

# 奇异摄动小参数上界的求法

王翠玲<sup>1</sup>,程庆进<sup>2\*</sup>

(1.集美大学理学院,福建 厦门 361021; 2.厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005)

**摘要:**研究了在线性连续奇异摄动系统中奇异摄动小参数的选取方法.提出了一种求该系统稳定性界的新方法,由实例可知这种方法比起原有的方法简便可行.

**关键词:**稳定性;小参数;奇异摄动系统

**中图分类号:** O 177.2; O 226

**文献标志码:** A

**文章编号:** 0438-0479(2019)05-0737-05

## 1 预备知识

研究电驱动刚性机械臂的控制问题时,经常要用到奇异摄动方法.在奇异摄动理论中,奇异摄动小参数的选取方法越来越引起广大专家与学者的重视,成为目前研究的热点.众所周知,在一定条件下,奇异摄动系统可以用相应的降阶子系统和边界层子系统来逼近,且奇异摄动小参数能够在某一特定范围内变动,则原奇异摄动系统也是稳定的.由此可知,奇异摄动小参数的选取关系到整个系统的稳定性问题.

奇异摄动小参数的求法主要有时域法和频域法,这两种方法基于的思想是共同的,即把系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t), \\ \mu\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

分为慢子系统

$$\dot{x}_0(t) = A_0x_0(t), (A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}), \quad (2)$$

和快子系统

$$\dot{x}_f(t) = A_{22}x_f(t). \quad (3)$$

在  $A_{22}$  和  $A_0$  可逆的假设下,若两个子系统都为稳定的,则原奇异摄动系统也是稳定的.因此奇异摄动小参数的选取是有前提的,Liu 等<sup>[1]</sup>提出了一种新的方法,可以忽略假设条件而求出小参数的上界,该方法比以前的几种方法简单易懂,但缺点是计算量过大.因此,在文献<sup>[1]</sup>的基础上,本文中进一步提出了一种

新的方法,这种方法不需要假设  $A_{22}$  和  $A_0$  可逆,进而用几个例子来说明这种方法可使计算量明显减小.

考虑奇异摄动线性系统,式中

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t), \\ \mu\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t), \end{cases}$$

$0 < \mu \ll 1$  为一实参数,  $x_1 \in \mathbf{R}^n, x_2 \in \mathbf{R}^m, A_{11} \in \mathbf{R}^{n \times n}, A_{12} \in \mathbf{R}^{n \times m}, A_{21} \in \mathbf{R}^{m \times n}, A_{22} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ ,

奇异摄动系统(1)(下文简称系统(1))在  $A_{22}$  非奇异的前提下,可分解为慢子系统(2)和快子系统(3),具体分解过程如下:

假定所有的变量包含快和慢两部分,分别以下标 f, s 来表示,则

$$x_1(t) = x_{1s}(t) + x_{1f}(t),$$

$$x_2(t) = x_{2s}(t) + x_{2f}(t).$$

为得到慢子系统,令  $\mu = 0$ ,且把各个变量用其慢部分来代替,则得到:

$$\dot{x}_{1s}(t) = A_{11}x_{1s}(t) + A_{12}x_{2s}(t),$$

$$0 = A_{21}x_{1s}(t) + A_{22}x_{2s}(t).$$

若  $A_{22}$  是可逆的,则由上式可得:

$$x_{2s}(t) = -A_{22}^{-1}A_{21}x_{1s}(t).$$

把此结果代入上式,可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1s}(t) &= A_{11}x_{1s}(t) - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}x_{1s}(t) = \\ &= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_{1s}(t) = A_0x_{1s}(t). \end{aligned}$$

此式可以看作奇异摄动系统的慢子系统表达式.这个慢子系统的得到是建立在  $A_{22}$  可逆的基础上的.

收稿日期:2018-12-20 录用日期:2019-03-17

基金项目:国家自然科学基金(11471271);福建省自然科学基金(2017J0101);中央高校基本科研业务费专项(20720160037)

\*通信作者:qjcheng@xmu.edu.cn

引文格式:王翠玲,程庆进.奇异摄动小参数上界的求法[J].厦门大学学报(自然科学版),2019,58(5):737-741.

