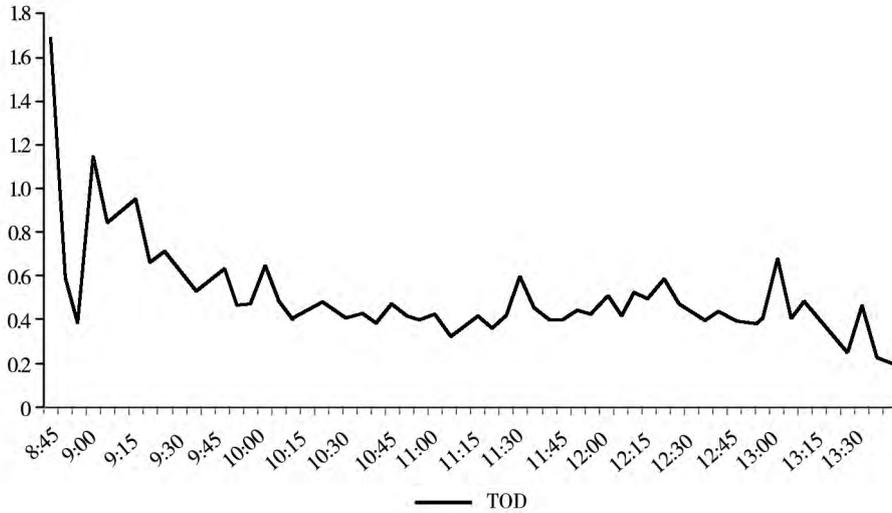


图2 中国台湾期货市场的时间因子  
Fig. 2 Time-of-day factor

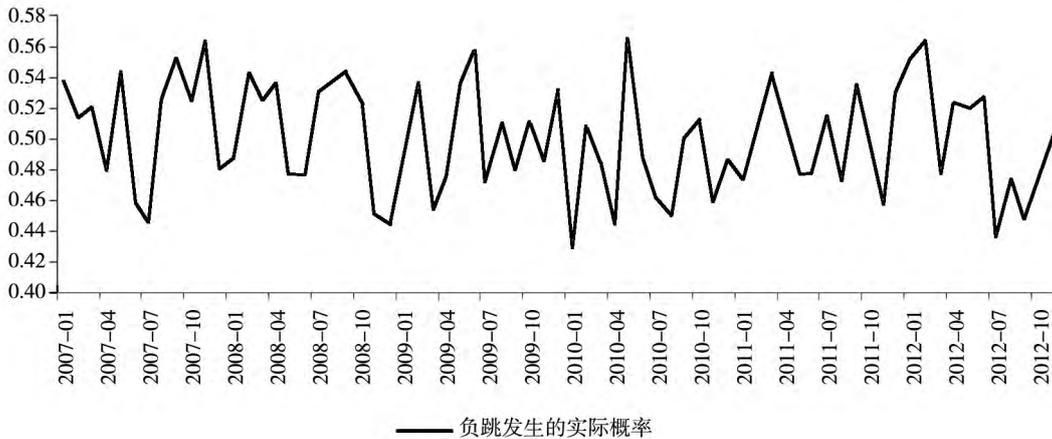


图3 中国台湾市场每月负跳发生的实际概率  
Fig. 3 The physical probability for left jumps

### 2.3 跳跃形状和跳跃强度参数

大多数的现有研究都假定跳跃形状是固定的,但跳跃形状和跳跃强度从不同的角度诠释了少数极端事件的信息,因此,本文允许跳跃形状和跳跃强度均为时变的,先运用无模型方法估计出跳跃形状参数,再利用估计出来的跳跃形状参数对跳跃强度进行估计.

#### 2.3.1 跳跃形状参数的估计

在风险中性测度下,令 $O_{t,T}(k)$ 表示 $t$ 时刻到期时间为 $T$ 在值程度的对数为 $k$ 的台指期权的价格.根据Bollerslev和Todorov<sup>[12,21]</sup>,当剩余期限 $\tau \rightarrow 0$ ( $\tau = T - t$ ),看涨期权的 $k \rightarrow +\infty$ ,看跌期权的 $k \rightarrow -\infty$ 时<sup>③</sup>,期权价格与期货价格折现值之比可以有效地分离出跳跃风险,即

③ 实践中只需要执行价格 $K$ 对于看涨期权足够大,对于看跌期权足够小即可.

$$\frac{e^{T_x} O_{i,T}(k)}{\tau F_i} \xrightarrow{p} \lambda_i^Q \int_B (e^x - e^k)^{\pm} f_i^{Q\pm}(x) dx \quad (18)$$

因为跳跃强度  $\lambda_i^Q$  在公式(18)中仅仅以一阶形式出现, 所以对于任意在值程度的对数不同的一对期权:  $k_1$  和  $k_2$ , 同一天的期权价格的比值将不再依赖于跳跃强度

$$\ln \frac{O_{i,T}(k_2)}{O_{i,T}(k_1)} \xrightarrow{p} \ln \frac{\int_B (e^x - e^{k_2})^{\pm} f_i^{Q\pm}(x) dx}{\int_B (e^x - e^{k_1})^{\pm} f_i^{Q\pm}(x) dx} \quad (19)$$

将  $f_i^{Q\pm}(x)$  的表达式代入公式(19)会发现公式右边仅包括形状参数  $\alpha_i^{Q\pm}$  和在值程度的对数  $k_1$  及  $k_2$ . 因此, 可以通过大量的短期深度虚值期权得到形状参数  $\alpha_i^{Q\pm}$  的一致估计量

$$\hat{\alpha}_i^{Q\pm} = \operatorname{argmin}_{\alpha_i^{Q\pm} \in R} \sum_{s=i}^{T_0} \sum_{i=2}^{N_s^{\pm}} \left| \ln \frac{O_{s,T}(k_{s,i})}{O_{s,T}(k_{s,i-1})} - (1 \mp \alpha_i^{Q\pm}) \right| \quad (20)$$

其中  $N_s^{\pm}$  是  $s$  日短期深度虚值看涨或看跌期权的总数量,  $T_0$  是期权到期日  $T$  之前 8 个日历日左右的时间<sup>④</sup>. 同时, 为了确保有足够的期权数据用于估计, 本文采用以月为基础的估计.

