第 20 卷 第 6 期　　北华大学学报(自然科学版)　　Vol.20 No.6
2019 年 11 月　　JOURNAL OF BEIHUA UNIVERSITY(Natural Science)　　Nov.2019

文章编号:1009-4822(2019)06-0701-07　　DOI:10.11713/j.issn.1009-4822.2019.06.001

矩阵与其方幂相似的进一步讨论及应用

晏瑜敏[1],杨忠鹏[1],陈梅香[1],吕洪斌[2],余志拯[3]

(1.莆田学院数学与金融学院,福建 莆田　351100;2 北华大学数学与统计学院,吉林 吉林　132013;
3.厦门大学数学科学学院,福建 厦门　361005)

摘要: 证明了如果矩阵 A 的所有特征值都是 1,则对任意非零整数 k,A^k 与 A 相似,并给出了 A 与 $A^k(k\in\mathbb{Z}^+)$ 相似的一些充分必要条件.作为应用,证明了一类非线性矩阵方程解的存在性.

关键词: Jordan 标准形;相似矩阵;特征值;行列式因子;矩阵方程

中图分类号: O151.21　　**文献标志码:** A

Further Discussion and Application on Matrix which is Similar to Its Power

Yan Yumin[1], Yang Zhongpeng[1], Chen Meixiang[1], Lü Hongbin[2], Yu Zhizheng[3]

(1.*School of Mathematics and Finance*, *Putian University*, *Putian* 351100, *China*;
2.*School of Mathematics and Statistics*, *Beihua University*, *Jilin* 132013, *China*;
3.*School of Mathematical Science*, *Xiamen University*, *Xiamen* 361005, *China*)

Abstract: For any nonzero integer k, a complex matrix $\boldsymbol{A}$ is similar to its power $\boldsymbol{A}^k$ if its all eigenvalues are 1. Furthermore, the necessary and sufficient conditions complex matrix $\boldsymbol{A}$ be similar to its power $\boldsymbol{A}^k(k\in\mathbb{Z}^+)$ are given out. The existence of the solution to a class of nonlinear matrix equations is proved by applications.

Key words: Jordan canonical form; similar matrix; eigenvalue; determinant factor; matrix equation

0 引　言

设 $F^{n\times n}$、$F[x]$ 分别表示数域 F 上的 $n\times n$ 阶矩阵、一元多项式集合,$\mathbb{C}$ 为复数域,$\boldsymbol{I}_n$ 表示 $n\times n$ 阶单位矩阵.$r(\boldsymbol{A})$、$D_k(\boldsymbol{A})$、$f_{\boldsymbol{A}}(x)$ 和 $m_{\boldsymbol{A}}(x)$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$ 的秩、第 k 阶行列式因子、特征多项式和最小多项式.设 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{Z}^+$ 分别表示整数、正整数的集合.总约定 $n\times n$ 阶幂零矩阵 $\boldsymbol{H}_n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$.本文不加特别说明,矩阵中没有写出的元素约定都是零.

2014 年,第六届全国大学生数学竞赛预赛给出如下问题,为叙述方便标注为命题 1:

收稿日期:2019-08-25
基金项目:福建省本科高校教育教学改革研究项目(FBJG20180340);福建省自然科学基金项目(2018J01426);莆田学院教育教学改革研究项目(JG201837,JG201915);福建省教育科学“十三五”规划课题(2019CG0157).
作者简介:晏瑜敏(1972-),女,副教授,主要从事代数学研究,E-mail:yyumin90@126.com;通信作者:杨忠鹏(1947-),男,教授,主要从事矩阵理论及其应用研究,E-mail:yangzhongpeng@126.com.