Citation: WANG C L, CHENG Q J. Methods to estimate the upper bound of the singular perturbation small parameter[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2019, 58(5): 737-741. (in Chinese)



下面求奇异摄动系统的快子系统. 令  $T = \frac{t}{\mu}$ , 假定变量的慢部分在时间尺度  $T$  变化下的变化非常微小, 可以忽略, 则由式(1)第 1 个式子可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{d}{dt}x_1(t) = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dT}x_1(t) = \\ & \mathbf{A}_{11}x_1(t) + \mathbf{A}_{12}x_2(t), \\ \frac{d}{dT}x_1(t) &= \frac{d}{dT}(x_{1s}(t) + x_{1f}(t)) = \frac{d}{dT}(x_{1f}(t)) = \\ & \mu(\mathbf{A}_{11}x_1(t) - \mathbf{A}_{12}x_2(t)) \approx 0, \end{aligned}$$

假定  $\frac{d}{dT}x_{1s}(t) = 0$ , 再由上式知  $x_1(t)$  的快部分  $x_{1f}(t)$  近似等于 0. 由式(1)第二个式子知

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{dt}x_2(t) &= \frac{d}{dT}(x_{2s}(t) + x_{2f}(t)) = \\ & \mathbf{A}_{21}x_{1s}(t) + \mathbf{A}_{22}(x_{2s}(t) + x_{2f}(t)), \end{aligned}$$

再由前面的  $0 = \mathbf{A}_{21}x_{1s}(t) + \mathbf{A}_{22}x_{2s}(t)$  以及  $\frac{d}{dT}x_{2s} = 0$  知

$$\mu \frac{d}{dt}x_{2f}(t) = \mathbf{A}_{22}x_{2f}(t).$$

这是系统(1)的快子系统表达式.

**定理 1**<sup>[2]</sup> 若快慢子系统(2)和(3)都稳定, 则存在  $\mu^* > 0$  使得对任意的  $\mu \in (0, \mu^*)$  整个系统(1)是稳定的.

**定理 2**<sup>[3]</sup> (i) 若  $\sigma(\mathbf{A}_0) \subset C^0$ , 且  $\sigma(\mathbf{A}_{22}) \subset C^0$ , 则存在  $\mu_s > 0$  使得系统(1)对所有的  $\mu \in (0, \mu_s)$  是指数稳定的, 且系统对某些  $\mu \geq \mu_s$  是不稳定的;

(ii) 若降阶子系统和边界层子系统都是完全可控的, 则存在  $\mu_c > 0$  使得系统(1)对所有  $\mu \in (0, \mu_c)$  是完全可控的, 并且对  $\mu \geq \mu_c$  系统(1)是不可控的;

(iii) 若降阶子系统和边界层子系统都是完全可观的, 则存在  $\mu_0 > 0$  使得系统(1)对所有  $\mu \in (0, \mu_0)$  都是完全可观的, 并且对  $\mu \geq \mu_0$  系统(1)是不可观的.

若再进一步假定  $\mathbf{A}_0$  和  $\mathbf{A}_{22}$  是稳定的, 则由定理 1 和定理 2 可知稳定性界  $\mu^*$  的选取是非常关键的.  $\mu^*$  的选取主要有时域和频域两类方法<sup>[4-8]</sup>, 一般都是基于以上思想研究的, 主要结论如下:

**定理 3** 考虑系统(1), 若  $\sigma(\mathbf{A}_0) \subset C^0$ , 且  $\sigma(\mathbf{A}_{22}) \subset C^0$ ,  $\mathbf{P}_s, \mathbf{P}_f$  分别是以下 Lyapunov 方程

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_s^T \mathbf{P}_s + \mathbf{P}_s \mathbf{A}_s &= -\mathbf{Q}_s, \\ \mathbf{A}_{22}^T \mathbf{P}_f + \mathbf{P}_f \mathbf{A}_{22} &= -\mathbf{Q}_f \end{aligned}$$

的唯一正定根, 其中  $\mathbf{Q}_s, \mathbf{Q}_f$  是正定矩阵. 令

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{ff} &:= \mathbf{P}_f(\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{12}) + (\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{12})^T \mathbf{P}_f = \\ & \mathbf{P}_{ff}^T \in \mathbf{R}^{m \times m}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{sf} := \mathbf{P}_s \mathbf{A}_{12} + (\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_s)^T \mathbf{P}_f \in \mathbf{R}^{m \times n}.$$