根据前文构建的扩展的 ICAPM 模型, 要估计现实测度下的形状参数, 必须先估计出形状溢酬  $\gamma_{J,t}$ . 根据公式(15) 给定现实测度下负跳发生的

概率  $\pi_i^-$  和风险中性测度下的衰减率  $\alpha_i^{Q\pm}$  形状溢酬  $\gamma_{J,t}$  可以由风险中性测度下负跳发生的概率  $\pi_i^{Q-}$  唯一决定. 因此, 可以得到形状溢酬  $\gamma_{J,t}$  的估计值

$$\hat{\gamma}_{J,t} = \operatorname{argmin}_{\gamma_{J,t} \in R} \sum_{s=t}^{T_0} \sum_{i=1}^{N_s^-} \sum_{j=1}^{N_s^+} \left| \ln \frac{PUT_{s,T}(k_{s,i})}{CALL_{s,T}(k_{s,j})} - (1 + \alpha_i^{Q-}) k_{s,i} + \ln \frac{\alpha_i^{Q-} + 1}{(\alpha_i^{Q+} - 1)} + (1 - \alpha_i^{Q+}) k_{s,j} - \ln \left\{ \frac{\pi_s^{Q-}(\gamma_{J,t}) e^{-\alpha_i^{Q-} k_{s,i}^*}}{[1 - \pi_s^{Q-}(\gamma_{J,t})] e^{\alpha_i^{Q+} k_{s,j}^*}} \right\} \right| \quad (21)$$

现实测度下形状参数的估计值则可以根据  $\hat{\alpha}_i^+ = \hat{\alpha}_i^{Q+} - \hat{\gamma}_{J,t}$  和  $\hat{\alpha}_i^- = \hat{\alpha}_i^{Q-} + \hat{\gamma}_{J,t}$  求出.

图 4 显示了每个月的形状溢酬  $\gamma_{J,t}$  的估计值. 在整个样本区间, 形状溢酬的平均值为 1.51, 意味着总财富回报率与股票市场回报率之间存在正向的动态关系. 图 5 和图 6 分别显示了负跳和正跳的形状参数估计值. 首先, 从图 5 可以看到风险中性测度下负跳的形状参数在 2008 年底的金融危机期间达到最低值 8.62, 这意味着危机期间存在极端的左侧肥尾分布. 其次, 风险中性测度下正跳和负跳的形状参数的均值分别为 36.68 和 19.28; 现实测度下正跳和负跳的形状参数的均值分别为 35.17 和 20.79. 虽然正跳和负跳的形状参数都是时变的, 但是无论是在风险中性测度下还是现实测度下, 正跳的形状参数在大多数时间

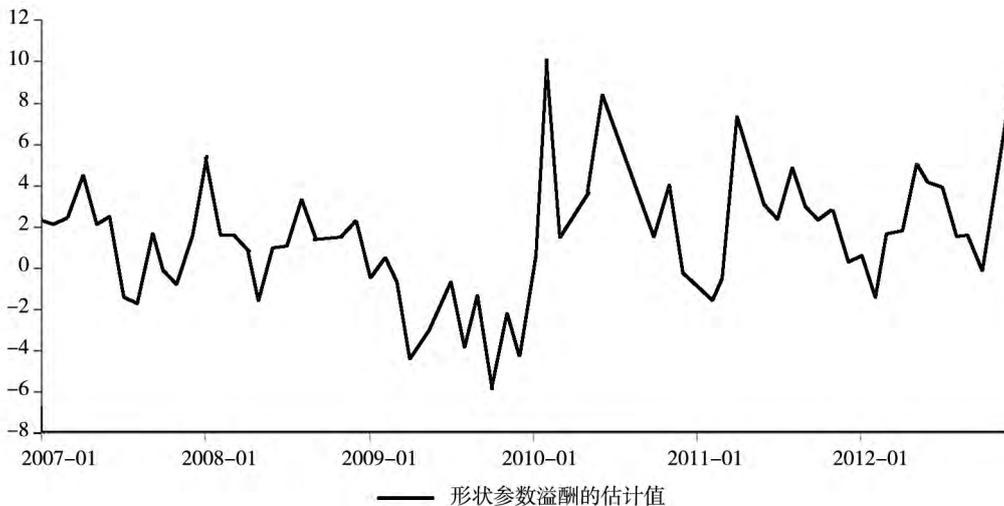


图 4 形状参数溢酬的估计值  
Fig. 4 Estimated shape premium

④ 没有包括到期日之前 7 个日历日内的期权数据是因为过于接近到期日, 包含了大量的噪音.