命题1 设 n 为给定的正整数,则对任意 $m,l\in\mathbb{Z}^+$,存在 n 阶方阵 X 使得

$$\boldsymbol{X}^m+\boldsymbol{X}^l=\boldsymbol{I}_n+\begin{pmatrix}1&&&\\2&1&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\\n&\cdots&2&1\end{pmatrix}.\tag{1}$$

第六届全国大学生数学竞赛组委会为命题1提供的答题要点可整理为:

1) 所求的方程变为

$$\boldsymbol{X}^m+\boldsymbol{X}^l=2\boldsymbol{I}_n+2\boldsymbol{H}_n+3\boldsymbol{H}_n^2+\cdots+n\boldsymbol{H}_n^{n-1}.\tag{2}$$

2) 考虑形如$\begin{pmatrix}1&&&\\a_1&1&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\\a_{n-1}&\cdots&a_1&1\end{pmatrix}$的矩阵 X,则有 $X=\boldsymbol{I}_n+a_1\boldsymbol{H}_n+a_2\boldsymbol{H}_n^2+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{H}_n^{n-1}$,进而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}^m&=(\boldsymbol{I}_n+a_1\boldsymbol{H}_n+a_2\boldsymbol{H}_n^2+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{H}_n^{n-1})^m=\\&\boldsymbol{I}_n+(ma_1)\boldsymbol{H}_n+(ma_2+f_1(a_1))\boldsymbol{H}_n^2+\cdots+(ma_{n-1}+f_{n-2}(a_1,\cdots,a_{n-2}))\boldsymbol{H}_n^{n-1},\end{aligned}$$

其中 $f_1(a_1)$ 由 a_1 确定,$\cdots$,$f_{n-2}(a_1,\cdots,a_{n-2})$ 由 $a_1,\cdots,a_{n-2}$ 确定.

类似地 $\boldsymbol{X}^l=\boldsymbol{I}_n+(la_1)\boldsymbol{H}_n+(la_2+g_1(a_1))\boldsymbol{H}_n^2+\cdots+(la_{n-1}+g_{n-2}(a_1,\cdots,a_{n-2}))\boldsymbol{H}_n^{n-1}$,其中 $g_1(a_1)$ 由 a_1 确定,$\cdots$,$g_{n-2}(a_1,\cdots,a_{n-2})$ 由 $a_1,\cdots,a_{n-2}$ 确定.

3) 观察方程组

$$\begin{cases}(m+l)a_1=2,\\(m+l)a_2+(f_1(a_1)+g_1(a_1))=3,\\\qquad\cdots\\(m+l)a_{n-1}+(f_{n-2}(a_1,\cdots,a_{n-2})+g_{n-2}(a_1,\cdots,a_{n-2}))=n.\end{cases}\tag{3}$$

直接可看出该方程组(3)有解.

此法应用 n 次幂零矩阵 $\boldsymbol{H}_n$ 的多项式(2),比较方程(1)两边对应的 $\boldsymbol{H}_n^t(t=1,2,\cdots,n-1)$ 的系数得到递推式、迭代式的方程组(3).由式(3)可解知,所求矩阵存在.

张福振在文献[1]中给出:

命题2([1,问题3.4.19]) 如果矩阵 A 的所有特征值都是1,则对任意正整数 k,总有 A^k 与 A 相似.

命题2是很有影响的问题,丘维声教授的“高等代数”将其作为习题([2,习题6.11.21]),也是2010年新疆大学考研试题([3,例8.5]).

文献[4,例8.12],[5,例12.4],[6,例8.2.28],[7,题3.11]都采用了命题2,在叙述上有些不同:设方阵 A 的特征多项式 $f_A(x)=(x-1)^n$,则对任意自然数 k 总有 A^k 与 A 相似.从解答上看文献[4-7]“自然数”与文献[1-3]的“正整数”的意义相同.1993年国家颁布的《量与单位》(GB 3100 ~ 3102—93)规定自然数包括0(见文献[8]).这样看来文献[1-3]对命题2的叙述是准确的.

在李尚志的《线性代数(数学专业用)》有:

命题3(见[9,习题7.4.5]) 求证:方阵 A 与所有的 A^k(k 为正整数)相似 $\Rightarrow A$ 的特征值全为1.