如果  $\lambda_{\max}(\mathbf{P}_{ff} + \mathbf{P}_{sf}^T \mathbf{Q}_s \mathbf{P}_{sf}) > 0$ , 且  $\mu \in (0, \mu^*)$ , 其中

$$\mu^* := \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_f)}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_{ff} + \mathbf{P}_{sf}^T \mathbf{Q}_s \mathbf{P}_{sf})},$$

那么系统(1)是指数稳定的. 若  $\lambda_{\max}(\mathbf{P}_{ff} + \mathbf{P}_{sf}^T \mathbf{Q}_s \mathbf{P}_{sf}) \leq 0$ , 则系统(1)对所有  $\mu > 0$  是指数稳定的.

可以看出以上思想都是基于  $\mathbf{A}_{22}$  可逆的前提下, 因此这两类方法的共同局限之处在于  $\mathbf{A}_{22}$  必须是可逆的. 文献[1]的方法克服了  $\mathbf{A}_{22}$  可逆的限制条件, 不需要把原系统分解为两个子系统, 直接分析了其稳定性问题. 在文献[1]中, 系统(1)写作

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\mu)x(t), \tag{4}$$

其中

$$\mathbf{A}(\mu) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \frac{\mathbf{A}_{21}}{\mu} & \frac{\mathbf{A}_{22}}{\mu} \end{bmatrix},$$

则研究系统(1)的稳定性等价于研究系统(4)的稳定性.

若  $\mathbf{D}(\mu) = \mathbf{A}(\mu) \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}(\mu)$ , 则  $\mathbf{D}(\mu) = \mathbf{E}_d + \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_d$ , 其中

$$\mathbf{E}_d = \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_d = \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_2, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

(5)

若  $\forall \lambda \in (0, +\infty), \det(\lambda \mathbf{E}_d + \mathbf{F}_d) \neq 0$ , 定义  $\lambda_{md} = +\infty$ , 否则

$$\lambda_{md} = \min\{\lambda \mid \det(\lambda \mathbf{E}_d + \mathbf{F}_d) = 0, \lambda \in (0, +\infty)\}.$$

文献[1]的主要结论是:

**定理 4** 令矩阵对  $(\mathbf{E}_d - \mathbf{F}_d)$  的最小正实数特征根为  $\lambda_{md}$ , 则有:

(i) 若  $\lambda_{md} = +\infty$ , 即对  $\forall \lambda \in (0, +\infty), \det(\lambda \mathbf{E}_d + \mathbf{F}_d) \neq 0$ , 这时  $\forall \mu_0 \in (0, +\infty)$ , 系统(1)不稳定.

(ii) 若  $0 < \lambda_{md} < +\infty$ , 此时对  $\forall \mu_0 \in (0, \lambda_{md})$ , 若  $\mathbf{A}(\mu_0)$  稳定, 则  $\mu^* = \lambda_{md}$ ; 若  $\mathbf{A}(\mu_0)$  不稳定, 则对  $\forall \mu \in (0, \lambda_{md})$ , 系统(1)不稳定.

本文中介绍的方法不需要把奇异摄动系统分解为快、慢两个子系统, 与文献[1]相比计算量也有明显减小.

## 2 稳定性界

本节中要用到矩阵 bialnet 乘积, 现对 bialnet 乘积介绍如下:

设  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ . 令  $V^n = \{(p, q) \mid p = 2, 3, \dots, n; q = 1, 2, \dots, p-1\}$ , 显然  $V^n$  有  $\frac{n}{2}(n-1)$ . 记  $V_i^n$  为  $V^n$  的第  $i$  项.

$A, B$  的 bialnet 乘积记为  $A \odot B, (A \odot B)_{ij} = f(V_i^n, V_j^n)$ , 其中

$$f((p, q); (r, s)) = \frac{1}{2} \left[ \det \begin{bmatrix} a_{pr} & a_{ps} \\ b_{qr} & b_{qs} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{pr} & b_{ps} \\ a_{qr} & a_{qs} \end{bmatrix} \right].$$