图5 负跳的形状参数估计值

Fig. 5 Estimated left-jump shape parameter

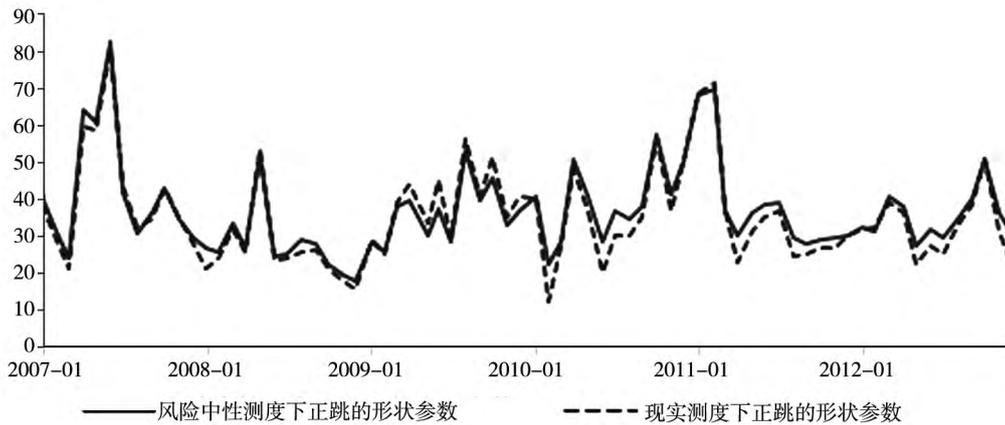


图6 正跳的形状参数估计值

Fig. 6 Estimated right-jump shape parameter

均大于负跳的形状参数,即  $\hat{\alpha}_i^{Q+} > \hat{\alpha}_i^{Q-}$ ,  $\hat{\alpha}_i^+ > \hat{\alpha}_i^-$ , 这表明在两种测度下,正跳的跳跃尺度衰减率都更快,跳跃尺度的密度函数形状也更陡峭。此外,值得注意的是,正跳的形状参数在风险中性测度下的均值大于其在现实测度下的均值,而负跳的形状参数在风险中性测度下的均值小于其在现实测度下的均值,即正跳的跳跃尺度在风险中性测度下衰减更快,而负跳的跳跃尺度在现实测度下衰减更快。这表明在现实测度下,人们更加厌恶资产价格出现下跌的情况,更偏向资产价格出现上涨的情况。

### 2.3.2 跳跃强度参数的估计

在得到  $\hat{\alpha}_i^{Q\pm}$  后,根据公式(18)即可得到风险

中性测度下跳跃强度  $\lambda_i^Q$  的一致估计量。因为对于同一时刻的看涨和看跌期权来说,  $\lambda_i^Q$  是一样的,故此处同时采用看涨和看跌期权的数据来估计  $\lambda_i^Q$ ,具体估计式如下:

$$\hat{\lambda}_i^Q = \operatorname{argmin}_{\lambda_i^Q \in R} \sum_{s=t}^{T_0} \sum_{i=1}^{N_t^-} \sum_{j=1}^{N_t^+} \left| \ln \left( \frac{e^{r_s T} \operatorname{CALL}_{s,T}(k_{s,j})}{\tau_s F_s} / \frac{e^{(1-\alpha_i^{Q+})k_{s,j} + \alpha_i^{Q+} k_i^{*+}}}{(\alpha_i^{Q+} - 1)} + \frac{e^{r_s T} \operatorname{PUT}_{s,T}(k_{s,i})}{\tau_s F_s} / \frac{e^{(1+\alpha_i^{Q-})k_{s,i} - \alpha_i^{Q-} k_i^{*-}}}{(\alpha_i^{Q+} + 1)} \right) - \ln \lambda_i^Q \right| \quad (22)$$

其中  $k_i^{*+}$  和  $k_i^{*-}$  是定义大的跳跃的临界点。

为了估计现实测度下的跳跃强度,根据 Xu<sup>[9]</sup>,令预期的跳跃尾部指数  $E_i JX$  为跳跃强度的代理变

量,先利用台指期货 5 min 高频数据通过 HAR-VAR 卡尔曼滤波方法<sup>⑤</sup>估计出  $EJX_{k_i^\pm}^\pm$

$$JX_{k_i^\pm}^\pm = \int_{[k^*, \pm, \infty]} (e^x - e^{k_i^\pm}) J(dt dx) \quad (23)$$

$$EJX_{k_i^\pm}^\pm = E_t JX_{k_i^\pm}^\pm \xrightarrow{P} \lambda_t \int_{[k^*, \pm, \infty]} (e^x - e^{k_i^\pm}) f_i(x) dx \quad (24)$$

然后结合公式(18),对于任意一日  $s \in [t, T_0]$  可以利用下式来估计强度溢酬  $\phi_{\lambda, t}$

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{\lambda, t} = \operatorname{argmin}_{\phi_{\lambda, t} \in R} & \sum_{s=t}^{T_0} \sum_{i=1}^{N_s^-} \sum_{j=1}^{N_s^+} \left| \ln \left( \frac{e^{r_s T} CALL_{s, T}(k_{j, s})}{\tau_s F_s \times JTX_{[s, T]}^+} \right) \right. \\ & \frac{e^{(1-\alpha_i^+)(k_{j, s} - k_i^{pe+})}}{(\alpha_i^{Q+} - 1)(\alpha_i^+ - 1)} + \frac{e^{r_s T} PUT_{s, T}(k_{i, s})}{\tau_s F_s \times JTX_{[s, T]}^-} \\ & \left. \frac{e^{(1+\alpha_i^+)(k_{j, s} - k_i^{pe-})}}{(\alpha_i^{Q+} + 1)(\alpha_i^+ + 1)} - \ln \int_B \alpha_i^\pm e^{\alpha_i^\pm |k^* P^\pm - \gamma_{J, s} \alpha_i^\pm| x} dx - \phi_{\lambda, t} \right| \end{aligned} \quad (25)$$

最后根据公式(17)得到跳跃强度在现实测度下的估计值

$$\widehat{\lambda}_t = \widehat{\lambda}_t^Q / (e^{\widehat{\phi}_{\lambda, t}} \int_B e^{-\gamma_{J, s} x} f_i(x) dx) \quad (26)$$

图 7 显示了跳跃强度在风险中性测度下和现实测度下的估计值. 首先,从整体上看,风险中性测度下跳跃强度的估计值大于现实测度下跳跃强

度的估计值. 具体而言,风险中性测度下跳跃强度的均值为 1.83,这表明在风险中性测度下,中国台湾市场一年将会发生 1.83 次大的跳跃,即大约每半年发生一次大的跳跃;现实测度下跳跃强度的均值为 0.57,这表明在现实测度下,中国台湾市场一年将会发生 0.57 次大的跳跃,即大约每两年发生一次大跳跃. 而 Xu<sup>[9]</sup>对美国市场跳跃强度的估计结果在风险中性测度和现实测度下的均值分别为 1.00 和 0.21,可见新兴市场发生大跳的概率要远高于成熟市场. 其次,现实测度下跳跃强度的最高点和次高点均发生在 2008 年金融危机期间,可见当市场大跌时跳跃强度会显著增强. 风险中性测度和现实测度下的跳跃强度都与台指月收益率的绝对值在 5% 的水平下显著相关,相关系数分别为 0.34 和 0.25,这与跳跃强度服从 Hawkes 过程的模型设定相吻合,也与市场的实际情况相符合. 跳跃强度是指单位时间内资产价格发生跳跃的次数,亦可理解为跳跃发生的概率. 一般情况下,当市场出现大幅下跌(上涨)时,市场将继续大跌(大涨)的可能性将会增加,即当收益率发生跳跃时,无论是正跳还是负跳,跳跃强度都会显著上升,因此,现实市场中跳跃虽然很少发生,但是往往在时间上存在聚集性.