我们首先证明如果矩阵 A 的所有特征值都是1,则对任意非零整数 k,总有 A^k 与 A 相似,那么由此可得到矩阵 A 与所有的 $A^k(k\in\mathbb{Z}^+)$ 相似的充分必要条件.应用这些讨论的结论和方法,证明了可概括命题1的更广泛的一类非线性矩阵方程解的存在性.

1　预备知识

引理 1　设 $\lambda(\neq 0)\in F$,则 $\lambda\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{H}_n$ 可逆且

$$(\lambda\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{H}_n)^{-1}=\lambda^{-1}\boldsymbol{I}_n-\lambda^{-2}\boldsymbol{H}_n+\cdots+(-1)^k\lambda^{-k-1}\boldsymbol{H}_n^k+\cdots+(-1)^{n-1}\lambda^{-n}\boldsymbol{H}_n^{n-1}.\tag{4}$$

证明: 由文献[10; 11,引理 1] 知

$$\boldsymbol{H}_n^k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_{n-k} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\quad 1\leqslant k\leqslant n-1 \text{ 且 } \boldsymbol{H}_n^k=\boldsymbol{0}, n\leqslant k, k\in\mathbb{Z}^+.\tag{5}$$

从式(5) 有

$$\begin{aligned}&(\lambda\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{H}_n)(\lambda^{-1}\boldsymbol{I}_n-\lambda^{-2}\boldsymbol{H}_n+\cdots+(-1)^k\lambda^{-k-1}\boldsymbol{H}_n^k+\cdots+(-1)^{n-1}\lambda^{-n}\boldsymbol{H}_n^{n-1})=\\ &\quad\boldsymbol{I}_n-\lambda^{-1}\boldsymbol{H}_n+\cdots+(-1)^k\lambda^{-k}\boldsymbol{H}_n^k+\cdots+(-1)^{n-1}\lambda^{-n+1}\boldsymbol{H}_n^{n-1}+\\ &\quad\lambda^{-1}\boldsymbol{H}_n-\lambda^{-2}\boldsymbol{H}_n^2+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda^{-k}\boldsymbol{H}_n^k+\cdots+(-1)^{n-2}\lambda^{-n+1}\boldsymbol{H}_n^{n-1}+(-1)^{n-1}\lambda^{-n}\boldsymbol{H}_n^n=\\ &\quad\boldsymbol{I}_n+(-1)^{n-1}\lambda^{-n}\boldsymbol{H}_n^n=\boldsymbol{I}_n.\end{aligned}$$

由此得式(4). 证毕.

显然式(4) 与文献[12,(1)] 等价. 从文献[13,问题 3.4.3] 知,当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in F^{n\times n}$ 时,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 在数域 F 上相似 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上相似. 这样下面讨论(除非特殊说明) 都在复数域 $\mathbb{C}$ 上进行.

引理 2([13,定理 3.3.6])　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 所有不同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$,则 $m_{\boldsymbol{A}}(x)=\prod\limits_{i=1}^{t}(x-\lambda_i)^{k_i}$,其中 k_i 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形中由特征值 λ_i 确定的 Jordan 块的最高阶数.

从文献[9,定理 6.4.3] 及其说明可得:

引理 3　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in F^{n\times n}$,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行列式因子 $D_k(\boldsymbol{A})=D_k(\boldsymbol{B})$,$k=1,2,\cdots,n$.

引理 4　设 $m(\neq 0)\in\mathbb{Z}$(即 m 为非零整数),则存在 $q_m(x)=1+mx+a_2x^2+\cdots\in\mathbb{C}[x]$,使得

$$(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{H}_n)^m=\boldsymbol{I}_n+m\boldsymbol{H}_n+a_2\boldsymbol{H}_n^2+\cdots=q_m(\boldsymbol{H}_n).\tag{6}$$

证明: 从 $\boldsymbol{I}_n$ 与 $\boldsymbol{H}_n$ 可交换知,当 $m\in\mathbb{Z}^+$ 时,应用二项式定理展开,由式(5) 得 $(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{H}_n)^m=\boldsymbol{I}_n+m\boldsymbol{H}_n+a_2\boldsymbol{H}_n^2+\cdots$,即有 $q_m(x)=1+mx+a_2x^2+\cdots\in\mathbb{C}[x]$,使 $(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{H}_n)^m=q_m(\boldsymbol{H}_n)$,即此时式(6) 成立.