记  $A$  与其自身的 bialnet 加和为

$$2A \odot I = 2f(V_i^n, V_j^n) = 2f((p, q), (r, s)) =$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{pr} & a_{ps} \\ i_{qr} & i_{qs} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} i_{pr} & i_{ps} \\ a_{qr} & a_{qs} \end{bmatrix} = \begin{cases} a_{ps}/a_{qr}, & r = q/s = p, \\ a_{pr}/q_{qs}, & r \neq p, s = q/r = p, s \neq q, \\ a_{pp} + a_{qq}, & r = p, s = q, \\ 0, & r \neq p \neq s \neq q. \end{cases}$$

关于 bialnet 加和有如下性质:

引理 1 若  $n$  阶矩阵  $A$  的特征根为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ,

则  $G = 2A \odot I_n$  的特征根为  $\frac{1}{2}n(n-1)$  个值:  $\lambda_i + \lambda_j (i = 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i-1)$ .

注 1 若  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为矩阵  $A$  的特征值, 则有

$$(i) \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i,$$

$$(ii) \det(G) = \prod_{j < i=2}^n (\lambda_i + \lambda_j),$$

其中  $G = 2A \odot I_n$ . 对照式(4)中  $A(\mu) = A_1 + \frac{1}{\mu}A_2$ , 其中  $A_1, A_2$  分别为式(5)中所示的  $A_1, A_2$ . 再若  $G(\mu) = A(\mu) \odot I + I \odot A(\mu)$ , 则有  $G(\mu) = E_g + \frac{1}{\mu}F_g$ , 其中

$$E_g = A_1 \odot I + I \odot A_1,$$

$$F_g = A_2 \odot I + I \odot A_2.$$

注 2 由注 1 得到:  $\det(\mu A_1 + A_2) = 0 \Rightarrow A(\mu)$  至少有一个特征值等于 0.  $\det(\mu E_g + F_g) = 0 \Rightarrow A(\mu)$  至少有一个特征根具有零或正实部.

这表明在这两种情形下系统对  $\forall \mu \in (0, +\infty)$  总是不稳定的.

定义 1 若存在  $\lambda \in (0, +\infty)$ , 使得  $\det(\lambda E_g + F_g) = 0$ , 则定义  $\lambda_1 = \min\{\lambda \mid \det(\lambda E_g + F_g) = 0, \lambda \in (0, +\infty)\}$ ; 若不存在  $\lambda \in (0, +\infty)$  使得  $\det(\lambda E_g + F_g) = 0$ , 则定义  $\lambda_1 = +\infty$ ; 若存在  $\lambda \in (0, +\infty)$  使得  $\det(\lambda A_1 + A_2) = 0$ , 则定义  $\lambda_2 = \min\{\lambda \mid \det(\lambda A_1 + A_2) = 0, \lambda \in (0, +\infty)\}$ ; 若不存在  $\lambda \in (0, +\infty)$  使得  $\det(\lambda A_1 + A_2) = 0$ , 则定义  $\lambda_2 = +\infty$ . 令  $\lambda_{mg} = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ . 则有以下定理:

定理 5 (i) 当  $\lambda_{mg} = +\infty$  时,  $\forall \mu_0 \in (0, +\infty)$ .

若  $A(\mu_0)$  为稳定的, 则  $\mu$  的上界  $\mu^* = +\infty$ , 即系统(1)对  $\mu \in (0, +\infty)$  是渐近稳定的;

若  $A(\mu_0)$  为不稳定的, 整个系统(1)对  $\mu \in (0, +\infty)$  是不稳定的.

(ii) 当  $0 < \lambda_{mg} < +\infty$  时,  $\forall \mu_0 \in (0, \lambda_{mg})$ .

若  $A(\mu_0)$  为稳定的, 则  $\mu$  的上界  $\mu^* = \lambda_{mg}$ , 即系统(1)对  $\mu \in (0, \lambda_{mg})$  是渐近稳定的;

若  $A(\mu_0)$  为不稳定的, 整个系统(1)对  $\mu \in (0, \lambda_{mg})$  是不稳定的.

