Frühe mathematische Bildung - Ziele und Gelingensbedingungen für den Elementar- und Primarbereich

Benz, Christiane; Grüßing, Meike; Lorenz, Jens Holger; Reiss, Kristina; Selter, Christoph; Wollring, Bernd

Band 8

Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ (Hrsg.)

Frühe mathematische Bildung – Ziele und Gelingensbedingungen für den Elementar- und Primarbereich

Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“

Christiane Benz, Meike Grüßing, Jens Holger Lorenz, Kristina Reiss, Christoph Selter, Bernd Wollring

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

Verlag Barbara Budrich

KLEINE FORSCHER
Naturwissenschaften und Technik für Mädchen und Jungen

Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“

Band 8

Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ (Hrsg.)

Frühe mathematische Bildung – Ziele und Gelingensbedingungen für den Elementar- und Primarbereich

Christiane Benz, Meike Grüßing, Jens Holger Lorenz,
Kristina Reiss, Christoph Selter und Bernd Wollring

Verlag Barbara Budrich
Opladen • Berlin • Toronto 2017

Herausgeber: Stiftung „Haus der kleinen Forscher“
Verantwortlich: Dr. Janna Pahnke
Projektleitung: Dr. Karen Bartling
Konzeption und Redaktion: Dr. Claudia Peschke
Redaktionelle Mitarbeit: Dr. Paula Döge, Christine Günther, Dr. Maria Ploog

Weitere Informationen finden Sie unter: www.haus-der-kleinen-forscher.de

Haben Sie Fragen, Anmerkungen oder Anregungen zu diesem Band oder der wissenschaftlichen Begleitung der Stiftungsarbeit?
Wenden Sie sich an: forschung@haus-der-kleinen-forscher.de.
Weitere Informationen und Studienergebnisse finden Sie auch unter www.haus-der-kleinen-forscher.de, Rubrik Wissenschaftliche Begleitung.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Dieses Buch steht im Open-Access-Bereich der Verlagsseite zum kostenlosen Download bereit (http://dx.doi.org/10.3224/84742051).
Eine kostenpflichtige Druckversion kann über den Verlag bezogen werden. Die Seitenzahlen in der Druck- und Onlineversion sind identisch.

ISBN 978-3-8474-2051-4
eISBN 978-3-8474-1068-3
DOI 10.3224/84742051

Umschlaggestaltung: Bettina Lehfeldt, Kleinmachnow – www.lehfeldtgraphic.de
Titelbildnachweis: Christoph Wehrer/Stiftung „Haus der kleinen Forscher“
Lektorat und Satz: Ulrike Weingärtner, Gründau; info@textakzente.de
Druck: SDK Systemdruck, Köln
Printed in Europe, gedruckt auf FSC-Papier

Inhaltsverzeichnis

Informationen über die Autorinnen und Autoren

Prof. Dr. Christiane Benz
Pädagogische Hochschule Karlsruhe, Institut für Mathematik und Informatik
Arbeitsschwerpunkte: mathematische Bildung im Elementarbereich, Entwicklung und Förderung arithmetischer Kompetenz im Primarbereich, Professionalisierung
Kontakt: Bismarckstr. 10, 76133 Karlsruhe, benz@ph-karlsruhe.de

Prof. Dr. Meike Grüßing
Universität Vechta, Fach Mathematik
vormals: Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN), Abteilung Mathematikdidaktik
Arbeitsschwerpunkte: Diagnose und Förderung mathematischer Kompetenzen im Elementar- und Primarbereich, adaptive Wahl von Rechenstrategien, Zusammenhang von räumlichen Fähigkeiten und Mathematikleistung
Kontakt: Driverstraße 22, 49377 Vechta, meike.gruessing@uni-vechta.de

Prof. Dr. Jens Holger Lorenz
Goethe-Universität Frankfurt am Main, Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik
vormals: Pädagogische Hochschule Heidelberg, Institut für Mathematik und Informatik
Arbeitsschwerpunkte: Diagnose und Förderung im Elementar- und Grundschulalter, mathematisches Denken, Rechenstörungen, Anschauung und Veranschaulichungsmittel
Kontakt: Robert-Mayer-Str. 6-8, 60325 Frankfurt, jens.lorenz@t-online.de

Prof. Dr. Kristina Reiss
Technische Universität München, Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Arbeitsschwerpunkte: Entwicklung mathematischer Kompetenz, internationale Bildungsvergleichsstudien, Lehramtsausbildung
Kontakt: Arcisstraße 21, 80333 München, kristina.reiss@tum.de

Prof. Dr. Christoph Selter

TU Dortmund, Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts

Arbeitsschwerpunkte: Systemische fachbezogene Unterrichtsentwicklung, Erforschung von Denkwegen und Schülervorstellungen in der Primarstufe, Entwicklung und Erforschung von Konzeptionen und Materialien zur Lehrerfortbildung und zur Qualifizierung von Multiplikatoren

Kontakt: Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund,
christoph.selter@math.tu-dortmund.de

Prof. Dr. Bernd Wollring

Universität Kassel, Institut für Mathematik

Arbeitsschwerpunkte: Lernumgebungen zur Mathematik für den Primarbereich, Interviewbasierte Diagnostik zur Mathematik für den Primarbereich, Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung zu Raum und Form für den Primarbereich

Kontakt: Heinrich-Plett-Straße 40, 34132 Kassel,
wollring@mathematik.uni-kassel.de

Vorwort

Liebe Leserinnen und Leser,

der neue Band der wissenschaftlichen Schriftenreihe zur Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ ist der achte in der bislang zehnjährigen Geschichte der Stiftung. Nachdem vorhergehende Bände u. a. die Ziele und Herausforderungen der frühen naturwissenschaftlichen und technischen Bildung sowie deren Umsetzung in der Stiftungsarbeit thematisierten, stellt der vorliegende Band nun die Ziele und Herangehensweisen für die mathematische Bildung im Elementar- und Primarbereich und deren Gelingensbedingungen vor.

Schon kleine Kinder nutzen die Mathematik: beim Tischdecken, beim Spielen mit Bauklötzen oder beim Teilen von Süßigkeiten. Um die kindlichen Lern- und Entwicklungsprozesse in der Auseinandersetzung mit Mathematik begleiten und fördern zu können, müssen pädagogische Fach- und Lehrkräfte solche mathematischen Situationen erkennen und zu nutzen wissen. Um sie dabei zu unterstützen, stellt die Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ verschiedene Angebote im Bereich Mathematik zur Verfügung. Der Konzeption und dem Ausbau der Stiftungsangebote im Bereich der frühen mathematischen Bildung ging erneut eine fachliche Fundierung des Themenbereichs voraus. In deren Rahmen erarbeiteten Fachexpertinnen und -experten eine Expertise zu den Zieldimensionen mathematischer Bildung für Kinder und für pädagogische Fach- und Lehrkräfte. Der vorliegende Band stellt diese Expertise vor und gibt einen Überblick über die Umsetzung der Empfehlungen in die inhaltliche Entwicklung der mathematischen Stiftungsangebote.

Mein besonderer Dank gilt den Autorinnen und Autoren der Expertise, die mit viel Engagement und basierend auf den aktuellen theoretischen und empirischen Erkenntnissen aus der Mathematikdidaktik und der Entwicklungspsychologie die Ziele früher mathematischer Bildung formuliert und Empfehlungen für die Umsetzung in der pädagogischen Praxis abgeleitet haben. Ich danke insbesondere Prof. Dr. Kristina Reiss für ihr Geleitwort zu diesem Band.

Auch den verantwortlichen Teams in der Stiftung, die für die Koordination der Fachfundierung, die Förderung des fachlichen Austauschs im Rahmen von Expertentreffen und Fachforen sowie für die inhaltliche Umsetzung der Empfehlungen in die Weiterentwicklung der Stiftungsangebote im mathematischen Bereich in

Form von Fortbildungskonzepten, pädagogischen Materialien und Online-Angeboten verantwortlich waren, gilt mein ausdrücklicher Dank.

Ich wünsche Ihnen eine anregende Lektüre und wertvolle Erkenntnisse beim Lesen dieses Bandes der wissenschaftlichen Schriftenreihe und freue mich, wenn er den Dialog zwischen Wissenschaft und Praxis anregt und um neue Perspektiven bereichert.

Michael Fritz
Vorstand der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“

Geleitwort

von Kristina Reiss

Erinnern Sie sich noch an „Himmel und Hölle"? Bei diesem Hüpfspiel wird ein Muster aus meist rechteckigen Feldern auf den Bürgersteig gemalt, die Felder werden nummeriert bzw. als „Erde", „Himmel" und „Hölle" gekennzeichnet. Es gilt, gezielt einen Stein auf ein bestimmtes Feld zu werfen, dann zu hüpfen und dabei dieses Feld – und je nach Variante auch andere Felder – zu überspringen. In der nächsten Runde geht es mit der nächstgrößeren Zahl weiter. Manchmal sieht man ein solches Gitter noch auf der Straße. Oder haben Sie „Halli Galli" gespielt? Hier muss man gleiche Objekte erkennen, sie zählen und bei einer bestimmten Anzahl von Objekten schnell reagieren. Kinder haben an Spielen dieser Art meist viel Spaß, aber das ist nicht alles: Selbst in diesen eher einfachen Situationen können sie ganz nebenbei – wenn auch nicht nur – Mathematik lernen. Ohne Zweifel werden hier mathematische Erfahrungen für Anfänger geboten, denn bei beiden Spielen muss man in vielen Spielphasen mit Zahlen und Mustern umgehen. Es gibt zahlreiche Forschungsarbeiten, die zeigen, wie wichtig solche frühen Erfahrungen mit der Mathematik sind und wie sehr sie den späteren Erfolg im Fach bestimmen. Folglich gilt es, Kinder mit geeigneten Angeboten für mathematische Aspekte zu interessieren und das pädagogische Personal entsprechend auszubilden. Doch was sind geeignete Angebote oder geeignete Methoden der Vermittlung? Die Antwort auf diese Frage ist nicht nur komplex, sie wird auf der Grundlage unterschiedlicher Theorien, Ansätze und auch praktischer Erfahrungen in der Literatur oft unterschiedlich gesehen. Die vorliegende Expertise leistet hier einen Beitrag zur Klärung und benennt anhand von „Zieldimensionen" mathematischer Bildung wesentliche Handlungsfelder für das Lehren und Lernen von Mathematik in Kindertagesstätten, Horten und Primarschulen. Sie referiert dabei nicht nur den Stand der Forschung, sondern versucht auch Vorschläge für einen theoretischen Rahmen zu erarbeiten. Die Expertise konzentriert sich auf den Elementar- und Primarbereich und zeigt auf, was frühe mathematische Bildung ausmacht und wie sie gelingen kann.

Fraglos kommt der Mathematik im Kanon der Schulfächer eine Schlüsselrolle zu. In unserer hoch technisierten und strukturierten Welt ist Grundlagenwissen in diesem Fach unverzichtbar, denn nur über dieses Wissen wird eine volle Partizipation an gesellschaftlichen Prozessen möglich. Man kann Wahlprognosen nicht wirklich verstehen, wenn grundlegendes Wissen zur Stochastik fehlt, man kann

Lücken im Handyempfang sicherlich besser beurteilen, wenn man rudimentäre Kenntnisse der Geometrie hat – und für alle diese Bereiche benötigt man zunächst ein solides Wissen über Zahlen und zum Rechnen. Die Beispiele können zwar nur einen äußerst kleinen Eindruck dessen vermitteln, was mit Mathematik verbunden ist, sie sind aber dennoch nicht ganz zufällig gewählt. Vielmehr spiegeln sie wider, dass sich Mathematik nicht nur in schlichten Inhalten, sondern vor allem in wichtigen Anwendungen zeigt. Diese Betrachtungsweise hat in den letzten Jahren ihren Weg in die Schule gefunden, wo sich entsprechend die Aufmerksamkeit in Bezug auf Lehren und Lernen verlagert hat. Natürlich geht es immer noch um inhaltsbezogenes Wissen, wichtiger ist aber der Umgang mit diesem Wissen geworden: Man lernt nicht nur, um Wissen zu erwerben, man lernt auch, um dieses Wissen zu benutzen. Genauso wie der Sprachenunterricht letztendlich dazu befähigen soll, mit anderen Menschen in einer Fremdsprache zu kommunizieren, soll der Mathematikunterricht darauf vorbereiten, mathematikhaltige Situationen wie Abschätzung des Rechnungsbetrags im Restaurant oder die Berechnung der Zinsen bei Beantragung eines Kredits zu meistern. Konkretisiert wird dieser Zugang im Begriff der Kompetenz. In einem Bereich kompetent zu sein, bedeutet zunächst, über Fähigkeiten und Fertigkeiten zu verfügen und sie in realen Situationen einsetzen zu können. Einsetzen zu können bedeutet aber nicht unbedingt einsetzen zu wollen, und so gehören zur Kompetenz auch der Wille und die Motivation zur Lösung eines Problems. Insbesondere ist damit nicht nur die rein kognitive, sondern auch die motivational-emotionale Ebene angesprochen. Es liegt auf der Hand, dass diese Auffassung erhebliche Konsequenzen für das Lehren hat. Möchte man den Kompetenzerwerb unterstützen, so reicht es nicht, fachliche Angebote zu machen oder Anwendungen aufzuzeigen. Vielmehr ist es notwendig, Interessen zu wecken, Motivation zu erkennen oder aufzubauen, eventuelle Ängste abzubauen oder Langeweile nicht aufkommen zu lassen. Sicherlich sollten sowohl Interesse und Motivation als auch positive Emotionen stetig gefördert und genauso möglichst lange auf einem möglichst hohen Niveau gehalten werden.

Die Expertise geht genau von diesem Ansatz aus. Sie widmet sich prozessbezogenen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen, wie sie prinzipiell auch in den Bildungsstandards für die Grundschule beschrieben werden. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf dem vorschulischen Bereich, für den bislang kaum abgestimmte Vorschläge für die mathematische Bildung vorliegen. Die abgestimmte Verbindung zwischen Vorschule und Grundschule kann dabei als essentiell angesehen werden. Auf der einen Seite ist sie für Kinder wichtig, die kontinuierliche Lernprozesse und die Anbindung an Vorwissen für ein erfolgreiches Lernen brauchen. Auf der anderen Seite ist auch für das pädagogische Personal eine ganzheitliche Sicht auf die Mathematik Voraussetzung für die geeignete Auswahl und Präsentation von Lerninhalten. Die Expertise betont darüber hinaus

Aspekte wie Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit im Umgang mit dem Fach. Kompetenzvermittlung setzt – ohne Frage – eigene Kompetenz voraus, so dass inhaltliches Wissen genauso wie inhaltliche Interessen auch auf Seiten der Pädagoginnen und Pädagogen in den Einrichtungen der frühkindlichen Bildung ein wesentlicher Aspekt sind. Mangelndes Fachwissen, vielleicht Angst vor Mathematik, geringes Interesse am Fach und eine niedrige Motivation, sich mit mathematischen Problemen zu beschäftigen, sind Barrieren für eine gute mathematische Bildung. Auch hier geht es immer um die Kinder und ihre Bildung, allerdings einmal stärker aus der Perspektive der lernenden Person und einmal stärker aus der Perspektive der lehrenden Person.

Die Stiftung „Haus der kleinen Forscher" hat sich in den letzten Jahren in den Bereichen Technik und Naturwissenschaften mit hervorragenden Angeboten für die frühkindliche Bildung profiliert. Die erfolgreiche Arbeit hat in vielen Einrichtungen der frühkindlichen Bildung Wirkung gezeigt, das pädagogische Personal sensibilisiert, Fortbildungen initiiert und so vor allem die spielerische Auseinandersetzung mit technischen und naturwissenschaftlichen Phänomenen – insbesondere alltäglich sichtbaren Phänomenen – maßgeblich gefördert. Dass mit der Mathematik nun ein weiterer Schwerpunkt im Bereich MINT hinzukommt, ergänzt das Portfolio um eine Grundlagenwissenschaft und rundet es entsprechend ab. Auch Mathematik können Kinder über alltägliche Phänomene erfahren und so einen Zugang zu einem Fach finden, das sie lange begleiten wird. Die Stiftung steht dabei für eine hohe Qualität der Bildungsangebote und diese hohe Qualität prägt den vorliegenden Band der „Wissenschaftlichen Untersuchungen". Er eröffnet dem pädagogischen Personal in Kindergärten, Horten und Schulen eine breite Quelle wissenschaftlich fundierter Informationen und trägt so sicherlich dazu bei, dass mathematisches Interesse früh geweckt und mathematische Kompetenzen altersgemäß entwickelt werden. Der Band zeigt aber auch auf, dass für den Bereich der frühen mathematischen Bildung weiterhin Forschungsbedarf besteht. Lehr- und Lerninhalte sind in der Regel normativ bestimmt, wie sie aber zu einem langfristigen Kompetenzerwerb beitragen, muss die empirische Forschung prüfen. So können Praxis und Forschung von der Expertise profitieren und auf ihrer Grundlage einen hoffentlich lebhaften Austausch initiieren. Gerade in Bezug auf die frühkindliche mathematische Bildung ist hier noch viel Lohnenswertes zu tun.

Prof. Dr. Kristina Reiss
Technische Universität München

Einleitung

Stiftung Haus der kleinen Forscher

1 Überblick zur Stiftung „Haus der kleinen Forscher“

Die gemeinnützige Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ engagiert sich mit einer bundesweiten Initiative für die Bildungschancen von Kindern im Kita- und Grundschulalter in den Bereichen Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik. Mit einem kontinuierlichen Fortbildungsangebot und praxisnahen Arbeitsunterlagen unterstützt sie pädagogische Fach- und Lehrkräfte aus ganz Deutschland dabei, den frühen Forschergeist von Mädchen und Jungen aufzugreifen und mit ihnen Naturphänomene zu erforschen sowie mathematischen, informatischen und technischen Fragestellungen nachzugehen. Die Bildungsinitiative leistet damit einen wichtigen Beitrag in folgenden Bereichen:

- zur Qualifizierung des frühpädagogischen Personals
- zur Qualitätsentwicklung von Einrichtungen
- zur Persönlichkeits- und Interessenentwicklung der Kinder
- zur Nachwuchsförderung in den MINT[1]-Bildungsbereichen

Die Hauptaktivitäten der Stiftung sind:

- der Auf- und Ausbau tragfähiger lokaler Netzwerke unter Beteiligung von Akteuren vor Ort sowie Beratung und Service für die inzwischen rund 230 Netzwerkpartner,
- die Ausbildung von Multiplikatorinnen und Multiplikatoren (Trainerinnen und Trainern), die vor Ort pädagogische Fach- und Lehrkräfte kontinuierlich fortbilden,
- die Entwicklung und Bereitstellung von Fortbildungskonzepten und Materialien für pädagogische Fach- und Lehrkräfte sowie
- die Unterstützung der Qualitätsentwicklung von Bildungseinrichtungen durch die Zertifizierung als „Haus der kleinen Forscher“.

1 *MINT = Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften, Technik.*

Vision und Mission der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“

Vision der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“:
Fragen – Forschen – Zukunft gestalten

Alle Kinder in Deutschland erleben Bildungsorte, in denen sie ihren eigenen Fragen nachgehen und forschend die Welt entdecken können. Solche „Häuser der kleinen Forscher“ machen Mädchen und Jungen stark für die Zukunft. Sie befähigen Kinder, selbstbestimmt zu denken und verantwortungsvoll zu handeln.

Technologisierung und Digitalisierung sowie Folgen des Klimawandels und der sozialen Ungleichheit beeinflussen zunehmend unseren Alltag. Wir tragen dazu bei, dass sich Menschen in unserer schnell verändernden Welt orientieren können und offen für Neues bleiben.

Die alltägliche Auseinandersetzung mit Natur und Technik fördert Neugier, Lern- und Denkfreude der Mädchen und Jungen. Wir sehen frühe Bildung als Schlüssel, um den Herausforderungen einer komplexen Welt erfolgreich begegnen zu können.

Mission der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“:

Die Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ …

- befördert eine fragend-forschende Haltung bei Kindern,
- gibt Mädchen und Jungen schon in jungen Jahren die Chance, eigene Talente und Potenziale in den Bereichen Naturwissenschaften, Technik, Mathematik und Informatik zu entdecken
- und legt den Grundstein für einen reflektierten Umgang mit technologischen und gesellschaftlichen Veränderungen im Sinne einer nachhaltigen Entwicklung.

Gemeinsam mit ihren Bezugspersonen erleben die Kinder Spaß und Freude am Entdecken und Verstehen dieser Welt. Kinder gestalten Bildungsprozesse aktiv mit und erleben sich dadurch als kompetent und selbstwirksam in ihrem Alltag. Beim forschenden Lernen können Kinder Problemlösekompetenzen entwickeln, eigene Antworten finden und Selbstvertrauen spüren („Ich kann!“) – Erfahrungen und Fähigkeiten, die weit über die Kindheit hinaus für die Persönlichkeitsentwicklung und die spätere Berufsbiographie von Bedeutung sind.

In einem praxisnahen und qualitativ hochwertigen Professionalisierungsansatz unterstützt die Stiftung pädagogische Fach- und Lehrkräfte dabei, Kinder im Alter bis 10 Jahren beim Entdecken, Forschen und Lernen zu begleiten. Über vielfältige Fortbildungsangebote erleben Fach- und Lehrkräfte die Faszination eigenen Forschens für sich selbst. Sie erweitern ihre Kenntnisse und pädagogischen Kompetenzen und setzen sie in ihrer alltäglichen Arbeit mit Kindern um.

Die Initiative unterstützt Bildungseinrichtungen darin, sich als „Ort des forschenden Lernens“ nachhaltig weiterzuentwickeln und in diesem Sinn als „Haus der kleinen Forscher“ förderliche Lernumgebungen für Kinder zu schaffen.

Qualifizierungsinitiative für Pädagoginnen und Pädagogen

Das „Haus der kleinen Forscher“ ist bundesweit die größte Qualifizierungsinitiative für Pädagoginnen und Pädagogen im Bereich der frühen Bildung. Sie unterstützt Kitas, Horte und Grundschulen dabei, naturwissenschaftliche, mathematische und/oder technische Schwerpunkte zu setzen und förderliche Entwicklungs- und Lernumgebungen für Kinder in diesen Bereichen zu bieten. Der pädagogische Ansatz der Stiftung knüpft an den Ressourcen der Kinder an und betont das gemeinsame forschende Lernen im dialogischen Austausch (Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2013a, 2015a). Die Stiftung fördert mit ihren Aktivitäten auch die Umsetzung vorhandener Bildungs- und Rahmenlehrpläne der jeweiligen Bundesländer in den Bereichen Naturwissenschaften, Mathematik und Technik.

Die inhaltlichen Angebote der Stiftung umfassen neben den Fortbildungen für pädagogische Fach- und Lehrkräfte auch pädagogische Materialien, einen jährlichen Aktionstag sowie Anregungen für Kooperationen:

- **Arbeitsunterlagen:** Für die praktische Umsetzung in den pädagogischen Einrichtungen stellt die Stiftung kostenlos Arbeitsunterlagen zur Verfügung, z. B. Themenbroschüren, Forschungs- und Entdeckungskarten, didaktische Materialien und Filmbeispiele.
- **Internetpräsenz:** Die Website www.haus-der-kleinen-forscher.de bietet Informationen für alle Interessierten.

- **Magazin „Forscht mit!“:** Pädagogische Fach- und Lehrkräfte erhalten quartalsweise praktische Tipps zum Forschen in der Einrichtung, Informationen zur Arbeit der Stiftung sowie Best-Practice-Berichte aus anderen Einrichtungen und Netzwerken.
- **„Tag der kleinen Forscher“:** An diesem bundesweiten Mitmachtag können Mädchen und Jungen in ganz Deutschland ein aktuelles Forschungsthema erkunden. Dazu stellt die Stiftung den pädagogischen Einrichtungen Material bereit und ruft Unterstützer aus Politik, Wirtschaft, Wissenschaft und Gesellschaft zum Mitmachen auf.
- **Anregungen zur Kooperation:** Interessierte Eltern, Patinnen und Paten sowie andere Bildungspartner unterstützen das gemeinsame Entdecken und Forschen in den Einrichtungen.
- **Zertifizierung:** Engagierte Einrichtungen werden anhand festgelegter Bewertungskriterien als „Haus der kleinen Forscher“ zertifiziert. Alle sich bewerbenden Einrichtungen erhalten eine detaillierte Rückmeldung mit Anregungen für die weitere Entwicklung des gemeinsamen Entdeckens und Forschens mit den Kindern.

Bundesweite Vernetzung

Das „Haus der kleinen Forscher“ lebt als bundesweite Bildungsinitiative vom Engagement vielfältiger Akteure vor Ort – den lokalen Netzwerken, die als dauerhafte Partner und Fortbildungsanbieter in den Regionen agieren. Zu den derzeit (Stand 2. Januar 2017) 224 Netzwerkpartnern zählen Kommunen und Kita-Träger, Wirtschaftsverbände, Science-Center, Museen, Unternehmen, Stiftungen, Vereine usw. Seit 2011 steht das Fortbildungsprogramm der Initiative auch Horten und Ganztagsgrundschulen offen.

Pädagogische Fach- und Lehrkräfte aus über 26.800 Kitas, Horten und Grundschulen haben bereits am Fortbildungsprogramm der Initiative teilgenommen, davon pädagogische Fachkräfte aus mehr als 22.500 Kitas sowie Fach- und Lehrkräfte aus rund 1.300 Horten und rund 3.700 (Ganztags-)Grundschulen.

Deutschlandweit sind mehr als 4.600 Kitas, Horte und Grundschulen als „Haus der kleinen Forscher“ zertifiziert, darunter rund 4.400 Kitas. Seit Herbst 2013 können sich auch Horte und Grundschulen zertifizieren lassen. Mehr als 100 Horte und rund 200 Grundschulen haben bereits das Zertifikat „Haus der kleinen Forscher“.

Das kontinuierliche Fortbildungsprogramm

Die Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ konzentriert sich vor allem auf die Weiterqualifizierung von Pädagoginnen und Pädagogen im Hinblick auf das Entdecken und Erforschen mathematischer, informatischer, naturwissenschaftlicher und/oder technischer Themen mit Kindern. Das Ziel ist eine kontinuierliche Begleitung der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte: Die Teilnahme an Fortbildungen zu unterschiedlichen Themen erweitert sukzessive das methodische Repertoire und vertieft das Verständnis des pädagogischen Ansatzes der Stiftung. Im Wechsel von Präsenzfortbildung und Transferphasen können die Pädagoginnen und Pädagogen das Gelernte in der Praxis ausprobieren und sich dazu in der nächsten Fortbildung austauschen.

Um möglichst vielen interessierten pädagogischen Fach- und Lehrkräften die Teilnahme an Fortbildungen zu ermöglichen, findet die Weiterqualifizierung über ein Multiplikatorenmodell statt: Die Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ bildet an mehreren Standorten in Deutschland Trainerinnen und Trainer aus, die ihrerseits Fortbildungen für Pädagoginnen und Pädagogen in ihrem lokalen Netzwerk durchführen. Die Trainerinnen und Trainer qualifizieren sich durch die Teilnahme an den Präsenz- und Onlinefortbildungen der Stiftung dafür, Fortbildungen mit Pädagoginnen und Pädagogen durchzuführen. Als Unterstützung erhalten sie ausführliche Arbeitsunterlagen für ihre Aufgabe in der Erwachsenenbildung sowie die Möglichkeit, persönliches Feedback im Hospitationsprogramm der Stiftung oder in Form von Videofeedback zu bekommen. Für die Auffrischung und Vertiefung der Fortbildungsinhalte steht auch der Online-Campus für Trainerinnen und Trainer zur Verfügung. Die digitale Lernplattform hält neben einer Vielzahl von Online-Lernangeboten auch inhaltliche Informationen und Arbeitsunterlagen zu den einzelnen Fortbildungsmodulen bereit. Zu bestimmten Themen gibt es die Möglichkeit, eigenständig offene E-Learning-Module zu bearbeiten, an tutoriell begleiteten Kursen teilzunehmen sowie die Online-Begleitkurse zu Präsenzfortbildungen zu nutzen. Darüber hinaus können die Trainerinnen und Trainer in Themenforen oder offenen Chats miteinander in Kontakt treten und sich austauschen.

Sowohl für die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte als auch für die Trainerinnen und Trainer werden in der Bildungsinitiative jedes Jahr unterschiedliche Fortbildungsthemen angeboten. Neuen Trainerinnen und Trainern bzw. erstmals teilnehmenden Pädagoginnen und Pädagogen wird empfohlen, zunächst eine Fortbildung zu besuchen, in der der pädagogische Ansatz der Stiftung für das gemeinsame Forschen mit Kindern ausführlich thematisiert wird. Im Anschluss daran kann zwischen den verschiedenen Modulen zu den mathematischen, informatischen, naturwissenschaftlichen oder technischen Themen gewählt werden. Dies können sowohl Präsenzfortbildungen als auch Online-Angebote sein. Im Jahr

2016 wurde das Stiftungsangebot beispielsweise um die Workshops „Forschen zu Licht, Farben, Sehen – Optik entdecken“ und „Technik – Kräfte und Wirkungen“ erweitert. Zum Start des Schuljahres 2016/17 werden Fortbildungen zu den Themen „Zahlen, Zählen, Rechnen – Mathematik entdecken“ und „Forschen rund um den Körper“ angeboten. Im Schuljahr 2017/18 kommt das erste Thema im Bereich informatischer Bildung hinzu.

Wissenschaftliche Begleitung und Qualitätsentwicklung

Alle Aktivitäten der Bildungsinitiative werden kontinuierlich wissenschaftlich begleitet und evaluiert. Die Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ pflegt einen offenen Austausch mit Wissenschaft und Fachpraxis und versteht sich als lernende Organisation.

Ein umfangreiches Spektrum an Maßnahmen dient der Sicherung und Weiterentwicklung der Qualität im „Haus der kleinen Forscher“ (siehe Abbildung 1). Das stiftungseigene Qualitätsmanagement überprüft fortlaufend die verschiedenen Stiftungsangebote wie beispielsweise die Fortbildungen für Trainerinnen und Trainer sowie für pädagogische Fach- und Lehrkräfte. Ein wichtiger Bestandteil des regelmäßigen Monitorings ist die jährliche Frühjahrsbefragung, die im Februar 2016 bereits zum achten Mal stattfand und die Erwartungen und Bedürfnisse der verschiedenen Akteursgruppen der Bildungsinitiative erfasst: der Netzwerkpartner, der Trainerinnen und Trainer sowie der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte. Die zentralen Ergebnisse der Befragungen werden in den Monitoring-Berichten (vgl. Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2015b) veröffentlicht.

Im Rahmen der inhaltlichen (Weiter-)Entwicklung werden neue Stiftungsangebote auch stets in der Praxis getestet. In Zusammenarbeit mit einer Gruppe pädagogischer Fach- und Lehrkräfte aus Kitas sowie aus Horten und Grundschulen findet für jedes neue Modul eine ausführliche Pilotierung statt, bevor die Fortbildungskonzepte und Materialien in den regionalen Netzwerken verbreitet werden. Dabei prüfen die mitwirkenden pädagogischen Fach- und Lehrkräfte erste Praxisideen auf ihre Umsetzbarkeit und geben ein Feedback zu den Unterstützungsangeboten der Stiftung. Die Fortbildungskonzepte werden auf Basis dieser Rückmeldungen überarbeitet und weiterentwickelt.

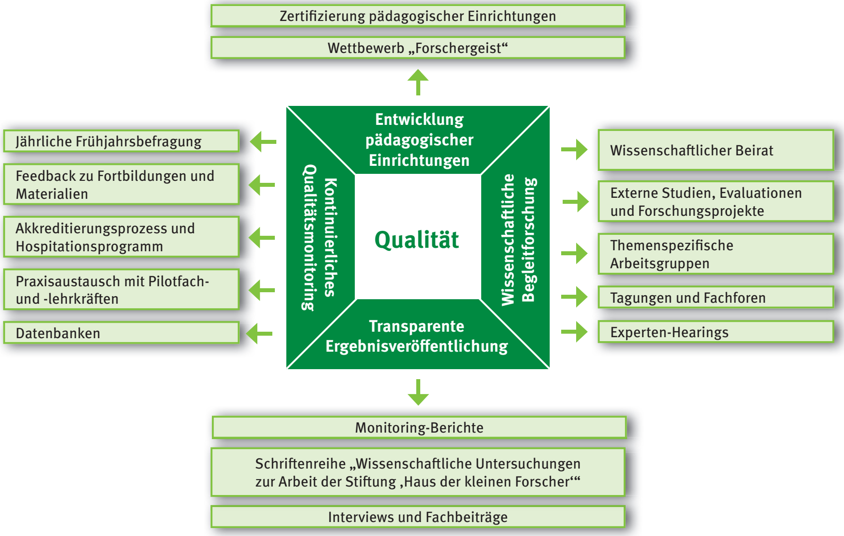


Abbildung 1. *Übersicht der Maßnahmen zu Sicherung und Weiterentwicklung der Qualität der Stiftungsangebote*

Auf Einrichtungsebene ist die Zertifizierung als „Haus der kleinen Forscher“ ein weiteres wichtiges Instrument der Qualitätsentwicklung (Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2013b). Über die Vergabe der Zertifizierung entscheidet die Stiftung in einem standardisierten Verfahren, das in Anlehnung an das Deutsche Kindergarten Gütesiegel und unter Beteiligung eines Teams aus Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern[2] entwickelt wurde. Die Reliabilität und Validität des Zertifizierungsverfahrens für Kitas wurde in einer externen wissenschaftlichen Studie bestätigt (Anders & Ballaschk, 2014).

Neben einem kontinuierlichen Monitoring zu Zwecken der Qualitätssicherung und der Qualitätsentwicklung wird die Stiftungsarbeit im Rahmen einer langfristig angelegten externen Begleitforschung mit renommierten Partnern fachlich fundiert und in Forschungsprojekten untersucht. Zwei auf drei Jahre angelegte interdisziplinäre Studien untersuchen derzeit die Wirkungen naturwissenschaftlicher Bildung auf Ebene der pädagogischen Fachkräfte und auf Ebene der Kinder.[3] Ziel des ersten Forschungsprojekts EASI Science (Early Steps Into Science, gefördert von der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ und dem Bundesministerium für Bildung und Forschung) ist es, Erkenntnisse über die Wirkungen naturwissenschaftlicher Bildung in der Kita zu gewinnen. Das zweite Forschungsprojekt EASI

---

2 *Prof. Dr. Yvonne Anders, Dr. Christa Preissing, Prof. Dr. Ursula Rabe-Kleberg, Prof. Dr. Jörg Ramseger, Prof. Dr. Wolfang Tietze.*

3 *Die Ergebnisse liegen der Stiftung voraussichtlich im Laufe des Jahres 2017 vor und werden u. a. in der wissenschaftlichen Schriftenreihe der Stiftung veröffentlicht.*

Science-L (Early Steps Into Science and Literacy, gefördert von der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“, der Baden-Württemberg Stiftung und der Siemens Stiftung) untersucht sprachliche Bildungswirkungen und die Interaktionsqualität im Kontext naturwissenschaftlicher Bildungsangebote. Die Ergebnisse der wissenschaftlichen Begleitung veröffentlicht die Stiftung transparent in der vorliegenden wissenschaftlichen Schriftenreihe, alle Publikationen sind zudem über ihre Website frei verfügbar[4].

Ein Wissenschaftlicher Beirat berät die Stiftung zu Forschungsfragen sowie zur fachlichen Fundierung des Stiftungsangebots. Er setzt sich aus unabhängigen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern unterschiedlicher Professionen zusammen und spricht Empfehlungen an den Vorstand und den Stiftungsrat aus. Die Mitglieder des Beirats sind hochkarätige Expertinnen und Experten relevanter Disziplinen:

- Vorsitz: Prof. Dr. Hans-Günther Roßbach, Universität Bamberg und Leibniz-Institut für Bildungsverläufe e. V. (LIfBi)
- Prof. Dr. Fabienne Becker-Stoll, Staatsinstitut für Frühpädagogik (IFP), München
- Prof. Dr. Marcus Hasselhorn, Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung (DIPF), Frankfurt
- Prof. Dr. Bernhard Kalicki, Deutsches Jugendinstitut e. V. (DJI), München, und Evangelische Hochschule Dresden
- Prof. Dr. Alexander Kauertz, Universität Koblenz-Landau
- Prof. Dr. Kornelia Möller, Universität Münster
- Prof. Dr. Jörg Ramseger, Freie Universität Berlin
- Prof. Dr. Dr. Ortwin Renn, Institute für Advanced Sustainability Studies (IASS), Potsdam, und acatech – Deutsche Akademie der Technikwissenschaften
- Prof. Dr. C. Katharina Spieß/Prof. Pia S. Schober, Ph.D, Deutsches Institut für Wirtschaftsforschung (DIW Berlin), Freie Universität Berlin und Universität Tübingen

---

4 *Alle Ergebnisse und Publikationen zur wissenschaftlichen Begleitung sind als PDF verfügbar unter: www.haus-der-kleinen-forscher.de, Rubrik „Wissenschaftliche Begleitung“. Alle Ergebnisse der externen Begleitforschung werden zudem in der vorliegenden wissenschaftlichen Schriftenreihe veröffentlicht. Eine Übersicht der bisher erschienenen Bände befindet sich auf www.haus-der-kleinen-forscher.de.*

- Prof. Dr. Wolfgang Tietze, PädQUIS gGmbH, An-Institut der Alice Salomon Hochschule, Berlin
- Prof. Dr. Christian Wiesmüller, Pädagogische Hochschule Karlsruhe, Deutsche Gesellschaft für Technische Bildung (DGTB)
- Prof. Dr. Bernd Wollring, Universität Kassel

2 Das „M“ in MINT – Relevanz der frühen mathematischen Bildung

„Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten.“
– Blaise Pascal (1623–1662)
Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung

In unserem Alltag lösen wir oftmals Probleme durch die Anwendung mathematischer Tätigkeiten. Meist ist uns das zunächst nicht bewusst wie z. B. beim Tischdecken (Zählen), beim Backen (Messen), bei der Berechnung von Rabatten beim Einkauf (Rechnen), beim Glücksspiel (Wahrscheinlichkeit) oder beim Koffer packen (Geometrie). Schon kleine Kinder stellen schnell fest, ob die Freundin mehr Bonbons hat als sie selbst, zählen beim Mensch-ärgere-Dich-nicht die Felder oder setzen mit Bausteinen neue Figuren zusammen. Das heißt, Mathematik durchdringt in vielen Bereichen den Alltag von Kindern und Erwachsenen und ist dort nicht wegzudenken. Sie gilt mit ihren Wurzeln noch vor der Antike als eine der ältesten Wissenschaften, und das Rechnen ist neben dem Lesen und Schreiben eine unserer grundlegenden Kulturtechniken. Mathematik beschreibt dabei die Welt in einer Sprache aus Zahlen und Formen und dient der Erklärung von Phänomenen des Alltags.

Die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten beginnt im frühen Kindesalter (für eine Übersicht: Pahnke & Pauen, 2012). Schon Säuglinge verfügen über mathematische Kompetenzen und können Mengen unterschiedlicher Anzahlen (2 vs. 3; 6 vs. 18) unterscheiden. Ab Ende des ersten Lebensjahres steigt die Sensitivität für Mehr-weniger-Relationen. Kleinkinder im Alter von 2 bis 3 Jahren sind in der Lage, kleine Mengen zu benennen und die Zahlwortreihe zu sprechen, was wiederum Vorläuferfähigkeiten für den Erwerb der Zählkompetenz sind, die Kinder mit etwa 4 Jahren erreichen. Im Vorschulalter (4 bis 6 Jahre) entwickeln Kinder dann ein erstes Verständnis für Rechenoperationen wie Addition und Subtraktion. Aber auch beim Sortieren von Bausteinen (z. B. nach Größe oder Farbe)

oder beim Fädeln von Perlenketten nach einem bestimmten Muster zeigen Kinder frühzeitig ihre mathematischen Fähigkeiten.

Ein Ziel der frühen mathematischen Bildung ist es, die Kinder bei der (Weiter-) Entwicklung dieser Fähigkeiten zu unterstützen, aber auch das Interesse am Fach Mathematik während der Schulzeit aufrechtzuerhalten. Mit dem Übergang in die Grundschule werden die bis dahin überwiegend spielerischen Alltagserfahrungen im Bereich Mathematik aufgegriffen und die mathematischen Kompetenzen systematisch weiterentwickelt. Die Kinder werden somit nicht nur für ihren weiteren schulischen Werdegang vorbereitet, sondern auch auf viele Anforderungen des Alltags.

Eine entscheidende Rolle in der frühen mathematischen Bildung spielen die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte. Laut einer aktuellen Studie (Bundesministerium für Bildung und Forschung, 2016) zeigt ein Großteil der angehenden Erzieherinnen und Erzieher Interesse und Spaß am Fach Mathematik. Allerdings existiert in der Ausbildung der pädagogischen Fachkräfte im Kitabereich bisher kein flächendeckendes Angebot in diesem Bereich. Außerdem ist Mathematik aufgrund negativer Erfahrungen während der eigenen Schullaufbahn häufig angstbesetzt, vor allem unter Frauen (Miller & Bichsel, 2004) und pädagogischen Fachkräften im Elementarbereich (Gresham, 2007). Oftmals liegt die Ablehnung von Mathematik darin begründet, dass ein klarer Alltagsbezug vermisst wird. Diese Einstellung kann weitreichende Folgen haben. Zum einen kann man annehmen, dass ein angstbesetztes Fach seltener im Umgang mit den Kindern thematisiert wird. Zum anderen besteht die Gefahr, dass die eigene Angst oder Ablehnung an die Kinder weitergegeben wird, da diese oftmals eine sehr enge Bindung zur pädagogischen Fach- oder Lehrkraft haben und deren Emotionen und Verhaltensweisen teilweise übernehmen (Bandura, 1979; Becker-Stoll, 2009). Daher ist es besonders wichtig, sowohl den Kindern als auch den pädagogischen Fach- und Lehrkräften positive Erfahrungen im Umgang mit mathematischen Themen zu ermöglichen. Nur so kann das Interesse am Fach (wieder) geweckt werden und auch langfristig bestehen bleiben.

Die Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ setzt an diesen Herausforderungen an und möchte über die Fort- und Weiterbildung pädagogischer Fach- und Lehrkräfte in Kitas, Horten und Grundschulen die frühe mathematische Bildung von Mädchen und Jungen stärken. Das Stiftungsangebot wurde erstmals 2010 um ein Fortbildungsmodul zum Thema „Mathematik“ ergänzt (vgl. Folgekapitel) und wird seither stetig ausgebaut. Um dem hohen Qualitätsanspruch der Stiftung gerecht zu werden, wurde die inhaltliche (Weiter-)Entwicklung auch im mathematischen Themenbereich fachlich fundiert und wissenschaftlich begleitet. Bereits seit 2009 steht die Stiftung daher im engen Austausch mit Fachexpertinnen und -experten der mathematischen Bildung, die die Themenentwicklung in Fachforen und Expertentreffen kritisch begleiten und beraten.

3 Fachliche Fundierung des Themenbereichs „Mathematik“

Die Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ versteht sich als lernende Organisation, die sich von namhaften Expertinnen und Experten unterschiedlicher Fachrichtungen beraten und evaluieren lässt und ihr pädagogisch-didaktisches Konzept entsprechend kontinuierlich weiterentwickelt. Auch bei der Entwicklung von Stiftungsangeboten im Bereich Mathematik hat sich die Stiftung umfassend von Fachexpertinnen und -experten begleiten lassen. Neben der wissenschaftlichen Fundierung werden die Angebote immer wieder in Pilotevaluationen erprobt und weiterentwickelt.

Die Erarbeitung des mathematischen Stiftungsangebots begann 2009/2010 als Pilotprojekt in Kooperation mit dem nifbe-Regionalnetzwerk Südwest (Niedersächsisches Institut für frühkindliche Bildung und Entwicklung). In Zusammenarbeit mit dem Mathematikum Gießen und unter fachlicher Beratung von Seiten der Universität Osnabrück (Prof. Dr. Inge Schwank) entstand so ein erstes Mathematik-Kartenset. Nach einer externen Evaluation des Fortbildungskonzeptes sowie der Materialien im Jahr 2010 durch die Universität Vechta (Grieshop & Winter, 2012) wurde der erste Themenworkshop „Mathematik entdecken“ für pädagogische Fachkräfte 2011/2012 bundesweit angeboten (vgl. auch Themenbroschüre, Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2011).

Um das Angebot im Bereich Mathematik wissenschaftlich fundiert weiterzuentwickeln, erarbeitete eine Expertengruppe aus Mathematikdidaktikerinnen und -didaktikern im Auftrag der Stiftung von 2013 bis 2014 eine Expertise zu den Zielen und Gelingensbedingungen früher mathematischer Bildung. Die in der Expertise formulierten Zieldimensionen spezifizieren, welche (entwicklungsgemäßen) Ziele bei Kindern im Kita- und Grundschulalter, aber auch bei pädagogischen Fach- und Lehrkräften im Rahmen der mathematischen Bildung angestrebt werden sollen. Zudem stellen sie operationalisierbare Zielkriterien für die Messung von mathematischen Bildungswirkungen bei Kindern und pädagogischen Fach- und Lehrkräften dar.

Im Frühjahr 2013 organisierte die Stiftung in Kooperation mit der TU Dortmund ein Fachforum zur „Mathematischen Bildung im Elementar- und Primarbereich“, um mit Fachleuten aus der Mathematikdidaktik, Früh- und Grundschulpädagogik und Entwicklungspsychologie den aktuellen Forschungsstand zur frühen mathematischen Bildung und die Umsetzung von mathematischen Bildungsangeboten im Alltag von Kita, Hort und Grundschule zu diskutieren. Die Expertengruppe stellte auf dem Fachforum die Zieldimensionen im Bereich mathematischer Bildung im Elementar- und Primarbereich vor, die vom geladenen Fachkreis befürwortet wurden. Zudem diskutierte die Fachcommunity die daraus resultierenden Konsequenzen für eine adäquate Fortbildung pädagogischer Fach- und Lehrkräfte. Die Ergebnisse gingen und gehen fortlaufend in die Weiterentwicklung der Mathematik-Angebote der Stiftung ein.

Auch der Forschungslenkungskreis der Stiftung bewertete im März 2014 die entwickelten Ziele als positiv und gab weitere Empfehlungen zur Umsetzung im Themenbereich. Der in 2015 neu konstituierte Wissenschaftliche Beirat der Stiftung begleitet auch künftig die Weiterentwicklung der mathematischen Stiftungsangebote. Im Austausch mit Fachexpertinnen und -experten werden die Inhalte, Praxisbeispiele und Formate kontinuierlich überprüft. Zudem ist die Stiftung regelmäßig auf führenden Fachtagungen im Bereich Mathematik vertreten, um die Stiftungsangebote vorzustellen und zu diskutieren. Somit reflektiert die Stiftung ihre eigene Arbeit immer in Bezug auf den aktuellen Stand der Forschung.

Neben dieser wissenschaftlichen Fundierung arbeitet die Stiftung stark praxisorientiert. Die Stiftungsmitarbeiterinnen und -mitarbeiter stehen dazu im ständigen Praxis- und Erfahrungsaustausch mit Piloteinrichtungen, um Anregungen aus der Alltagswelt der Kinder zu sammeln und die Materialien direkt mit Kindern und pädagogischen Fach- und Lehrkräften zu erproben. Über die Durchführung von Pilotfortbildungen und anschließende Evaluationen entwickelt und testet die Stiftung alle Angebote mit Partnern aus der Praxis.

Im vorliegenden Band werden die zentralen Ergebnisse zur fachlichen Fundierung der frühen mathematischen Bildung veröffentlicht. Die Expertise stellt Ziele und Konzepte für eine gelingende mathematische Bildung im Elementar- und Primarbereich in den Fokus und bildet das Fundament für die inhaltliche Entwicklung des Stiftungsangebots zum Themenbereich Mathematik.

Zusammenfassung zentraler Ergebnisse

Stiftung Haus der kleinen Forscher

Zusammenfassung zentraler Ergebnisse

Der achte Band der Schriftenreihe „Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung ‚Haus der kleinen Forscher'" stellt die mathematische Bildung im Elementar- und Primarbereich in den Fokus. Kernstück des Bandes ist eine Expertise, die im Rahmen der fachlichen Fundierung des Themenbereichs Mathematik von Fachexpertinnen und -experten für die Stiftung erstellt wurde. Die Expertise bildet die theoretische Grundlage für die (Weiter-)Entwicklung der inhaltlichen Angebote der Stiftung im Bereich Mathematik. Die Stiftung stärkt damit das „M" in MINT parallel zu den bisherigen Stiftungsangeboten, die eher auf naturwissenschaftlicher und technischer Bildung fokussierten.

In ihrem Beitrag „Zieldimensionen mathematischer Bildung im Elementar- und Primarbereich" spezifizieren Christiane Benz, Meike Grüßing, Jens Holger Lorenz, Christoph Selter und Bernd Wollring pädagogisch-inhaltliche Zieldimensionen für die frühe mathematische Bildung. Die fachspezifischen Zieldimensionen leiten sich aus dem aktuellen theoretischen und empirischen, nationalen und internationalen Forschungsstand ab. Die Autorinnen und Autoren priorisieren Zielbereiche für Kinder und für pädagogische Fach- und Lehrkräfte im Elementar- und Primarbereich und erörtern existierende Messinstrumente bzw. die Notwendigkeit der Instrumentenentwicklung für die Erfassung der definierten Zielbereiche.

Auf Ebene der Kinder empfehlen die Autorinnen und Autoren folgende Zielbereiche:

- Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit im Umgang mit Mathematik
- Prozessbezogene mathematische Kompetenzen
- Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen

Auf Ebene der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte werden folgende Zieldimensionen empfohlen:

- Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit in Bezug auf die Gestaltung mathematischer Bildung
- Einstellungen und Überzeugungen in Bezug auf die Gestaltung mathematischer Bildung
- Prozessbezogene mathematische Kompetenzen

- Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen
- Mathematik-didaktische Kompetenzen

Des Weiteren erörtern die Autorinnen und Autoren Gelingensbedingungen für eine effektive und wirkungsvolle frühe mathematische Bildung in der Praxis. Dazu muss eine Reihe an Voraussetzungen für das Lernen der Kinder als auch für die Fortbildung der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte erfüllt sein. Eine gelingende Auseinandersetzung mit mathematischen Themen im Alltag setzt folgende Kompetenzen bei den pädagogischen Fach- und Lehrkräften voraus: Neben einer positiven Einstellung zum Fach Mathematik gehört die Planung und Gestaltung effektiver Lernumgebungen dazu, das Erkennen von individuellen Entwicklungsständen sowie die darauf angepasste Auswahl von mathematischen Angeboten für die Kinder. Im Hinblick auf die Fortbildungen muss der Berufsbezug für die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte klar erkennbar werden. Außerdem betonen die Autorinnen und Autoren die Bedeutung einer kontinuierlichen Professionalisierung im Bereich Mathematik und den Fachaustausch mit Kolleginnen und Kollegen (auch einrichtungsübergreifend) bzw. die Kooperation zwischen Bildungseinrichtung und Familie als wichtige Gelingensbedingungen.

Abschließend gibt die Expertengruppe Empfehlungen für die Weiterentwicklung der Stiftungsangebote und die wissenschaftliche Begleitung der Stiftungsarbeit im Bereich Mathematik. Die Expertinnen und Experten empfehlen den Ausbau der inhaltlichen Angebote im Bildungsbereich Mathematik, indem u. a. das Themenangebot erweitert sowie bestehende Materialien überprüft und überarbeitet werden. Zudem sollte die Stiftung Synergien zwischen der Mathematik und den Disziplinen Naturwissenschaften und Technik suchen. Auch wird empfohlen, die Anschlussfähigkeit der Mathematik-Angebote im Übergang vom Elementar- zum Primarbereich zu stärken. Dabei sei es notwendig, die Ausgangslage und den Bedarf im Bereich des schulischen Ganztags zu klären und die Materialien entsprechend zu entwickeln bzw. anzupassen. Unterstützend dazu sollten Kooperationen insbesondere mit Institutionen und Projekten, die mit der Fortbildung der Mathematiklehrerinnen und -lehrer befasst sind, angestrebt werden. Im Hinblick auf die wissenschaftliche Begleitung der Stiftungsarbeit empfehlen die Autorinnen und Autoren ein kontinuierliches Monitoring der Konzepte, Materialien und Maßnahmen im Fachbereich Mathematik, um die Ergebnisse in die stetige Weiterentwicklung mit einfließen zu lassen. Zudem wäre eine Begleitforschung in Form von Wirkungsstudien bezogen auf die Trainerinnen und Trainer, die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte sowie zu einem späteren Zeitpunkt auch auf die Ebene der Kinder wünschenswert.

Das Fazit dieses Bandes beschreibt die Umsetzung der Fachempfehlungen in die inhaltlichen Angebote der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ und gibt einen Ausblick auf die weitere Stiftungsarbeit. Auf Grundlage der vorliegenden Fachempfehlungen hat die Stiftung ihre Angebote im Bereich der frühen mathematischen Bildung erweitert und die Mathematik-Materialien überprüft und angepasst.

Zieldimensionen mathematischer Bildung im Elementar- und Primarbereich

Christiane Benz, Meike Grüßing, Jens Holger Lorenz,
Christoph Selter und Bernd Wollring

Einführung

Christoph Selter, Christiane Benz, Meike Grüßing, Jens Holger Lorenz und Bernd Wollring

Die Relevanz guter MINT-Bildung (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften, Technik) für die Denk- und Persönlichkeitsentwicklung der Lernenden, für deren aktive Beteiligung an der gesellschaftlichen Weiterentwicklung und für die Zukunft des Industriestandorts Deutschland ist in Wissenschaft, Öffentlichkeit, Bildung und Wirtschaft unstrittig. Bekannt ist zudem die zentrale Bedeutung der frühen Bildung als wesentlicher Bestandteil der Förderung Lernender entlang der Bildungskette vom vorschulischen Bereich bis zum Weiterlernen im Beruf.

Die gemeinnützige Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ engagiert sich daher mit einer bundesweiten Initiative für die Bildung von Kindern im Kita- und Grundschulalter in den Bereichen Mathematik, Naturwissenschaften und Technik. Mit ihren Fortbildungsangeboten und Materialien unterstützt sie pädagogische Fach- und Lehrkräfte dabei, gemeinsam mit den Mädchen und Jungen die Welt und die Phänomene des Alltags zu entdecken und zu erforschen.

Seit Anfang 2011 entwickelt die Stiftung ihr Angebot außerdem für Kinder im Grundschulalter weiter und unterzieht zudem ihr Engagement im Bereich der frühen mathematischen Bildung einer kritischen Reflexion. In diesem Kontext wurde von der Stiftung eine Expertenkommission berufen, die den Auftrag erhielt, mit der vorliegenden Expertise folgende Punkte zu bearbeiten:

- Zusammenstellung von Zieldimensionen mathematischer Bildung (im Sinne von Zielbereichen und entwicklungsgemäßen Zielen) für Kinder im Kita- und Grundschulalter und deren Fach- und Lehrkräfte sowie Priorisierung unter theoretischen und empirischen Gesichtspunkten
- Klärung der Operationalisierung der empfohlenen Dimensionen und der Verfügbarkeit von Messinstrumenten sowie Bedarfsbeschreibung für die (Weiter-) Entwicklung von Erhebungsinstrumenten
- Beschreibung von Gelingensbedingungen für die Entwicklung von Kindern und pädagogischen Fach- und Lehrkräften entlang der Zieldimensionen
- Entwicklung von Vorschlägen und Empfehlungen für die (Weiter-)Entwicklung inhaltlicher Stiftungsangebote und für die künftige wissenschaftliche Begleitung der Stiftungsarbeit im Bereich Mathematik

Als Zielgruppe der frühen mathematischen Bildung werden dabei Kinder im Alter von 3 bis 10 Jahren verstanden.

Die vorliegende Expertise ist wie folgt aufgebaut: Im Anschluss an die Darstellung theoretischer Vorannahmen (Kapitel 1) unterbreitet das Papier in Kapitel 2 einen Vorschlag zu Zielen mathematischer Bildung für Kinder im Kita- und Grundschulalter, der existierende Konzepte sowie Instrumente zur Messung dieser Zieldimensionen bündelt.

In Kapitel 3 werden sodann Zieldimensionen der Qualifizierung auf Ebene der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte in Kita, Hort und Grundschule beschrieben. Auf Ebene der Pädagoginnen und Pädagogen im Grundschulbereich steht dabei zunächst die nachmittägliche und außerunterrichtliche ‚Betreuung' im sog. Ganztag im Fokus, die in den Ländern bzw. Kommunen ganz unterschiedlich organisiert ist. Hierbei ist zu beachten, dass die Zielgruppe der im schulischen Ganztag arbeitenden Personen äußerst heterogen ist. Sie reicht von pädagogisch und fachdidaktisch qualifizierten Personen bis hin zu engagierten Eltern ohne eine den pädagogisch-didaktischen Aufgaben angemessene Ausbildung. Die in diesem Papier beschriebenen Zieldimensionen richten sich an die Zielgruppe der Personen mit pädagogisch-fachdidaktischem Hintergrund, die angesichts der verantwortungsvollen Aufgabe als primäre Zielgruppe für eine entsprechende Qualifizierung gelten können.

Die Zieldimensionen für Pädagoginnen und Pädagogen sind zudem auf die Zielgruppe der Lehrkräfte ausgerichtet, denn das Angebot von Weiterbildungsinitiativen wie dem „Haus der kleinen Forscher" bezieht sich in sinnvoller Weise auch auf das unterrichtliche Lernen der Schülerinnen und Schüler und hat dadurch Rückwirkungen auf den Unterricht und die Lehrpersonen. Insofern sind in den weiteren Ausführungen Inhalte, Zieldimensionen und Rahmenbedingungen des Mathematikunterrichts stets mitzudenken.

Kapitel 4 umreißt Gelingensbedingungen für die Erreichung der Zieldimensionen einerseits für die Lernentwicklung der Kinder im Alter von 3 bis 10 Jahren und andererseits für die (Weiter-)Entwicklung der professionellen Kompetenz der pädagogischen Fachkräfte sowie der Lehrerinnen und Lehrer.

Die Empfehlungen schließen mit Kapitel 5, in dem eine Priorisierung der Zieldimensionen vorgenommen und Empfehlungen für die weitere Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher" im Bereich Mathematik gegeben werden.

Die folgenden Ausführungen sind auf der Grundlage eines interdisziplinären Zugangs entstanden, der Perspektiven und Erkenntnisse aus der Mathematikdidaktik, der (Entwicklungs-)Psychologie, der Pädagogik des Elementar- und des Primarbereiches, der empirischen Bildungsforschung, der Lehr-/Lernforschung und der Professionalisierungsforschung berücksichtigt und integriert. Die Zieldimensionen mathematischer Bildung nehmen Bezug auf analoge Expertisen zu

Zieldimensionen naturwissenschaftlicher Bildung (Anders, Hardy, Pauen & Steffensky, 2013; Anders, Hardy, Sodian & Steffensky, 2013) und technischer Bildung (Kosack, Jeretin-Kopf & Wiesmüller, 2015), die ebenfalls im Auftrag der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ entstanden sind.

Insgesamt sei vorweg geschickt, dass die Expertenkommission die folgenden Ausführungen als wertschätzende Überlegungen versteht, die vor dem Hintergrund der beeindruckenden Vielfalt, Wirksamkeit, Innovativität und Qualität der unterschiedlichen Handlungsfelder der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ angestellt werden.

Die Autorinnen und Autoren danken der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ für die Initiierung, Begleitung und Unterstützung des Entstehensprozesses dieser Schrift, insbesondere Janna Pahnke, Maria Ploog, Elena Harwardt-Heinecke und Christine Günther.

1 Theoretischer Rahmen

1.1 Mathematik als Wissenschaft von den Mustern

Ausführungen über die Zieldimensionen früher mathematischer Bildung bedürfen zunächst einiger Bemerkungen zum Verständnis von Mathematik, das dieser Expertise zugrunde liegt. Nach dem Scheitern der sog. modernen Mathematik (Stichwort ‚Mengenlehre') in den 1970er-Jahren des vorangehenden Jahrhunderts ist es in Mathematik, Erkenntnistheorie, Philosophie und Wissenschaftsgeschichte zu einer Neuorientierung gekommen, die Mathematik heutzutage – kurz gefasst – als *Wissenschaft von den Mustern* beschreibt (vgl. Sawyer, 1982; Wittmann & Müller, 2012).

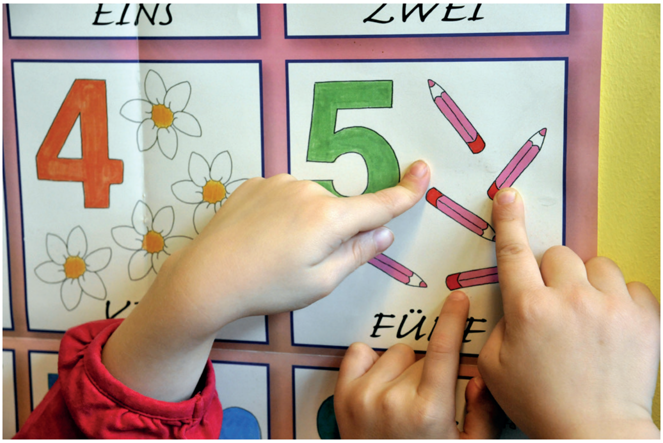
Mit Mustern sind dabei keineswegs nur sichtbare Muster wie Zahlenfolgen oder Parkettierungen gemeint. Weit darüber hinausgehend steht der Begriff „Muster" stellvertretend für Begriffe wie Ordnungen, Strukturen, Beziehungen, Zusammenhänge, Auffälligkeiten, Abhängigkeiten oder Regelmäßigkeiten.

Mathematische Muster dürfen dabei nicht als etwas fest Gegebenes angesehen werden, das man nur betrachten und reproduzieren kann. Es ist stattdessen konstitutiv, dass „man sie erforschen, fortsetzen, ausgestalten und selbst erzeugen kann" (Wittmann, 2003, S. 26). Mathematik ist eine Tätigkeit – etwas, das man tut (Freudenthal, 1982).

Durch eine solche Beschäftigung mit Mathematik lernen Kinder wie Erwachsene, die Welt für sich aktiv zu ordnen. Denn die Einsicht in Muster, also die Erkenntnis von Zusammenhängen, die über die konkrete Situation hinausweisen, erlaubt es, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen ähnlichen Phänomenen zu sehen und zu nutzen. In diesem Sinne kann die Mathematik wie eine Brille oder ein Röntgengerät wirken und schwer Durchschaubares leichter erkennbar oder Unsichtbares sichtbar machen (vgl. Devlin, 2000, S. 97). Wie Wittmann und Müller (2012, S. 66) ausführen, stellt das Denken in Mustern eine entscheidende Steigerung in der menschlichen Denkökonomie dar, da viele Einzelfälle auf einmal erfasst werden können.

In der Mathematik führt die Abstraktion vom Einzelfall dazu, dass ganz unterschiedliche Dinge unter einen ‚mathematischen Hut' gebracht werden können: Die Zahl 5 kann durch 5 Bonbons, Plättchen, Personen, Bälle, Striche oder Spielzeugautos repräsentiert werden. In allen diesen Situationen ist die 5 um 1 mehr als 4 und jeweils die Hälfte von 10; sie kann stets in 3 und 2 untergliedert werden etc.

Die Objekte der Mathematik sind also theoretischer Natur (Steinbring, 1999). Die abstrakte Zahl 5 selbst kommt in der Realität nicht vor, wohl aber deren



Repräsentation in realen Objekten. Aber es gibt auch Repräsentationen der 5, die nicht im Alltag vorkommen, etwa die 5 am Zahlenstrahl oder fünf Rechenplättchen.

Beide Formen der Repräsentation (Alltagsrepräsentation und mathematische Repräsentation) weisen spezifische Charakteristika auf und bieten damit unterschiedliche Lernpotenziale. Diese gilt es, in einem ausgewogenen Verhältnis für erfolgreiche Lernprozesse zu nutzen. Mathematische Bildung, die sich allein auf die Mathematik des Alltags beschränke, würde im Kontext einer wünschenswerten Allgemeinbildung wichtige Lernmöglichkeiten vergeben.

In diesem Kontext formuliert Winter (1995, S. 37) drei, vielfältig miteinander verknüpfte Grunderfahrungen, auf die mathematische Bildung ausgerichtet sein solle:

- „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
- in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben.“

Diese prägnante Zusammenfassung von Leitideen (Anwendungsorientierung, Strukturorientierung, Entwicklung heuristischer Fähigkeiten) bildet die Grundlage für viele aktuelle Publikationen zur mathematischen Bildung und bietet auch den Bezugsrahmen für das vorliegende Papier, auf dessen Grundlage nun der verwendete Kompetenzbegriff kurz umrissen werden soll.

1.2 Kompetenzen als mehrdimensionale Fähigkeitskomplexe

Der Begriff der Kompetenz wird in unterschiedlichen Zusammenhängen durchaus unterschiedlich verstanden, was in verschiedenen, nicht selten inkompatiblen Wurzeln dieses Begriffs in unterschiedlichen Disziplinen begründet ist (vgl. Klieme & Hartig, 2007).

Für die deutschsprachigen Erziehungswissenschaften verdeutlichen Jude und Klieme (2008, S. 11) aber auch, dass es spätestens seit Roth (1971) eine gewisse Tradition gibt, einen breiten Kompetenzbegriff zu verwenden, der sich nicht auf kognitive Komponenten beschränkt, sondern auch affektive und motivationale Komponenten einschließt. Dieser ist am Ideal einer umfassenden Handlungsfähigkeit und Mündigkeit orientiert und in Sach-, Selbst- und Sozialkompetenzen untergliedert.

In diesem Sinne formuliert Weinert (2001, S. 27f.) Kompetenzen bekanntlich als „die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen (d. h. absichts- und willensbezogenen, die Verf.) und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können".

Die Autorinnen und Autoren der vorliegenden Expertise schließen sich diesem Referenzzitat an und verstehen Kompetenzen als mehrdimensionale Fähigkeitskomplexe, die sich in verschiedene Facetten differenzieren lassen (vgl. auch Anders, Hardy, Pauen & Steffensky, 2013; Anders, Hardy, Sodian & Steffensky, 2013).

„Zieldimensionen" werden hier als ein Überblicksbegriff verstanden, der in unterschiedlichem Konkretisierungsgrad Kompetenz*bereiche* (z. B. inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen), Kompetenz*facetten* (z. B. Zahlen und Operationen) und spezifische Kompetenz*erwartungen* (z. B. den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen) umfasst. Aus Gründen der Einheitlichkeit mit den weiteren vorliegenden Expertisen (s. o.) wird auch hier der Begriff Zieldimensionen verwendet. Alternativ könnte man auch von Kompetenzdimensionen sprechen.

Die empfohlenen Zielkompetenzen auf Kind- und Erwachsenenebene werden zunächst jeweils im Überblick (Abschnitte 1.3 und 1.4) dargestellt und in den folgenden Kapiteln im Detail beschrieben. Eine grafische Illustration befindet sich in den Anhängen I und II.

1.3 Zum frühen Erwerb mathematischer Kompetenzen bei Kindern

Ein wesentlicher Bedingungsfaktor für gelingende individuelle Kompetenzentwicklung ist die Kohärenz der Lernangebote. Hierzu sind in Inhalten und Zieldimensionen abgestimmte Bildungspläne erforderlich, an denen sich pädagogische Fach- und Lehrkräfte über ihren jeweils berufsspezifischen Bereich hinweg orientieren können (vgl. Grüßing, 2009). Folgt man den Analysen von Peter-Koop (2009) und Royar (2007), so ist ein einheitliches Bildungskonzept für die mathematische Bildung im vorschulischen Bereich, das in ein umfassendes Gesamtkonzept mathematischer Bildung entlang der Bildungskette eingebettet ist, lange nicht zu erkennen gewesen (vgl. hierzu auch die Synopse mathematischer Bildungspläne der Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2013a). Hier gehen die länderübergreifenden Systematisierungsvorschläge von Steinweg (2008) oder Fthenakis, Schmitt, Daut, Eitel und Wendell (2008) in die richtige Richtung, welche das Ziel verfolgen, ein kohärentes Verständnis mathematischer Bildung über die einzelnen Phasen im Bildungsprozess hinweg zu entwickeln.

Mathematische Kompetenz wird in der nationalen wie der internationalen Diskussion lernphasenübergreifend in Anlehnung an das Konzept der *Mathematical Literacy* beschrieben (Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2003). In diesem Sinne umfasst das Konstrukt dabei verstandene und nutzbare mathematische Wissenskomponenten, Fertigkeiten und Fähigkeiten.

In Anlehnung daran unterscheiden die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK, 2004, 2005) und in Folge davon die Bildungspläne für schulisches Lernen inhaltsbezogene und allgemeine mathematische Kompetenzen, welche im Weiteren in Anlehnung an den gebräuchlicheren Begriff „prozessbezogene Kompetenzen“ genannt werden. Außerdem beinhaltet das Konzept der Mathematical Literacy nicht-kognitive Komponenten wie Motivation oder Überzeugungen.

Die nicht-kognitiven Zielkomponenten mathematischer Bildung werden in den Abschnitten *Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit* im Umgang mit Mathematik (Abschnitt 2.1) sowie Überzeugungen und Haltungen (Abschnitt 2.1.3) thematisiert.

Die Abschnitte 2.2 und 2.3 sind der Darstellung der *inhalts- und der prozessbezogenen Kompetenzen* gewidmet. Auch wenn die Thematisierung prozessbezogener Kompetenzen in der Literatur zur vorschulischen mathematischen Bildung noch wenig Beachtung gefunden hat, so erscheint es der Expertenkommission im Sinne von Kontinuität im Bildungsprozess geboten, hier insgesamt zu einer stärkeren Harmonisierung zu kommen.