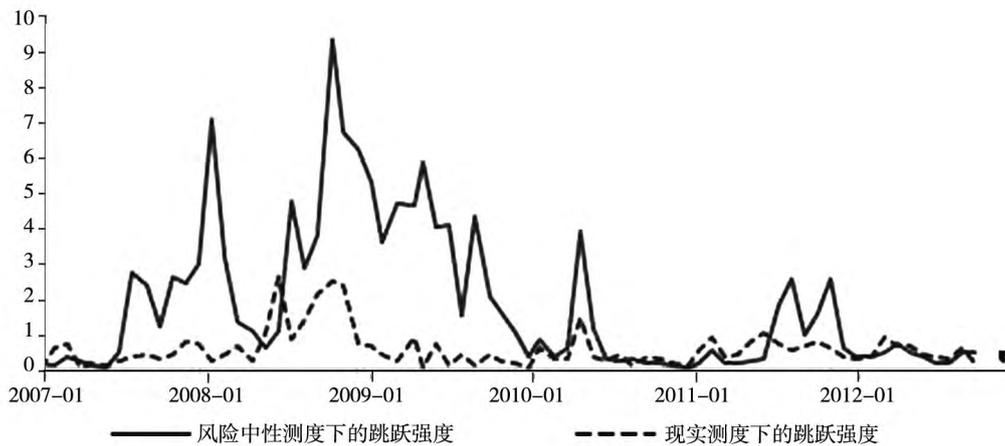


图 7 两种测度下跳跃强度的估计值 Fig. 7 Estimated jump intensity

### 2.4 尾部风险溢酬 时变的不对称的跳跃形状参数和对称的跳跃强

度参数很好地刻画了两个测度下的跳跃特征,可以进一步用来估计尾部风险溢酬. 对于  $B = [-\infty,$

⑤ HAR-VAR 卡尔曼滤波方法是基于异质自回归模型、向量自回归模型和卡尔曼滤波的一种估计方法. 详细估计过程见 Xu<sup>[9]</sup>的附录 C; 此外,在 Bollerslev 和 Todorov<sup>[12]</sup>中也运用了相似的估计方法.

$k_i^{*-}$  ]  $\cup$   $[k_i^{*+}, \infty]$  尾部风险溢酬  $ERP\hat{P}J_{B_i}$  可以进一步分为正跳的尾部风险溢酬  $ERP\hat{J}_{B_i}^+$  和负跳的尾部风险溢酬  $ERP\hat{J}_{B_i}^-$  两个部分

$$ERP\hat{J}_{B_i} = ERP\hat{J}_{B_i}^+ + ERP\hat{J}_{B_i}^- \quad (27)$$

$$ERP\hat{J}_{B_i}^+ = -\hat{\lambda}_i + \hat{\lambda}_i^Q + \hat{\lambda}_i \int_{B^+} \hat{\alpha}_i^\pm \hat{\pi}_i^\pm e^{\hat{\alpha}_i^\pm (|k_i^{*+} - |x||)^{+\alpha}} dx - \hat{\lambda}_i^Q \int_{B^+} \hat{\alpha}_i^{Q\pm} \hat{\pi}_i^{Q\pm} e^{\hat{\alpha}_i^{Q\pm} (|k_i^{*+} - |x||)^{+\alpha}} dx \quad (28)$$

$$ERP\hat{J}_{B_i}^- = -\hat{\lambda}_i + \hat{\lambda}_i^Q + \hat{\lambda}_i \int_{B^-} \hat{\alpha}_i^\pm \hat{\pi}_i^\pm e^{\hat{\alpha}_i^\pm (|k_i^{*-} - |x||)^{+\alpha}} dx - \hat{\lambda}_i^Q \int_{B^-} \hat{\alpha}_i^{Q\pm} \hat{\pi}_i^{Q\pm} e^{\hat{\alpha}_i^{Q\pm} (|k_i^{*-} - |x||)^{+\alpha}} dx \quad (29)$$

图8给出了尾部风险溢酬及其两个组成部分的走势。从图中可以看出,负跳的尾部风险溢酬  $ERP\hat{J}_{B_i}^-$  基本为正,而正跳的尾部风险溢酬  $ERP\hat{J}_{B_i}^+$  基本为负,两者走势大致呈现出反向关系。据统计,负跳和正跳尾部风险溢酬的均值分别为0.4128和-0.3988(见表1),这表明中国台湾市场投资者对于承担市场大跌的风险需要一定的风险补偿,但愿意牺牲一部分收益来换取市场

的大涨。而从整体来看,尾部风险溢酬  $ERP\hat{P}J_{B_i}$  的均值为正(0.0139),这表明在综合考虑了市场可能出现大涨或大跌的情况下,中国台湾市场的投资者对于承担价格发生大的跳跃的风险要求一定的风险补偿,并且相对而言投资者更担忧市场出现大跌的情况。同时,值得注意的是:尽管  $Xu^{[9]}$  对美国市场跳跃强度的估计值小于本文对中国台湾市场跳跃强度的估计值,但他对美国市场尾部风险溢酬估计值的均值为6.75%<sup>⑥</sup>,远高于中国台湾市场的估计结果。也就是说中国台湾市场发生大跳的概率要远高于美国市场,但中国台湾投资者要求的跳跃尾部风险补偿却远低于美国投资者,这表明相对而言,中国台湾投资者的风险厌恶程度可能低于美国投资者。此外,从图9可以看到样本期内尾部风险溢酬波动较大的时段主要集中在两个时期:一是2008年下半年金融危机期间,当时指数从前期的高点9000点左右一路下跌到4500点左右,二是2009年市场大幅回升期间,指数从4500点左右的底部一路上涨回到8000点以上。而在其他市场相对平稳的时期尾部风险溢酬的值都很小,波动也很小。这表明,当市场出现大幅跳跃时(包括暴涨和暴跌),投资者对于承担价格发生大的跳跃的风险要求的风险补偿比较大;当市场波动小时,投资者对于承担价格发生大的跳跃的风险要求的风险补偿就比较小。