证明 (i) 由于  $\det(A(\mu)) = \det(A_1 + \frac{1}{\mu}A_2) = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{m+n} \det(\mu A_1 + A_2)$ ,  $\det G = \det\left(E_g + \frac{1}{\mu}F_g\right) = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)} \det(\mu E_g + F_g)$ , 所以  $\lambda_{mg} = +\infty$  时, 必有对  $\forall \mu \in (0, +\infty)$ ,  $\det A \neq 0$ , 且  $\det G \neq 0$ . 再由注 1 可得

$$\lambda_i(\mu) \neq 0 \text{ 且 } \lambda_i(\mu) + \lambda_j(\mu) \neq 0, \forall \mu \in (0, +\infty), i, j = 1, 2, \dots, n,$$

其中  $\lambda_i(\mu) (i = 1, 2, \dots, n)$  是系统矩阵  $A(\mu)$  的特征值. 由此可知, 对  $\forall \mu \in (0, +\infty)$ ,  $A(\mu)$  在虚轴上无特征根. 若存在  $\mu_0 \in (0, +\infty)$  使得  $A(\mu_0)$  是稳定的, 则系统(1)对  $\forall \mu \in (0, +\infty)$  是渐近稳定的; 若不然, 即存在  $\mu_1$  使得  $A(\mu_1)$  不是稳定的, 则  $A(\mu_1)$  必有存在于复平面右半平面或存在于虚轴上的特征值. 再由前面的讨论可知,  $A(\mu)$  有存在于复平面左半平面的特征值. 又由于  $A(\mu)$  的特征值  $\lambda_i(\mu)$  是  $\mu$  的连续函数, 所以必定存在  $\mu_2$  在  $\mu_0$  与  $\mu_1$  之间, 使得  $A(\mu_2)$  存在位于虚轴上的特征根. 这与前面的讨论相矛盾. 因此系统(1)对所有的  $\mu \in (0, +\infty)$  是渐近稳定的.

同理, 若  $\forall \mu_0 \in (0, +\infty)$ ,  $A(\mu_0)$  为不稳定的, 则对  $\forall \mu \in (0, +\infty)$ , 系统(1)也不稳定.

(ii) 同理可证.

### 3 应用

机械手动力学方程如下:

$$T = M(\theta)\omega + W(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta), \tag{6}$$

其中,  $M$  为  $n \times n$  正定对称惯性矩阵,  $W$  为  $n \times 1$  包含向心力矩和哥氏力矩的向量,  $G$  为  $n \times 1$  的重力力矩向量,  $\theta \in \mathbf{R}^{n \times 1}$  为关节角位移向量,  $\omega$  为关节角加速度.

状态方程可写为:

$$T = K_T I, \tag{7}$$

$$L \frac{dI}{dt} = -RT - K_b \omega + V(\theta, \omega),$$

其中,  $K_b$  为反电势常数矩阵,  $K_T$  为转矩常数矩阵,  $L$  为电枢电感,  $V$  为控制输入电势,  $I$  为电枢电流.

综合式(6)和(7), 系统的状态方程可写为

$$\dot{\omega} = -M^{-1}[W + G] + M^{-1}(K_T I), \quad (8)$$

在单连杆机械臂(图 1)动力学方程中,

$$T = ml^2 \dot{\omega} + mlg \cos \theta, \quad (9)$$

其中,  $m$  为连杆质量,  $l$  为其长度,  $\theta$  为连杆与地面夹角. 此时系统的状态方程可记为

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l} \cos \theta + \frac{K_T}{ml^2} I, \end{aligned} \quad (10)$$

$$L \frac{dI}{dt} = -RI - K_b \omega + V(\theta, \omega).$$

再令  $\theta_1$  为连杆与垂直方向的夹角, 则有  $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_1$ ,

$\cos \theta = \sin \theta_1$ . 假定  $V=0$ , 且  $\theta_1 < \frac{\pi}{6}$ , 则式(10)可记为

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -\omega, \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l} \theta_1 + \frac{K_T}{ml^2} I, \end{aligned} \quad (11)$$

$$L \frac{dI}{dt} = -RI - K_b \omega + V(\theta, \omega),$$

即

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{g}{l} & 0 & \frac{K_T}{ml^2} \\ 0 & -K_b & -R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \omega \\ I \end{pmatrix},$$

其中电枢电感  $L$  可看作奇异摄动小参数, 研究  $L$  的范围, 使得  $L$  在该范围内变动时系统为稳定的. 依据定理 5 便可得到适当的范围.

