第 58 卷　第 1 期　　厦门大学学报(自然科学版)　　Vol. 58　No. 1
2019 年 1 月　　Journal of Xiamen University (Natural Science)　　Jan. 2019

doi:10.6043/j.issn.0438-0479.201707034

λ'-最优图的充分条件

郭利涛[1*]，郭晓峰[2]

(1.厦门理工学院应用数学学院，福建 厦门 361024；2.厦门大学数学科学学院，福建 厦门 361005)

摘要：设 $G=(V,E)$ 是一个连通图.边集 $S\subset E$，如果 $G-S$ 不连通且 $G-S$ 的每个连通分支至少有 2 个点，则称 S 是一个限制性边割.限制性边连通度 $\lambda'(G)$ 就是 G 的最小限制性边割的基数.如果限制性边割存在，则称 G 是 λ'-连通的.如果 $\lambda'(G)=\xi(G)$，则 G 是 λ'-最优或者极大限制性边连通的，其中 $\xi(G)=\min\{|[X,Y]|:X\subset V,|X|=2,G[X]\text{连通}\}$.图 G 的逆度是指 $R(G)=\sum_{v\in V}\frac{1}{d(v)}$.在此基础上，主要得到了：如果 G 是 λ'-连通围长大于等于 5 的 n 阶图，且 $\delta(G)\geqslant 2$，如果 $R(G)$ 小于某个关于最小度和顶点数的值，则 G 是 λ'-最优的.对于不含钻石的图也得到了类似的结果.

关键词：限制性边连通度；λ'-最优；逆度

中图分类号：O 157　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0438-0479(2019)01-0079-04

1　预备知识

在本文中，只研究无向简单连通图，对文中未出现的术语和定义参考文献[1].设 $G=(V,E)$ 是连通图，$d_G(v)$ 表示 G 中点 v 的度(简写为 $d(v)$)，$\delta(G)$ 是 G 的最小度.进而，设 $S\subset V$，$G[S]$ 是由 S 导出的子图，$G-S$ 是点集 $V-S$ 导出的 G 的子图并且令图 G 的围长 $g(G)$ 是 G 中最短圈的长度.令 $X,Y\subset V$，$[X,Y]$ 表示 G 的一条边的端点在 X 中、另一个端点在 Y 中的边的集合.

一个处理器网络或通信网络可以用图 $G=(V,E)$ 表示，其中 V 中的每个点表示处理器或交换机，E 中的每条边表示连接处理器或交换机的线路.网络设计的一个基本要求是网络的可靠性.连通图 G 的边割 S 是一些边的集合，G 去掉 S 后不连通.G 的边连通度 $\lambda(G)$ 就是 G 的最小边割的基数.边连通度 $\lambda(G)$ 是衡量网络可靠性和容错性的一个重要参数.我们知道 $\lambda(G)\leqslant\delta(G)$，一般地，$\lambda(G)$ 越大网络越稳定，但是，在 $\lambda(G)$ 的定义中没有对 $G-S$ 的分支进行限制.因此，有研究者给出了限制性边连通度的定义[2]，具体如下：

边集 $S\subset E$，如果 $G-S$ 不连通且 $G-S$ 的每个连通分支至少两个点，则 S 是 G 的限制性边割.G 的最小限制性边割的基数就是 G 的限制性边连通度，用 $\lambda'(G)$ 表示.如果 S 是一个限制性边割且 $|S|=\lambda'(G)$，则称 S 是一个 λ'-割.Esfahanian 等[2]证明了如下结果：

定理 1[2]　对任意的至少有 4 个点的连通图 G，且不同构于星图 $K_{1,n-1}$，则 $\lambda'(G)$ 存在且有 $\lambda'(G)\leqslant\xi(G)$，其中 $\xi(G)=\min\{\xi(e)=d(u)+d(v)-2:e=uv\in E\}$ 是 G 的最小边度.

如果 $\lambda'(G)=\xi(G)$，则称 G 是 λ'-最优的.如果 G 有 λ'-割，则称 G 是 λ'-连通的.因此限制性边连通度是经典边连通度的推广，可以更加精确地衡量大规模并行处理系统的可靠性和容错性，从而，受到了很多学者的关注.