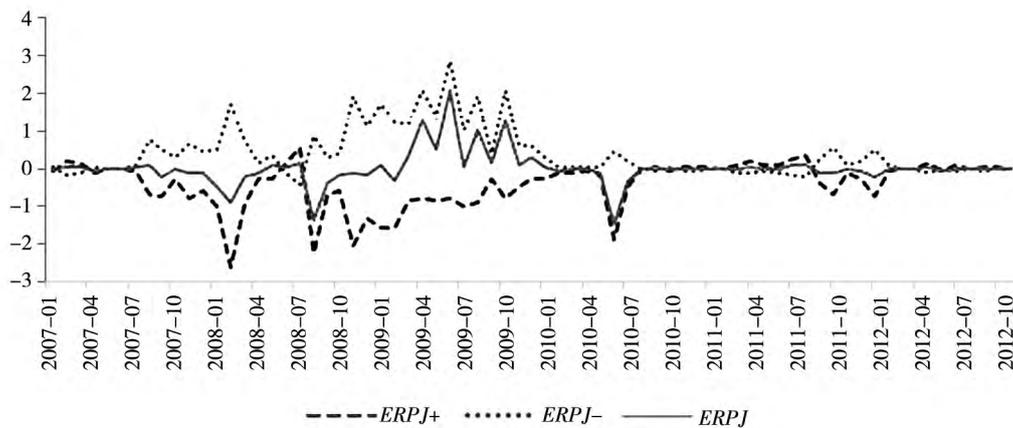


图8 尾部风险溢酬及其组成部分走势图  
Fig. 8 Tail risk premium and its twocomponents

⑥ 相对而言,  $Xu^{[9]}$  的估计结果高于其他学者对美国市场的研究结果。例如,  $Pan^{[10]}$  的估计结果为3.5%,  $Broadie$  等<sup>[11]</sup> 的估计结果大约为3%,  $Bollerslev$  和  $Todorov^{[12]}$  的估计结果大约为5.2%。但这些学者对美国市场的估计结果也仍然高于本文对中国台湾市场的估计结果。

表 1 尾部风险溢酬及其组成部分的描述性统计

Table 1 Summary statistics of tail risk premium and its two components

	$\widehat{ERPJ}_{B,t}^+$	$\widehat{ERPJ}_{B,t}^-$	$\widehat{ERPJ}_{B,t}$
均值	-0.398 8	0.412 8	0.013 9
最大值	0.58	2.87	2.09
最小值	-2.64	-0.45	-1.45
标准差	0.634 4	0.675 9	0.462 0

表 2 列出了尾部风险溢酬及其两个组成部分之间的相关系数. 负跳的尾部风险溢酬  $\widehat{ERPJ}_{B,t}^-$  与正跳的尾部风险溢酬  $\widehat{ERPJ}_{B,t}^+$  在 1% 的显著性水平下负相关, 相关系数为 -0.753, 这一点也可以从图 9 中两者的走势看出. 尾部风险溢酬  $\widehat{ERPJ}_{B,t}$  与负跳的尾部风险溢酬  $\widehat{ERPJ}_{B,t}^-$  在 1% 的

显著性水平下正相关, 相关系数为 0.429; 与正跳的尾部风险溢酬  $\widehat{ERPJ}_{B,t}^+$  只在 5% 的显著性水平下正相关, 相关系数为 0.271, 这表明相对而言尾部风险溢酬  $\widehat{ERPJ}_{B,t}$  受负跳的尾部风险溢酬  $\widehat{ERPJ}_{B,t}^-$  的影响更大.

表 2 尾部风险溢酬及其组成部分的相关性分析

Table 2 Correlations among tail risk premium and its two components

	$\widehat{ERPJ}_{B,t}^+$	$\widehat{ERPJ}_{B,t}^-$	$\widehat{ERPJ}_{B,t}$
$\widehat{ERPJ}_{B,t}^+$	1		
$\widehat{ERPJ}_{B,t}^-$	-0.753 ***	1	
$\widehat{ERPJ}_{B,t}$	0.271 **	0.429 ***	1

注: \*\*、\*、\* 分别表示在 1%、5%、10% 的水平下显著.

### 3 尾部风险溢酬的性质

#### 3.1 尾部风险溢酬与收益率预测

尾部风险溢酬是指投资者承担价格发生大的跳跃的风险所要求的风险补偿, 是投资者对于未来市场的预期. 因此, 下文主要从两个方面探讨尾部风险溢酬对未来指数收益率的预测力.

首先, 利用以下模型检验尾部风险溢酬及其两个组成部分对下个月指数收益率的预测力

$$r_{t+1} = a + b_1 X_t + b_2 r_t + b_3 TV_t + \varepsilon_t \quad (30)$$

其中  $r_{t+1}$  表示  $t+1$  月的台指数收益率,  $X_t$  为  $t$  月的以下 3 个尾部风险溢酬指标之一: 尾部风险溢酬  $\widehat{ERPJ}_{B,t}$ , 正跳的尾部风险溢酬  $\widehat{ERPJ}_{B,t}^+$  和负跳的尾部风险溢酬  $\widehat{ERPJ}_{B,t}^-$ .  $r_t$  和  $TV_t$  为两个控制变量, 分别表示  $t$  月的台指数收益率和  $t$  月的台指总成交额.

然后, 进一步检验尾部风险溢酬及其两个组

成部分对更长期限的指数收益率的预测力

$$r_{t \rightarrow t+h} = a_h + b_h X_t + \varepsilon_{t \rightarrow t+h} \quad (31)$$

其中  $r_{t \rightarrow t+h}$  表示  $t$  月到  $t+h$  月的台指数收益率,  $h$  分别取 1 ~ 6.