Neben den genannten mathematikbezogenen Kompetenzen werden in der Expertise mit kognitiven, schriftsprachlichen und sozialen Kompetenzen auch sog. übergreifende *Basiskompetenzen* beschrieben, von denen man annimmt, dass sie die Entwicklung mathematischer Kompetenzen beeinflussen bzw. moderieren können (Abschnitt 2.4). Diese übergreifenden Basiskompetenzen werden durch das Angebot der Initiative „Haus der kleinen Forscher“ bestenfalls indirekt angesprochen und sind nicht als prioritäre Zieldimensionen mathematischer Bildung zu verstehen. Sie sollten aber bei späteren Erhebungen der Begleitforschung als Moderator-/Kontrollvariablen begleitend erhoben werden und werden deshalb hier thematisiert. Ihre Sonderstellung wird in der Abbildung in Anhang I durch eine unterschiedliche Färbung kenntlich gemacht.

1.4 Zum Erwerb professioneller Kompetenzen der Fach- und Lehrkräfte

Die professionelle Kompetenz der Fach- und Lehrkräfte hat entscheidenden Einfluss auf die Gestaltung und die Qualität von Lernangeboten. In gewisser Weise kann das Modell professioneller Kompetenz von Baumert und Kunter (2011; vgl. Abbildung 2) als integrative Konzeptionalisierung angesehen werden, die verschiedene Perspektiven integriert, etwa die von Ball, Thames und Phelps (2008), Bromme (1992, 1997), Shulman (1986, 1987), und auch mit der TEDS-M-Studie (Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2010; Döhrmann, Kaiser & Blömeke, 2012; Tatto et al., 2012) kompatibel ist.

In der diesem Modell zugrunde liegenden COACTIV-Studie wurden im Wesentlichen vier Aspekte der professionellen Kompetenz von Lehrpersonen untersucht (Baumert & Kunter 2011, S. 32):

- *Professionswissen:* Wissensbereiche, die direkte Relevanz für den Unterricht haben: Fachwissen (content knowledge), fachdidaktisches Wissen (pedagogical content knowledge) und pädagogisch-psychologisches Wissen (pedagogical knowledge). Außerdem sind Organisationswissen und Beratungswissen für die erfolgreiche Berufsausübung relevant.
- *Überzeugungen/Werthaltungen:* Vorstellungen oder Annahmen, die sich auf das Fach, das Unterrichten, aber auch auf die Rolle als Lehrkraft beziehen.
- *Motivation:* Grunddispositionen, die bestimmen, ob und mit welcher Ausdauer sich Lehrkräfte ihren beruflichen Tätigkeiten zuwenden.

- *Selbstregulation:* Fähigkeit zur „adaptiven Selbstregulation“, also zur Passung mit den eigenen Ressourcen und den Anforderungen der Berufsumwelt.

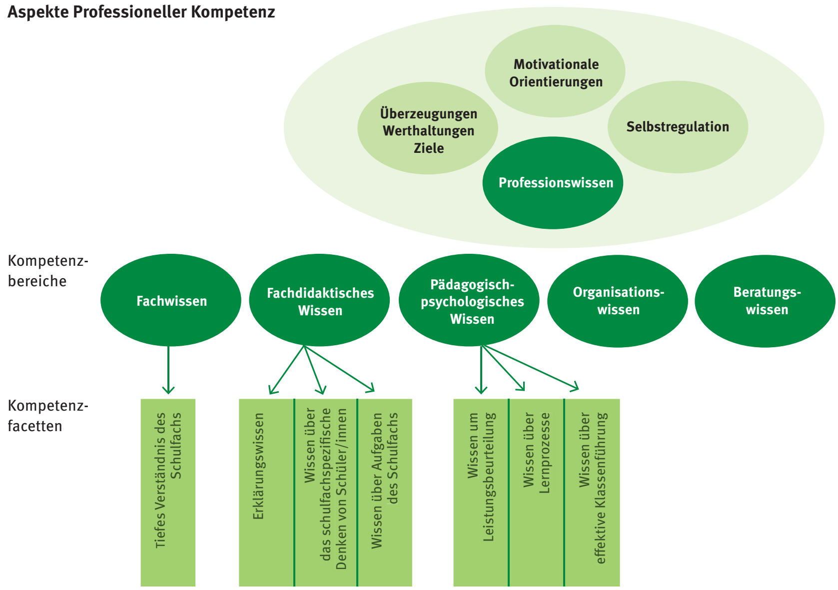


Abbildung 2. *Aspekte professioneller Kompetenz nach Baumert und Kunter (2011, S. 32)*

Auch wenn dieses Modell für die professionellen Kompetenzen von Lehrkräften entwickelt worden ist, erscheint es aus Sicht der Autorinnen und Autoren dieser Expertise auch für pädagogische Fachkräfte geeignet zu sein, unterscheidet sich deren Grundaufgabe nicht wesentlich von der von Lehrpersonen: Kinder auf der Grundlage ihres augenblicklichen Lernstands und ihrer individuellen Lernmöglichkeiten zum fachlich tragfähigen Weiterlernen anzuregen.

In der vorliegenden Expertise werden diejenigen Aspekte bzw. Bereiche der professionellen Kompetenz herausgegriffen, die fachspezifisch sind und als Fokus für die Initiative „Haus der kleinen Forscher“ empfohlen werden. Dabei werden die behandelten mathematikbezogenen Kompetenzbereiche für pädagogische Fach- und Lehrkräfte als gleichrangig verstanden, also nicht hierarchisiert, was auch durch gleichrangige Kapitelüberschriften und gleiche Farbgebung der Bereiche in der Grafik in Anhang II abgebildet ist.

Relevante motivationale Orientierungen der professionellen Kompetenz wie *Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit* in Bezug auf die Gestaltung mathematischer Bildung werden in Abschnitt 3.1 dargestellt.

Überzeugungen, Haltungen und Aspekte des allgemeinen professionellen Rollen- und Selbstverständnisses werden in Abschnitt 3.2 mathematikbezogen konzeptionalisiert.

Zwei zentrale Zieldimensionen werden unter dem vierten Aspekt der professionellen Kompetenz, dem *Professionswissen,* zusammengefasst. Hierbei erfolgt eine mathematikbezogene Fokussierung auf das relevante Fachwissen und das fachdidaktische Wissen.

In Anlehnung an die Konzeptualisierung auf Ebene der Kinder (vgl. Abschnitt 1.3) und in Weiterentwicklung der Empfehlungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV), der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU) (2008) und in Bezug auf die KMK-Standards (KMK, 2008) wird im Bereich des Fachwissens pädagogischer Fach- und Lehrkräfte zwischen *inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen* unterschieden. Die Feingliederung in den Abschnitten 3.3 und 3.4 orientiert sich dabei an den entsprechenden Ausführungen zum Erwerb kindlicher mathematischer Kompetenzen.

In Abschnitt 3.5 geht es schließlich um das *mathematikdidaktische Wissen,* in dem aufgrund der Bedeutung des mathematikbezogenen diagnostischen Wissens für das Gelingen von Lernprozessen (Baumert & Kunter, 2006; Helmke, 2010) dieses besondere Bedeutung erhält.

Aufgrund des bereichsübergreifenden Charakters geht die vorliegende Expertise nicht auf das allgemeine pädagogisch-psychologische Wissen, das Organisationswissen und das Beratungswissen ein. Auch der Aspekt der Selbstregulation erscheint nicht hinreichend fachbezogen, so dass er im Rahmen dieser Expertise nicht behandelt wird.

In Anlehnung an Anders, Hardy, Sodian und Steffensky (2013) sei abschließend hervorgehoben, dass das in diesem Kapitel verwendete Modell der Professionskompetenz von Lehrpersonen aus dem Kontext der Unterrichtsforschung stammt. Auch wenn die Begrifflichkeiten und Strukturierung beispielsweise von dem in der Kita-Expertise (Anders, Hardy, Pauen & Steffensky, 2013) verwendeten Modell zur Handlungskompetenz frühpädagogischer Fachkräfte (Fröhlich-Gildhoff, Nentwig-Gesemann & Pietsch, 2011) abweichen, sind die grundlegenden Komponenten Bestandteile beider Modelle.

2 Zieldimensionen auf Ebene der Kinder

2.1 Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit in Bezug auf Mathematik

Jens Holger Lorenz und Bernd Wollring

Die Konzepte „Motivation“ und „Interesse“ sind begrifflich nah verwandt. Das Konstrukt „Interesse“ wird häufig unter dem Oberbegriff „Motivation“ abgehandelt (Schiefele, 2009; Anders, Hardy, Pauen & Steffensky, 2013; Anders, Hardy, Sodian & Steffensky, 2013).

Interesse bezieht sich auf ein umgrenzbares Inhaltsgebiet (etwa auf Fußball, Schmetterlinge, klassische Musik oder Überraschungseier), wohingegen *Motivation* auf eine auszuführende Handlung abzielt.

Man spezifiziert *individuelles Interesse* als dauerhaftes, dispositionelles Merkmal des Individuums. Für das Schulalter lassen sich durchaus Interessen für einzelne Schulfächer (und damit Inhaltsbereiche wie die Mathematik, Sachunterricht/Naturwissenschaften oder Technik/IT o. ä.) ausmachen. Für das Vorschulalter halten die Autoren solche spezifischen Interessen für eher unwahrscheinlich, sieht man von außergewöhnlichen Fähigkeiten und damit einhergehendem Interesse (etwa für Sport oder Geigenspielen) ab.

Die Motivation allerdings, die in der Literatur häufig mit „situationalem Interesse“ gleichgesetzt wird (Seel, 2003) (z. B. eine bestimmte Handlung auszuführen), ist gängige Triebkraft auch im Vorschulalter. Motivation wird aber nicht durch ein persönlichkeitsimmanentes Interesse ausgelöst, sondern ergibt sich im Vorschulalter aus dem Spielgeschehen, aus dem Anreiz des Spieles selbst (und wird daher unten behandelt) sowie aus der emotionalen Nähe zu den Spielkameraden. Erst im Laufe der Spielerfahrung dürfte sich eine positive Motivation bzw. eine Ablehnung für einzelne Spiele bzw. Spielarten und -formen ausbilden, was durch die positiven bzw. negativen Erlebnisse in Vergleichssituationen bedingt ist. „Das individuelle Interesse einer Person an einem Gegenstand setzt sich aus gefühls- und wertbezogenen Valenzüberzeugungen zusammen. Von gefühlsbezogenen Valenzüberzeugungen spricht man, wenn ein Sachverhalt für eine Person mit positiven Gefühlen verbunden ist. Von wertbezogenen Valenzüberzeugungen ist die Rede, wenn einem Sachverhalt Attribute im Sinne persönlicher Bedeutsamkeit bzw. Wichtigkeit zugeschrieben werden“ (Schiefele , 2009, S. 164). Wertbezogene Valenzüberzeugungen in Bezug auf Mathematik sind nach Ansicht der Autoren im Vorschulalter nicht zu erwarten, können sich aber im Grundschulalter ausbilden, wenn Fächer als wichtig erachtet werden.

2.1.1 Motivation und Interesse an Mathematik

Es ist für die Ausbildung und das Erleben von Interesse und Motivation entscheidend, wie das Kind institutionalisierter Bildung begegnet, d. h. den Umgang mit mathematischen Inhalten erlebt. Hierbei sind insbesondere die affektiven Erlebnisse maßgebend. Bei der Ausbildung positiver wie negativer Emotionen, etwa im Zusammenhang mit mathematischen Spielen (die durchaus leistungsfordernd sein können), kommt den erwachsenen Begleitpersonen eine relevante Rolle zu.

Kinder erkennen sehr früh die emotionale Befindlichkeit ihrer Bezugspersonen. Sie selbst sind in der Lage, ihre Handlungen zu regulieren und über ihre Emotionen zu steuern. Dies gelingt zuerst über die Bezugspersonen, die sie zu Äußerungen oder zum Zeigen von Emotionen anleiten. In der Literatur wird von zunehmender Selbstständigkeit im Hinblick auf die emotionale Steuerung gesprochen (vgl. Holodynski, 2006).

Für die frühe mathematische Bildung ergibt sich daraus, dass die beginnende Selbstregulierung des Kindes ermöglicht werden sollte. Hierzu müssen Angebote der Einrichtung vorliegen, insbesondere in der Art und Weise, wie Kindern das Umgehen mit Bildungsgegenständen ermöglicht wird. Dies ist also die Stelle, an der richtungsweisend Mathematik motivationale Bedeutung erlangen wird.

Bindungsverhalten und Mathematikerleben

Die Frühphase der kindlichen Entwicklung ist durch eine enge emotionale und verhaltensbezogene Bindung an die Bezugspersonen (etwa die Eltern) gekennzeichnet. Mit dem Übergang in die Kita erweitert sich das Bindungssystem. Dies ist insofern bedeutsam, als die emotionale Bindung an die Bezugspersonen Sicherheit in Alltagssituationen vermittelt. Der Wechsel von den Eltern auf die pädagogischen Fachkräfte in der Kita stellt eine Schwelle dar, die unterschiedlich emotional belastend erlebt wird (Trennung) und verarbeitet werden kann. In sicheren Situationen zeigt das Kind kein Bindungsverhalten, denn dies ist ja nicht nötig, sondern es ist frei, sein Erkundungsinteresse zu aktivieren und auszuleben. In unsicheren Situationen hingegen wird das Bindungsverhalten aktiviert, die Bezugspersonen werden aufgesucht (krabbeln, sich anschmiegen, festklammern, schreien, weinen), d. h. es werden Verhaltensweisen gezeigt, die nicht auf ein Erkunden der Situation ausgerichtet sind, sondern die Bindung zu der Bezugsperson herzustellen versuchen, um ihren Schutz zu erhalten. (Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass es sich hierbei keineswegs um Persönlichkeits- oder Charaktermerkmale des Kindes handelt, sondern dass sich zumindest in der frühen emotionalen Entwicklung Phasen der Ablösung (wegkrabbeln, erkunden, entfernen und explorieren) mit Phasen der Wiederannäherung (anschmiegen, Nähe der Bezugsperson suchen) abwechseln.)

Die pädagogischen Fachkräfte in den Kitas übernehmen also eine doppelte Gestaltungsaufgabe, die sich sowohl auf die emotionale Entwicklung und frühkindliche Bindung des Kindes bezieht als auch auf bildungsrelevante Inhalte und Aktivitäten. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass der Übertritt in die Kita schon für sich eine „unsichere" institutionelle Situation mit sich bringt, die individuell unterschiedlich ausgeprägt ist und unterschiedlich intensiv erlebt wird.

Die Entwicklung der Emotionen und die Auswirkungen auf das Sozialverhalten der Kinder scheint hinreichend belegt, zudem nimmt die Selbstregulation der Emotionen Einfluss bis in die Lernebene der Grundschule (Köckeritz, Klinkhammer & von Salisch, 2010).

Diese Befunde zur emotionalen Bindung dürften – obwohl keine mathematikspezifischen Befunde vorliegen – dennoch auf die frühe mathematische Bildung übertragbar sein.

Die Bedeutung der emotionalen Bindung an die pädagogischen Bezugspersonen für die interessierte, neugierige Auseinandersetzung mit (mathematischen) Inhalten kann nicht überschätzt werden. In diesem Zusammenhang kommt in der Forschung der letzten Jahre dem Konstrukt *„Sensitive Responsivität"* eine besondere Rolle zu (Gutknecht, 2012; Remsperger, 2013), d. h. ein feinfühliges, inhalts- und kindbezogenes Verhalten. Die Beachtung der in diesem Kontext formulierten Interaktionsgestaltungskriterien wird eingefordert (König, 2010).

Angst vor Mathematik

Angst ist das Gegenteil von Vertrauen in die eigene Leistungsfähigkeit, es stellt einen Gegenpol zum Interesse und zur Motivation dar, sich mit der Mathematik zu befassen.

Es ist kaum anzunehmen, dass aufgrund der Beschäftigung mit mathematischen Inhalten Kinder im Vorschulalter Angst vor Zahlen entwickeln. Es ist gerade das Ziel der frühen Beschäftigung mit Mathematik, das Selbstvertrauen in die eigene Problemlösekompetenz zu fördern (Baroody, Lai & Mix, 2006; Malofeeva, Day, Saco, Young & Ciancio, 2004). Dies ist sicher in der Grundschule (und natürlich in den weiterführenden Schulen) anders, da nun die Vergleiche mit den Klassenkameraden einzelne Kinder erleben lassen, dass sie langsamer sind und mehr Fehler machen.

Lernstörungen in Mathematik führen dann zu den sekundären Symptomen wie Ablehnung des Fachs, Ablehnung der Mathematiklehrkraft, zu einer Generalisierung auf die Schule im Sinne von Schulangst, zu psychosomatischen Reaktionen wie morgendliches Unwohlsein, Erbrechen, Magenbeschwerden etc. bis hin zu Schulvermeidung (Absentismus). Die sekundäre Symptomatik entsteht zwar aus den erlebten Leistungsdefiziten, die zwar anfangs auf das Fach isoliert sind, sich aber generalisieren und sich zu einem eigenständigen Krankheitsbild ausbilden. Im Zusammenhang mit dem Thema „Motivation“ und „Interesse“ lässt sich festhalten, dass eine Angstbesetzung von Mathematik das einzelne Kind behindert, Interesse an dem Fach und seinen Inhalten aufzubauen. Eine solche Angstbesetzung sollte daher im Verlauf der mathematischen Bildung tunlichst vermieden werden.

Es ist also weniger das Zur-Verfügung-Stellen mathematischer Inhalte, das den Erfolg in der Kita ausmacht, sondern das *vorgelebte Interesse der pädagogischen Fachkräfte* für den mathematischen Inhalt einerseits und die *stabile emotionale Situation des Kindes* andererseits, die Zugriff auf neue und daher unsichere Inhalte überhaupt erst ermöglichen.

Und es spielt für die Gelingensbedingungen eine Rolle: Es lässt sich das mathematische Interesse im Vorschulalter nur schwierig entwickeln, wenn das Elternhaus nicht ebenfalls von diesen Bildungsinhalten überzeugt ist und sie vorlebt (s. u.).

Die Motivation und das Interesse der Kinder an Mathematik als Fach bzw. als weiter Gegenstandsbereich entwickeln sich im Vorschulalter nicht, da eine fachspezifische Begeisterung aufgrund des ganzheitlichen Erlebens kaum erwartet werden kann. Im Grundschulalter hingegen differenzieren Kinder die Fächer aus, so dass sich ein spezifisches Interesse ausbilden kann.

Spiele als Weg zur Förderung von Motivation und Interesse an Mathematik

Kinder können in den Spielen, die sie durchführen, mathematische Ideen vorfinden und entdecken. Die Autoren lehnen eine unterrichtsähnliche Vorgehensweise im Elementarbereich ab, Instruktion und Belehrung sollten im frühen Alter unterbleiben, da diese den lernpsychologischen Erkenntnissen widersprechen. Dies bedeutet im Umkehrschluss natürlich nicht, dass mathematische Inhalte aus dem Kita-Alltag ausgeklammert werden, sondern dass im Vordergrund der pädagogischen Arbeit der *spielerische Umgang mit mathematischen Kernideen* stehen sollte. Dieser spielerische Zugang sollte auch in der Grundschule nicht völlig unterbleiben. Dies wäre sogar im Sinne der Mathematik kontraproduktiv, denn eine entgegen landläufiger Auffassungen in der Mathematik sehr bedeutsame Strategie ist das Probieren im Sinne eines fortschreitenden Vorgehens mit zunehmender Systematik.

In einer großen Untersuchung mit Kita-Kindern (4;1 bis 5;5 Jahre) konnte gezeigt werden, dass selbst Kinder, die mathematische Spiele nur über einen relativ kurzen Zeitraum hin spielten, sowohl im Nachtest als auch in der Follow-up-Studie ein deutlich höheres Verständnis für Zahlzusammenhänge aufwiesen als Kinder, die mathematikferne Spiele gespielt hatten (Ramani & Siegler, 2008).

Spielen dient zum einen dem Lustgewinn, die eine Handlung mit sich bringt, sie dient aber auch dem Explorieren und Ausprobieren. Die Neugier ist den Kin-

dern eigen, sie wollen Neues erkunden, sich Wissen aneignen (Hauser, 2011). Dies ist im evolutionären Sinne notwendig, da es für das Kind darauf ankommt, sich Wissen anzueignen, bevor dieses gebraucht wird (hiermit sind *nicht nur* schulische Wissensinhalte gemeint, es gilt durchgängig für alle Altersstufen). „Durch Untersuchen des Objekts entsteht Wissen und Verstehen, das Objekt wird vertraut. Unbekannte Objekte sollten so lange Exploration auslösen, bis der Nutzen an Informationsgewinn größer ist als die Kosten (Zeit und Anstrengung) der Exploration selbst“ (Hauser, 2013, S. 77–78).

Hierbei wird exploratives Verhalten, also Neugier, dem Kind als permanente Haltung unterstellt, was sicher nicht für alle Inhaltsbereiche zutreffen muss. Neugier kann auch durch die Interaktion mit Erwachsenen geweckt werden, welche mit Objekten in einer für das Kind noch unverständlichen oder ungewohnten Weise umgehen und die sie auch selbst nicht entdeckt hätten (Pellegrini, 2009). Dieses Lernen in der Interaktion setzt bei Kindern das Verständnis voraus, dass hinter den Handlungen (des anderen) eine Absicht steckt. Dieses Verständnis entwickelt sich ab dem Alter von vier Jahren (Tomasello, 1999).

Gibt man Kindern in der Kita oder in der Grundschule Spielsachen mit uneindeutigen oder nicht transparenten Kausalmechanismen, dann werden sie diese untersuchen: drehen, auseinandernehmen, an Hebeln drücken etc. Werden sie aber häufiger mit mathematikbezogenen Spielen konfrontiert und dürfen diese explorieren, dann ist der Wissenszuwachs deutlich stärker (Hauser, 2013, S. 172f.). Auf Klötze und Konstruktionsmaterial reagieren Kinder angemessen mit explorativen Untersuchungen (2 bis 3 Jahre), die in Funktions- und Konstruktionsspiele übergehen (ab 3 Jahren, Ness & Farenga, 2007). Hierbei zeigen sie langfristig eine bessere Raumvorstellung und bessere visuell-motorische Koordination; zudem besuchen sie später mehr Mathe-Kurse und sind besser in Mathematik bis hinauf in das Gymnasium.

Prinzipiell ist für den Vorschulbereich zu konstatieren, dass der spielerische Zugang für die Kinder genuin ist, wohingegen Trainingsprogramme zum einen keine motivationale Kraft entfalten können und sie zum anderen auch nicht effektvoller sind als der spielerische Zugang (vgl. Pauen & Pahnke, 2008; Hauser & Rechsteiner, 2011). „The best preschool education is one that embraces the whole child, is playful and rich in opportunities for exploring and meaning making and is under adult guidance“ (Hirsh-Pasek , Golinkoff, Berk & Singer, 2009, S. 55; vgl. Hauser & Rechsteiner, 2011). Es gilt vielmehr, das kindliche Interesse aufzunehmen und zu eigener Kreativität anzuregen. Dies ist die Aufgabe der pädagogischen Fachkräfte (vgl. auch Clausen-Suhr, Schulz & Bricks, 2008).

Hier wird implizit eine Eigenschaft des kindlichen Spiels formuliert, die bereits in den 1930er-Jahren von Vygotskij und Elkonin erkannt und in eine Theorie des Spiels umgesetzt wurde (vgl. Elkonin, 1980). Für das kindliche Spiel gilt, so die Thesen (s. Heinze, 2007, S. 268):

- Phantasie wird erst durch das Spielen entwickelt – sie ist nicht die Voraussetzung für das Spiel.
- Spiel kann als eine Voraussetzung für das abstrahierende Denken, das Denken in allgemeineren Begriffen verstanden werden. Es trägt zur Begriffsbildung und zur Bildung von Bedeutungen bei.
- Spiel (insbesondere das Rollenspiel) findet nicht willkürlich statt, sondern wird bei genauerem Hinsehen von Erwachsenen angeleitet bzw. angeregt, wobei dies häufig implizit geschieht, so dass es von außen als freies Spiel erscheint.

Allerdings muss auch Spielen gelernt werden, zumindest müssen sich die Kinder (und die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte) auf die jeweiligen Regeln einigen. Die Entwicklung hin zu der Art von Spielen, wie sie in der Grundschule gespielt werden, also den Regelspielen, durchläuft mehrere Phasen:

- Das *sensumotorische Spiel* (Säuglingsalter): Exploration der Umwelt durch Nachahmung, Einverleibung, Verfeinerung der Motorik und Sensorik
- Das *Informationsspiel* dient ebenfalls der Exploration, setzt aber räumliche Orientierung voraus.
- Das *Konstruktionsspiel:* Sandkasten, Baukasten; zunehmende Kommunikation mit Spielpartnern
- Das *Symbolspiel:* „Als-ob-Spiel“, Gegenstände werden nach eigenen Vorstellungen umgedeutet, Klötze werden zu Autos, Playmobil-Figuren zu Cowboys oder Polizisten; Übernahme von fiktiven Rollen, die das Kind der erlebten Umwelt entlehnt; (diagnostisch relevant: Kinder mit Sprachentwicklungsverzögerung/Sprachrezeptionsstörungen spielen nicht symbolisch, sie haben bereits Schwierigkeiten mit dem ersten Symbolsystem, dem sie begegnen: der Sprache selbst).

- Das *Rollenspiel:* Das Kind schlüpft in die Rolle eines „fiktiven Ichs" und spielt das Leben nach; das Rollenspiel ist sozial und entwickelt sich meist aus der Interaktion mit Erwachsenen.
- Das *Regelspiel:* Es löst das freie Spiel ab und ist häufig durch Wettkampfaspekte charakterisiert. Hierzu gehören Lern-, Denk- und Strategiespiele, die eine Vereinbarung über die Regeln voraussetzen; es wird in der letzten Periode der Kita-Zeit häufig eingesetzt, da es in dieser sehr kritischen Phase der Identitätsgewinnung und -einschätzung Gelegenheit zu Vergleichen mit Altersgleichen gestattet (Heinze, 2007).

Die benannten Eigenschaften sind allen Spielen eigen, also nicht mathematikspezifisch. Es gibt wohl keine sinnvolle Charakteristik, welche mathematische Spiele von anderen Spielen unterscheiden könnte, zumindest nicht in ihrer äußeren Erscheinungsform. Allerdings beinhalten die Spiele von Kindern ein unterschiedliches Maß an mathematisch produktiven Inhalten und Ideen, die es von Seiten der Erwachsenen anzuregen gilt. So können Kinder etwa mit Bauklötzen Mauern bauen, aber dass man mit zwölf Steinen verschiedene Mauern bauen kann (eine 12 Steine lange und 1 Klotz hohe Mauer, aber auch 2x6, 3x4, 4x3, 6x2 oder einen 1x12-Turm), muss als Experimentierübung angeregt werden, und dass sich mit anderen Anzahlen, etwa mit 13 Klötzen, nur eine „Schlangen"-Mauer ergibt, wenn in der Mauer keine Stufen erlaubt sind, ist dann (mathematisch) überraschend (immanente mathematische Idee: Primzahl).

Es kann konstatiert werden, dass *das Spiel prinzipiell eine fördernde und die Kompetenzen des Kindes sichernde Kraft besitzt.* Daher erweist es sich auch für die Ausbildung von mathematischen Vorbegriffen als geeignet. Es sind keine unterrichtsähnlichen, stark gelenkten Aktivitäten oder gar Trainingsprogramme notwendig. Es genügen spielerische Aktivitäten, um die kognitiven Fähigkeiten der Kinder zu fördern (Clausen-Suhr et al., 2008; Clausen-Suhr et al., 2011; weitere Beispiele für kindliche Spiele s. Featherstone, 2008).

Da das Spiel zum Alltag einer Kita gehört, können die Aktivitäten, welche sich auf die Förderung mathematischer Kompetenzen oder die Ausbildung von Begriffen beziehen, ohne Schwierigkeiten spielerisch integriert werden. Sie sollen nicht als Trainingseinheiten konzipiert und als solche entlarvt werden, im Gegenteil (Jörns, Schuchardt, Mähler & Grube, 2013), denn dann würden sie von den Kindern als Anforderung verstanden mit möglichem negativen motivationalem Effekt (Leistungsdruck, Versagensangst). Spiele stellen lediglich, aus der Sicht der pädagogischen Fachkräfte bzw. der begleitenden Erwachsenen, ein Setting mit mathematischen Ideen her, welche für die Kinder interessant und anregend sein sollten.

Daher ist es auch empfehlenswert, Alltagsmaterial bzw. den Kinder vertrautes Kita-Spielmaterial zu verwenden, um keine künstliche, außergewöhnliche Situation zu schaffen (Rathgeb-Schnierer, 2013).

Insbesondere das *Spielen mit strukturierten Bauklötzen* hat, wie bereits Fröbel erkannte, ein hohes mathematisches Potenzial und ermöglicht, eine Vielzahl von geometrischen und arithmetischen Aspekten zu bündeln (Henschen & Teschner, 2013).

Bilderbücher als Weg zur Förderung von Motivation und Interesse an Mathematik

In ähnlicher Weise lassen sich Bilderbücher integrieren, die einen altersentsprechenden mathematischen Inhalt besitzen (Peter-Koop & Grüßing, 2006). Gängige Werke konzentrieren sich auf Abzählverse und Kinderreime, sie scheinen aber relativ stur und wenig lustbetont. Zahlen umgeben die Kinder, sie kommen in vielfältiger Weise im Alltag vor. Unter den neueren Werken gibt es welche, die eher als Programm aufgebaut sind, aber in eine anregende, zum Weiterprobieren initiierende Geschichte gebunden sind, etwa die für Kindergartenkinder geschriebene Geschichte „Die Biene Mina und der Maulwurf" (Gerlach & Fritz, 2012), andere hingegen bestechen durch ihre witzige Bildbetonung und den in die Alltagswelt eingebundenen Zahlenbezug (etwa Jandl & Junge, 2004), bei dem die Kinder nicht nur lernen, rückwärts zu zählen, sondern ihr Interesse an Mathematik und Zahlen deutlich gesteigert wird (vgl. hierzu van den Heuvel-Panhuizen, van den Boogard & Scherer, 2007; van den Heuvel-Panhuizen & van den Boogaard, 2008).

Da Bilderbücher eine hohe Faszination auf Kinder ausüben, kommt jenen mit mathematischem Bezug im Kita-Alltag eine relevante Rolle zu. In einem Setting, in dem Mathematik nicht instruiert wird, sondern beiläufiges Lernen stattfindet, also z. B. zu Hause mit den Eltern und in der Kita, ist der Effekt von Bilderbüchern auf das Lernen vom Umgang und dem Auftreten von Zahlen nicht zu unterschätzen (für weitere Beispiele siehe Faust, 2006).

Allerdings sollten mehrere Charakteristika vorhanden sein:

- Es sollten viele Aspekte der Mathematik angesprochen werden, eine schlichte Beschränkung auf Zahlen und Zählen ist zu wenig, um das Interesse der Kinder zu wecken.
- Die Geschichte selbst sollte die Kinder (und auch die Erwachsenen) faszinieren.
- Die enthaltene Mathematik sollte Möglichkeiten umfassen, tiefer und altersentsprechend in das Thema einzudringen (was entsprechende Kompetenzen auf Seiten der pädagogischen Fachkraft voraussetzt; siehe Abschnitte 3.3 bis 3.5).

- Die Vielfältigkeit der Anknüpfungspunkte an mathematische Inhalte muss von der pädagogischen Fachkraft erkannt werden (etwa die Länge der Haare der Prinzessin in Handbreiten ausmessen, auf Standardmaße übertragen, Länge der Haare bei Menschen, Riesen und Zwergen, räumliche Landschaftsbeschreibungen etc.); hier ist die pädagogische Fachkraft gefordert und ihre Kenntnis von der Mathematik im Alltag (van den Heuvel-Panhuizen, van den Boogaard & Doig, 2009).

Empfohlene Zielaspekte zu Motivation und Interesse in Bezug auf mathematische Bildung

Als Zieldimension früher mathematischer Bildung ist anzustreben, die Kinder für das *selbsttätige Lösen von Problemen mit mathematischen Ideen* zu begeistern. Kinder sollten ihre Stärke erleben, allein oder im gemeinsamen Spiel mit anderen neue Ideen auszuprobieren, zu explorieren, Fehler machen zu dürfen und auf neuen, unbekannten Wegen auch schwierige Problemstellungen zu meistern. Dass der mathematische Kern anfangs nur den erwachsenen Begleitpersonen bekannt und deutlich ist, stellt keinen Widerspruch dar, denn der mathematische Begriff, der den Spielen und Aktivitäten zugrunde liegt, entwickelt sich im Kopf des Kindes über einen langen Zeitraum, der meist länger als die Vorschul- und Schulzeit dauert.

2.1.2 Selbstwirksamkeit im Umgang mit Mathematik

Entgegen früheren Annahmen, die den Säugling als reaktives, von primären Bedürfnissen, etwa Hunger, getriebenes Wesen ansahen, wird ihm inzwischen ein komplexeres Antriebsmoment zugeschrieben. Schon das Kleinkind versucht, eine Unabhängigkeit von den basalen Antriebsmotiven (Hunger, Durst, Nähe zur Mutter) zu erlangen und kompetent zu werden. Man vermutet ein *„Gefühl der Wirksamkeit“ (feeling of efficacy)* als handlungsantreibend (Baake, 1999). Das Kind exploriert die Umwelt, führt Handlungen durch, erlebt sich als Verursacher und wiederholt daraufhin die gleiche Handlung, um sich dieses Gefühls der Wirksamkeit zu versichern. Im Alter von 2½ Jahren erkennen die Kinder in bewusster Weise sich als Handlungs- bzw. Ergebnisauslöser und sagen: „Ich kann das.“ Sie werden zum reflektierenden Handlungsakteur.

Damit gekoppelt sind Emotionen: Die erfolgreiche Handlung wird mit einem Lachen, später dann mit Stolz quittiert und dem Erwachsenen zur Kenntnis gebracht, Misserfolg führt hingegen zu Scham.

Hier liegen ausgesprochen komplexe Prozesse vor. Die „reifen“ Emotionen wie Stolz und Scham treten erst im späten Vorschulalter auf und sind in ihrer Ausprägung an die Anwesenheit von Erwachsenen gebunden (s. ausführlich hierzu Holodynski, 2006). Auch sind im Kindergartenalter die sozialen Vergleiche noch selten, die über ein Handlungsresultat als Erfolg oder Misserfolg bestimmen, ohne dass bekannt ist, warum das so ist, denn die Kinder sind durchaus in der Lage, soziale Vergleiche vorzunehmen, sie sind aber nicht handlungs- und emotionsregulierend (Trudewind, Unzner & Schneider, 1997).

Prinzipiell ist die gefühlte (und gezeigte) Emotion abhängig von der Schwierigkeit der Aufgabe: Wird eine schwierige Aufgabe gemeistert, dann ist der Stolz sehr hoch, wird eine als leicht eingeschätzte Aufgabe nicht gemeistert, dann ist entsprechend die Scham sehr hoch. In dieser Weise entsteht die Leistungsmotivation, die deutlich im Schulalter auftritt und wirksam wird.

Erklärungsmuster für eigene Erfolge und Misserfolge

Die Frage der Selbstwirksamkeit ist im Rahmen der Motivationsforschung eng mit dem Selbstkonzept, dem Bild von sich selbst in verschiedenen (Leistungs-)Bereichen, verbunden und hängt von der Kausalattribuierung der Handlungsresultate ab. Untersuchungen hierüber beziehen sich fast ausschließlich auf den Leistungsbereich, d. h. die Schule (Gabriel, Kastens, Poloczek, Schoreit & Lipowsky, 2010).

Kausalattribuierungen sind die Erklärungen, die ein Individuum für die Handlungs-, insbesondere Leistungsresultate annimmt. Attribuierungen werden auf zwei Dimensionen verortet: *internal vs. external und stabil vs. variabel.* Die entsprechenden Kausalfaktoren für das Handlungsresultat sind im folgenden Schema (Tabelle 1) angegeben.

Tabelle 1. *Kausalzuschreibungen für erfolgreiches/nicht-erfolgreiches Handeln*

	internal	external
stabil	*Begabung*	*Aufgabenschwierigkeit*
variabel	*Anstrengung*	*Glück*

Interne Attribuierung entspricht in diesem Kontext hoher Selbstwirksamkeit für Erfolg und Erfolglosigkeit, externe Attribuierung hängt hingegen mit der Vorstellung zusammen, für Erfolg respektive Erfolglosigkeit nicht verantwortlich zu sein.

Dass die Attribuierungsneigung kein festes Persönlichkeitsmerkmal ist, wurde in den frühen Nachfolgeuntersuchungen zum Pygmalion-Effekt bestätigt.

Der *Pygmalion-Effekt* war die überraschende Feststellung, dass offensichtlich Lehrerinteraktionen im Klassenzimmer die kognitive Entwicklung der Kinder positiv wie negativ beeinflussen können (Rosenthal & Jacobsen, 1971). Hierzu wurden Grundschullehrerinnen und -lehrern Kinder benannt, welche (vermeintlich) in einem Intelligenztest vor Schuleintritt deutlich über bzw. deutlich unter dem Durchschnitt lagen. Faktisch handelte es sich um Kinder, die sämtlich im mittleren Bereich abgeschnitten hatten. Am Ende der 2. Klasse hatten tatsächlich die als überdurchschnittlich bezeichneten Schülerinnen und Schüler eine überdurchschnittliche Leistung in den entsprechenden Tests, wohingegen die ehemals als unterdurchschnittlich bezeichneten Schülerinnen und Schüler schlecht abschnitten. Dies musste durch versteckte Interaktionen herbeigeführt worden sein, da die Leistungserwartung sicher nicht offen im Klassenzimmer von den Lehrerinnen und Lehrern geäußert wurde. Vielmehr konnten Verhaltensweisen wie unterschiedliche Interaktion bei richtiger/falscher Antwort identifiziert werden (vgl. ausführlich Lorenz, 1979).

Die Konstrukte Motivation (s. o.) und Selbstwirksamkeit sind zumindest für schulische Leistungsanforderungen und -resultate eng miteinander verwoben. Zudem wirken beide auf die *Anstrengungsbereitschaft,* die im Falle des Fehlens zu einer abwärtsorientierten Leistungsspirale führt, zu dem *„Teufelskreis Lernstörungen“*, der unbedingt zu vermeiden ist. Wenn ein Kind seine mangelnde Leistung auf niedrige Begabung zurückführt (internal-stabil), dann wird sich bei der nächsten Leistungsanforderung (Klassenarbeit) auch zusätzliche Anstrengung nicht lohnen, da sie ja nicht zum Erfolg führen kann. Hat das Kind aber den Misserfolg auf mangelnde Anstrengung (internal-variabel) attribuiert, dann kann erhöhte Anstrengung zu einem besseren Leistungsresultat führen.

Einflüsse auf das Selbstkonzept

Aus Sicht der Attributionstheorie ist es günstig, Erfolg der eigenen Begabung zuzuschreiben und damit ein hohes Selbstkonzept aufzubauen bzw. zu erhalten, Misserfolg hingegen auf mangelnde Anstrengung oder externale Faktoren zurückzuführen. Wie ein Kind attribuiert, hängt mit von der Erwartungshaltung der pädagogischen Fachkraft ab, die das Kind in seinem Anstrengungsbemühen unterstützt (oder implizit abwertet), da Kinder von „signifikanten Bezugspersonen“ die Einschätzung eigener Leistungsfähigkeit übernehmen (Lorenz, 1979).

In diesem Kontext sei auch auf die *paradoxe Wirkung von Lob und Tadel* in Bezug auf Anstrengung hingewiesen, die allerdings lediglich für den stärker leistungsorientierten Grundschulbereich beschrieben ist.

Kinder erleben häufig, dass im Mathematikunterricht nicht das Leistungsresultat selbst, sondern die Anstrengung mit Lob bzw. Tadel sanktioniert wird. Wenn bei gleichem Leistungsresultat (beide Schüler haben für die Klassenarbeit die Note 2 erhalten) nur der eine Schüler für seine Anstrengung gelobt wird, wird dieser das Lob interpretieren als: *„Ich bin nicht so gut wie der nicht gelobte Klassenkamerad, denn ich habe mich für diese Leistung angestrengt, der andere nicht.“* Der nicht gelobte Schüler scheint offensichtlich eine höhere Begabung bzw. mehr Vorkenntnisse zu haben und musste sich daher nicht so anstrengen.

Entsprechend führt einseitiger Tadel bei Misserfolg (beide Schüler haben eine mangelhafte Leistung abgeliefert) bei dem getadelten Schüler zu der Interpretation, der Lehrer missbillige seine mangelnde Anstrengung, d. h. wenn er sich mehr angestrengt hätte, dann hätte er aufgrund seiner Begabung durchaus eine bessere Leistung erbringen können; er interpretiert also: *„Ich habe eine höhere Begabung als der andere.“* Der nicht getadelte Schüler hingegen interpretiert das erlebte Nichttadeln als: *„Du hast dich angestrengt, aber es hat nichts genützt.“* Sein Selbstkonzept für eigene mathematische Leistungsfähigkeit wird sinken, weil er nicht getadelt wurde. Diese, zugegeben, sehr kleine Interaktionsform zwischen Erwachsenem und Kind beeinflusst in hohem Maße die Attributionsformen, die das Kind in Zukunft zur Erklärung seiner Leistungen heranziehen wird, und damit sein Selbstkonzept.

Ein weiterer Punkt zur Entwicklung des Selbstkonzepts und damit zu Attribuierungsverhalten und Anstrengungsbereitschaft liegt in den *Vergleichen mit den Spiel- bzw. Klassenkameraden.* Die Einschätzung eigener Leistungsfähigkeit ist abhängig von der beobachteten Leistung der Peergroup. Für die Eingangsklassen der Grundschule konnte der *„Big-Fish-Little-Pond-Effekt“ (BFLPE)* nachgewiesen werden (Marsh & Hau, 2003). Hierbei handelt es sich um den eigentlich selbstverständlichen Vorgang, dass das Selbstkonzept des einzelnen Kindes abhängig ist von der Leistung der Bezugsgruppe, denn eine „objektive“ Vergleichsmöglichkeit ist ihm nicht gegeben. Seine Leistung ist gut oder schlecht nur im Vergleich mit anderen, nicht hingegen gemessen an einem externen, objektiven Maß. Dies führt dazu, dass Kinder in einer sehr leistungsstarken (Kindergarten- oder Klassen-)Gruppe die eigene Leistung für gering erachten und ein entsprechend niedriges Selbstkonzept ausbilden, Kinder mit gleicher objektiver Leistung in leistungsschwachen Gruppen hingegen ihre Leistung überschätzen und ein (unrealistisch?) hohes Selbstkonzept entwickeln, wie dies im Rahmen des PERLE-Projekts nachgewiesen werden konnte (Gabriel et al., 2010; vgl. auch Dickhäuser & Galfe 2004; Dickhäuser 2006).

Ausbildung des mathematischen Selbstkonzepts
Bislang war die Meinung dominant, dass im Kindergartenalter und zu Beginn der Grundschulzeit das Selbstkonzept noch nicht domänenspezifisch differenziert, sondern eher global ausgebildet sei. Dies scheint aber keineswegs so zu sein: Neuere Befunde zeigen, dass sich das mathematikspezifische Selbstkonzept und das Interesse für das Fach Mathematik schon am Ende der Klasse 1 als stabil ausgeformt hat und über die Grundschulzeit hin sich praktisch nicht verändert (Zaunbauer, Gebauer, Retelsdorf & Möller, 2013). Erst wenn es zu neuen Bezugsgruppen in den weiterführenden Schulen kommt, dann verändert sich das Selbstkonzept wieder (Lorenz, 1979).

Für den Kita-Bereich ist zudem festzuhalten, dass Kinder kaum zwischen Fähigkeit und Anstrengung unterscheiden können und sich diese Differenzierung erst gegen Ende der Grundschulzeit für leistungsorientiertes Verhalten einstellt (Schiefele, 2009). Kinder im Vorschulalter besitzen ein eher egozentrisches Welt- und Leistungsbild, so dass die sozialen Vergleiche kaum vorgenommen werden.

Für das Schulalter werden Motivation und Interesse, die mit dem Selbstwirksamkeitsempfinden eng verbunden sind, durchaus als förderbar angesehen, wobei die Ansätze im deutschsprachigen Raum auf dem *„Selbstbewertungsmodell des Leistungsmotivs“* von Heckhausen (1989) beruhen. In diesen Verfahren stehen drei Aspekte im Vordergrund, die das Erfolgsmotiv steigern (bzw. das Misserfolgsmotiv mindern) sollen:

- sich realistische, d. h. mittelschwere Ziele setzen (mittelschwer im Sinne der subjektiven Fähigkeit)
- günstige Kausalerklärungen (Attributionen) sowohl für Erfolg als auch Misserfolg übernehmen
- eine positive Selbstwertbilanz aufbauen (Rheinberg & Krug, 2005)

Interessant ist in diesem Zusammenhang die Forschungslage zum Thema „Selbstkonzept“. Dies mag auf den ersten Blick ein unscharfes Bild von sich selbst sein, das sich im Laufe der Schulzeit fachspezifisch ausdifferenziert. Tatsächlich scheint es aber nicht so viele Selbstkonzeptfacetten wie Schulfächer zu geben, sondern lediglich zwei: ein *verbales* und ein *mathematisches* Selbstkonzept. Dabei korrelieren zwar die Leistungen in diesen beiden Bereichen positiv, nicht aber die beiden Facetten im Selbstkonzept der Schülerinnen und Schüler.

Erklärt wird dies durch das sog. „Internal/External-Frame-of-Reference-Modell“. Hierbei werden in dem Modell vier Prozesse angenommen:

1. Schülerinnen und Schüler vergleichen ihre Leistung in einem Fach an der Durchschnittsleistung der Klasse, sie verwenden also einen externalen Bezugsrahmen („external frame of reference“).

2. Die sozialen, d. h. interindividuellen Vergleiche führen dazu, dass Schülerinnen und Schüler mit guten Leistungen ein hohes (fachspezifisches) Selbstkonzept ausbilden, Schülerinnen und Schüler mit geringen Leistungen hingegen ein niedriges. Empirisch lässt sich eine hohe Korrelation zwischen (sprachlicher bzw. mathematischer) Leistung und (entsprechendem) Selbstkonzept nachweisen.

3. Als zweite Informationsquelle zur Beurteilung eigener Leistungsfähigkeit verwenden Schülerinnen und Schüler einen internalen Bezugsrahmen („internal frame of reference"), indem sie ihre Leistung im mathematischen Bereich mit den eigenen Leistungen im Sprachbereich vergleichen.

4. Dies führt bei unterschiedlichen Leistungen für die Bereiche dazu, dass Schülerinnen und Schüler mit guten Leistungen in Mathematik/Naturwissenschaften ihr sprachliches Selbstkonzept abwerten, Schülerinnen und Schüler mit schwachen Leistungen in Mathematik hingegen ihr Selbstkonzept für den Sprachbereich aufwerten (Möller & Trautwein, 2009), auch wenn es nicht realistisch ist.

In Bezug auf das mathematische Selbstkonzept („Ich lerne schnell Mathematik." oder „Normalerweise bin ich gut in Mathematik.") hat die TIMS-Studie („Trends in International Mathematics and Science Study") bei Schülerinnen und Schülern der 4. Jahrgangsstufe Folgendes ergeben (Selter, Walther, Wessel & Wendt, 2012): Im Vergleich der mittleren Skalenwerte der Kohorten von 2007 und 2011 ergibt sich für 2011 ein signifikant höherer Selbstkonzept-Wert von 3,24 als vier Jahre zuvor. Die Schülerinnen und Schüler stimmen den o. a. Aussagen also eher zu und artikulieren wie 2007 ein recht positives mathematikbezogenes Selbstkonzept. Der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit niedrigem mathematischem Selbstkonzept bleibt mit 10,2% in beiden Kohorten nahezu stabil. Der Anteil der Kinder mit mittlerem positivem Selbstkonzept fällt leicht und der Anteil der Schülerinnen und Schüler, die ein hohes mathematikbezogenes Selbstkonzept angeben, steigt im Gegenzug. Mehr als 7 von 10 Schülerinnen und Schülern der 4. Jahrgangsstufe in Deutschland geben damit an, dass sie über ein positives mathematikbezogenes Selbstkonzept verfügen.

Empfohlene Zielaspekte zu Selbstwirksamkeit in Bezug auf mathematische Bildung

Durch einen spielerischen Umgang in problemhaltigen Situationen lässt sich erreichen, dass die Kinder ihren Wissenszuwachs und ihre Kompetenzerweiterung für mathematische Inhalte, für das Erkunden von Zahlen und geometrischen Formen, für Maße und Muster erleben und erfahren, dass diese Begriffe geeignet sind, die Welt zu ordnen und zu durchschauen. Das gibt ihnen Vertrauen, die Welt zu meistern und Probleme lösen zu können. Sie spüren die Wirksamkeit ihres Tuns, was sie in ihrem Selbstwirksamkeitsempfinden wachsen lässt.

2.1.3 Kindliche Vorstellungen und Überzeugungen zum Wesen von Mathematik

Das kindliche Bild von Mathematik

Vorschulalter

Da es im Vorschulalter noch kein kohärentes Bild zu Inhalt und Wesen von Mathematik gibt, sondern interessante, herausfordernde Aufgaben, Spiele und Situationen, die von den pädagogischen Fachkräften oder anderen Erwachsenen angeregt werden, kann sich auch keine Überzeugung zu eben diesem Wesen und gar zum Stellenwert der Mathematik ausbilden. Es liegt keine Untersuchung vor, die sich damit befasst oder diese Überlegungen empirisch belegt. Im Unterschied zu den Naturwissenschaften, die sich durch die Untersuchung von Alltagsphänomenen, durch die Frage nach dem „Warum passiert das?" auszeichnen und einen experimentellen Zugang ermöglichen, gibt es ähnliche Fragen in der Mathematik nicht, zumindest nicht als geschlossenes, von den Kindern wahrnehmbares und überschaubares System.

Mathematik wird in dem Sinne unbewusst erlebt, als sich Muster und Strukturen erkennen lassen, die übertragbar und in neuen Situationen wiederholt sichtbar gemacht werden können (dies ist eine Aufgabe der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte. „Kennen wir das schon? Wo haben wir das schon einmal gesehen?"). Das heißt, diese Muster werden als kognitive Stützen erlebt, als Erweiterungen der Erkenntniswerkzeuge, vielleicht als Heuristiken, die sich in vergleichbaren Situationen erfolgreich anwenden lassen. Sie werden aber von den Kindern dieser Altersstufe nicht als geschlossenes Wissenschaftssystem wahrgenommen.

Dies geschieht erst mit Schuleintritt, wo der als einheitlich erlebte Alltag in Disziplinen aufgespalten und unterrichtet wird.

In dem Sinne wird im Vorschulalter nicht der Mathematik ein Stellenwert zugewiesen, hingegen schon einzelnen Fähigkeitserrungenschaften wie dem Zählen oder zählendem Rechnen, ähnlich dem Lesen oder Schreiben. Beim Spiel oder anderen Alltagshandlungen ist dies vorteilhaft und geschieht sicherlich auch durch die Widerspiegelungen der Erwachsenenhaltung, die diese Fähigkeiten älteren Kindern (und natürlich den Erwachsenen) also obligatorisch zuschreiben. Mehr noch: Diese Fähigkeiten trennen (in der von Kindern als öffentliche Meinung perzipierten Wahrnehmung) Kindergarten- von Schulkindern. Der Nützlichkeitsgedanke von Mathematik dürfte im Vorschulalter kein genuiner sein, sondern bestenfalls imitierend von Erwachsenen übernommen werden.

Grundschulalter

Allerdings lernen die Kinder in der Grundschule etwas über das Wesen der Mathematik, dass Mathematik überall ist und dass Mathematik im Alltag an vielfältigen Stellen anzutreffen ist.

Für das Ende der Grundschulzeit wurden in der TIMS-Studie 2011 die Einstellungen von Schülerinnen und Schülern zur Mathematik durch Items wie ‚Mathematik ist langweilig' oder ‚Ich mag Mathematik' erhoben (Selter et al., 2012). Vergleicht man die mittleren Skalenwerte von 2007 und 2011, so ergibt sich für 2011 ein leicht, jedoch nicht signifikant geringerer Wert von 3,12 auf einer Skala von 1 (negativ) bis 4 (positiv). Die Schülerinnen und Schüler artikulieren wie 2007 eine durchaus positive Einstellung zum Fach Mathematik. Der Anteil der Kinder mit ‚niedriger' positiver Einstellung steigt signifikant auf 16,6%, und der Anteil der Schülerinnen und Schüler, die eine hohe positive Einstellung angeben, sinkt im Gegenzug entsprechend. Sie ist mit 67,4% nach wie vor hoch; zwei Drittel der Schülerinnen und Schüler der 4. Jahrgangsstufe in Deutschland geben an, dass sie eine positive Einstellung zur Mathematik haben.

Kindliche Überzeugungen zum Lehren und Lernen von Mathematik

Vorschulalter

Kinder lernen in der Frühphase ihrer Entwicklung sehr viel, allerdings zunächst nicht bewusst. Sie lernen nicht heute etwas, um es morgen zu wissen oder zu können. (Es gibt nur wenige Ausnahmen: das Gedicht zum Muttertag, das Weihnachtslied, das Gedicht zu Omas Geburtstag; sehr selten auch: ein Instrument üben und erlernen). Welche Überzeugung zum Lernen oder gar Lehren von Mathematik soll sich im Vorschulalter ausbilden? Im letzten Kita-Jahr wird es wohl ein von Eltern, Großeltern und Geschwistern getragenes Bild von Schule geben, als jener Institution, die den ersten Schritt in das Erwachsensein, ins „Größerwerden" darstellt. Damit dürften aber keine Vorstellungen oder Überzeugungen zum Lernen einhergehen, bestenfalls Hoffnungen, die angestrebten Kulturtechniken Lesen, Schreiben und Rechnen bald zu können und selbst Bücher ohne Hilfe der Erwachsenen, ganz eigenständig verschlingen zu können. Es sind Bilder von der eigenen Entwicklung, im positiven Sinn, und von der ersehnten nächsten Stufe. Die Vorstellungen über den Prozess des Lernens dürften damit kaum eingeschlossen sein.

Da das Bild der Kinder in der Kita nicht auf die Schule und die Vorbereitung auf schulische Lerninhalte im Sinne des Instruierens gerichtet ist, was allerdings nicht die (spielerische) Behandlung von kraftvollen mathematischen Ideen ausschließt, im Gegenteil, sollte sich auch keine Vorstellung von instruiertem Lernen entwickeln.

In dem Bedürfnis, die Kinder auf die Schule vorzubereiten und ihnen eine möglichst optimale Förderung angedeihen zu lassen, sind eine Reihe von Irrwegen beschritten worden, insbesondere Betonung, mehr noch eine Beschränkung auf den Umgang mit Zahlen und das Rechnen (s. für ein ähnliches Problem im Mathematikunterricht Abschnitt 2.2.2). Es wurden in der Nachfolge von Piaget Fehler durch die Betonung der in seiner Theorie formulierten basalen Operationen (Klassifizierung, Aneinanderreihung, Konservation, Eins-zu-eins-Beziehung), manchmal ergänzt durch Rechenoperationen wie das Zählen, gemacht.

Hierzu wurden diverse Kritikpunkte formuliert (van Oers, 2004):

- Die Betonung der operationalen Ansätze ist auf isolierte Rechenprozeduren gerichtet, sie knüpft nicht an den Erfahrungen der Kinder an. Dadurch wird das wahre, umfangreiche Lernpotenzial nicht angesprochen und erfasst.
- Die operationalen Ansätze vermitteln nur ein eingeschränktes (van Oers bezeichnet es als „verzerrtes“) Bild der Mathematik, das sich auf die Ausführung isolierter Rechenoperationen beschränkt. „Mathematik ist aber bereits im Vorschulalter eher Problemlösen, das die Fähigkeit zum quantitativen und relationalen Schlussfolgern erfordert“ (van Oers, 2004, S. 314).
- Operationale Ansätze blenden den theoretisch und empirisch nachweisbaren Zusammenhang zwischen Sprachkompetenz und mathematischen Lernprozessen aus.

Die Verkürzung auf das Rechnen und seine Routinen ist sicher ein negativer Aspekt, mit lang anhaltenden Folgen, denn er prägt das Bild von Mathematik im Kopf der späteren Schülerinnen und Schüler.

Grundschulalter

Eine verkürzte Vorstellung von Mathematik auf das Rechnen und seine Routinen dürfte in der Grundschule noch verstärkt werden, wenn Unterricht sich primär auf die Arithmetik beschränkt, wie es eher die Regel als die Ausnahme ist. Allerdings liegen nur wenige Untersuchungen vor, welche das Bild der Grundschülerinnen und -schüler von Mathematik erfassen.

Allerdings ergibt sich in der Grundschule aus der Aufsplitterung in Fächer ein Bild, das die Mathematik von anderen Lebensbereichen abzutrennen droht. Zumal (im Gegensatz zu den weiterführenden Schulen) die Anbindungen an die Lebenswelt, die Bearbeitung von Alltagsproblemen mit Hilfe der Mathematik eher kümmerlich ausfällt. Selbst die Versuche, über Projekte die Mathematik in das Erleben der Kinder mit einzuschließen, haben häufig etwas Aufgesetztes und Künstliches, was schnell von den Schülerinnen und Schülern als Hülse durchschaut wird.

Damit reduziert sich leider Mathematik auf das Erlernen einer Kulturtechnik, die von Erwachsenen als wichtig erachtet und gepriesen wird, deren Bedeutsamkeit aber (noch) nicht erlebbar ist.

Empfohlene Zielaspekte zu kindlichen Vorstellungen und Überzeugungen in Bezug auf Mathematik

Die ständige Wiederkehr mathematischer Ideen in verschiedenen Gewändern in der Umwelt sollte als Ziel mathematischer Bildung angesehen werden, nicht das Rechnen. Strukturen zu erkennen, stellt einen großen Erkenntnisgewinn für Kinder dar, sie erleben ihre Begriffserweiterung und damit eine positive Entwicklung. Sie erfahren Mathematik als faszinierenden Gegenstand ihres Wissens in Bezug auf geometrische Formen und Körper, Zahlbeziehungen und Operationen, die sich vielfältig anwenden lassen, aber in ihren Strukturen gleich bleiben.

2.1.4 Messung

Für den Grundschulbereich existieren Messwerkzeuge zur Erfassung von Motivation und Interesse, z. B. eine Angstratingskala (Die Mathematikangst-Ratingskala für vierte bis sechste Klassen, MARS 4-6; Roick, Gölitz & Hasselhorn, 2013), für den Vorschulbereich ist kein Fragebogen bekannt. Dies liegt sicher einerseits an der mangelnden Fähigkeit der Kinder dieses Alters, einen Fragebogen auszufüllen, zum anderen aber auch daran, dass sich ein kohärentes Bild von Mathematik noch nicht hat ausbilden können. Für die anderen Facetten des Interesses und der Motivation sind keine genormten Messinstrumente bekannt.

Das Selbstkonzept lässt sich bereichsspezifisch erfassen (Marsh, Craven & Debus, 1998; Bouffard, Marcoux, Vezeau & Bordeleau, 2003), allerdings sind deutschsprachige Instrumente zur Erfassung des mathematischen Selbstkonzepts im Vorschul- oder Grundschulalter nicht bekannt. Die Einstellungen von Schülerinnen und Schülern zur Mathematik am Ende der Grundschulzeit lassen sich wie in der TIMS-Studie 2011 durch Items wie ‚Mathematik ist langweilig' oder ‚Ich mag Mathematik' erheben (Selter et al., 2012).

2.2 Prozessbezogene mathematische Kompetenzen

Christoph Selter und Bernd Wollring

2.2.1 Ausgangspunkt KMK-Bildungsstandards

Bei der Formulierung fachbezogener mathematischer Kompetenzen bezieht sich diese Expertise auf die Bildungsstandards zur Mathematik, wie sie die Kultusministerkonferenz für verschiedene Schulstufen beschlossen hat. Diese kennzeichnen, über welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler an ausgewählten Schnittstellen im Bildungsprozess verfügen sollten, am Ende der Klasse 4 (Primarbereich; KMK, 2005), am Ende der Klasse 9 (Hauptschulabschluss; KMK, 2005) bzw. der Klasse 10 (Mittlerer Schulabschluss; KMK, 2004) sowie für die Allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012). Sie ordnen sich in ein kohärentes System ein und bieten eine tragfähige Grundlage zur Herstellung von Kontinuität und Anschlussfähigkeit im Bildungsprozess.

Nach Auffassung der Expertengruppe besteht kein plausibler Grund dafür, dass die Zieldimensionen mathematischen Lernens im Alter von 6 bis 18 Jahren grundsätzlich andere sein sollten als die im Elementarbereich. Daher werden diese im Folgenden auch für Kinder im Alter von 3 bis 6 Jahren herangezogen und – wo sinnvoll – in geeigneter Weise modifiziert.

Unterschieden wird zwischen *inhaltsbezogenen* und *allgemeinen* mathematischen Kompetenzen. Die allgemeinen Kompetenzen werden – wie meist im mathematikdidaktischen Diskurs – im Weiteren *prozessbezogene* Kompetenzen genannt (vgl. Kapitel 1), um einerseits die Besonderheit dieser Kompetenzen deutlicher herauszustellen und um andererseits der Fehlinterpretation entgegenzuwirken, die inhaltsbezogenen seien die fachspezifischen und die allgemeinen Kompetenzen eher die fachunabhängigen Kompetenzen.

Die *inhaltsbezogenen* mathematischen Kompetenzen in den Bildungsstandards beziehen sich auf fünf mathematische Leitideen, die bis auf kleine Varianten in den Formulierungen über die einzelnen Stufen im Bildungsprozess hinweg konsistent bezeichnet werden. Sie sind in den Abschnitten 2.3 und 3.4 differenziert dargestellt.

Tabelle 2. *Leitideen zu inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen in den Bildungsstandards der KMK*

Primarbereich	Mittlerer Schulabschluss	Allgemeine Hochschulreife
Zahlen und Operationen	*Zahl*	*Algorithmus und Zahl*
Raum und Form	*Raum und Form*	*Raum und Form*
Muster und Strukturen	*Funktionaler Zusammenhang*	*Funktionaler Zusammenhang*
Größen und Messen	*Messen*	*Messen*
Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	*Daten und Zufall*	*Daten und Zufall*

Für die drei Stufen im schulischen Bildungsprozess listen die Bildungsstandards die folgenden fünf bzw. sechs *prozessbezogenen* Kompetenzen auf. Der Übersichtlichkeit halber sind im Weiteren die Standards für den Hauptschulabschluss nicht mehr explizit aufgeführt.

Tabelle 3. *Prozessbezogene mathematische Kompetenzen in den Bildungsstandards der KMK*

Primarbereich	Mittlerer Schulabschluss	Allgemeine Hochschulreife
Problemlösen	*Probleme mathematisch lösen*	*Probleme mathematisch lösen*
Kommunizieren	*Mathematisch kommunizieren*	*Kommunizieren*
Argumentieren	*Mathematisch argumentieren*	*Mathematisch argumentieren*
Modellieren	*Mathematisch modellieren*	*Mathematisch modellieren*
Darstellen	*Mathematische Darstellungen verwenden*	*Mathematische Darstellungen verwenden*
	Mit symbolischen, formalen und techn. Elementen umgehen	*Mit Mathematik symbolisch/formal/technisch umgehen*

Deutlich wird, dass sich bis auf kleine Formulierungsunterschiede ein kohärentes System von prozessbezogenen Kompetenzen vom Primarbereich bis in die Sekundarstufe II zieht. Lediglich der Kompetenzbereich *„mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“* erweist sich für die Primarstufe als nicht zentral.

Wie Abbildung 3 (Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich, KMK, 2005, S. 7) illustriert, sind unter dem gemeinsamen Dach der fachbezogenen Kompetenzen die inhaltsbezogenen und die prozessbezogenen Kompetenzen nicht losgelöst voneinander zu sehen.

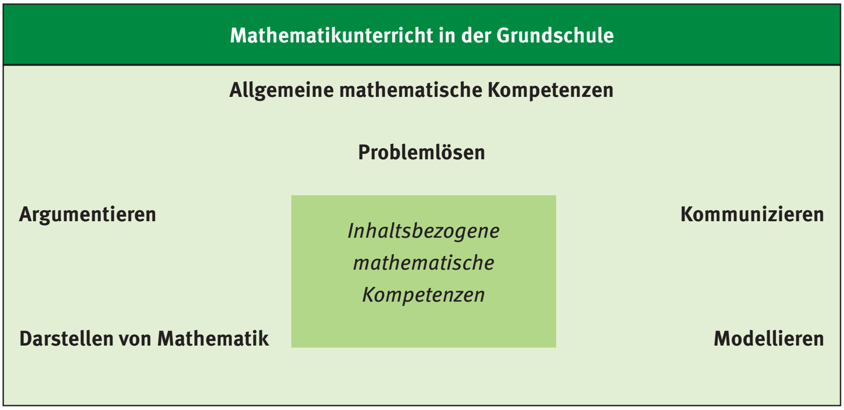


Abbildung 3. *Prozessbezogene und inhaltsbezogene Kompetenzen (vgl. KMK 2005)*

Gleichwohl soll der begrifflichen Klarheit wegen die Darstellung der prozessbezogenen und der inhaltsbezogenen Kompetenzen in den Abschnitten 2.2 bzw. 2.3 (Ebene *Kinder*) und in den Abschnitten 3.3 bzw. 3.4 (Ebene *Erwachsene*) getrennt erfolgen.

2.2.2 Zur Entwicklung des aktuellen Mathematikunterrichts

Ein Blick in die Geschichte des Mathematikunterrichts in der Grundschule zeigt, dass dieser sich lange Zeit auf das Rechnen mit Zahlen und mit Größen beschränkte (siehe etwa Schipper, 2009). Dem humanistisch orientierten „Rechenmeister" Adam Ries, der bereits vor 500 Jahren Mathematik als Gegenstand eines allgemeinen Bildungsauftrags sah, wird der Satz zugeschrieben: *„Der gemeine Mann soll rechnen lernen, damit er nicht betrogen werde!"*

Vereinzelte Ansätze der Reformpädagogik (etwa Kühnel, 1929), die versuchten diese Beschränkung auf das Rechnen aufzuheben und mathematische Bildung als oberstes Ziel des Unterrichts forderten, erzielten keine hinreichend nachhaltige Wirkung. So begriffen noch die Richtlinien und Lehrpläne der 1950er- und der 1960er-Jahre des letzten Jahrhunderts das Erlernen der vier Grundrechenarten als Kern des Rechenunterrichts in der Grundschule.

Die 1970er-Jahre waren von bildungspolitischer Aufbruchsstimmung und damit einhergehender Unruhe im Zuge der Bestrebungen um mehr „Wissenschaftsorientierung" geprägt, auch und gerade in der Mathematik. Nicht nur der „Sputnik-Schock" wirkte hier nach, sondern auch ein gerade zu der Zeit in der Wissenschaft Mathematik aktueller und heute nicht mehr dominierender Trend zur Abstraktion und Reduktion aller Mathematik auf Logik und Mengen. Im Bestreben dies auch in eine Neuorientierung des Unterrichts eingehen zu lassen, entstand die sog. „Neue Mathematik", u. a. gekennzeichnet durch die „Mengenlehre". So sinnvoll es prinzipiell erschien, dadurch das mathematische Denken betonen zu wollen, so unglücklich gestalteten sich viele Vorschläge zur unterrichtlichen Realisierung. Man reduzierte dabei die Mathematik häufig auf das Betrachten von abstrakten, lebensfernen und „phänomenlosen“ Strukturen. Diese „Neue Mathematik“ scheiterte (Müller & Wittmann, 1984, S. 146ff.).

Zeitgleich entstanden tragfähigere Ansätze, etwa der von Fricke und Besuden (1970), der den Prozesscharakter der Mathematik mehr betonte und heute noch aktuell ist, sich aber seinerzeit nicht auf breiter Basis durchsetzte.

In der anschließenden Konsolidierung des Mathematikunterrichts in den 1980er-Jahren wurde nicht zum Ausbilden „menschlicher Rechenmaschinen“ zurückgekehrt, sondern es wurde die Intention, Mathematikunterricht statt Rechenunterricht zu realisieren, aufrechterhalten und weiterentwickelt (vgl. etwa Walther, Selter & Neubrand, 2008; Schipper, 2009).

So formulierte Winter in der Mitte der 1970er-Jahre die sog. *allgemeinen Lernziele für den Mathematikunterricht* (Winter, 1975, S. 107ff.). Demnach soll der Mathematikunterricht Schülerinnen und Schülern Möglichkeiten geben,

- schöpferisch tätig zu sein,
- rationale Argumente zu üben,
- die praktische Nutzbarkeit der Mathematik zu erfahren und
- formale Fertigkeiten zu erwerben.

Zehn Jahre später erschien 1985 der Lehrplan für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen (MSW NRW, 2008). Er baut auf Winters allgemeinen Lernzielen auf und formuliert mit dem Begriffspaar *‚Strukturorientierung – Anwendungsorientierung‘* eine allgemein anerkannte Bildungsperspektive. Dieser Lehrplan hat sich als wegweisend für viele deutsche Lehrpläne erwiesen, nicht zuletzt aufgrund der Einforderung der sog. allgemeinen Lernziele *kreativ sein, argumentieren* und *mathematisieren.*

Im Jahr 1989 stellte der amerikanische Lehrerverband NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) erstmals Standards zur Debatte und betonte dabei explizit auch Fähigkeiten wie *Problemlösen, Argumentieren* oder *Kommunizieren* (vgl. die Überarbeitung dieser Standards, NCTM, 2000). Dem traditionellen, auf Basisfähigkeiten und -fertigkeiten konzentrierten Ansatz stellten die Autoren des NCTM bewusst eine stärker *prozessorientierte* Sichtweise auf das Mathematiklernen gegenüber. Das Entdecken und Erforschen von mathematischen Zusammenhängen und Beziehungen sollte ein mehr auf Verständnis basierendes Lernen ermöglichen.