设图 G 没有孤立点，定义 G 的逆度 $R(G)=\sum_{v\in V}\frac{1}{d(v)}$.逆度最早是由计算机的 Graffiti 猜想引起人们注意的[3]，此后其他学者也研究了逆度的其他性

收稿日期：2017-07-22　　**录用日期**：2018-10-04
基金项目：国家自然科学基金(11301440，11771362)；福建省中青年教师教育科研项目(JAT160350)；福建省自然科学基金(2015J05017)
* 通信作者：ltguo2012@126.com
引文格式：郭利涛，郭晓峰.λ'-最优图的充分条件[J].厦门大学学报(自然科学版)，2019，58(1)：79-82.
Citation：GUO L T，GUO X F.Sufficient conditions for graphs to be λ'-optimal[J].J Xiamen Univ Nat Sci，2019，58(1)：79-82.(in Chinese)

质[4-7].本文中给出了关于 $R(G)$,$\delta(G)$,$\xi(G)$和 n 的函数的图是 λ'-最优的充分条件.

2 主要结果

首先,研究图的 λ'-最优性并有如下结果.

定理 2 设 G 是 λ'-连通围长大于等于 5 的图,$\delta(G)\geqslant 2$.若 $n\leqslant 2\delta+1$,则 G 是 λ'-最优的.

证明 反证法.设 $\lambda'<\xi$,则存在一个 λ'-割 $S=[X,Y]$,有$|X|$,$|Y|\geqslant 2$.令 $X_1\subseteq X$,且 X_1 中的每个点至少关联$[X,Y]$中的一条边,$X_0=X-X_1$.注意到围长大于等于 5,分两种情况讨论.

情形 1 $X_0=\varnothing$.

根据假设 X 中的每个点至少关联$[X,Y]$中的一条边,取边 $e=xy\in E(G[X])$,有

$$\xi(G)\leqslant d(x)+d(y)-2=|N(x)|+|N(y)|-2=|(N(x)\cap X)\setminus\{y\}|+|N(x)\cap Y|+|(N(y)\cap X)\setminus\{x\}|+|N(y)\cap Y|\leqslant|[\{x,y\},Y]|+|[X\setminus\{x,y\},Y]|=|[X,Y]|=\lambda'(G),$$

矛盾.

情形 2 $X_0\neq\varnothing$.

情形 2.1 $G[X_0]$是独立集.令 $x\in X_0$,$y\in X_1$ 且 $xy\in E(G[X])$,则 $N(x)\subseteq X_1$.类似于情形 1,一样可以得到矛盾.

情形 2.2 设边 $e=xy\in E(G[X_0])$.由于 $N(x)\subseteq X$,$N(y)\subseteq X$,有

$$|X|=|X_1|+|X_0|\geqslant|N(x)\cup N(y)-x-y|+2\geqslant\min\{d(x)-1,d(y)-1\}+2\geqslant\delta+1.$$

同样地,有 $|Y|\geqslant\delta+1$,则 $n\geqslant 2\delta+2$,矛盾.

下面介绍一个有用的引理.

引理 1 设 G 是 λ'-连通围长大于等于 5 的图,且 $\delta(G)\geqslant 2$,则存在一个 λ'-割$[X,Y]$,其中两个不交点集 $X,Y\subset V(G)$,$X\cup Y=V(G)$且$|[X,Y]|=\lambda'$.如果 $\lambda'<\xi$,则$|X|$,$|Y|\geqslant\xi+2$.

证明 反证法 根据假设有$|X|$,$|Y|\geqslant 2$.令 $X_1\subseteq X$,且 X_1 中的每个点至少关联$[X,Y]$中的一条边,$X_0=X-X_1$.注意到围长大于等于 5,分两种情况讨论.

情形 1 $X_0=\varnothing$.

则 X 中的每个点至少关联$[X,Y]$中的一条边.取边 $e=xy\in E(G[X])$,可以得到

$$\xi(G)\leqslant d(x)+d(y)-2=|N(x)|+|N(y)|-2=|(N(x)\cap X)\setminus\{y\}|+|N(x)\cap Y|+|(N(y)\cap X)\setminus\{x\}|+|N(y)\cap Y|\leqslant|[\{x,y\},Y]|+|[X\setminus\{x,y\},Y]|=|[X,Y]|=\lambda'(G).$$

矛盾.