对任意负整数 $m=-s(s\in\mathbb{Z}^+)$,从式(4) 知存在 $g(x)=1-x+\cdots+(-1)^kx^k+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}\in\mathbb{C}[x]$,使得

$$(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{H}_n)^{-1}=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{H}_n+\cdots+(-1)^k\boldsymbol{H}_n^k+\cdots+(-1)^{n-1}\boldsymbol{H}_n^{n-1}=g(\boldsymbol{H}_n).\tag{7}$$

由式(7) 知有 $q_m(x)=[g(x)]^s=[1-x+x^2+\cdots+(-1)^tx^t+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}]^s$,即

$$q_m(x)=[g(x)]^s=1-sx+a_2x^2+\cdots=1+mx+a_2x^2+\cdots\in\mathbb{C}[x].\tag{8}$$

对任意 $s=(-m)\in\mathbb{Z}^+$,由式(4),(7) 和(8) 得 $(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{H}_n)^m=[(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{H}_n)^{-1}]^s=[g(\boldsymbol{H}_n)]^s=q_m(\boldsymbol{H}_n)$,即知此时式(6) 成立. 证毕.

引理 5　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,如果对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$ 总有 $f_{\boldsymbol{A}^k}(\lambda)=f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$,则 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值为 0 或 1.

证明: 设 A 的所有特征值的集合 $\sigma(\boldsymbol{A})=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$,易知 A^k 的所有特征值集合为 $\sigma(\boldsymbol{A}^k)=\{\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k\}$,$\forall k\in\mathbb{Z}^+$. 这样由 $f_{\boldsymbol{A}^k}(\lambda)=f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$,可知

$$\sigma(\boldsymbol{A})=\sigma(\boldsymbol{A}^k)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}=\{\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k\},\quad\forall k\in\mathbb{Z},$$

由此可得,$\lambda_i,\lambda_i^2,\lambda_i^3,\cdots,\lambda_i^l,\cdots(\forall l\in\mathbb{Z}^+)$ 都是 A 的特征值,又由于 A 的不同特征值最多有 n 个,所以必

定存在正整数 $m>l$,使得 $\lambda_i^m=\lambda_i^l$,即 $\lambda_i^l(\lambda_i^{m-l}-1)=0$,从而特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为0或单位根.不妨设 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_t=0$,$\lambda_{t+1}\lambda_{t+2}\cdots\lambda_n\neq 0$,且 λ_i 为 k_i 次单位根($i=t+1,t+2,\cdots,n$).令 $v=[k_{t+1},k_{t+2},\cdots,k_n]$ 为 $k_{t+1},k_{t+2},\cdots,k_n$ 的最小公倍数,则有 $\lambda_i^v=1(i=t+1,t+2,\cdots,n)$.由此即得 $\sigma(A)=\sigma(A^v)=\{\underbrace{0,\cdots,0}_{t},\underbrace{1,\cdots,1}_{n-t}\}$.证毕.

引理6([1,定理2]) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,则下述命题等价:

ⅰ) $r(\boldsymbol{A})=u(\boldsymbol{A})$($A$ 的非零特征值的个数);

ⅱ) $m_A(x)=h(x)$ 或 $m_A(x)=xh(x)$,这里首1多项式 $h(x)$ 满足 $h(0)\neq 0$;

ⅲ) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^2)$.

2 矩阵 A 与 A^k 相似的进一步讨论

定理1 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的所有特征值都是1,则对任意 $k(\neq 0)\in\mathbb{Z}$ 总有 A^k 与 A 相似.