In Deutschland entstand seit Mitte der 1990er-Jahre abermals eine breite Diskussion über die allgemeinbildenden Aufgaben des Mathematikunterrichts (Heymann, 1996; Winter, 1995). In diesem Kontext formulierte Winter (1995, S. 37) die drei bereits in Kapitel 1 erwähnten „Grunderfahrungen“:

- „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen sowie
- in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben.“

2.2.3 Prozessbezogene Kompetenzen im Kita- und Grundschulalter

Im Folgenden werden die prozessbezogenen Kompetenzen in ihren fünf Facetten für den Bereich der Kita, ausgehend von Kompetenzerwartungen für den Primarbereich, entwickelt und beschrieben (KMK, 2005; Selter, 2011).

Für das Ende des Elementarbereichs wurde etwas Vergleichbares bislang nicht explizit formuliert. Gleichwohl zeigt sich, dass eine entsprechende Berücksichtigung dieser Bildungspläne für das Mathematiklernen vor der Grundschule bzw. Adaptation für das Kita-Alter in vielen aktuellen Publikationen bisweilen explizit, überwiegend jedoch implizit stattgefunden hat (siehe etwa Steinweg, 2007, S. 144; auf internationaler Ebene etwa Copley, 2006; Sächsisches Staatsministerium für Kultus, 2011, S. 134; Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2013b).

Die Mitglieder der Expertenkommission sehen die für das Ende des Primarbereichs in den Bildungsstandards formulierten prozessbezogenen Kompetenzerwartungen als Orientierungspunkte an, die mutatis mutandis auf Zieldimensionen führen, die bereits im Elementarbereich im Sinne spielenden und kumulativen Lernens anzubahnen sind.

Aufgrund der unterschiedlichen Bildungsaufträge von Elementarbereich und Primarbereich werden jedoch bewusst keine Kompetenzerwartungen im Sinne von Standards mit normativem Anspruch für den vorschulischen Bereich formuliert, sondern Perspektiven. Die Autorinnen und Autoren dieser Expertise registrieren, dass die Formulierungen der Bildungsstandards aus ihrer Sicht gewisse Inkonsistenzen aufweisen und bisweilen eine weitere Konkretisierung zu wünschen wäre, wie ihn etwa einige nachfolgend entstandene Lehrpläne in einzelnen Bundesländern aufweisen. Da der Kommission die Grundaussagen der Bildungsstandards bedeutsamer erscheinen als Einzelformulierungen und diese Grundaussagen den zentralen Bezug der Diskussion darstellen, wird hier dennoch darauf Bezug genommen (vgl. KMK, 2005).

Im Folgenden sind die fünf Zielfacetten zu prozessbezogenen Kompetenzen dargestellt. Zudem werden jeweils Beispielaktivitäten für den vorschulischen Bereich, die Schuljahre 1 und 2 sowie 3 und 4 benannt, die deren jeweilige Spezifizität beschreiben. Weitere Beispiele und Konkretisierungen für das Ende der 4. Jahrgangstufe und für pädagogisches Fachpersonal finden sich zudem in Abschnitt 3.3.

Gute Aufgabenstellungen sprechen häufig mehrere prozessbezogene Kompetenzen an, daher ist es bei einigen der folgend genannten Aktivitäten möglich, sie auch einer oder mehreren anderen prozessbezogenen Kompetenzen zuzuweisen.

2.2.4 Problemlösen

Als erste anzustrebende Zielfacette prozessbezogener Kompetenz nennen die Bildungsstandards das *Problemlösen,* das wie folgt konzeptioniert wird:

- mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden
- Lösungsstrategien entwickeln und nutzen, z. B. systematisch probieren
- Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Diese Kompetenz in allen ihren drei Aspekten ist als Ziel mathematischer Bildung im Elementarbereich wie im Primarbereich anzustreben. Gemeinsam ist den drei Aspekten die Fähigkeit, beim Lösen von Problemen zunehmend planvoll vorzugehen und dabei vorhergehende Erfahrungen und Erkenntnisse zu nutzen.

Problemlösen äußert sich beispielsweise darin, dass Kinder Aufgaben und Fragestellungen erfinden, etwa durch Variation oder Fortsetzung von gegebenen Aufgaben. Diese Kompetenz ist im Elementarbereich zu beobachten, wenn Kinder etwa regelmäßige Figuren aus Bauklötzen bauen (Treppen, Spiralen oder symmetrische Figuren), im Primarbereich im 2. Schuljahr etwa, wenn die Schülerinnen und Schüler viele (alle) Aufgaben des kleinen Einmaleins aufschreiben, deren Ergebnis zwischen 20 und 40 liegt, oder im 3. oder 4. Schuljahr, wenn sie etwa Zahlenrätsel erfinden und einem anderen Kind stellen („Ich denke mir eine Zahl, addiere 5, multipliziere mit 2 …“).

2.2.5 Kommunizieren

Als zweite anzustrebende Zielfacette prozessbezogener Kompetenz nennen die Bildungsstandards das *Kommunizieren,* das wie folgt konzeptioniert wird:

- eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren
- mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden
- Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten

Hierzu gehört auch, dass die Kinder ihre Arbeitsergebnisse, Vorgehensweisen und Lernerfahrungen *dokumentieren*.

Im Elementarbereich ist dieses etwa der Fall, wenn die Kinder entscheiden, welches Bild für eine Ausstellung von Bildern mit symmetrischen Motiven ausgewählt wird, in der Schuleingangsphase etwa, wenn sie im eigenen Heft einen Rechenweg zur halbschriftlichen Subtraktion beschreiben, oder in Klasse 3 bzw. 4, wenn sie Tipps zum Bearbeiten von Textaufgaben im Lerntagebuch formulieren.

2.2.6 Argumentieren

Als dritte anzustrebende Zielfacette der prozessbezogenen Kompetenzen nennen die Bildungsstandards das *Argumentieren,* das wie folgt konzeptioniert wird:

- mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen
- mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln
- Begründungen suchen und nachvollziehen

Dies äußert sich etwa darin, dass die Kinder Vermutungen über mathematische Zusammenhänge oder Auffälligkeiten anstellen, im Elementarbereich beispielsweise darin, dass sie sagen können, wie ein Spiegel zu platzieren ist, um aus drei Gegenständen sechs Gegenstände ‚zu erzeugen', in den Jahrgangsstufen 1 oder 2 etwa darin, dass sie vermuten, wie Schuhgröße und Fußlänge zusammenhängen, oder in den Klassen 3 bzw. 4 etwa im Aufstellen der Vermutung, dass bei der Multiplikation zweier ungerader Zahlen stets eine ungerade Zahl als Ergebnis herauskommt .

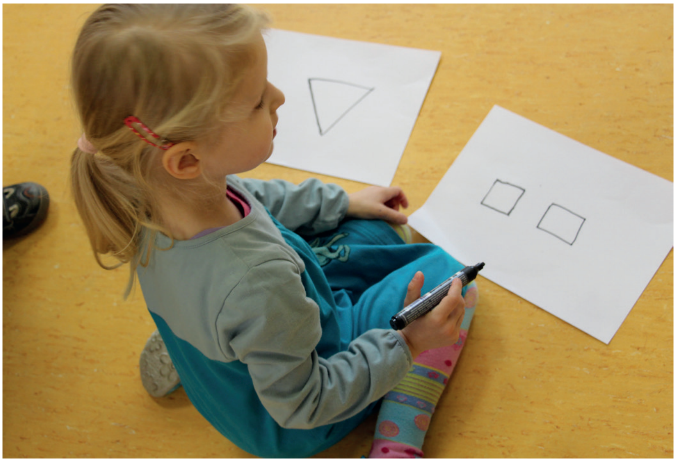
2.2.7 Modellieren

Als vierte anzustrebende Zielfacette prozessbezogener Kompetenz nennen die Bildungsstandards das *Modellieren,* das wie folgt konzeptioniert wird:

- Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen

- Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen
- zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren

Dies ist natürlich im Elementarbereich in einen passenden Rahmen zu stellen (siehe etwa Blum & Borromeo Ferri, 2009). Der dritte Punkt hat im Elementarbereich nicht dieselbe Bedeutung wie die beiden ersten. Die ersten beiden Punkte aber betonen nicht nur erneut die Rolle der Sprache wie das Kommunizieren und das Argumentieren, sie verweisen auch auf die Anforderung, die eigenen Denkmuster so auf die Lebenswelt zu beziehen, dass sie zu deren Erschließung beitragen.



Diese Kompetenz äußert sich auch darin, dass die Kinder Sachsituationen und Sachaufgaben Informationen entnehmen und dabei zwischen relevanten und nicht relevanten Informationen unterscheiden, also etwa im Elementarbereich feststellen, wie viel mehr Jungen als Mädchen im Stuhlkreis sitzen, in der Schuleingangsphase etwa Malaufgaben in der Umwelt suchen und in einem Einmaleins-Forscherbericht dokumentieren oder in den Jahrgangsstufen 3 bzw. 4 etwa ausgehend von einer (fiktiven oder realen) Nachricht ermitteln, ob die Einnahmen eines Sommerfestes in diesem Jahr höher waren als im letzten Jahr.

2.2.8 Darstellen

Als fünfte anzustrebende Zielfacette prozessbezogener Kompetenz nennen die Bildungsstandards das *Darstellen,* das wie folgt konzeptioniert wird:

- für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen
- eine Darstellung in eine andere übertragen
- Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten

Beispielsweise ist die Kompetenz, eine Darstellung in eine andere zu übertragen, zu beobachten, wenn Kinder im Elementarbereich ein Bild zur Zahl 5 („Fünferbild“) oder ein Bild von ihrer gebauten Eisenbahnstrecke malen, wenn Zweitklässler aus vier Rechengeschichten diejenige auswählen, welche zu 24:4 passt oder Viertklässler die symbolisch gegebene Aufgabe 337+529 am Rechenstrich lösen.

2.2.9 Gewichtung und Bedeutung der prozessbezogenen Kompetenzen im Elementar- und Primarbereich

Die prozessbezogenen Kompetenzen in der hier vorgestellten Differenzierung beschreiben Aspekte und Komponenten mathematischer Aktivität. Sie sind kaum in dem Sinne voneinander zu trennen, dass man eine ohne die anderen entwickeln könnte. So ist etwa ein Problemlösen kaum vorstellbar, ohne Darstellen und Argumentieren einzubeziehen. Dennoch lassen sich insbesondere für Kinder in der Kita, aber auch für Grundschulkinder gewisse Gewichtungen identifizieren.

- Das *Problemlösen* ist sicher die basale prozessbezogene Kompetenz, welche die Mathematik als solche charakterisiert. Hierbei ist ein großer Umfang möglicher Ansprüche in den gestellten Problemen zu sehen, etwa von dem Problem, Klötze durch passende Öffnungen des Deckels in einen Kasten zu stecken, bis hin zu dem Problem, eine Rechnung mit eigenen Strategien anzugehen. All dies gehört zum Problemlösen.
- Das *Darstellen* und das *Kommunizieren* sind Kompetenzen, die erst allmählich vom Kind entwickelt werden. Probleme im o. g. Sinn findet das Kind zumeist in gegebenen Darstellungen vor, etwa einem arrangierten Material oder in einem Bild, auch das Kommunizieren erfolgt zunächst vorwiegend mit gegebenen Strukturen. Erst im Laufe der Entwicklung ist zu erwarten und gegebenenfalls einzufordern, dass ein Kind eigene Darstellungen und darauf bezogene eigene Kommunikationsformen zu einem Problem und seiner Lösung entwickelt.
- Das *Argumentieren* äußert sich ebenfalls zunächst gebunden an gegebene Darstellungen, erst später in der Sprache. Aber bereits eine Problemlösung als solche kann ein Beleg für ein „inneres Argumentieren“ sich selbst gegenüber sein, welches das Kind entwickelt hat. Darüber hinaus ist das Argumentieren an die, z. B. entwicklungstypischen, Möglichkeiten gebunden, die ein Kind allgemein zum Darstellen und Kommunizieren besitzt. Erst mit zunehmender Entwicklung wird das Argumentieren zu einem interaktiven Prozess des argumentativen Austauschs mit anderen.

- Das *Modellieren* ist eine ebenso basale Kompetenz wie das Problemlösen. Es ist bei Kita- und Grundschulkindern allgemeiner zu sehen als die in weiterführenden Schulen übliche Kennzeichnung, „lebensweltliche Probleme mit Hilfe von Mathematik zu bewältigen“. Es ist in Kita und Grundschule bereits dann gegeben, wenn Kinder zwischen zunächst nicht verbundenen „subjektiven Erfahrungsbereichen“ Verbindungen herstellen und dabei zu erkennen geben, dass sie darin gemeinsame Strukturen sehen. Dieses zunehmende Vernetzen von Erfahrungsbereichen und das sich Beziehen darauf beim Lösen kleinerer, aber authentischer Probleme aus ihrem Lebenskreis ist der Kern dessen, was Modellieren ausmacht (vgl. Abschnitt 3.3).

In diesem Sinne ist eine hierarchisierende Bewertung der prozessbezogenen Kompetenzen mathematischer Bildung kaum möglich. Wohl aber bedürfen Kommunizieren, Darstellen und Argumentieren eines unterstützenden Bildungsangebotes in der lernenden Gemeinschaft in Kitas, Horten und Grundschulen, damit Kinder zunehmend Autonomie im Problemlösen und Modellieren gewinnen.

2.2.10 Messung

Zur Erhebung prozessbezogener Kompetenzen bei Kindern liegen für den Bereich der Grundschule diverse Instrumente vor: Für das Ende der Jahrgangsstufe 4 sind für den IQB-Ländervergleich im Rahmen der Gesamtstrategie zum Bildungsmonitoring Testaufgaben entwickelt worden, die auch die prozessbezogenen Kompetenzen ansprechen (Stanat, Pant, Böhme & Richter, 2012). Diese Aufgaben basieren auf einem Pool von Granzer et al. (2008), der auch Aufgaben aus dem 3. Schuljahr enthält. Die Aufgaben aus der TIMS-Studie (Selter et al., 2012) beziehen sich zwar auf eine Rahmenkonzeption, welche die prozessbezogenen Kompetenzen nicht explizit ausweist, enthalten aber Anforderungen für die Jahrgangsstufe 4, die diesen nahe kommen. Für das 3. Schuljahr liegen entsprechende Aufgaben im Kontext der Durchführung landesweiter Vergleichsarbeiten (abgekürzt VERA3) vor.

Diese Testinstrumente sind jedoch an die Verwendung der Schriftsprache gebunden, so dass einige Facetten wie z. B. das Argumentieren oder das Kommunizieren nur schwierig vollständig zu erfassen sind. Eine ergänzende vertiefte Erfassung prozessbezogener Kompetenzfacetten wird durch eher qualitativ orientierte Aufgabenstellungen, die auch mündliche Äußerungen zulassen, ermöglicht.

Ein methodisches Problem besteht dabei darin, dass einzelne prozessbezogene Kompetenzfacetten bisweilen empirisch nicht isoliert von anderen prozessbezogenen Kompetenzen zu erheben und zudem Qualitäts- und Beurteilungskriterien gerade bei offeneren Aufgabenstellungen nicht immer klar zu definieren sind. Ergänzend ist zudem anzumerken, dass Testaufgaben im Rahmen eines *large-scale assessment* aufgrund logistischer und methodischer Rahmenbedingungen nicht die gesamte Breite prozessbezogenen mathematischen Arbeitens abbilden können. (So müssen etwa die Antworten eindeutig klassifizierbar sein, oder die Befassung mit der Aufgabe darf nur eine vergleichsweise kurze Zeit in Anspruch nehmen.)

Ein vergleichbares Instrumentarium schriftlicher Testaufgaben, welches auch die prozessbezogenen Kompetenzen anspricht, liegt für jüngere Kinder naturgemäß nicht vor, weil schriftlich dargebotene, texthaltige Aufgaben Lesekompetenz voraussetzen. Hier sind ergänzende Instrumente zu entwickeln, die insbesondere Kita-Kindern eher die handelnde und die sprechende Artikulation ermöglichen. Anregungen hierzu bieten etwa die Verfahren bzw. Aufgabenstellungen von Rasch (2007; Problemlösen), Nührenbörger und Verboom (2011; Kommunizieren), Bezold (2009; Argumentieren), Maaß (2011; Modellieren) oder Kuhnke (2012; Darstellen), Peter-Koop, Wollring, Spindeler und Grüßing (2007; Problemlösen, Argumentieren und Darstellen bei Zahlen und Operationen) sowie Wollring, Peter-Koop, Haberzettl, Becker und Spindeler (2011; Problemlösen, Argumentieren und Darstellen bei Raum und Form). Ein gezielt für die Kita nutzbares Instrument ist das *ElementarMathematische BasisInterview – Kindergarten* von Peter-Koop und Grüßing (2011).

Insgesamt ist bei der Erfassung von Kompetenzen z. B. im Rahmen von Wirkungsstudien zur bedenken, dass die Erfassung von Lernfortschritten nur durch dafür geeignete Testverfahren möglich ist.

2.3 Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen

Meike Grüßing und Christiane Benz

Mathematisches Denken nimmt immer auf einen oder mehrere inhaltliche Aspekte Bezug. Die in Abschnitt 2.2 thematisierten prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen realisieren sich daher stets in Verknüpfung mit inhaltsbezogenen Aspekten mathematischer Kompetenzen. Mathematische Kompetenz im Elementar- und Primarbereich lässt sich durch eine große Breite von altersspezifischen inhaltlichen Anforderungen charakterisieren. Die Vielfalt der Inhalte mathematischer Bildung wird dabei durch mathematische Leitideen strukturiert, die für die verschiedenen Bildungsabschnitte in die Formulierung von länderübergreifenden Standards eingeflossen sind.

Mit dem Ziel der Herstellung von Kontinuität und Kohärenz orientiert sich auch die Formulierung der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen in dieser

Expertise an den KMK-Bildungsstandards für den Primarbereich (KMK, 2005), für den Mittleren Schulabschluss (KMK, 2004) und für die Allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012). Die Orientierung an der Entwicklung von Kompetenzen in den verschiedenen Leitideen anstelle eines Katalogs an einzelnen Aktivitäten ist insbesondere auch für den Elementarbereich von Bedeutung. Eine entwicklungsangemessene und anschlussfähige Auseinandersetzung mit diesen Ideen über die verschiedenen Altersstufen hinweg ermöglicht es, nach dem Spiralprinzip mathematische Kompetenz immer wieder zu erweitern.

Während die Bildungspläne für den Elementarbereich in den verschiedenen Bundesländern recht unterschiedlich gestaltet sind und nur zum Teil diese an Leitideen orientierte Strukturierung aufweisen, lässt sich auf internationaler Ebene in der Formulierung von Standards über die gesamte Bildungskette eine starke Kohärenz feststellen (NCTM, 2000; Clements, Sarama & DiBiase, 2004).

Darüber hinaus entspricht diese Strukturierung auch den Rahmenkonzeptionen zur Erfassung mathematischer Kompetenz im Rahmen groß angelegter internationaler und nationaler Studien. Die Rahmenkonzeption für die Erfassung mathematischer Kompetenz über die gesamte Lebensspanne im Rahmen des nationalen Bildungspanels (Ehmke et al., 2009) nimmt beispielsweise ähnlich wie die PISA-Rahmenkonzeption (OECD, 2003) eine Kompetenzstruktur mit vier Inhaltsbereichen an. Diese wird jedoch für das Kita- und Grundschulalter weiter ausdifferenziert, so dass sie im Wesentlichen den auch in den länderübergreifenden Bildungsstandards formulierten fünf Inhaltsbereichen entspricht (vgl. Abbildung 4):

- Zahlen und Operationen
- Raum und Form
- Muster und Strukturen
- Größen und Messen
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

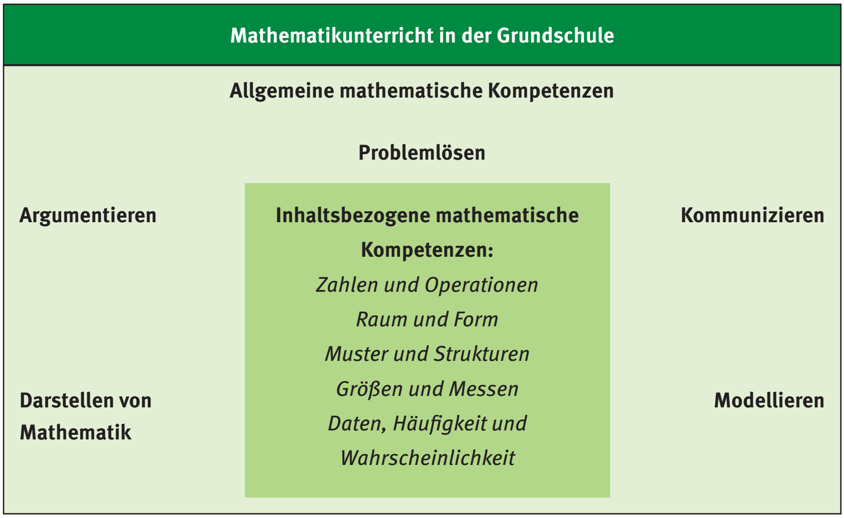


Abbildung 4. *Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen (vgl. KMK, 2005)*

Die Konkretisierung der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen ist an der Entwicklung mathematischer Kompetenz von frühen mathematischen Spiel- und Alltagserfahrungen bis zum systematischen Aufbau mathematischer Kompetenz im Grundschulalter orientiert.

Innerhalb dieser Altersspanne von 3 bis 10 Jahren lassen sich weitere Abschnitte beschreiben: Einen Einschnitt stellt der Übergang vom Elementar- in den Primarbereich dar. Im Mathematikunterricht werden ab dem 1. Schuljahr die frühen mathematischen (Alltags-)Erfahrungen aufgegriffen und systematisch weiterentwickelt. Bis zum Ende der Grundschulzeit werden diese mathematischen Basiskompetenzen vertieft und erweitert. Schülerinnen und Schüler sollen tragfähige mathematische Kompetenzen aufgebaut haben, die eine Basis für das Mathematiklernen in den weiterführenden Schulen sowie für die Auseinandersetzung mit mathematischen Anforderungen des alltäglichen Lebens in jedem Lebensalter bilden.

Zur Beschreibung mathematischer Kompetenz am Ende des Primarbereichs liegen verschiedene empirische Studien vor. Dazu gehören neben den vergleichenden Schulleistungsstudien TIMS (z. B. Mullis, Martin, Gonzalez & Chrostowski, 2004; Walther, Selter, Bonsen & Bos, 2008; Selter et al., 2012) und der Erweiterung der Internationalen Grundschul-Lese-Untersuchung (IGLU/E) (z. B. Lankes & Walther, 2001; Walther, Geiser, Langeheine & Lobemeier, 2003, 2004) auch Vorschläge für theoriebasierte und empirisch validierte Modelle mathematischer Kompetenz im Grundschulalter (Reiss, 2004; Reiss, Heinze & Pekrun, 2007; Ufer, Reiss & Heinze, 2009; Reiss & Winkelmann, 2008, 2009).

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen bis zum Schulbeginn stand in den letzten Jahren verstärkt im Fokus der entwicklungspsychologischen wie auch der mathematikdidaktischen Forschung (z. B. Krajewski, Grüßing & Peter-Koop 2009). Während im Bereich „Zahlen und Operationen" umfangreiche empirische Befunde sowie Modelle der Entwicklung mathematischer Kompetenz in diesem Inhaltsbereich vorliegen (z. B. Fritz & Ricken, 2009; Krajewski & Ennemoser, 2013), besteht insbesondere in den Bereichen „Muster und Strukturen" und „Daten und Wahrscheinlichkeit" auch international noch verstärkter Forschungsbedarf (vgl. Clements & Sarama, 2007).

Die Bedeutung der frühen mathematischen Kompetenz in diesem Bereich für die spätere Schulleistung konnte in verschiedenen Längsschnittstudien belegt werden (z. B. Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004; Krajewski & Schneider, 2006, 2009; Stevenson & Stigler, 1992; Young-Loveridge, Peters & Carr, 1998; Dornheim, 2008; Schneider, 2008; Stern, 2003).

Die nachfolgende Konkretisierung der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen in den fünf genannten Bereichen soll in Verbindung mit der Darstellung der prozessbezogenen Kompetenzen in Abschnitt 2.2 daher zu einer umfassenden Sicht auf das Konstrukt „Mathematische Kompetenz" und zu einer Wahrnehmung von mathematischer Kompetenz in all seinen inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzfacetten schon im Elementarbereich beitragen.

Für jeden Inhaltsbereich werden für das *Ende des 4. Schuljahrs* Kompetenzerwartungen formuliert, die den länderübergreifenden Bildungsstandards entsprechen. Diese Kompetenzen werden bereits im Elementarbereich angebahnt. Jedoch stellt der Elementarbereich einen eigenen Bildungsraum dar, in dem Spielsituationen den Ausgangspunkt des Lernens bilden. Für den *Übergang vom Elementar- in den Primarbereich* werden Kompetenzen beschrieben, die sich zum Teil schon in Längsschnittstudien als bedeutend für den weiteren Kompetenzerwerb herausgestellt haben und die daher von den Kindern im Verlauf des Übergangs vom Elementar- in den Primarbereich erworben werden sollten. Damit haben die Kompetenzerwartungen für den Übergang vom Elementar- in den Primarbereich keinen normativen Charakter, sondern beschreiben die in dieser Phase bei entsprechenden mathematischen Bildungsanregungen erwartbaren Kompetenzen von Kindern.

Grundlage für die Formulierung der Kompetenzerwartungen sind Überblicksdarstellungen in aktuellen Publikationen zur frühen mathematischen Bildung (z. B. Lorenz, 2012; im Bereich „Zahlen und Operationen" insbesondere auch Schipper, 2009, S. 77).

Zukünftige Angebote der Stiftung „Haus der kleinen Forscher" sollten dazu beitragen, die Kinder in der Entwicklung in Bezug auf die im Folgenden formulierten Kompetenzerwartungen zu unterstützen. In Abschnitt 5.1 werden im Anschluss Hinweise zur Priorisierung der einzelnen Kompetenzfacetten formuliert.

2.3.1 Zahlen und Operationen

Der Bereich „Zahlen und Operationen" umfasst alle Arten von Quantifizierungen. Im Elementarbereich steht vor allem die Entwicklung des Zahlbegriffs im Vordergrund. Im Primarbereich kommt darüber hinaus auch dem Verständnis der Rechenoperationen sowie der Fähigkeit, effiziente Rechenstrategien in Abhängigkeit von den jeweiligen Aufgabencharakteristika auswählen und anwenden zu können, zentrale Bedeutung zu.

Sowohl zu einzelnen Aspekten der Zahlbegriffsentwicklung als auch zu den Rechenoperationen liegen zahlreiche Forschungsergebnisse vor. Darüber hinaus liegen auch erste empirisch evaluierte Kompetenzentwicklungsmodelle vor. Krajewski (2003) beschreibt ein auf vorliegenden Modellen (z. B. Resnick, 1983, 1989) aufbauendes Entwicklungsmodell früher mathematischer Kompetenzen, das verschiedene Ebenen umfasst.

Während auf der „Ebene der numerischen Basisfertigkeiten" Fähigkeiten im Umgang mit Mengen und Zahlen noch isoliert voneinander stehen, entwickelt sich auf der zweiten Kompetenzebene eine „Mengenbewusstheit von Zahlen". Auf der dritten Ebene erhält schließlich auch das Verständnis für Mengenrelationen einen Zahlbezug. Es entwickelt sich ein „Verständnis für Beziehungen zwischen Zahlen". Dieses Entwicklungsmodell modifiziert Krajewski (2013) zu einem „Entwicklungsmodell zur Zahlen-Größen-Verknüpfung (ZGV)". Anstelle des Begriffs „Menge" erfolgt eine begriffliche Erweiterung dahingehend, dass auch Größen wie Flächen, Volumen, Zeit oder Gewichte eingeschlossen werden. Bei der Verwendung des Begriffs „Größen" werden jedoch nicht alle Aspekte eines mathematischen Größenbereichs berücksichtigt.

Ein ähnliches Entwicklungsmodell, das sechs Entwicklungsstufen umfasst, beschreiben Fritz und Ricken (2009; vgl. Fritz, Ricken & Gerlach, 2007). Dieses Modell wurde bereits empirisch bestätigt (Ricken, Fritz & Balzer, 2013; Fritz, Ehlert & Balzer, 2013).

„Zahlen und Operationen" in der Phase des Übergangs vom Elementar- in den Primarbereich

Im Bereich „Zahlen und Operationen" lassen sich die folgenden Teilbereiche mit entsprechenden Kompetenzerwartungen für die Phase des Übergangs vom Elementar- in den Primarbereich als zentral für die weitere Entwicklung in diesem Inhaltsbereich herausstellen. Diese werden daher als Zielbereiche der frühen mathematischen Bildung empfohlen:

Zahlaspekte:

- Zahlen in unterschiedlichen Funktionen begegnen und verschiedene Zahlaspekte kennenlernen

Verbales Zählen:

- verbal zählen
- rückwärts zählen

Objekte zählen und Zahlen darstellen:

- Anzahlen durch Abzählen auffassen
- eine Menge entsprechend eines Zahlworts darstellen

Simultanauffassung/Quasisimultanauffassung:

- Simultanauffassung/Subitizing bei Mengen bis zu 4 oder 5 Objekten
- strukturierte Anzahlerfassung (z. B. bei Würfelbildern oder Dominosteinen)

Vergleichen:

- Mengen durch Eins-zu-eins-Zuordnung oder durch Abzählen nach ihrer Mächtigkeit vergleichen
- Zahlworte und Zahlsymbole der Größe nach vergleichen

Erstes Rechnen:

- in Situationen, die Anforderungen zum Addieren und Subtrahieren enthalten, mit Material und zählend – insbesondere durch „Alleszählen“ – Probleme lösen
- Mengen halbieren, Mengen verdoppeln

Teile-Ganzes-Verständnis:

- anhand von konkreten Materialien Mengen zerlegen und zusammensetzen
- bestimmen können, wie viele Objekte verdeckt sind, wenn nur ein Teil einer bekannten Menge zu sehen ist (gegebenenfalls unterstützt durch Handlungen mit Material)

„Zahlen und Operationen“ am Ende von Klasse 4
Die Kompetenzerwartungen der KMK-Bildungsstandards für das Ende der Primarstufe konkretisieren die Anforderungen im Bereich „Zahlen und Operationen“ wie folgt:

- Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen
- Rechenoperationen verstehen und beherrschen
- in Kontexten rechnen

Diese Anforderungen stellen Zielbereiche der mathematischen Bildung im Grundschulalter dar. Im Einzelnen sollen Kinder am Ende des 4. Schuljahres sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren und Zahlen auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen können. Eine bedeutende Teilkompetenz stellt das Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems dar.

In Bezug auf die Rechenoperationen sollen die Kinder zum einen ein auf geeigneten Grundvorstellungen aufbauendes Operationsverständnis entwickelt haben. Einen weiteren Schwerpunkt stellt das Verstehen und Anwenden von mündlichen, halbschriftlichen und schriftlichen Rechenstrategien dar. Dazu sollten die Kinder die Grundaufgaben des kleinen Einspluseins sowie des kleinen Einmaleins gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen ableiten und diese Kenntnisse für die Lösung von Aufgaben in größeren Zahlenräumen nutzen. Die Kinder sollen verschiedene Rechenstrategien verstehen, vergleichen und bewerten und diese bei geeigneten Aufgaben flexibel und adaptiv einsetzen können. Dazu ist auch das Erkennen, Erklären und Nutzen von Rechengesetzen von Bedeutung.

Die beschriebenen Fähigkeiten in Bezug auf Zahlen und Operationen sollen Kinder schließlich in Sachkontexten anwenden können.

2.3.2 Raum und Form

Der Inhaltsbereich „Raum und Form“ thematisiert die Erfassung des Raumes, den Umgang mit zwei- und dreidimensionalen Formen sowie mit allen Arten räumlicher Konfigurationen in der Ebene und im Raum. Dazu gehört insbesondere auch die Entwicklung von „Raumvorstellung“ bzw. „Räumlichen Fähigkeiten“, die den Aufbau von mentalen Vorstellungsbildern ebener und räumlicher Objekte sowie das Operieren mit diesen in der Vorstellung umfassen. Der Entwicklung räumlicher

Fähigkeiten wird eine besondere Bedeutung beigemessen, weil diese auch als Grundlage für die Repräsentation von mathematischen Konzepten in anderen Inhaltsbereichen und das mentale Operieren mit ihnen diskutiert werden.

Die Forschungserkenntnisse über das geometrische und räumliche Denken von Kindern sind weniger differenziert als im Bereich „Zahlen und Operationen“. Einen Überblick über den internationalen Forschungsstand geben Clements und Sarama (2007) sowie Battista (2007). Anknüpfend an das Stufenmodell von van Hiele (1986, 1999) liegen beispielsweise neuere Studien zur Entwicklung geometrischen Denkens von einer ganzheitlich-visuellen Formwahrnehmung über die zunehmende Betrachtung von Eigenschaften bis zum deduktiven Schließen vor. Dabei ist zu bedenken, dass hier nicht eine allgemeine Zuordnung von geometrischen Kompetenzen der Kinder zu verschiedenen Stufen geschehen kann. Die Kinder können sich bei unterschiedlichen Begriffen in verschiedenen Entwicklungsstadien befinden (vgl. zusammenfassend Battista, 2007).

„Raum und Form“ in der Phase des Übergangs vom Elementar- in den Primarbereich

Für Kinder im Übergang vom Elementarbereich in den Primarbereich stellt zum einen die Entwicklung räumlicher Fähigkeiten ein wesentliches Ziel früher mathematischer Bildung dar. Zum anderen sollen Kinder in diesem Alter grundlegende Kompetenzen im Umgang mit zwei- und dreidimensionalen Formen erworben haben und erste Erfahrungen mit geometrischen Abbildungen machen.

Eine Voraussetzung für die Kompetenzentwicklung im Bereich „Raum und Form“ stellt die Entwicklung der visuellen Wahrnehmung mit den Bereichen „Auge-Hand-Koordination“, „Figur-Grund-Wahrnehmung“, „Formkonstanz“, „Lage im Raum“ und „Räumliche Beziehungen“ dar. Beispielsweise ist die Formkonstanz, also die Fähigkeit, gleich aussehende Formen unabhängig von ihrer Lage im Raum zu erkennen und sie nach ihren Eigenschaften zu ordnen, eine wesentliche Grundlage für den Erwerb von Wissen über geometrische Formen.

Im Einzelnen sollen Kinder bis zum Übergang vom Elementar- in den Primarbereich Kompetenzen in den folgenden Teilbereichen erwerben:

- Entwicklung von räumlichen Fähigkeiten
  - Räumliche Orientierung
    - Orientierung im Raum
    - Perspektivübernahme
    - Sprache, Begriffe der Raumlage
  - Räumliche Visualisierung
    - Mentales visuelles Operieren

Kinder sollen die Beziehungen zwischen Objekten sowie die Lage von Objekten in Bezug auf ihren eigenen Körper erkennen und beschreiben können. Sie können einfache Bauwerke nach einer Abbildung oder nach Beschreibung bauen. Sie können sich ein Objekt oder eine Konfiguration von Objekten aus einer veränderten Perspektive vorstellen. Darüber hinaus stellen sie sich Bewegungen und Objekte nach einer Veränderung vor („Welche Figur ergibt sich, wenn ich ein Dreieck auf das Quadrat lege?“).

- Geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen
  - Zweidimensionale Formen erkennen
    - Dreidimensionale Formen erkennen
    - Formen zerlegen und zusammensetzen

Kinder sollen einfache zwei- und dreidimensionale Formen in unterschiedlicher Größe und Orientierung in ihrer Umwelt erkennen und benennen, sie nach ihren Eigenschaften sortieren und beschreiben. Sie setzen Formen zu Bildern und zu neuen Formen zusammen und berücksichtigen dabei in ganzheitlicher Weise Seitenlängen und Winkel.

- Einfache geometrische Abbildungen erkennen und darstellen

- Kinder sollen symmetrische Figuren erkennen und achsensymmetrische Figuren (z. B. mit Formenplättchen oder durch gefaltete Klecksbilder) und einfache translationssymmetrische Muster (z. B. aus Formenplättchen) herstellen können.

Bei der Unterstützung der Kinder, diese Ziele zu erreichen, sollte berücksichtigt werden, dass das Denken der Kinder in Bezug auf Formen und Figuren dabei zunächst noch stark auf die äußere Erscheinung bezogen ist („Das ist ein Dreieck, weil es wie ein Dreieck aussieht.“). Zunehmend werden jedoch die Eigenschaften von Figuren (z. B. gleichlange Seiten und Winkel) und zum Ende des Grundschulalters auch Beziehungen zwischen Eigenschaften einbezogen.

„Raum und Form“ am Ende von Klasse 4

Die Kompetenzerwartungen für das Ende von Klasse 4 werden in den KMK-Bildungsstandards (KMK, 2005) in den folgenden Teilbereichen konkretisiert:

- Sich im Raum orientieren

- Geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen

- Einfache geometrische Abbildungen erkennen und darstellen
- Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen

Die genannten Bereiche sind wesentliche Zielfacetten der mathematischen Bildung im Grundschulalter. Als zentrales Ziel im Bereich „Raum" lässt sich die Entwicklung von räumlichem Vorstellungsvermögen beschreiben. Dazu gehört beispielsweise das Erkennen von räumlichen Beziehungen sowie das Beschreiben und Nutzen räumlicher Beziehungen bei der Darstellung von Wegen, Plänen und Ansichten. Kinder sollen darüber hinaus zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken zueinander in Beziehung setzen, z. B. durch das Bauen nach Vorlage, aber auch durch das Herstellen von Bauplänen.

Einen weiteren wichtigen Bereich bilden Kompetenzen in Bezug auf geometrische Figuren. Kinder sollen sowohl Körper als auch ebene Figuren in der Umwelt erkennen, sie nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe (z. B. Dreieck, Quadrat, Würfel, Seite, Ecke, Kante) zuordnen. Sie sollen Modelle dieser Figuren herstellen und analysieren, z. B. durch Bauen, Legen, Zerlegen oder Zusammenfügen. Außerdem sollen sie Zeichnungen anfertigen.

Darüber hinaus sollen Kinder am Ende der Primarstufe mit einfachen geometrischen Abbildungen (Ähnlichkeits- und Kongruenzabbildungen) umgehen. Sie sollen zueinander ähnliche Figuren identifizieren und ebene Figuren z. B. durch Zeichnungen mit Hilfe von Gitternetzen verkleinern und vergrößern. Außerdem sollen sie die Eigenschaften der Symmetrie kennen und nutzen. Sie sollen achsensymmetrische Figuren erkennen und herstellen und translationssymmetrische Muster wie Bandornamente fortsetzen und selbst entwickeln.

Der letzte Teilbereich betrifft den Umgang mit Flächen- und Rauminhalten. Kinder können den Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen. Sie können Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen und Auslegen mit Einheitsflächen vergleichen und messen. Sie verfügen über erste Erfahrungen beim Vergleichen und Messen von Rauminhalten mit Hilfe von Einheitswürfeln.

2.3.3 Muster und Strukturen

Dem Inhaltsbereich „Muster und Strukturen" kommt eine besondere Bedeutung im Kontext der fünf Inhaltsbereiche zu, da das Denken in Mustern und Strukturen auch als übergreifende Kategorie gesehen werden kann (vgl. Kapitel 1). Wird Mathematik als „Wissenschaft von den Mustern" angesehen, spielt das Umgehen mit Mustern und Strukturen in allen Inhaltsbereichen eine bedeutende, den mathematischen Erkenntnisprozess charakterisierende Rolle. In Anlehnung an die Struktur der Bildungsstandards wird der Bereich „Muster und Strukturen" an dieser Stelle darüber hinaus auch als eigener Inhaltsbereich dargestellt.

Ein Muster wird im Kontext der Mathematik gesehen als eine Beziehung zwischen Zahlen, Formen, Funktionen etc., die in einem Bereich regelmäßig auftritt und in diesem Bereich allgemeine Gültigkeit besitzt (Devlin, 1997; Lüken, 2012). Eine Struktur lässt sich als ein Beziehungsgefüge beschreiben.

Während die KMK-Bildungsstandards über die verschiedenen Schulstufen im Wesentlichen in der Bezeichnung der Teilbereiche kohärent bleiben, findet sich „Muster und Strukturen" in dieser Form nur in den Standards für die Primarstufe (KMK, 2005). In der Sekundarstufe I wird der Bereich „Funktionaler Zusammenhang" beschrieben, der einerseits auf wesentlichen Basiskompetenzen des Bereichs „Muster und Strukturen" aufbaut, andererseits jedoch den Schwerpunkt stärker auf funktionale Beziehungen setzt. In Rahmenkonzeptionen für empirische Studien (vgl. z. B. Ehmke et al., 2009) wird dieser Bereich auch als „Beziehungen und Veränderung" dargestellt.

Zusammenfassend umfasst der Inhaltsbereich, der hier aufgrund der angestrebten Kohärenz mit den Standards für die Primarstufe als „Muster und Strukturen" bezeichnet wird,

- das Verstehen und Nutzen von Beziehungen,
- das Analysieren und Darstellen von Zusammenhängen sowie
- das Analysieren und Beschreiben von Veränderung im Vordergrund.

Einen aktuellen Überblick über den Forschungsstand zum Bereich „Muster und Strukturen" im Übergang vom Elementar- in den Primarbereich gibt Lüken (2012). Insbesondere werden Studien zu Kompetenzen im Umgang mit Musterfolgen (Wiederholung verschiedener Elemente nach einer bestimmten Regel) sowie zur Strukturierungsfähigkeit (Erkennen von Strukturen z. B. in Mengendarstellungen) dargestellt (z. B. Mulligan & Mitchelmore, 2013).

Die Strukturierungsfähigkeit wird auch im Zusammenhang mit der Zahlbegriffsentwicklung betrachtet (z. B. van Nes, 2009). Steinweg (2003, 2006a) weist auf den Zusammenhang von Musterfolgen, Zahlenfolgen sowie räumlichen Strukturen und algebraischem Denken hin. In diesem Bereich besteht weiterer empirischer Forschungsbedarf.

„Muster und Strukturen“ in der Phase des Übergangs vom Elementar- in den Primarbereich

Im Übergang vom Elementar- in den Primarbereich sollen die Kinder als Ziel mathematischer Bildung Kompetenzen in den folgenden Bereichen erwerben:

- Strukturierte Zahldarstellungen erkennen und nutzen (z. B. in Eierkartons oder im Dominospiel)
- Grundkompetenzen wie das Klassifizieren nutzen, um Muster und Musterfolgen zu erkennen und fortzusetzen
- Dabei gehen Kinder vor allem mit wiederholenden Musterfolgen (z. B. Kreis, Dreieck, Kreis, Dreieck …) um. Sie machen jedoch auch erste Erfahrungen mit dynamischen, wachsenden Musterfolgen (z. B. Kreis, Dreieck, Dreieck, Kreis, Kreis, Kreis …). Im Einzelnen umfasst dies (vgl. Benz, Peter-Koop & Grüßing, 2015):
  - Muster nach einer Vorlage nachlegen
  - Muster erkennen und Muster fortsetzen
  - Muster beschreiben (sehr konkret oder bereits generalisierend)
  - Muster erfinden
  - Muster nachlegen aus dem Gedächtnis (dazu ist das Erkennen der Struktur notwendig)
  - Muster reparieren (beim Finden von Fehlern müssen sowohl die Eigenschaften der einzelnen Objekte als auch die einzelnen sich wiederholenden Einheiten und die Gesamtstruktur des Musters erkannt werden)
  - Muster übersetzen (die Übersetzung einer sich wiederholenden Musterfolge von einer Darstellungsform in eine andere, z. B. „Dreieck, Kreis, Dreieck, Kreis …“ in „rot, blau, rot, blau …“ oder in eine Folge von Tönen wie „ding, dong, ding, dong, …“ ändert nicht die strukturelle Beschaffenheit der Musterfolge)
- Zusammenhänge zwischen der Veränderung einer Variablen und der Veränderung einer weiteren abhängigen Variablen erkennen und beschreiben, z. B. einfache Proportionalitäten (weiterer Weg, mehr Schritte) und Antiproportionalitäten (mehr Kinder, weniger Spielkarten für jedes Kind)

„Muster und Strukturen" am Ende von Klasse 4

Der Bereich „Muster und Strukturen" wird in den KMK-Bildungsstandards für das Ende der Primarstufe (KMK, 2005) in zwei Teilbereichen beschrieben, die Ziele mathematischer Bildung im Grundschulalter darstellen:

- Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen
- Funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen

Im Einzelnen sollen Kinder am Ende des 4. Schuljahrs Gesetzmäßigkeiten sowohl in arithmetischen Mustern (wie z. B. in Zahlenfolgen oder in strukturierten Aufgabenfolgen) als auch in geometrischen Mustern erkennen, beschreiben und fortsetzen. Darüber hinaus sollen sie arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln und beschreiben und Muster systematisch verändern.

Der zweite große Teilbereich umfasst den Umgang mit funktionalen Beziehungen. Kinder sollen funktionale Beziehungen, z. B. in Sachsituationen, erkennen, sprachlich beschreiben und entsprechende Aufgaben lösen (z. B. zum Zusammenhang zwischen Menge und Preis). Zum Darstellen funktionaler Zusammenhänge sollen Kinder Tabellen nutzen können. Außerdem sollen sie einfache Sachaufgaben zur Proportionalität (z. B. zu Wegstrecke und Anzahl der benötigten Schritte) lösen können.

2.3.4 Größen und Messen

Im Inhaltsbereich „Größen und Messen" stellen das Wissen über die Größenbereiche Längen, Flächen- und Rauminhalte, Gewichte, Geldwerte und Zeitspannen sowie die Fähigkeiten in Bezug auf das Messen und Schätzen von Größen und das Rechnen mit ihnen zentrale Ziele in der Entwicklung mathematischer Kompetenzen bis zum Ende der Primarstufe dar.

Die zentrale Idee des Messens besteht darin, einen Gegenstand, das zu Messende, durch ein Maß ganz oder teilweise zu charakterisieren, und zwar so, dass jemand anders an einem anderen Ort einen entsprechenden Gegenstand anhand dieses Maßes identifizieren oder herstellen kann (vgl. Abschnitt 3.4). Clements und Sarama (2007) geben einen Überblick über die internationale Forschungsliteratur zur Entwicklung von Größen- und Messvorstellungen. Anhand des Größenbereichs „Längen" beschreiben sie grundlegende Einsichten in das Messen. Diese gehen von einem grundlegenden Verständnis des Attributes „Länge" aus und greifen die bereits in ähnlicher Form von Piaget (1967) beschriebenen Aspekte der Einsicht in die Längeninvarianz (die Länge ist unabhängig von der Lage oder Ausrichtung im Raum), die Transitivität (Wissen über die Länge eines Objektes kann als Referenzmaß auf andere übertragen werden) und die Möglichkeit des Aufteilens in gleichlange Teile auf. Von Bedeutung für den Messprozess ist schließlich die Einsicht, dass die Länge eines Objektes durch die Wiederholung des kleineren Objekts bzw. der Einheit gemessen werden kann. Die Akkumulation der Abstände ergibt schließlich die Gesamtlänge. Von Bedeutung sind darüber hinaus die Einsicht in den Nullpunkt der Messung sowie die Beziehung zwischen Maßzahl und Größe der Einheit. Clements und Sarama (2007) betonen dabei, dass über die Reihenfolge des Erwerbs dieser Einsichten weiterhin diskutiert werde.

Battista (2006) unterscheidet zwei qualitativ unterschiedliche Denkstrukturen, die sich parallel entwickeln. Neben dem „Measurement Reasoning“, das das Messen von Größen mit Maßeinheiten beschreibt, entwickelt sich das „Nonmeasurement Reasoning“, das vor allem auf holistischen Beurteilungen, dem direkten Vergleichen von Objekten sowie dem indirekten Vergleichen mit Hilfe eines dritten Objektes beruht. Viele Kinder entwickeln zunächst Strategien zum Messen, die dieser zweiten, nicht-numerischen Denkweise entsprechen. Diese entwickeln sich jedoch parallel zu den numerischen Strategien weiter. Die Herausforderung besteht schließlich in der Integration beider Denkstrukturen (vgl. auch Benz et al., 2015).

Zusammenfassend lassen sich folgende Aspekte der Entwicklung von Größenkonzepten und eines Verständnisses des Messens beschreiben (vgl. auch Ausprägungsgrade der Entwicklung im Elementarmathematischen Basisinterview Größen und Messen Raum und Form in Wollring et al., 2011):

- Einblicke in das Konzept der jeweiligen Größe, beispielsweise in das Attribut „Länge“
- Entwicklung einer passenden Terminologie
- Direktes Vergleichen von Größen
- Indirektes Vergleichen
- Standardisierte Maßeinheiten und konventionelle Messgeräte kennen
- Einsicht in den Prozess des Messens
- Verfügen über Stützpunktvorstellungen und Anwenden von Wissen über Größen in Sachkontexten

Bis zum Ende der Primarstufe sollen die Kinder über ein integriertes Größenkonzept und Einsicht in den Messprozess verfügen.

„Größen und Messen" in der Phase des Übergangs vom Elementar- in den Primarbereich

Die Formulierung von Kompetenzerwartungen für den Übergang vom Elementar- in den Primarbereich wird dadurch erschwert, dass die Reihenfolge des Erwerbs von Einsichten in Messprozesse und das Verständnis von Größen in der internationalen Forschung weiterhin diskutiert wird.

Es ist davon auszugehen, dass sich „Nonmeasurement Reasoning" und „Measurement Reasoning" parallel entwickeln (Battista, 2006), so dass Kinder neben Erfahrungen mit holistischen Größenvergleichen auch erste Erfahrungen mit dem Gebrauch von standardisierten Maßeinheiten und konventionellen Messinstrumenten machen können, ohne dass dabei zwingend schon Einsicht in die Notwendigkeit von standardisierten Maßeinheiten vorhanden sein muss. Kinder kennen beispielsweise erste Maßeinheiten wie Meter oder Kilogramm. Diese werden jedoch im Elementarbereich noch nicht genauer thematisiert.

Kinder machen bis zum Übergang in die Primarstufe erste Erfahrungen in allen Größenbereichen, die auch in der Primarstufe eine Rolle spielen. Die Größenbereiche unterscheiden sich allerdings in ihrer Zugänglichkeit für Kinder voneinander. Es können daher keine einheitlichen Kompetenzerwartungen über die Größenbereiche hinweg formuliert werden.

Weitgehender Konsens besteht jedoch darin, dass der Erwerb einer geeigneten größenbezogenen Terminologie eine bedeutende Grundlage für das Verständnis von Größen darstellt. Dabei sind sowohl beschreibende Begriffe (z. B. groß, klein, lang, kurz, schwer, leicht) als auch vergleichende Begriffe (z. B. länger, kürzer, dicker, dünner, schwerer, leichter) von Bedeutung. Um Objekte der Größe nach zu ordnen, spielen auch Superlative eine Rolle (z. B. schwerste, leichteste, kürzeste, längste) (vgl. Montague-Smith, 2002).

Konkret wird empfohlen, dass Kinder bis zum Anfang des Grundschulalters folgende mathematische Grunderfahrungen im Bereich „Größen und Messen" machen, die für die weitere Kompetenzentwicklung als relevant erachtet werden:

- Geldwerte: Kinder machen beim Spielen in einem Kaufladen erste Erfahrungen mit Geld. Sie erproben das Bezahlen und das Herausgeben von Wechselgeld. Dabei steht jedoch nicht unbedingt der Umgang mit Geld als Größenbereich im Vordergrund. Insbesondere da bei Geldwerten der Geldwert und die Anzahl von Münzen oder Scheinen nicht unbedingt übereinstimmen, ist der Erwerb von Größenvorstellungen im Größenbereich Geld für Kinder schwierig.
- Zeitspannen: Kinder verwenden erste Zeitangaben. Allerdings stellt auch der Größenbereich „Zeitspannen" einen eher schwierigen Größenbereich dar. Ein direkter Vergleich von Zeitspannen ist zunächst nicht einfach mög-

lich. Auch das Messen von Zeit mit standardisierten Messinstrumenten stellt eine Schwierigkeit dar, da dieser Größenbereich vom Zehnersystem abweicht (z. B. 12 Monate, 7 Tage, 24 Stunden, 60 Minuten).

- Gewichte: Im Größenbereich „Gewichte" machen Kinder erste Erfahrungen mit qualitativen Vergleichen (welcher Gegenstand ist leichter oder schwerer), z. B. auf der Wippe oder mit Hilfe einer Kleiderbügelwaage oder einer Balkenwaage beim Spielen im Kaufladen.

- Längen: Der Größenbereich „Längen" ist am besten zugänglich, weil in diesem Bereich ein direkter Größenvergleich (z. B. zwischen den Körperlängen zweier Kinder) leicht möglich und der Wahrnehmung der Kinder besonders gut zugänglich ist. Kinder entwickeln eine längenbezogene Terminologie, führen direkte und indirekte Vergleiche von Längen durch und können Gegenstände der Länge ordnen (Seriation). Sie machen erste Erfahrungen beim Messen von Längen mit Hilfe von nicht-standardisierten Maßeinheiten wie beispielsweise körpereigenen Maßen (Schritte, Handspannen, Fußlängen) oder einer Schnur. Außerdem machen sie erste Erfahrungen mit standardisierten Messinstrumenten, z. B. mit einem Lineal oder einem Maßband.

- Flächeninhalte und Volumina: Bis zum Übergang in die Primarstufe entwickeln die Kinder die Terminologie zum Beschreiben und Vergleichen von Flächeninhalten und Volumina und sammeln erste Handlungserfahrungen im Umgang mit diesen Größen.

„Größen und Messen" am Ende von Klasse 4

Zum Inhaltsbereich „Größen und Messen" werden in den KMK-Bildungsstandards (KMK, 2005) Kompetenzerwartungen in den folgenden Bereichen beschrieben, die als Zielfacetten mathematischer Bildung im Grundschulalter gelten können:

- Größenvorstellungen besitzen
- mit Größen in Sachsituationen umgehen

Der erstgenannte Teilbereich umfasst sowohl die Kenntnis von Standardeinheiten aus den Bereichen Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Gewichte, Flächen- und Rauminhalte als auch die Kenntnis von im Alltag bedeutsamen Repräsentanten für Standardeinheiten und somit über das Verfügen von Stützpunktvorstellungen. Kinder können Größen vergleichen, mit geeigneten standardisierten Messinstrumenten messen und sie können Größen von alltäglichen Objekten als Bezugsgröße beim Schätzen verwenden. Im Alltag gebräuchliche Größenangaben können in unterschiedlichen Schreibweisen dargestellt werden. Dabei spielen auch im

Alltag gebräuchlich Bruchzahlen eine Rolle.

Darüber hinaus sollen Kinder mit Größen in Sachsituationen umgehen können. Dies umfasst das sachgerechte Messen mit unterschiedlichen Messinstrumenten, das Heranziehen von Bezugsgrößen aus der Erfahrungswelt und das Rechnen mit Näherungswerten aufgrund von Schätzungen sowie allgemein das Lösen von Sachaufgaben mit Größen.

2.3.5 Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Der Inhaltsbereich „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit" thematisiert alle Arten von Phänomenen und Situationen, die statistische Daten beinhalten und bei denen der Zufall eine Rolle spielt.

Der erste Teilbereich Daten und Häufigkeit beinhaltet dabei sowohl das Sammeln, das Erfassen und Darstellen von Daten als auch das Umgehen mit verschiedenen Darstellungen von Daten, z. B. in Strichlisten, Tabellen und Diagrammen.

Beim zweiten Teilbereich, der Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten, spielt der Umgang mit Häufigkeiten günstiger und möglicher Ereignisse eine Rolle. Dabei müssen häufig kombinatorische Fragestellungen gelöst werden (Schipper, 2009).

Clements und Sarama (2009) stellen fest, dass insgesamt wenig empirische Untersuchungen und Ergebnisse über die Denkwege und Denkentwicklung von kleinen Kindern in diesem Bereich vorliegen. Zu stochastischen Basiskonzepten von Kindern im Primarbereich liegen sowohl aus entwicklungspsychologischer als auch aus mathematikdidaktischer Perspektive einzelne Studien vor. Wollring (1994) beschreibt, dass bei Kindern im Elementar- und Primarbereich, insbesondere in Situationen mit symmetrischen Zufallsgeneratoren, häufig animistische und magische Vorstellungen zu beobachten sind (z. B. beim Würfeln). Lindmeier, Reiss, Ufer, Barchfeld und Sodian (2011) stellen heraus, dass Kinder im 2., 4. und 6. Schuljahr bereits über ein grundlegendes Verständnis stochastischer Basiskonzepte in Alltagskontexten sowie in formalen Kontexten verfügen und ihnen die Unterscheidung zwischen „unmöglich", „unwahrscheinlich" und „sicher" gelingt.

„Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ in der Phase des Übergangs vom Elementar- in den Primarbereich

Kinder im Übergang vom Elementarbereich kommen in verschiedenen Situationen mit dem Inhaltsbereich „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ in Berührung. Ein systematisches Durchdringen der Phänomene erscheint jedoch für den Elementarbereich zu anspruchsvoll. Es werden daher zunächst erste Grunderfahrungen als Ziel mathematischer Bildung für diesen Bereich empfohlen.

Dabei können in Fragestellungen aus dem Alltag (z. B. „Werde ich beim Spielen irgendwann eine Sechs würfeln?“) die Begriffe „sicher“, „wahrscheinlich“ und „unmöglich“ reflektiert werden, erste Datenerhebungen (z. B. „Wie viele Kinder spielen heute in der Bauecke?“) durchgeführt werden und gegebenenfalls auch kombinatorische Fragestellungen aufgegriffen werden („Wie viele Möglichkeiten gibt es? Wie kann man es herausfinden?“).

In Bezug auf die von Hasemann, Mirwald und Hoffmann (2007) beschriebenen Meilensteine beim Erwerb von Einsicht in den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ ist für jüngere Kinder bei entsprechenden Bildungsanregungen im Wesentlichen nur vom Erreichen des ersten Meilensteins auszugehen:

Kinder im Übergang vom Elementar- in den Primarbereich können erste qualitative Einschätzungen von Eintrittswahrscheinlichkeiten von Ereignissen abgeben. Dabei verwenden sie die Begriffe „sicher“, „unmöglich“ und „wahrscheinlich“. Außerdem erkennen sie, dass die Ungewissheit der einzelnen Ergebnisse das zentrale Merkmal von zufälligen Ereignissen ist (vgl. Hasemann et al., 2007).

Für die weitere Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten und somit für den Erwerb weiterer Meilensteine sind jedoch bereits Einsichten im Rahmen des geometrischen Zugangs (z. B. Ausgehen von der Gleichwahrscheinlichkeit der Ereignisse beim Würfeln aufgrund der geometrischen Eigenschaften eines Würfels) oder des Zugangs über relative Häufigkeiten nötig (z. B. die Ermittlung der Chance, dass eine geworfene Streichholzschachtel auf der schmalen Seite liegen bleibt durch die sehr häufige Durchführung eines Experiments).

Grundlegende Aktivitäten im Bereich „Daten“ sind:

- das Stellen von Fragen,
- das Sammeln und Erheben,
- das Sortieren und Klassifizieren,
- das Darstellen sowie
- das Vergleichen und Beschreiben von Daten.

Zentrale Aktivitäten im Elementarbereich stellen dabei das Sortieren und Klassifizieren und das Bestimmen der Anzahlen der entstandenen Mengen dar (Clements & Sarama, 2009). Dazu müssen zunächst bestimmte Eigenschaften (wie z. B. Größe, Farbe, Anzahlen) wahrgenommen werden.

„Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit" am Ende von Klasse 4
Die Konkretisierung des Inhaltsbereichs „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit" in den KMK-Bildungsstandards (KMK, 2005) umfasst die folgenden Aspekte, die als Ziele mathematischer Bildung im Grundschulalter empfohlen werden:

- Daten erfassen und darstellen
- Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen

Das Erfassen und Darstellen von Daten umfasst im Einzelnen das Sammeln von Daten in Beobachtungen oder einfachen Untersuchungen und Experimenten, das anschließende Strukturieren der Daten und die Darstellung in Tabellen, Schaubildern und einfachen Diagrammen. Umgekehrt sollen die Kinder Informationen aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen entnehmen können.

In Bezug auf die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten sollen die Kinder die Grundbegriffe zur Wahrscheinlichkeit, wie z. B. „sicher", „unmöglich" und „wahrscheinlich", kennen und erste Einschätzungen der Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) treffen und vergleichen können.

2.3.6 Gewichtung und Bedeutung der inhaltsbezogenen Kompetenzen im Elementar- und Primarbereich

Bei genauerer Betrachtung der vorliegenden Konzepte und Materialien für die mathematische Bildung im Elementarbereich sowie der Lehrpläne und Lehrwerke für den Primarbereich lässt sich eine starke Gewichtung des Bereichs *„Zahlen und Operationen"* feststellen. Clements und Sarama (2007, S. 466) heben diesen Bereich daher besonders hervor: „For early childhood, number and operations is arguably the most important area of mathematics learning. In addition, learning in this area may be one of the best developed domains in mathematics research." Dies darf aber nicht dahingehend verstanden werden, dass mathematische Bildung im Elementarbereich auf den Bereich der Zahlen und Operationen allein reduziert werden darf (vgl. Abschnitt 2.1.3).

Besondere Bedeutung kommt deshalb auch dem Bereich *„Raum und Form"* zu. Die Entwicklung räumlicher Fähigkeiten wird als Grundlage für die Repräsentation von mathematischen Konzepten in den verschiedenen Inhaltsbereichen sowie für das Operieren mit ihnen diskutiert. In der mathematikdidaktischen Diskussion nimmt in diesem Zusammenhang der Begriff der Visualisierung eine zentrale Position ein. Für den Bereich Zahlen und Operationen führt Lorenz (1998) die Annahme aus, dass Zahlen und Rechenoperationen bei Kindern durch bildhaft vorgestellte räumliche Beziehungen repräsentiert werden. Vor dem Hintergrund der These, dass Zahlen räumlich angeordnet sind, lassen sich Zahlenvergleiche als Entfernungsbetrachtungen beschreiben. Grundrechenarten werden anknüpfend an diese Annahme als räumliche Bewegungen wie z. B. Vorwärts- oder Rückwärtsgehen oder -springen auf einem mentalen Zahlenstrahl repräsentiert (vgl. Dehaene, 1992, 1999). Fehlende Vorstellungsbilder für Zahlen und Zahlbeziehungen sowie die mangelnde Möglichkeit des mentalen visuellen Operierens mit ihnen werden als bedeutende Ursachen für Schwierigkeiten beim Mathematiklernen diskutiert.

Eine besondere Rolle nimmt darüber hinaus der Bereich *„Muster und Strukturen“* ein. Wie bereits in Abschnitt 1.1 ausgeführt, liegt dieser Expertise ein Verständnis von Mathematik als „Wissenschaft von den Mustern“ (vgl. Sawyer, 1982; Wittmann & Müller, 2012) zugrunde. Ein Muster stellt dabei im Verständnis von Devlin (1997; vgl. auch Lüken, 2012) eine Beziehung zwischen Zahlen, Formen, Funktionen etc. dar, die in einem Bereich regelmäßig auftritt und in diesem Bereich allgemeine Gültigkeit besitzt. Diese regelmäßigen Beziehungen stellen Strukturen dar. Die Einsicht in Muster erlaubt die Erkenntnis von Zusammenhängen, von Gemeinsamkeiten und Unterschieden und ermöglicht Generalisation und Abstraktion. Denken in „Mustern und Strukturen“ kann somit zum einen als übergreifende, den mathematischen Erkenntnisprozess charakterisierende Kategorie angesehen werden. Darüber hinaus wird jedoch der Bereich „Muster und Strukturen“, der mit etwas anderer Schwerpunktsetzung auch als „Beziehungen und Veränderung“ (vgl. z. B. Ehmke et al., 2009) oder als „Funktionaler Zusammenhang“ (KMK, 2004, 2012) beschrieben wird, auch als eigener Inhaltsbereich dargestellt. In diesem Inhaltsbereich steht das explizite Verstehen und Nutzen von funktionalen Beziehungen zwischen mathematischen Objekten, das Analysieren und Repräsentieren von Zusammenhängen und Beziehungen sowie das Analysieren und mathematische Beschreiben von Veränderungen in unterschiedlichen Anwendungskontexten im Vordergrund.

2.3.7 Messung

Zur Messung von inhaltsbezogenen Kompetenzen im Elementar- und Primarbereich liegen verschiedene standardisierte Testinstrumente sowie diagnostische Interviews vor. Insbesondere bei den Verfahren zum Einsatz im Elementarbereich ist zu berücksichtigen, dass viele Verfahren primär auf die Erfassung der Zahlbegriffsentwicklung abzielen und nicht das Konstrukt „Mathematische Kompetenz“ in seiner vollen Breite berücksichtigen. Darüber hinaus ist zu bedenken, dass die verschiedenen Verfahren häufig erst für einen Altersbereich ab dem letzten Kindergartenjahr normiert sind.

Bei der Messung inhaltsbezogener mathematischer Kompetenzen in der Altersgruppe der drei- bis zehnjährigen Kinder sind je nach Zielgruppe besondere Herausforderungen zu berücksichtigen. Neben einer eher kurzen Aufmerksamkeitsspanne bei Kindern im Elementarbereich ist vor allem die Entwicklung der Sprache von Bedeutung. Häufig gelingt es jüngeren Kindern noch nicht, ihre Einsichten und Fähigkeiten in Sprache zu fassen. Somit beziehen verschiedene diagnostische Verfahren zur Erfassung mathematischer Kompetenzen neben der Sprache auch die Beobachtung von Handlungen mit Material ein.

Eine weitere Herausforderung besteht in der hohen Leistungsvarianz speziell im Übergang vom Elementar- in den Primarbereich. In der Altersgruppe sind in vielen Bereichen innerhalb kürzerer Zeit große Entwicklungsfortschritte beobachtbar. Dies gilt vornehmlich auch in Bezug auf die Entwicklung mathematischer Kompetenz. Testverfahren müssen eine entsprechend große Leistungsspanne abbilden können, ohne durch Effekte von Überforderung die Motivation bei der Testbearbeitung stark zu beeinträchtigen.

Während die Verfahren zur Erfassung mathematischer Kompetenzen im Elementarbereich in der Regel in Einzelsituationen durchgeführt werden, liegen für den Primarbereich auch Gruppentests vor. Je nach Einsatzbereich und Zielsetzung kommen verschiedene Arten von diagnostischen Verfahren zum Einsatz. Neben standardisierten Testverfahren sind für die Altersgruppe der Drei- bis Zehnjährigen auch diagnostische Interviews sowie Formate zur kontinuierlichen Dokumentation der Lernentwicklung von Bedeutung. Diagnostische Interviews sowie Verfahren zur kontinuierlichen Dokumentation der Lernentwicklung sind dabei im Sinne einer handlungsleitenden Diagnostik insbesondere für die Anwendung durch Fach- und Lehrkräfte geeignet, während für Forschungszwecke eher standardisierte Verfahren zum Einsatz kommen sollten. Zu berücksichtigen ist dabei, dass die für den Elementarbereich geeigneten Verfahren häufig primär auf den Inhaltsbereich „Zahlen und Operationen“ bezogen sind und nicht das Konstrukt „Mathematische Kompetenz“ in der in den vorangehenden Abschnitten dargestellten Breite erfassen. Darüber hinaus ist zu bedenken, dass die verschiedenen Verfahren häufig erst für einen Altersbereich ab dem letzten Kindergartenjahr normiert sind.

Eine ausführliche Übersicht und eine Diskussion verschiedener Verfahren für den Elementarbereich finden sich beispielsweise bei Gasteiger (2010) und bei Lorenz (2012). Einen Schwerpunkt auf standardisierte Verfahren legen die ausführlichen Darstellungen bei Hasselhorn, Marx und Schneider (2005) sowie bei Hasselhorn, Heinze, Schneider und Trautwein (2013). Einige Verfahren werden im Folgenden exemplarisch und kurz beschrieben.

Standardisierte Verfahren

Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ) (van Luit, van de Rijt & Hasemann, 2001):

Der OTZ ist ein standardisierter Test zur Erfassung der Zahlbegriffsentwicklung von Kindern im Alter von 4½ bis 7 Jahren. Er spricht dabei im ersten Teil mit weitgehend pränumerischem Charakter grundlegende Fähigkeiten an, die nach Piaget für die Zahlbegriffsentwicklung von Bedeutung sind. Die zweite Hälfte des Tests legt einen Schwerpunkt auf die Entwicklung von Zählfähigkeiten.

TEDI-MATH – Test zur Erfassung numerisch-rechnerischer Fertigkeiten vom Kindergarten bis zur 3. Klasse (Kaufmann et al., 2009):

Ziel des TEDI-MATH ist vor allem die Diagnose von Störungen numerisch-rechnerischer Leistungen. Daher differenziert der Test insbesondere im unteren und mittleren Leistungsbereich. Die 28 Untertests beziehen sich auf unterschiedliche Bereiche der Zahlenverarbeitung und des Rechnens bei Kindern vom vorletzten Kindergartenjahr bis zur 3. Grundschulklasse.

Kieler Kindergartentest (KiKi) (in Vorbereitung; vgl. Grüßing et al., 2013):

Der KiKi ist ein standardisiertes Individualverfahren, das die mathematische Kompetenz von Kindern im Alter von 4 bis 6 Jahren erfasst. Der Rahmenkonzeption liegt ein breites Konzept von mathematischer Kompetenz im Sinne der oben beschriebenen fünf Inhaltsbereiche zugrunde.