表 3 显示了方程 (30) 的回归结果. 从表中可以看出尾部风险溢酬  $\widehat{ERPJ}_{B,t}$  的系数在单变量回归时在 10% 的水平下显著为正, 但加入控制变量后则变得不显著; 正跳的尾部风险溢酬  $\widehat{ERPJ}_{B,t}^+$  系数为负, 与预期相符, 但在所有回归中均不显著, 说明其对未来一个月的指数收益率不具有显著的预测力; 而负跳的尾部风险溢酬  $\widehat{ERPJ}_{B,t}^-$  系数无论是单变量回归, 还是加入控制变量的多变量回归, 都在 1% 的水平下显著为正, 说明其对未来一个月的台指数收益率具有显著的预测力.

表 4 显示了方程 (31) 的回归结果. 从表中可以看出, 尾部风险溢酬  $\widehat{ERPJ}_{B,t}$  对未来 1 个月和未来 5 个月 ~ 6 个月的台指数收益率预测均在 10% 的水平下显著为正, 但对未来 2 个月 ~ 4 个月的

收益率的预测则不显著. 正跳的尾部风险溢酬  $ERP_{B,t}^+$  对未来1个月~6个月的台指收益率均不具有显著的预测力. 而负跳的尾部风险溢酬  $ERP_{B,t}^-$  对未来1个月~6个月的台指收益率均有显著为正的预测力.

正跳的尾部风险溢酬  $ERP_{B,t}^+$  和负跳的尾部风险溢酬  $ERP_{B,t}^-$  对于未来台指收益率的预测效果不同可能是因为正跳的尾部风险溢酬中包含了更多的投资者心理因素. 所谓风险溢酬是指投资者承担相应的价格风险(或者说不确定性)所要求的补偿. 这一风险补偿在一般意义上为正. 利用市场数据估计出的尾部风险溢酬指标既包含一般

意义上的风险补偿也包含投资者的心理因素. 对于负跳的尾部风险溢酬而言, 投资者在心理上厌恶价格发生负跳的情况并要求正的补偿, 这与一般意义上的风险补偿方向一致; 但对于正跳的尾部风险溢酬而言, 投资者在心理上偏好价格发生正跳的情况并要求负的补偿, 这与一般意义上的风险补偿方向相反, 两种效应的最终结果表现为正跳的尾部风险溢酬系数为负, 故正跳的尾部风险溢酬指标中可能包含了更多的投资者心理因素, 从而也影响了预测的显著性. 而尾部风险溢酬指标  $ERP_{B,t}$  是正跳和负跳的尾部风险溢酬之和, 因此, 其对未来收益率预测的效果并不稳定.

表3 未来1个月收益率预测的回归结果  
Table 3 One-month ahead return prediction

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
截距项	-0.018 (-0.167)	-0.076 (-0.798)	-0.148 (-1.300)	0.696*** (3.041)	0.518** (2.445)	0.476** (2.409)
$ERP_{B,t}$	0.393* (1.727)			0.327 (1.605)		
$ERP_{B,t}^+$		-0.155 (-0.869)			-0.107 (-0.636)	
$ERP_{B,t}^-$			0.322*** (2.808)			0.238*** (2.868)
$r_t$				0.540*** (4.802)	0.559*** (4.477)	0.527*** (4.455)
$TV_t$				-0.310*** (-3.146)	-0.249*** (-2.942)	-0.256*** (-3.068)
Adj. $R^2$	0.048	0.004	0.075	0.264	0.231	0.272

注: \*\*\*, \*\*, \* 分别表示在 1%、5%、10% 的水平下显著, 括号中的数据是各个回归系数相应的 Newey-West 的  $t$  值.

表4 未来1个月~6个月收益率预测的回归结果  
Table 4 One-to six-month ahead return prediction

	1个月	2个月	3个月	4个月	5个月	6个月
$ERP_{B,t}$	0.393* (1.727)	0.615 (1.380)	0.863 (1.580)	0.922 (1.652)	1.084* (1.903)	1.126* (1.818)
Adj. $R^2$	0.048	0.038	0.045	0.031	0.032	0.027
$ERP_{B,t}^+$	-0.155 (-0.869)	-0.310 (-0.808)	-0.527 (-1.031)	-0.739 (-1.248)	-0.893 (-1.248)	-1.042 (-1.316)
Adj. $R^2$	0.004	0.010	0.027	0.040	0.045	0.052
$ERP_{B,t}^-$	0.322*** (2.808)	0.562*** (2.844)	0.870*** (2.922)	1.085** (2.642)	1.297*** (2.655)	1.448** (2.599)
Adj. $R^2$	0.075	0.079	0.115	0.120	0.129	0.130

注: \*\*\*, \*\*, \* 分别表示在 1%、5%、10% 的水平下显著; 括号中的数据是各个回归系数相应的 Newey-West 的  $t$  值; 为节省篇幅, 未报告截距项的回归结果.

### 3.2 尾部风险溢酬与投资者情绪

尾部风险溢酬衡量的是投资者承担价格发生大的跳跃的风险所要求的风险补偿,投资者情绪则反映了市场参与者的投资意愿或者预期,两者有着内在的必然联系.一般来说,当市场出现大幅下跌时,投资者参与投资的意愿就会越低,其所要求的尾部风险溢酬也就越高.

#### 3.2.1 投资者情绪综合指数的构建

目前国内外对于投资者情绪综合指数的构建一般是基于主成分分析法.结合现有文献,本文根据中国台湾市场的实际情况及数据的可获得性,选用中国台湾消费者信心指数、中国台湾上市股票总成交额、融资融券余额比和中国台湾 VIX 指数来构建中国台湾市场投资者情绪综合指数(Investor Sentiment Index,简称 IS).从本文选择的 4 个指标与投资者情绪之间的关系来看,消费者信

心指数、上市股票总成交额和融资融券余额比均与投资者情绪正相关,消费者信心指数越高、上市股票总成交额越大、融资融券余额比越高,表明投资者情绪越乐观、参与市场意愿越强、越看好后市发展;而 VIX 指数与投资者情绪负相关,VIX 指数又被称为恐慌指标,当投资者情绪越乐观时,VIX 指数越低,反之,VIX 指数越高.