证明:由 A 的所有特征值都是1,知有可逆矩阵 P 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{J}_s)=\boldsymbol{J}_A,\quad \boldsymbol{J}_i=\boldsymbol{I}_{n_i}+\boldsymbol{H}_{n_i},\quad i=1,2,\cdots,s,\tag{9}$$

由式(9)知

$$\lambda\boldsymbol{I}_{n_i}-\boldsymbol{J}_i=(\lambda-1)\boldsymbol{I}_{n_i}-\boldsymbol{H}_{n_i}=\begin{pmatrix}\lambda-1 & & & & \\ -1 & \lambda-1 & & & \\ & -1 & \lambda-1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & \lambda-1\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i},$$

这表明 J_i 的最高阶行列式因子 $D_{n_i}(J_i)=(\lambda-1)^{n_i}$;设由 $\lambda\boldsymbol{I}_{n_i}-\boldsymbol{J}_i$ 的第 $2,\cdots,n_i$ 行与第 $1,2,\cdots,n_i-1$ 列构成的 n_i-1 阶子式 $g(\lambda)=\det\begin{pmatrix}-1 & \lambda-1 & & & \\ & -1 & \lambda-1 & & \\ & & -1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \lambda-1 \\ & & & & -1\end{pmatrix}$,因为 $g(1)=(-1)^{n_i-1}\neq 0$,所以 $(D_{n_i}(\boldsymbol{J}_i),D_{n_i-1}(\boldsymbol{J}_i))=1$,进而应用行列式因子的性质知

$$D_{n_i-1}(\boldsymbol{J}_i)=\cdots=D_1(\boldsymbol{J}_i)=1,\quad D_{n_i}(\boldsymbol{J}_i)=(\lambda-1)^{n_i}.\tag{10}$$

当 $k(\neq 0)\in\mathbb{Z}$ 时,由式(6),(7)有

$$\lambda\boldsymbol{I}_{n_i}-\boldsymbol{J}_i^k=(\lambda-1)\boldsymbol{I}_{n_i}-k\boldsymbol{H}_{n_i}+\cdots=\begin{pmatrix}\lambda-1 & & & & \\ -k & \lambda-1 & & & \\ & -k & \lambda-1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ * & & & -k & \lambda-1\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i}.\tag{11}$$

由式(11)知 $\boldsymbol{J}_i^k$ 的最高阶行列式因子 $D_{n_i}(\boldsymbol{J}_i^k)=(\lambda-1)^{n_i}$.设由 $\lambda\boldsymbol{I}_{n_i}-\boldsymbol{J}_i^k$ 的第 $2,\cdots,n_i$ 行与第 $1,2,\cdots,n_i-1$ 列构成的 n_i-1 阶子式 $h(\lambda)=\det\begin{pmatrix}-k & \lambda-1 & & \\ & -k & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda-1 \\ * & & & -k\end{pmatrix}$,因为 $h(1)=(-k)^{n_i-1}\neq 0$,进而类似上面的

讨论可知 $D_{n_i-1}(J_i^k)=\cdots=D_1(J_i^k)=1$，$D_{n_i}(J_i^k)=(\lambda-1)^{n_i}$. 这样由式(10)和引理 3 知 J_i 与 J_i^k 相似，即有可逆矩阵 Q_i 使得 $Q_i^{-1}J_iQ_i=J_i^k$，$i=1,2,\cdots,s$. 进而有可逆矩阵 $Q=\mathrm{diag}(Q_1,Q_2,\cdots,Q_s)$，由式(9)有

$$(PQ)^{-1}A(PQ)=\mathrm{diag}(Q_1^{-1}J_1Q_1,Q_2^{-1}J_2Q_2,\cdots,Q_s^{-1}J_sQ_s)=\mathrm{diag}(J_1^k,J_2^k,\cdots,J_s^k)=J_A^k=(P^{-1}AP)^k=P^{-1}A^kP,$$

即对任意非零整数 k 总有 A^k 与 A 相似. 证毕.