DEMAT 1+ bis DEMAT 4 (Krajewski, Küspert & Schneider, 2002; Krajewski, Liehm & Schneider, 2004; Roick, Gölitz & Hasselhorn, 2004; Gölitz, Roick & Hasselhorn, 2006):

Die DEMAT-Reihe umfasst standardisierte Tests, die in den Klassen 1 bis 4 jeweils zum Ende des jeweiligen Schuljahres und zum Anfang des darauffolgenden Jahres eingesetzt werden können. Sie sind als curriculumvalide Mathematiktests konzipiert und gehen daher über den Bereich „Zahlen und Operationen“ hinaus. Sie erfassen jedoch nicht das Konstrukt „Mathematische Kompetenz“ im oben beschriebenen umfassenden Sinne.

Hamburger Rechentest (HaReT) (Lorenz, 2005):

Der HaReT ist konzipiert als Früherkennungstest für Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht. Der HaReT besteht aus vier getrennten normierten Tests für die Grundschulklassen 1 bis 4. Da er eine frühe Diagnostik ermöglichen soll, wird er zu Beginn eines Schuljahres bzw. zum Ende des vorangehenden Schuljahres eingesetzt. Entsprechend sind auch die Normierungen. Insofern kann der HaReT 1 (Schuljahresbeginn Klasse 1) auch im 2. Halbjahr des letzten Kindergartenjahres verwendet werden. Im Gegensatz zum OTZ werden mit dem HaReT 1 eher die kognitiven Bereiche erfasst und mit ihm wird weniger auf den engen Umgang mit Zahlen fokussiert. Mit dem HaReT 1 werden auch nicht wie beim OTZ die Fähigkeiten der betreffenden Altersgruppe im Sinne einer allgemeinen Erhebung ermittelt, sondern der Test ist sensibel gegenüber den leistungsschwächeren Kindern und nimmt dafür einen „Deckeneffekt" in Kauf, d. h. viele Kinder werden mit sehr guten Ergebnissen abschneiden, nur wenige mit problematischen. Dies ist aber gewünscht. Mit dem Test wird also versucht, die „Risikokinder" zu bestimmen, bevor eine negative Schulbiographie einsetzt.

Heidelberger Rechentest 1-4 (HRT 1-4) (Haffner, Baro, Parzer & Resch, 2005):
Der HRT 1-4 versucht, einen Überblick über die Beherrschung mathematischer Grundlagen zu geben, die eine Voraussetzung für den Erwerb mathematischen Wissens und komplexerer mathematischer Fertigkeiten darstellen. Er umfasst elf Untertests. Der HRT ist hinreichend reliabel und valide. Aufgrund identischer Aufgaben und Testzeiten für alle Klassenstufen von 1 bis 4 sind neben der Beurteilung im Vergleich zur aktuellen Klassennorm auch klassenübergreifende Leistungsvergleiche möglich. Diese Eigenschaft beinhaltet aber, dass für das aktuelle Leistungsniveau eines Kindes nur wenige Aufgaben zur Verfügung stehen. Dies ist das Problem eines jeden Tests, der versucht, einen weiten Entwicklungsbereich abzudecken. Dadurch ist er aber für den Kita-Bereich nicht geeignet und für die Grundschule nur dann, wenn Verläufe betrachtet werden sollen.

Testverfahren zur Dyskalkulie bei Kindern (ZAREKI-R) (von Aster, Weinhold Zulauf & Horn, 2006) und *Neuropsychologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Kindern – Kindergartenversion (ZAREKI-K)* (von Aster, Bzufka & Horn, 2009):
Der ZAREKI-R sowie der ZAREKI-K basieren auf neuropsychologischen Erkenntnissen zur Zahlenverarbeitung und zum Rechnen. Der ZAREKI-R stellt ein verbreitetes Individualtestverfahren zur Diagnose von Störungen verschiedener Teilbereiche der Zahlenverarbeitung und des Rechnens bei Kindern zwischen 7½ bis 11 Jahren dar. Der ZAREKI-K ermöglicht eine Risikodiagnose bereits im letzten Jahr vor der Einschulung.

Kalkulie – Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder (Fritz, Ricken & Gerlach, 2007):
Das Testverfahren „Kalkulie" versucht, rechenschwache Kinder zu diagnostizieren und die spezifischen Problembereiche dieser Kinder genauer einzugrenzen. Es ist allerdings nicht für den Kindergartenbereich geeignet, sondern wendet sich an die Lehrkräfte der Grundschule. Es ist geeignet für die Klassen 1 bis 3. Das

Diagnoseverfahren „Kalkulie“ besitzt den Vorteil, dass ein darauf abgestimmtes, material- und schulbuchunabhängiges Trainingsverfahren entwickelt wurde, das „Kalkulie – Trainingsprogramm“. Mit diesem Trainingsprogramm wird versucht, die Basiskenntnisse im Fach Mathematik individuell zu erarbeiten, wofür Übungsaufgaben bereitgestellt werden. Die üblichen, den Kindern wahrscheinlich vertraute Darstellungsformate werden verwendet.

Diagnostische Interviews und kontinuierliche Lerndokumentation
ElementarMathematisches BasisInterview (EMBI) (Peter-Koop et al., 2007):
Das EMBI ist ein nicht-normiertes, materialbasiertes diagnostisches Interviewverfahren für das Vorschulalter bis zum Ende des 2. Schuljahres. Es basiert auf einem im Rahmen des australischen Early Numeracy Research Project (Clarke et al., 2002) entwickelten Interviewverfahren, das sich durch eine forschungsbasierte Rahmenkonzeption von Ausprägungsgraden mathematischen Denkens zu verschiedenen Inhaltsbereichen auszeichnet. Die Interviewteile zu den Bereichen Raum und Form sowie Größen und Messen liegen in einem zweiten Band (Wollring et al., 2011) vor. Das EMBI-Kindergarten (Peter-Koop & Grüßing, 2011) umfasst ausschließlich die für den Elementarbereich vorgesehenen Interviewteile.

Lerndokumentation Mathematik (Steinweg, 2006b; vgl. auch Gasteiger, 2010):
Die „Lerndokumentation Mathematik“ ist ein Instrument zur Fokussierung und Systematisierung kontinuierlicher Beobachtungen im Elementarbereich und im Übergang zur Primarstufe. Beobachtungen zu verschiedenen mathematischen Erfahrungsbereichen werden systematisch in ein Beobachtungsraster eingetragen. Dabei basiert die „Lerndokumentation Mathematik“ auf dem umfassenden Mathematikbild, das auch dieser Expertise zugrunde liegt.

Test zur Früherfassung von Lernstörungen im Mathematikunterricht (Lorenz & Dornheim, 2007; Dornheim, 2008):
In dem DFG-Projekt „Entwicklung und Evaluierung eines Tests zur Früherfassung von Lernstörungen im Mathematikunterricht und darauf aufbauender remedialer Maßnahmen“ (Lorenz & Dornheim, 2007; Dornheim, 2008) wurde versucht, bereits im Alter von 4 Jahren Fähigkeiten zu erheben, die für den Erwerb mathematischer Kompetenzen als wesentlich angesehen werden. Darüber hinaus wurde die Entwicklung der untersuchten Kinder im Längsschnitt verfolgt und der Einfluss der Fähigkeitsfaktoren auf die Mathematikleistung in den Klassen 1 und 2 erhoben. Hierbei wurden Komponenten der visuell-nonverbalen, ganzheitlichen Verarbeitung, der verbalen, seriellen, einzelheitlichen Verarbeitung und (prä)numerisches Vorwissen erfasst.

Standortbestimmungen nach „Elementar – Erste Grundlagen in Mathematik" (Kaufmann & Lorenz, 2009):
Im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Verfahren sind die Standortbestimmungen der Fördermaterialien „Elementar – Erste Grundlagen in Mathematik" für die Altersgruppen 4 bis 5 Jahre und 5 bis 6 Jahre getrennt entwickelt und erprobt worden. Der Begriff „Standortbestimmung" wurde gewählt, weil er zum einen in der Grundschule gebräuchlich ist, zum anderen sollte der zuweilen negativ besetzte Begriff „Test" vermieden werden. Die Standortbestimmungen beinhalten eine Reihe von Aufgaben unterschiedlicher Bereiche, für die entsprechende Spiel- und Fördermöglichkeiten vorliegen. Dieser letzte Punkt unterscheidet dieses Verfahren von den übrigen Tests.

2.4 Fachübergreifende Basiskompetenzen

Jens Holger Lorenz und Christiane Benz

Die im Folgenden beschriebenen Basiskompetenzen wie Intelligenz, Arbeitsgedächtnis, Aufmerksamkeit, Sprach- und Sozialkompetenzen können einerseits die mathematischen Fähigkeiten im Vor- und Grundschulalter moderierend beeinflussen, sie können andererseits unter günstigen Bedingungen aber auch (sieht man von der Intelligenz und dem Gedächtnis ab) durch mathematische Aktivitäten gefördert werden.

Neben den in den vorangehenden Kapiteln behandelten mathematikspezifischen Kompetenzen werden in diesem Abschnitt mit kognitiven, (schrift)sprachlichen und sozialen Kompetenzen auch sog. übergreifende Basiskompetenzen beschrieben, von denen angenommen wird, dass sie die Entwicklung mathematischer Kompetenzen beeinflussen bzw. moderieren können. Diese übergreifenden Basiskompetenzen werden durch das Angebot der Initiative „Haus der kleinen Forscher" bestenfalls indirekt angesprochen und sind nicht als prioritäre Zieldimensionen mathematischer Bildung zu verstehen. Sie sollten aber bei späteren

Erhebungen der Begleitforschung als Moderator-/Kontrollvariablen begleitend erhoben werden und werden aus diesem Grund hier thematisiert.

2.4.1 Kognitive Kompetenzen

Im Bereich der kognitiven Kompetenzen wird im Folgenden auf die Bereiche Aufmerksamkeit, Arbeitsgedächtnis und allgemeine Intelligenz eingegangen.

Aufmerksamkeit

Das Konstrukt „Aufmerksamkeit" hat in der Pädagogischen Psychologie insofern einen hervorgehobenen Platz, als mit ihm ein Großteil der Leistungsunterschiede im schulischen Kontext erklärt werden kann. Allerdings ist damit nicht ein Persönlichkeitskonstrukt gemeint, sondern in der Regel die „time on task" bzw. aktive Lernzeit, d. h. die Zeit, die eine Schülerin/ein Schüler an der Bearbeitung der (z. B. mathematischen) Inhalte verbringt. Untersuchungen, die auf die Studien von Kounin (2006) in den 1970er-Jahren zurückgehen (z. B. Reiss, 1982), behandeln Aufmerksamkeit als Ziel der Klassenführung, wobei in erfolgreichem Unterricht die Schülerinnen und Schüler durch eine beschreibbare Anzahl von Lehrerverhaltensweisen ihre Aufmerksamkeit auf den Inhalt lenken (vgl. Seidel, 2009). So zeigen Studien (vgl. Reiss, 1982), dass im lehrerzentrierten Frontalunterricht ca. 30 % der Schülerinnen und Schüler geistig abwesend, d. h. nicht aufmerksam sind, und zwar unabhängig vom Schulfach oder der Klassenstufe.

Im negativen Sinn sind Aufmerksamkeitsdefizite als lernstörend, – hemmend bis – verhindernd bekannt. Sie können mit erhöhter motorischer Aktivität einhergehen und werden entsprechend unter dem Begriff ADS oder ADHS („Aufmerksamkeitsdefizit-/Hyperaktivitätssyndrom") gefasst. Hierbei handelt es sich um ein neurobiologisches Syndrom, weshalb sich bei diesen Kindern und Jugendlichen Trainingsverfahren, die sich auf die reine Bearbeitung von (einfachen) Konzentrationsübungen beschränkten, als nicht wirksam erwiesen (Fries & Souvignier, 2009). Inzwischen ist meist eine medikamentöse Behandlung, gekoppelt mit einem Training der Kontrollstrategien, angezeigt, und Studien belegen die Wirksamkeit dieser Maßnahmen (Naumann & Lauth, 2008).

In Bezug auf die mathematische Bildung bleibt festzuhalten, dass Aufmerksamkeit sich aus der Motivation des Kindes ergibt, sich mit einem Inhalt bzw. einem Spiel zu befassen. Insofern dürfte in der Praxis Aufmerksamkeit und Motivation nicht zu trennen sein, da nur die Aufmerksamkeit beobachtet werden kann, d. h. die Hinwendung des Kindes zu einer Tätigkeit und das Festhalten an dieser Tätigkeit. Die Motivation für eine Handlung wird hierüber erschlossen. Aufmerksamkeit ist aber notwendig, da anderenfalls Lerninhalte das Kind nicht erreichen.

Messung:
Für das Vorschulalter sind keine Untersuchungen und Tests bekannt, welche die Aufmerksamkeit als „time on task" erfassen (vgl. Büttner & Schmidt-Atzert, 2003; Heubrock & Petermann, 2001).

Für das Grundschulalter existiert der „Dortmunder Aufmerksamkeitstest" (Lauth, 2003), der für die Altersstufe 7 bis 13 Jahre konzipiert ist.

Arbeitsgedächtnis
Das Arbeitsgedächtnis lässt sich in drei Subsysteme aufteilen (Hasselhorn & Zoelch, 2012):

- in die *zentrale Exekutive,* welche eine flexible Kontrollfunktion inne hat,
- in die *phonologische Schleife,* die zuständig ist für die kurzfristige Speicherung akustischer Informationen und
- in den *visuell-räumlichen Notizblock,* zuständig für visuelle und räumliche Information.

Die Funktionstüchtigkeit des Arbeitsgedächtnisses beeinflusst allerdings in hohem Maße die Lernleistung eines Kindes, wobei sich die Kinder mit unterschiedlichen Lernstörungen auch in der Ausprägung ihrer Gedächtnisleistung unterscheiden. Kinder mit verschiedenen Lernstörungen zeigen vielfältige Symptome. Üblicherweise fallen sie auf mit Leistungsminderungen im Schriftspracherwerb (Legasthenie) und/oder im Umgang mit Zahlen (Dyskalkulie) bei unbeeinträchtigter Intelligenz (und altersgemäßer Beschulung).

Kinder mit einer Beeinträchtigung des Schriftspracherwerbs (und möglicherweise auch der Sprachrezeption) weisen Defizite in der phonologischen Schleife des Arbeitsgedächtnisses auf, Kinder mit Rechenstörungen hingegen Defizite im „visuell-räumlichen Notizblock" (Passolunghi, Vercelloni & Schadee, 2007; Mähler & Schuchardt, 2012).

Für das Arbeitsgedächtnis ist festzuhalten, dass seine Struktur zum einen über die Jahre hin sehr stabil ausfällt, lediglich im Alter von 5 bis 7 Jahren gibt es marginale Zusammenhangsverschiebungen zwischen der zentralen Exekutive und den beiden Subtypen (Michalczyk, Zoelch & Hasselhorn, 2012). Allerdings ist das Arbeitsgedächtnis von Kita-Kindern noch sehr beschränkt (Klein & Bisanz, 2000), so dass es einige Schwierigkeiten bereitet, mit dem vorliegenden Messinstrument die gesamte Altersspanne von 3 bis 6 Jahren abzudecken. Untersuchungen zeigen aber, dass dies möglich ist (Zoelch & Mähler, 2012).

Nach einigen Untersuchungen ist das Arbeitsgedächtnis ein besserer Prädiktor für die Schulleistung als die Intelligenz (Alloway, 2009; Alloway & Alloway, 2010).

Der Zusammenhang zwischen dem Arbeitsgedächtnis und der spezifischen Leistung im Mathematikunterricht ist ein zweigeteilter, der in der Literatur unterschieden wird. Zum einen dient das Arbeitsgedächtnis dem Aufbau von (Vor-) Wissen, gleichzeitig ist es auch bei der aktuellen Rechentätigkeit notwendig. Es gibt also einen indirekten Einfluss über das Vorwissen, dessen Aufbau vom Arbeitsgedächtnis unterstützt wurde, zum anderen einen direkten Einfluss des Arbeitsgedächtnisses im Moment des Rechnens. Das aufgebaute Vorwissen entlastet das Arbeitsgedächtnis (Auswendigwissen ist gedächtnisentlastend) (Grube & Seitz-Stein, 2012).

Die Leistungsfähigkeit des Gedächtnisses lässt sich bei Kindern kaum durch Training verbessern (Krajewski & Ennemoser, 2010). Die Kapazität des visuell-räumlichen Notizblocks ist aber eng mit der (schulischen) Mathematikleistung verknüpft (Gaupp, 2003).

Messung:

Das Arbeitsgedächtnis kann für das letzte Kita-Jahr und das Grundschulalter (Altersgruppe 5 bis 12) differenzialdiagnostisch mittels der Arbeitsgedächtnistestbatterie AGTB 5-12 gemessen werden (Hasselhorn et al., 2012).

Intelligenz

Der Einfluss der Intelligenz auf diejenigen Schulfächer, die eher eine geistige, weniger eine motorische Anforderung stellen, ist vielfach belegt (zusammenfassend Seel, 2003). Unterstellt man diese geistige Anforderung auch für den mathematischen Bereich, dann dürfte dies auch für das Lernen mathematischer Inhalte zutreffen. Nach bisherigen Untersuchungen scheint die allgemeine Intelligenz stabil und kaum trainierbar zu sein (Fries & Souvignier, 2009).

Es besteht ein Zusammenhang zwischen Intelligenz und arithmetischen Leistungen in der Grundschule (Lorenz & Dornheim, 2007; Dornheim, 2008). Dieser verringert sich jedoch, wenn die numerischen Vorkenntnisse der Kinder berücksichtigt werden. Letzteres steht im Einklang mit den Befunden aus der LOGIK-Studie und dem SCHOLASTIK-Projekt (Stern, 1993, 1996): Über die gesamte Schulzeit nahm der direkte Einfluss der Intelligenz auf die Schulleistung ab, aber der direkte Einfluss der arithmetischen Vorkenntnisse zu. Mit anderen Worten: Je weniger Vorkenntnisse eine Schülerin/ein Schüler zu Beginn des Schuljahres hat, umso schlechter sind ihre/seine Schulleistungen zum Ende des Schuljahres. Zu entsprechenden Befunden gelangt auch Krajewski (2003) in ihrer Längsschnittuntersuchung zur Dyskalkulievorhersage, die ähnliche Verursachungsfaktoren verwendete. Zu ähnlichen Ergebnissen kommen auch andere Studien (Passolunghi, Mammarella & Altoè, 2008).

Dies bedeutet, dass das mathematische Vorwissen letztlich bedeutender für die mathematische Entwicklung ist als die allgemeine Intelligenz.

Messung:
Es existieren eine Vielzahl von Intelligenztests für Kinder ab dem Kindergartenalter, die jedoch nur von Fachpersonen durchgeführt werden dürfen (vgl. auch Anders, Hardy, Pauen & Steffensky, 2013, S. 55).

2.4.2 (Schrift-)Sprachliche Kompetenzen

Sprachliche Kompetenzen sind eng verwoben mit mathematischen Kompetenzen, wie im folgenden Abschnitt ausgeführt wird.

Für die frühe mathematische Bildung lassen sich mathematikbezogene sprachliche Ziele formulieren:

„Die Kinder erwerben die Fähigkeit,

- Objekte und Prozesse zu beschreiben und dabei die verschiedensten Möglichkeiten zur quantitativen Beschreibung zu nutzen,
- Beschreibungen von Objekten und Prozessen zu verstehen, sich die beschriebenen Objekte und Prozesse vorzustellen,
- zum Begründen und Lernen sprachliche Formen der Begründung kennen sowie
- angemessen erste Fachtermini im umgangssprachlichen Kontext zu nutzen. Generell werden Begriffsworte nur dann genutzt, wenn sie aus der Tätigkeit heraus zweckmäßig und notwendig sind“ (Hansel & Schneider, 2008, S. 200; vgl. auch Kapitel 3).

Stadien der Zählkompetenz
Eine Herausforderung in der kindlichen Entwicklung der „mathematischen Sprache“ stellen die Zahlworte dar (vgl. Lorenz, 2010, 2011). Die ersten frühen mathematischen Begrifflichkeiten scheinen sich mit der Sprache parallel zu entwickeln. Die Zahlwortreihe wird gelernt wie andere Worte für Gegenstände der Umwelt auch: Sie werden nachgesprochen, und dies bereits im Alter von 2;6 Jahren. Im Gegensatz zu Worten, mit denen Alltagsobjekte bezeichnet werden, „…lassen sich Zahlen auf Menschen, Engel, Handlungen, Gedanken anwenden: auf alles, was entweder existiert oder vorgestellt werden kann“, wie Locke bereits 1690 (übers. 1962) in seinem „Essay Concerning Human Understanding“ schrieb. Kinder lernen Zahlworte also nicht, indem Gegenstände benannt werden, nicht als referierende

Ausdrücke für konkrete Gegenstände, sondern meist über Zählspiele ohne Rekurs auf außersprachliche Dinge, auf die sie verweisen (Wiese, 2003).

Hierbei lassen sich verschiedene *Stadien der Zählkompetenz* unterscheiden, in denen auch verschiedenartige Prinzipien erlernt werden (Fuson, 1988; Gelman & Gallistel, 1978, vgl. S. 36f.):

Das Problem des zählenden Rechnens:

Jeder Mensch war irgendwann in seiner mathematischen Entwicklung zählender Rechner. Jeder hat die Aufgabe 4 + 3 zählend gelöst:

„1, 2, 3, 4“ (an einer Hand)
„1, 2, 3“ (an der anderen Hand)
„macht zusammen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7“ (die Finger einzeln an der Nasenspitze antippend)

Die Zahlwortreihe aufsagen zu können heißt nicht, dass man damit auch rechnen kann. Und dass Kinder die Zahlenreihe vorwärts aufsagen können, heißt noch nicht, dass ihnen dies auch rückwärts gelingt (man versuche einmal, das Alphabet rückwärts in Zweiersprüngen aufzusagen!).

Die Zahlwortkonstruktion:

Hierbei treten in der kindlichen Entwicklung Fehlkonstruktionen auf, die in ähnlicher Form auch in der Sprachentwicklung zu beobachten sind. Die Kinder bilden Regeln und testen deren Gültigkeit, d. h. sie sprechen nicht nur das nach, was sie gehört haben, sondern konstruieren eigene Sätze oder Zahlworte.

Da in der deutschen (wie beispielsweise auch in der englischen, französischen, italienischen und spanischen) Zahlwortreihe dem Zahlwort „zehn“ keine gesonderte Bedeutung beigemessen werden kann („…, acht, neun, zehn, elf, zwölf, …“; was war an der „zehn“ Besonderes?), kommt es im Laufe der mathematischen Entwicklung zu typischen Zählfehlern wie „…, achtundzwanzig, neunundzwanzig, zehnundzwanzig, elf-undzwanzig, …“ oder „…,achtzig, neunzig, zehnzig, elfzig, …“. Wohlgemerkt, hierbei handelt es sich weder um eine Sprachstörung noch um eine mathematische Inkompetenz, sondern um eine normale Entwicklung der kindlichen Zahlwortreihe. Dies muss bei diagnostischen Beobachtungen im Alltag berücksichtigt werden.

Die spezielle Konstruktion der deutschen Zahlworte stellt allerdings eine schwere Hürde für das kindliche Lernen dar, weshalb ostasiatische Kinder die Zahlwortreihe in der Regel ein Jahr früher lernen als englisch- oder deutschsprachige Schülerinnen und Schüler. Die im Deutschen vorhandene Schwierigkeit der Sprachinversion, die von der Schreibregel „von links nach rechts“ abweicht, ist hinlänglich bekannt: Für 24 sagen wir „vierundzwanzig“ statt wie im ostasiatischen Raum „zwei-zehn-vier“.

Zu diesem Zeitpunkt ihrer mathematischen Entwicklung (mit etwa 5 bis 7 Jahren) sind Kinder mit Sprachentwicklungs- oder -rezeptionsstörungen in besonderem Maße vulnerabel für Fehlleistungen, welche durch unsere spezifische Form der Zahlwortbildung hervorgerufen werden.

Die Bildung komplexer Numeralia kann sowohl additive als auch multiplikative Bedeutung besitzen, sie ist zudem nicht einheitlich. So ist „hundertdrei“ eine Addition von 100 und 3, „dreihundert“ hingegen eine Multiplikation.

„Das Element ‚und‘ weist als Numeral-Bestandteil verschiedene spezifische Charakteristika auf, die es von der koordinierenden Konjunktion unterscheiden. Dies betrifft einerseits seine *Distribution:* Der Gebrauch von ‚und‘ als Bestandteil komplexer Numeralia ist durch die jeweiligen Generierungsregeln einer Numeralsequenz weitgehend arbiträr festgelegt und ist häufig fakultativ. Beispielsweise fehlt es im Deutschen stets in additiven Konstruktionen mit -zehn, tritt obligatorisch in additiven Konstruktionen mit -zwanzig bis -neunzig auf und ist schließlich in Verbindungen mit hundert-, tausend- usw. fakultativ“ (Wiese, 2003).

Diese willkürliche Konstruktion von Zahlworten ist den Kindern nicht einsichtig, da sie nach Regeln suchen; sie können bei ihren Versuchen, in höhere und bislang noch unbekannte Zahlbereiche vorzudringen, die Zahlworte nicht logisch ableiten.

Symbolverständnis:

Mathematik, so die gängige Meinung, ist die Wissenschaft, die sich intensiv mit Symbolen befasst. Ja, mancher würde sogar sagen, dass gerade das kryptische Manipulieren von Symbolen nicht nur ihre Schwierigkeit ausmacht, sondern ihr Charakteristikum ist. Allerdings kommen Kinder nicht erst in der Schule mit der Schrift und den Zahlzeichen in Berührung, sondern die Sprache ist das erste Symbolsystem, dem sie ausgesetzt sind (Passolunghi et al., 2007).

Beobachtungen zeigen, dass Kinder mit einer Sprachentwicklungsstörung auch gleichzeitig eine verzögerte Entwicklung des Symbolverständnisses aufweisen (Lorenz, 2010). Sie verwenden nicht wie andere Kinder Gegenstände symbolisch (z. B. einen Bauklotz als Auto, eine Tasse als Lokomotive).

Spezifische Faktoren der Sprachrezeption, die mathematisches Lernen erschweren können

Sprachrezeption umfasst eine Vielzahl unterschiedlicher Faktoren, die – falls getrennt entwickelt oder verzögert – das Lernen arithmetischer Inhalte in den Eingangsklassen behindern können.

Auditive Figur-Grund-Diskrimination:

Eine Störung der auditiven Figur-Grund-Diskrimination lässt Kinder sich an dem lautesten akustischen Signal orientieren (dem Nachbarn, der gerade vom Stuhl fällt; dem am Waschbecken planschenden Klassenkameraden; dem vorbeifahrenden Auto), nicht aber an dem wesentlichen sprachlichen Signal im Unterricht (der Lehrerin, dem antwortenden Mitschüler). Kinder fallen dadurch auf, dass sie sich fortwährend und inhaltsinadäquat dem lauten Geräusch zuwenden und so den Eindruck der Hyperaktivität machen. Der gerade in den Eingangsklassen hohe Geräuschpegel erschwert diesen Kindern, der Kommunikation zu folgen. Sie sind gezwungen, ihre Aufmerksamkeit auf das Erkennen des gesprochenen Wortes zu richten, da dieses nicht mehr automatisiert abläuft. Die Aufmerksamkeit steht damit in geringerem Maße der Bedeutungserfassung zur Verfügung, eine Ermüdung ist die Folge. Häufig ist wiederholtes Nachfragen notwendig, ein Leistungsabfall über die Schulstunden ist zu beobachten (Nolte, 2000).

Auditive Differenzierung:

In diesem Zusammenhang ist auch die Störung zur auditiven Differenzierung zu benennen, die dazu führt, dass Kinder ähnlich klingende Worte verwechseln. Während dies im Alltag nicht auffallen muss, so kommt der Diskrimination von „-zig“ und „-zehn“ gerade in den Eingangsklassen große Bedeutung zu. Die Fehler sowohl beim Schreiben von „vierzehn“ und „vierzig“ persistieren bis in hohe Klassen hinein. Sie beeinträchtigen den Lernprozess, da Analogiebildungen nicht möglich sind und die Entwicklung des Stellenwertbegriffs beeinträchtigt ist. So kommt es, zumindest bei mündlicher Darbietung, zu Problemen bei

14 + 1 vs. 40 + 1, 14 + 10 vs. 40 + 10 etc.

Auditive Speicherung:

Die auditive Speicherung wird eingesetzt, um akustisch, d. h. sprachlich dargebotene Information aufzunehmen und weiter zu verarbeiten. Ist diese Fähigkeit eingeschränkt, dann fällt es den Kindern schwer, Kettenaufgaben sowie große Zahlen zu speichern.

„Vierhundertsiebenundneunzigtausendachthundertdreiundzwanzig“

Erst ab der zehnten Silbe wird die ungefähre Größe der Zahl erfassbar, die Zahl kann exakt erst nach der Deutung aller 17 Silben erfasst werden.

Serialität:

Die notwendige Reihenfolge, in der Sprache abläuft, bildet nicht unbedingt die Reihenfolge der sie bezeichnenden Objekte ab. So lässt sich durchaus sagen, dass man Turnschuhe und Tennissocken anhat, obwohl günstigerweise die Reihenfolge wohl umgekehrt ist. Die Gleichzeitigkeit, in der Ereignisse stattfinden, lässt sich durch die lineare Struktur der Sprache nicht einfangen: Beschreibungen haben eine Sequenzierung. Nun ist dies vielleicht auf der Ebene der Objektbeschreibungen eine lässliche Angelegenheit, für viele Situationen allerdings ist die Reihenfolge entscheidend. Sätze wie „Die Mutter hat das Kind gesucht“ und „Das Kind hat die Mutter gesucht“ verlangen zur sinnvollen Deutung die Fähigkeit, sprachliche Reihenfolgen zu erkennen und differenziert zu interpretieren.

Wissen über Wortbedeutungen:

Unterricht ist ein kommunikativer Prozess. Und Kommunikation verlangt, dass die Beteiligten den verwendeten Worten die gleiche Bedeutung zumessen, sonst kommt es zu Missverständnissen, zu Fehlinterpretationen. Natürlich kommt es auch im Alltag zwischen Erwachsenen zu Missverständnissen. Aber diese sind meist nicht auf unzureichende Sprachkompetenz zurückzuführen. Für Kinder ist es ein keineswegs einfacher Lernprozess, dass sprachlichen Ausdrücken immer eine situative Bedeutungszumessung unterliegt und Sätze je nach Kontext unterschiedlich interpretiert werden müssen. So kann die Formulierung “Der Eimer ist voll” bedeuten

> „Ich habe genug getan“ oder auch
> „Du hast den Eimer nicht ausgeleert“

„Der Gedanke fällt also nicht unmittelbar mit dem sprachlichen Ausdruck zusammen“ (Vygotskij, 1986, S. 353). Allerdings gibt es in der Alltagssprache zusätzliche Hinweise gestischer, mimischer oder situativer Art, die eine Interpretation ermöglichen.

Die Mathematik hingegen zeichnet sich dadurch aus, dass sie (vermeintlich?) kontextunabhängig ist, dass gerade ihre Stärke darin liegt, frei und damit übertragbar auf vielfältige Inhalte und universell einsetzbar zu sein. Dies führt allerdings dazu, dass in der Mathematik Bezeichnungen, Begriffe verwendet werden, denen zwar eine klare Definition zugrunde liegt, die Worte aber nicht notwendig von den Verwendern, den Schülerinnen und Schülern, gleichermaßen verstanden werden (vgl. Nolte, 2000).

Im Mathematikunterricht der Eingangsklassen ist die Anforderung an die Sprachkompetenz der Kinder sehr hoch, wohl höher als im muttersprachlichen Unterricht (Lorenz, 2011). Da im Mathematikunterricht mit Veranschaulichungsmitteln gearbeitet wird und die räumliche Anordnung der Materialien und die zeitliche Abfolge der Handlungen, die mit ihnen durchgeführt werden, von entscheidender Bedeutung ist, kommt der Verwendung von Präpositionen eine steuernde und der Begriffsentwicklung fördernde Wirkung zu.

Für den Gebrauch der fachspezifischen Sprache, z. B. die Zahlworte, die Benennungen von geometrischen Objekten oder Maßen, dient die pädagogische Fach- bzw. Lehrkraft als Modell. Sie sollte die Terminologie beherrschen und in der Interaktion verwenden, ohne dass sie direkt korrigierend auf die erwartbaren Fehler der Kinder reagiert. Solche „Fehler der Kinder" sind meist nicht Ausdruck einer Sprachentwicklungsverzögerung, sondern intelligente eigene Konstruktionen, die sich nicht an den Sprachübereinkünften der Erwachsenen orientieren.

Messung:
Spezielle Messinstrumente zur Erfassung mathematikbezogener Sprachkompetenzen sind derzeit nicht verfügbar.

2.4.3 Soziale Kompetenzen

Es lassen sich soziale Kompetenzen formulieren, welche die Kinder im Rahmen von mathematischen Aktivitäten erwerben können:

- „Gemeinsam mit anderen Kindern mathematische Probleme zu bearbeiten,
- mit anderen Kindern oder Erwachsenen Bedeutungen auszuhandeln, um sie in Beschreibungen, Bezeichnungen o. ä. gemeinsam einheitlich verwenden zu können,
- umfangreichere Aufgaben durch sinnvoll arbeitsteiliges Handeln in Partner- oder Gruppenarbeit zu bearbeiten,
- zum Umgang mit Erfolg und Misserfolg im sozialen Kontext, zu akzeptieren, dass man selbst oder ein anderes Kind eine Aufgabe (noch) nicht oder nicht so gut lösen kann,
- unterschiedliche Lösungswege anderer Kinder zu akzeptieren, zu achten, sich mit diesen Wegen auseinanderzusetzen und sie als mögliche Wege zur Lösung eines Problems in Betracht zu ziehen,
- sich in die Gedanken und Lösungswege anderer Kinder hineinzuversetzen und ihnen zu helfen" (Hansel & Schneider, 2008, S. 202).

Messung:
Es existiert eine Vielzahl an Messinstrumenten zu sozialen Kompetenzen im Kindergartenalter (vgl. auch Anders, Hardy, Pauen & Steffensky, 2013, S. 55; Anders, Hardy, Sodian & Steffensky, 2013, S. 114).

3 Zieldimensionen auf Ebene der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte

3.1 Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit in Bezug auf die Gestaltung mathematischer Bildung

Jens Holger Lorenz und Bernd Wollring

Im Gegensatz zu der Motivations- und Interessenlage der Kinder im Umgang mit mathematischen Inhalten muss auf der Ebene pädagogischer Fach- und Lehrkräfte die *Motivation zur Gestaltung mathematischer Bildungsprozesse* für die Kinder und ihr *eigenes Interesse an mathematischen Fragestellungen* unterschieden werden.

3.1.1 Motivation

Es liegen keine Untersuchungen vor, welche die Motivation pädagogischer Fachkräfte für die Ausgestaltung mathematischer Lerngelegenheiten in Kitas erheben. Es ist aber davon auszugehen, dass durch die in den einzelnen Bundesländern formulierten Bildungsziele für den Elementarbereich, welche auch die mathematische Früherziehung umgreifen, der Anspruch an die vorschulischen Einrichtungen steigt. Insofern ist davon auszugehen, dass pädagogische Fachkräfte ein hohes Bedürfnis entwickeln, ihre eigene Kompetenz zu steigern, um diesem Anspruch gerecht zu werden. Insofern sehen wir die Motivation, geeignete Maßnahmen für die frühe mathematische Bildung zu ergreifen, als vorhanden.

Es dürfte aufgrund unserer Erfahrungen allerdings auch ein Defizit erlebt werden, diese Maßnahmen im Kita-Alltag kindgerecht durchzuführen. Diese Diskrepanz zwischen dem Wunsch, adäquat zu handeln und dem Erleben vermeintlicher Insuffizienz kann sich negativ auf die Gefühlslage auswirken.

In Abschnitt 2.1 wurde der „Teufelskreis“ für Kinder beschrieben, der durch niedriges Selbstkonzept entsteht. Dieser Teufelskreis kann bei Erwachsenen in gleichem Maße wirksam werden: Wird die eigene Kompetenz in Bezug auf Mathematik als niedrig eingeschätzt, dann führt dies leicht dazu, entsprechende Anforderungssituationen zu vermeiden, d. h. den Kindern keine anregenden Problemstellungen anzubieten (weil man glaubt, sie nicht zu kennen), dadurch wird ein Lernzuwachs und ein sich schärfender Blick auf die mathematischen Kerne in Alltagshandlungen verstellt. Es dürfte pädagogischen Fachkräften auch an Bildern, an Vorstellungen mangeln, welchen mathematischen Gehalt das Alltagsgeschehen einer Bildungseinrichtung in sich birgt.

Es erscheint dringend notwendig, pädagogischen Fachkräften solche Erfahrungen zu ermöglichen (s. Abschnitt 5.3). Die Bereitstellung von vielerlei Situationen und Anregungen über konkrete Beispiele sollte die Motivation und das Selbstvertrauen stärken (vgl. Abschnitt 3.2.3).

3.1.2 Interesse an Mathematik und an mathematischer Bildung

Es muss davon ausgegangen werden, dass es eine Reihe von Erwachsenen gibt, die aufgrund der Erfahrung in ihrer eigenen Schulbiographie ein eher distanziertes bis negatives Verhältnis zur Mathematik besitzen (Kornmann, 2010). Im Gegensatz zu anderen Fächern haben viele Menschen das Fach Mathematik als einen Inhalt erlebt, den ganz zu verstehen ihnen nicht vergönnt war, und in dem sie versuchten, „sich von einer Klassenarbeit zur nächsten zu hangeln". Ein Teil solcher Bewältigungsstrategien besteht in dem Versuch, eher Rechenverfahren und Algorithmen zur Lösung von vorgesetzten Problemen im Sinne einer Grammatik auswendig zu lernen, nicht aber die inneren Zusammenhänge und Bedeutungen zu verstehen. Bei einigen erlischt möglicherweise irgendwann der Wille zum Verstehen. Dies klingt negativ, wird aber in den TIMS- und PISA-Studien deutlich, die zeigen, dass deutsche Schülerinnen und Schüler einerseits sehr gut im Durchführen von Rechenverfahren sind, aber nicht in der Lage zu sein scheinen, Zusammenhänge zu verstehen und in Problemsituationen gerade diese Verfahren anzuwenden. Inwieweit dies ein Effekt bestehender Unterrichtspraxis ist, steht an dieser Stelle nicht zur Diskussion.

Es ist zu erwarten, dass diese eher verkürzende Sichtweise und Kompetenz auch für die pädagogischen Fachkräfte gilt, zumindest für jene, die noch nicht nach neuen Bildungsplänen an Fachhochschulen oder Pädagogischen Hochschulen ausgebildet wurden, welche ein Mathematikcurriculum einbeziehen.

Wie für Kinder kann auch für Erwachsene unterstellt werden, dass sich ein Interesse an einem Inhaltsbereich *durch wachsende Kenntnisse und Kompetenzen dazu* entwickelt und verstärkt wird, unabhängig davon wie diese zustande kommen. Hierbei ist für die Mathematik nicht gemeint, dass ausgearbeitete formale mathematische Begriffe vorhanden sein müssen, sondern dass die Mathematik in Alltagssituationen, in bislang ungewohnten, fremden aber faszinierenden Begebenheiten sichtbar, erfassbar und nutzbar wird.

Eine vorsichtige bis ablehnende Haltung gegenüber Mathematik entstammt häufig aus den biographischen Erfahrungen im schulischen Bereich und betrifft hier insbesondere die Sekundarstufe (Kornmann, 2010). Dies mag auch an der Akzentsetzung zum formalen „Buchstabenrechnen“ in der Algebra der Mittelstufe liegen. Dagegen ließe sich ein verstärktes Interesse an Alltagsphänomenen ausbilden, die unter einer mathematischen Begrifflichkeit gesehen werden, sowohl zur Schulzeit als auch später. Ähnliche Strukturen in diversen Gebieten (Musik, Architektur, Kunst, Technik etc.) zu erkennen, stellt einen hohen Faszinationsfaktor dar, der auch den eigenen Kompetenzzuwachs erleben lässt. Dieser Aspekt sollte daher in Fort- und Weiterbildungsangebote unbedingt eingehen (s. Abschnitt 5.3).

In der häufig eher distanzierten Sichtweise frühpädagogischer Fachkräfte auf die formale Seite der Mathematik liegt auch die Chance, das Interesse an der Ausgestaltung von mathematisch gehaltvollen Lernumgebungen zu steigern. Die Beschäftigung mit Mathematik wird sowohl das eigene Interesse pädagogischer Fachkräfte an dem Gegenstandsbereich fördern als auch das Interesse der Kinder wecken.

3.1.3 Selbstwirksamkeit in Bezug auf die Gestaltung mathematischer Bildung

Dass die Überzeugung von der eigenen Wirksamkeit für Pädagoginnen und Pädagogen in schulischen Lehr-Lern-Situationen äußerst wichtig ist, wurde in einer Reihe von Studien belegt (Gräsel, 2010; Lipowsky, 2010). Über den Glauben an die eigene Handlungswirkung verfügen insbesondere jene Lehrkräfte, die sich Innovationen widmen, sie übernehmen und ausprobieren (Cantrell & Callaway, 2008). Das zeigt aber auch, dass es sich hierbei um eine Grundhaltung handelt, die keineswegs an die fachdidaktische Kompetenz gekoppelt, sondern Teil der subjektiven Überzeugung ist (Rank, Gebauer, Fölling-Albers, & Hartinger, 2011). Sie wird im Allgemeinen über Interviews erhoben, die allerdings nicht standardisiert sind. Speziell für pädagogische Fachkräfte in Kitas liegen keine entsprechenden Untersuchungen vor, es ist aber anzunehmen, dass die Befunde aus dem Grundschulbereich übertragbar sind.

Es muss beachtet werden, dass für die Selbstwirksamkeit nicht die fachdidaktischen Fähigkeiten im Vordergrund stehen, sondern eine wesentliche *erlebte Kompetenz in der sozialen Interaktion* zwischen Kindern und Erwachsenen. Das heißt eine pädagogische Fach- oder Lehrkraft erlebt sich dann als in hohem Maße selbstwirksam, wenn sie sich kompetent in den drei Komponenten

- Beziehungsaspekt,
- Reflexionfähigkeit und
- Empathiefähigkeit

erlebt. Alle drei Komponenten können durch organisatorische Maßnahmen in der Bildungseinrichtung unterstützt werden. Zum einen ist die gemeinsame Planung von mathematischen Aktivitäten durch das pädagogische Personal bedeutsam, zum zweiten die gemeinsame Beobachtung von Aktivitäten und drittens die Reflexion über

- die beobachteten Entwicklungsschritte der Kinder,
- ihre Vorgehensweise,
- ihre altersgemäßen Fehler und (Miss-)Konzeptionen,
- ihre spezifischen Stärken,
- über den mathematischen Kern in den durchgeführten Spielen und
- über sich anschließende Spielaktivitäten.

Wesentlich ist dabei die gemeinsame Verantwortung aller Pädagoginnen und Pädagogen, wobei die Beobachtung der Kolleginnen und Kollegen nicht als Kontrolle, sondern als Unterstützung gesehen und etabliert wird (Lewis, Perry & Hurd, 2009).

3.1.4 Messung

Für die Messung von Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit für pädagogisches Fachpersonal sind keine normierten Verfahren bekannt.

3.2 Einstellungen und Überzeugungen in Bezug auf die Gestaltung mathematischer Bildung

Christiane Benz und Meike Grüßing

Einstellungen und Überzeugungen werden in diesem Kapitel als epistemologische Überzeugungen (engl. beliefs, s. u.) verstanden und umfassen Überzeugungen zum Wesen der Mathematik (Abschnitt 3.2.1), zum Lehren und Lernen von Mathematik (Abschnitt 3.2.2) und zum Stellenwert der mathematischen Bildung (Abschnitt 3.2.3).

Auf die Bedeutung von Einstellungen und Überzeugungen bei pädagogischen Fach- und Lehrkräften weisen Lee und Ginsburg (2007) vor allem für den Elementarbereich hin: „Therefore with the current focus on early mathematics education it is more important than ever to understand pre-kindergarten teachers‘ belief in order to achieve a high quality mathematics education in pre-kindergarten classrooms“ (Lee & Ginsburg, 2007, S. 4).

Dies trifft ähnlich auch auf Lehrkräfte im Primarbereich zu: Ergebnisse der mathematikdidaktischen Forschung im Bereich *beliefs* unterstreichen die Bedeutung von Einstellungen und Vorstellungen über Mathematik und Mathematiklernen bezüglich der Gestaltung von mathematischen Lehr-Lern-Situationen (Goldin, Rösken & Toerner, 2009). Der Einfluss von Vorstellungen, Vorerfahrungen und Einstellungen wird ebenfalls von Vertretern der kognitiv-konstruktivistischen Lernpsychologie (Seel, 2003) und der Neurobiologie (Roth, 1997) betont.

Kenntnisse über Vorstellungen und Denkweisen von Fachkräften im Primar- und Elementarbereich bezüglich Mathematik sind nützlich, um bei der Gestaltung von Fortbildungskonzeptionen daran anknüpfen zu können

Einstellungen, Vorstellungen, Haltungen und Emotionen von Lehrenden und Lernenden wurden in den letzten Jahren in der mathematikdidaktischen Forschung unter dem Aspekt der *beliefs* vielfältig erforscht. Die zunehmende Wahrnehmung im Bereich der Forschung von *beliefs* und ihren Einflussfaktoren stellen Goldin et al. (2009) fest: „Beliefs now constitute ‚a no longer hidden variable‘ in research on the teaching and learning of mathematics“ (S. 14). Sie konstatieren mit Verweis auf Leder (2007), dass es immer noch verschiedene Konzepte zur Beschreibung dieser Einflussfaktoren gibt: „The classical questions on identifying and characterizing beliefs in mathematics education are still debated” (Goldin et al., 2009, S. 14).

An dieser Stelle wird deshalb auf eine detaillierte Begriffsklärung verzichtet und die Begriffe Haltungen, Überzeugungen, Einstellungen und Vorstellungen synonym als Übersetzungsmöglichkeiten für *beliefs* verwendet. Es wird davon ausgegangen, dass es sich nicht um situative Äußerungen oder Empfindungen handelt, sondern um „überdauernde, konsistente Verhaltensbereitschaften“ (Grigutsch, Raatz & Toerner, 1998, S. 6).

3.2.1 Überzeugungen zum Wesen von Mathematik

Grigutsch et al. (1998) evaluierten ein Beschreibungsmodell für Einstellungen zu Mathematik anhand einer Fragebogenstudie. Die empirische Fragebogenstudie umfasste mehr als 300 Mathematiklehrerinnen und -lehrer, vornehmlich der Sekundarstufe. Dabei arbeiten sie vier Faktoren heraus, die verschiedene Aspekte der Mathematik betonen:

- *Formalismus:* beschreibt den Aspekt der Mathematik der durch Präzision auf der Ebene der Begriffe, des Denkens, Argumentierens, Begründens und Beweisen von Aussagen geprägt ist.

- *Schema:* „Mathematik als ‚Werkzeugkasten und Formelpaket', eine auf Algorithmen und Schemata ausgerichtete Vorstellung" beschreibt den schematischen Aspekt (Grigutsch et al., 1998, S. 17).
- *Anwendung:* Der Anwendungsaspekt beschreibt den Alltagsbezug und praktischen Nutzen der Mathematik.
- *Prozess:* Mathematik kann auch als Prozess, bei dem Kreativität und Problemlösen im Vordergrund steht, gesehen werden. In Freudenthals (1982) Beschreibung von Mathematik als Tätigkeit in Abgrenzung zu Mathematik als Fertigprodukt kommt der Prozessaspekt sehr deutlich zum Tragen: „Mathematik ist keine Menge von Wissen. Mathematik ist eine Tätigkeit, eine Verhaltensweise, eine Geistesverfassung" (S. 140).

Dabei ist das mathematische Weltbild weitaus vielschichtiger. Die „vier Faktoren beschreiben und strukturieren nur einen Teil des einstellungshaften Denkens über Mathematik. Aber im beobachtbaren Antwortverhalten erfassen sie die wesentlichen strukturierenden Orientierungen" (Grigutsch et al., 1998, S. 21).

In leicht unterschiedlicher Bezeichnung wurden diese verschiedenen Faktoren in weiteren Studien aufgenommen und für die Erforschung insbesondere von Elementarpädagoginnen und -pädagogen genutzt (vgl. Thiel, 2010; Benz, 2012). Hierbei konnte festgestellt werden, dass bei pädagogischen Fachkräften eine formal-schematische Sichtweise über Mathematik vorherrscht und der Prozessaspekt am wenigsten Zustimmung erfährt (Benz, 2012). Ähnliche Ergebnisse zeigt die Studie von Copley (2004). Die Sichtweise der Fach- und Lehrkräfte von Mathematik scheint eher von einer statischen als von einer prozessorientierten oder anwendungsorientierten Vorstellung geprägt zu sein.

Unter Berücksichtigung der aktuellen Sichtweise von Mathematik (Kapitel 1) und der aktuellen Forschungsergebnisse kann eine *Einstellung zu Mathematik, die den Aspekt der Prozessorientierung beinhaltet,* als Zieldimension für Lehr- und Fachkräfte angesehen werden. Lehr- und Fachkräfte sollen in Fortbildungen die Möglichkeit erhalten, diesen Aspekt selbst zu erfahren und darüber zu reflektieren.

3.2.2 Überzeugungen zum Lehren und Lernen von Mathematik

Zur Beschreibung von Einstellungen zum Lehren und Lernen von Mathematik werden in empirischen Studien oft unterschiedliche kontrastierende Positionen genutzt. Im folgenden Abschnitt werden Beschreibungen unterschiedlicher Wissenschaftsdisziplinen dargestellt und unter mathematikdidaktischer Perspektive diskutiert.

Bezogen auf den mathematischen Kompetenzerwerb beschreibt Cobb (1988, S. 87) die kontrastierenden Positionen mit Konstruktion und Instruktion: „The assumption that the goal of mathematics instruction is to transmit knowledge to students and the view that students construct mathematical knowledge by active reorganizing their cognitive structures.“ Yates (2006) verwendet ähnliche Pole und beschreibt die instruktive Position mit *traditional transmission views* und die konstruktive Position mit *child-centered constructivist views*.

Ein Kontinuum zwischen Instruktion und Konstruktion nicht nur bezüglich des Wissenserwerbs, sondern auch bezüglich des Entstehens des „Lernanlasses“ bzw. des Handlungskonzepts beschreiben Baroody et al. (2006, S. 203) in vier Stufen von „traditional direct instruction and drill“ zu „unguided discovery learning (e. g. freeplay)“.

So kann festgehalten werden, dass sich in einigen Beschreibungskonstrukten die Pole *Konstruktion* und *Instruktion* finden lassen. Diese beiden Pole liegen auch der Beschreibung von Überzeugungen bezüglich des Erwerbs naturwissenschaftlicher Kompetenzen in Form von *behavioristisch-transmissiven Überzeugungen* und von *konstruktivistischen Überzeugungen* zugrunde (Anders, Hardy, Sodian & Steffensky, 2013, S. 121).

In Studien unter elementarpädagogischer Perspektive stellen Snider und Fu (1990) einem entwicklungsgemäßen Vorgehen *(developmentally appropriate practice)* ein nicht entwicklungsgemäßes Vorgehen gegenüber *(developmentally inappropriate practice)*. Stipek und Byler (1997) verwenden einen kindorientierten und einen fähigkeitsorientierten Ansatz als gegensätzliche Pole zur Beschreibung *(child-orientated vs. skill-orientated)*. Ein großer Anteil der Studien zu Einstellungen von Lehrenden im Elementarbereich zu Lehr-Lern-Prozessen wurde im amerikanischen Raum anhand dieser Kontrastierung durchgeführt. Es werden Einstellungen dahingehend untersucht, inwieweit sie den *„developmentally appropriate guidelines“* der National Association for the Education of Young Children (NAEYC) entsprechen (Bredekamp & Copple, 1997). Dieses entwicklungsgemäße *(developmentally appropriate)* Vorgehen wird als ein Curriculum beschrieben, das an den Interessen der Kinder und eher an Spiel als Fähigkeiten orientiert ist *(child-interest centered curriculum based on play rather than skills)*. Die Lehrenden sollen eher Lernen ermöglichen als direkt zu instruieren *(facilitators vs. directors)* (White, Deal & Deniz, 2004, S. 129). Dem *kindorientierten* Vorgehen wird ein *lehrerorientiertes, didaktisches, akademisches Instruieren und Lernen* gegenübergestellt *(teacher didactic or academically directed instruction and learning)* (White et al., 2004).

Es wird also ein kindorientiertes Vorgehen mit einem lehrer- bzw. fähigkeitsorientierten Vorgehen kontrastiert. Aus fachdidaktischer Perspektive ist es jedoch fraglich, ob ein fähigkeitsorientiertes Vorgehen einen Gegenpol zu einem kindorientierten Vorgehen darstellt. Dies liegt an einer engen Auffassung von Kind- bzw. einseitigen Sicht von Fähigkeitsorientierung. Wie im ersten Kapitel dargelegt, stellen bei einem Verständnis von Mathematik als die Wissenschaft der Muster und bei einer fachdidaktischen Sichtweise des mathematischen Kompetenzerwerbs die Kindorientierung und Fähigkeitsorientierung keine gegensätzlichen Pole dar.

Dies bedeutet, dass als Zieldimension eine fachdidaktisch orientierte *konstruktivistische Überzeugung des mathematischen Lehrens und Lernens* empfohlen wird: Fachkräfte und Lehrkräfte können als Lernbegleiter mathematische Lerngelegenheiten aufgreifen oder selbst Lernanlässe bzw. Lernumgebungen schaffen, um Kinder darin zu unterstützen, konstruktiv mathematisches Wissen und Prozesskompetenzen zu erwerben.

Überzeugungen zum Lernen und Lehren von Mathematik stehen in Beziehung zur Alltagspraxis von Fachkräften (Ng, Lopez-Real & Rao, 2003; Skott, 2001; Stipek & Byler, 1997; Thompson, 1984) und wirken sich auch auf die mathematische Entwicklung der Kinder aus (Kluczniok, Anders & Ebert, 2011). Dies kann auch für den Primarbereich festgestellt werden (Staub & Stern, 2002). Keinen Zusammenhang zwischen den *beliefs* und den Handlungen kann Wilcox-Herzog (2002) in einer Gruppe von Pre-School-Lehrenden feststellen. Zu ähnlichen Ergebnissen kommen auch Fang (1996), Marcon (1999) und Borko et al. (1992).

Vor allem im Elementarbereich wird der Unterschied zwischen den *beliefs* und der Alltagspraxis darauf zurückgeführt, dass viele Lehrende nicht die Fähigkeiten und Kompetenzen haben, ihre Vorstellungen in die Praxis umzusetzen. Wurden Diskrepanzen zwischen *beliefs* und Handlungspraxis festgestellt, tendierten die *beliefs* dazu, eher *developmentally appropriate* zu sein, als es ihre Praxis offenbarte (Charlesworth, Hart, Burts, Thomasson & Mosley, 1993; White et al., 2004, S. 131). Eine Begründung dafür könnte sein, dass die Lehrenden nicht über das entsprechende Handlungsrepertoire verfügen.

Neben den Überzeugungen spielt daher die Zieldimension fachdidaktische Kompetenzen eine wichtige Rolle, so dass die Überzeugungen bei der Gestaltung von Spiel- und Lernumgebungen sowie Anregung und Unterstützung von kindlichen Lernprozessen auch umgesetzt werden können (vgl. Abschnitt 3.5).

3.2.3 Einstellungen in Bezug auf den Stellenwert mathematischer Bildung

Die allgemeine Anerkennung des Stellenwerts mathematischer Bildung in der Öffentlichkeit (vgl. Deutsche Telekom Stiftung, 2010) und die traditionellen klaren Vorgaben für mathematische Bildung im Primarbereich führen zu einer allgemeinen Anerkennung mathematischer Bildung im Primarbereich. Für den Elementarbereich stellt sich eine vollkommen andere bildungspolitische Situation dar. Mathematische Bildung spielte lange keine Rolle in bildungspolitischen Vorga-

ben. Erst in den letzten zehn Jahren wurde die mathematische Bildung wieder in bildungspolitische Vorgaben aufgenommen – wenngleich auch unterschiedlich detailliert und mit unterschiedlichen Stellenwerten belegt (Peter-Koop, 2009). Die mathematische Bildung war deshalb lange Zeit nicht in die Ausbildung von Fachkräften integriert. Aufgrund fehlender bundesweiter Standards für mathematische Bildung im Elementarbereich wird die Gestaltung stark von der Überzeugung abhängen, welcher Stellenwert der mathematischen Bildung beigemessen wird.

Studien aus dem anglo-amerikanischen Raum zeigen auf, dass Fachkräfte dem Erwerb von sozio-emotionalen Fähigkeiten eine signifikant höhere Zustimmung geben als dem Erwerb mathematischer Fähigkeiten (Kowalski, Pretti-Frontczak & Johnson, 2001; Ackerman & Barnett, 2005). Für die niedrige Einschätzung des Erwerbs mathematischer Fähigkeiten im Elementarbereich führen Ertle et al. (2008) zwei unterschiedliche Gründe an. Zum einem könnte dies an einem eng gefassten Verständnis eines entwicklungsgemäßem Vorgehens liegen, bei dem Erwachsene möglichst nicht in die Entwicklung eingreifen sollen. Zum anderen weisen sie darauf hin, dass viele Fachkräfte angeben, sie wollen die Kinder „nur" auf mathematisches Lernen „vorbereiten". Die Einstellung, dass mathematische Bildung bzw. „echte" Mathematik erst mit Schuleintritt beginnt bzw. beginnen soll, konnte auch bei Studien im deutschsprachigen Bereich sowohl bei Erzieherinnen und Erziehern als auch bei Lehrerinnen und Lehrern (Benz, 2012) festgestellt werden.

Eine Zieldimension bezüglich Einstellungen zu mathematischer Bildung ist es, dass pädagogische Fach- und Lehrkräfte *der mathematischen Bildung einen angemessenen, d. h. gleichrangigen Stellenwert im Vergleich zu anderen Bildungsbereichen* beimessen (z. B. durch eine Klärung über verschiedene Aspekte mathematischer Bildung wie Bedeutung von mathematischen Basiskompetenzen, Aspekte des Erwerbs mathematischen Wissens).

3.2.4 Messung

Es liegen verschiedene Studien vor, in denen fragebogenbasierte Instrumente zur Erhebung der allgemeinen pädagogischen Einstellungen von Fachkräften im Elementar- und Primarbereich im deutschsprachigen Raum entwickelt wurden (z. B. Kluczniok et al., 2011).

Studien mit fragebogenbasierten Instrumenten zur Erhebung mathematikbezogener Einstellungen existieren auf internationaler Ebene (Fennema, Carpenter & Loef, 1990; Lee & Ginsburg, 2007) und im deutschsprachigen Raum (Benz, 2012). Diese erfassen allerdings nicht alle hier vorgestellten Aspekte.

3.3 Prozessbezogene mathematische Kompetenzen

Bernd Wollring und Christoph Selter

Für pädagogische Fach- und Lehrkräfte lassen sich zunächst die prozessbezogenen Kompetenzen, wie sie in den Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich (KMK, 2005; KMK & JFMK, 2010; KMK, 2011; vgl. DMV, GDM & MNU, 2008; Peter-Koop, 2008; Walther, van den Heuvel-Panhuizen, Granzer & Köller, 2010) niedergelegt sind, als Ausgangspunkt für ihre Professionskompetenzen zur Mathematik heranziehen. Auf der Basis dieser im Laufe der eigenen Schulzeit erworbenen prozessbezogenen Kompetenzen sowie durch ihre pädagogische Ausbildung sollen sie imstande sein, Spiel- und Lernsituationen so zu begleiten und anzureichern, dass sie als *mathematikhaltig* anzusehen sind und den Kindern ihrem Alter entsprechende Lernmöglichkeiten bieten (siehe auch Abschnitt 3.5).

Wie das konkret geschehen kann, hat etwa Friedrich Fröbel, der Begründer der Kindergärten, ein guter Didaktiker mit mathematisch-naturwissenschaftlicher Bildung (u. a. in Kristallographie), bereits vor 150 Jahren mit seinen „Gaben“ beeindruckend realisiert.

Generell ist anzustreben, dass die prozessbezogenen Kompetenzen der pädagogischen Fachkräfte den Bildungsstandards Mathematik für den *Mittleren Bildungsabschluss* (KMK, 2004) entsprechen. Ein derartiges Kompetenzprofil fordert keine unangemessene Wissenschaftsorientierung, schafft aber sehr wohl die Kenntnisse, um die Arbeit in der Kita, Hort und Grundschule anschlussfähig zu planen.

Dass wir uns hier jedoch zur Kennzeichnung der Kompetenzen für pädagogisches Fachpersonal auf die *Bildungsstandards für den Primarbereich* beziehen (KMK, 2005) und nicht auf die für den *Mittleren Bildungsabschluss* (KMK, 2004), begründen wir am Ende dieses Kapitels in Abschnitt 3.3.6.

In Abschnitt 2.2 sind die prozessbezogenen Kompetenzen auf der Ebene der Kinder dargestellt. Dort ist auch mit der aus den Bildungsstandards (KMK, 2005) zitierten Abbildung 5 auf den Zusammenhang von inhaltsbezogenen und prozessbezogenen Kompetenzen verwiesen.

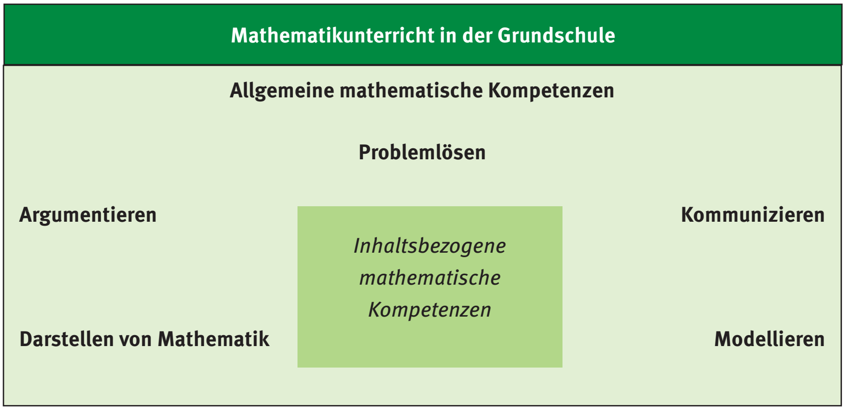


Abbildung 5. *Prozessbezogene und inhaltsbezogene Kompetenzen (KMK, 2005)*

Dieser Zusammenhang gilt ebenso für die entsprechenden Kompetenzen des pädagogischen Fachpersonals. Abbildung 6 soll dies zusätzlich verdeutlichen. Sie verweist darauf, dass mathematisch bedeutsame Spielsituationen oder Aufgaben durch zwei Dimensionen sowohl durch die *inhaltsbezogenen Kompetenzen* als auch durch die *prozessbezogenen Kompetenzen* charakterisiert sind. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen für pädagogische Fachkräfte werden (dem Muster der Abschnitte 2.2 und 2.3 entsprechend) im folgenden Abschnitt 3.4 diskutiert.

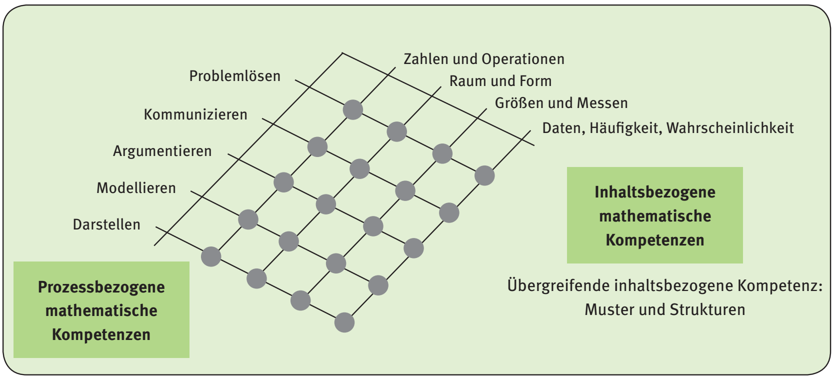


Abbildung 6. *Prozessbezogene und inhaltsbezogene Kompetenzen*

Im Folgenden werden (analog zu Abschnitt 2.2) die prozessbezogenen Kompetenzen in ihren fünf Facetten für das pädagogische Fachpersonal in Kitas, Horten und Grundschulen ausgehend von Kompetenzerwartungen für Schülerinnen und Schüler im Primarbereich entwickelt und beschrieben.

Im Gegensatz zu dem Konzept in Abschnitt 2.2, bei dem diese prozessbezogenen Kompetenzen für die Kinder eher Zieldimensionen und Perspektiven bezeichnen, vertritt die Expertengruppe die Auffassung, dass diese mathematischen Prozesskompetenzen beim pädagogischen Fachpersonal im Sinne von „Ziel-Standards" realisiert sein sollten:

Das pädagogische Fachpersonal sollte in jedem Fall mathematische Kompetenzen – sowohl inhaltsbezogen als auch prozessbezogen – in dem Umfang haben, wie sie die Bildungsstandards der KMK seit 2005 für Grundschulkinder fordern.

Darüber hinaus erforderliche fachdidaktische Kenntnisse sind in Abschnitt 3.5 dargestellt. Die genannte Forderung ist nicht trivial, denn der Überblick zur Entwicklung des Mathematikunterrichts in Abschnitt 2.2 zeigt, dass Teile des pädagogischen Fachpersonals vielleicht selbst einen Mathematikunterricht erfahren haben, der nicht durch die Bildungsstandards strukturiert war. Möglicherweise gab es für sie auch anschließend keine weitere die Mathematik betreffende Professionalisierung. Umso wichtiger sind berufsbegleitende Fort- und Weiterbildungsangebote, die auf eine entsprechende (Weiter-)Qualifizierung pädagogischer Fach- und Lehrkräfte zielen.

Im Folgenden sind die fünf Zielfacetten zu prozessbezogenen Kompetenzen dargestellt. Zudem sind jeweils *Beispiel-Aufgaben* ausgewiesen, die deren jeweilige Spezifizität illustrieren. Diese Aufgaben sind ursprünglich für Schülerinnen und Schüler der 4. Klasse konzipiert, erscheinen den Autoren aber angemessen, um die prozessbezogenen Kompetenzen auch auf Ebene der Erwachsenen exemplarisch zu charakterisieren. In dieser Form sind die Aufgaben nicht für Kinder in der Kita gedacht (obgleich das in geeignet aufbereiteten Spielsituationen teilweise denkbar wäre), sie sollen vielmehr dem Fachpersonal beispielhaft deutlich machen, was mit der jeweils benannten prozessbezogenen Kompetenz gemeint ist. Jede Aufgabe trägt zusätzlich eine Etikettierung (entsprechend der Abbildung 6), welche die mit dieser Aufgabe angesprochenen prozessbezogenen Kompetenzen und Inhaltsbereiche markiert.

3.3.1 Problemlösen

Problemlösen ist durch eine strategische Komponente gekennzeichnet. Ein reines Nutzen *bereitgestellter* mathematischer Strategien allein ist nicht als substanzielle prozessbezogene mathematische Kompetenz anzusehen. Vorbereitete mathematische Verfahren zu nutzen, kann man zwar auch als mathematische Kompetenz einschätzen, hier aber ist insbesondere gemeint, *Strategien und Lösungen* *bis zu einem gewissen Grade selbst zu erfinden und zu entwerfen* und dabei genau den Hindernissen zu begegnen, die für ein solches Arbeiten typisch sind. Insbesondere bedeutet dies, dass manche Strategie im Übergang von einem *zunächst nicht systematischen Probieren* zu einem *zunehmend systematischen Probieren* entsteht und gewonnen wird.

Problemlösen bezeichnet die Fähigkeit, Lösungen von mathematischen Problemen zu erarbeiten, dabei verschiedene Wege zu erproben und schließlich Lösungsversuche und Lösungsverfahren planen zu können.

Problemlösen (P) für Fach- und Lehrkräfte umfasst im Einzelnen folgende Kompetenzen (vgl. KMK, 2005):

P1 mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden

P2 eigene und vorbereitete Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren)

P3 Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

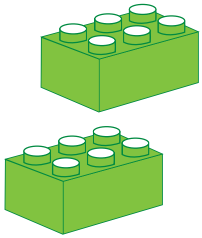
Problemlösen besteht demnach darin, das Lösen des jeweils gegebenen Problems mit einer gewissen Systematik anzugehen oder eine solche Systematik zu erstellen. Es geht also nicht nur um das Lösen, sondern auch um das *Planen des Lösens von Problemen.*

Eine solche Kompetenz wird etwa darin deutlich, dass man sich zur Lösung eines Problems Partner vorstellt, die imstande sind, bestimmte, möglicherweise aufwändige Teile der Problembearbeitung zu übernehmen, etwa das Durchprobieren einer gewissen Anzahl von Versuchen oder das Abzählen einer gewissen Anzahl von Objekten, und dass man sich unter diesen Voraussetzungen zunächst und vorrangig Gedanken macht, wie eine diesen Teilbearbeitungen übergeordnete Organisation der Lösung erfolgen könnte.