为了防止指标单位不统一,本文先对 4 个指标进行标准化处理,然后对经过标准化处理的 4 个指标进行主成分分析,并将提取出来的第一主成分作为投资者情绪综合指数.图 9 显示了中国台湾投资者情绪综合指数与加权指数的走势,从图中可以看出,两者走势基本一致.经统计,两者在 1% 的水平上显著正相关,相关系数为 0.701,这表明本文构建的中国台湾投资者情绪综合指数  $IS_t$  的确能够很好地衡量中国台湾市场的投资者情绪.

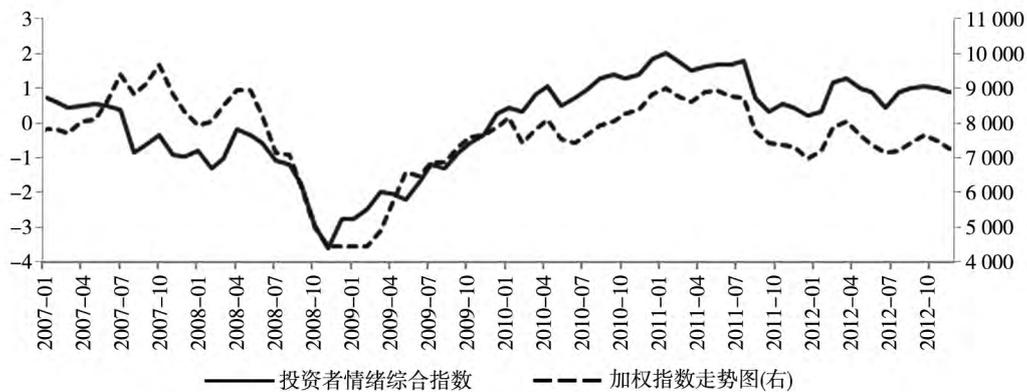


图 9 中国台湾投资者情绪综合指数与加权指数走势图

Fig.9 Investor sentiment index and TAIEX

#### 3.2.2 尾部风险溢酬与投资者情绪分析

为了进一步探讨尾部风险溢酬与投资者情绪之间的关系,本文构建以下模型:

$$Y_t = a + b_1 IS_t + \varepsilon_t \quad (32)$$

其中  $Y_t$  为  $t$  月的以下 3 个尾部风险溢酬指标之一:尾部风险溢酬  $ERP_{B,t}^-$ ,正跳的尾部风险溢酬  $ERP_{B,t}^+$  和负跳的尾部风险溢酬  $ERP_{B,t}^-$ .  $IS_t$  为  $t$  月的中国台湾投资者情绪综合指数.

表 5 显示了尾部风险溢酬与投资者情绪综合指数的回归结果.从表中可以看出,正跳的尾部风

险溢酬  $ERP_{B,t}^+$  和负跳的尾部风险溢酬  $ERP_{B,t}^-$  与投资者情绪综合指数的回归结果均在 1% 的水平下显著,前者显著为正(回归系数为 0.340),后者显著为负(回归系数为 -0.387),调整的  $R^2$  分别为 0.479 和 0.551,这表明正跳的尾部风险溢酬  $ERP_{B,t}^+$  和负跳的尾部风险溢酬  $ERP_{B,t}^-$  均包含投资者情绪的成分.当投资者情绪变差,对市场预期悲观,参与市场的意愿不强时,投资者对于承担市场大跌的风险所要求的补偿会变高,对于承担市场大涨的风险所要求的补偿则会相应变低;

反之,当投资者情绪变好,对市场预期乐观,参与市场的意愿较强时,投资者对于承担市场大跌的风险所要求的补偿会变低、对于承担市场大涨的风险所要求的补偿则会相应变高.

此外,尽管尾部风险溢酬的两个组成成分与投资者情绪综合指数的回归结果均在1%的水平下显著,但尾部风险溢酬  $ERP_{B,t}^+$  本身与投资者情绪综合指数的回归结果并不显著,调整的  $R^2$  仅为 0.004. 一个可能的原因是,  $ERP_{B,t}^+$

和  $ERP_{B,t}^-$  均含有投资者情绪的成分,但  $ERP_{B,t}^+$  与投资者情绪成正向关系而  $ERP_{B,t}^-$  与投资者情绪成反向关系,两者相加得到的尾部风险溢酬  $ERP_{B,t}$  综合反映了投资者对承担市场发生剧烈波动的风险所要求的补偿,而市场发生的剧烈波动既包含与投资者情绪正相关的上涨也包含与投资者情绪负相关的下跌,从而导致尾部风险溢酬  $ERP_{B,t}$  与投资者情绪综合指数的回归结果不显著.

表5 尾部风险溢酬与投资者情绪指标的回归结果  
Table 5 The tail risk premium and investor sentiment index

因变量	$ERP_{B,t}^+$	$ERP_{B,t}^-$	$ERP_{B,t}$
截距项	0.014 (0.248)	-0.396 *** (-7.291)	0.410 *** (7.623)
$IS_t$	-0.048 (-1.126)	0.340 *** (8.083)	-0.387 *** (-9.316)
Adj. $R^2$	0.004	0.479	0.551

注: \*\*\*, \*\*, \* 分别表示在 1%、5%、10% 的水平下显著,括号中的数据是各个回归系数相应的  $t$  值.

#### 4 结束语

本文基于改进的  $X_u^{[9]}$  的模型,利用台指期权和期货数据对时变的非对称的跳跃形状参数和基于 Hawkes 过程的自激的强度参数进行估计,从而得到跳跃尾部风险溢酬及其两个组成部分(正跳和负跳的尾部风险溢酬)的估计值,探讨其对台指收益率预测力的差异,并进一步分析其与投资者情绪之间的不同关系. 论文的主要结论如下:

首先,中国台湾市场上负跳的尾部风险溢酬均值为正,正跳的尾部风险溢酬均值为负,两者走势大致呈现出反向关系. 从整体来看,尾部风险溢酬均值为正,受负跳的影响更大,这表明在综合考虑了市场可能出现大涨或大跌的情况下,中国台湾市场的投资者对于承担价格发生大的跳跃的风险要求一定的风险补偿,并且相对而言投资者更担忧市场出现大跌的情况. 同

时,通过与美国市场的相关研究结果相比较,发现中国台湾市场的跳跃强度估计值高于美国市场,但尾部风险溢酬的估计值却低于美国市场,这表明相对而言,中国台湾投资者的风险厌恶程度可能低于美国投资者.