情形 2 $X_0\neq\varnothing$.

情形 2.1 $G[X_0]$是独立集.设 $x\in X_0$,$y\in X_1$ 且 $xy\in E(G[X])$,则 $N(x)\subseteq X_1$.注意到围长大于等于 5,有

$$\xi(G)\leqslant d(x)+d(y)-2=|N(x)|+|N(y)|-2=|(N(x)\cap X)\setminus\{y\}|+|(N(y)\cap X)\setminus\{x\}|+|N(y)\cap Y|=|(N(x)\cap X)\setminus\{y\}|+|(N(y)\cap X_0)\setminus\{x\}|+|N(y)\cap X_1|+|N(y)\cap Y|\leqslant|(N(x)\cap X)\setminus\{y\}|+\sum_{u\in(N(y)\cap X_0)\setminus\{x\}}|N(u)\cap X_1|+|N(y)\cap X_1|+|N(y)\cap Y|\leqslant|[\{x,y\},Y]|+|[X\setminus\{x,y\},Y]|=|[X,Y]|=\lambda'(G).$$

矛盾.

情形 2.2 取一条边 $e=xy\in E(G[X_0])$.因为围长大于等于 5 以及 $N(x)\cap N(y)=\varnothing$,$N(x)\subseteq X$,$N(y)\subseteq X$.因此,

$$|X|=|X_1|+|X_0|\geqslant d(x)-1+d(y)-1+2\geqslant d(x)+d(y)\geqslant\xi(e)+2\geqslant\xi(G)+2.$$

同样地,有$|Y|\geqslant\xi(G)+2$.

推论 1 设 G 是 λ'-连通围长大于等于 5 的 n 阶图,且 $\delta(G)\geqslant 2$.若 $n\leqslant 2\xi(G)+3$,则 G 是 λ'-最优的.

引理 2[5]

(i) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_p,A$ 是正实数且 $\sum_{i=1}^{p}a_i\leqslant A$,则 $\sum_{i=1}^{p}(1/a_i)\geqslant p^2/A$.

(ii) 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_p,A$ 是正整数且 $\sum_{i=1}^{p}a_i\leqslant A$,$a,b$ 是整数有 $A=ap+b$ 且 $0\leqslant b\leqslant p$,则

$$\sum_{i=1}^{p}(1/a_i)\geqslant(p-b)/a+b/(a+1).$$

其中等号成立的充要条件是 $p-b$ 个 a_i 等于 a,其余的 a_i 等于 $a+1$.

(iii) 设 $f(x)$是区间$[L,R]$上的连续凸函数,若 $l,r\in[L,R]$,且 $l+r=L+R$,则 $f(L)+f(R)\geqslant f(l)+f(r)$.

定理 3 设 G 是 λ'-连通围长大于等于 5 的 n 阶图,且 $\delta(G)\geqslant 2$,如果

$$R(G)<2+\frac{n-2\delta-\xi+1}{(n-2\delta+1)(n-2\delta)}+\frac{1}{\delta}-$$

$$\frac{\xi-1}{2\delta(2\delta-1)},$$

则 G 是 λ'-最优的.

证明　设 G 不是 λ'-最优的,即 $\lambda'<\xi$.根据引理 1,则存在一个 λ'-割 $[X,Y]$,其中两个不交点集 $X,Y\subset V(G)$,$X\cup Y=V(G)$ 且 $|[X,Y]|=\lambda'$,使得

$$|X|,|Y|\geqslant\xi(G)+2\geqslant 2\delta,$$

有 $2\delta\leqslant|X|,|Y|\leqslant n-2\delta$.