Hier scheint das interaktive Element dieser prozessbezogenen Kompetenz auf. Denn einen solchen Plan macht der Planende nicht notwendig für sich selbst, um das Problem dann selbst zu lösen, sondern in vielen Fällen der späteren Lebenswelt gerade nicht für sich, sondern für andere, die mit solchen Plänen die Probleme dann zu lösen haben, ohne dass sie sämtliche strategischen Elemente neu erfinden müssen. Hier wird ein wesentlicher Teil dieser prozessbezogenen Kompetenz deutlich, *das Entwickeln und das Bereitstellen von Strategien.*

Beispiel-Aufgaben zum Problemlösen für pädagogisches Fachpersonal

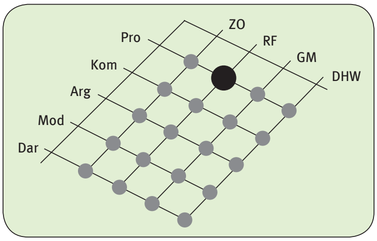
Aufgabe zum Problemlösen: „Bauwerke aus zwei System-Steinen“



Hier sind 2 System-Steine. Sie haben dieselbe Farbe. Jeder hat 2 Reihen mit je 3 Knöpfen.

Wie viele verschiedene Bauwerke kann man daraus bauen?

a) Sprechen, Bauen und Zeichnen sind erlaubt.
b) Nur Sprechen und Schreiben sind erlaubt, kein Material und kein Zeichnen.



Prozessbezogene Kompetenzen bei der Aufgabe „Bauwerke aus zwei System-Steinen“:

P1 mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden

P2 Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren)

P3 Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Bei dieser Aufgabe (nach einer Idee von Herget, Jahnke & Kroll) ist nicht die Anzahl der Möglichkeiten von vorrangigem Interesse, sondern der Weg, wie man diese Zahl findet: Gefragt ist hier ein *Plan* zum Bestimmen dieser Zahl. Dies ist zu tun: Lösungsstrategie entwerfen, Notierung entwerfen, gleiche und verschiedene Bauwerke bestimmen, Bedingung einhalten: „Die Kanten beider Steine sind entweder parallel oder senkrecht zueinander“. Diese Aufgabe ist bei Wahren des zentralen Anspruchs in weiten Bereichen differenzierbar, etwa dadurch, dass man zwei Steine mit jeweils vier Knöpfen annimmt oder aber zwei Steine mit jeweils acht Knöpfen.

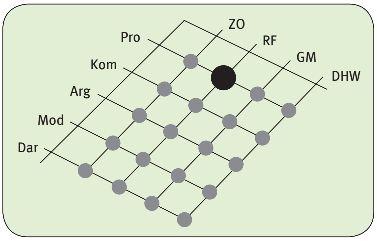
Aufgabe zum Problemlösen: „Würfel aus Holzleisten“

Gebaut werden soll ein Würfel mit 18 cm Kantenlänge, ein „Kanten-Modell“.

Es gibt Holzleisten mit Querschnitt 2 cm x 2 cm (2 cm hoch, 2 cm breit), sie sind 2 m lang.

Welche Stücke sind zu schneiden? Wie viele ganze Leisten benötigt man? Welche Stücke bleiben als Reste?

Wie viele Leisten benötigt man mindestens? Geht es auch, wenn die ganzen Leisten nur 1 m lang sind?



Prozessbezogene Kompetenzen bei der Aufgabe „Würfel aus Holzleisten“:
P1 mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden
P2 Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren)
P3 Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Ebenso wie die vorhergehende Aufgabe erfordert auch diese einen Plan zur Lösung. Hier bedeutet dies, dass man sich zunächst verdeutlicht, wie überhaupt ein Würfel aus Leisten dieser Art zusammenzusetzen ist. Man identifiziert mehrere Möglichkeiten, entscheidet sich für eine und bestimmt daraufhin systematisch, welche Bauteile bei diesem Konzept erforderlich sind. Von bleibendem Interesse ist die Art der Planung, die spezifischen Werte sind nicht entscheidend.

3.3.2 Kommunizieren

Kommunizieren bezeichnet hier im Zusammenhang mit Mathematik das selbstständige deutungssichere Mitteilen von Beschreibungen, Tatbeständen, Vorgehensweisen und Argumenten an andere Individuen, zumeist auf der Basis von gemeinsam vereinbarten Bezeichnungen und Bedeutungen.

Kommunizieren (K) zur Mathematik für pädagogische Fach- und Lehrkräfte umfasst im Einzelnen folgende Kompetenzen (vgl. KMK, 2005):

K1 eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren
K2 mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden
K3 Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten

Beim Kommunizieren, bei dem sich ein Sender an einen Adressaten richtet, werden beim Adressaten ebenso wie beim Sender *Kontexte aufgerufen*. Bisweilen spekuliert der Sender darauf, dass beim Empfänger Kontexte aufgerufen werden, die er, der Sender, selbst noch gar nicht mitgedacht hatte, also darauf, dass der Empfänger die Kontexte phantasievoll interpretiert.

Bei mathematischer Kommunikation aber geht es vorrangig darum, dass die vom Sender gedachten Kontexte und die beim Empfänger aufgerufenen *Kontexte in hinreichender Präzision zueinander passen,* dass also die Kommunikation *hin-*

reichend informativ und eindeutig ist. Das ist typisch für mathematische Sprache, und sie erscheint vielen Menschen dadurch von unangenehmer „Festgelegtheit".

In der Kita, aber auch in der Grundschule geht es nicht vordergründig darum, dass die Kommunikation von Beginn an ganz bestimmten Ausdrucksformen folgt, obwohl man letztlich dorthin möchte, denn dann erst erreicht man die Kommunikation mit einer großen Gemeinschaft. Zunächst geht es vielmehr darum, dass die Kommunikation „funktioniert" und in den Dingen und in den Vorgängen genau das bezeichnet, was gemeint ist. Dafür hat man auf der anderen Seite die Freiheit, die Dinge im kleinen Kreis mit selbst gewählten Namen zu benennen oder Bezeichnungen zu finden, die man für situativ angemessen hält.

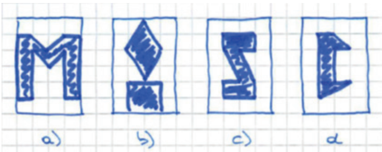
Beispiel-Aufgabe zum Kommunizieren für pädagogisches Fachpersonal

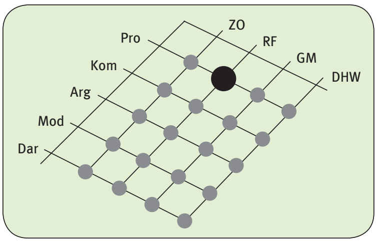
Aufgabe zum Kommunizieren: „Zeichen-Diktate"

Du bekommst eine dieser Figuren. Deine Partnerin bekommt leeres Kästchen-Papier.

Stell Dir vor, sie sitzt in einem anderen Haus und Du sollst ihr am Telefon erklären, wie die Figur aussieht, so dass sie diese nachzeichnen kann.

Schreibe auf, was Du ihr am Telefon sagst.





Prozessbezogene Kompetenzen bei der Aufgabe „Zeichen-Diktate":

K1 eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren

K2 mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden

K3 Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten

K4 Überlegungen und Lösungswege so dokumentieren, dass sie anderen mitzuteilen sind

In dieser Aufgabe ist eine Kommunikation gefragt, mit der das Rekonstruieren eines gegebenen Objektes gelingen soll. Dieses *„Rekonstruktionsformat"* ist ein typisches Aufgabenformat zum Kommunizieren. Entscheidend ist hier, dass die Sprache zweckbestimmt ist und die gewünschte Wirkung erzielt. Die Figuren von a bis d sind von zunehmender Komplexität und fordern daher eine zunehmend elaboriertere Sprache. Auch diese Aufgabe ist bei Wahrung des zentralen Anspruchs in sehr weiten Bereichen differenzierbar. So kann die Vorlage etwa aus einem Quadrat bestehen, dessen Seitenlänge nur 2 oder 3 Kästchen beträgt und bei dem in 1 oder 2 Kästchen ein Kreuz eingetragen ist. Oder die Vorlage kann ein Rechteck sein (wie die hier dargestellten Rechtecke), in dem auch kreisförmige Figuren auftreten.

3.3.3 Argumentieren

Argumentieren bezeichnet die Fähigkeit, im Rahmen vereinbarter Regelwerke und gemeinsam akzeptierter Tatbestände schlussfolgernd zu denken, Korrektes von Unkorrektem zu unterscheiden und weiterführende Gedanken zu entwickeln.

Argumentieren (A) für pädagogische Fach- und Lehrkräfte umfasst im Einzelnen folgende Kompetenzen (vgl. KMK, 2005):

- A1 mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen
- A2 mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln
- A3 Begründungen suchen und nachvollziehen

Dies macht zunächst den Eindruck, als sei das Argumentieren ausschließlich an die gesprochene (oder später geschriebene) Sprache gebunden. Ausschließlich aber gilt das nicht: Auch in wohl organisierten Handlungen oder materiellen Arrangements lassen sich Ansätze zum Argumentieren finden. Ein von Handlungen begleitetes Gespräch kann etwa darin bestehen, dass neben den Worten auch handelnd Änderungen, möglichst reversible Änderungen, an einer materiellen Situation durchgeführt werden, und zwar so, dass man an den materiellen Manipulationen die argumentative Substanz erkennt. Derartige *„Argumentationen im Handeln“* sind etwa zu beobachten, wenn jemand ein ebenes oder räumliches Puzzle aus seinen Teilen korrekt zusammensetzt.

Beispiel-Aufgaben zum Argumentieren für pädagogisches Fachpersonal

Aufgabe zum Argumentieren: „Teilen von Summen“

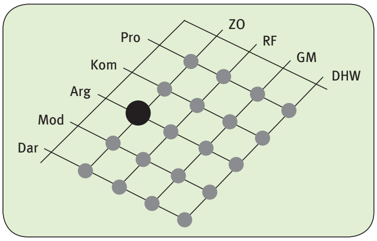
Wieso ist die Summe von zwei aufeinander folgenden Zahlen nie durch 2 teilbar?

Du addierst drei aufeinander folgende Zahlen. Wieso ist die Summe stets durch 3 teilbar?

Weiter: Ist die Summe von vier aufeinander folgenden Zahlen stets durch 4 teilbar?

Und: Ist die Summe von fünf aufeinander folgenden Zahlen stets durch 5 teilbar?

Gibt es eine Strategie, die Dir bei allen vier Aufgaben hilft?



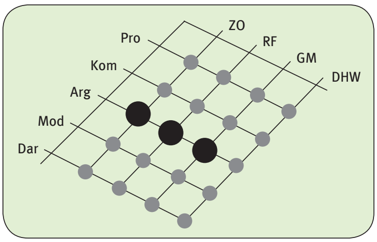
Prozessbezogene Kompetenzen bei der Aufgabe „Teilen von Summen“:
A1 mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen
A2 mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln
A3 Begründungen suchen und nachvollziehen

Diese Aufgabe erfordert nicht notwendigerweise ein Rechnen mit Formeln oder mit Zahlen, die in Ziffern dargestellt sind. Man kann sie auch mit Zeichnungen oder mit gelegten Plättchen oder mit anderen Darstellungen lösen. Entscheidend ist, dass die Argumentation Beweiskraft besitzt und nicht auf einzelne Zahlenbeispiele beschränkt bleibt, selbst wenn man sich die Tatbestände zunächst an einzelnen Beispielen verdeutlicht.

Aufgabe zum Argumentieren: „Teilen durch Schneiden oder Falten“

Eine runde Torte soll in 12 gleich große Stücke geteilt werden. Jemand schneidet die Tortenstücke immer wieder in zwei Hälften. Wieso führt das nicht zum Ziel? Wie müsste man denn schneiden?

Ein Papierstreifen ist 60 cm lang. Durch Falten soll er in Stücke von je 10 cm Länge eingeteilt werden. Jemand versucht den Streifen mehrfach zu halbieren. Das führt nicht zum Ziel. Wie müsste man falten, damit Stücke von je 10 cm entstehen?



Prozessbezogene Kompetenzen bei der Aufgabe „Teilen durch Schneiden oder Falten“:
A1 mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen
A2 mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln
A3 Begründungen suchen und nachvollziehen

Diese Aufgabe erfordert ebenso wie die vorhergehende Aufgabe Begründungen, ob und warum bestimmte Eigenschaften vorliegen und warum bestimmte Vorgehensweisen nicht funktionieren und andere doch. Zwei Arten des Argumentierens sind hier angesprochen: Zum einen ist zu begründen, weshalb ein vorgeschlagenes Verfahren *nicht zielführend* ist, daraufhin ist dann zu überlegen und zu begründen, ob es ein anderes Verfahren gibt, das *doch zielführend* ist.

3.3.4 Modellieren

Modellieren in den Bildungsstandards Mathematik
In den Bildungsstandards Mathematik für die Primarstufe ist das dort bezeichnete *Modellieren* im Sinne des *mathematischen Modellierens* (M) gemeint (vgl. KMK, 2005, 2008; Blum & Borromeo Ferri, 2009; Maaß, 2011). Dort finden sich etwa Kompetenzen wie

M1 Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen
M2 Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übertragen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen

Für pädagogische Fachkräfte im Elementarbereich ist diese Begriffsbildung zum einen zu erweitern, zum anderen zu elementarisieren:

Modellieren bezeichnet die Fähigkeit, Mathematik und andere, in der Regel lebensweltliche Gegenstände zueinander in Beziehung zu setzen und daraus Schlüsse zu ziehen.

Modellieren als Vernetzen von Erfahrungsbereichen
Modellieren kann allgemein als die Kompetenz angesehen werden, *einen weniger bekannten Gedankenbereich oder Erfahrungsbereich mit Hilfe eines besser bekannten Bereichs aufzuklären,* d. h. zugänglich zu machen oder zu erschließen.

In den Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich ist „mathematisches Modellieren“ gemeint. Dabei liegt

- *der aufgeklärte „modellierte“ Bereich in der Lebenswelt,*
- *der aufklärende „modellierende“ in der Mathematik.*

Das heißt: Es wird versucht, mit Hilfe der bekannten Mathematik noch unbeantwortete Fragen der Lebenswelt zu beantworten oder noch nicht gelöste Probleme zu lösen.

Dies ist bereits in der Grundschule nur schwer zu realisieren, im Bereich des Kindergartens aus Sicht der Autoren kaum. Entsprechend ist es für pädagogische Fachkräfte zwar wünschenswert, dieses Konzept zu kennen, aber in der für die Schule gemeinten Ausführung ist es für die Kita zunächst von untergeordneter Bedeutung. Denn im Elementarbereich geht es oft umgekehrt eher darum, mathematische Bereiche mit Hilfe von gegenständlichen Bereichen erst vorzustellen und dann zunehmend zu klären.

Folgt man dem Konzept der *subjektiven Erfahrungsbereiche* (Bauersfeld, 1983), so besteht das Lernen von Mathematik darin, solche subjektiven Erfahrungsbereiche zunächst aufzubauen und sie dann, da sie gewissermaßen inselartig entstehen, im weiteren Lernen *zunehmend zu vernetzen*. Das genau ist die Essenz des Modellierens im frühen Lernen von Mathematik.

In der Grundschule besteht „mathematisches Modellieren" darin, Sachsituationen mit Hilfe arithmetischer oder geometrischer Strukturen aufzuklären. Aber die mathematischen Mittel sind dort doch soweit beschränkt, dass sich leicht auch in der Lebenswelt der Kinder zahlreiche Sachlagen finden lassen, zu deren Aufklärung die Mathematik nur wenig beitragen kann. Die Grundidee lässt sich dort jedoch zumindest anbahnen.

Bedeutsamer dagegen ist die umgekehrte Art des Modellierens, die darin besteht, mathematische Sachverhalte mit Hilfe von lebensweltlichen Erfahrungen oder aus der Lebenswelt bekannten Materialien aufzuklären. Dies ist das Grundprinzip vieler *Veranschaulichungen,* bei dem die mathematischen Begriffe oft zunächst in Anbindung an sie veranschaulichende Gegenstände angebahnt werden und in der weiteren Entwicklung dann in zunehmender Abstraktion wieder von diesen gelöst werden.

Versteht man den Begriff des Modellierens also allgemeiner dahingehend, einen weniger bekannten gedanklichen Bereich durch einen besser bekannten aufzuklären, so kann man diese prozessbezogene Kompetenz in ihrer Relevanz für die frühe mathematische Bildung auch dadurch kennzeichnen, dass es darum geht, *verschiedene Erfahrungsbereiche miteinander in Beziehung zu setzen, zu vergleichen und solche Vergleiche für zunehmend systematische Beschreibungen zu entwickeln*.

Für pädagogische Fach- und Lehrkräfte kann man Modellieren somit kennzeichnen als mehr oder weniger *systematisches Vergleichen verschiedener Bereiche,* wobei versucht und angestrebt wird, in einem der Bereiche mit Hilfe des anderen Bereichs Erklärungen oder Voraussagen hervorzubringen.

Dieser verallgemeinerte Begriff des Modellierens ist auch geeignet, viele *Sachsituationen* zu beschreiben, in denen Phänomene, die zunächst unbekannt und neu sind, durch Modellvorstellungen sprachlich erfasst und begriffen werden. Modellieren ist in diesem Sinne eine übergeordnete prozessbezogene Kompetenz, die nicht auf die Mathematik beschränkt ist.

Modellieren als Vorhersagen

Beim Modellieren startet man im weniger bekannten Bereich mit einem Problem, modelliert es zu einem Problem im besser bekannten Bereich, löst es dort so gut wie möglich und leitet aus dieser Lösung einen Befund zu dem Problem im weniger bekannten Bereich ab. Dieser Befund muss nicht immer zur Gänze zutreffen, manchmal auch gar nicht, selbst dann, wenn die im besser bekannten Bereich konzipierte „Lösung“ richtig ist (siehe die untenstehende Beispiel-Aufgabe „Sonnenblume“). Dies liegt an der mehr oder weniger gelingenden modellierenden Anpassung der beiden Bereiche aneinander.

Häufig, und dies ist wohl der bedeutendste Anwendungsfall, hat der durch Modellieren gewonnene Befund den Charakter einer *Vorhersage,* eines *„Blicks in die Zukunft“*. Diesen vorhersagenden Befunden ist eigen, dass man sie erst in der Zukunft bewerten kann, weil man erst dann weiß, ob der Befund gültig war oder nicht. Modellieren als prozessbezogene Kompetenz liegt demnach im Ansatz bereits dann vor, wenn jemand überhaupt zu irgendwelchen Vorgängen in der Zukunft liegende Voraussagen macht.

Modellieren als sprachliche Bewältigung des nicht real Existierenden

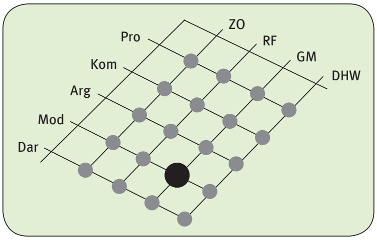
An dieser Stelle sei ferner auf die hohe *Bedeutung von Märchen und Fabeln insbesondere im Kindergarten* für die Entwicklung der Kompetenz des Modellierens allgemein und in der Mathematik verwiesen. Denn Modellieren gelingt nur dann, wenn der modellierende Geist über hinreichend viele und hinreichend machtvolle Erfahrungsbereiche und Gedankenbereiche verfügt, die er zum Modellieren einsetzen kann. Die Zielvorstellung, die Kompetenz „mathematisches Modellieren“ zu erwerben, beinhaltet, dass der modellierende Bereich die Mathematik mit ihren mächtigen abstrakten Werkzeugen ist. Diese Kompetenz des Modellierens muss also bereits eine gewisse Loslösung von konkreten Realitäten durchlaufen haben. Dann zeigt sich, dass mathematische Modelle nicht nur Situationen beschreiben, die in der Realität konkret materiell realisiert sind, sondern überraschenderweise auch solche, die nur in Teilen realisierbar sind, in wesentlichen anderen Teilen aber nicht, etwa wenn man sich fragt, wie schwer eine Spinne sein müsste, die 8 Meter hoch ist, obwohl weitere Überlegungen zeigen, dass es sie in dieser Form nicht geben kann, weil ihre Beine dann ihr Gewicht nicht mehr tragen könnten.

Das bedeutet, dass die prozessbezogene Kompetenz des Modellierens auch die Kompetenz einschließt, sich Dinge vorstellen zu können, Gegenstände wie Vorgänge, die so in der Realität nicht unmittelbar darzustellen sind, etwa das Ausdehnen eines Holzwürfels auf einen größeren Würfel oder das Umsetzen eines Beins, so dass aus zwei dreibeinigen Lebewesen eines mit zwei und eines mit vier Beinen wird. Einen wesentlichen entscheidenden Beitrag zu dieser Kompetenz leisten Märchen, denn *Märchen ermöglichen das Formulieren und Vorstellen von Kontexten, die in der realen Welt nicht vorstellbar sind,* etwa die von Riesen und Zwergen, von Goldkugeln, mit denen man Ball spielen kann, von Fischen, in denen man überlebt, und von Lokomotiven, die, von Magneten gezogen, fliegen können.

Beispiel-Aufgaben zum Modellieren für pädagogisches Fachpersonal

Aufgabe zum Modellieren: „Schuhregal“

Familie Fesch, das sind Sohn Tobi (8 Jahre), die Töchter Larissa (14 Jahre) und Saskia (16 Jahre), Mutter Eva (36 Jahre) und Vater Heinz (38 Jahre). Alle lieben Schuhe. Wie sieht wohl das Schuhregal der Familie aus? Wie viele Fächer hat es, und wie groß sind diese?

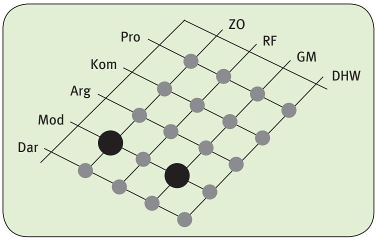


Erwartete prozessbezogene Kompetenzen:
M1 Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen
M2 Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übertragen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen

Diese Aufgabe erfordert reale Erfahrungen, Phantasie und die Kompetenz, sich das gefragte Objekt mit Hilfe von Zahlen, Gegenständen und Maßen vorstellen und beschreiben zu können. Sie zeigt zunächst, dass allein „richtig“ oder „falsch“ hier keine angemessenen Bewertungen der Bearbeitungen sein können. Eigentlich fordert die Aufgabe, ein solches Regal mit Hilfe bestimmter Maße zu entwerfen, den eigenen Entwurf mit bekannten Situationen zu vergleichen und ihn daraufhin als mehr oder weniger realistisch einzuschätzen. Auch diese Aufgabe ist in weiten Bereichen zu differenzieren, etwa als Frage nach der Größe eines Faches, in das ein bestimmter Kasten passen soll oder als Frage nach der Größe eines Kastens, in den eine bestimmte Zahl von Bällen passen soll. Sie kann zudem aus ganz verschiedenen Perspektiven angegangen werden, etwa indem man fragt, welche Schuhe die Familienmitglieder haben (oder haben wollen) und welche davon stets im Regal stehen sollten, oder indem man zunächst fragt, wie viel Raum in einer Wohnung für Schuhe zur Verfügung steht.

Aufgabe zum Modellieren: „Sonnenblume“

Eine Sonnenblume wächst in warmen Sommermonaten etwa 10 bis 30 cm in einer Woche. Sie wird im Mai gesät. Wie hoch ist sie im November? Und wie hoch ist sie im nächsten April?



Prozessbezogene Kompetenzen bei der Aufgabe „Sonnenblume“:

M1 Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen

M2 Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übertragen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen

Diese Aufgabe erfordert nicht nur die Kompetenz, aus der Sachlage eine Rechnung abzuleiten und zu lösen, sondern auch und insbesondere die Kompetenz, die Brauchbarkeit des Rechenergebnisses in der Realität einzuschätzen. Sinnvoll ist hier die Unterscheidung von *mathematischer Lösung* und *sachbezogenem Befund:* Die Lösung einer Rechnung ist falsch oder richtig, das betrifft hier den errechneten Wert 3,20 m im Zusammenhang mit der ersten Frage. Ein Befund ist zutreffend oder nicht. In diesem Fall lautet er: Im November kann die Sonnenblume 3,20 m hoch sein, aber die Frage nach der Höhe im folgenden Frühjahr ist mit der Rechnung nicht zu beantworten. Denn im nächsten April gibt es die Blume nicht mehr, da Sonnenblumen einjährige Pflanzen sind.

3.3.5 Darstellen

Darstellen bezeichnet das zumeist nicht flüchtige Ausformen und Festhalten mathematischer Objekte in Gegenständen, Bildern oder Zeichen, um diese sich oder anderen zu vergegenwärtigen und angemessen bearbeiten zu können.

Darstellen (D) für pädagogische Fach- und Lehrkräfte umfasst im Einzelnen folgende Kompetenzen (vgl. KMK, 2005):

D1 für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen
D2 eine Darstellung in eine andere übertragen
D3 Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten

Mathematische Phänomene darzustellen, bedeutet zunächst, sie sich selbst mit gewissen strukturierenden Hilfsmitteln bewusst zu machen. Wesentlich ist aber, dass diese Darstellung bereits das Element des Dokumentierens enthält. Das kann man sowohl für sich als auch für andere tun.

Dokumente sind dabei Darstellungen, die man nicht mehr oder nur noch schwer ändern kann. Eine hingeschriebene Rechnung etwa ist in diesem Sinne ein Dokument, es ist bereits fixiert und in der Regel kaum mehr flexibel.

Da aber viele mathematische Probleme nicht gezielt vorwärts laufend auf geradem Wege gelöst werden, sondern in der Realität bisweilen vielfältige Versuche und teils auch Irrwege erfordern, ist eine angemessene Darstellung nur dann hilfreich, wenn sie auch für das Probieren eine Unterstützung bietet.

Darstellungen, die dazu hinreichend flexibel sind, nennen wir *Spielräume.* Ein Muster aus gelegten Plättchen etwa ist in diesem Sinne ein Spielraum, es ist nicht fixiert und noch leicht zu verändern.

Angemessene mathematische Darstellungen zum Erlernen von Mathematik, sowohl in der Schule als auch im Kindergarten, sowohl für Fach- und Lehrkräfte als auch für Kinder, bestehen daher in einer angemessenen *Balance von Spielraum und Dokument.*

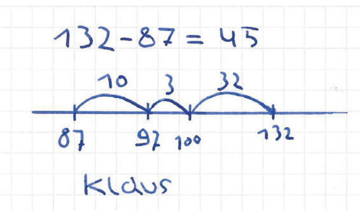
Ein Beispiel: Eine lose aus Papierstückchen auf ein Kartonblatt gelegte symmetrische Figur wäre in diesem Zusammenhang ein *Spielraum,* denn sie ist noch einfach zu verändern, dafür aber flüchtig. Klebt man die Stückchen auf dem Karton fest, so entsteht ein *Dokument,* es ist nicht mehr zu verändern, dafür aber nicht flüchtig (und leicht mitzunehmen).

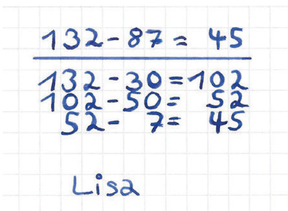
Beispiel-Aufgaben zum Darstellen für pädagogisches Fachpersonal

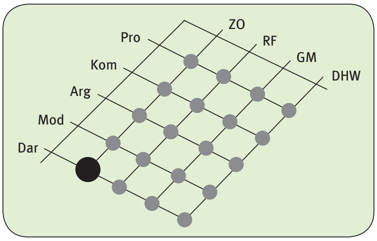
Aufgabe zum Darstellen: „Subtrahieren im 3. Schuljahr“

Hier haben Klaus und Lisa, beide im 3. Schuljahr, Aufgaben zum Subtrahieren gelöst und ihre Lösungen auf ihre eigene Art dargestellt.

Schreibe die Aufgabe von Lisa so auf, wie Klaus sie schreiben würde.
Und schreibe die Aufgabe von Klaus so auf, wie Lisa sie schreiben würde.



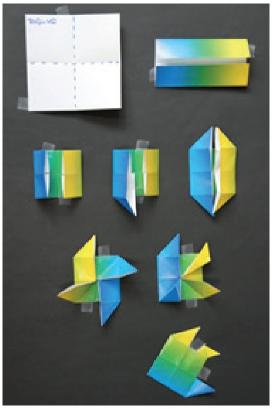




Prozessbezogene Kompetenzen bei der Aufgabe „Subtraktionen“:
D1 für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen
D2 eine Darstellung in eine andere übertragen
D3 Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten

Entscheidend an dieser Aufgabe ist die Anforderung, individuelle Arbeitswege in bestimmten Darstellungen erst lesen und dann schreiben zu können. Die Darstellungen betreffen zunächst Objekte, aber sie bilden insgesamt das Darstellen von Rechenwegen und darin das Darstellen von Strategien. Diese Darstellungen sind Dokumente, sie konnten erst entstehen, nachdem von dem Vorgehen ein ganzheitliches Konzept gebildet wurde.

Aufgabe zum Darstellen: „Falt-Plakate in Kita und Grundschule"

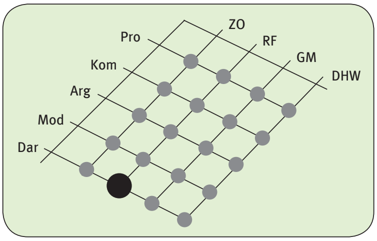


Dies ist ein Falt-Plakat zu einem Fisch. Falte den Fisch und prüfe, ob das Plakat an allen Stellen stimmt.

Lass Dir eine andere Falt-Figur erklären, lerne wie man sie faltet.

Oder nimm eine andere Falt-Figur, die Du schon kennst.

Stelle dazu ein Falt-Plakat her.



Erwartete prozessbezogene Kompetenzen:
D1 für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen

Diese Darstellung ist eine Konstruktionsbeschreibung. Die aufeinander folgenden Bilder bilden einen *„ikonischen Text"*. Diese Darstellung können viele Kinder lesen. Pädagogische Fachkräfte können an diesem Beispiel im Selbstversuch feststellen, wie schwierig und komplex es ist, die Botschaft dieses „Textes" in gesprochener oder geschriebener Sprache darzustellen. Der Text ist ein Dokument, aber es ist noch zu sehen, dass er aus einem Spielraum entstanden ist: Zunächst hat eine Gruppe von Grundschulkindern passende Faltfiguren lose hingelegt, dann wurden die endgültige Auswahl und Anordnung gemeinsam festgelegt. Schließlich entstand das Dokument durch Fixieren der Figuren auf dem Plakat mit Klebefilm.

3.3.6 Gewichtung, Bedeutung und Zusammenhang der prozessbezogenen Kompetenzen

Die prozessbezogenen Kompetenzen *Darstellen, Kommunizieren und Argumentieren* verweisen darauf, dass Mathematik nicht allein als eine individuelle Befassung zu sehen ist, sondern auch in der Gemeinschaft von Lernenden als Ergebnis gemeinsamer geistiger Konstruktion.

Abgesehen davon, dass Darstellen und Argumentieren auch in der individuellen Befassung mit Mathematik erscheinen, in der „Korrespondenz des Individuums mit sich selbst", kennzeichnen Darstellen, Kommunizieren und Argumentieren wesentlich den *interaktiven Charakter* mathematischen Tuns.

Die prozessbezogenen Kompetenzen zur Mathematik sind sowohl für die Ebene der Kinder als auch für die Ebene der Erwachsenen in den wesentlichen Dimensionen *Problemlösen, Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren, Darstellen* parallel formuliert (vgl. Abschnitt 2.2).

Tabelle 4 zeigt die Übereinstimmung und die Kohärenz der prozessbezogenen Kompetenzen, welche die Bildungsstandards für Kinder im *Primarbereich* ausweisen (vgl. Abschnitt 2.2 Ebene Kinder), mit denen in den Bildungsstandards für den *Mittleren Bildungsabschluss* Erwachsener. Der Unterschied liegt in der Reihenfolge und in der für den Mittleren Bildungsabschluss explizit benannten Kompetenz PK 5 *„Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen"*.

Wir orientieren uns hier aus Gründen der Kohärenz an der Reihung und Formulierung aus den Bildungsstandards für den Primarbereich.

Nur in den prozessbezogenen Kompetenzen für den Mittleren Bildungsabschluss, nicht dagegen in denen für den Primarbereich, findet sich zusätzlich die prozessbezogene Kompetenz:

(PK 5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen.

Dazu gehört:

- mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen arbeiten,
- symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt,
- Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen sowie
- mathematische Werkzeuge (wie Formelsammlungen, Taschenrechner, Software) sinnvoll und verständig einsetzen.

Diese Kompetenz betont das technische Handhaben formaler Werkzeuge. Sie erscheint für pädagogisches Fachpersonal hilfreich und nützlich im Sinne einer Kenntnis weiterführender Perspektiven, nicht aber als derart erforderlich, dass ihr ständiges Beherrschen als notwendiger Bestandteil einer angemessenen Qualifikation gesehen wird. Daher haben die Autorinnen und Autoren bei den prozessbezogenen Kompetenzen als Bezugspunkt diejenigen aus den Bildungsstandards für den Primarbereich gewählt.

Tabelle 4. *Bildungsstandards prozessbezogener Kompetenzen für Kinder und Erwachsene*[5]

Prozessbezogene Kompetenzen auf Ebene der Kinder (vgl. Bildungsstandards für den Primarbereich)	**Prozessbezogene Kompetenzen (PK) auf Ebene der Erwachsenen** (vgl. Bildungsstandards für den Mittleren Bildungsabschluss)
Problemlösen ■ *mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden,* ■ *Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren),* ■ *Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen.*	*(PK 2) Probleme mathematisch lösen* ■ *vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten,* ■ *geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden,* ■ *die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen sowie das Finden von Lösungsideen und die Lösungswege reflektieren.*
Kommunizieren ■ *eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren,* ■ *mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden, Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten.*	*(PK 6) Kommunizieren* ■ *Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse dokumentieren, verständlich darstellen und präsentieren, auch unter Nutzung geeigneter Medien,* ■ *die Fachsprache adressatengerecht verwenden,* ■ *Äußerungen von anderen und Texte zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen.*

5 *Anmerkung: In den von der KMK herausgegebenen Bildungsstandards Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss erscheinen die prozessbezogenen Kompetenzen mit geringfügig anderen Titeln und in anderer Reihenfolge als in den Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich. Das erklärt die abweichenden Titel und die Nummerierung in der rechten Spalte der Tabelle. Abgesehen davon, sind die Kennzeichnungen kohärent. (Da es sich um die prozessbezogenen Kompetenzen handelt, sind die Titel rechts jeweils durch ein „PK“ ergänzt.)*

Argumentieren ▪ *mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen,* ▪ *mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln,* ▪ *Begründungen suchen und nachvollziehen.*	*(PK 1) Mathematisch argumentieren* ▪ *Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („Gibt es…?“, „Wie verändert sich…?“, „Ist das immer so …?“) und Vermutungen begründet äußern,* ▪ *mathematische Argumentationen entwickeln (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise),* ▪ *Lösungswege beschreiben und begründen.*
Modellieren ▪ *Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen,* ▪ *Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen,* ▪ *zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren.*	*(PK 3) Mathematisch modellieren* ▪ *den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,* ▪ *in dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten,* ▪ *Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.*
Darstellen ▪ *für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen,* ▪ *eine Darstellung in eine andere übertragen,* ▪ *Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten.*	*(PK 4) Mathematische Darstellungen verwenden* ▪ *verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden,* ▪ *Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen,* ▪ *unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen und zwischen ihnen wechseln.*

3.3.7 Messung

Im Grundsatz könnten die für Viertklässler konzipierten Messinstrumente (vgl. Abschnitt 2.2) auch für die Erfassung der Kompetenzen pädagogischer Fach- und Lehrkräfte genutzt werden. Es besteht ein Desiderat in der Entwicklung passender Testaufgaben, mit denen bei pädagogischem Fachpersonal diese Kompetenzen zu testen sind.

Zur Messung des Fachwissens von Fach- und Lehrkräften liegen erste Testinstrumente aus empirischen Studien vor, etwa in Deutschland die Studie TEDS-M (Blömeke et al., 2010; vgl. Hasselhorn, Heinze, Schneider & Trautwein, 2013). Darüber hinaus werden in verschiedenen Projekten derzeit weitere Instrumente entwickelt. Dabei ist jedoch zu prüfen, inwieweit durch die Testinstrumente mathematische Prozesskompetenzen in ihrer gesamten Breite erfasst werden.

3.4 Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen

Bernd Wollring und Jens Holger Lorenz

In Abschnitt 2.3 sind inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen auf der Ebene der Kinder aus normativer und empirischer Sicht formuliert:

- Zum einen unterliegt den dargestellten inhaltsbezogenen Kompetenzen die inhaltliche Programmatik der deutschen Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich (KMK 2005; vgl. KMK, 2004) die, von Einzelheiten abgesehen, auch einen weitgehenden internationalen Konsens reflektieren (NTCM, 2000).
- Zum anderen ist anhand empirischer Befunde dargestellt, inwieweit Kinder im Kita-Alter, im Laufe ihrer Grundschulzeit und am Ende des 4. Grundschuljahres über derartige Kompetenzen typischerweise verfügen und inwieweit es für das Entwickeln dieser Kompetenzen im Verlauf der Kita- und Grundschulzeit Modelle gibt (siehe Ehmke et al., 2009).

Dabei zeigt sich im Wesentlichen, dass man von einigermaßen gesicherten Modellen der Kompetenzentwicklung im Laufe der Kita- und Grundschulzeit anhand empirischer Studien vorwiegend im Bereich der Arithmetik, also bei *Zahlen und Operationen,* ausgehen kann. Die Kompetenzen in den anderen Inhaltsbereichen, etwa *Raum und Form* und *Größen und Messen,* sind zum Teil durch Einzelstudien dokumentiert (siehe etwa Battista, 2007), in denen aber in der Regel nur bestimmte einzelne Kompetenzen beschrieben werden, kaum dagegen Typen von Kompetenzentwicklung (siehe Abschnitt 2.3). Hier besteht aus empirischer Sicht ein erhebliches Forschungsdesiderat.

Dies gilt mutatis mutandis auch für die entsprechenden inhaltsbezogenen Kompetenzen von pädagogischem Fach- und Lehrpersonal. Zum einen liegt dies daran, dass im Bereich der Arithmetik nahezu weltweit vergleichbare Curricula zu identifizieren sind, in den anderen Inhaltsbereichen dagegen weniger. Zum anderen ist die Kompetenzentwicklung im Bereich der Arithmetik wohl mehr als in den anderen Bereichen von Ausbildungseffekten abhängig, wobei die Ausbildungssysteme für pädagogische Fach- und Lehrkräfte zur Mathematik vielfältig diverse Muster aufweisen.

Daher sind die folgenden Ausführungen zu inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen für pädagogische Fach- und Lehrkräfte im Wesentlichen *normativ* gefasst. *Was sollten pädagogische Fach- und Lehrkräfte idealerweise*

wissen und können, um Kinder in ihrer mathematischen Bildung und Kompetenzentwicklung gut zu unterstützen?

Gemeint sind die folgenden Kompetenzdimensionen im Sinne der Professionalität von Fach- und Lehrkräften als *Inhaltswissen (content knowledge)*, das wiederum die Basis für *inhaltsbezogenes pädagogisches (fachdidaktisches) Wissen (pedagogical content knowledge)* bildet, wie es im folgenden Abschnitt 4.1 dargestellt ist. Auf dieser Basis sollen die Fach- und Lehrkräfte inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen von Kindern, z. B. im Rahmen von Spielanlässen, so identifizieren, entwickeln und fördern können, dass die Kinder von geleiteten oder teilgeleiteten Aktivitäten zunehmend zu eigenen Aktivitäten finden, in denen sich ihre Kompetenzen in angemessener Form äußern.

Die Struktur der inhaltlichen mathematischen Kompetenzen pädagogischer Fach- und Lehrkräfte kennzeichnen wir kohärent zu den inhaltlichen mathematischen Kompetenzen der Kinder den Bildungsstandards entsprechend (NTCM, 2000; KMK 2004, 2005, 2008; vgl. DMV, GDM & MNU, 2008; vgl. KMK, 2011).

Generell ist anzustreben, dass die inhaltlichen Kompetenzen der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte mindestens den Bildungsstandards Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss (KMK, 2004) entsprechen. Ein derartiges Kompetenzprofil fordert keine unangemessene Wissenschaftsorientierung, schafft aber sehr wohl die Kenntnisse, um die Arbeit in Kita, Hort und Grundschule gegenseitig anschlussfähig zu planen. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen gliedern wir anhand der Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich (KMK, 2005; vgl. Peter-Koop, 2008; Walther et al., 2010) wie folgt:

1. Kompetenzen zu *Zahlen und Operationen*
2. Kompetenzen zu *Raum und Form*
3. Kompetenzen zu *Mustern und Strukturen*
4. Kompetenzen zu *Größen und Messen*
5. Kompetenzen zu *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*

Dies ist zudem kohärent zum Bildungs- und Erziehungsplan für Kitas (Fthenakis et al., 2008; KMK & JFMK, 2010).

Allgemein und umfassend kennzeichnend für mathematische Kompetenzen ist der dritte Inhaltsbereich *Muster und Strukturen*. Man kann ihn dahingehend umfassend denken, dass Strategie bestimmende Elemente aller Inhaltsbereiche sich durch Muster und Strukturen charakterisieren lassen (siehe Kapitel 1 sowie etwa Wittmann, 2012). Darüber hinaus aber umfasst er Kompetenzen, die an spezifischen einzelnen Inhalten erworben werden, welche in den genannten Inhaltsbereichen nicht explizit erwähnt sind. Um der Listung in den Bildungsstandards zu folgen, haben wir diesen Inhaltsbereich unter 3.4.3 notiert.

3.4.1 Zahlen und Operationen

Hier ist zu wünschen und zu erwarten, dass pädagogische Fach- und Lehrkräfte selbst mindestens die Kenntnisse haben, die von Kindern am Ende der Grundschulzeit erwartet werden, in der Regel aber Kenntnisse, die von Kindern zum Mittleren Bildungsabschluss vorausgesetzt werden, u. a.:

- Kompetenzen zum Unterscheiden von „Zählen“ und „Abzählen“
- Kompetenzen zu Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen
- Kompetenzen zum Aufbau des Zehnersystems
- Kompetenzen zum Zählen von 1 bis 20, nach Möglichkeit in denjenigen Sprachen, die ihnen bei den Kindern begegnen
- Kompetenzen zum Durchführen der Grundrechenarten, sowohl in den jeweils landestypischen genormten schriftlichen Verfahren als auch in Form von individuellen Rechnungen „auf eigenen Wegen“
- Kompetenzen zum Rechnen in Kontexten

Zu unterscheiden ist dabei das *„Zählen“* im Sinne des Bildens der Zahlwortreihe in gesprochener und geschriebener Form vom *„Abzählen“*, bei dem die Zahlworte zum Bilden von Anzahlen dienen. Als zentrale Zahlaspekte sollten der *Ordinal zahlaspekt* (Zahlen zum Kennzeichnen von Reihenfolgen) und der *Kardinalzahl aspekt* (Zahlen zum Kennzeichnen von Anzahlen) bekannt sein.

Darüber hinaus sollen Zahlbeziehungen, etwa „größer“ und „kleiner“, anhand der Zahldarstellungen bestimmt werden.

Über diese möglicherweise elementar erscheinenden Kompetenzen hinaus geht es darum, das Prinzip des *„Bündelns“* (fortlaufendes Teilen durch 10 mit Rest) als Basis zur Zahldarstellung im Zehnersystem zu kennen. Beim Durchführen der Grundrechenarten ist zu realisieren, wie die einzelnen Strategien die Darstellungen der Zahlen im Zehnersystem nutzen.

Das Rechnen in Kontexten besteht darin, Zahlen auf Gegenstände zu beziehen (vgl. Lorenz, 1998; Deheane, 1999). Das hat zwei Aspekte:

- Zum einen geht es darum, Zahlen zunehmend durch Ablösen von gegenständlichen Vorstellungen als abstrakte Objekte zu begreifen (Abstrahieren von den Gegenständen),
- zum anderen geht es darum, Eigenschaften und Beziehungen in gegenständlichen Situationen mit Hilfe entsprechender Beziehungen und Eigenschaften von Zahlen zunehmend zu erschließen (Modellieren mit Hilfe von Zahlen).

Hier ist zudem Kreativität gefragt in der Kompetenz, Zahlenmuster in lebensweltlichen Situationen zu entdecken und zu beschreiben, etwa beim Tischdecken, beim Bereitstellen von Material für bestimmte Bastelarbeiten oder für Spiele im Freien oder beim Beschreiben und klatschenden Begleiten von Tanzfiguren.

Eine besondere Kompetenz von Fach- und Lehrkräften in Bezug auf Zahlen und Operationen besteht in der Unterscheidungsfähigkeit zwischen *semantisch* und *syntaktisch* durchgeführten Rechenoperationen.

- *Syntaktisch durchgeführte Rechenoperationen* basieren auf dem Anwenden und Nutzen eines mehr oder weniger explizit vereinbarten Regelwerkes, einer Art „Rechengrammatik“. Beispiel: Das schriftliche Multiplizieren zweier Zahlen nach dem in der Schule gelernten Normalverfahren wird von den meisten Menschen syntaktisch durchgeführt: Sie führen die Rechenschritte den gelernten Regeln entsprechend aus, aber sie machen sich nicht bei jedem Schritt bewusst, warum dieser nun gerade so zu geschehen hat. Hier wird ein bereitgestelltes Verfahren ökonomisch genutzt.
- *Semantisch durchgeführte Verfahren* dagegen basieren auf dem begleitenden Bewusstsein der Bedeutung der einzelnen Rechenschritte und sind in diesem Sinne die Basis zum Entwickeln eigener Strategien. Diese strategische Orientierung von Rechenwegen hängt keinesfalls vom Umfang des verwendeten Zahlenraums ab und ist auch im Zwanzigerraum oder im Hunderterraum möglich und sinnvoll. Beispiel: Berechnet man etwa die Differenz 505 – 498, indem man erst 500 von 505 abzieht und dann zum Ergebnis 2 addiert, so verwendet man ein Verfahren, das zu diesen speziellen Zahlen die Rechengesetze geschickt und ökonomisch nutzt und ohne Verstehen dieser Rechengesetze nicht zustande kommt. Hier wird ein spezifisches Verfahren aus einer Strategie entwickelt.

In Abschnitt 2.3 ist an dieser Stelle von „Rechengesetzen“ die Rede, womit Assoziativgesetze, Kommutativgesetze und das Distributivgesetz gemeint sind. Sie werden zwar im Rahmen der Mathematik als „Gesetze“ formuliert, sind aber im Wesentlichen die *Argumentationsbasis für flexible Strategien* und sollten daher auch in diesem Sinne verstanden und bezeichnet werden.

Es erscheint den Autorinnen und Autoren angemessen, die notwendigen Kompetenzen pädagogischer Fach- und Lehrkräfte zu *Zahlen und Operationen* auf eine zentrale Idee zu stützen:

Pädagogische Fach- und Lehrkräfte sollten imstande sein, Kompetenzen im Bereich Zahlen und Operationen so zu entwickeln, dass sie ein ausgewogenes Verständnis zwischen technischen Aspekten einerseits und strategischen Aspekten andererseits gewinnen und Gemerktes und Gedachtes sinnvoll miteinander verbinden können.

3.4.2 Raum und Form

Auch hier gelten wie im vorhergehenden Abschnitt für pädagogische Fach- und Lehrkräfte mindestens die Kompetenzerwartungen zu *Raum und Form,* die am Ende der Grundschulzeit erwartet werden, in der Regel soll aber über Kenntnisse verfügt werden, die von Kindern zum Mittleren Schulabschluss erwartet werden. In Abschnitt 2.3 sind diese Kenntnisse für Kinder differenziert beschrieben.

Wesentlich ist dort und in den Bildungsstandards Mathematik für die Grundschule die Unterscheidung von *Figuren und Abbildungen* (siehe KMK, 2005):

- *Figuren* meinen in diesem Zusammenhang ebene oder räumliche, auch gegenständlich denkbare Figuren, gewissermaßen die *Dinge,* mit denen gedacht und gehandelt wird, etwa Linien, Dreiecke, Quadrate, Kreise, Quader und Kugeln.
- *Abbildungen* meinen in diesem Zusammenhang keine Bilder oder Gegenstände, sondern dem mathematischen Sprachgebrauch entsprechend Handlungen, also *Prozesse,* die man mit den Figuren durchführen kann, etwa Drehen, Verschieben, Spiegeln und Vergrößern und Verkleinern.

Um solche Prozesse beschreiben zu können, sind Befassungssituationen erforderlich, in denen die Prozesse, soweit möglich, konkret geistig und mit den Händen durchgeführt und sprachlich begleitet werden. Solche Befassungssituationen müssen pädagogische Fach- und Lehrkräfte kennen, gestalten und selbst angemessen sprachlich begleiten können.

Dabei wird deutlich, dass neben den Sprachelementen, welche zum Beschreiben von Figuren selbst geeignet sind, auch solche von Bedeutung sind, welche die *Beziehungen von Figuren zueinander* beschreiben. Dies wird im Wesentlichen auf der Basis von Kompetenzen zur *räumlichen Orientierung* angebahnt. Das pädagogische Fachpersonal sollte Spiel- und Problemsituationen zur räumlichen Orientierung einrichten, gemeinsam durchführen oder durchspielen und dieses selbst sprachlich begleiten können (vgl. Battista, 2007).

Wesentliche Kompetenzen nicht nur zu *Raum und Form,* sondern auch zu *Größen und Messen* (vgl. auch Abschnitt 3.4.4) basieren auf der Kompetenz, ebene und räumliche Figuren geeignet zerlegen und zusammensetzen zu können. Diese Kompetenz sollte das pädagogische Fachpersonal besitzen, es sollte entsprechende Spiel- und Lernsituationen, etwa mit Legematerial oder Baumaterial, durchführen und dabei die auftretenden Gestalten und deren Beziehungen zueinander sprachlich kennzeichnen können.

Sinnvoll erscheint es, die inhaltlichen Kompetenzen des pädagogischen Fachpersonals zu *Raum und Form* aus einer zentralen Idee heraus zu formulieren:

Das pädagogische Fachpersonal sollte über Raumvorstellung verfügen.

Zu diesem Begriff gibt es vielfältige Kennzeichnungen, die jeweils verschiedene Facetten ausleuchten. Einige davon sind in Abschnitt 2.4 differenziert ausgewiesen. Hier geben wir eine knappe, aber umfassende Charakterisierung:

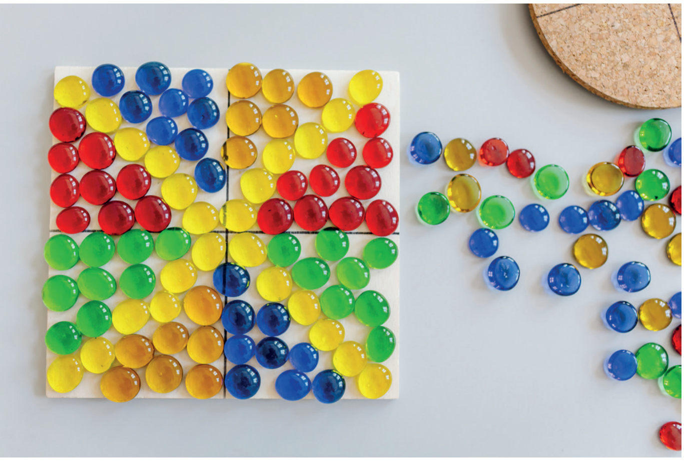
Raumvorstellung ist die Fähigkeit, sowohl ebene als auch räumliche Objekte verinnerlicht sehen, verinnerlicht bewegen und verinnerlicht vergrößern und verkleinern zu können.

In diesem Sinne sollte das pädagogische Fachpersonal, knapp gesagt, „mental gestalten" können.

3.4.3 Muster und Strukturen

Muster und Strukturen beschreiben Phänomene, die durch bestimmte *Bildungsgesetze* festgelegt werden, etwa das systematische Wachsen einer Serie von Zahlen oder eines Streichholzmusters, das Erscheinungsbild eines Schmuckbandes oder der Aufbau einer Pyramide aus Bausteinen. *Muster und Strukturen* sind als Grundkonzept kennzeichnend für die Mathematik allgemein und treten als jeweils bestimmendes Konzept in sämtlichen anderen Inhaltsbereichen auf (vgl. Kapitel 1 und Abschnitt 2.3).

Pädagogische Fach- und Lehrkräfte *sollten die Kompetenz besitzen, zu erkennen, wie ein Muster aus Grundelementen heraus bestimmt und fortzusetzen ist,* etwa in der Farbabfolge von Gegenständen in einer Reihe, in bestimmten



Formen-Serien, in bestimmten Zahlenmustern oder in bestimmten flächigen Strukturen, ebenso bei Mustern im Alltagsleben, bei Sitzordnungen und gedeckten Tischen, bei Spielaufstellungen und Tänzen, etc.

Eine spezifische Kompetenz betrifft auch hier die *sprachliche Begleitung* des Umgangs mit Mustern, denn sie fordert nicht nur das Kennzeichnen gegenständlicher Elemente in den Mustern, sondern auch das Bezeichnen von Beziehungen, welche diese Elemente miteinander haben (vgl. Abschnitt 3.3, prozessbezogene Kompetenzen, z. B. Kommunizieren).

3.4.4 Größen und Messen

Gemäß den Kompetenzerwartungen für Kita- und Grundschulkinder sollten auch pädagogische Fach- und Lehrkräfte entsprechende eigene Kompetenz im Bereich *Größen und Messen* besitzen.

Dazu gehört vorrangig das Verständnis der zentralen Idee des Messens: Sie besteht darin, einen Gegenstand, das zu Messende, durch ein Maß ganz oder teilweise zu charakterisieren, und zwar so, dass jemand anders an einem anderen Ort einen entsprechenden Gegenstand anhand dieses Maßes identifizieren oder herstellen kann.

Diese Idee, *Dokumentieren zum Zwecke des Identifizierens oder des Rekonstruierens,* ist bei allen Messvorgängen leitend. Sie leuchtet aus, dass Messungen und Messergebnisse Dokumente des Gemessenen sind, die zum Beschreiben, zum Auswählen, zum Wiederherstellen oder zum Herstellen dienen. Diese Idee ist u. a. eine Leitidee in der Reggio-Pädagogik.

Pädagogische Fach- und Lehrkräfte sollten die Kompetenz besitzen, bei Bedarf gemeinsam mit den Kindern geeignete Messinstrumente zu nutzen (etwa beim Backen oder beim Abgrenzen eines Spielfeldes). Dazu gehören Werkzeuge wie Maßbänder, Messbecher oder Gewichte, aber auch einfach erscheinendes Material, wie etwa Schnüre oder Kartonstreifen zur skalenlosen Längenmessung, Papierbögen zur Flächenbestimmung oder eine Tasse oder ein Eimer zum Bestimmen von Rauminhalten.

3.4.5 Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Dieser Inhaltsbereich umfasst zwei Teile mit ganz unterschiedlichen leitenden Begriffsbildungen: *Daten und Häufigkeit* zum einen und *Wahrscheinlichkeit* zum anderen (vgl. Hasemann et al., 2007).

Daten und Häufigkeit

„Daten handhaben" meint an dieser Stelle Techniken, insbesondere Darstellungsformen zu kennen oder entwickeln zu können, mit der sich *viele* Dinge, etwa viele Zahlen, oder die *Eigenschaften von vielen Dingen,* etwa viele Größen oder viele Messwerte, übersichtlich so darstellen lassen, dass man sie miteinander vergleichen oder zusammenfassend kennzeichnen kann. Dabei spielt es zunächst keine Rolle, ob diese Daten durch einen zufälligen Vorgang entstanden sind oder durch einen Herstellungsvorgang, der gar nicht vom Zufall bestimmt ist.

Es geht unabhängig vom Zustandekommen der Daten zentral darum, in einer Vielzahl von gegebenen Daten mögliche Muster und Strukturen zu finden oder diese vielen Daten in irgendeiner Weise repräsentativ durch wenige kennzeichnende Daten zu beschreiben. Geeignete Formen sind hier im Wesentlichen geordnete materielle Arrangements, etwa „sortierte Dinge" auf dem Tisch, in Kästen oder in Schränken, und geordnete Dokumente, etwa Listen, Tabellen oder geeignete Bilder.

Listen und Tabellen müssen dabei keineswegs als geschriebene oder gemalte Ergebnisse entstehen, es kann sich sehr wohl auch um geordnete Arrangements von Dingen handeln, etwa eine gut begründete Sortierung von Bausteinen oder Spielmaterial oder Material des täglichen Bedarfs, etwa Geschirr und Besteck.

Häufigkeiten sind Anzahlen, mit denen Daten in den genannten Arrangements auftreten. Während absolute Häufigkeiten (d. h. Anzahlen und keine Anteile in Form von Brüchen) typischerweise nützlich für Vergleiche und Sortierungen sind, gilt dies für relative Häufigkeiten (d. h. Brüche oder Prozentangaben) in der Kita eher nicht und in der Grundschule nur in wenigen wohl bestimmten Fällen.

Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit ist ein schwieriges Grundkonzept, zu dem neben den in der Mathematik präzisierten Auffassungen viele individuelle teilweise intuitiv richtige und teilweise eher unzutreffende Vorstellungen bestehen.

In der Regel sind Vorstellungen zur Wahrscheinlichkeit sowohl bei Kindern wie bei Erwachsenen auf der Basis von Spielerfahrungen durch nicht rationale, teilweise animistische Vorstellungen begleitet (siehe etwa Wollring, 1994). Einige der Fehlvorstellungen zur Wahrscheinlichkeit, insbesondere angenommene Vorstellungen zur Beeinflussbarkeit zufälliger Ereignisse, können bei Menschen aller Altersstufen die Basis für Spielsucht bilden. Daher ist darauf zu achten, dass nicht

durch ein ungeeignetes Bewerten und Anbieten von Spielsituationen, die durch Zufallsgeschehen bestimmt werden, Schaden aus mathematischen Defiziten entsteht oder unbeachtet bleibt. Pädagogische Fach- und Lehrkräfte sollten deswegen zumindest die Grundzüge des Krankheitsbildes Spielsucht kennen und wissen, dass sie auf Fehldeutungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs basieren kann.

Der mathematische Wahrscheinlichkeitsbegriff ist vergleichsweise abstrakt und schließt manche Alltagskonnotationen nicht ein, die für Kinder wie Erwachsene möglicherweise zur Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten bedeutsam sind.

Man unterscheidet im Wesentlichen *subjektive* und *objektive* Wahrscheinlichkeiten, wobei subjektive Wahrscheinlichkeiten auf persönlichen Einschätzungen beruhen und objektive Wahrscheinlichkeiten auf vereinbarten Argumentationsgrundlagen.

Bei den objektiven Wahrscheinlichkeiten unterscheidet man wiederum solche, die man aus bestimmten *Annahmen zur Gleichwahrscheinlichkeit* gewinnt (etwa bei einer Münze oder einem Würfel), und solche, die aus *Schätzungen bei häufigen Versuchswiederholungen* resultieren.

Pädagogische Fach- und Lehrkräfte sollten über mathematische Wahrscheinlichkeit zentral wissen:

Wahrscheinlichkeiten sind geschätzte Häufigkeiten bei vielen Versuchswiederholungen.

Diese Aussage ist zwar von ärgerlicher Unschärfe, wird aber in der Mathematik mit aufwändigen formalen Mitteln präzisiert. Aber bereits die unscharfe Formulierung lässt die zentrale Botschaft erkennen:

Wahrscheinlichkeiten machen keine Vorhersage über Einzelversuche, sondern stets nur Vermutungen über „viele“ Versuche.

Viele der bei Spielsucht auftretenden Fehlvorstellungen beruhen darauf, dass Wahrscheinlichkeitsaussagen für Einzelversuche vereinnahmt werden, insbesondere für den nächsten Versuch in einer bislang erfolglosen Versuchsreihe.

Pädagogische Fach- und Lehr-kräfte sollten daher die Kompetenz besitzen, Wahrscheinlichkeitsaussagen danach unter-scheiden zu können, ob sie sich auf Einzelfälle beziehen oder auf größere Versuchsserien und ob sie in unangemessener Weise von animistischen Vorstellungen oder Vorstellungen zur Beeinflussbarkeit begleitet sind. Gemeint sind Annahmen, dass irgendein Wesen oder ein steuernder Mechanismus auf das Zufallsgeschehen einwirkt. Sie sollten ferner wissen, was ein „fairer Würfel“ und eine „faire Münze“ sind – das sind Zufallsgeräte, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind – und wie sich diese Eigenschaften in Spielsituationen auswirken. Pädagogische Fach- und Lehrkräfte sollten sich sorgfältig überlegen, ob und inwieweit sie bei zufallsbestimmten Spielen Gewinne in Form von Spielgeld einbeziehen.

3.4.6 Gewichtung und Bedeutung der inhaltsbezogenen Kompetenzen

In den Bildungsstandards sind alle genannten Inhaltsbereiche in ihrer Bedeutung gleichrangig genannt, aber allein in der Reihenfolge steckt eine implizite Gewichtung und Bezogenheit aufeinander: Gleichrangig bedeutsame Grundlagen für alles Weitere sind die Inhaltsbereiche *Zahlen und Operationen und Raum und Form*. Gelegentlich wird zwar der Inhaltsbereich *Zahlen und Operationen* als vorrangig kennzeichnend für die Mathematik angesehen (vgl. Abschnitt 2.3). Dabei ist aber zu bedenken, dass die Kompetenz *Raumvorstellung,* bezogen auf die Mathematik, so zu verstehen ist, dass dort mit den Objekten im Raum nicht nur solche unserer konkreten materiellen Umwelt gemeint sind, sondern auch abstrakte Objekte in abstrakten Räumen, auf die sich das mentale Bewegen und das mentale Ändern beziehen. In diesem erweiterten Sinn ist Raumvorstellung auch eine Kompetenz, die in den Aufbau der Kompetenzen zu *Zahlen und Operationen* eingeht. Der Inhaltsbereich *Größen und Messen* baut darauf auf, wiederum darauf der Inhaltsbereich *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.*

Umfassend für alle anderen Inhaltsbereiche und daher nicht „daneben“, sondern als „darüber“ auszuweisen, ist der Bereich *Muster und Strukturen.*

3.4.7 Messung

Zur Messung des inhaltsbezogenen Fachwissens von Fach- und Lehrkräften liegen erste Testinstrumente aus empirischen Studien vor, etwa Arbeiten der „Michigan Group“ um Deborah Ball und in Deutschland die Studie TEDS-M (Blömeke et al., 2010). Darüber hinaus werden in verschiedenen Projekten derzeit weitere Instrumente entwickelt. Dabei ist jedoch zu prüfen, inwieweit durch die Testinstrumente mathematische (Inhalts-)Kompetenz in ihrer gesamten Breite erfasst wird.

3.5 Mathematikdidaktische Kompetenzen

Christoph Selter, Christiane Benz, Jens Holger Lorenz und Bernd Wollring

Wie in Kapitel 1 erwähnt, verwendet die Expertengruppe sinngemäß die Differenzierung der mathematikbezogenen Kompetenzen in fachliche *(mathematical content knowledge)* und fachdidaktische Kompetenzen *(pedagogical content knowledge)* (vgl. etwa Shulman, 1985, 1986; Bromme, 1992). Der erstgenannte Bereich des Fachwissens wurde dabei in inhaltsbezogene und prozessbezogene Kompetenzen unterteilt. Darüber hinaus wird im hier ausgeführten Bereich der Fachdidaktik eine Aufsplittung in mathematikbezogene *didaktische Kompetenzen* und mathematikbezogene *diagnostische Kompetenzen* vorgenommen (vgl. Hill, Ball & Schilling, 2008).

Bei der Formulierung von Kompetenzen für die Gestaltung von mathematischen Bildungsprozessen in Form von *Bedingungsfaktoren* bei Erziehenden im Elementarbereich greift auch Gasteiger (2010, S. 150ff.) auf diese Einteilung zurück. Sie unterscheidet:

- Fachkompetenz wie z. B. Wissen über Curricula als Voraussetzung für die Planung und Gestaltung von Spiel- und Erkundungsumgebungen (vgl. mathematikdidaktische Grundkompetenzen, Abschnitt 3.5.1),
- Pädagogisch-didaktische Handlungskompetenz (mathematikunterrichtsbezogene Handlungskompetenz, Abschnitt 3.5.2) und
- Fachkompetenz als Voraussetzung für das Erkennen von individuellen Lernständen (diagnostische Kompetenz, Abschnitt 3.5.3).

Insgesamt ist zu konzidieren, dass Expertisen (Fröhlich-Gildhoff et al., 2011) oder ‚offizielle' Dokumente (vgl. KMK & JFMK, 2010; KMK, 2011) zur Kompetenzorientierung von frühpädagogischen Fachkräften eher generalistisch angelegt sind und in der Regel keine spezifischen Aussagen zum Bereich mathematikdidaktischer Kompetenzen enthalten. Das betrifft auch den landesübergreifenden Lehrplan, den 14 von 16 Bundesländern für die Ausbildung von Erzieherinnen und Erziehern entwickelt haben (Bundesarbeitsgemeinschaft der öffentlichen und freien, nicht konfessionell gebundenen Ausbildungsstätten für Erzieherinnen und Erzieher in der Bundesrepublik Deutschland [BöfAE], 2012).

Etwas anders sieht es aus, wenn man sich mit der Ausbildung von Personal für den Elementarbereich befasst, welche an Fachhochschulen, Pädagogischen Hochschulen oder Universitäten stattfindet und für die bisweilen ein integrierter Studiengang für den Elementar- und den Primarbereich angeboten wird (vgl.

z. B. Korff, 2008). Hier werden häufig konkrete Kompetenzerwartungen formuliert (Gerstberger, Wagner & von Behr, 2008; Pädagogische Hochschule Ludwigsburg [PHL], 2012), die auch in diese Expertise eingeflossen sind.

Für die Lehramtsstudiengänge hat die KMK (2008) ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und die Fachdidaktiken formuliert, welche für den Bereich der Grundschule allerdings zu wenig aussagekräftig sind. Daher soll im Folgenden auf die zeitgleich entstandenen konkreteren Empfehlungen der drei Fachgesellschaften ‚Deutsche Mathematiker-Vereinigung‘ (DMV), ‚Gesellschaft für Didaktik der Mathematik‘ (GDM) und ‚Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts‘ (MNU) Bezug genommen werden (Ziegler, Wiegand & a Campo, 2008). Die drei Fachgesellschaften beschreiben neben fachbezogenen Reflexionskompetenzen und mathematikdidaktischen diagnostischen Kompetenzen zwei Facetten der mathematikdidaktischen Kompetenz (mathematikdidaktische Grundkompetenzen und mathematikunterrichtsbezogene Handlungskompetenzen), die cum grano salis auch den Kategorien von Ball et al. (2008), ‚knowledge of content and teaching‘ bzw. ‚knowledge of content and curriculum‘, entsprechen.

In Anlehnung an die bestehenden Konzeptionen werden im Folgenden drei Zieldimensionen der mathematikdidaktischen Kompetenz ausgeführt:

- mathematikdidaktische Grundkompetenzen
- mathematikdidaktische (unterrichtsbezogene) Handlungskompetenzen
- mathematikbezogene Diagnosekompetenzen

3.5.1 Mathematikdidaktische Grundkompetenzen

Die Empfehlungen von DMV, GDM und MNU formulieren folgende mathematikdidaktische Grundkompetenzen für den schulischen Bereich: Die Lehrpersonen …

- kennen und bewerten Konzepte von „mathematischer Bildung“ und die Bedeutung des Schulfaches Mathematik für die Gesellschaft und die Schulentwicklung.

- verfügen über theoretische Konzepte zu zentralen mathematischen Denkhandlungen wie Begriffsbildung, Modellieren, Problemlösen und Argumentieren.
- beschreiben zu den zentralen Themenfeldern des Mathematikunterrichts verschiedene Zugangsweisen, Grundvorstellungen und paradigmatische Beispiele; begriffliche Vernetzungen, u. a. durch fundamentale Ideen, typische Präkonzepte und Verstehenshürden, Stufen der begrifflichen Strenge und Formalisierung und deren altersgemäße Umsetzungen.
- stellen Verbindungen her zwischen den Themenfeldern des Mathematikunterrichts und ihren mathematischen Hintergründen.
- reflektieren die Rolle von Alltagssprache und Fachsprache bei mathematischen Begriffsbildungsprozessen.
- kennen und bewerten Konzepte für schulisches Mathematiklernen und -lehren (genetisches Lernen, entdeckendes Lernen, dialogisches Lernen usw.).
- beschreiben Möglichkeiten fächerverbindenden Lernens im Verbund mit dem Fach Mathematik.
- bewerten Bildungsstandards, Lehrpläne und Schulbücher und nutzen sie reflektiert für die Unterrichtsgestaltung.
- rezipieren fachdidaktische Forschungsergebnisse und vernetzen sie mit ihren Kenntnissen.

Unter Berücksichtigung der institutionellen und pädagogischen Besonderheiten des Elementarbereichs könnte man für Fachkräfte im Elementarbereich analog folgende Kompetenzen formulieren. Die pädagogischen Fachkräfte …

- kennen und bewerten Konzepte von „mathematischer Bildung“ und deren Bedeutung für die Gesellschaft.
- beschreiben zu zentralen Themenfeldern der frühen mathematischen Bildung verschiedene Zugangsweisen und paradigmatische Beispiele.
- reflektieren die Rolle von Alltagssprache und sich anbahnender Fachsprache bei mathematischen Lernprozessen.
- kennen und bewerten zentrale Konzepte für Mathematiklernen und -lehren (entdeckendes Lernen, dialogisches Lernen usw.).

- kennen Orientierungspläne und verschiedene Konzeptionen für frühe Bildung und nutzen sie reflektiert für die Unterstützung mathematischer Bildungsprozesse.

3.5.2 Mathematikdidaktische (unterrichtsbezogene) Handlungskompetenzen

Folgende mathematikdidaktische (unterrichtsbezogene) Handlungskompetenzen werden in den Empfehlungen für die Grundschule (Ziegler et al., 2008) angeführt. Die Lehrpersonen ...