例 1　设 $A=\mathrm{diag}(I_r,0)\in\mathbb{R}^{n\times n}$，即 A 的特征值不全为 1，从 $A=A^k$ 知 A 与所有的 $A^k(k\in\mathbb{Z}^+)$ 相似. 这说明命题 3 未必总是正确的.

定理 1 表明命题 2 的结论对任意非零整数都成立. 实际上文献[9，习题 7.4.4]在 2006 年就提出了这样的问题.

推论 1　设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，如果对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$ 总有 A^k 与 A 相似，则 A 的不同特征值为 0 或 1，且 A 的 Jordan 标准形中由特征值 0 所确定的 Jordan 块都是一阶的.

证明：从对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$ 总有 A^k 与 A 相似，知有 $f_{A^k}(\lambda)=f_A(\lambda)$，$\forall k\in\mathbb{Z}^+$. 由引理 5 即得 A 的不同特征值为 0 或 1.

设 A 的 Jordan 标准形 J_A，满足：

$$P^{-1}AP=J_A=\mathrm{diag}(J_1,J_2,\cdots,J_t,J_{t+1},\cdots,J_s),\quad \text{其中 } P\in\mathbb{C}^{n\times n} \text{ 可逆;} \tag{12}$$

$$J_i=H_{n_i},\quad i=1,2,\cdots,t;\quad n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_t,\quad n_1+n_2+\cdots+n_t=n_0; \tag{13}$$

$$J_j=I_{n_j}+H_{n_j},\quad j=t+1,t+2,\cdots,s. \tag{14}$$

当 $n_0\in\mathbb{Z}^+$，即 $n_1\in\mathbb{Z}^+$ 时，由式(5)和式(12)～(15)得

$$P^{-1}A^kP=\mathrm{diag}(0_{n_0},J_{t+1}^k,\cdots,J_s^k),\quad 0_{n_0} \text{ 为 } n_0 \text{ 阶零矩阵}, \forall k\geqslant n_1. \tag{15}$$

由于对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$ 总有 A^k 与 A 相似，应用式(12)～(15)可知特征值 0(如果存在的话)确定的 Jordan 块都是一阶的. 证毕.

从推论 1 及其证明可知，命题 3 可在保留前提条件下修改为：

推论 2　设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，如果对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$ 总有 A^k 与 A 相似，则 A 的不同特征值为 0 或 1.

也可保留命题 3 的结论修改为：

推论 3　设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 可逆，如果对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$ 总有 A^k 与 A 相似，则 A 的特征值全为 1.

与命题 3 相对照，推论 1 较完整地讨论了张福振提出的命题 2 的逆问题.

许以超在文献[14-16]中都有与上述讨论相关的问题：

命题 4([14，习题 13.3.11；15，习题 13.2.10；16，习题 6.4.11])　设矩阵 A 的特征值都等于 1，试证：A 和 A 的任意方幂都相似.

因为 A 的零次方幂为单位矩阵，可知命题 4 可按定理 1 的方式叙述.

从推论 1 的证明和式(12)～(14)知，当对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$ 总有 A^k 与 A 相似时，A 满足

$$P^{-1}AP=J_A=\mathrm{diag}(0_{n_0},I_{n_{t+1}}+H_{n_{t+1}},\cdots,I_{n_s}+H_{n_s}). \tag{16}$$

反之，当 A 满足式(16)时，仿照定理 1 的证明可知，对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$ 总有 A^k 与 A 相似. 这样作为命题 2 及其逆问题，应用推论 1 可得到：

定理 2　设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$ 总有 A^k 与 A 相似 $\Leftrightarrow A$ 的不同特征值为 0 或 1，且特征值 0 确定的 Jordan 块都是一阶的 $\Leftrightarrow A$ 的 Jordan 标准形由式(16)确定.