进一步地,$\sum_{x\in X}d(x)\leqslant|X|(|X|-1)+\lambda'$.由引理 2 的(ii),有

$$\sum_{x\in X}\frac{1}{d(x)}\geqslant\frac{|X|-\lambda'}{|X|-1}+\frac{\lambda'}{|X|}=1+\frac{1}{|X|-1}-\frac{\lambda'}{|X|(|X|-1)}.$$

图 G 有一个度为 δ 的点 v.不失一般性地,假设 $v\in Y$,则 $\sum_{y\in Y,v}d(y)\leqslant(|Y|-1)^2+\lambda'$.由引理 2 的(ii),有

$$\sum_{y\in Y}\frac{1}{d(y)}\geqslant\frac{1}{\delta}+\frac{|Y|-1-\lambda'}{|Y|-1}+\frac{\lambda'}{|Y|}=1+\frac{1}{\delta}-\frac{\lambda'}{|Y|(|Y|-1)}.$$

由 $1/(|X|-1)\geqslant 1/(n-2\delta-1)$,可以得到

$$R(G)\geqslant 2+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{n-2\delta-1}-\frac{\lambda'}{|Y|(|Y|-1)}-\frac{\lambda'}{|X|(|X|-1)}.$$

考虑函数 $f(t)=\frac{1}{t(t-1)}$,容易验证 $t>0$ 时,$f''(t)>0$,因此 f 是凸的.又由于 $|X|,|Y|\geqslant 2\delta$,$|X|+|Y|=n$.将引理 2 的(iii)应用到函数 $f(t)$,则有

$$\frac{1}{|X|(|X|-1)}+\frac{1}{|Y|(|Y|-1)}\leqslant\frac{1}{2\delta(2\delta-1)}+\frac{1}{(n-2\delta)(n-2\delta-1)}.$$

又因为 $\lambda'\leqslant\xi-1$,有

$$R(G)\geqslant 2+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{n-2\delta-1}-\frac{\xi-1}{2\delta(2\delta-1)}-\frac{\xi-1}{(n-2\delta)(n-2\delta-1)}=2+\frac{n-2\delta-\xi+1}{(n-2\delta+1)(n-2\delta)}+\frac{1}{\delta}-\frac{\xi-1}{2\delta(2\delta-1)}.$$

矛盾.

钻石图就是完全图 K_4 去掉任意一条边.类似于引理 1 有如下结论:

引理 3　设 G 是 λ'-连通最小度大于等于 2 且不含钻石的图,$S=[X,Y]$ 是一个 λ'-割.不妨设 $|X|\leqslant|Y|$,存在一个点 $v\in X$,且 v 在一个三角形上,有 $|N(v)\cap Y|\geqslant 2$.如果 $\lambda'<\xi$,则 $|X|,|Y|\geqslant\xi+1$.

证明类似于引理 1.

推论 2　设 G 是 λ'-连通最小度大于等于 2 且不含钻石的图,$S=[X,Y]$ 是一个 λ'-割.不妨设,$|X|\leqslant|Y|$,存在一个点 $v\in X$,且 v 在一个三角形上,有 $|N(v)\cap Y|\geqslant 2$.如果 $n\leqslant 2\xi(G)+1$,则 G 是 λ'-最优的.

定理 4　设 G 是 λ'-连通最小度大于等于 2 且不含钻石的图,$S=[X,Y]$ 是一个 λ'-割.不妨设 $|X|\leqslant|Y|$,存在一个点 $v\in X$,且 v 在一个三角形上,有 $|N(v)\cap Y|\geqslant 2$.如果

$$R(G)<2+\frac{n-2\delta-\xi+2}{(n-2\delta+1)(n-2\delta)}+\frac{1}{\delta}-\frac{\xi-1}{(2\delta-2)(2\delta-1)},$$

则 G 是 λ'-最优的.