- kennen wesentliche Elemente von Lernumgebungen und nutzen diese zur zielgerichteten Konstruktion von Lerngelegenheiten (Aufgaben als Ausgangspunkt für Lernprozesse; Lehr- und Lernmaterialien als Mittel fachlichen Lernens; Unterrichtsmethoden in ihrer fachspezifischen Ausformung).
- verfügen über fachspezifische Interventionsmöglichkeiten (z. B. Umgang mit vorläufigen Begriffen, Reaktion auf Fehler, heuristische Hilfen).
- kennen und bewerten Verfahren für den Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht (z. B. Lernausgangsdiagnosen, Prozesshilfen, natürlich differenzierende Aufgaben und Lernarrangements).
- kennen Verfahren qualitativer und quantitativer empirischer Unterrichtsforschung im Fach Mathematik (z. B. Fallstudien, Feldstudien) und können Ergebnisse bei der Gestaltung von Lernprozessen berücksichtigen.
- reflektieren den Umgang mit Verfahren empiriegestützter Unterrichtsentwicklung (z. B. durch zentrale Leistungsmessung).

Bezogen auf den Elementarbereich können nun analog folgende mathematikdidaktische Handlungskompetenzen formuliert werden: Die pädagogischen Fachkräfte ...

- kennen wesentliche Elemente von Spiel- und Erkundungsumgebungen und nutzen diese zur Konstruktion von mathematischen Lerngelegenheiten (Spiele als Ausgangspunkt für Lernprozesse).
- können in Situationen des Alltags Gelegenheiten für mathematisches Lernen aufgreifen, d. h. sie erkennen in Situationen den mathematischen Gehalt, reagieren dementsprechend und regen weitere Handlungen und Gespräche an.

- kennen fachspezifische Interventionsmöglichkeiten (z. B. Umgang mit vorläufigen Begriffen, Reaktion auf kindliche Denkkonstruktionen, heuristische Hilfen).
- kennen und bewerten Verfahren für den Umgang mit Heterogenität bei mathematischen Bildungsprozessen (z. B. Prozesshilfen, natürlich differenzierende Spiel- und Erkundungsumgebungen).

3.5.3 Mathematikbezogene Diagnosekompetenzen

Zur Diagnosekompetenz von pädagogischen Fach- und Lehrkräften gehört die „[...] Fähigkeit, Schülermerkmale und Aufgabenschwierigkeiten zutreffend einzuschätzen. Dazu sind diagnostisches Wissen (über Fähigkeiten und Leistungen von Schülern und die Schwierigkeit von Aufgaben) und diagnostische Fertigkeiten (Beobachtungsfähigkeiten, Beherrschung von Diagnoseinstrumenten) erforderlich“ (Schrader & Helmke, 2001, S. 48).

Zu den Anforderungen aus dem Elementarbereich kommt in der Grundschule zusätzlich der Bewertungsaspekt der diagnostischen Kompetenz hinzu, da die Diagnose eine Rolle für die Notenvergabe und für relevante Schullaufbahnentscheidungen durch Lehrkräfte spielt.

In den Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik in Form der Empfehlungen der Berufsverbände DMV, GDM und MNU (Ziegler et al., 2008) werden im Primarbereich folgende mathematikdidaktische diagnostische Kompetenzen angeführt:

Die Lehrpersonen...

- beobachten, analysieren und interpretieren mathematische Lernprozesse.
- kennen und reflektieren Ziele, Methoden und Grenzen der Leistungsüberprüfung und -bewertung im Mathematikunterricht.
- kennen Grundlagen empirischer Kompetenzmessung und können deren Ergebnisse handhaben (z. B. Intelligenz- und Schulleistungstests, zentrale Lernstandserhebungen; vgl. Abschnitte 2.2 und 2.3).
- führen strukturierte Interviews und informelle Gespräche als individualdiagnostische Verfahren durch und werten sie aus.
- konstruieren diagnostische Aufgaben und analysieren und interpretieren Schülerleistungen.
- beschreiben Unterrichtsarrangements und -methoden mit diagnostischem Potenzial.

- erstellen auf diagnostischen Ergebnissen beruhende Förderpläne für einzelne Schülerinnen und Schüler oder Lerngruppen.
- beschreiben Konzepte und Untersuchungen von Rechenschwäche und mathematischer Hochbegabung.

Im Elementarbereich sind die diagnostischen Kompetenzen im Kontext von sensiblen Beobachtungen in Lehr-Lern-Situationen von Bedeutung. Sie spielen eine wichtige Rolle für die oben ausgeführte Gestaltung von Spiel- und Lernumgebungen und schließlich für den Kompetenzerwerb der Kinder (vgl. Abschnitte 2.1, 2.2 und 2.3).

Dies betont die Kenntnis von Metawissen pädagogischer Fach- und Lehrkräfte, insbesondere

1) *Wissen über typische Entwicklungsverläufe und Abweichungen:* Die in der Didaktik und Entwicklungsforschung vorhandenen Erkenntnisse über die typischen Entwicklungsverläufe und ihre Abweichungen sind insofern von Bedeutung für pädagogische Fach- und Lehrkräfte, als auch hier gilt: „Man sieht nur, was man weiß“, d. h. die Diagnose ist theorie- und hypothesengeleitet, und die Beobachtung ist gebunden an die zur Verfügung stehende Begrifflichkeit.
2) *Wissen über Präventions- und Interventionskonzepte:* Die diagnostische Beobachtung geschieht im Hinblick auf mögliche förderungsrelevante Aspekte der kindlichen Entwicklung. Hierfür sind Kenntnisse darüber notwendig, was im Rahmen des Einrichtungsalltags in kindlichen Handlungen angesprochen werden kann, was für Spiele sich eignen und welche Interventionen gegebenenfalls außerhalb der Einrichtung durchgeführt werden müssen. Die pädagogische Fachkraft ist die erwachsene Bezugsperson, welche die kindliche Entwicklung professionell beobachtend begleitet und daher in der Lage sein sollte, möglichen Interventionsbedarf zu diagnostizieren.
3) *Wissen über den Einsatz geeigneter formaler Diagnoseinstrumente:* Die Absicherung und Unterstützung der *informellen* Diagnoseleistung geschieht in der Kita und der Grundschule durch Wissen über die differentielle Aussagekraft und die Einsatzmöglichkeiten geeigneter *objektiver Verfahren* (vgl. Abschnitte 2.2 und 2.3):

   - Normorientierte Testverfahren/Vergleichsarbeiten (Grundschule)
   - Lehrzielorientierte Tests
   - Verfahren zur qualitativen, handlungsleitenden Diagnostik

Es geht in der Regel nicht darum, mit den Testverfahren ein Datum, d. h. eine Zahl als Testergebnis zu generieren, sondern durch die Auseinandersetzung mit den diagnostischen Verfahren eine Verbesserung der subjektiven Einschätzungen zu erlangen. Zudem sollten Beobachtungen sowohl im Elementarbereich als auch im Primarbereich längsschnittlich angelegt sein, es soll die Entwicklung erfasst und nicht lediglich ein aktueller Score in einem (beliebigen) Test gemessen werden. Dies bedeutet auch, dass die gleichen oder ähnliche Aufgaben bzw. Anforderungen über einen längeren Zeitraum gestellt und die Veränderungen der kindlichen Problemlösekompetenz dokumentiert werden (Cloos & Schulz, 2011). So lässt sich z. B. die Entwicklung des sog. „Zahlensinns“ (number sense) nachweisen (Howell & Kemp, 2010).

Um in diesem Sinne diagnostische Daten zu sammeln, muss also der Lernfortschritt beobachtet und dokumentiert werden. Dies ist insofern keine leichte Aufgabe, als jede Beobachtung schon a priori theoriegeleitet ist. Es wird nur das gesehen, wofür Begriffe vorliegen, seien diese nun entwicklungspsychologischer oder didaktischer Natur. Eine ungerichtete Wahrnehmung kindlicher Verhaltensweisen und anschließende Beschreibung der beobachteten Phänomene ist nicht ausreichend, da fehleranfällig (Mischke, 2007).

Bereits die Beobachtung muss daher gezielt sein, soll sie denn in eine Förderung münden. Interviewsituationen, die möglichst normiert sind, gewährleisten dabei eine Vergleichbarkeit (was auch der eigenen Wahrnehmungsschulung dient), andererseits sollten sie so frei sein, dass das Kind sich in dem vorgegebenen Rahmen entfalten kann (Peter-Koop & Grüßing, 2007; vgl. dazu Abschnitt 2.3).

3.5.4 Messung

Zur Messung des fachdidaktischen Wissens von Fach- und Lehrkräften liegen erste Testinstrumente aus empirischen Studien wie z. B. Arbeiten der „Michigan Group“ um Deborah Ball und Hyman Bass, TEDS-M oder KomMa vor.

In empirischen Untersuchungen zur Messung fachdidaktischer Kompetenzen von Lehrpersonen werden unterschiedliche Kompetenzfacetten unterschieden, die zwar nicht eins zu eins auf die hier in Anlehnung an die Empfehlungen von DMV, GDM und MNU formulierten Zieldimensionen passen, jedoch zu diesen in Bezug gesetzt werden können (für einen Überblick über den ‚state of the art‘ vgl. Blömeke & Delaney, 2012). In COACTIV etwa wird zwischen dem Wissen über Erklären und Repräsentieren, Wissen über Schülerkognitionen und Wissen über multiple Lösbarkeit von Aufgaben differenziert (Kunter et al., 2011).

Die ‚Teacher Education and Development Study: Learning to Teach‘ (TEDS-LT) konzeptionalisiert in Stoffdidaktisches Wissen (z. B. über Grundvorstellungen) und erziehungswissenschaftlich-psychologisches Wissen (z. B. Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht) (Buchholz & Kaiser, 2013).

Die ‚Learning to Teach Mathematics – Teacher Education and Development Study' (TEDS-M) verwendet die Subdimensionen ‚curriculares und planungsbezogenes Wissen' (z. B. Kenntnis des Lehrplans) und ‚interaktionsbezogenes Wissen' (im Wesentlichen Analyse- und Diagnosefähigkeiten) (Döhrmann, Kaiser & Blömeke, 2010, 2012).

Darüber hinaus werden in verschiedenen Projekten zurzeit weitere Instrumente entwickelt. Hier ist insbesondere auch die Nutzung von Videovignetten als Möglichkeit der Erfassung handlungsnaher Kompetenzen zu bedenken. Vor allem in Bezug auf die prozessbezogenen Kompetenzen ist zu prüfen, inwieweit durch die Testinstrumente mathematische Kompetenz in ihrer gesamten Breite erfasst wird.

Auch wenn die Konzeptionalisierungen sich leicht unterscheiden, so lassen sich die dort verwendeten Testinstrumente für ausgewählte Aspekte der o. a. Kompetenzformulierungen nutzen bzw. adaptieren.

Für den Elementarbereich sei diesbezüglich auf im Projekt, Struktur, Niveau und Entwicklung professioneller Kompetenzen von Erzieherinnen und Erziehern im Bereich Mathematik' (KomMa) entwickelte Instrumente verwiesen (Blömeke, Grassmann & Wedekind, 2013).

4 Gelingensbedingungen

4.1 Gelingensbedingungen für die mathematische Bildung von Kindern

Jens Holger Lorenz und Christiane Benz

Damit sich im Bildungsalltag eine gelingende Aktivität mit mathematischem Inhalt ergeben kann, müssen eine Reihe von Bedingungen erfüllt und bestimmte Kompetenzen auf Seiten der pädagogischen Fachkräfte gegeben sein (vgl. Gasteiger, 2010, S. 150ff.):

- Fachkompetenz (vgl. Abschnitt 3.5), insbesondere für
  - die Planung und Gestaltung effektiver Lerneinheiten
  - das Erkennen von individuellen Schwierigkeiten
- Pädagogisch-didaktische Handlungskompetenz (vgl. Abschnitt 3.5), insbesondere für
  - das Erkennen und die Nutzung von Lerngelegenheiten (vgl. auch van Oers, 2004)
  - die Förderung und das Auswählen passgenauer Angebote (Wielpütz, 2007)
- Einstellung zum Bereich Mathematik (vgl. Abschnitte 3.1 und 3.2)

Die folgenden Ausführungen zu Gelingensbedingungen früher mathematischer Bildung fokussieren in erster Linie auf den Elementarbereich. Viele Aspekte dürften aber auch für kindliches Lernen im Kontext Hort und Grundschule Relevanz besitzen.

4.1.1 Das Mathematische in Situationen und Materialien erkennen und nutzen

In dem EPPE-Projekt (Effective Provision of Pre-School Education Project) (Sylva et al., 2004) wurden die Daten von mehr als 3.000 Kindern und deren Eltern gesammelt sowie der häuslichen Umgebung und den vorschulischen Einrichtungen.

Das lernwirksamste Vorschulsetting in der Untersuchung wies mehrere Merkmale auf:

- Balance zwischen einer durch die pädagogischen Fachkräfte initiierten Gruppenarbeit und freiem, jedoch potenziell instruktivem Spiel der Kinder
- vergleichsweise mehr kindinitiierte Interaktionen, die von den Erwachsenen fortgesetzt wurden
- die Hälfte aller kindlichen Handlungen wurde von den Erwachsenen begleitet, um Denkprozesse anzuregen und zu erweitern
- ausgedehnte Phasen von gemeinsam geteilten Denkprozessen, die von den Erzieherinnen und Erziehern modelliert wurden, d. h. je nach Terminologie: eine proaktive oder ko-konstruktive Rolle der Erwachsenen (Siraj-Blatchford & Sylva, 2004; vgl. auch Hauser, 2013)

Die Hauptschwierigkeit scheint darin zu liegen, dass pädagogische Fachkräfte das mathematische Potenzial von Spiel- und Alltagssituationen nicht einzuschätzen wissen (Schuler, 2013a). Wenn mathematikhaltige Situationen auftreten, werden sie von den Erwachsenen selten erkannt bzw. ihre Bedeutung verkannt und nicht genutzt (Schuler, 2013b).

Es wurde in Abschnitt 2.1 schon ausgeführt, dass das Spiel in der kindlichen Entwicklung eine tragende Funktion einnimmt (Wygotski, 1980), wobei im Unterschied zur Grundschule in der Kita nicht Aufgaben, sondern Material angeboten wird und die Kinder sich relativ frei entscheiden und auswählen dürfen.

Der pädagogischen Fachkraft kommt dabei eine facettenreiche, komplexe Rolle zu:

- Sie muss das *Material* mit hohem mathematischem Potenzial erkennen und entsprechend dem aktuellen Entwicklungsstand des Kindes/der Gruppe auswählen.
- Sie muss *Situationen* schaffen bzw. aufgreifen, so dass mit Hilfe des Materials mathematische Bildungsprozesse angeregt und unterstützt werden (Wittmann, 2004).
- Sie muss einen *Aufforderungscharakter* des Materials wirken lassen oder einen sozialen Aufforderungscharakter schaffen, um das Kind in die Spielsituation hineinzuziehen.
- Sie muss *Engagiertheit* schaffen, indem sie sich selbst engagiert zeigt bzw. ihre Begeisterung für das Material/das Spiel auf die Kinder zu übertragen sucht.

- Sie muss eine hoch *kommunikative* Situation schaffen, indem über die Spielzüge geredet wird, die Züge kommentiert werden. Dies stellt eine hohe Anforderung an eine fachlich korrekte „prämathematische“ Sprache dar, die von der Erzieherin/dem Erzieher beim Erklären, Vormachen und Kommentieren praktiziert werden muss (Schuler, 2013b).

Diese Rollendiversität ist eine Notwendigkeit beim ko-konstruktiven Begleiten des kindlichen Lernprozesses (Textor, 2000), der auf Vygotskij zurückgeht und von Fthenakis und Kollegen propagiert wird (Fthenakis et al., 2008). Hierbei zeigt sich, dass gerade für jüngere Kinder die Interaktion primär erzieherinnen-/erzieherzentriert abläuft, und dass die Schwierigkeit für Fachkräfte darin besteht, eine Perspektive aus der Sicht der Kinder einzunehmen (Jonsson & Williams, 2013).

4.1.2 Kooperation zwischen Bildungseinrichtung und Familie

Eine Kooperation zwischen Bildungseinrichtung und den Eltern ist notwendig für alltägliche Absprachen wie für das optimale Gelingen kindlicher Bildungsprozesse. Aber es ist nicht die Kooperation als solche („Kooperation ist immer gut“), sondern die Kooperation im Hinblick auf gemeinsame inhaltliche Zielsetzungen der Kooperationspartner. Für den Bereich Mathematik bedeutet dies, dass Bildung dann am besten gelingt, wenn bei pädagogischen Fachkräften und Eltern die gleichen Werte und Ziele bezüglich der zu vermittelnden Bildungsinhalte vorliegen.

Dabei zeigt sich ein deutlicher Einfluss des sozialen Hintergrunds: Kinder aus Haushalten mit niedrigem Einkommen haben bereits im Vorschulalter (4;9 Jahre) wesentlich weniger numerisch-spezifische Spielerfahrungen gesammelt als Kinder aus Mittelklasse-Familien. Die Spielerfahrung der Kinder korrelieren mit ihren numerischen Kompetenzen (Ramani & Siegler, 2008).

Die Kooperation zwischen Kita und Eltern sollte demnach auch die Information und Zusammenarbeit mit den Eltern umfassen, welche zu entsprechenden Spielen im häuslichen Alltag anzuregen sind (vgl. Hauser, 2013, 173f.).

In diesem Zusammenhang ist auf Untersuchungen hinzuweisen, welche zeigen, dass eine frühe Erfahrung mathematischer Anregungen im Elternhaus förderlich ist für die mathematische Entwicklung (LeFevre et al., 2009). Da diese jedoch nur begrenzt nachträglich von der Kita geleistet werden kann, gilt im Regelalltag für Kinder das Matthäus-Prinzip: Kinder, die mit hohem Vorwissen in die Kita kommen, profitieren am meisten von den (mathematischen) Angeboten. Die Aufgabe von Pädagoginnen und Pädagogen im Elementarbereich ist also die gleiche wie derjenigen in der Grundschule: Rückstände erkennen und mit geeigneten Angeboten darauf zu reagieren (Diagnose und Förderung).

4.1.3 Organisationsbedingungen in der pädagogischen Einrichtung

Altersmischung

In Kitas herrscht typischerweise eine Altersmischung, in der Grundschule eher eine Altersspezifität vor. Vor diesem Hintergrund erscheinen die Befunde zu Organisationsformen in pädagogischen Einrichtungen, die im Rahmen verschiedener Projekte und Unterrichtsversuche in diversen Bundesländern vorgenommen wurden, interessant. Während im Ausland schon seit längerer Zeit mit altershomogenen und -heterogenen Unterrichtsformen experimentiert wird (vgl. z. B. Mason & Good, 1996; Sundell, 1994), gibt es in Deutschland erst seit ca. zehn Jahren entsprechende Untersuchungen. Es liegen eine Reihe von Zwischen- und Abschlussberichten der einzelnen Länder vor, diese erscheinen aber eher eine aktuell gewünschte Position zu beschreiben und sind nicht ganz vorurteilsfrei zu rezipieren (für eine zusammenfassende Einschätzung siehe Eckerth & Hanke, 2009).

Insgesamt kann summarisch konstatiert werden, dass die Altersmischung zumindest in der Grundschul-Eingangsstufe (Klasse 1 und 2) nur wenig für die kognitive Entwicklung der Kinder bringt und eher hemmend wirkt. Im sozialen und emotional-motivationalen Bereich wird eine Altersmischung der Kinder dagegen neutral bis positiv bewertet.

Bei allen Untersuchungen muss allerdings berücksichtigt werden, dass nicht nur die Altersmischung als Faktor in die Studien einging, sondern auch zusätzlich verschiedene didaktisch-pädagogische Ansätze den Unterricht prägten. Eine Konfundierung ließ sich daher in der Regel nicht vermeiden.

Da die frühkindliche Bildung aus diversen Gründen an Bedeutung zunimmt (zum einen soll der schulische Erfolg damit profunder, zum anderen sollte der Einfluss des häuslichen Milieus geschwächt werden (vgl. OECD, 2006)), wäre es wünschenswert, den Effekt solcher Organisationsformen auch in den Kitas zu untersuchen. Die vorliegenden Befunde zu den Themenbereichen „phonologische Bewusstheit“ und „Lesen“ in Schweizer Studien stimmen zumindest nicht hoffnungsfroh (Bayer & Moser, 2009). Zwar konnten in eher schulähnlichen Programmen (ähnlich einer Vorschule) die Kinder einen Leistungsvorsprung vor den Kindergartenkindern erzielen, allerdings wird dieser Vorsprung bis zum Ende der Klasse 1 wieder aufgeholt. Insbesondere konnten Kinder mit einer sozioökonomisch benachteiligten Herkunft nicht von den Modellen profitieren. Es lässt sich annehmen, dass dies auch auf die mathematische Bildung im Elementarbereich zutreffen kann.

Bildungserfolgreiche Organisationsformen in der Kita sind gesammelt bei Seeger und Holodynski (2016) beschrieben und bewertet. Anregungen finden sich auch in Fthenakis (2003), Kriterien für (wahrscheinlich) erfolgreiche Kitas lassen sich auch bei Tietze und Viernickel (2003) nachlesen. Neben der Frage der Organisationsform ist innerhalb der letzten zehn Jahre allerdings die Diskussion über die Professionalisierung frühpädagogischer Fachkräfte in hohem Maße angeschwollen, so dass sich eine ganze Zeitschrift, „Frühe Bildung" diesem Thema widmet (vgl. im ersten Heft Beitrag Mischo & Fröhlich-Gildhoff, 2011).

4.1.4 Subjektive Theorien

Der Einfluss der Einstellung pädagogischer Fachkräfte zu Förderung und schulischer Vorbereitung (vgl. Abschnitt 3.2) ist für den Sprachbereich und den Schriftspracherwerb umfangreicher untersucht (z. B. Rank, 2009) als für die Mathematik. Hier liegen nur wenige Befunde vor, die zudem widersprüchlich sind.

In einem Modell von Tietze, Roßbach und Grenner (2005) spielen für die kindliche Entwicklung sowohl Strukturmerkmale der Einrichtung (Gruppengröße, Erzieherausbildung, Erzieher-Kind-Schlüssel, Spielmaterial) als auch die pädagogische Einstellung (Erziehungsziele, Fördereinstellungen) eine Rolle. Beide Faktoren wirken auf die Prozessmerkmale in der Interaktion (z. B. Erzieher-Kind-Interaktion, Aktivitäten), und diese Prozessmerkmale bestimmen schließlich die Entwicklung des Kindes, z. B. seine Rechenfertigkeiten (vgl. auch Kluczniok et al., 2011).

Allerdings bleibt unklar, in welcher Form diese Wirksamkeit gelingt. Es wird aufgrund mangelnder Forschungslage argumentiert, dass die Befunde aus dem Grundschulbereich übertragen werden sollten (van Oers, 2002).

In einer Untersuchung in Bayern und Hessen wurden knapp 100 Kindergärten einbezogen (Kluczniok et al., 2011). Es zeigte sich, dass die Fördereinstellung der Erzieherinnen und Erziehern (vgl. Abschnitt 3.2) einen signifikanten Einfluss auf die Prozessqualität ausübt, wobei zwischen zwei Varianten der Fördereinstellung zu unterscheiden ist: der „grundlegenden Fördereinstellung" und der „schulvorbereitenden Fördereinstellung". Es zeigt sich, dass die grundlegende Fördereinstellung einen Einfluss auf die Entwicklung der mathematischen Kompetenzen bewirkt, die schulbezogene Förderung hingegen nicht. Interpretiert wird dies auf dem Hintergrund, dass schulische Förderung erst für 5- bis 6-Jährige in den Fokus gerät und zurzeit noch nicht in breiter Weise praktiziert wird (negative Einstellung gegenüber einer Verschulung der Kita) oder zu eng ausgelegt ist, um wirksam zu sein. Es ist fraglich, ob eine „Verschulung" im Vorschulalter überhaupt erfolgversprechend sein kann (Hasselhorn & Grube, 2008).

Zusammenfassend lässt sich sicherlich den Autoren der Studie zustimmen: „Die Bedeutsamkeit pädagogischer Einstellungen als eine zentrale Komponente der professionellen Kompetenz von Erzieherinnen für die kindliche Entwicklung sollte daher sowohl in Aus- als auch Fort- und Weiterbildung einen großen Stellenwert einnehmen. Insbesondere die Einstellungen zu Lerninhalten sowie Vorstellungen über die Vermittlung von Lerninhalten sollten reflektiert werden. Dadurch tragen die Erzieherinnen und Erzieher zu ihrer eigenen Professionalisierung bei. Zudem darf der Stellenwert von Fachwissen und Kompetenzen in verschiedenen Bereichen (z. B. Mathematik) nicht vergessen werden, denn pädagogische Einstellungen bleiben wirkungslos, wenn den Erzieherinnen situationsangepasstes Umsetzungswissen fehlt“ (Kluczniok et al., 2011, S. 20).

Prinzipiell kann wohl eine positive Einstellung der Erzieherinnen gegenüber ihrem Bildungsauftrag unterstellt werden. Allerdings ist nach Untersuchungen auch festzustellen, „dass trotz der generellen positiven Einstellung zu vorschulischem Lernen und Schriftspracherwerb einzelne Erzieherinnen eine ablehnende Haltung haben. Dieser Befund stimmt nachdenklich, da aus den Daten hervorgeht, dass diese ablehnende Haltung Hand in Hand mit Unsicherheiten der Erzieherinnen geht, die zum einen gegenüber der eigenen Diagnose- und Förderkompetenz im Schriftspracherwerb, zum anderen aber gegenüber der Grundschule bestehen. … Ein Großteil der Erzieherinnen dieser Stichprobe ist positiv eingestellt und unterstützt den Schriftspracherwerb der Kinder. Für die anderen Erzieherinnen wären wohl Ansätze hilfreich, die Diagnose- und Förderkompetenz aufbauen und auch eine enge Verzahnung der Institutionen fördern würden“ (Rank, 2009, S. 157).

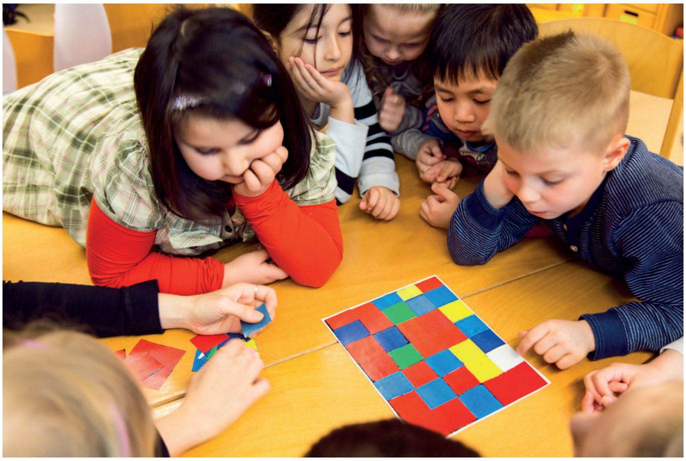
Diese auf den Schriftspracherwerb bezogene Äußerung zeigt deutlich den Fortbildungsbedarf auf und kann auch auf den mathematischen Bereich übertragen werden.

4.1.5 Zusammenarbeit von Fach- und Lehrkräften aus Elementar- und Primarbereich

Eine Zusammenarbeit pädagogischer Fach- und Lehrkräfte aus Elementar- und Primarbereich (vgl. Abschnitt 4.2.4) wird häufig in gemeinsamen Bildungsinitiativen angemahnt wie z. B. in Hessen. Es gibt in den Grundschulen extra Kooperationsbeauftragte, welche den Übergang der Kinder von der Kita in die Grundschule nicht nur begleiten, sondern durch den Informationsaustausch zwischen den Einrichtungen erleichtern sollen.

Diese Kooperation scheint sich dabei vorwiegend in Bezug auf die Leistungsebene der Kinder zu manifestieren:

- Die Erzieherin/der Erzieher macht sich kundig, welche Anforderungen die Schule stellen wird und welche Maßnahmen im letzten Kita-Jahr diese ermöglichen (schulvorbereitender Förderaspekt).
- Die Lehrerin/der Lehrer macht sich kundig, welche Risikokinder sie aufnehmen wird, auf welche ein besonderes diagnostisches Auge gerichtet sein sollte und welche familiären und sozialen Probleme sie erwarten.



Bislang scheint dies aber ohne eine längerfristige Perspektive auf die kindliche Entwicklung nicht zu greifen. Es erscheint ertragreicher, wenn sich Erzieherinnen/Erzieher und Lehrerinnen/Lehrer als Gleichgesinnte mit gleichen Aufgaben in der Begleitung der kindlichen Entwicklung definieren, für die auch eine gleiche Ausbildung anzustreben ist (Krohs, 2007). Dies geschieht inzwischen in einigen Bundesländern, aber der Föderalismus lässt ein einheitliches Bild noch nicht zu.

Die folgende zusammenfassende Aussage von Gelingensbedingungen für Bildungsprozesse im schulischen Kontext kann auch auf den Elementarbereich übertragen werden und zeigt eine gemeinsame Zielperspektive auf:

„Einen guten Lehrer macht aus, dass er sich seiner eigenen Wirkung bewusst ist und sich fortlaufend überprüft. Dass er Stoff mit Leidenschaft vermittelt. Dass er sich dafür zuständig fühlt, dass alle Kinder in seiner Klasse etwas lernen, nicht nur einige wenige. Dass er eine Geisteshaltung mit ins Klassenzimmer bringt, die zum Lernen ermutigt und Fehler zulässt. Dass er anspruchsvolle Ziele vorgibt. Dafür werden Lehrer bezahlt“ (Hattie; zitiert nach Spiegel online vom 22. April 2013).

4.2 Gelingensbedingungen für die Fortbildung pädagogischer Fach- und Lehrkräfte

Christoph Selter und Christiane Benz

Im englischsprachigen Raum vergleichsweise weit verbreitet ist der Begriff des ‚continuous professional development‘, für den es im Deutschen keine Eins-zu-eins-Übersetzung zu geben scheint. ‚Weiterlernen im Beruf‘ oder ‚kontinuierliche Professionalisierung‘ trifft es vielleicht am besten und meint das individuell unterschiedliche, alltägliche, lebenslange Lernen von Fach- bzw. Lehrkräften, welches sich implizit ereignen kann (Krainer, 2008) oder explizit angeregt und unterstützt werden kann (Day, 1999).

Fortbildung ist zwar nicht dasselbe wie ‚Weiterlernen im Beruf‘, kann aber ein zentrales Element zu dessen Stimulation darstellen. In Fortbildungen wird allgemein versucht, auf Werte, Vorstellungen und Einstellungen der Teilnehmenden Einfluss zu nehmen, in der Annahme, dass sich dadurch auch eine Handlungsänderung einstellt. Auch wenn der Weg von der Einstellung zum tatsächlichen Handeln oft weit und steinig ist (vgl. Vehmeyer, Kleickmann & Möller, 2007), kommt der berufsbegleitenden Fortbildung eine entscheidende Rolle für die Qualifizierung von Pädagoginnen und Pädagogen und den Lernerfolg der Kinder zu.

In diesem Kontext ist allerdings zu bedenken, dass es keinen klaren Zusammenhang zwischen der Anzahl der besuchten Fortbildungskurse und den Kompetenzen von Lehrpersonen zu geben scheint (Kunter & Baumert, 2006) und dass diverse Fortbildungsprogramme sich als vergleichsweise ineffektiv erwiesen haben (Bonsen, 2010; Lipowsky, 2010; Krauss et al., 2008). Die Wirksamkeit einer Fortbildung hingegen, die über mehrere Termine hinweg die pädagogischen Fachkräfte begleitet, Feedback ermöglicht und sie in der praktischen Arbeit unterstützt wird vor allem dann nachgewiesen, wenn es um komplexe Ziele geht, wie die kognitive Entwicklung der Kinder zu fördern, etwa beim komplexen Denken (Yamauchia, Ima, Lina, & Schonleberb, 2013).

Im Bereich der Mathematik liegen eine Reihe von empirischen Untersuchungen und theoretischen Konzeptionalisierungen in Bezug auf Leitideen erfolgreicher Fortbildungen für Lehrkräfte vor, von denen man annehmen kann, dass sie auch mit Blick auf die pädagogischen Fachkräfte im Elementarbereich von Relevanz sind (vgl. etwa Borko, 2004; Clarke, 1994; Doll & Prenzel, 2004; Elmore, 2002; Garet, Porter, Desimone, Birman & Yoon, 2001; Gräsel, Pröbstel, Freienberg & Parchmann, 2006; zusammenfassend Bonsen, 2010; Rösken, 2010; Lipowsky, 2010; Sowder, 2007).

Es scheint noch keine ausgewiesene Fortbildungsdidaktik für pädagogische Fachkräfte im Bereich Mathematik zu geben. Es erscheint jedoch in aller Vorläufigkeit zulässig, entsprechende Befunde aus der (Grundschul-)Lehrerfortbildung zu übernehmen, da es keinen plausiblen Grund für gravierende Unterschiede in den Situations- und Personenmerkmalen gibt, die dem entgegenstehen.

Dabei lassen sich vier Gelingensbedingungen erfolgreicher Fortbildungen identifizieren (vgl. auch Desimone, 2009):

- klar erkennbarer Berufsbezug
- Wechselspiel von Aktion und Reflexion
- Kontinuität
- Kooperationsanregung

Diese vier Erfolgsfaktoren werden im Folgenden näher ausgeführt.

4.2.1 Klar erkennbarer Berufsbezug

Fortbildungen mit für die Teilnehmenden klar erkennbarem Bezug zur beruflichen Realität scheinen wirksamer im Hinblick auf eine veränderte Praxis zu sein als Kurse, die eher allgemeine pädagogische oder psychologische Themen ansprechen (Garet et al., 2001; Lipowsky 2010; Staub, 2001; West & Staub, 2003). Insbesondere die Verschränkung eines ‚content focus' mit ‚assessment knowledge' scheint hier die Wirksamkeit zu erhöhen. Dabei wird unter ‚content focus' die Erweiterung fachdidaktischen und diagnostischen Lehrerwissens verstanden durch einen engen Fach- und Curriculumsbezug (Lipowsky & Rzejak, 2012, S. 5). ‚Assessment knowledge' meint das Wissen und das Können von Lehrpersonen, fachspezifische Lernprozesse und Lernergebnisse von Schülerinnen und Schülern zu diagnostizieren, zu interpretieren und daraus Folgen für die Gestaltung von Unterricht abzuleiten (vgl. Timperley, Wilson, Barrar & Fung, 2007).

Für den Bereich des Lehrens und Lernens von Mathematik wurden diese allgemeinen Befunde etwa durch Sowder (2007) wie auch Brunner und Kollegen (Brunner et al., 2006) bestätigt.

4.2.2 Wechselspiel von Aktion und Reflexion

Außerdem scheinen wirksame Fortbildungsprogramme für Fach- und Lehrkräfte durch ein Wechselspiel aus Phasen, die durch fachlich orientierten Input gekennzeichnet sind und die Reflexion der Teilnehmenden anregen, und Phasen, in denen eine Umsetzung in der beruflichen Realität erfolgt, gekennzeichnet zu sein. Dieses impliziert ein Verständnis von Fort- und Weiterbildung als langfristigen Prozess der Anregung von Wandel, in dem die Teilnehmenden neben neuen fachlichen Inhalten auch lernen, über ihre eigenen Praktiken und Einstellungen zu reflektieren und diese, anknüpfend an ihre existierenden individuellen Konzeptionen, graduell und in einem ausgewogenen Verhältnis von Praxisbezug und theoretischer Distanz weiterzuentwickeln (Bonsen, 2010; Franke, Kazemi & Battey, 2007; Llineares & Krainer, 2006; Peter-Koop & Prediger, 2005). Die Teilnehmenden werden in diesem Prozess als aktiv Lernende ernst genommen (Clarke, 1994; Krainer, 1998; Selter, 1995; Sullivan, 2007; Carpenter, Fennema, Franke, Levi & Empson, 1999).

4.2.3 Kontinuität

Ein weiteres zentrales Charakteristikum erfolgreicher Fortbildung scheint deren Langfristigkeit zu sein. Ein wesentlicher Grund dafür ist vermutlich, dass Handlungsroutinen und Einstellungen sich im Regelfall und vor dem Hintergrund der alltäglichen Berufspraxis nicht in kurzen Zeiträumen ändern (Bonsen, 2010; Philipp, 2007; Sowder, 2007). Isolierte Tagesveranstaltungen ohne langfristige Unterstützung und ohne die notwendigen Kontinuitäten können leicht zu oberflächlicher und singulärer Adaption von Kursinhalten führen (Cobb et al., 1991; Möller, Hardy, Jonen, Kleickmann & Blumberg, 2006).

4.2.4 Anregung zur professionellen Kooperation

Ein viertes Merkmal wirksamer Fortbildungen scheint deren Potenzial zu sein, Kooperation der Lehrkräfte untereinander anzuregen – innerhalb einer Schule bzw. Einrichtung bzw. auch schul- bzw. einrichtungsübergreifend (Boyle, Lamprianou & Boyle, 2005; Gräsel et al., 2006; Cochran-Smith & Lytle, 1999; Putnam & Borko, 2000; Rolff, 2009; Fullan, 2010; Altrichter, 2008). In Teams oder professionellen Lerngemeinschaften überwinden die Lehrpersonen die häufig zu beobachtende Isolation und arbeiten gemeinsam an der Weiterentwicklung des Unterrichts (Hord, 1997; Fußangel & Gräsel, 2008). So gesehen sind das Weiterlernen im Beruf der Einzelpersonen und die Weiterentwicklung des Systems Schule untrennbar miteinander verbunden.

Diverse Studien aus der Bildungsforschung haben gezeigt, dass die Zusammenhänge und Wechselwirkungen zwischen Wissen, Einstellungen und Handeln der Lehrerinnen und Lehrer und dem Erfolg der Schülerinnen und Schüler komplex und keineswegs immer unidirektional sind (vgl. Lipowsky, 2010, S. 40). Gleichwohl wird durch die vier genannten Leitideen ein Orientierungsrahmen aufgespannt, der bei der strukturellen und konzeptionellen Ausgestaltung von Fortbildungen im Dienste der Anregung des Weiterlernens im Beruf zu beachten ist.

4.2.5 Erfassung der Wirkung von Fortbildungsmaßnahmen

Die Wirkungen von nach den o. g. Leitideen ausgerichteten Fortbildungsmaßnahmen lassen sich auf vier Ebenen verorten (vgl. Desimone, 2009; Lipowsky, 2010):

- Reaktionen und Einschätzungen der Teilnehmenden in Bezug auf Zufriedenheit und Akzeptanz
- die Kognitionen der Fach- und Lehrkräfte, einerseits im Bereich der Überzeugungen und Haltungen, andererseits in Bezug auf fachliches, fachdidaktisches, diagnostisches oder psychologisch-pädagogisches Wissen
- das unterrichtspraktische Handeln, erhoben etwa durch Videostudien, Tagebucheinträge oder Befragungen der Schülerinnen und Schüler
- die fachlichen Leistungen der Schülerinnen und Schüler und deren Dispositionen wie etwa Einstellungen oder Motivation und Interesse

Die Effekte von Fortbildungen sollten mit Hilfe eines vielschichtig angelegten, den jeweiligen Spezifika des Untersuchungsgegenstands gerecht werdenden, nicht ausschließlich quantitativ angelegten Instrumentariums erhoben werden. Dabei ist evident, dass die Komplexität des Feldes viel zu hoch ist, um den Erfolg von Fortbildungsmaßnahmen eindeutig und mechanistisch auf die Umsetzung einzelner der o. a. Leitideen zurückzuführen. Gleichwohl ist in diesem Kontext zu beachten, dass Anregungen zur Weiterentwicklung, im Kontext des Lehrens und Lernens von Kindern wie von Erwachsenen, die angestrebten Lernerfolge zwar nicht garantieren, aber wahrscheinlicher machen können.

Nach Lipowsky (2010, S. 50) spielen für den Erfolg von Maßnahmen im Kontext des Weiterlernens im Beruf individuelle Determinanten der Teilnehmenden (wie Selbstregulationsfähigkeiten, Zielorientierung oder private Lebensumstände), kontextuelle Bedingungen (wie Klima im Kollegium, schulische Anforderungen oder Feedback durch die Einrichtungsleitung) sowie strukturelle und didaktische Merkmale der Fortbildungen (s. o.) und deren Interaktionen eine zentrale Rolle.

Von ganz entscheidender Bedeutung sind dabei die fachliche und die fortbildungsdidaktische Expertise der Referentinnen und Referenten bzw. Moderatorinnen und Moderatoren, für deren Aus- und Fortbildung wiederum die oben angegebenen Merkmale zur Anwendung kommen sollten.

5 Schlussfolgerungen

5.1 Priorisierung der Zieldimensionen

Meike Grüßing, Christiane Benz, Jens Holger Lorenz, Christoph Selter und Bernd Wollring

In den vorangehenden Kapiteln wurden Zieldimensionen für die frühe mathematische Bildung mit ihrer theoretischen Fundierung, Instrumente zu deren Erfassung sowie Gelingensbedingungen zu deren Realisierung sowohl auf Ebene der Kinder als auch auf Ebene der pädagogischen Fach- bzw. Lehrkräfte beschrieben.

Dabei werden zum einen die Zieldimensionen als prioritär erachtet, denen aus theoretischer Sicht eine hohe Bedeutsamkeit für die Entwicklung mathematischer Kompetenz zukommt. Zum anderen wird denjenigen Zieldimensionen Priorität eingeräumt, bei denen davon auszugehen ist, dass durch die Nutzung von Angeboten der Stiftung hohe Lerneffekte erwartbar sind. Damit einher geht der Aspekt der Messbarkeit dieser Zieldimensionen.

5.1.1 Priorisierte Zieldimensionen auf Ebene der Kinder

Für Kinder im Elementar- und Primarbereich wurden in den vorangegangenen Kapiteln die folgenden Zieldimensionen früher mathematischer Bildung formuliert:

- Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit in Bezug auf Mathematik sowie Überzeugungen zum Wesen von Mathematik
- Prozessbezogene mathematische Kompetenzen
- Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen
- Fachübergreifende Basiskompetenzen

Gemäß der oben genannten Kriterien der hohen theoretischen Bedeutsamkeit, der Erwartbarkeit von Effekten durch Angebote der Stiftung und der Messbarkeit werden für eine Weiterentwicklung des Stiftungsangebots im Bereich mathematische Bildung sowie für die zukünftige Begleitforschung aus Sicht der Autorinnen und Autoren insbesondere folgende Dimensionen als prioritär angesehen:

- Prozessbezogene mathematische Kompetenzen und
- Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen

Die priorisierten Zieldimensionen werden im Folgenden noch einmal kurz beschrieben. Im Anschluss werden auch die nicht priorisierten Zieldimensionen noch einmal thematisiert.

Prozessbezogene mathematische Kompetenzen
Die Formulierung von Zieldimensionen mathematischer Bildung ist an einem Verständnis von Mathematik orientiert, das Mathematik nicht als etwas fest Gegebenes ansieht, sondern als Tätigkeit, bei der das Entdecken, Beschreiben und Begründen im Vordergrund steht. Somit kommt den prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen besondere Bedeutung zu. Dabei werden auch für den Elementarbereich die in den Bildungsstandards für den Primarbereich formulierten Kompetenzfacetten zugrunde gelegt (vgl. Abschnitt 2.2):

- Problemlösen
- Kommunizieren
- Argumentieren
- Modellieren
- Darstellen

Prozessbezogene Kompetenzfacetten sind immer auf Inhalte bezogen, so dass sich durch die Kombination von Inhalten und Prozessen eine große Breite von Anforderungen ergibt. Um bei der Erweiterung der Angebote der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ für den Bereich Mathematik Schwerpunkte zu setzen, wird empfohlen, neben einer Orientierung an den Inhalten, auch besondere Aufmerksamkeit auf die prozessbezogenen Kompetenzfacetten zu legen (vgl. Abschnitt 5.2).

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen
Auch den inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen ist als Zieldimension Priorität einzuräumen. Angelehnt an die Bildungsstandards der Primarstufe werden die folgenden Kompetenzfacetten unterschieden (vgl. Abschnitt 2.3):

- Zahlen und Operationen
- Raum und Form
- Muster und Strukturen

- Größen und Messen
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Die Kompetenzfacette „Muster und Strukturen“ nimmt dabei eine Sonderrolle ein. Das Denken in Mustern und Strukturen wird als eine übergreifende, den mathematischen Erkenntnisprozess charakterisierende Kategorie angesehen. Darüber hinaus wird „Muster und Strukturen“ auch als eigene inhaltliche Facette dargestellt, die durch spezifische Kompetenzerwartungen charakterisiert wird.

Für die Entwicklung von Kompetenzen im Inhaltsbereich „Zahlen und Operationen“ liegen für den Elementarbereich bereits umfangreiche empirische Befunde sowie Modelle der Kompetenzentwicklung vor. Darüber hinaus konnte die Bedeutung von frühen Kompetenzen in diesem Bereich für das weitere Mathematiklernen in verschiedenen Längsschnittstudien belegt werden.

Von besonderer Bedeutung für das Mathematiklernen sind außerdem frühe Kompetenzen im Bereich „Raum und Form“. Die Entwicklung räumlicher Fähigkeiten wird als Grundlage für die Repräsentation von Konzepten in verschiedenen Inhaltsfacetten sowie für das mentale Operieren mit ihnen diskutiert.

Unter Berücksichtigung des dieser Expertise zugrunde liegenden Verständnisses von Mathematik als „Wissenschaft von den Mustern“ sollte daher innerhalb der inhaltsbezogenen Kompetenzfacetten folgenden Bereichen besondere Priorität für die Weiterentwicklung von Angeboten der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ eingeräumt werden:

- „Zahlen und Operationen“
- „Raum und Form“

Als weitere Zieldimensionen wurden „Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit in Bezug auf Mathematik und Überzeugungen zum Wesen von Mathematik“ sowie „Übergreifende Basiskompetenzen“ herausgearbeitet. Diese werden jedoch für die Weiterentwicklung der Angebote der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ zunächst nicht priorisiert.

Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit in Bezug auf Mathematik und Überzeugungen zum Wesen von Mathematik

Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit in Bezug auf Mathematik sowie Überzeugungen zum Wesen von Mathematik werden in frühen mathematischen Bildungsprozessen über die Auseinandersetzung mit Prozessen und Inhalten sowie über geeignete Vorbilder ausgeprägt. Somit ergibt sich als weitere relevante Zieldimension „Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit in Bezug auf

Mathematik und Vorstellungen zum Wesen von Mathematik“ (vgl. Abschnitt 2.1). In Bezug auf die Erfassung dieser Aspekte im Rahmen einer Wirkungsstudie ist zu bedenken, dass sich die einzelnen Aspekte umso schwerer voneinander trennen lassen, je jünger die Kinder sind. Eine insbesondere bei jüngeren Kindern zu findende Begeisterung für alles Neue lässt sich nur schwer von Interessiertheit bzw. Interesse als dauerhaftem dispositionellem Merkmal trennen, das sich auf ein eng umgrenztes Inhaltsgebiet bezieht.

Die Selbstwirksamkeit in Bezug auf Mathematik, das mathematikbezogene Selbstkonzept sowie die Kausalattribuierungen von Leistungsresultaten im Bereich Mathematik entwickeln sich bereits ab dem Kindergartenalter. Die Bedeutung nimmt jedoch ab dem Grundschulalter, in dem Kinder zunehmend mit Leistungssituationen konfrontiert sind, zu.

Da Kinder im Vorschulalter noch kein kohärentes Bild von Mathematik entwickelt haben, sondern sich eher mit einzelnen interessanten Aufgaben, Spielen und Situationen auseinandersetzen, ist bei Kindern im Elementarbereich noch nicht von festen Überzeugungen zum Wesen von Mathematik auszugehen. Diese entwickeln sich im Laufe der Grundschulzeit.

Da hinsichtlich dieser Überzeugungen von keinen großen Effekten aufgrund der Nutzung von Angeboten der Stiftung auszugehen ist und darüber hinaus – ähnlich wie für Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit – eine reliable Messung dieser Aspekte bei jüngeren Kindern eine Schwierigkeit darstellt, wird dieser Zieldimension auf Ebene der Kinder insgesamt aus Sicht der Autorinnen und Autoren zunächst keine Priorität eingeräumt.

Fachübergreifende Basiskompetenzen

Als domänenübergreifende Basiskompetenzen wurden im Rahmen dieser Expertise kognitive Kompetenzen wie Aufmerksamkeit, Arbeitsgedächtnis und Intelligenz, (schrift)sprachliche und soziale Kompetenzen dargestellt (vgl. Abschnitt 2.4). Darüber hinaus wurden verschiedene Faktoren thematisiert, von denen angenommen werden kann, dass sie das Mathematiklernen erschweren.

Diese übergreifenden fachunspezifischen Basiskompetenzen sind nicht als prioritäre Zieldimensionen früher mathematischer Bildung anzusehen. Sie sollten im Rahmen von Wirkungsstudien in der Funktion von Kontroll- bzw. Moderatorvariablen berücksichtigt werden. Zudem sind sie bei der Konzeption von Materialien sowie bei der Gestaltung von Bildungsprozessen als Bedingungsvariablen zu bedenken.

Eine Sonderrolle nimmt die Entwicklung der sprachlichen Kompetenz ein. Der Erwerb mathematischer Kompetenzen geht mit dem Erwerb und dem zunehmenden Nutzen einer mathematischen „Fachsprache“ einher. Daher sollten die Kinder von Beginn an angeregt und ermutigt werden, ihre Erkenntnisse in Sprache zu fassen und über ihre mathematischen Ideen zu kommunizieren.

5.1.2 Priorisierte Zieldimensionen auf Ebene der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte

Für Fachkräfte im Elementarbereich sowie für Hort- und Lehrkräfte im Primarbereich wurden in den vorangegangenen Kapiteln folgende Zieldimensionen ausgeführt:

- Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit in Bezug auf die Gestaltung mathematischer Bildung
- Einstellungen und Überzeugungen in Bezug auf die Gestaltung mathematischer Bildung
- Prozessbezogene mathematische Kompetenzen
- Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen
- Mathematikdidaktische Kompetenzen (einschließlich diagnostische Kompetenzen)

Bei den Fachkräften muss dabei in den jeweiligen Zieldimensionen berücksichtigt werden, dass sie sich teilweise sowohl auf den Gegenstand Mathematik als auch auf die Gestaltung mathematischer Lernprozesse von Kindern beziehen.

Die professionelle Kompetenz der Fach- und Lehrkräfte hat entscheidenden Einfluss auf die Gestaltung und die Qualität von Lernangeboten. Diese Expertise orientiert sich an Modellen professioneller Kompetenz, wie sie z. B. der COACTIV-Studie zugrunde gelegt wurden. Dabei werden vor allem die fachspezifischen Aspekte der professionellen Kompetenz berücksichtigt (vgl. Baumert & Kunter, 2011). Auch in Bezug auf die Fachkräfte werden für eine Priorisierung der Zieldimensionen die Kriterien der hohen theoretischen Bedeutsamkeit, der Erwartbarkeit von Effekten durch Angebote der Stiftung und der Messbarkeit als Grundlage gewählt.

Als prioritär auf Ebene der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte werden aus Sicht der Autoren insbesondere folgende Zieldimensionen angesehen:

- Prozessbezogene mathematische Kompetenzen
- Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen
- Mathematikdidaktische Kompetenzen

Die priorisierten Zieldimensionen sind hier zunächst noch einmal in Kürze dargestellt.

Prozessbezogene mathematische Kompetenzen
Die Formulierung der Kompetenzerwartungen zu den prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen orientiert sich an den fünf Bereichen, die auch der Darstellung der Kompetenzerwartungen für die Kinder zugrunde liegen (vgl. Abschnitt 3.3):

- Problemlösen
- Kommunizieren
- Argumentieren
- Modellieren
- Darstellen

Dabei wird erwartet, dass Fach- und Lehrkräfte selbst über prozessbezogene mathematische Kompetenzen verfügen (vgl. Abschnitt 3.3.6). Eigene fachliche Lernprozesse und Reflexionen darüber bilden die Grundlage für die Organisation von Lernprozessen von Kindern.

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen
Die Kompetenzerwartungen für Fach- und Lehrkräfte orientieren sich auch hinsichtlich der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen an den fünf Inhaltsbereichen, die auch die inhaltlichen mathematischen Anforderungen für die Kinder strukturieren (vgl. Abschnitt 3.4):

- Zahlen und Operationen
- Raum und Form
- Muster und Strukturen
- Größen und Messen
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Kompetenzen von Lehrkräften zu den Inhalten selbst *(content knowledge)* bilden dabei die Grundlage für *inhaltsbezogenes pädagogisches Wissen (pedagogical content knowledge)* (vgl. Abschnitt 3.5).

Ebenso wie den prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen wird auch den inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen eine hohe Priorität für die

Weiterentwicklung von Fortbildungsangeboten sowie für die Evaluation im Rahmen von Wirkungsstudien beigemessen.

Mathematikdidaktische Kompetenzen
Als weiterer prioritärer Kompetenzbereich werden die mathematikdidaktischen Kompetenzen der Fach- und Lehrkräfte angesehen (vgl. Abschnitt 3.5). Gemeinsam mit den inhalts- und prozessbezogenen fachlichen Kompetenzen bilden sie zentrale Aspekte der professionellen Kompetenz, die entscheidenden Einfluss auf die Gestaltung und die Qualität von Lernangeboten hat. Daher werden sie als zu priorisierende Zieldimensionen angesehen.

Die fachdidaktischen Kompetenzen umfassen:

- mathematikdidaktische Grundkompetenzen,
- mathematikdidaktische (unterrichtsbezogene) Handlungskompetenzen und
- mathematikbezogene Diagnosekompetenzen

unter Berücksichtigung der jeweils institutionellen Besonderheiten des Elementar- und des Primarbereichs.

Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit sowie Einstellungen und Überzeugungen in Bezug auf die mathematische Bildung werden als weitere relevante Zieldimensionen angesehen, die indirekt über die Auseinandersetzung mit mathematischen Prozessen und Inhalten sowie mit mathematikdidaktischen und mathematikunterrichtsbezogenen Fragestellungen weiterentwickelt werden sollten.

Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit in Bezug auf die Gestaltung mathematischer Bildung
Ein Problem besteht in der häufig niedrigen Einschätzung der eigenen Kompetenz in Bezug auf Mathematik sowie in einer vorsichtigen bis ablehnenden Haltung gegenüber Mathematik, die oftmals aus negativen Erfahrungen in der eigenen Schulbiographie resultieren.

Die Beschäftigung mit Mathematik und die Bereitstellung von Situationen und Anregungen über konkrete Beispiele sollten die Motivation und das Selbstvertrauen stärken. Darüber hinaus kann unterstellt werden, dass sich auch das Interesse an Mathematik sowie das Interesse an der Ausgestaltung von mathematisch gehaltvollen Lernumgebungen durch wachsende Kenntnis von Mathematik in Alltagssituationen entwickeln lässt.

Für die Selbstwirksamkeit stehen nicht die fachdidaktischen Fähigkeiten im Vordergrund, sondern eine wesentliche erlebte Kompetenz in der sozialen Interaktion zwischen Kindern und Erwachsenen mit den Komponenten „Beziehungsaspekt“, „Reflexionsfähigkeit“ und „Empathiefähigkeit“. Diese können durch organisatorische Maßnahmen in der Bildungseinrichtung unterstützt werden.

Einstellungen und Überzeugungen in Bezug auf die Gestaltung mathematischer Bildung

Bei diesen Zieldimensionen handelt es sich um relativ überdauernde, konsistente Merkmale, bei denen noch unklar ist, inwieweit es gelingen kann, sie in Fortbildungen zu verändern. Die Kenntnis der Einstellungen und Überzeugungen ist jedoch bei der Gestaltung von Fortbildungskonzeptionen von Bedeutung, um daran anknüpfen zu können.

Im Bereich der Überzeugungen zum Wesen von Mathematik gilt eine Einstellung, die den Aspekt der Prozessorientierung beinhaltet, als günstig. Lehr- und Fachkräfte sollten daher in Fortbildungen die Möglichkeit erhalten, diesen Aspekt selbst zu erfahren und darüber zu reflektieren.

Außerdem ist eine fachdidaktisch orientierte konstruktivistische Überzeugung zum Lehren und Lernen von Mathematik anzustreben. Es wird angenommen, dass beobachtete Diskrepanzen zwischen *beliefs* und der Alltagspraxis darauf zurückzuführen sind, dass Lehrende nicht die Kompetenzen besitzen, ihre Überzeugungen in die Praxis umzusetzen.

Daher kommt der Zieldimension der fachdidaktischen Kompetenzen auch im Kontext der Einstellungen und Überzeugungen in Bezug auf die Gestaltung mathematischer Bildung besondere Bedeutung zu.

Da große programmspezifische Effekte auf Einstellungen und Überzeugungen eher nicht zu erwarten sind und da darüber hinaus der Zusammenhang zum professionellen Handeln noch weitgehend unklar bleibt, werden diese Zieldimensionen zunächst nicht priorisiert.

5.2 Empfehlungen für die Weiterentwicklung der Stiftungsangebote im Bereich Mathematik

Christoph Selter, Christiane Benz, Meike Grüßing, Jens Holger Lorenz und Bernd Wollring

In Bezug auf die beschriebenen Zieldimensionen für die frühe mathematische Bildung besteht insgesamt eine große Heterogenität: Nicht nur auf der Ebene der Kinder sind die jeweils spezifischen Lernmöglichkeiten in der Bandbreite des Alters von 3 bis 10 äußerst verschieden, sondern auch auf der Ebene der Erwachsenen ist die Heterogenität des Aufgabenspektrums und der berufsqualifizierenden Ausbildung von Personen ohne Ausbildung im Ganztag über pädagogische Fachkräfte mit sehr überschaubarer mathematikbezogener Ausbildung bis hin zu Lehrpersonen mit umfangreicher Mathematikausbildung sehr groß. Außerdem wurde in den bisherigen Ausführungen deutlich, dass auf Kind- wie auf Erwachsenenebene an einer ganzen Reihe von Stellen noch Instrumente für die Messung zentraler Zielkonstrukte fehlen. Diese müssen erst entwickelt werden, was in der Regel zeit- und kostenintensiv ist und zudem auch das Fehlen von Forschungsergebnissen erklärt, z. B. im Bereich des Personals im Ganztag.

Ferner konzentrieren sich die 2013 vorliegenden Stiftungsangebote im Bereich Mathematik erstens auf den Vorschulbereich und sind dort zweitens bislang sehr punktuell angelegt; es gibt nur *einen* Themenbereich Mathematik im Vergleich zu mehreren Schwerpunktthemen im Bereich Naturwissenschaften.

Betrachtet man diese drei Aspekte in der Zusammenschau (Heterogenität auf beiden Ebenen, fehlende Instrumente und Forschungsergebnisse, punktuelle Stiftungsangebote), so erscheint es sehr sinnvoll, sowohl die vorhandenen Angebote einer kritischen externen Evaluation zu unterziehen und weiterzuentwickeln als auch gleichzeitig die inhaltlichen Stiftungsangebote im Bereich Mathematik auszubauen. In einem zweiten Schritt könnte dann perspektivisch eine größer angelegte Evaluation folgen, die wiederum so angelegt ist, dass sie konkrete Hinweise zur Weiterentwicklung der Konzeptionen und Materialien im Bereich Mathematik liefert. Hierzu und zu Eckpunkten einer kurzfristig zu realisierenden Evaluation der bereits vorhandenen Angebote wird im Abschnitt 5.3 Stellung genommen.

Auf Grundlage der in den vorangehenden Kapiteln formulierten Zieldimensionen sowie der Gelingensbedingungen zu deren Erreichung werden in diesem Kapitel Empfehlungen für die Weiterentwicklung der vorliegenden Stiftungsangebote im Bereich Mathematik formuliert. Angesichts der Vielzahl der zu bewältigenden Aufgaben und der außerhalb der Stiftung im Bereich Mathematik bereits bestehenden Forschungs- und Entwicklungsarbeiten sollte die Umsetzung dieser

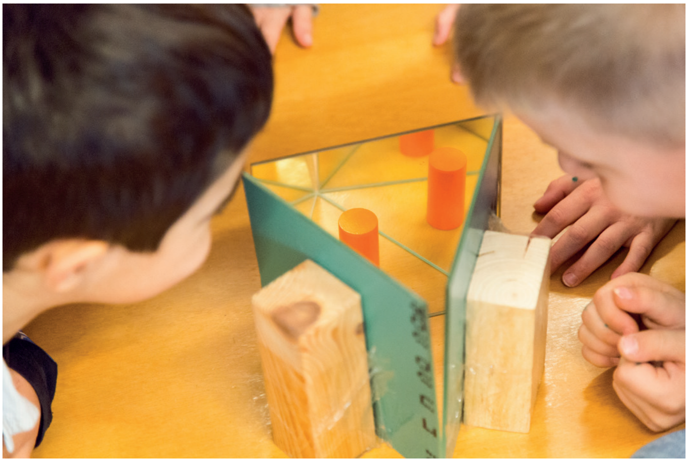
Empfehlungen sinnvollerweise in Kooperation mit externen Partnern aus der Wissenschaft erfolgen.

Dabei ist anzumerken, dass die in dieser Expertise beschriebenen Zieldimensionen auf Ebene der Kinder und auf Ebene der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte ein Vollprogramm darstellen, deren Erreichen jahrelange Lernprozesse im Rahmen der (vor)schulischen Bildung bzw. der Ausbildung und Weiterbildung erfordert. Aufgrund der zur Verfügung stehenden Möglichkeiten kann die Initiative „Haus der kleinen Forscher" daher nur ausgewählte Aspekte ansprechen. Umso wichtiger erscheint es, das Stiftungsangebot im Bereich der Mathematik insgesamt stärker zu konturieren, damit es seine spezifische Wirkung im Zusammenspiel der verschiedenen anderen Initiativen und Angebote zur Stärkung der mathematischen Bildung in Deutschland noch besser entfalten kann.

5.2.1 Grundsätzliche Empfehlungen

Konzept „Kleine Forscher Mathematik 2020": Es sollte auf der strategischen Ebene in Kooperation von Angehörigen der Stiftung und externen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern ein Konzept entwickelt werden, das deutlich macht, mit welchen Zielsetzungen, mit welchen Schwerpunkten, mit welchen Maßnahmen und mit welchen Kooperationspartnern die Stiftung das Thema Mathematik in den kommenden Jahren zu behandeln beabsichtigt. Denkbar wäre ein Konzept ‚Kleine Forscher Mathematik 2020' (KFM 2020), das beginnend im Doppeljahr 2013/14 bis zum Doppeljahr 2019/20 die Vision im Bereich mathematischer Bildung und die zur Zielerreichung als notwendig erscheinende Schrittigkeit beschreibt. In diesem Zusammenhang sollte noch deutlicher herausgearbeitet werden, ob sich der Ansatz des „Hauses der kleinen Forscher" auch in Mathematik neben der Ansprache der affektiven Zielbereiche eher auf das Erforschen, Experimentieren, Entdecken (prozessbezogene Kompetenzen) konzentriert oder ob bzw. wie die gesamte Bandbreite der fachlichen Kompetenzen angesprochen werden sollte (prozess- und inhaltsbezogene Kompetenzen).

Anschlussfähigkeit der Mathematik-Angebote stärken: Allgemein sollte das Mathematik-Angebot der Stiftung weiterhin von sinnstiftenden Kontexten als Bezugspunkten von Bildungsprozessen ausgehen, aber insgesamt weniger phänomenorientiert angelegt sein und statt dessen den langfristigen Lernprozess von Kindern und pädagogischen Fach- und Lehrkräften noch klarer erkennbar in den Blick nehmen. Dabei sollte die Kontinuität zwischen Elementarbereich und Primarbereich sowohl im Hinblick auf die Umsetzung der Zieldimensionen als auch des sog. pädagogischen Ansatzes eine wesentliche Leitlinie darstellen. Allerdings sollte das Vorhaben einer stärkeren Harmonisierung nicht dazu führen, die sinnvollen Diskontinuitäten zu vernachlässigen. Elementar- und Primarbereich sind nach wie vor eigenständige Phasen entlang der Bildungskette.



Kooperationen ausbauen: Die Lehrerfortbildung im Bereich Mathematik ist bislang kein zentrales Aktionsfeld der Initiative „Haus der kleinen Forscher“. Im Sinne von Kontinuität (Elementarbereich-Primarbereich) und Kohärenz (Unterricht-Ganztag) sowie angesichts beschränkter Ressourcen sind strategische Partnerschaften mit Institutionen und Projekten zu prüfen, die mit der Fortbildung der Mathematiklehrerinnen und -lehrer befasst sind. Aus diesen strategischen Partnerschaften könnten dann auch Kooperationen auf der operativen Ebene erwachsen. Die bisherigen Erfahrungen der naturwissenschaftlichen Fortbildungen der Initiative können hier einfließen und ausgebaut werden. Auch die stärkere Anbindung an Materialien und Konzeptionen anderer Fortbildungsinitiativen im Elementarbereich (z. B. NaturWissenSchaffen, DZLM, ...) sollte geprüft werden.

Multiplikatorinnen und Multiplikatoren mathematikbezogen fortbilden: Es ist zu prüfen, ob die vorliegenden Zieldimensionen für Multiplikatorinnen und Multiplikatoren (Trainerinnen und Trainer), die konkreten Konzeptionen für deren Fortbildung und die darüber hinaus gehenden Unterstützungsmaßnahmen auch aus der Sicht des Faches Mathematik und angesichts der Heterogenität der mathematikbezogenen Vorkenntnisse der Multiplikatoren angemessen sind. Überlegenswert sind im Kontext der Multiplikatorenausbildung auch eine Abstimmung oder eine Kooperation beispielsweise mit dem DZLM (Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik).

Mathematik angemessen in Stiftungsstruktur berücksichtigen: Zu prüfen ist aus systemischen Überlegungen schließlich, ob die Mathematik in den verschiedenen Gremien und Arbeitsbereichen der Stiftung in angemessener Weise vertreten ist.

5.2.2 Empfehlungen für den Elementarbereich

Mathematik-Materialien überarbeiten: Die für den Vorschulbereich vorliegenden Materialien für Kinder und für pädagogische Fachkräfte (z. B. Karten-Set Mathematik und Broschüre „Mathematik entdecken“) sind einer kritischen Analyse unter Heranziehung externer Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler mit sich auf dieser Grundlage vermutlich anschließender Überarbeitung bzw. Weiterentwicklung zu unterziehen. Diese könnte insbesondere eine noch bessere Anschlussfähigkeit an den mathematikdidaktischen Diskussionsstand zum Ziel haben.

Synergien von Mathematik mit den Themenbereichen Naturwissenschaften und Technik suchen: Parallel dazu sollte geprüft werden, inwieweit mathematikhaltige Lernanlässe auf angemessene und lernergiebige Weise in bestehende Angebote mit den Schwerpunkten Naturwissenschaften und Technik integriert werden können.

Stellenwert der Mathematik im Themenangebot aufwerten: Für den Vorschulbereich ist der Umfang der Mathematik als eines von acht Themen (Mathematik mit gleichem Umfang wie etwa Magnetismus) als unzureichend anzusehen. Hier ist aus Sicht der Expertenkommission mittelfristig eine Ausweitung auf mindestens vier Angebote zu realisieren. Denkbare Themen für Fach- und Lehrkräfte wären: (1) Mathematik selbst entdecken (Schwerpunkt: prozessbezogene Kompetenzen), (2) Denkweisen von Kindern verstehen (Schwerpunkt: Diagnose als Grundlage von Förderung), (3) Zählen, Zahlen und Operationen (Arithmetik; Schwerpunkt: benötigtes mathematikdidaktisches Hintergrundwissen), (4) Raum und Form (Geometrie; Schwerpunkt: benötigtes mathematikdidaktisches Hintergrundwissen). Perspektivisch ist eine weitere Ausdehnung geboten, die vom Umfang her dem Bereich Naturwissenschaften gleich kommt.

Unterstützungssysteme für Pädagoginnen und Pädagogen ausbauen: Das vorliegende Fortbildungsangebot für Pädagoginnen und Pädagogen sieht für das Thema ‚Mathematik' einen Fortbildungstermin mit anschließender Erprobung und Nachbereitung vor, welche ein halbes Jahr später stattfindet. Hier wird gemäß der formulierten Gelingensbedingungen (vgl. Abschnitt 4.2) nicht nur eine Erhöhung der Anzahl der Mathematik-Fortbildungsthemen, sondern vor allem auch eine Erhöhung des Stundenvolumens der Auseinandersetzung mit einem Thema seitens der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte dringend angeraten. Dieses kann neben einer Ausweitung der Präsenzfortbildung mit Trainerinnen und Trainern der Stiftung auch durch Anregungen zum praxisbasierten Arbeiten (mit gezielter Reflexion), zum Selbststudium oder zum gemeinsamen Lernen im Team (Netzwerkbildung) geschehen. Auch über eine Ausweitung des veranstaltungsunabhängigen Mathematik-Materialangebots könnte nachgedacht werden (z. B. Konkretisierung von Zieldimensionen durch Beispiele von Spiel- oder Lernsituationen, die im Internet einsehbar und abrufbar sind, oder Videobeispiele, die das Denken von Kindern im Elementarbereich illustrieren).

Kooperationen zwischen Formaten verschiedener Anbieter schaffen: Für den Elementarbereich und insbesondere für den Bereich der Grundschule liegt in Deutschland bereits eine Reihe von Angeboten zur mathematischen Professionalisierung des pädagogischen Personals vor (z. B. PIKAS, Kira, TransKiGs, ...). Es ist zu prüfen, inwieweit diese externen Angebote für das Fortbildungskonzept der

Stiftung genutzt, adaptiert oder in einem gemeinsamen Prozess für pädagogische Fach- und Lehrkräfte in Kita, Hort und Grundschule erweitert werden können. Besonders vielversprechend erscheint hier u. a. aus Gründen beschränkter Ressourcen eine Ausdehnung des E-Learning-Angebots (durch Eigenentwicklungen oder Nutzung bereits bestehender Angebote, die gegebenenfalls zu adaptieren oder zu erweitern sind), welches insbesondere auch die Lernmöglichkeiten von videobasierten Lernumgebungen für Erwachsene nutzt.