由式(16)知，对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$ 总有 A^k 与 A 相似的矩阵，满足矩阵秩与非零特征值个数相等. 从定理 2

和引理 6 可得到:

定理 3 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,则对任意 $k \in \mathbb{Z}^{+}$ 总有 A^k 与 A 相似 $\Leftrightarrow r(A) = u(A)$ 且非零特征值全为 $1 \Leftrightarrow r(A) = r(A^2)$ 且所有非零特征值全为 $1 \Leftrightarrow m_A(x) = x^l(x-1)^{n-l}, 0 \leqslant l \leqslant 1$.

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,如果有 $A^{\#} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $AA^{\#}A = A, A^{\#}AA^{\#} = A^{\#}, AA^{\#} = A^{\#}A$,则称 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是群可逆的,并称 $A^{\#}$ 为 A 的群逆,此时也称 A 为 GP 矩阵. 从文献[1,17-18]知不是每个矩阵都为群可逆的,当然 GP 矩阵的群逆是唯一的. 这样从文献[10-11]和定理 3 可得到:

推论 4 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,则对任意 $k \in \mathbb{Z}^{+}$ 总有 A^k 与 A 相似 $\Leftrightarrow A$ 为非零特征值全为 1 的 GP 矩阵.

3 一类非线性矩阵方程解的存在性

定理 4 设 n 与 $k(\geqslant 2)$ 为给定的正整数,下三角矩阵 $\boldsymbol{G} = (g_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $g_{ii} = k-1, i = 1,2,\cdots,n$,且 $\prod\limits_{i=2}^{n} g_{i,i-1} \neq 0$,对任意非零的 $m_1, m_2, \cdots, m_k \in \mathbb{Z}$,如果 $m_1 + m_2 + \cdots + m_k \neq 0$,则存在 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{X}^{m_1} + \boldsymbol{X}^{m_2} + \cdots + \boldsymbol{X}^{m_k} = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{G}. \tag{17}$$

证明: 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{G}$,则 $\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda - k & & & \\ -g_{21} & \lambda - k & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -g_{n,1} & \cdots & -g_{n,n-1} & \lambda - k \end{pmatrix}$,且 $D_n(\boldsymbol{A}) = (\lambda - k)^n$. 令由 $\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ 的第 $2,3,\cdots,n$ 行与第 $1,2,\cdots,n-1$ 列构成的子式为

$$g(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -g_{21} & \lambda - k & & & \\ & -g_{32} & \lambda - k & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -g_{n-1,n-2} & \lambda - k \\ * & & & & -g_{n,n-1} \end{pmatrix},$$

由上式可得 $g(k) = (-1)^{n-1} \prod\limits_{i=2}^{n} g_{i,i-1} \neq 0$,由此知 $g(\lambda)$ 与 $(\lambda - k)^n$ 互素,从而 $D_{n-1}(\boldsymbol{A}) = 1$,这样可知 $\boldsymbol{A}$ 的所有行列式因子为

$$D_n(\boldsymbol{A}) = (\lambda - k)^n, \quad D_{n-1}(\boldsymbol{A}) = D_{n-2}(\boldsymbol{A}) = \cdots = D_1(\boldsymbol{A}) = 1. \tag{18}$$

设 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{H}_n$,则 $\boldsymbol{Y}$ 可逆且对任意 $m(\neq 0) \in \mathbb{Z}$ 来说,$\boldsymbol{Y}^m = (\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{H}_n)^m = \boldsymbol{I}_n + m\boldsymbol{H}_n + \cdots$,这样可令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Y}^{m_1} + \boldsymbol{Y}^{m_2} + \cdots + \boldsymbol{Y}^{m_k}$,对任意非零的 $m_1, m_2, \cdots, m_k \in \mathbb{Z}$. 从引理 4 知

$$\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \lambda - k & & & \\ -(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) & \lambda - k & & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & & -(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) & \lambda - k \end{pmatrix}, \tag{19}$$

由式(19)得 $D_n(\boldsymbol{B}) = (\lambda - k)^n$. 由 $\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}$ 的第 $2,3,\cdots,n$ 行与第 $1,2,\cdots,n-1$ 列构成的子式

$$h(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) & \lambda - k & & \\ & -(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda - k \\ * & & & -(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) \end{pmatrix},$$