其次,负跳的尾部风险溢酬对未来 1 个月~6 个月的台指收益率均有显著为正的预测力,但正跳的尾部风险溢酬对未来 1 个月~6 个月的台指收益率均不具有显著的预测力. 而尾部风险溢酬是正跳和负跳的尾部风险溢酬之和,因此,其对未来收益率预测的效果并不稳定.

最后,投资者情绪对负跳的尾部风险溢具有显著为负的解释力,对正跳的尾部风险溢酬具有显著为正的解釋力,但对整体的尾部风险溢酬则不具有显著的解释力,这表明正跳和负跳的尾部风险溢酬均含有投资者情绪的成分,但由于两者方向相反,从而导致尾部风险溢酬与投资者情绪之间不具有显著的关系.

## 参考文献:

- [1] Duffie D, Pan J, Singleton K. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions [J]. *Econometrica*, 2000, 68 (6): 1343–1376.
- [2] Santa-Clara P, Yan S. Crashes, volatility, and the equity premium: Lessons from S&P 500 options [J]. *The Review of Economics and Statistics*, 2010, 92(2): 435–451.
- [3] Christoffersen P, Jacobs K, Ornathanal C. Dynamic jump intensities and risk premiums: Evidence from S&P500 returns and options [J]. *Journal of Financial Economics*, 2012, 106(3): 447–472.
- [4] Andersen T G, Fusari N, Todorov V. Parametric inference and dynamic state recovery from option panels [J]. *Econometrica*, 2015, 83(3): 1081–1145.
- [5] Carr P, Wu L. Leverage effect, volatility feedback, and self-exciting market disruptions [J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2017, 52(5): 2119–2156.
- [6] Hawkes A G. Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes [J]. *Biometrika*, 1971, 58(1): 83–90.
- [7] Ait-Sahalia Y, Cacho-Diaz J, Laeven R J A. Modeling financial contagion using mutually exciting jump processes [J]. *Journal of Financial Economics*, 2015, 117(3): 585–606.
- [8] Fulop A, Li J, Yu J. Self-exciting jumps, learning, and asset pricing implications [J]. *The Review of Financial Studies*, 2014, 28(3): 876–912.
- [9] Xu L. Tail risk and equity risk premia [R]. Working Paper, Durham: Duke University, 2014.
- [10] Pan J. The jump-risk premia implicit in options: Evidence from an integrated time-series study [J]. *Journal of Financial Economics*, 2002, 63(1): 3–50.
- [11] Broadie M, Chernov M, Johannes M. Model specification and risk premia: Evidence from futures options [J]. *The Journal of Finance*, 2007, 62(3): 1453–1490.
- [12] Bollerslev T, Todorov V. Tails, fears, and risk premia [J]. *The Journal of Finance*, 2011, 66(6): 2165–2211.
- [13] Yan S. Jump risk, stock returns, and slope of implied volatility smile [J]. *Journal of Financial Economics*, 2011, 99(1): 216–233.
- [14] Bollerslev T, Todorov V, Xu L. Tail risk premia and return predictability [J]. *Journal of Financial Economics*, 2015, 118 (1): 113–134.
- [15] 柳会珍, 顾 岚, 胡啸兵. 极端波动、跳跃和尾部风险——基于已实现波动率的股票市场风险动态预测 [J]. *数理统计与管理*, 2014, (1): 158–169.  
Liu Huizhen, Gu Lan, Hu Xiaobing. Extreme volatility, jump and tail risk: Dynamic forecasting stock market risk based on realized volatility [J]. *Journal of Applied Statistics and Management*, 2014, (1): 158–169. (in Chinese)
- [16] 陈国进, 刘晓群, 谢沛霖, 等. 已实现跳跃波动与中国股市风险溢价研究——基于股票组合视角 [J]. *管理科学学报*, 2016, 19(6): 98–113.  
Chen Guojin, Liu Xiaoqun, Xie Peilin, et al. Realized jump volatility components and portfolio risk premium in Chinese stock market [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2016, 19(6): 17–30. (in Chinese)
- [17] 赵 华, 麻 露, 唐菲婕. 跳跃、共跳和非预期宏观信息 [J]. *管理科学学报*, 2017, 20(10): 17–30.  
Zhao Hua, Ma Lu, Tang Feijie. Jumps, cojumps and unexpected macroeconomic news [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2017, 20(10): 17–30. (in Chinese)
- [18] Kou S G, Wang H. Option pricing under a double exponential jump diffusion model [J]. *Management Science*, 2004, 50 (9): 1178–1192.

- [19] Bollerslev T, Sizova N, Tauchen G. Volatility in equilibrium: Asymmetries and dynamic dependencies [J]. *Review of Finance*, 2012, 16(1): 31–80.
- [20] Eraker B, Shaliastovich I. An equilibrium guide to designing affine pricing models [J]. *Mathematical Finance*, 2008, 18(4): 519–543.
- [21] Bollerslev T, Todorov V. Time-varying jump tails [J]. *Journal of Econometrics*, 2014, 183: 168–180.

## Tail risk premium analysis based on Hawkes process

*CHEN Miao-xin, XU Liang*

Department of Finance, School of Economics, Xiamen University, Xiamen 361005, China

**Abstract:** Based on the Hawkes process, this paper estimates the tail risk premium and its two components (the left and right jump tail risk premiums) by using the data of Taiwan index options and futures, and investigates their different return predictability and different relationship with investor sentiment. The empirical results show that the left (right) jump tail risk premium is positive (negative) on average, and the tail risk premium is more influenced by left jump tail risk premium in Taiwan market. As to the return predictability, we find that the left (right) jump tail risk premium can (not) significantly predict future index returns over one- to six-month horizons, but the return predictability from the total tail risk premium is not stable. Moreover, investor sentiment has significant negative (positive) explanatory power for the left (right) jump tail risk premium, but has no significant explanatory power for the total tail risk premium.

**Key words:** tail risk premium; Hawkes process; jump; investor sentiment