5.2.3 Empfehlungen für den Primarbereich

Ausgangs- und Bedarfslage klären: Aus Sicht der Kommission sollte (z. B. im Rahmen der Monitoring-Aktivitäten der Stiftung) im Rahmen eines Forschungsprojekts durch Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler erhoben werden, welches pädagogische Personal mit welcher Ausbildung in welcher Weise mit Mathematik befasst ist, um auf dieser Grundlage vor dem Hintergrund der formulierten Zieldimensionen ein dringend erforderliches Professionalisierungsprogramm zu entwickeln.

Maßnahmen fokussieren: Aufgrund des bislang in der Stiftung noch erheblich weiterzuentwickelnden Bereichs ‚Mathematik im Elementarbereich' und wegen der noch deutlicher zu klärenden Ausgangs- und Bedürfnislagen im Bereich des schulischen Ganztags sollte hier nach Meinung der Expertenkommission der Schwerpunkt im schulischen Ganztag einerseits auf Naturwissenschaften und Technik gelegt werden. Andererseits sollte nach Klärung der im vorhergehenden Abschnitt erwähnten Rahmenbedingungen und unter Voraussetzung der Bereitstellung der benötigten zusätzlichen Ressourcen festgelegt werden, welche Personengruppe welche Art von Fort- und Weiterbildung/Materialien braucht.

Adressatenspezifisches Angebot entwickeln: Hierzu wäre die Initiierung eines Forschungs- und Entwicklungsprojekts sinnvoll, das Konzeptionen und Materialien für die pädagogische Qualifizierung von Personen, die im Ganztag tätig sind, entwickelt und erforscht. Aufgrund der zu erwartenden Heterogenität der Anforderungen und Vorerfahrungen würde sich dieses vermutlich in verschiedene Teilprojekte gliedern, die beispielsweise die vier auch im Elementarbereich prioritär gesehenen Themen ansprechen, allerdings aufgrund der Unterschiede zwischen Elementar- und Primarbereich jeweils auf anderem Niveau und mit anderen Inhalten: (1) Mathematik selbst entdecken, (2) Denkweisen von Kindern verstehen, (3) Zählen, Zahlen und Operationen sowie (4) Raum und Form.

5.3 Empfehlungen für die wissenschaftliche Begleitung der Stiftungsarbeit im Bereich Mathematik

Christoph Selter, Christiane Benz, Meike Grüßing, Jens Holger Lorenz und Bernd Wollring

Die wissenschaftliche Begleitung der Stiftungsarbeit im Bereich Mathematik sollte vor dem Hintergrund der angestrebten Zielstellungen die fachspezifisch bedeutsamen Ebenen der Arbeit des „Hauses der kleinen Forscher" betrachten. Sie sollte möglichst vielschichtig angelegt sein und dabei Konzept, Materialien und Maßnahmen evaluieren.

Für die Mathematik von Relevanz ist natürlich auch eine Systemevaluation, die beispielsweise die Zielsetzungen, den generellen Ansatz des „Hauses der kleinen Forscher" oder dessen Arbeitsstrukturen betrachtet. Dieser Aspekt wird jedoch im Weiteren nicht weiter betrachtet, da er nicht mathematikspezifisch ist. Außerdem ist die Systemevaluation bereits ein konstitutives Element der wissenschaftlichen Begleitung der Stiftungsarbeit. Auch viele der folgenden Empfehlungen dürften vermutlich ebenfalls bereits Bestandteil des umfassenden Qualitätsmonitoring der Stiftung sein, wenngleich aufgrund der bisher eher geringen Bedeutung der Mathematik im Stiftungsangebot möglicherweise noch nicht in wünschenswertem Ausmaß.

Für eine *Konzeptevaluation* sollte das Papier zum Konzept „KFM 2020" (vgl. Abschnitt 5.2.1) z. B. durch ein Hearing mathematiknaher Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler oder im Rahmen einer Fachbegutachtung einer kritischen Analyse unterzogen werden. In diesem Zuge sollte insbesondere auch der noch nicht hinreichend klar erscheinende Auftrag für die mathematische Bildung im Bereich des Ganztags thematisiert werden. Auf der Grundlage weiterer Studien zu Vorkenntnissen und Aufgabenfeldern des Personals im Ganztag können dann diesbezügliche prioritäre Aufgabenfelder des „Hauses der kleinen Forscher" identifiziert werden.

Für die *Materialevaluation* sind die bereits existierenden wie auch die zukünftig entstehenden Produkte, also die Arbeitskarten, die Mathematik-Broschüre, das Angebot auf der Website, Fortbildungsmaterialien, etc. ebenfalls einer kritischen Analyse durch eine Gruppe von Personen aus der Mathematikdidaktik, aus relevanten Nachbardisziplinen sowie der Praxis zu unterziehen. Die regelmäßige Ausrichtung von Fachforen zur Mathematik mit Expertinnen und Experten aus Wissenschaft und Praxis, die mit der Arbeit der Stiftung vertraut sind, könnten hierzu hilfreich sein. Außerdem ist die Material-Qualität durch das Wechselspiel von theoretischer Fundierung, Entwicklungsarbeit und empirischer, meist qualitativer Forschung im Paradigma von Design Research kontinuierlich zu erhöhen.

Im Hinblick auf die *Maßnahmenevaluation* ist zu sehen, dass die Arbeit des „Hauses der kleinen Forscher“ auf verschiedenen Ebenen angesiedelt ist: (1) Multiplikatorinnen und Multiplikatoren werden ausgebildet, welche wiederum (2) pädagogische Fach- und Lehrkräfte fortbilden, die (3) Kinder zum Lernen anregen und beim Lernen unterstützen. Die von Lipowsky erwähnten Evaluationsebenen (vgl. Abschnitt 5.1) sind dabei einerseits auf die Zielgruppen Multiplikatorinnen und Multiplikatoren (Teilnehmende an Maßnahmen der Stiftung) sowie pädagogische Fach- und Lehrkräfte (Abnehmende) und andererseits auf die Zielgruppen Fach- und Lehrkräfte (Teilnehmende an Maßnahmen der Multiplikatorinnen und Multiplikatoren) und Kinder (Abnehmende) zu beziehen:

- Reaktionen und Einschätzungen der Teilnehmenden (Multiplikatorinnen und Multiplikatoren respektive Fachkräfte) in Bezug auf Zufriedenheit und Akzeptanz
- die Kognitionen der Teilnehmenden, einerseits im Bereich der Überzeugungen und Haltungen, andererseits die fachbezogenen Kompetenzen in Bezug auf Fach, Fachdidaktik und Diagnostik
- das praktische Handeln ‚vor Ort‘, erhoben etwa durch Videostudien, Tagebucheinträge, Befragungen von Pädagoginnen/Pädagogen oder Kindern
- die fachlichen Leistungen der Abnehmenden (Fachkräfte respektive Kinder) und deren Dispositionen wie etwa Einstellungen oder Motivation und Interesse

Gerade im Hinblick auf die zentrale Bedeutung der Arbeit der Multiplikatorinnen und Multiplikatoren wäre es bedeutsam, Wirksamkeitsstudien auch auf Maßnahmen für Fortbildner (1) zu beziehen und nicht nur auf Maßnahmen für Fachkräfte (2) zu beschränken. Perspektivisch wünschenswert, aber gegenwärtig im Bereich Mathematik wohl nicht leistbar, sind natürlich auch Wirkungsstudien auf der Ebene der Kinder. Aufgrund der Komplexität des Untersuchungsfeldes wird man ohnehin nicht die gesamte Wirkungskette in den Blick nehmen können, sondern vermutlich nur einzelne Abschnitte, bei denen eng umrissene Fragestellungen bearbeitet werden.

Fazit und Ausblick – Wie die Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ mit den Erkenntnissen umgeht

Stiftung Haus der kleinen Forscher

1 Empfehlungen aus der Expertise als Grundlage für die (Weiter-)Entwicklung der Stiftungsangebote

Alle Stiftungsangebote basieren auf zugrunde liegenden Zieldimensionen für Kinder und pädagogische Fach- und Lehrkräfte im jeweiligen Themenbereich. Diese Zieldimensionen dienen der Stiftung als Orientierungsgrundlage für ihre inhaltlichen Angebote und spezifizieren, welche Ziele mit bestimmten Stiftungsangeboten erreicht werden sollen. Darüber hinaus bildet das Modell der Zieldimensionen die theoretische Grundlage für die wissenschaftliche Begleitung und die empirische Überprüfung dieser Ziele.

Bisher wurden die Zieldimensionen naturwissenschaftlicher Bildung im Elementar- und Primarbereich (vgl. Band 5 dieser Schriftenreihe, Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2013) sowie die Zieldimensionen früher technischer Bildung (vgl. Band 7 dieser Schriftenreihe, Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2015a) erarbeitet und publiziert. Der vorliegende Band beinhaltet nun die Zieldimensionen früher mathematischer Bildung und die daraus resultierenden Empfehlungen für die inhaltliche (Weiter-)Entwicklung der Stiftungsangebote zum Themenbereich „Mathematik“. Im Folgenden wird beschrieben, wie die Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ die Empfehlungen der Fachexpertinnen und -experten aufgreift und umsetzt, um die Angebote im Bereich mathematischer Bildung für drei- bis zehnjährige Kinder bzw. die begleitenden pädagogischen Fach- und Lehrkräfte in Kita, Hort und Grundschule auszubauen. Dabei wird besonders darauf geachtet, Praxisnähe herzustellen und pädagogische Fach- und Lehrkräfte in der Umsetzung mathematischer Bildungsinhalte zu stärken.

Folgende Zieldimensionen mathematischer Bildung verfolgt die Stiftung auf Ebene der Kinder (vgl. Empfehlungen Abschnitt 5.1.1 und Anhang I):

- Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit im Umgang mit Mathematik
- Prozessbezogene mathematische Kompetenzen
- Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen

Auf Ebene der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte stellt die Stiftung die folgenden von Benz et al. empfohlenen Zieldimensionen in den Vordergrund (vgl. Empfehlungen Abschnitt 5.1.2 und Anhang II):

- Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit in Bezug auf die Gestaltung mathematischer Bildung

- Einstellungen und Überzeugungen in Bezug auf die Gestaltung mathematischer Bildung
- Prozessbezogene mathematische Kompetenzen
- Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen
- Mathematikdidaktische Kompetenzen

Alle inhaltlichen Formate der Stiftung zielen darauf ab, die Entwicklung von Kindern im Kita- und Grundschulalter in den entsprechenden Zieldimensionen zu stärken. Die meisten Stiftungsangebote unterstützen zunächst die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte, die dann als Lernbegleitung die Mädchen und Jungen in den Bildungseinrichtungen in ihrer Auseinandersetzung mit Mathematik begleiten und kindliche Lern- und Entwicklungsprozesse fördern. Die Stiftung bietet dabei einen praxisnahen Ansatz, der es den Pädagoginnen und Pädagogen ermöglicht, ihre Kenntnisse und Kompetenzen zu erweitern und in der alltäglichen Arbeit mit den Kindern einzusetzen.

Die Stiftungsangebote im Themenbereich Mathematik zielen auf eine berufsbegleitende Professionalisierung der Pädagoginnen und Pädagogen ab. Im Elementarbereich ist es das Ziel, den Kindern mathematische Grunderfahrungen zu ermöglichen und ein mathematisches Grundverständnis zu fördern, worauf im Primarbereich aufgebaut werden kann. Im Primarbereich richtet die Stiftung ihr Angebot an Bildungseinrichtungen mit Ganztagsangeboten wie Grundschulen und Horte: Das Angebot ist für die Lernbegleitung von sechs- bis zehnjährigen Kindern im außerunterrichtlichen Bereich konzipiert und orientiert sich inhaltlich an den Bildungsstandards, die von der Kultusministerkonferenz beschlossen wurden (KMK, 2005). Die Stiftungsangebote sind somit eine Ergänzung zu den regulären Mathematik-Curricula im schulischen Bereich.

Im Folgenden sind die einzelnen Zieldimensionen und ihre konkrete Umsetzung in den Angeboten der Stiftung für Fach- und Lehrkräfte sowie Kinder ausführlich beschrieben.

1.1 Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit im Umgang mit Mathematik

Die erste von Benz et al. empfohlene Zieldimension lautet „Motivation, Interesse und Selbstwirksamkeit in Bezug auf Mathematik“ und ist sowohl für Kinder als auch für die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte von Bedeutung. Das grundlegende Ziel der Stiftung ist es, sowohl Mädchen und Jungen als auch Pädagoginnen und Pädagogen für das selbstständige Lösen von Problemen mit mathematischen Ideen zu begeistern. Dementsprechend fördert die Stiftung Begeisterung, Neugier und Interesse an der Auseinandersetzung mit Mathematik als wesentlichen Schlüssel für einen positiven Zugang zum Thema. Dazu gehören:

- Bereitschaft und Interesse, sich mit mathematischen Fragestellungen auseinanderzusetzen
- Selbstwirksamkeit im Umgang mit Mathematik
- Vorstellungen und Überzeugungen zum Wesen von Mathematik

In Bezug auf die motivationalen und emotionalen Aspekte spielen die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte in der frühen mathematischen Bildung eine besondere Rolle. Speziell in der Kita haben die Kinder häufig eine sehr enge Bindung an ihre Erzieherinnen und Erzieher und übernehmen dadurch teilweise deren Verhaltensweisen, aber auch Emotionen. Das heißt, die pädagogische Fachkraft dient als Vorbild für die Kinder, was durchaus auch für das Erleben von und die Einstellung zu Mathematik gilt. Die Kinder profitieren hierbei von einem vorgelebten Interesse der Fachkraft. Ein offener, angstfreier Umgang mit Mathematik ermöglicht den Kindern, ein Interesse für das Fach aufzubauen und für die Grundschulzeit aufrechtzuerhalten. Im Hinblick auf die Rolle der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte betonen Benz et al., dass „die Motivation zur Gestaltung mathematischer Bildungsprozesse für die Kinder und ihr eigenes Interesse an mathematischen Fragestellungen unterschieden werden“ (S. 109 im vorliegenden Band) müssen. Oftmals gibt es vor allem bei Erzieherinnen und Erziehern in der Kita eine Diskrepanz zwischen einer hohen Motivation für die mathematische Förderung im Kita-Alltag und als niedrig eingeschätzte, eigene mathematische Kompetenzen. Um diese Diskrepanz zu überwinden, sollen die pädagogischen Fachkräfte lernen, mathematische Inhalte in Alltagssituationen zu entdecken. Dieser Praxisbezug stärkt sowohl ihre Motivation als auch ihr Selbstvertrauen.

In der Umsetzung dieser Zieldimension steht eine offene und angstfreie Haltung von Kindern wie auch von pädagogischen Fach- und Lehrkräften gegenüber Mathematik im Vordergrund. Die Pädagoginnen und Pädagogen sollen Freude an der Gestaltung mathematischer Bildung im pädagogischen Alltag entwickeln und motiviert werden, zusammen mit den Kindern mathematischen Fragestellungen nachzugehen.

Umsetzung dieser Zieldimension in den Angeboten der Stiftung

Bei der Umsetzung dieser Zieldimension ist es wichtig, den Kindern wie auch pädagogischen Fach- und Lehrkräften eine positive Grunderfahrung mit einer Welt zu ermöglichen, die sie mathematisch betrachten und verstehen können. Somit kann das Erkennen mathematischer Zusammenhänge im Alltag einfacher gemacht werden („Wo steckt überall Mathematik?“). Die Förderung mathematischer Kompetenzen sollte vor allem im Elementarbereich spielerisch im Alltag geschehen und nicht als Lehreinheit konzipiert sein. Aber auch in der Grundschule sollte ein spielerischer Charakter bestehen bleiben.

Die kontinuierlichen Fortbildungen (vgl. Empfehlungen Benz et al. in Abschnitt 4.2.3), die die Stiftung konzipiert und die in den regionalen Netzwerken durch die Trainerinnen und Trainer bundesweit durchgeführt werden, zielen in ihrer Gestaltung stets darauf ab, den pädagogischen Fach- und Lehrkräften (wieder) einen positiven Zugang zu ermöglichen und eine offene, angstfreie Haltung zu entwickeln. Die Rückmeldungen aus dem Qualitätsmonitoring[6] von mehr als 1.000 pädagogischen Fach- und Lehrkräften zu Fortbildungen der Stiftung im Jahr 2015 zeigen, dass nach der Teilnahme an einer Fortbildung im Themenbereich Mathematik eine hohe Motivation besteht, sich weiter mit dem Thema zu beschäftigen, und dass die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte sich darauf freuen, das mathematische Thema mit Kindern umzusetzen. Diese Ergebnisse bestätigen die Erfahrungen aus dem Pilotprojekt der Stiftung zur mathematischen Bildung in 2011 (vgl. Grieshop & Winter, 2012) und zeigen, dass es der Bildungsinitiative gelingt, eine positive Grundhaltung bei Pädagoginnen und Pädagogen zu fördern und zu stärken. Diese positive Einstellung zum Thema Mathematik ermöglicht wiederum einen motivierenden Einfluss auf die Kinder.

In den Fortbildungen bekommen die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte konkrete Praxisideen, die auch den Bezug der Mathematik zum Alltag verdeutlichen. Ebenso sind zahlreiche anschauliche Ideen, die den Einstieg erleichtern, in den pädagogischen Materialien wie z. B. den Karten-Sets für pädagogische Fach- und Lehrkräfte und für Grundschulkinder sowie in den Themenbroschüren enthalten. Die Materialien wie auch die Lernspiele („Felia legt Fliesen“ und „Wiebkes Waage“) auf der Kinder-Website www.meine-forscherwelt.de enthalten Anregungen, die den Kindern verschiedene Zugänge zur Mathematik ermöglichen. Dabei wird darauf geachtet, dass die Umsetzung der Praxisideen immer mit Alltagsmaterialien durchführbar ist.

Die Praxisbeispiele sind so gewählt, dass sie für die Kinder und pädagogischen Fach- und Lehrkräfte herausfordernd, aber auch erfolgreich zu bewältigen sind, um ihre Freude an der Auseinandersetzung mit mathematischen Frage- oder Problemstellungen zu wecken, zu erhalten oder auszubauen.

---

6 *Im Rahmen der Qualitätssicherung und -entwicklung werden fortlaufend die Rückmeldungen der an den Fortbildungen teilnehmenden pädagogischen Fach- und Lehrkräfte erhoben und ausgewertet.*

1.2 Prozessbezogene mathematische Kompetenzen

Die Zieldimension „Prozessbezogene mathematische Kompetenzen“ wird von Benz et al. sowohl auf Ebene der Kinder als auch auf Ebene der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte priorisiert. Die einzelnen prozessbezogenen Kompetenzen basieren auf den Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich. Zu ihr gehören:

- Problemlösen,
- Kommunizieren,
- Argumentieren,
- Modellieren und
- Darstellen.

Die Autorinnen und Autoren der Expertise betonen, dass die einzelnen Prozesse kaum voneinander zu trennen sind, sondern in verschiedener Weise miteinander zusammenhängen. Sie sollten immer in Verknüpfung mit einem oder mehreren Inhaltsbereichen erarbeitet und angewandt werden, wobei alle Prozesse mit allen Inhaltsbereichen kombiniert werden können. Pädagogische Fach- und Lehrkräfte sollen Mathematik als einen Prozess verstehen, bei dem die kreative Lösung von Problemen im Vordergrund steht. Oftmals ist eine eher formal-schematische Sicht auf die Mathematik verankert, im Sinne von „Mathematik als Menge von Wissen“ (z. B. Anwendung von Formeln). Mathematik sollte jedoch als Tätigkeit gesehen werden, „bei der das Entdecken, Beschreiben und Begründen im Vordergrund steht“ (Benz et al., S. 159 im vorliegenden Band). Der kommunikative und argumentative Charakter des mathematischen Vorgehens zeigt zudem, dass Mathematik keine Einzeltätigkeit sein muss, sondern sich sehr gut als Lernen in der Gruppe einbinden lässt. Bei der Beschäftigung mit mathematischen Fragestellung werden unweigerlich Begriffe und Definitionen vereinbart, Gedanken- und Lösungswege entweder verbal oder durch eine geeignete (schriftliche oder räumliche) Darstellung kommuniziert. Die Notwendigkeit für präzise Formulierungen hilft dabei in der fachlichen Argumentation.

Umsetzung dieser Zieldimension in den Angeboten der Stiftung

In der Umsetzung der Zieldimension „Prozessbezogene mathematische Kompetenzen“ verfolgt die Stiftung das Ziel, sowohl pädagogische Fach- und Lehrkräfte als auch Kinder mit einem prozesshaften mathematischen Vorgehen vertraut zu machen. Dabei ist es vor allem bedeutsam, die einzelnen Phasen zu verdeutlichen, um Mathematik als Problemlöseprozess zu verstehen und nicht als einfaches Anwenden von Formeln oder Rechenschritten.

Um die mathematikbezogene Prozessorientierung zu verdeutlichen, wurde analog zur Methode „Forschungskreis“, die in der frühen naturwissenschaftlichen Bildung Einsatz findet (vgl. Pädagogischer Ansatz der Stiftung in Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2015b), der „Mathematikkreis“ (vgl. Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2016a) zusammen mit den Fachexperten PD Dr. David Ploog (Universität Hannover) und Prof. Dr. Bernd Wollring (Universität Kassel) entwickelt. Der „Mathematikkreis“ unterstützt den Prozess des mathematischen Vorgehens. Er gliedert sich in sechs Phasen (vgl. Abbildung 7): mathematische Fragestellung erfassen, Begriffe klären und Bezeichnungen vereinbaren, Beispiele ausprobieren, Muster erkennen, Muster prüfen und nutzen sowie Ergebnisse erörtern. Es wechseln sich Phasen des Handelns mit konkreten Materialien mit Phasen der Dokumentation und Reflexion ab. Der „Mathematikkreis“ unterstützt die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte dabei, mit Kindern über mathematische Fragestellungen zu sprechen, und bietet ihnen eine Beobachtungshilfe.

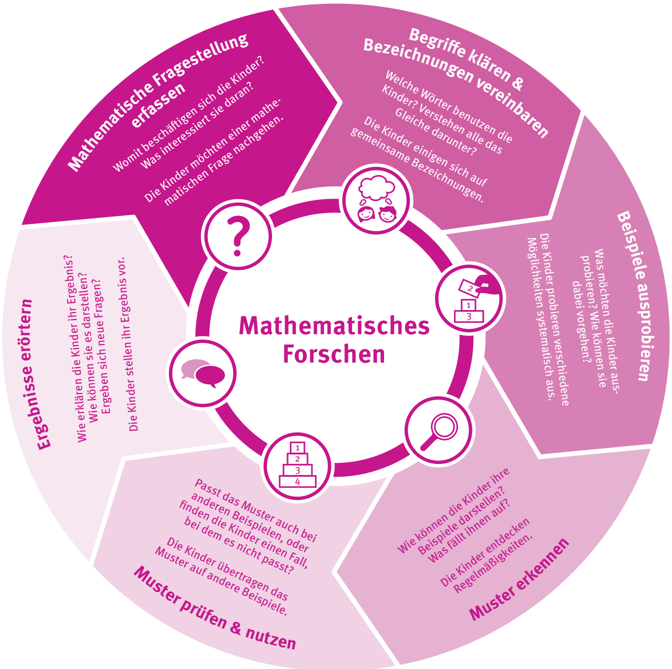


Abbildung 7. *Der „Mathematikkreis“ bildet den Prozess des mathematischen Vorgehens ab (vgl. Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2016a).*

Die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte erhalten in den Präsenzfortbildungen zum Thema Mathematik eine Einführung in den „Mathematikkreis“ und damit das prozesshafte Vorgehen in der Mathematik. Zudem gibt es exemplarische Beispiele für die Umsetzung der Prozessphasen in der Themenbroschüre „Zahlen, Zählen, Rechnen – Mathematik entdecken“ (Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2016a) und auf den Forschungskarten für pädagogische Fach- und Lehrkräfte (Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2016b). Für die Trainerinnen und Trainer besteht zusätzlich die Möglichkeit, ihre Kenntnisse in einem Online-Kurs zu vertiefen, der die Phasen des „Mathematikkreises“ u. a. mit Filmbeispielen aus Kita und Grundschule konkretisiert. Alle diese Formate sollen die Pädagoginnen und Pädagogen beim prozesshaften Vorgehen in der Mathematik und dessen Umsetzung im Alltag mit den Kindern unterstützen. Mit diesem prozessorientierten Grundverständnis können auch alle anderen mathematischen Inhaltsbereiche erarbeitet und erschlossen werden.

1.3 Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen

Die von Benz et al. priorisierte Zieldimension „Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen“ ist in einem ersten Schritt vor allem auf Ebene der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte von Bedeutung. Diese müssen über ein entsprechendes Hintergrundwissen zu mathematischen Zusammenhängen verfügen, um die mathematischen Kompetenzen von Kindern im Alltag, z. B. im Rahmen von Spielanlässen, zu erkennen und die Wissensaneignung der Kinder unterstützen zu können. Angelehnt an die Bildungsstandards Mathematik der Primarstufe werden die folgenden fünf inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche unterschieden:

- Zahlen und Operationen
- Raum und Form
- Muster und Strukturen
- Größen und Messen
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Diese Inhaltsbereiche bilden über die gesamte Bildungskette hinweg eine Kohärenz, die es ermöglicht, aufbauend auf mathematischen Alltags- und Spielerfahrungen im Elementarbereich, mathematische Kompetenzen in der Schulzeit systematisch weiterzuentwickeln. Mit Blick auf die frühe mathematische Bildung für drei- bis zehnjährige Kinder empfehlen die Autorinnen und Autoren der vorliegenden Expertise eine besondere Gewichtung auf die folgenden drei Inhaltsbereiche:

- Zahlen und Operationen
- Raum und Form
- Muster und Strukturen

Dem Inhaltsbereich „Muster und Strukturen“ schreiben Benz et al. dabei eine besondere Rolle zu, „da das Denken in Mustern und Strukturen auch als übergreifende Kategorie gesehen werden kann“ (S. 84 im vorliegenden Band). Das Erkennen, Nutzen und Verändern von Mustern und Strukturen spielt in allen Inhaltsbereichen der Mathematik eine bedeutende Rolle. Es geht dabei darum, Regelmäßigkeiten zu erkennen und mathematische Zusammenhänge zu verstehen.

Als eigenständige inhaltliche Facette priorisieren Benz et al. den Inhaltsbereich „Zahlen und Operationen“. Der frühen Kompetenzentwicklung in diesem Bereich konnte eine große Bedeutung für das weitere Mathematiklernen in verschiedenen Längsschnittstudien nachgewiesen werden. Ebenso von besonderer Bedeutung sind frühe Kompetenzen im Inhaltsbereich „Raum und Form“, der daher auch von den Autorinnen und Autoren priorisiert wird. Die Inhaltsbereiche „Größen und Messen“ und „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ bauen auf diesen Kompetenzen auf.

Umsetzung dieser Zieldimension in den Angeboten der Stiftung

Der Bildungsbereich Mathematik soll im Stiftungsangebot perspektivisch genauso gut vertreten sein wie der Bereich der naturwissenschaftlichen und technischen Bildung. Als zentraler mathematischer Inhaltsbereich wurde das Thema „Raum und Form“ 2014 im Stiftungsangebot verankert. Die kindliche Entwicklung der visuellen Wahrnehmung und des räumlichen Vorstellungsvermögens sind entscheidende Vorläuferfähigkeiten für spätere schulische Lernprozesse, insbesondere im Bereich Geometrie, aber auch im Hinblick auf andere mathematische Bereiche wie die Arithmetik. Das Thema „Raum und Form“ bietet einen großen Alltagsbezug und macht die Welt der Mathematik für Kinder sichtbar und auf anschauliche Weise erfahrbar.

MATHEMATIK IN RAUM UND FORM

Mathematik entdecken: Achsensymmetrie

SPIEGELN UND FALTEN

Wo begegnet es uns im Alltag?

Schmetterlinge, Blüten, Gesichter – oft finden wir genau die Dinge besonders schön, die in irgendeiner Hinsicht symmetrisch sind, deren Kanten sich also aufeinanderlegen lassen, wenn man die Dinge in der Mitte faltet. Symmetrien finden sich aber auch in weniger auffälligen Gegenständen, z. B. an einem Lichtschalter oder beim Frühstücksteller. Lässt man kleine Details außer Acht, so hat auch der menschliche Körper eine Linie, die ihn in zwei fast spiegelbildliche Teile teilt.

Darum geht's

Ausgehend von ihren Alltagserfahrungen mit dem Spiegel lernen die Kinder, die Linie zu erkennen, die Bild von Abbild trennt. Mit Klecksbildern erkunden sie, wie der Abstand des Bilds von der Spiegelachse den Abstand des Abbilds beeinflusst.

Das wird gebraucht

- Lange Schnur oder Kreppklebeband
- Papier, Stift
- Bastelpapier, Schere
- Tinte bzw. Wasserfarbe
- Schnüre, Lineal
- Verschiedene Gegenstände, z. B. Papierrollen, Stifte, Löffel, Würfel in doppelter Menge

Abb 1: Das Spiegelbild macht alles nach.

Abb. 2: Selbst Spiegel spielen.

Abb. 3: Wie spiegelt man sich nebeneinander?

DAS SPIEGELSPIEL (EINSTIMMUNG)

Markieren Sie eine gerade Linie auf dem Boden, entweder mit Kreppklebeband oder durch eine lange Schnur. Zwei Kinder, nur getrennt durch die Linie, stehen sich gegenüber. Eines der beiden verändert etwas an seiner Haltung, indem es z. B. den rechten Arm hebt oder den Kopf zur Seite neigt. Sein Gegenüber versucht, sich so wie das Spiegelbild zu verhalten. Wie muss sich das „Spiegelkind" bewegen, wenn das erste Kind einen Schritt nach vorn oder zur Seite macht? Anschließend tauschen beide Kinder die Rollen.

Seht her: *Das Spiegelbild macht alles nach. Neigt man den Kopf zur Seite, neigt sich der Kopf im Spiegel in die gleiche Richtung.*

SPIEGELSPIELEREIEN

Die Mädchen und Jungen spielen das Spiegelspiel weiter. Auf dem Boden markieren Sie wieder die Spiegellinie. Dieses Mal sollen sich die Kinder nicht einfach gegenüberstehen, sondern sich auch drehen. Erst stehen sie schräg zueinander und schließlich stehen sie nebeneinander. Können die beiden ihre gegenseitigen Bewegungen noch erkennen? Die außenstehenden Mädchen und Jungen helfen dem „Spiegelkind", die Bewegungen des anderen nachzuvollziehen. Sie können ihm zurufen, welche Bewegungen es machen soll. In welche Richtung muss sich das „Spiegelkind" bewegen, wenn die vorgegebene Bewegung ein Schritt zur Seite ist?

Seht her: *Nebeneinanderstehend macht das Spiegelbild die Bewegung nicht in die gleiche Richtung, sondern genau entgegengesetzt. Streckt man seinen rechten Arm zur Seite aus, so muss das Spiegelbild seinen linken Arm in genau die entgegengesetzte Richtung strecken. Das Spiegelbild hängt vom Abstand des Originals zur Spiegelachse ab.*

06/2014

MATHEMATIK IN RAUM UND FORM

Abb. 4: Aus einem Klecks wird ein symmetrisches Bild.

FAXEN MIT SPIEGELACHSEN

Lassen Sie die Kinder ein Blatt Papier einmal so falten, dass keine Ecke übersteht. Dann klappen sie das Blatt wieder auf und malen mit Tusche eine Figur oder auch nur einen Klecks auf die eine Seite. Bevor die Farbe antrocknet, klappen sie das Blatt wieder zu und pressen kräftig mit ihrer Hand darauf. Wie, meinen die Kinder, wird das Blatt wohl aussehen, wenn sie es erneut aufklappen? Wo wird ein Farbtupfer landen, den sie nahe am Falz gemalt haben, und wo einer, der weiter von der Falzlinie entfernt liegt?

Seht her: *Der Abdruck hat den gleichen Abstand zur Falzlinie wie der Farbklecks. Außerdem besitzt er die gleiche Form und Größe.*

WISSENSWERTES FÜR INTERESSIERTE ERWACHSENE

Eine Symmetrie ist – mathematisch betrachtet – eine Bewegung, die eine Figur gleich lässt. Mit anderen Worten, eine solche Bewegung bildet die Figur deckungsgleich auf sich selbst ab. So eine Bewegung kann eine Achsenspiegelung, eine Drehung, eine Verschiebung oder eine Kombination davon sein. Der Buchstabe A etwa hat eine (einzige) Spiegelachse, er ist achsensymmetrisch. Eine Drehsymmetrie besitzt er nicht. Das Paragrafenzeichen § hat keine Spiegelachsen, lässt sich aber um 180 Grad drehen und sieht danach genauso aus wie vorher – es ist drehsymmetrisch. Spiegel erzeugen stets ein symmetrisches Gesamtbild und stehen dabei entlang einer Symmetrieachse dieses Gesamtbilds.

Symmetrische Bilder oder Gegenstände wirken auf den Betrachter bzw. die Betrachterin oft in sich geschlossen und schön. Darüber hinaus sind viele Dinge, nur auf Grund ihrer Symmetrie funktionstüchtig und zweckmäßig, etwa Leitern, Stühle oder Drachen.

DIE SPIEGELLINIE

Jedes Kind sucht sich zwei möglichst ähnliche Gegenstände, etwa zwei Löffel oder zwei gleiche Holzklötze. Bitten Sie die Mädchen und Jungen, einen Gegenstand auf den Boden zu legen. Ein buntes Durcheinander von Sachen entsteht. Markieren Sie nun mit einem Kreppband oder einer langen Schnur eine Spiegellinie auf dem Boden: Wie lässt sich mit den übrigen Sachen ein Spiegelbild bauen? Es reicht nicht, wenn sich die Gegenstände einfach gegenüberliegen. Überlegen Sie mit den Kindern, wie nah oder fern sie die Sachen von der Linie platzieren müssen, damit das Spiegelbild gelingt.
Zum Bestimmen des Abstands zur Spiegellinie reicht Wolle oder Bindfaden. Die Kinder kleben ihn an der Spiegellinie fest und spannen ihn bis zum Gegenstand. Jetzt schneiden sie den Faden ab und legen ihn auf die andere Seite des „Spiegels". Am Ende des Fadens wird der „Spiegelgegenstand" abgelegt.

Seht her: *Um ein Spiegelbild zu legen, muss das Gegenstück eines Gegenstands in genau denselben Abstand zur Spiegellinie und auf die gleiche Höhe gelegt werden, wie der Gegenstand selbst liegt.*

Abb. 5: Ein Spiegelbild selbst legen.

Abbildung 8. *Vorder- und Rückseite der Forschungs- und Entdeckungskarte „Spiegeln und Falten" (Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2014b)*

Die Präsenzfortbildung zu diesem Thema und die dazugehörigen pädagogischen Materialien wie die Themenbroschüre (Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2014a) oder die Forschungs- und Entdeckungskarten (Abbildung 8; Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2014b) unterstützen die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte dabei, das Thema „Raum und Form“ im Alltag mit den Kindern zu entdecken und hieran die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten der Mädchen und Jungen zu fördern.

Mit der Erweiterung des Bereichs Mathematik um das Thema „Zahlen, Zählen, Rechnen“ seit Herbst 2016 folgt die Stiftung den Empfehlungen der Fachexpertinnen und -experten, das Stiftungsangebot im Bereich Mathematik auszubauen (vgl. Abschnitt 5.2.2). Damit wird der priorisierte Inhaltsbereich „Zahlen und Operationen“ aufgegriffen und abgebildet. Für den Elementarbereich wird die Entwicklung des Zahlbegriffs und für den Primarbereich das Verständnis der Rechenoperationen und Rechenstrategien in den Vordergrund gerückt. Die pädagogischen Materialien wie die Themenbroschüre (Abbildung 9; Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2016a) und die Forschungs- und Entdeckungskarten (Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2016b) zum Thema enthalten viele Praxisbeispiele, wie die Welt der Zahlen, des Zählens und des Rechnens gemeinsam mit den Kindern erforscht werden kann.

Abbildung 9. *Titelseite und Inhaltsverzeichnis der Themenbroschüre „Zahlen, Zählen, Rechnen – Mathematik entdecken“ (Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2016a)*

Der Inhaltsbereich „Muster und Strukturen“ wird von der Stiftung, wie von Benz et al. empfohlen, als übergreifendes Thema in die Mathematikthemen integriert. So werden in den pädagogischen Materialien und Themenworkshops zu „Raum und Form“ und „Zahlen, Zählen, Rechnen“ geometrische Muster sowie Zahlenmuster thematisiert, und die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte erhalten diverse Praxisanregungen dazu. Des Weiteren ist die Leitidee der Muster und Strukturen im „Mathematikkreis“ in den Phasen „Muster erkennen“ und „Muster prüfen und nutzen“ verankert. Die Stiftung plant, die beiden Inhaltsbereiche „Größen und Messen“ sowie „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ in unterschiedliche Module in ihrem Angebot zu integrieren.

Anregungen für Praxisbeispiele bekommen die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte in den Fortbildungen sowie in den Themenbroschüren und den Forschungs- und Entdeckungskarten. Darüber hinaus bietet die Stiftung Kindern im Grundschulalter über Entdeckungskarten für Kinder und die Kinder-Website www.meine-forscherwelt.de die Möglichkeit, eigenständig zu forschen und zu entdecken.

Die von der Stiftung neu entwickelten Umsetzungsideen und Materialien werden zunächst mit Piloteinrichtungen auf ihre Praxistauglichkeit getestet, bevor sie allen Einrichtungen zur Verfügung stehen. Auch die Themenworkshops werden mit ausgewählten Trainerinnen und Trainern erprobt und evaluiert, um Verbesserungen vornehmen zu können. Zudem werden im Rahmen der Qualitätssicherung und -entwicklung fortlaufend die Rückmeldungen der an den Fortbildungen teilnehmenden pädagogischen Fach- und Lehrkräfte erhoben und ausgewertet, um so auch die Wirkungen der Fortbildungsmaßnahmen zu erfassen (vgl. Empfehlungen Abschnitt 4.2.5). Somit ist das Stiftungsangebot nicht nur wissenschaftlich fundiert, sondern profitiert auch von der Erfahrung pädagogischer Fach- und Lehrkräfte aus der Praxis. Die Materialien werden regelmäßig überprüft und bei Bedarf überarbeitet und angepasst (vgl. Abschnitt 5.2.2)

1.4 Mathematikdidaktische Kompetenzen

Als eine bedeutende Zieldimension auf Ebene der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte priorisieren Benz et al. die „mathematikdidaktischen Kompetenzen“. Zusammen mit den prozess- und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen bildet dieser Kompetenzbereich die professionelle Grundlage für eine wirksame mathematische Bildung im Kita- und Grundschulbereich. Zu den fachdidaktischen Kompetenzen gehören:

- mathematikdidaktische Grundkompetenzen,
- mathematikdidaktische Handlungskompetenzen sowie
- mathematikbezogene Diagnosekompetenzen.

Das Ziel ist es, die pädagogischen Handlungsstrategien der Fach- und Lehrkräfte zu stärken. Das Wissen über die Ziele mathematischer Bildung, verschiedene didaktische Methoden sowie die Gestaltung effektiver Lernumgebungen ist dabei von großer Bedeutung. Zudem ist es vor allem im Elementarbereich wichtig, Alltags- und Spielsituationen mit mathematischem Gehalt zu erkennen und zu nutzen, um Gelegenheiten für mathematisches Lernen zu schaffen. Dabei sollten die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte in der Lage sein, den Entwicklungsstand der einzelnen Kinder einzuschätzen und die Förderung entsprechend anzupassen.

Umsetzung dieser Zieldimension in den Angeboten der Stiftung
Die Stiftungsangebote zielen darauf ab, die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte mit konkreten pädagogischen Handlungsansätzen vertraut zu machen, die sie dann nutzen können, um die Kinder in ihren Lernprozessen zu unterstützen.

In den Präsenzfortbildungen werden in Übungsphasen verschiedene Methoden ausprobiert. Die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte setzen sich beispielsweise in der Fortbildung „Zahlen, Zählen, Rechnen – Mathematik entdecken“ selbst systematisch mit mathematischen Fragestellungen auseinander und reflektieren und präsentieren ihre Lösungswege und Ergebnisse mit der Methode der „Mathematikkonferenz“. Dabei handelt es sich um einen Zusammenschluss der Teilnehmerinnen und Teilnehmer in heterogenen Gruppen, die in einen mündlichen, sachbezogenen Austausch miteinander gehen. Innerhalb der Mathematikkonferenz beschreiben und begründen sie ihr Vorgehen bei der Lösung einer Aufgabe und vollziehen Gedankengänge von anderen nach. Diese Erfahrungen bilden die Grundlage, um über das eigene mathematische Vorgehen zu reflektieren, die Methode „Mathematikkreis“ kennenzulernen und Einsatzmöglichkeiten des Kreises zu erarbeiten. Zudem werden praktische Beispiele vorgestellt und angewendet, um den mathematischen Bezug im Alltag zu verdeutlichen. Der klar erkennbare Bezug zur beruflichen Realität ist laut Benz et al. eine wichtige Voraussetzung für gelingende Fortbildungen (vgl. Abschnitt 4.2.1).

Die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte sollen so das mathematische Potenzial von Spiel- und Alltagssituationen einschätzen lernen und zu nutzen wissen. Die fachliche Kompetenz, effektive Lernumgebungen zu gestalten, sehen die Fachexpertinnen und -experten als eine grundlegende Gelingensbedingung für eine wirkungsvolle frühe mathematische Bildung (vgl. hierzu Empfehlungen Abschnitt 4.1.1). Im Rahmen der Fortbildung reflektieren die Pädagoginnen und Pädagogen im Anschluss an die Übungsphasen den Transfer in die Praxis. Diese Reflexionsphasen unterstützen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer dabei, die in der Fortbildungssituation erlebten Inhalte und Erfahrungen im pädagogischen Alltag umzusetzen. Die Pädagoginnen und Pädagogen erhalten somit Impulse, mathematische Lernmöglichkeiten in ihren pädagogischen Alltag zu integrieren. Der

Wechsel aus Fortbildungen, Praxiserfahrungen und Reflexionsphasen ermöglicht es den pädagogischen Fach- und Lehrkräften ihre mathematikdidaktischen Kompetenzen weiterzuentwickeln und zu vertiefen.

Diesen Wechsel zwischen Aktion und Reflexion sehen Benz et al. (vgl. Abschnitt 4.2.2) als eine wichtige Gelingensbedingung für die Fortbildung pädagogischer Fach- und Lehrkräfte. Die Rückmeldungen[7] von über 1.000 Teilnehmerinnen und Teilnehmern an „Haus der kleinen Forscher“-Fortbildungen im Bereich Mathematik im Jahr 2015 zeigen, dass sie sich nach der Teilnahme gut darauf vorbereitet fühlen, das Thema gemeinsam mit den Kindern im Praxisalltag zu entdecken. Die multiprofessionellen Fortbildungen ermöglichen zudem einen Austausch zwischen pädagogischen Fachkräften aus dem Elementarbereich und Pädagoginnen und Pädagogen aus dem Grundschulbereich. Somit wird auch die Zusammenarbeit zwischen Fach- und Lehrkräften verschiedener Institutionen unterstützt, ebenfalls eine wichtige Gelingensbedingung für die Gestaltung guter mathematischer Bildung von Kindern (vgl. Benz et al. in Abschnitt 4.1.5).

Mathematikdidaktische Methoden werden ergänzend in den Themenbroschüren dargestellt und mit Umsetzungsanregungen veranschaulicht. Des Weiteren wird beispielsweise in den Broschüren zum Thema „Raum und Form“ (Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2014a) sowie „Zahlen, Zählen, Rechnen“ (Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2016a) aufgezeigt, wie mathematische Bildung in den Bildungs- und Rahmenlehrplänen der Kitas und Grundschulen verankert ist und wie diese Bildungsansätze in den Stiftungsangeboten integriert sind. Die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte erhalten zudem darin Informationen über die Ziele früher mathematischer Bildung und die Kompetenzentwicklung von Kindern.

1.5 Einstellungen und Überzeugungen in Bezug auf die Gestaltung mathematischer Bildung

Die mathematikbezogene Haltung der Fachkräfte hat einen großen Einfluss auf die mathematische Förderung in Kita, Hort und Grundschule. Daher erachten die Autorinnen und Autoren der Expertise auf Ebene der pädagogischen Fach- und Lehrkräfte die Zieldimension „Einstellungen und Überzeugungen in Bezug auf die Gestaltung mathematischer Bildung“ als sehr wichtig. Zu dieser Zieldimension gehören:

---

7 *Im Rahmen der Qualitätssicherung und -entwicklung werden fortlaufend die Rückmeldungen der an den Fortbildungen teilnehmenden pädagogischen Fach- und Lehrkräfte erhoben und ausgewertet.*

- Überzeugungen zum Wesen von Mathematik,
- Überzeugungen zum Lehren und Lernen von Mathematik und
- Einstellungen in Bezug auf den Stellenwert mathematischer Bildung.

Eine positive Einstellung zum Fach Mathematik ist die Voraussetzung für eine gelingende Auseinandersetzung mit mathematischen Themen im Alltag mit den Kindern. Benz et al. empfehlen einen prozessorientierten Blick auf die Mathematik und keine statische Sichtweise. Das bedeutet, das Lösen von Problemen mit mathematischen Tätigkeiten als eine Abfolge aus verschiedenen Handlungsschritten anzusehen. In Bezug auf das Lehren und Lernen von Mathematik favorisieren die Fachexpertinnen und -experten eine konstruktivistisch orientierte Überzeugung, in der sich die Fach- und Lehrkräfte als Lernbegleiter sehen, die Lernumgebungen aufgreifen oder schaffen und die Kinder dabei unterstützen, mathematisches Wissen konstruktiv zu erwerben.

Im Gegensatz zum Primarbereich ist die mathematische Bildung im Elementarbereich weniger fest verankert. Es fehlen allgemeingültige Standards, wodurch der Stellenwert der mathematischen Bildung abhängig ist von individuellen Überzeugungen. Ein Ziel sollte es daher sein, dass auch die pädagogischen Fachkräfte, die im Elementarbereich tätig sind, der frühen mathematischen Bildung einen angemessenen Stellenwert beimessen. Ein entsprechendes Hintergrundwissen und die Entwicklung von fachdidaktischen Kompetenzen bei den Fach- und Lehrkräften sind nach Benz et al. Voraussetzung für die Entwicklung einer positiven Einstellung gegenüber Mathematik und für die Unterstützung von kindlichen Lernprozessen in diesem Themenbereich im Alltag.

Umsetzung dieser Zieldimension in den Angeboten der Stiftung

Die Stiftungsangebote im Bereich Mathematik zielen auf eine positive Grundhaltung bei den pädagogischen Fach- und Lehrkräften gegenüber früher mathematischer Bildung ab. Die zahlreichen Praxisbeispiele in den verschiedenen Fortbildungsformaten und Materialien verdeutlichen den großen Alltagsbezug der Mathematik und erleichtern es den Pädagoginnen und Pädagogen, entsprechende Lerngelegenheiten zu erkennen und zu nutzen (vgl. Empfehlungen Abschnitt 4.1.1). Ebenso sind alle Stiftungsangebote dahingehend ausgerichtet, die Fach- und Lehrkräfte mit einem prozesshaften mathematischen Vorgehen vertraut zu machen (z. B. anhand des „Mathematikkreises“). Mathematik soll nicht als schematische Anwendung von Formeln wahrgenommen werden, sondern als eine Möglichkeit, Probleme kreativ und prozessorientiert zu lösen. Die praktische Auseinandersetzung mit der frühen mathematischen Bildung soll eine positive Einstellung zum Thema fördern und somit auch den Stellenwert der Mathematik im Vergleich zu anderen Bildungsbereichen stärken.

Die von Benz et al. vorgeschlagene konstruktivistische Orientierung in Bezug auf das Lehren und Lernen von Mathematik entspricht dem pädagogischen Ansatz der Stiftung (vgl. Pädagogischer Ansatz der Stiftung in Stiftung Haus der kleinen Forscher, 2015b). Beim ko-konstruktiven Lernen gestalten Kinder und Erwachsene gemeinsam den Lernprozess. Die Kinder erschließen sich selbst ihre Umwelt und entwickeln ihr Bild von der Welt. Die pädagogische Fach- oder Lehrkraft unterstützt dabei als Lernbegleitung, die die individuellen Entwicklungsschritte der Kinder beobachtet und adäquate Lernumgebungen gestaltet.

2 Ausblick

Mit der Erweiterung des Themenbereichs Mathematik hat die Stiftung dessen Stellenwert im Stiftungsangebot neben der naturwissenschaftlichen und technischen Bildung ausgebaut und gefestigt. Sie folgt damit den Empfehlungen der Fachexpertinnen und -experten, die inhaltlichen Angebote der Stiftung im Bereich Mathematik zu erweitern (vgl. Abschnitt 5.2.2). Im Hinblick auf ein von Benz et al. empfohlenes langfristiges Mathematik-Konzept (vgl. Abschnitt 5.2.1) ist geplant, neben den beiden Mathematik-Modulen zu „Zahlen, Zählen, Rechnen" und „Raum und Form" auch die beiden Themen „Größen und Messen" sowie „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit" im weiteren Angebot der Stiftung zu berücksichtigen.

Eine zentrale Rolle für den positiven Fortgang der frühen mathematischen Bildung in der Bildungsinitiative „Haus der kleinen Forscher" kommt den Multiplikatorinnen und Multiplikatoren zu, die in den lokalen Netzwerken die Fortbildungen für die Pädagoginnen und Pädagogen durchführen. Benz et al. empfehlen, die Konzepte für die Fortbildung und unterstützenden Qualifizierungsangebote für diese Gruppe zu prüfen und dabei vor allem auch die Heterogenität der mathematikbezogenen Vorkenntnisse der Trainerinnen und Trainer zu beachten (vgl. hierzu Benz et al., Abschnitt 5.2.1). Mit der Trainerakademie 2.0 hat die Stiftung „Haus der kleinen Forscher" im März 2016 eine dreijährige Offensive für gute frühe MINT-Bildung gestartet. Ziel des Projektes, welches von der aqtivator gGmbH gefördert wird, ist es, bundesweit die hohe Qualität der „Haus der kleinen Forscher"-Fortbildungen für pädagogische Fach- und Lehrkräfte zu sichern. Die Trainerakademie 2.0. soll die Ausbildung der Trainerinnen und Trainer in Zukunft noch stärker am individuellen Bedarf der einzelnen Weiterbildungsteilnehmerinnen und -teilnehmer ausrichten. Damit leistet dieses Projekt im MINT-Bereich einen zentralen Beitrag zur Entwicklung der Lernbegleitung pädagogischer Fach- und Lehrkräfte. Im Rahmen der Trainerakademie 2.0 wird die Stiftung bis 2019 das bestehende Angebot mit neuen Qualifizierungsformaten erweitern und die individuellen Kompetenzen der Trainerinnen und Trainer noch gezielter unterstützen. Das gesamte Projekt baut auf Erfahrungen auf, die die Stiftung in den vergangenen zehn Jahren im Bereich der Trainerqualifizierung für die frühe MINT-Bildung in Kitas, Horten und Grundschulen gesammelt hat. Das erweiterte Angebot für Trainerinnen und Trainer dient der Qualitätssicherung und -verbesserung und eröffnet neue Perspektiven für Deutschlands größte Bildungsinitiative auch im Bereich der frühen mathematischen Bildung.

Begleitend zur inhaltlichen (Weiter-)Entwicklung der Angebote im Bereich Mathematik wird die Stiftung auch weiterhin den fachlichen Austausch mit Expertinnen und Experten aus Wissenschaft und Praxis pflegen und sich gemeinsam für bessere Bildungschancen einsetzen. So sind an der inhaltlichen Entwicklung z. B. PD Dr. David Ploog (Universität Hannover) und Prof. Dr. Bernd Wollring (Universität Kassel) beratend beteiligt. Der Wissenschaftliche Beirat begleitet die Stiftung zur fachlichen Fundierung und dessen Umsetzung im Angebot. Die Mathematikdidaktik hat einen festen Platz im Wissenschaftlichen Beirat der Stiftung und wird dort von Bernd Wollring vertreten. Die Stiftungskonzepte werden regelmäßig auf Fachtagungen präsentiert und mit Fachleuten aus anderen Institutionen und Projekten im Bereich Mathematik diskutiert. Zudem fließen die Ergebnisse aus der kontinuierlichen Evaluation und dem Qualitätsmonitoring der verschiedenen Mathematikformate in Weiterentwicklungen innerhalb dieses Themenbereichs mit ein (vgl. Empfehlungen von Benz et al. in Abschnitt 5.3). Perspektivisch wünschenswert wären auch Wirkungsstudien im Bereich der mathematischen Bildung, um mehr Erkenntnisse zu den Wirkungen der Angebote für die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte und die Trainerinnen und Trainer, sowie auch zu Wirkungen auf Ebene der Kinder zu sammeln.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das Mathematikangebot der Initiative „Haus der kleinen Forscher" Bildungseinrichtungen im Elementar- und Primarbereich dabei unterstützen soll, sich als „Ort des forschenden Lernens" auch im Bereich der frühen mathematischen Bildung nachhaltig weiterzuentwickeln. Das Ziel ist es, förderliche Lernumgebungen für Kinder zu schaffen und sowohl bei Kindern als auch Pädagoginnen und Pädagogen eine positive Einstellung zu Mathematik zu erreichen. Gemeinsam mit ihren Bezugspersonen, den pädagogischen Fach- und Lehrkräften, sollen die Kinder Spaß und Freude am Entdecken und Verstehen ihrer Lebensumwelt haben.

Neben den Themenschwerpunkten der mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Bildung hat sich die Stiftung als MINT[8]-Initiative inzwischen auch auf den Weg gemacht, das „I in MINT" als Bildungsbereich in ihrem Programm zu implementieren und auszubauen. Im Rahmen der fachlichen Fundierung formulierte eine von der Stiftung initiierte Expertengruppe Empfehlungen für pädagogisch-inhaltliche Ziele und Gelingensbedingungen informatischer Bildung im Elementar- und Primarbereich (Bergner et al., in Vorbereitung[9]), die die Basis für die inhaltliche Entwicklung der Stiftungsangebote im Bildungsbereich Informatik darstellen. Ab Herbst 2017 soll die informatische Bildung mit konkreten Praxisideen in das Fortbildungsprogramm der Stiftung integriert sein. Mit ihren Angeboten möchte die Stiftung „Haus der kleinen Forscher" pädagogische Fach- und Lehrkräfte dabei unterstützen, Mädchen und Jungen in ihrer Auseinanderset-

8 MINT = Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften, Technik.

9 Mehr Informationen unter: www.haus-der-kleinen-forscher.de, Rubrik „Wissenschaftliche Begleitung".

zung mit Fragestellungen zum Themenbereich Informatik zu begleiten und diese entwicklungsgemäß zu erforschen.

Außerdem weitet die Stiftung ihr Angebot auf Bildung für nachhaltige Entwicklung aus[10], um nachhaltiges Denken und Handeln in Bildungseinrichtungen des Elementar- und Primarbereichs zu verankern. Mädchen und Jungen sollen Kompetenzen entwickeln, um unsere komplexe Welt mit ihren begrenzten natürlichen Ressourcen zu erforschen, zu verstehen und aktiv im Sinne einer nachhaltigen Entwicklung zu gestalten. Dazu werden derzeit Fortbildungskonzepte und Materialien für Pädagoginnen und Pädagogen entwickelt, die mit Kindern im Alter von 3 bis 10 Jahren arbeiten. Dabei wahrt die Stiftung den Bezug zu den Kernthemen des „Hauses der kleinen Forscher" – Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik. Das neue Angebot zur Bildung für nachhaltige Entwicklung wird ab 2018 allen Fach- und Lehrkräften in pädagogischen Einrichtungen im Bereich Kita, Hort und Grundschule zu Verfügung stehen. Zusätzlich zu Fortbildungen für pädagogische Fach- und Lehrkräfte aus dem Kita- und Grundschulbereich werden erstmals auch Fortbildungen und Materialien speziell für Kita-Leitungen entwickelt. Die Stiftung möchte die Leiterinnen und Leiter von Kitas dabei unterstützen, ihre Einrichtung als Ganzes nachhaltig zu gestalten. Bei der Entwicklung der neuen Angebote schließt die Stiftung an die Erfahrungen der UN-Dekade „Bildung für nachhaltige Entwicklung" an und ist in das Netzwerk des Weltaktionsprogramms eingebunden (mehr Infos unter http://www.bne-portal.de).

Sowohl in der informatischen Bildung als auch in der Bildung für nachhaltige Entwicklung ist ein Verständnis mathematischer Prozesse wichtig. Die informatische Bildung bietet vielfältige Anknüpfungspunkte, um gleichzeitig auch ein mathematisches Verständnis zu fördern (z. B. Binärzahlen, Algorithmen). In der Bildung für nachhaltige Entwicklung unterstützt ein mathematisches Verständnis das Begreifen von Zusammenhängen zwischen dem eigenen Handeln und dessen Auswirkungen auf Mensch und Natur (z. B. durch das Erkennen

10 *Mehr Informationen zum Projekt unter: http://www.haus-der-kleinen-forscher.de/de/ueberuns/projekte/bne/ [Zugriff am: 14.10.2016].*

von Mustern oder das Messen von Mengen). Diese beiden Bildungsbereiche zeigen beispielhaft, dass die Mathematik einen wichtigen Kernbereich (früh) kindlicher Bildung darstellt, dessen Verständnis auch der Erschließung anderer Themen und Disziplinen zugutekommt.

Literatur

Einleitung –

Stiftung Haus der kleinen Forscher

Anders, Y. & Ballaschk, I. (2014). Studie zur Untersuchung der Reliabilität und Validität des Zertifizierungsverfahrens der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“. In Stiftung Haus der kleinen Forscher (Hrsg.), *Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“* (Band 6, S. 35–116). Schaffhausen: Schubi Lernmedien AG.

Bandura, A. (1979). *Sozial-kognitive Lerntheorie*. Klett-Cotta.

Becker-Stoll, F. (2009). Von der Eltern-Kind-Bindung zur Erzieherin-Kind-Beziehung. In K. H. Brisch & T. Hellbrügge (Hrsg.), *Wege zu sicheren Bindungen in Familie und Gesellschaft. Prävention, Begleitung, Beratung und Psychotherapie* (S. 152–169). Stuttgart: Klett-Cotta.

Bundesministerium für Bildung und Forschung (2016). *75 Prozent der Erzieherinnen haben Spaß an Mathematik*. Zugriff am 31.08.2016 unter https://www.bmbf.de/de/75-2375.html

Gresham, G. (2007). A study of mathematics anxiety in pre-service teachers. *Early Childhood Education Journal, 35*, 181–188.

Grieshop, G. & Winter, M. (2012). Einführung des Schwerpunktthemas Mathematik mit den Mathematikkarten der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ – Ein Modellprojekt im nifbe Regionalnetzwerk SüdWest. In Stiftung Haus der kleinen Forscher (Hrsg.), *Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“* (Band 3, S. 83–143). Köln: Bildungsverlag EINS GmbH.

Miller, H. & Bichsel, J. (2004). Anxiety, working memory, gender, and math performance. *Personality and Individual Differences, 37*, 591–606.

Pahnke, J. & Pauen, S. (2012). Entwicklung mathematischer und naturwissenschaftlicher Kompetenzen in der frühen Kindheit. In Stiftung Haus der kleinen Forscher (Hrsg.), *Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“* (Band 4, S. 17–68). Schaffhausen: Schubi Lernmedien AG.

Stiftung Haus der kleinen Forscher (2011). *Mathematik entdecken. Praxisideen und Hintergründe zur frühen mathematischen Bildung*. Berlin: Stiftung Haus der kleinen Forscher. Verfügbar unter www.haus-der-kleinen-forscher.de

Stiftung Haus der kleinen Forscher (2013a). *Pädagogischer Ansatz der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ – Anregungen für die Lernbegleitung in Naturwissenschaften, Mathematik und Technik* (4. Auflage). Berlin: Stiftung Haus der kleinen Forscher. Verfügbar unter: www.haus-der-kleinen-forscher.de

Stiftung Haus der kleinen Forscher (2013b). *Wir lassen die Neugier in Kindern aufblühen. So wird Ihre Einrichtung ein „Haus der kleinen Forscher“*. Berlin: Stiftung Haus der kleinen Forscher. Verfügbar unter www.haus-der-kleinen-forscher.de

Stiftung Haus der kleinen Forscher (2015a). *Pädagogischer Ansatz der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“. Anregungen für die Lernbegleitung in Naturwissenschaften, Mathematik und Technik* (5. Auflage). Berlin: Stiftung Haus der kleinen Forscher. Verfügbar unter: www.haus-der-kleinen-forscher.de

Stiftung Haus der kleinen Forscher (2015b). *Monitoring-Bericht 2015 der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“*. Berlin: Stiftung Haus der kleinen Forscher. Verfügbar unter: www.haus-der-kleinen-forscher.de

Zieldimensionen mathematischer Bildung im Elementar- und Primarbereich –

Christiane Benz, Meike Grüßing, Jens Holger Lorenz, Christoph Selter, Bernd Wollring

Ackerman, D. J. & Barnett, W. S. (2005). *Prepared for kindergarten: What does „readiness" mean?* New Brunswick, NJ: National Institute for Early Education Research, Rutgers University.

Alloway, T. P. & Alloway, R. G. (2010). Investigating the predictive roles of working memory and IQ in academic attainment. *Journal of Experimental Child Psychology, 106,* 20–29.

Alloway, T. P. (2009). Working memory, but not IQ predicts subsequent learning in Children with learning difficulties. *European Journal of Psychological Assessment, 25,* 92–98.

Altrichter, H. (2008). *Konzepte der Lehrerfortbildung im Kontext von Veränderungen im Schulwesen*. Zugriff am 24.02.2013 unter http://www.bildungsmanagement.net/pdf_gesichert/Altrichter-Text3.pdf

Anders, Y., Hardy, I., Pauen, S. & Steffensky, M. (2013). Zieldimensionen naturwissenschaftlicher Bildung im Kita-Alter und ihre Messung. In Stiftung Haus der kleinen Forscher (Hrsg.), *Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher"* (Band 5, S. 19–82). Schaffhausen: Schubi Lernmedien AG. Pdf verfügbar unter: www.haus-der-kleinen-forscher.de

Anders, Y., Hardy, I., Sodian, B. & Steffensky, M. (2013). Zieldimensionen naturwissenschaftlicher Bildung im Grundschulalter und ihre Messung. In Stiftung Haus der kleinen Forscher (Hrsg.), *Wissenschaftliche Untersuchungen zum Haus der kleinen Forscher* (Band 5, S. 83–146). Schaffhausen: Schubi Lernmedien AG. Pdf verfügbar unter www.haus-der-kleinen-forscher.de

Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J. E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology, 96,* 699–713.

Baake, D. (1999). *Die 0–5 Jährigen – Einführung in die Probleme der frühen Kindheit.* Weinheim, Beltz.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59* (5), 389–407.

Baroody, A. J., Lai, M.-L. & Mix, K. S. (2006). The development of young children's early number and operation sense and its implications for early childhood education. In B. Spodek & O. N. Saracho. (Hrsg.), *Handbook of research on the education of young children* (2nd ed., S. 187–221). NJ: Erlbaum.

Battista, M. T. (2006). Understanding the Development of Students' thinking about Length. *Teaching Children Mathematics, 13* (3), 140–146.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 843–908). New York: Information Age Publishing.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz & J. Voigt (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik. Analysen zum Un-*

terrichtshandeln II. IDM-Reihe: Untersuchungen zum Mathematikunterricht (Band 6). Köln: Aulis Verlag Deubner & Co Kg.

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9* (4), 469–520.

Baumert, J. & Kunter, M. (2011). Das Kompetenzmodell von COACTIV. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 29–53). Münster: Waxmann.

Bayer, N. & Moser, U. (2009). Wirkungen unterschiedlicher Modelle der Schuleingangsstufe auf den Lern- und Entwicklungsstand: Erste Ergebnisse einer Längsschnittstudie . *Zeitschrift für Grundschulforschung, 2* (1), 20–34.

Benz, C. (2012). Attitudes of kindergarten educators about math. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33* (2), 203–232.

Benz, C., Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung.* Heidelberg: Springer Spektrum.

Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote – eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule.* Hamburg: Kovac.

Blömeke, S. & Delaney, S. (2012). Assessment of teacher knowledge across countries: a review of the state of research. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 44,* 223–247.

Blömeke, S., Grassmann, M. & Wedekind, H. (2013). *Struktur, Niveau und Entwicklung professioneller Kompetenz von Erzieherinnen und Erziehern im Bereich Mathematik.* Poster auf der Bundestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik in Münster.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2010). *TEDS-M 2008 – Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich.* Münster: Waxmann

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Modellieren – schon in der Grundschule? In A. Peter-Koop, G. Lilitakis & B. Spindeler (Hrsg.), *Lernumgebungen – ein Weg zum kompetenzorientierten Mathematikunterricht in der Grundschule* (S. 142–153). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Bonsen, M. (2010). *Lehrerfortbildung/Professionalisierung im mathematischen Bereich. Expertise für die Expertengruppe ‚Mathematik entlang der Bildungskette' der Deutschen Telekom Stiftung.* Zugriff am 26.02.2013 unter http://www.telekom-stiftung.de/dts-cms/sites/default/files/core-library/files/impulse/mathematik-entlang-der-bildungskette/download/Lehrerfortbildung.pdf

Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher, 33* (8), 3–15.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C., Underhill, R., Jones, D. & Agard, P. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education, 23* (3), 194–222.

Bouffard, T., Marcoux, M. F., Vezeau, C. & Bordeleau, L. (2003). Changes in self-perceptions of competence and intrinsic motivation among elementary schoolchildren. *British Journal of Educational Psychology, 73,* 171–186.

Boyle, B., Lamprianou, I. & Boyle, T. (2005). A longitudinal study of teacher change: What makes professional development effective? Report of the second year of study. *School Effectiveness and School Improvement, 16,* 1–26.

Bredekamp, S. & Copple, C. (1997). *Developmentally appropriate practice in early childhood programs (revised edition)*. Washington: NAEYC.

Bromme, R. (1992). *Der Lehrer als Experte. Zur Psychologie des professionellen Lehrerwissens*. Göttingen: Hans Huber.

Bromme, R. (1997). Kompetenzen, Funktionen und unterrichtliches Handeln des Lehrers. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Enzyklopädie der Psychologie: Psychologie des Unterrichts und der Schule* (S. 77–212). Göttingen: Hogrefe.

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Dubberke, T., Jordan, A., Klusmann, U., Tsai, Y.-M. & Neubrand, M. (2006). Welche Zusammenhänge bestehen zwischen dem fachspezifischen Professionswissen von Mathematiklehrkräften und ihrer Ausbildung sowie beruflichen Fortbildung. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9,* 521–544.

Buchholz, N. & Kaiser, G. (2013). Professionelles Wissen im Studienverlauf: Lehramt Mathematik. In S. Blömeke, A. Bremerich-Vos, G. Kaiser, G. Nold, H. Haudeck, J. Keßler & K. Schwippert (Hrsg.), *Professionelle Kompetenzen im Studienverlauf* (S. 107–139). Münster: Waxmann.

Bundesarbeitsgemeinschaft der öffentlichen und freien, nicht konfessionell gebundenen Ausbildungsstätten für Erzieherinnen und Erzieher in der Bundesrepublik Deutschland [BöfAE] (2012). Länderübergreifender Lehrplan Erzieherin/Erzieher. Endversion vom 01.07.12. Zugriff am 25.04.2013 unter http://www.boefae.de/wp-content/uploads/2012/11/laenderuebergr-Lehrplan-Endversion.pdf

Büttner, G. & Schmidt-Atzert, L. (2003). *Diagnostik von Konzentration und Aufmerksamkeit* (Tests und Trends Band 3). Göttingen: Hogrefe.

Cantrell, S. C. & Callaway, P. (2008). High and low implementers of content literacy instruction: Portraits of teacher efficacy. *Teaching and Teacher Education, 24,* 1739–1750.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: cognitively guided instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Charlesworth, R., Hart, C. H., Burts, D. C., Thomasson, R. H. & Mosley, J. (1993). Measuring the developmental appropriateness of kindergarten teachers' beliefs and practices. *Early Childhood Research Quarterly, 8* (3), 255–276.

Clarke, D. M. (1994). Ten key principles from research for the professional development of mathematics teachers. In D. B. Aichele & A. F. Croxford (Hrsg.), *Professional development for teachers of mathematics* (S. 37–48). Reston, VA: NCTM.

Clarke, D., Cheeseman, J., Clarke, B., Gervasoni, A., Gronn, D., Horne, M., McDonough, A., Montgomery, P., Roche, A., Rowley, G. & Sullivan, P. (2002). *Early Numeracy Research Project, Final Report*. Melbourne: Australian Catholic University, Monash University.

Clausen-Suhr, K., Schulz, L. & Bricks, P. M. (2008). Mathematische Bildung im Kindergarten. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 9,* 341–349.

Clausen-Suhr, K., Schulz, L. & Bricks, P. M. (2011). Frühe mathematische Bildung im Kindergarten. Kurz- und langfristige Effekte einer frühen Förderung mit dem Programm „Mit Baldur ordnen, zählen, messen". *Heilpädagogische Forschung, 3,* 144–159.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 461–555). New York: Information Age Publishing.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.

Clements, D. H., Sarama, J. & DiBiase, A.-M. (Eds.). (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cloos, P. & Schulz, M. (Hrsg.). (2011). *Kindliches Tun beobachten und dokumentieren – Perspektiven auf die Bildungsbegleitung in Kindertageseinrichtungen*. Weinheim: Juventa.