从 $h(k) = (-(m_1 + m_2 + \cdots + m_k))^{n-1} \neq 0$ 知 $D_{n-1}(B) = 1$，进而由式(18)知 A 与 B 有相同的行列式因子.这样应用引理 3 知

$$P^{-1}BP = P^{-1}(Y^{m_1} + Y^{m_2} + \cdots + Y^{m_k})P = A, \quad \text{存在可逆矩阵 } P \in \mathbb{C}^{m \times m}. \tag{20}$$

令 $X = P^{-1}YP = P^{-1}(I_m + H)P$，从引理 4 和式(20)知 $X^{n_1} + X^{n_2} + \cdots + X^{n_k} = P^{-1}(Y^{m_1} + Y^{m_2} + \cdots + Y^{m_k})P = A$，这就证明了矩阵方程(17)的解是存在的.证毕.

显然命题 1 是定理 4 中取 $g_{i,i-k} = k + 1, k = 1,2,\cdots,n-1, 2 \leqslant i \leqslant n, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$ 的特例，由此可得命题 1 的新证法.定理 4 中"下三角矩阵 $G = (g_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 满足 $g_{ii} = k - 1, i = 1,2,\cdots,m$，且 $\prod_{i=2}^{n} g_{i,i-1} \neq 0$"要求的条件比命题 1 宽松得多.此条件下式(17)的右边的已知矩阵要表示成像式(2)那样的 H_n 的多项式不是容易的事，因此要得到形如(3)的方程组是很困难的.

由上可知，定理 4 及其证明就是将命题 1 及其证明推广应用到 $k \geqslant 2$ 的情形.

参考文献:

[1] ZHANG Fuzhen.Matrix theory basic results and techniques [M].Second Edition.New York: Springer，2011.

[2] 丘维声.高等代数 [M].北京: 科学出版社，2013.

[3] 于增海.高等代数考研选讲 [M].北京: 国防工业出版社，2012.

[4] 李师正，张玉芬，李桂荣，等.高等代数解题方法与技巧 [M].北京: 高等教育出版社，2004.

[5] 曹重光，张显，唐孝敏.高等代数方法选讲 [M].北京: 科学出版社，2011.

[6] 严谦泰，王澜峰.高等代数考点综述与问题探讨 [M].北京: 国防工业出版社，2009.

[7] 张天德，吕洪波.高等代数习题精选精解 [M].济南: 山东科学技术出版社，2012.

[8] 张肇炽.关于数学符号的现行国家标准 [J].高等数学研究，1996(4): 40-43.

[9] 李尚志.线性代数(数学专业) [M].北京: 高等教育出版社，2006.

[10] 陈梅香，杨忠鹏，林志兴，等.矩阵多项式与可逆矩阵的确定 [J].北华大学学报(自然科学版)，2017，18(1): 153-155.

[11] 吕洪斌，杨忠鹏，冯晓霞，等.矩阵的秩和非零特征值个数差的确定 [J].吉林大学学报(理学版)，2014，52(6): 1210-1214.

[12] 陈梅香，吕洪斌，冯晓霞，等.和与积相等的矩阵对及其多项式表示 [J].吉林大学学报(理学版)，2013，51(5): 867-870.

[13] HORN R A，JOHNSON C R.Matrix analysis [M].New York: Cambridge University Press，1985.

[14] 许以超.代数学引论 [M].上海: 上海科学技术出版社，1983.

[15] 许以超.线性代数与矩阵论 [M].北京: 高等教育出版社，1992.

[16] 许以超.线性代数与矩阵论 [M].2 版.北京: 高等教育出版社，2008.

[17] WANG G，WEI Y，QIAN S.Generalized inverse: theory and computations [M].Beijing: Science Press，2003.

[18] BAKSALARY O M，TRENKLER G.On k-potent matrices [J].Electronic Journal of Linear Algebra，2013，26: 446-470.

【责任编辑: 伍　林】