证明　设 G 不是 λ'-最优的,根据引理 3,有 $|X|,|Y|\geqslant\xi+1\geqslant 2\delta-1$.进而有

$$\sum_{y\in Y}d(y)\leqslant|Y|(|Y|-1)+\lambda'.$$

由引理 2 的(ii),有

$$\sum_{y\in Y}\frac{1}{d(y)}\geqslant\frac{|Y|-\lambda'}{|Y|-1}+\frac{\lambda'}{|Y|}=1+\frac{1}{|Y|-1}-\frac{\lambda'}{|Y|(|Y|-1)}.$$

图 G 有一个度为 δ 的点 v.不妨设 $v\in X$.那么有

$$\sum_{x\in X,v}d(x)\leqslant(|X|-1)^2+\lambda',$$

由引理 2 的(ii),得

$$\sum_{x\in X}\frac{1}{d(x)}\geqslant\frac{1}{\delta}+\frac{|X|-1-\lambda'}{|X|-1}+\frac{\lambda'}{|X|}=1+\frac{1}{\delta}-\frac{\lambda'}{|X|(|X|-1)}.$$

又因为 $1/(|Y|-1)\geqslant 1/(n-2\delta)$,则有

$$R(G)\geqslant 2+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{n-2\delta}-\frac{\lambda'}{|Y|(|Y|-1)}-\frac{\lambda'}{|X|(|X|-1)}.$$

考虑函数 $g(t)=\frac{1}{t(t-1)}$,容易验证 $t>0$ 时,$g''(t)>0$,所以 g 是凸函数.因为 $|X|,|Y|\geqslant 2\delta-1$,$|X|+|Y|=n$,应用引理 2 的(iii),有

$$\frac{1}{|X|(|X|-1)}+\frac{1}{|Y|(|Y|-1)}\leqslant\frac{1}{(2\delta-2)(2\delta-1)}+\frac{1}{(n-2\delta+1)(n-2\delta)}.$$

注意到 $\lambda' \leqslant \xi - 1$，则

$$R(G) \geqslant 2 + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{n-2\delta} - \frac{\xi-1}{(2\delta-2)(2\delta-1)} - \frac{\xi-1}{(n-2\delta+1)(n-2\delta)} = 2 + \frac{n-2\delta-\xi+2}{(n-2\delta+1)(n-2\delta)} + \frac{1}{\delta} - \frac{\xi-1}{(2\delta-2)(2\delta-1)}.$$

矛盾.

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory and its application[M]. New York: Academic Press, 1976: 1-50.

[2] ESFAHANIAN A H, HAKIMI S L. On computing a conditional edge connectivity of a graph[J]. Information Processing Letters, 1988, 27: 195-199.

[3] FAJTLOWICZ S. On conjectures of Graffiti, Ⅲ[J]. Congressus Numerantium, 1988, 66: 23-32.

[4] DANKELMANN P, SWART H C, VAN DEN BERG P. Diameter and inverse degree[J]. Discrete Math, 2008, 308: 670-673.

[5] DANKELMANN P, HELLWIG A, VOLKMANN L. Inverse degree and edge-connectivity[J]. Discrete Math, 2009, 309: 2943-2947.

[6] 郭利涛, 徐兰, 郭晓峰. 极大3-限制性边连通图的若干充分条件[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2011, 50(3): 498-500.

[7] TIAN Y, GUO L, MENG J, et al. Inverse degree and super edge-connectivity[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2012, 89: 752-759.

Sufficient conditions for graphs to be λ'-optimal

GUO Litao[1*], GUO Xiaofeng[2]

(1. School of Applied Mathematics, Xiamen University of Technology, Xiamen 361024, China;
2. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: Let $G=(V,E)$ be a connected graph. An edge set $S \subset E$ is a restricted edge cut, if $G-S$ is disconnected and every component of $G-S$ contains at least two vertices. The restricted edge connectivity $\lambda'(G)$ of G is the cardinality of a minimum restricted edge cut of G. A graph G is λ'-connected, if restricted edge cuts exist. A graph G is called λ'-optimal, if $\lambda'=\xi(G)$, where $\xi(G)=\min\{|[x,y]|: X \subset Y, |X|=2, G[X] \text{ is connected}\}$. The inverse degree of graphs is $R(G)=\sum_{v\in V}\frac{1}{d(v)}$. In this paper, we obtain the main result below: let G be a λ'-connected graph, girth $g \geqslant 5$ and $\delta(G) \geqslant 2$, if $R(G)$ is smaller than some value about n and $\delta(G)$, then, G is λ'-optimal. We also obtain similar results for graphs which do not contain the diamond.

Keywords: restricted edge connectivity; λ'-optimal; inverse degree