Cobb, P. (1988). The tension between theories of language and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist, 23* (2), 87–103.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J. G., Wheathley, G., Trigatti, B. & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centreed second-grade mathematics project. *Journal for Research for Mathematics Education, 22,* 3–29.

Cochran-Smith, M. & Lytle, S. L. (1999). Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. *Review of Research in Education, 24,* 249–305.

Copley, J. V. (2004). The early childhood collaborative: A professional development model to communicate and implement the standard. In D. H. Clemens & J. Sarama (Hrsg.), *Engaging young children in mathematics. Standards for early childhood mathematics education* (S. 401–414). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Copley, J. V. (2006). *The young child and mathematics* (4th ed.). Washington, DC: NAEYC.

Day, C. (1999). *Developing teachers: The challenges of lifelong learning*. London: Routledge Falmer.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition, 44,* 1–40.

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser.

Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers‘ professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher, 38* (3), 181–199.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung [DMV], Gesellschaft für Didaktik der Mathematik [GDM] & Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts [MNU] (2008). *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik*. Zugriff am 08.03.2013 unter http://www.mathematik-schule-hochschule.de/images/Stellungnahmen/pdf/standards-dmv-gdm-mnu.pdf

Deutsche Telekom Stiftung (Hrsg.). (2010). *Mathematik entlang der Bildungskette*. Lünen: Schmidt.

Devlin, K. (1997). *Muster der Mathematik. Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur*. Heidelberg: Spektrum.

Devlin, K. (2000). *Das Mathe-Gen*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Dickhäuser, O. & Galfe, E. (2004). Besser als ..., schlechter als ... Leistungsbezogene Vergleichsprozesse in der Grundschule. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 36,* 1–9.

Dickhäuser, O. (2006). Fähigkeitsselbstkonzepte: Entstehung, Auswirkung, Förderung. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 20,* 5–8.

DMV, GDM & MNU (2008). *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik.* Zugriff am 08.03.2013 unter http://www.mathematik-schule-hochschule.de/images/Stellungnahmen/pdf/standards-dmv-gdm-mnu.pdf

Döhrmann, M., Kaiser, G. & Blömeke, S. (2010). Messung des mathematischen und mathematikdidaktischen Wissens: Theoretischer Rahmen und Teststruktur. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Hrsg.), *TEDS-M 2008 – Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich* (S. 169–194). Münster: Waxmann.

Döhrmann, M., Kaiser, G. & Blömeke, S. (2012). The conceptualisation of mathematics competencies in the international teacher education study TEDS-M. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 44,* 325–340.

Doll, J. & Prenzel, M. (Hrsg.). (2004). *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung.* Münster: Waxmann.

Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten.* Berlin: Logos.

Eckerth, M. & Hanke, P. (2009). Jahrgangsübergreifender Unterricht: Ein Überblick über den nationalen und internationalen Forschungsstand. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 2* (1), 7–19.

Ehmke, T., Duchhardt, C., Geiser, H., Grüßing, M., Heinze, A. & Marschick, F. (2009). Kompetenzentwicklung über die Lebensspanne – Erhebung von mathematischer Kompetenz im Nationalen Bildungspanel. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung beim Mathematiklernen* (S. 313–328). Münster: Waxmann.

Elkonin, D. (1980). *Psychologie des Spiels.* Berlin: Volk und Wissen.

Elmore, R. F. (2002). *Bridging the gap between standards and achievement: the imperative for professional development in education.* Washington, DC: Albert Shanker Institute.

Ertle, B. B., Ginsburg, H. P., Cordero, M. I., Curran, T. M., Manlapig, K. & Morgenlander, M. (2008). The essence of early childhood mathematics education and the professional development needed to support it. In A. Dowker (Hrsg.), *Mathematical Difficulties. Psychology and Intervention* (S. 59–83). Oxford, UK: Elsevier Science.

Fang, Z. (1996). A review of research on teacher beliefs and practices. *Educational Research, 38* (1), 47–65.

Faust, H. (2006). *Ente, Igel, Kuh und Du: Geschichten und Praxisideen für die mathematische Bildung im Kindergarten.* Troisdorf: Bildungsverlag EINS.

Featherstone, S. (2008). *Aktivitätenheft für die frühkindliche Bildung: Ideen für mathematische Spiele.* Troisdorf: Bildungsverlag EINS.

Fennema, E., Carpenter, T. P. & Loef, M. (1990). *Teacher belief scale: Cognitively guided instruction project.* Madison, WI: University of Wisconsin.

Franke, M. L., Kazemi, E. & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 225–256). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Freudenthal, H. (1982). Mathematik – Eine Geisteshaltung. *Grundschule, 4,* 140–142.

Fricke, A. & Besuden, H. (1970). *Mathematik in der Grundschule.* Stuttgart: Klett.

Fries, S. & Souvignier, E. (2009). Training. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 406–428). Heidelberg: Springer.

Fritz, A. & Ricken, G. (2009). Grundlagen des Förderkonzepts „Kalkulie". In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche* (S. 374–395). Weinheim: Beltz.

Fritz, A., Ehlert, A. & Balzer, M. (2013). Development of mathematical concepts as basis for an elaborated mathematical understanding. *South African Journal of Childhood Education, 3* (1), 38–67.

Fritz, A., Ricken, G. & Gerlach, M. (2007). *Kalkulie. Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder: Handreichungen zur Durchführung der Diagnose.* Berlin: Cornelsen.

Fröhlich-Gildhoff, K., Nentwig-Gesemann, I. & Pietsch, S. (2011). *Kompetenzorientierung in der Qualifizierung frühpädagogischer Fachkräfte.* München: WiFF/DJI.

Fthenakis, W. E. (Hrsg.) (2003). *Elementarpädagogik nach PISA – Wie aus Kindertagesstätten Bildungseinrichtungen werden können.* Freiburg: Herder.

Fthenakis, W. E., Schmitt, A., Daut, M., Eitel, A. & Wendell, A. (Hrsg.) (2008). *Frühe mathematische Bildung.* Troisdorf: Bildungsverlag EINS.

Fullan, M. (2010). *All systems go. The change imperative for whole system reform.* Thousand Oak, CA: Corwin Press.

Fuson, K. (1988). *Children's counting and concepts of number.* New York: Springer.

Fußangel, K. & Gräsel, C. (2008). Unterrichtsentwicklung in Lerngemeinschaften: das Beispiel ‚Chemie in Kontext'. In N. Berkemeyer, W. Bos, V. Manitius & K. Müthing (Hrsg.), *Unterrichtsentwicklung in Netzwerken. Konzeptionen, Befunde, Perspektiven* (S. 133–152). Münster: Waxmann.

Gabriel, K., Kastens, C., Poloczek, S., Schoreit, E. & Lipowsky, F. (2010). Entwicklung des mathematischen Selbstkonzepts im Anfangsunterricht – Der Einfluss des Klassenkontextes. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 3* (1), 65–82.

Garet, M. S., Porter, A. C., Desimone, L., Birman, B. F. & Yoon, K. S. (2001). What makes professional development effective? Results from a national sample of teachers. *American Educational Research Journal, 38,* 915–945.

Gasteiger, H. (2010). *Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte: Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes.* Münster: Waxmann.

Gaupp, N. (2003). *Dyskalkulie: Arbeitsgedächtnisdefizite und Defizite numerischer Basiskompetenzen rechenschwacher Kinder.* Berlin: Logos.

Gelman, R. & Gallistel, R. C. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge: Harvard Press.

Gerlach, M. & Fritz, A. (2012). *Die Biene Mina und der Maulwurf. Ein Rechentraining für den Kindergarten.* Berlin: Cornelsen.

Gerstberger, G., Wagner, A. & von Behr, A. (2008): *Frühpädagogik studieren. Ein Orientierungsrahmen für Hochschulen.* Stuttgart: Bosch Stiftung.

Goldin, G., Rösken, B. & Toerner, G. (2009). Beliefs – no longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Hrsg.), *Beliefs and attitudes in mathematics education. New research results* (S. 1–18). Rotterdam: Sense Publisher.

Gölitz, D., Roick, T. & Hasselhorn, M. (2006). *Deutscher Mathematiktest für vierte Klassen (DEMAT 4).* Göttingen: Hogrefe.

Granzer, D., Köller, O., Reiss, K., Robitzsch, A., Walther, G. & Winkelmann, H. (2008). *Bildungsstandards: Kompetenzen überprüfen und fördern. Grundschule Mathematik 3. und 4. Schuljahr.* Berlin: Cornelsen.

Gräsel, C. (2010). Stichwort: Transfer und Transferforschung im Bildungsbereich. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 13,* 7–20.

Gräsel, C., Pröbstel, C., Freienberg, J. & Parchmann, I. (2006). Anregungen zur Kooperation von Lehrkräften im Rahmen von Fortbildungen. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogrammes* (S. 310–329). Münster: Waxmann.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Toerner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19* (1), 3–39.

Grube, D. & Seitz-Stein, K. (2012). Arbeitsgedächtnis und Rechnen. In M. Hasselhorn & C. Zoelch (Hrsg.), *Funktionsdiagnostik des Arbeitsgedächtnisses* (S. 145–157). Göttingen: Hogrefe.

Grüßing, M. (2008). Mathematische Kompetenzentwicklung zwischen Elementar- und Primarbereich: Zusammenfassung und Forschungsdesiderata. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 53–58). Münster: Waxmann.

Grüßing, M., Heinze, A., Duchhardt, C., Ehmke, T., Knopp, E. & Neumann, I. (2013). KiKi – Kieler Kindergartentest Mathematik zur Erfassung mathematischer Kompetenz von vier- bis sechsjährigen Kindern im Vorschulalter. In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider & U. Trautwein (Hrsg.), *Diagnostik mathematischer Kompetenzen* (Tests und Trends Band 11, S. 67–79). Göttingen: Hogrefe.

Gutknecht, D. (2012). *Bildung in der Kinderkrippe – Wege zur Professionellen Responsivität.* Stuttgart: Kohlhammer.

Haffner, J., Baro, K., Parzer, P. & Resch, F. (2005). *Heidelberger Rechentest HRT 1-4: Erfassung mathematischer Basiskompetenzen im Grundschulalter.* Göttingen: Hogrefe.

Hansel, A. & Schneider, I. K. (Hrsg.). (2008). *Bildung im Kindergarten.* Kenzingen: Centaurus.

Hasemann, K., Mirwald, E. & Hoffmann, A. (2007). Daten Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & Köller O. (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 141–161). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Hasselhorn, M. & Grube, D. (2008). Individuelle Voraussetzungen und Entwicklungsbesonderheiten des Lernens im Vorschul- und frühen Schulalter. *Empirische Pädagogik, 22,* 113–126.

Hasselhorn, M. & Zoelch, C. (2012). *Funktionsdiagnostik des Arbeitsgedächtnisses.* Göttingen: Hogrefe.

Hasselhorn, M., Heinze, A., Schneider, W. & Trautwein, U. (Hrsg.) (2013). *Diagnostik mathematischer Kompetenzen* (Tests und Trends Band 11, S. 67–79). Göttingen: Hogrefe.

Hasselhorn, M., Marx, H. & Schneider, W. (Hrsg.) (2005). *Diagnostik von Mathematikleistungen.* Göttingen: Hogrefe.

Hasselhorn, M., Schumann-Hengsteler, R., Gronauer, J., Grube, D., Mähler, C. & Schmid, I. (2012). *Arbeitsgedächtnistestbatterie für Kinder von fünf bis zwölf Jahren (AGTB 5-12).* Göttingen: Hogrefe.

Hauser, B. & Rechsteiner, K. (2011). Frühe Mathematik: Geführtes Spiel oder Training? 4bis8. *Schweizerische Fachzeitschrift für Kindergarten und Unterstufe, 5,* 28–30.

Hauser, B. (2011). Spielendes Lernen und intrinsische Motivation in der Primarschule. Zeitschrift 4 bis 8. *Schweizerische Fachzeitschrift für Kindergarten und Unterstufe, 12,* 11–13.

Hauser, B. (2013). *Spielen – Frühes Lernen in Familie, Krippe und Kindergarten.* Stuttgart: Kohlhammer.

Heckhausen, H. (1989). *Motivation und Handeln.* Berlin: Springer.

Heinze, S. (2007). Spielen und Lernen in Kindertagesstätte und Grundschule. In C. Brookmann-Nooren, I. Gereke, H. Kiper & W. Renneberg (Hrsg.), *Bildung und Lernen der Drei- bis Achtjährigen* (S. 266–280). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Helmke, A. (2010). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität: Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts.* Seelze: Klett-Kallmeyer.

Henschen, E. & Teschner M. (2013). Von Kindergärten, Kindheitspädagoginnen und der Mathematik mit Bauklötzen. In J. Sprenger, A. Wagner & M. Zimmermann (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen* (S. 53–67). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Herget, Jahnke & Knoll

Heubrock, D. & Petermann F. (2001). *Aufmerksamkeitsdiagnostik.* Göttingen: Hogrefe.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik.* Beltz: Weinheim.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008): Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39* (4), 372–400.

Hirsh-Pasek, K., Golinkoff, R. M., Berk, L. E. & Singer, D. G. (2009). *A mandate for playful learning in preschool: Presenting the evidence.* New York: Oxford Press.

Holodynski, M. (2006). *Emotionen – Entwicklung und Regulation.* Berlin: Springer.

Hord, S. M. (1997). *Professional learning communities: Communities of continous inquiry and improvement.* Austin: Southwest Educational Development Laboratory.

Howell, S. C. & Kemp, C. R. (2010). Assessing preschool number sense: skills demonstrated by children prior to school entry. *Educational Psychology, 30* (4), 411–429.

http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2010/2010_09_16-Ausbildung-Erzieher-KMK-JFMK.pdf

http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2011/2011_12_01-ErzieherInnen-QualiProfil.pdf

http://www.mathematik-schule-hochschule.de/images/Stellungnahmen/pdf/standards-dmv-gdm-mnu.pdf

Jandl, E. & Junge, N. (2004). *Fünfter sein.* Weinheim: Beltz & Gelberg.

Jonsson, A. & Williams, P. (2013). Communication with young children in preschool: the complex matter of a child perspective. *Early Child Development and Care, 183* (5), 589–604.

Jörns, C., Schuchardt, K., Mähler, C. & Grube, D. (2013). Alltagsintegrierte Förderung numerischer Kompetenzen im Kindergarten. *Frühe Bildung, 2* (2), 84–91.

Jude, N. & Klieme, E. (2008). Einleitung. In N. Jude, J. Hartig & E. Klieme (Hrsg.), *Kompetenzerfassung in pädagogischen Handlungsfeldern. Theorien, Konzepte und Methoden* (S.10–13). Berlin: BMBF.

Kaufmann, L., Nuerk, H.-C., Graf, M., Krinzinger, H., Delazer, M. & Willmes, K. (2009). *Test zur Erfassung numerisch-rechnerischer Fertigkeiten vom Kindergarten bis zur 3. Klasse.* Göttingen: Hogrefe.

Kaufmann, S. & Lorenz, J. H. (2009). *Elementar – Erste Grundlagen in Mathematik.* Braunschweig: Westermann.

Klein, J. S. & Bisanz, J. (2000). Preschoolers doing arithmetic: The concepts are willing but the working memory is weak. *Canadian Journal of Experimental Psycholgoy, 54,* 105–115.

Klieme, E. & Hartig, J. (2007). Kompetenzkonzepte in den Sozialwissenschaften und im erziehungswissenschaftlichen Diskurs, Kompetenzdiagnostik. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft. Sonderheft 8,* 11–29.

Kluczniok, K., Anders, Y. & Ebert, S. (2011). Fördereinstellungen von Erzieherinnen. Einflüsse auf die Gestaltung von Lerngelegenheiten im Kindergarten und die kindliche Entwicklung früher numerischer Kompetenzen. *Frühe Bildung, 0* (1), 13–21.

KMK & JFMK (2010). *Weiterentwicklung der Aus-, Fort- und Weiterbildung von Erzieherinnen und Erziehern* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.09.10 und der Jugend- und Familienministerkonferenz vom 14.12.10). Zugriff am 22.04.2013 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2010/2010_09_16-Ausbildung-Erzieher-KMK-JFMK.pdf

KMK (1985). *Richtlinien und Lehrplan Mathematik für die Grundschule.* Frechen: Ritterbach.

KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss.* München, Neuwied: Wolters-Kluwer, Luchterhand Verlag.

KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* München, Neuwied: Wolters-Kluwer, Luchterhand Verlag.

KMK (2008). *Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung.* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.10.08 i. d. F. vom 08.12.08.). Zugriff am 05.07.2013 unter http://www.kmk.org/bildung-schule/allgemeine-bildung/lehrer/lehrerbildung.html

KMK (2011). *Kompetenzorientiertes Qualifikationsprofil für die Ausbildung von Erzieherinnen und Erziehern an Fachschulen/Fachakademien* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 01.12.11). Zugriff am 22.04.2013 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2011/2011_12_01-ErzieherInnen-QualiProfil.pdf

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Hochschulreife.* Zugriff am 12.05.2013 unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Köckeritz, M., Klinkhammer, J. & von Salisch, M. (2010). Die Entwicklung des Emotionswissens und der behavioralen Selbstregulation bei Vorschulkindern mit und ohne Migrationshintergrund. *Praxis der Kinderpsychologie und Kinderpsychiatrie, 59,* 529–544.

König, A. (2010). *Interaktion als didaktisches Prinzip – Bildungsprozesse bewusst begleiten und gestalten.* Troisdorf: Bildungsverlag EINS.

Korff, N. (2008). *Entwicklung, Diagnose und Förderung mathematischer Kompetenzen im Elementar- und Primarbereich.* Bremen: Universität Bremen.

Kornmann, R. (2010). *Mathematik: für Alle von Anfang an!* Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Kosack, W., Jeretin-Kopf, M. & Wiesmüller, C. (2015). Zieldimensionen technischer Bildung im Elementar- und Primarbereich. In Stiftung Haus der kleinen Forscher (Hrsg.), *Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“* (Band 7, S. 30–157). Schaffhausen: Schubi Lernmedien AG.

Kounin, J. S. (2006). *Techniken der Klassenführung.* Münster: Waxmann.

Kowalski, K., Pretti-Frontczak, K. & Johnson, L. (2001). Preschool teachers' beliefs concerning the importance of various developmental skills and abilities. *Journal of Research in Childhood Education, 16* (1), 5–14.

Krainer, K. (1998). Some considerations on problems and perspectives of inservice mathematics teacher education. In C. Alsina, J. M. Alvarez, M. Niss, A. Perez, L. Rico & A. Sfard (Hrsg.), *Proceedings of the 8th Iinternational Congress on Mathematical Education. Selcted Lectures* (S. 303–321). Sevilla: S:A:E:M: Thales.

Krainer, K. (2008). Individuals, teams, communities and networks: Participants and ways of participation in mathematics teacher education: An introduction. In K. Krainer & T. Wood (Hrsg.), *The international handbook of mathematics education, Vol. 3: Participants in mathematics teacher education: Individuals, teams, communities and networks* (S. 1–10). Rotterdam: Sense Publishers.

Krajewski, K. & Ennemoser, M. (2010). Berücksichtigung begrenzter Arbeitsgedächtnisressourcen in Unterricht und Lernförderung. In H.-P. Trolldenier, W. Lenhard & P. Marx (Hrsg.), *Brennpunkte der Gedächtnisforschung* (S. 337–365). Göttingen: Hogrefe.

Krajewski, K. & Ennemoser, M. (2013). Entwicklung und Diagnostik der Zahl-Größen-Verknüpfung zwischen 3 und 8 Jahren. In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider & U. Trautwein (Hrsg.), *Diagnostik mathematischer Kompetenzen.* (Tests und Trends Band 11, S. 225–240). Göttingen: Hogrefe.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. *Zeitschrift für Psychologie in Erziehung und Unterricht, 53,* 246–262.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2009). Exploring the impact of phonological awareness, visual-spatial working memory, and preschool quantity-number competencies on mathematics achievement in elementary school: Findings from a 3-yearlongitudinal study. *Journal of Experimental Child Psychology, 103,* 516–531.

Krajewski, K. (2003). *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule.* Hamburg: Hovac.

Krajewski, K. (2013). Wie bekommen die Zahlen einen Sinn? Ein entwicklungspsychologisches Modell der zunehmenden Verknüpfung von Zahlen und Größen. In M. von Aster & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern: Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik, 2. überarbeitete Auflage* (S. 155–179). Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht.

Krajewski, K., Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (2009). Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen bis zum Beginn der Grundschulzeit. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 17–34). Münster: Waxmann.

Krajewski, K., Küspert, P. & Schneider, W. (2002). *Deutscher Mathematiktest für erste Klassen (DEMAT 1+).* Göttingen: Hogrefe.

Krajewski, K., Liehm, S. & Schneider, W. (2004). *Deutscher Mathematiktest für zweite Klassen (DEMAT 2+).* Göttingen: Hogrefe.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M. & Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology, 100* (3), 716–725.

Krohs, E. (2007). Gemeinsame Aufgaben von Erzieherinnen und Grundschullehrkräften: erkennen – angehen – gestalten. In C. Brookmann-Nooren, I. Gereke, H. Kiper & W. Renneberg (Hrsg.), *Bildung und Lernen der Drei- bis Achtjährigen* (S. 311–323). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Kühnel, J. (1929). *Neubau des Rechenunterrichts* (Band 1). Leipzig: Klinkhardt.

Kuhnke, K. (2012). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel: Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr*. Heidelberg: Springer.

Kunter, M. & Baumert, J. (2006). Who is the expert? Construct and criteria validity of student and teacher ratings of instruction. *Learning Environments Research, 9* (3), 231–251.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.) (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann.

Lankes, E.-M. & Walther, G. (2001). Mathematische Kompetenzen in der Grundschule. Die Erweiterungsstudie zur internationalen Grundschul-Lese-Untersuchung IGLU. *Die Grundschulzeitschrift, 147*, 60–61.

Lauth, G. W. (2003). *Dortmunder Aufmerksamkeitstest*. Göttingen: Hogrefe.

Leder, G. C. (2007). Beliefs: What lies behind the mirror? *TMME Monograph, 3* (4), 39–50.

Lee, J. S. & Ginsburg, H. P. (2007). What is appropriate mathematics education for four-year-olds? Pre-kindergarten teachers' belief. *Journal for Early Childhood Research, 5* (1), 2–31.

LeFevre, J.-A., Skwarchuk, S.-L., Smith-Chant, B. L., Fast, L., Kamawar, D. & Bisanz, J. (2009). Home numeracy experiences and children's math performance in the early school years. *Canadian Journal of Behavioural Science, 41*, 55–66.

Lewis, C. C., Perry, R. & Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: A theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12* (4), 285–304.

Lindmeier, A., Reiss, K., Ufer, S., Barchfeld, P. & Sodian, B. (2011). Umgang mit wissenschaftlicher Evidenz in den Jahrgangsstufen 2, 4 und 6: Stochastische Basiskonzepte und Kontingenztafelanalyse. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (S. 547–550). Münster: WTM.

Lipowsky, F. & Rzejak, D. (2012). Lehrerinnen und Lehrer als Lernen – Wann gelingt der Rollentausch? Merkmale und Wirkungen wirksamer Lehrerfortbildungen. *Schulpädagogik heute*, *5* (3), 1–17.

Lipowsky, F. (2010). Lernen im Beruf – Empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildung. In F. Müller, A. Eichenberger, M. Lüders & J. Mayr (Hrsg.), *Lehrerinnen und Lehrer lernen – Konzepte und Befunde zur Lehrerfortbildung* (S. 51–70). Münster: Waxmann.

Llineares, S. & Krainer, K. (2006). Professional aspects of teaching mathematics. In A. Gutierrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (S. 429–459). Rotterdam: Sense Publishers.

Locke, J. (1690, übers. 1962). *Essay über den menschlichen Verstand*. London, Berlin: Akademie Verlag.

Lorenz, J. H. & Dornheim, D. (2007). *Abschlussbereicht des DFG-Projekts „Entwicklung und Evaluierung eines Tests zur Früherfassung von Lernstörungen im Mathematikunterricht und darauf aufbauender remedialer Maßnahmen"*. Bonn: Deutsche Forschungsgemeinschaft.

Lorenz, J. H. (1979). *Auswirkungen von Selbstkonzept und Attribuierungen im Mathematikunterricht*. Stuttgart: HochschulVerlag.

Lorenz, J. H. (1998). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht: Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe.

Lorenz, J. H. (2005). *Hamburger Rechentest für die Klassen 1–4 (HaReT)*. Hamburg: Behörde für Bildung und Sport.

Lorenz, J. H. (2010). Die Bedeutung der Sprache und ihrer Störungen beim Lernen von Mathematik. *mitSprache, 42* (1), 47–62.

Lorenz, J. H. (2011). Sprache und Mathematik. *Mathematik differenziert, 1* (4), 16–19.

Lorenz, J. H. (2012). *Kinder begreifen Mathematik: Frühe mathematische Bildung und Förderung*. Stuttgart: Kohlhammer.

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht: Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Münster: Waxmann.

Maaß, K. (2011). *Mathematisches Modellieren in der Grundschule*. Zugriff am 11.05.2013 unter http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Maass_2011-2.pdf

Mähler, C. & Schuchardt, K. (2012). Die Bedeutung der Funktionstüchtigkeit des Arbeitsgedächtnisses für die Differenzialdiagnostik von Lernstörungen. In M. Hasselhorn & C. Zoelch (Hrsg.), *Funktionsdiagnostik des Arbeitsgedächtnisses* (S. 59–75). Göttingen: Hogrefe.

Malofeeva, E., Day, J., Saco, X., Young, L. & Ciancio, D. (2004). Construction and evaluation of a number sense test with head start children. *Journal of Educational Psychology, 96* (4), 648–659.

Marcon, R. (1999). Differential impact of preschool models on development and early learning of inner-city children: A three cohort study. *Developmental Psychology, 35* (2), 358–375.

Marsh, H. W. & Hau, K.-T. (2003). Big-fish-little-pond effect on academic self-concept. A cross-cultural (26-Country) test of the negative effects of academically selective schools. *American Psychologist, 58*, 364–376.

Marsh, H. W., Craven, R. & Debus, R. (1998). Structure, stability and development of young children's self-concept: A multicohort-multioccasion study. *Child Development, 69*, 1030–1053.

Mason, D. A. & Good, T. L. (1996). Mathematics instruction in combination and single-grade classes: An exploratory investigation. *Teachers College Record, 98*, 236–265.

Michalczyk, K., Zoelch, C. & Hasselhorn, M. (2012). Zur Invarianz der Struktur des Arbeitsgedächtnisses bei Kindern. In M. Hasselhorn & C. Zoelch (Hrsg.), *Funktionsdiagnostik des Arbeitsgedächtnisses* (S. 23–35). Göttingen: Hogrefe.

Mischke, W. (2007). Beobachten und Dokumentieren in Kindertagesstätte und Grundschule. In C. Brookmann-Nooren, I. Gereke, H. Kiper & W. Renneberg (Hrsg.), *Bildung und Lernen der Drei- bis Achtjährigen* (S. 294–310). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Mischo, C. & Fröhlich-Gildhoff, K. (2011). Professionalisierung und Professionsentwicklung im Bereich der frühen Bildung. *Frühe Bildung, 0*, 4–12.

Möller, J. & Trautwein, U. (2009). Selbstkonzept. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 179–203). Heidelberg: Springer.

Möller, K., Hardy, I., Jonen, A., Kleickmann, T. & Blumberg, E. (2006). Naturwissenschaften in der Primarstufe. Zur Förderung konzeptuellen Verständnisses durch Unterricht und zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildungen. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule* (S. 161–193). Münster: Waxmann.

Montague-Smith, A. (2002). *Mathematics in Nursery Education*. London: David Fulton Publishers.

MSW NRW (2008). *Lehrplan Mathematik für die Grundschulen des Landes NRW*. Zugriff am 11.03.2013 unter http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/upload/lehrplaene_download/grundschule/grs_faecher.pdf

Müller, G. & Wittmann, E. Ch. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe*. Braunschweig: Vieweg.

Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. (2013). Early Awareness of Pattern and Structure. In L. English & J. T. Mulligan (Hrsg.), *Reconceptualizing Early Mathematics* (S. 29–46). New York: Springer.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J. & Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades.* Chestnut Hill, MA. Zugriff am 05.07.2013 unter http://timssandpirls.bc.edu/PDF/t03_download/T03INTLMATRPT.pdf

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Naumann, K. & Lauth, G. W. (2008). Konzentrations- und Aufmerksamkeitsförderung. In W. Schneider & M. Hasselhorn (Hrsg.), *Handbuch der Pädagogischen Psychologie* (S. 404–415). Göttingen: Hogrefe.

Ness, D. & Farenga, S. J. (2007). *Knowledge under constuction: The importance of play in developing children's spatial and geometric thinking*. Lanham, MD: Rowman & Littlefield.

Ng, S. N., Lopez-Real F. & Rao, N (2003). Early mathematics teaching: The relationship between teacher's belief and classroom practices. In N. A. Patman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Hrsg.), *Proc. 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 213–220). Honolulu, USA: PME.

Nolte, M. (2000). *Rechenschwächen und gestörte Sprachrezeption*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Nührenbörger, M. & Verboom, L. (2011). Selbstgesteuertes und sozial-interaktives Mathematiklernen in heterogenen Klassen im Kontext gemeinsamer Lernsituationen. In R. Demuth, G. Walther & M. Prenzel (Hrsg.), *Unterricht entwickeln mit SINUS. 10 Module für den Mathematik- und Sachunterricht in der Grundschule* (S. 149–157). Seelze: Klett, Kallmeyer.

Organisation for Economic Co-Operation and Development [OECD] (2003). *The PISA 2003 assessment framework – Mathematics, reading, science and problem-solving knowledge and skills*. Paris: Organisation for Economic Co-Operation and Development.

Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD]. (2006, übers.). Ein guter Start ins Leben II: Frühkindliche Betreuung, Bildung und Erziehung. Zugriff am 21.05.2013 unter http://www.oecd.org/education/school/37519496.pdf

Pädagogische Hochschule Ludwigsburg (2012). *Modulhandbuch Bachelor bzw. Master für den Studiengang Frühkindliche Bildung und Erziehung*. Zugriff am 02.05.2013 unter http://www.ph-ludwigsburg.de/fruebi+M559086f4fc3.html

Passolunghi, M. C., Mammarella, I. C. & Altoè, G. (2008). Cognitive abilities as precursors of the early acquisition of mathematical skills during first through second grades. *Developmental Neuropsychology, 33*, 229–250.

Passolunghi, M. C., Vercelloni, B. & Schadee, H. (2007). The precursors of mathematics learning: Working memory, phonological ability and numerical competence. *Cognitive Development, 22*, 165–184.

Pauen, S. & Pahnke J. (2008). Mathematische Kompetenzen im Kindergarten: Evaluation der Effekte einer Kurzzeitintervention. *Empirische Pädagogik, 22* (2), 193–208.

Pellegrini, A. D. (2009). *The role of play in human development*. New York: Oxford University Press.

Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2006). Mathematische Bilderbücher. In M. Grüßing & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule* (S. 150–169). Offenburg: Mildenberger.

Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2007). Mathematische Frühförderung – Inhalte, Aktivitäten und diagnostische Beobachtungen. In C. Brookmann-Nooren, I. Gereke, H. Kiper & W. Renneberg (Hrsg.), *Bildung und Lernen der Drei- bis Achtjährigen* (S. 168–184). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2011). *Elementarmathematisches Basisinterview – Kindergarten*. Offenburg: Mildenberger.

Peter-Koop, A. & Prediger, S. (2005). Dimensionen, Perspektiven und Projekte mathematikdidaktischer Handlungsforschung. In E. Eckert & W. Fichten (Hrsg.), *Schulbegleitforschung: Erwartungen – Ergebnisse – Wirkungen* (S. 185–201). Münster: Waxmann.

Peter-Koop, A. (2008). Orientierungspläne Mathematik für den Elementarbereich – ein Überblick. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 47–52). Münster: Waxmann.

Peter-Koop, A. (2009). Orientierungspläne Mathematik für den Elementarbereich – ein Überblick. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 47–52). Münster: Waxmann.

Peter-Koop, A., Wollring, B., Spindeler, B. & Grüßing, M. (2007). *ElementarMathematisches BasisInterview (EMBI)*. Offenburg: Mildenberger.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 257–315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Piaget, J. (1967). Die Genese der Zahl beim Kinde. In H. Abel et al. (Hrsg.), *Rechenunterricht und Zahlbegriff* (S. 50–72). Braunschweig: Westermann.

Putnam, R. T. & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Researcher, 29* (1), 4–15.

Ramani, G. B. & Siegler, R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development, 79*, 375–394.

Ramani, G. B. & Siegler, R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development, 79*, 375–394.

Rank, A. (2009). Subjektive Theorien von Erzieherinnen zu vorschulischem Lernen und zum Schriftspracherwerb. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 2* (1), 146–159.

Rank, A., Gebauer, S., Fölling-Albers, M. & Hartinger, A. (2011). Vom Wissen zum Handeln in Diagnose und Förderung – Bedingungen des erfolgreichen Transfers einer situierten Lehrerfortbildung in die Praxis. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 4* (2), 70–82.

Rasch, R. (2007). *Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule*. Seelze: Kallmeyer.

Rathgeb-Schnierer, E. (2013). Kleine Kinder spielen und lernen mit bunten Perlen. In J. Sprenger, A. Wagner und M. Zimmermann (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen – Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule* (S. 37–51). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Reiss, K. & Winkelmann, H. (2008). Step by Step: Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule, 10*, 34–37.

Reiss, K. & Winkelmann, H. (2009). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 120–141). Weinheim und Basel: Beltz.

Reiss, K. (2004). Bildungsstandards und die Rolle der Fachdidaktik am Beispiel der Mathematik. *Zeitschrift für Pädagogik, 50* (5), 635–649.

Reiss, K., Heinze, A. & Pekrun, R. (2007). Kompetenzentwicklung im Mathematikunterricht der Grundschule. In M. Prenzel, I. Gogolin & H. H. Krüger (Hrsg.), *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft. Sonderheft 8* (S. 107–127).

Reiss, V. (1982). *Die Steuerung des Unterrichtsablaufs*. Frankfurt: Peter Lang.

Remsperger, R. (2013). Das Konzept der Sensitiven Responsivität – Ein Ansatz zur Analyse des pädagogischen Antwortverhaltens in der ErzieherInnen-Kind-Interaktion. *Frühe Bildung, 2* (1), 12–19.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. Ginsburg (Hrsg.), *The development of mathematical thinking* (S. 109–151). New York: Academic Press.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44*, 162–169.

Rheinberg, F. & Krug, S. (2005). *Motivationsförderung im Schulalltag*. Göttingen: Hogrefe.

Ricken, G., Fritz, A. & Balzer, L. (2013). *MARKO-D: Mathematik- und Rechenkonzepte im Vorschulalter – Diagnose (Hogrefe Vorschultests)*. Göttingen: Hogrefe.

Roick, T., Gölitz, D. & Hasselhorn, M. (2004). *Deutscher Mathematiktest für dritte Klassen (DEMAT 3+)*. Göttingen. Hogrefe.

Roick, T., Gölitz, D. & Hasselhorn, M. (2013). Affektive Komponenten der Mathematikkompetenz. Die Mathematikangst-Ratingskala für vierte bis sechste Klassen (MARS 4-6). In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider & U. Trautwein (Hrsg.), *Diagnostik mathematischer Kompetenzen* (S. 205–221). Göttingen: Hogrefe.

Rolff, H.-G. (2009). Schulentwicklung, Schulprogramm und Steuergruppe. In H.R. Buchen, H.-G. Rolff (Hrsg.), *Professionswissen Schulleitung* (S. 296–364). Weinheim, Basel: Beltz.

Rosenthal, R. & Jacobson, L. (1971). *Pygmalion im Unterricht – Lehrererwartungen und Intelligenzentwicklung der Schüler*. Weinheim: Beltz.

Rösken, B. (2010). *Die Profession der Mathematiklehrenden – Internationale Studien und Befunde von der Theorie zur Empirie. Expertise für die Expertengruppe ‚Mathematik entlang der Bildungskette' der Deutsche Telekom Stiftung*. Zugriff am 01.03.2014 unter http://www.telekom-stiftung.de/dts-cms/sites/default/files/core-library/files/impulse/mathematik-entlang-der-bildungskette/download/Lehrkraefte.pdf

Roth, G. (1997). *Das Gehirn und seine Wirklichkeit. Kognitive Neurobiologie und ihre philosophischen Konsequenzen.* Frankfurt: Suhrkamp.

Roth, H. (1971). *Pädagogische Anthropologie* (Band 2). Hannover: Schroedel.

Royar, Th. (2007). Mathematik im Kindergarten. Kritische Anmerkungen zu den neuen ‚Bildungsplänen' für Kindertageseinrichtungen bis zur Einschulung. *Mathematica didactica, 1,* 29–48.

Sächsisches Staatsministerium für Kultus (Hrsg.). (2011). *Der Sächsische Bildungsplan – ein Leitfaden für pädagogische Fachkräfte in Krippen, Kindergärten und Horten sowie für Kindertagespflege*. Weimar, Berlin: Verlag das netz.

Sawyer, W. W. (1982). *Prelude to Mathematics*. New York: Dover Publications.

Schiefele, U. (2009). Motivation. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 151–177).Heidelberg: Springer.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Schneider, W. (2008). *Entwicklung von der Kindheit bis zum Erwachsenenalter. Befunde der Münchner Längsschnittstudie LOGIK*. Weinheim: Beltz.

Schrader, F.-W. & Helmke, A. (2001). Alltägliche Leistungsbeurteilung durch Lehrer. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 45–58). Weinheim: Beltz.

Schuler, S. (2013a). *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen – Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs*. Münster: Waxmann.

Schuler, S. (2013b). Spielend Mathematik lernen? – Bedingungen für die Entstehung mathematischer Lerngelegenheiten im Kindergarten. In J. Sprenger, A. Wagner & M. Zimmermann (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen – Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule* (S. 69–76). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Seeger, D. & Holodynski, M. (2016). *BIKO – Bildung im Kindergarten organisieren*. Stuttgart: Kohlhammer.

Seel, N. M. (2003). *Psychologie des Lernens*. München, Basel: Reinhardt.

Seidel, T. (2009). Klassenführung. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 135–148). Heidelberg: Springer.

Selter, Ch. (1995). Entwicklung von Bewußtheit als eine zentrale Aufgabe der Grundschullehrerbildung. *Journal für Mathematik-Didaktik,* (1/2), 115–144.

Selter, Ch., Walther, G., Wessel, J. & Wendt, H. (2012). Mathematische Kompetenzen im internationalen Vergleich: Testkonzeption und Ergebnisse. In W. Bos, H. Wendt, O. Köller & Ch. Selter (Hrsg.), *TIMSS 2011. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich* (S. 69–122). Münster: Waxmann.

Selter, Ch. (2011). Mathematikunterricht – mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten. In R. Demuth, G. Walther & M. Prenzel (Hrsg.), *Unterricht entwickeln mit SINUS* (S. 35–43). Seelze: Kallmeyer.

Shulman, L. S. (1985). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. In M. C. Wittrock (Hrsg.), *Handbook of Research on Teaching* (S. 3–36). New York: Macmillan.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4–14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57* (1), 1–21.

Siraj-Blatchford, I. & Sylva, K. (2004). Researching pedagogy in English preschools. *British Educational Research Journal, 30*, 713–730.

Skott, J. (2001). The emerging practices of novice teachers: The roles of his school mathematics images. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4* (1), 3–28.

Snider, M. H. & Fu, V. R. (1990). The effect of specialized education and job experience on early childhood teachers' knowledge of developmentally appropriate practice. *Early Childhood Research Quarterly, 5* (1), 69–78.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 157–223). Charlotte, NC: Information Age Publishers.

Stanat, P., Pant, H. A., Böhme K. & Richter, D. (Hrsg.). (2012). *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011*. Münster: Waxmann.

Staub, F. & Stern, E. (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology, 93*, 144–155.

Staub, F. (2001). Fachspezifisches-pädagogisches Coaching: Theoriebezogene Unterrichtsentwicklung zur Förderung von Unterrichtsexpertise. *Beiträge zur Lehrerbildung, 19* (2), 175–198.

Steinbring, H. (1999). Die künstlichen Objekte der Mathematikdidaktik und ihr theoretischer Charakter. In Ch. Selter & G. Walther (Hrsg.), *Mathematikdidaktik als design science* (S. 226–233). Leipzig: Klett.

Steinweg, A. S. (2003). „Gut, wenn es etwas zu entdecken gibt" – Zur Attraktivität von Zahlen und Mustern. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 56–74). Offenburg: Mildenberger.

Steinweg, A. S. (2006a). Kinder deuten geometrische Strukturen und Gleichungen. „Ich sehe was, was du auch sehen kannst ...". In E. Rathgeb-Schnierer & U. Roos (Hrsg.), *Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht* (S. 71–86). München: Oldenbourg.

Steinweg, A. S. (2006b). *Lerndokumentation Mathematik.* Zugriff am 20.06.2013 unter http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/user/redakteur/Berlin/Lerndoku_Mathe_druckreif_12.06.pdf

Steinweg, A. S. (2007). Mathematisches Lernen. In Stiftung Bildungspakt Bayern (Hrsg.), *Das KIDZ- Handbuch. Grundlagen, Konzepte und Praxisbeispiele aus dem Modellversuch „KIDZ-Kindergarten der Zukunft in Bayern"* (S. 136–203). Köln: Wolters Kluwer.

Steinweg, A. S. (2008). *Lerndokumentation Mathematik*. Berlin: Senatsverwaltung.

Stern, E. (1993). *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter*. (Habilitation), Universität München.

Stern, E. (1996). Erwerb mathematischer Kompetenzen: Ergebnisse aus dem SCHOLASTIK-Projekt. In F. E. Weinert & A. Helmke (Hrsg.), *Entwicklung im Grundschulalter* (S. 157–170). Weinheim: Beltz.

Stern, E. (2003). Lernen ist der mächtigste Mechanismus der kognitiven Entwicklung: Der Erwerb mathematischer Kompetenzen. In W. Schneider & M. Knopf (Hrsg.), *Entwicklung, Lehren und Lernen: Zum Gedenken an Franz Emanuel Weinert* (S. 207–217). Göttingen: Hogrefe.

Stevenson, H. & Stigler, J. (1992). *The Learning Gap: Why Our Schools are Failing and what We Can Learn from Japanese and Chinese Education*. New York: Summit.

Stiftung Haus der kleinen Forscher (2013a). *Bildungs- und Rahmenlehrpläne Mathematik*. Unveröffentlichte Übersicht. Berlin: Stiftung Haus der kleinen Forscher.

Stiftung Haus der kleinen Forscher (2013b). *Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher"* (Band 5). Schaffhausen: Schubi Lernmedien. PDF verfügbar unter: www.haus-der-kleinen-forscher.de

Stipek, D. & Byler, P. (1997). Early childhood teachers: Do they practice what they preach? *Early Childhood Research Quarterly, 12*, 69–78.

Sullivan, P. (2007). Researching change in early career teachers. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park & D.-Y. Seo (Hrsg.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (S. 153–156). Seoul: PME.

Sundell, K. (1994). Comparative research on mixed-age groups in Swedish nursery and compulsory schools. *European Early Childhood Education Research Journal, 2* (2), 49–62.

Sylva, K., Melhuis, E., Sammons, P., Siraj-Blatchford, I., Taggart, B. & Elliot, K. (2004). The effective provision of pre-school education project – zu den Auswirkungen vorschulischer Einrichtungen in England. In G. Faust, M. Götz, H. Hacker & H. G. Rossbach (Hrsg.), *Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich* (S. 154–167). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Tatto, M., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Rowley, G., Peck, R. et al. (2012). *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries*. Amsterdam: IEA.

Textor, M. R. (2000). Lew Wygotski – der ko-konstruktive Ansatz. In W. E. Fthenakis & M. R. Textor (Hrsg.), *Pädagogische Ansätze im Kindergarten* (S. 71–83). Weinheim: Beltz.

Thiel, O. (2010). Teachers' Attitudes towards Mathematics in Early Childhood Education. *European Early Childhood Research Journal, 18* (1), 105–115.

Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics images. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15* (2), 105–127.

Tietze, W. & Viernickel, S. (Hrsg.) (2003). *Pädagogische Qualität in Tageseinrichtungen für Kinder – Ein nationaler Kriterienkatalog*. Weinheim: Beltz.

Tietze, W., Roßbach, H.-G. & Grenner, K. (2005). *Kinder von 4 bis 8 Jahren – Zur Qualität der Erziehung und Bildung in Kindergarten, Grundschule und Familie*. Weinheim: Beltz.

Timperley, H., Wilson, A., Barrar, H. & Fung, I. (2007). *Teacher professional learning and development: Best evidence synthesis iteration (BES)*. Wellington.

Tomasello, M. (1999). *The cultural origins of human cognition*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Trudewind, C., Unzner, L. & Schneider, K. (1997). Die Entwicklung der Leistungsmotivation. In H. Keller (Hrsg.), *Handbuch der Kleinkindforschung* (S. 587–622). Bern: Huber.

Ufer, S., Reiss, K. & Heinze, A. (2009). BIGMATH – Ergebnisse zur Entwicklung mathematischer Kompetenz in der Primarstufe. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung beim Mathematiklernen* (S. 61–85). Münster: Waxmann.

van den Heuvel-Panhuizen, M. & S. van den Boogaard (2008). Picture books as an impetus for kindergartners' mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10* (4), 341–373.

van den Heuvel-Panhuizen, M., van den Boogaard, S. & Doig, B.(2009). Picture books stimulate the learning of mathematics. *Australian Journal of Early Childhood, 34* (3), 30–39.

van den Heuvel-Panhuizen, M., van den Boogaard, S. & Scherer, P. (2007). A picture book as a prompt for mathematical thinking by kindergartners: When Gaby was read "Being fifth". In *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 41. Tagung für Didaktik der Mathematik* (S. 831–834). Hildesheim: Franzbecker.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*. London: Academic Press.

van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching children mathematics, 5* (6), 310.

van Luit, J. E. H., van de Rjit, B. A. M. & Hasemann, K. (2001). *Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung*. Göttingen: Hogrefe.

van Nes, F. (2009). *Young Children's Spatial Structuring Ability and Emerging Number Sense.* Utrecht: All Print.

van Oers, B. (2002). Teachers' epistemology and the monitoring of mathematical thinking in early years classrooms. *European Early Childhood Education Research Journal, 10* (2), 19–30.

van Oers, B. (2004). Mathematisches Denken bei Vorschulkindern. In W. E. Fthenakis & P. Oberhuemer (Hrsg.), *Frühpädagogik international – Bildungsqualität im Blickpunkt* (S. 313–329). Wiesbaden: VS Verlag.

Vehmeyer, J., Kleickmann, T. & Möller, K. (2007). Lehrervorstellungen und -handlungen: Gibt es Zusammenhänge? In D. Höttecke (Hrsg.), *Naturwisschenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich* (S. 503–505). Münster: LIT.

von Aster, M. G., Bzufka, M. W. & Horn, R. R. (2009). *Neurologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Kindern. Kindergartenversion (ZAREKI–K)*. Frankfurt am Main: Pearson.

von Aster, M. G., Weinhold Zulauf, M. & Horn, R. (2006). *Testverfahren zur Dyskalkulie (ZAREKI-R)*. Frankfurt am Main: Pearson.

Vygotskij, L. S. (1986). *Denken und Sprechen*. Frankfurt: Fischer.

Walther, G., Geiser, H., Langeheine, R. & Lobemeier, K. (2003). Mathematische Kompetenzen am Ende der vierten Jahrgangsstufe. In W. Bos, E.-M. Lankes, M. Prenzel, K. Schwippert, G. Walther & R. Valtin (Hrsg.), *Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich* (S. 189–226). Münster: Waxmann.

Walther, G., Geiser, H., Langeheine, R. & Lobemeier, K. (2004). Mathematische Kompetenzen am Ende der vierten Jahrgangsstufe in einigen Ländern der Bundesrepublik Deutschland. In W. Bos, E.-M. Lankes, M. Prenzel, K. Schwipper, R. Valtin & G. Walther (Hrsg.), *IGLU. Einige Länder der Bundesrepublik Deutschland im nationalen und internationalen Vergleich* (S. 117–140). Münster: Waxmann.

Walther, G., Selter, Ch. & Neubrand, J. (2008). Die Bildungsstandards Mathematik. In G. Walther, D. Granzer, M. van den Heuvel-Panhuizen & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 16–38). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Walther, G., Selter, Ch., Bonsen, M. & Bos, W. (2008). Mathematische Kompetenz im internationalen Vergleich: Testkonzeption und Ergebnisse. In W. Bos, M. Bonsen, J. Baumert, M. Prenzel, Ch. Selter & G. Walther (Hrsg.), *TIMSS 2007. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich* (S. 49–85). Münster: Waxmann.

Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (Hrsg.). (2010). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret.* Berlin: Verlag Cornelsen Scriptor.

Weinert, F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessung in Schulen* (S. 17–32). Weinheim: Beltz.

West, L. & Staub, F. (2003). *Content-focused coaching.* Oxford: Heinemann.

White, C. S., Deal, D. & Deniz, C. B. (2004). Teachers' knowledge, beliefs, and practices and mathematical and analogical reasoning. In L. D. English (Hrsg.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (S. 127–152). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Wielpütz, H. (2007). Fehleranalyse und individuelle Förderung. In J. H. Lorenz & W. Schipper (Hrsg.), *Hendrik Radatz – Impulse für den Mathematikunterricht* (S. 94–105). Braunschweig: Schroedel.

Wiese, H. (2003). Iconic and non-iconic stages in number development: The role of language. *Trends in Cognitive Sciences, 7* (9), 385–390.

Wilcox-Herzog, A. (2002). Is there a link between teachers' beliefs and behaviors? *Early Education and Development, 13* (1), 81–106.

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele im Mathematikunterricht? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 7* (4), 106–116.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61,* 37–46.

Wittmann, E. C. (2004). Design von Lernumgebungen zur mathematischen Frühförderung. In G. Faust, M. Götz, H. Hacker & H.-G. Roßbach (Hrsg.), *Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich* (S. 49–63). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2012). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept des Mathematikunterrichts in der Grundschule. In G. N. Müller, Ch. Selter & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Zahlen, Muster und Strukturen* (S. 61–79). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. (2003). Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht in der Grundschule? In M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.), *Mathematik in der Grundschule* (S. 18–46). Seelze: Kallmeyer.

Wollring, B. (1994). Animistische Vorstellungen von Vor- und Grundschulkindern in stochastischen Situationen. *Journal für Mathematikdidaktik, 15* (1/2), 3–34.

Wollring, B., Peter-Koop, A., Haberzettl, N., Becker, N. & Spindeler, B. (2011). *Elementarmathematisches Basisinterview – Größen und Messen, Raum und Form.* Offenburg: Mildenberger.

Yamauchia, L. A., Ima, S., Lina, C.-J. & Schonleberb, N. S. (2013). The influence of professional development on changes in educators' facilitation of complex thinking in preschool classrooms. *Early Child Development and Care, 183* (5), 689–706.

Yates, S. M. (2006). Elementary teachers' mathematics beliefs and teaching practices after a curriculum reform. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Hrsg.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 433–440). Prague: PME.

Young-Loveridge, J., Peters, S. & Carr, M. (1998). Enhancing the Mathematics of Four Year-Olds. An Overview of the EMI-4S Study. *Journal for Australian Research in Early Childhood Education, 2,* 82–93.

Zaunbauer, A. C. M., Gebauer, S. K., Retelsdorf, J. & Möller, J. (2013). Motivationale Veränderung von Grundschulkindern in Englisch, Deutsch und Mathematik im Immersions- und Regelunterricht. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 45* (2), 91–102.

Ziegler, G., Weigand, H. G. & a Campo, A. (2008). *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik.* Zugriff am 01.05.2013 unter http://madipedia.de/images/2/21/Standards_Lehrerbildung_Mathematik.pdf

Zoelch, C. & Mähler, C. (2012). Zur Diagnostik von Arbeitsgedächtnisprozessen bei 3- bis 6-jährigen Kindergartenkindern. In M. Hasselhorn & C. Zoelch (Hrsg.), Funktionsdiagnostik des Arbeitsgedächtnisses (S. 159–181). Göttingen: Hogrefe.

Fazit und Ausblick –

Stiftung Haus der kleinen Forscher

KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* Neuwied: Luchterhand.

Bergner, N., Köster H., Magenheim, J., Müller, K., Romeike, R., Schulte, C. & Schroeder, U. (in Vorbereitung). Zieldimensionen informatischer Bildung im Elementar- und Primarbereich. In Stiftung Haus der kleinen Forscher (Hrsg.), *Frühe informatische Bildung – Ziele und Gelingensbedingungen für den Elementar- und Primarbereich. Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“.*

Stiftung Haus der kleinen Forscher (Hrsg.). (2013). *Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“* (Band 5). Schaffhausen: Schubi Lernmedien AG. Verfügbar unter: www.haus-der-kleinen-forscher.de

Stiftung Haus der kleinen Forscher (2014a). *Mathematik in Raum und Form entdecken. Mathematisches Denken von Kita- und Grundschulkindern unterstützen.* Berlin: Stiftung Haus der kleinen Forscher. Verfügbar unter: www.haus-der-kleinen-forscher.de

Stiftung Haus der kleinen Forscher (2014b). *Forschungs- und Entdeckungskarten für pädagogische Fach- und Lehrkräfte: Mathematik in Raum und Form entdecken.* Berlin: Stiftung Haus der kleinen Forscher. Verfügbar unter: www.haus-der-kleinen-forscher.de

Stiftung Haus der kleinen Forscher (Hrsg.). (2015a). *Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“* (Band 7). Schaffhausen: Schubi Lernmedien AG. Verfügbar unter: www.haus-der-kleinen-forscher.de

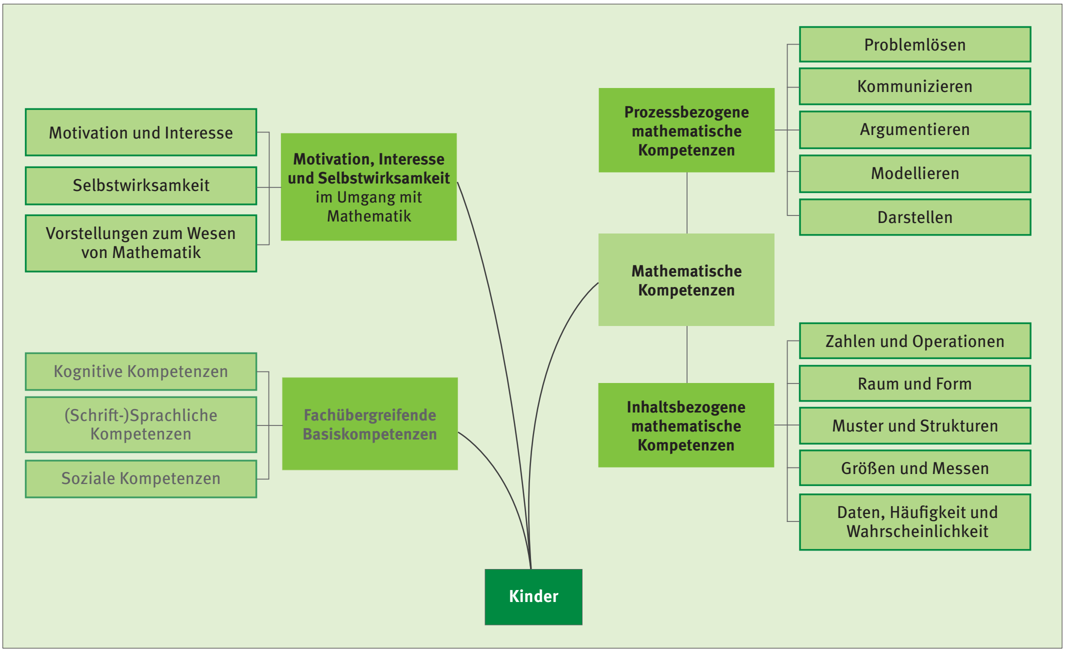
Stiftung Haus der kleinen Forscher (2015b). *Pädagogischer Ansatz der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“. Anregungen für die Lernbegleitung in Naturwissenschaften, Mathematik und Technik* (5. Auflage). Berlin: Stiftung Haus der kleinen Forscher. Verfügbar unter: www.haus-der-kleinen-forscher.de

Stiftung Haus der kleinen Forscher (2016a). *Zahlen, Zählen, Rechnen – Mathematik entdecken. Mathematisches Denken von Kita- und Grundschulkindern unterstützen.* Berlin: Stiftung Haus der kleinen Forscher. Verfügbar unter: www.haus-der-kleinen-forscher.de

Stiftung Haus der kleinen Forscher (2016b). *Forschungs- und Entdeckungskarten für pädagogische Fach- und Lehrkräfte: Zahlen, Zählen, Rechnen – Mathematik entdecken*. Berlin: Stiftung Haus der kleinen Forscher. Verfügbar unter: www.haus-der-kleinen-forscher.de

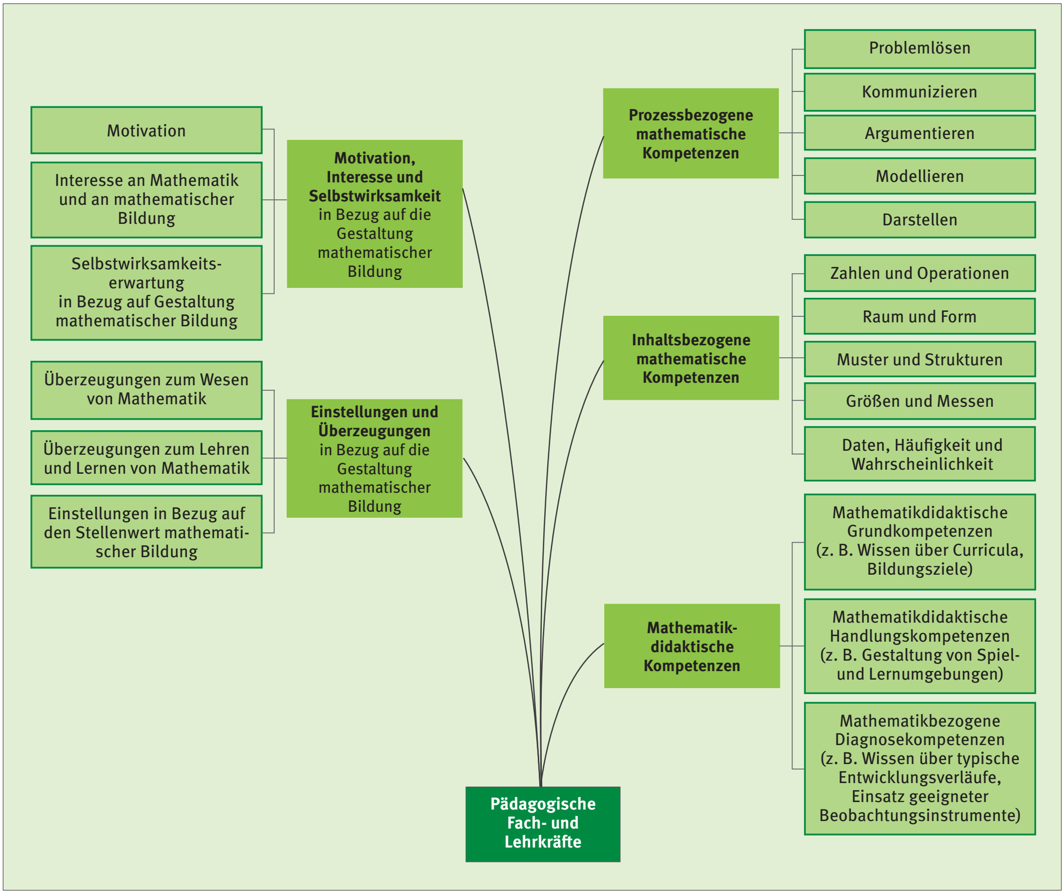
Anhang

Anhang I: Zieldimensionen mathematischer Bildung für Kita- und Grundschulkinder



Quelle: Stiftung Haus der kleinen Forscher, nach Benz, C., Grüßing, M., Lorenz, J.-H., Selter, Ch. & Wollring, B. (2017). Zieldimensionen mathematischer Bildung im Elementar- und Primarbereich. In: Haus der kleinen Forscher (Hrsg.), *Frühe mathematische Bildung – Ziele und Gelingensbedingungen für den Elementar- und Primarbereich*. Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ (Band 8).

Anhang II: Zieldimensionen mathematischer Bildung für pädagogische Fach- und Lehrkräfte



Quelle: Stiftung Haus der kleinen Forscher, nach Benz, C., Grüßing, M., Lorenz, J.-H., Selter, Ch. & Wollring, B. (2017). Zieldimensionen mathematischer Bildung im Elementar- und Primarbereich. In: Haus der kleinen Forscher (Hrsg.), *Frühe mathematische Bildung – Ziele und Gelingensbedingungen für den Elementar- und Primarbereich*. Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher" (Band 8).

Bildquellenverzeichnis

Seite 9: © KOPF & KRAGEN Fotografie/Stiftung Haus der kleinen Forscher
Seite 14, 24, 28, 54, 77, 87, 105, 135, 140, 145, 158, 169, 173, 178, 192, 196, 198: © Christoph Wehrer/Stiftung Haus der kleinen Forscher
Seite 32, 37, 60, 106, 114, 162: © Thomas Ernst/Stiftung Haus der kleinen Forscher
Seite 47, 68, 80, 95, 101, 127, 142, 151, 222: © Stiftung Haus der kleinen Forscher
Seite 130: © Bernd Wollring

Über die Stiftung „Haus der kleinen Forscher“

Die gemeinnützige Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ engagiert sich seit 2006 für eine bessere Bildung von Mädchen und Jungen im Kita- und Grundschulalter in den Bereichen Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik. Mit einem bundesweiten Fortbildungsprogramm unterstützt das „Haus der kleinen Forscher“ pädagogische Fach- und Lehrkräfte dabei, den Entdeckergeist von Kindern zu fördern und sie qualifiziert beim Forschen zu begleiten. Die Bildungsinitiative leistet damit einen wichtigen Beitrag zur Verbesserung von Bildungschancen, zur Nachwuchsförderung im MINT-Bereich und zur Professionalisierung des pädagogischen Personals. Partner der Stiftung sind die Helmholtz-Gemeinschaft, die Siemens Stiftung, die Dietmar Hopp Stiftung und die Deutsche Telekom Stiftung. Gefördert wird sie vom Bundesministerium für Bildung und Forschung.

Bisher erschienen in der Wissenschaftlichen Schriftenreihe der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“

Band 1 (2011)

Dagmar Berwanger, Petra Evanschitzky, Elke Heller, Christa Preissing, Ursula Rabe-Kleberg, Franziska Schulze, Anna Spindler

Der erste Band der Schriftenreihe „Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung ‚Haus der kleinen Forscher'“ stellt vier wissenschaftliche Expertisen aus den Jahren 2009 und 2010 vor, die von renommierten Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern aus dem Bereich der frühkindlichen Pädagogik verfasst wurden. Die vorliegenden wissenschaftlichen Beiträge reflektieren den pädagogischen Ansatz und das Multiplikatorenmodell der Stiftung vor dem Hintergrund der eigenen Zielvorstellungen, analysieren die Umsetzungspraxis in den Netzwerken und Kitas und zeigen weitere Entwicklungsmöglichkeiten auf.

Band 2 (2011)

Franziska Kramer, Ursula Rabe-Kleberg

Die Studie von Ursula Rabe-Kleberg und Franziska Kramer bildet eine logische Konsequenz und Ergänzung zur ersten Untersuchung der Autorinnen „Erzieherinnen und ihre Haltung zu Naturwissenschaft und Technik für Jungen und Mädchen“, die in Band 1 dieser Schriftenreihe veröffentlicht wurde (siehe oben). Die Autorinnen untersuchen die Gestaltung der Lernprozesse durch Erzieherinnen im Detail. Mit hoher Präzision und Sensibilität im Umgang mit den Möglichkeiten qualitativer Sozialforschung gelingt es den Autorinnen dabei, ko-konstruktive Augenblicke des gemeinsamen Lernens in Kitas einzufangen und intensiv im Hinblick auf wichtige Einflussvariablen zu reflektieren.

Band 3 (2012)

Michael Fritz, Gabriele Grieshop, Katrin Hille, Maren Lau, Martin Winter

Im dritten Band werden zwei Studien vorgestellt, die sich mit der Rolle der Bedeutung der Trainerinnen und Trainer in der Initiative „Haus der kleinen Forscher“ aus jeweils unterschiedlichen Perspektiven beschäftigen: In der Studie von Maren Lau, Michael Fritz und Katrin Hille (ZNL) stehen das Rollen- und Selbstverständnis der Trainerinnen und Trainer sowie ihr subjektives Kompetenzempfinden im Mittelpunkt. In der Untersuchung von Gabriele Grieshop und Martin Winter (Institut für Didaktik der Mathematik und des Sachunterrichts (IFD), Universität Vechta) wird – im Rahmen einer vorwiegend formativen Implementierungsevaluation am Beispiel Mathematik – die Beteiligung der Trainerinnen und Trainer an der Konzept- und Materialentwicklung von Angeboten der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ betrachtet.

Band 4 (2012)

Salman Ansari, Susanna Jeschonek, Janna Pahnke, Sabina Pauen

Band 4 enthält vier Expertisen, die basierend auf aktuellen entwicklungspsychologischen Erkenntnissen Empfehlungen für die Entwicklung weiterer naturwissenschaftlicher, technischer und mathematischer Themenschwerpunkte der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ aussprechen, auf mögliche Stolpersteine hinweisen und Vorschläge für die Praxis aufzeigen. Die Expertise von Janna Pahnke und Sabina Pauen gibt einen Überblick über die Entwicklung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Denkens und Wissens in der frühen Kindheit und zieht Schlussfolgerungen für eine darauf aufbauende frühe Bildung in diesen Bereichen. Susanna Jeschoneks Expertisen behandeln die Entwicklung des kindlichen Verständnisses der Bereiche ‚Magnetismus‘ und ‚Akustik‘ und geben Empfehlungen für die Aufbereitung von Bildungsangeboten zu diesen Themenschwerpunkten in der Praxis. In der Expertise von Salman Ansari stehen Prozesse des Lehrens und Lernens aus der Sicht der kognitiven Wissenschaften im Mittelpunkt. Ansari geht auf verschiedene Konzepte und Angebote der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ ein, spricht Empfehlungen für die Weiterentwicklung dieser Themen aus und verdeutlicht dies anhand von konkreten Beispielen für die praktische Umsetzung.

Band 5 (2013)

Yvonne Anders, Ilonca Hardy, Sabina Pauen, Jörg Ramseger, Beate Sodian, Mirjam Steffensky

Der fünfte Band stellt Ziele naturwissenschaftlicher Bildung für Kinder und pädagogische Fach-und Lehrkräfte sowie prozessbezogene Qualitätskriterien für den naturwissenschaftlichen Unterricht im Elementar- und Primarbereich in den Fokus. Yvonne Anders, Ilonca Hardy, Sabina Pauen, Beate Sodian und Mirjam Steffensky spezifizieren in ihren Expertisen pädagogisch-inhaltliche Zieldimensionen naturwissenschaftlicher Bildung im Kita- und Grundschulalter. Neben einer theoretischen Fundierung verschiedener Zielbereiche werden Instrumente für deren Messung aufgeführt. Jörg Ramseger formuliert in seiner Expertise zehn Qualitätskriterien für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Diese prozessbezogenen Kriterien können pädagogische Fach- und Lehrkräfte bei der Unterrichtsplanung sowie bei der Selbstevaluation naturwissenschaftlicher Angebote im Elementar- und Primarbereich unterstützen.

Band 6 (2014)

Yvonne Anders, Itala Ballaschk, Wolfgang Tietze

Im sechsten Band der Schriftenreihe mit einem Geleitwort von Wolfgang Tietze berichten Yvonne Anders und Itala Ballaschk die Ergebnisse ihrer Studie zur Untersuchung der Reliabilität und Validität des Zertifizierungsverfahrens der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“, mit dem sich Bildungseinrichtungen nach bestimmten Qualitätskriterien als „Haus der kleinen Forscher“ zertifizieren lassen können. Insgesamt konnte in der Studie das Potenzial des Verfahrens für die Messung der naturwissenschaftsbezogenen Bildungsqualität in pädagogischen Einrichtungen belegt und Ansatzpunkte für weitere Optimierungen aufgezeigt werden.

Band 7 (2015)

Gabriele Graube, Maja Jeretin-Kopf, Walter Kosack, Ingelore Mammes, Ortwin Renn, Christian Wiesmüller

Der siebte Band der Reihe mit Geleitwort von Ortwin Renn fokussiert Ziele und Konzepte technischer Bildung im Elementar- und Primarbereich. Walter Kosack, Maja Jeretin-Kopf und Christian Wiesmüller spezifizieren in ihrer Expertise pädagogisch-inhaltliche Zieldimensionen technischer Bildung im Kita- und Grundschulalter. Neben einer theoretischen Fundierung verschiedener Zielbereiche werden Instrumente für deren Messung aufgeführt. Die Autoren stellen in zwei Berichten die Ergebnisse empirischer Studien dar. Zum einen wurde der Einfluss verschiedener technikdidaktischer Materialsysteme auf die kindliche Motivation, problemlösendes Denken und technische Kreativität, und zum anderen der Einfluss verschiedener technikdidaktischer Methoden auf die kindliche Motivation sowie technikspezifische Denk- und Handlungsweisen untersucht. Gabriele Graube und Ingelore Mammes beschreiben in ihrem Beitrag ein didaktisches Konzept zur Unterstützung des professionellen Handelns pädagogischer Fach- und Lehrkräfte bei der Begleitung kindlicher Bildungsprozesse in ihrer Auseinandersetzung mit Natur und Technik.