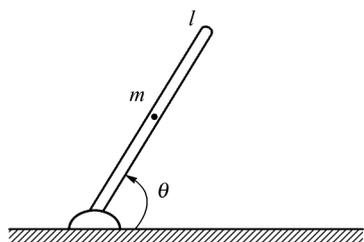


图 1 单连杆机械臂示意图

Fig. 1 Schematic diagram of single link manipulator

下面用本章提出的方法解文献[1]中的例题. 考虑系统矩阵为以下 2 个矩阵的奇异摄动系统.

例 1

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \epsilon \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

解: 设

$$A(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{3}{\epsilon} & -\frac{4}{\epsilon} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

则  $\text{eig}(A_2, A_1) = 0, -\infty$ , 因此  $\lambda_1 = +\infty$ . 且  $\text{eig}(F_g, E_g) = 4$ , 因此  $\lambda_2 = 4$ . 这样  $\epsilon^* = \min\{\lambda_1, \lambda_2\} = 4$ . 取  $\epsilon_0 = 1 \in (0, \epsilon^*)$ , 则  $A(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ . 因此  $\text{eig}(A(\epsilon_0)) = -1, -2$ , 当  $\epsilon_0 = 1$  时系统(1)为渐近稳定的. 由于系统(1)对所有  $\epsilon \in (0, 4)$  都是渐近稳定的, 所以  $\epsilon^* = 4$ .

例 2

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \epsilon \dot{x}_3(t) \\ \epsilon \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}.$$

解:

$$A(\epsilon) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

则  $\text{eig}(A_2, -A_1) = 0, 0, +\infty, -\infty$ , 因此  $\lambda_1 = +\infty$ .

$$E_g = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix},$$

$\text{eig}(\mathbf{E}_g, \mathbf{F}_g) = 4.9480, -2.0555, -1.2538, -0.0000, 0.9803, +\infty$ , 因此  $\lambda_2 = 0.9803$ . 这样  $\epsilon^* = \min\{\lambda_1, \lambda_2\} = 0.9803$ . 取  $\epsilon_0 = 0.5 \in (0, 0.9803)$ , 则  $\mathbf{A}(\epsilon_0) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ , 因此  $\text{eig}(\mathbf{A}(\epsilon_0)) = -1.0796 + 2.6269i, -1.0796 - 2.6269i, -3.5866, -5.2542, -2$ , 当  $\epsilon_0 = 0.5$  时系统(1)为渐近稳定的. 系统(1)对所有  $\epsilon \in (0, 0.9803)$  都是渐近稳定的.

### 参考文献:

- [1] LIU W Q, SREERAM V. A new characterization on stability bounds for singularity perturbed systems [J]. Elsevier Linear Algebra and Its Applications, 1997, 263: 377-388.
- [2] KLIMUSHEV A I, KRASOVSKII N K. Uncertain asymptotic stability of systems of differential equations with a small parameter in the derivative terms [J]. J Appl Math Mech, 1962, 25: 1011-1025.
- [3] KOKOTOVIC P V, KHALIL H K, REILLY J O. Singular perturbations methods in control: analysis and design [J]. New York: Academic Press, 1986: 78-81.
- [4] SHAHRUZ S M, PACKARD A K. Estimates of the singular perturbation parameter for stability, controllability and observability of linear systems [C] // Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control. Tucson: IEEE, 1992: 3062-3063.
- [5] SANDELL N R, JR. Robust stability of systems with application to singular perturbations [J]. Automatica, 1979, 15: 467-470.
- [6] CHEN B, LIN C. On the stability bounds of singularly perturbed systems [J]. IEEE Trans Automat Control, 1993, 35: 302-304.
- [7] SEN S, DATTA K B. Stability bounds of singularity perturbed systems [J]. IEEE Trans Automat Control, 1990, 35: 1265-1270.
- [8] CHEN S J, LIN J L. Maximal stability bounds of singularly perturbed systems [J]. Journal of the Franklin Institute, 1999, 336: 1209-1218.

## Methods to estimate the upper bound of the singular perturbation small parameter

WANG Cuiling<sup>1</sup>, CHENG Qingjin<sup>2\*</sup>

(1. School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China; 2. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** The choices of the singular perturbation parameter in linearly continuous singularly perturbed system is studied in this paper. We design a simple and convenient method to estimate the upper bound of the singular perturbation small parameter, and use several known examples to show that this method is more simpler and more feasible than the original method.

**Keywords:** stability; small parameter; singular perturbation system