

Una comparación entre las demostraciones de Pedro Nunes y Al-Khwārizmī de los algoritmos de las formas canónicas de la ecuación de segundo grado

Francisco Infante, UV E, UST, Bogotá, Colombia

Luis Puig, Universidad de Valencia, pachoji@gmail.com

Introducción

Este trabajo se enmarca dentro de un estudio sobre la historia de las formas de demostración en álgebra¹⁴⁶. Desde el comienzo del álgebra árabe medieval ya se hace un esfuerzo explícito por dar una justificación para las soluciones de las formas canónicas, más allá de sólo mostrar el algoritmo de solución. En este sentido la manera en que al-Khwārizmī justifica esos algoritmos en su *Kitāb al-jabr w'al-muqābala* abre el camino a todo un proceso que continuarán otras figuras de la ciencia árabe y que luego tendrá su repercusión en el álgebra de la Europa Medieval, y en particular en Pedro Nunes.

En el libro de álgebra de al-Khwārizmī, lo que hoy llamaríamos ecuación canónica de segundo grado, $y = ax^2 + bx + c$, aparece desglosada en seis formas, tres simples y tres compuestas. Para cada una de las compuestas, al-Khwārizmī presenta un algoritmo de solución y una demostración del algoritmo (o, en un caso, dos demostraciones), basada en procedimientos de cortar y pegar que provienen de la tradición del álgebra babilónica.

Siglos después, Pedro Nunes en su *Libro de algebra en arithmetica y geometria* también presenta una serie de formas canónicas, sus algoritmos y demostraciones.

El presente trabajo pretende mostrar y comparar las demostraciones que realizó al-Khwārizmī, que son las primeras de las que se tiene constancia en la historia del álgebra, con las de Pedro Nunes, que es el primer libro de álgebra escrito en español en el que hay demostraciones.

El artículo está organizado en cuatro secciones: la primera es una breve introducción; en la segunda, se puntualizan algunos aspectos sobre las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado y sus algoritmos a la luz de la obra de al-Khwārizmī; en la tercera, se contextualizan las demostraciones de ambos autores; finalmente, en la cuarta, se estudian en detalle cuatro ejemplos de las pruebas elaboradas. Para ello hemos elegido una sola forma canónica, la primera forma compuesta, que tomamos como ejemplo paradigmático, de la que presentamos tres pruebas de Pedro Nunes y una de al-Khwārizmī (de las dos que presenta, excepcionalmente, en este caso).

¹⁴⁶ Uno de los productos de ese estudio es el Trabajo de Fin de Máster *Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Abū Kāmil, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes*, defendido por uno de nosotros en la Universitat de València en 2010 (Infante, 2010).

Las fuentes que hemos utilizado para examinar las demostraciones son las que indicamos a continuación.

En el caso de al-Khwārizmī, hemos consultado la edición clásica de Rosen (1831), hecha a partir del único manuscrito conocido en su época (Oxford Bodleyan Library, Hunt. 212, fol. 1v-54r, 1342), con traducción al inglés; la reciente edición de Rashed (2007), hecha a partir de varios manuscritos, con traducción al francés, y la edición de Hughes (1986) de la traducción latina medieval de Gerardo de Cremona. Hemos tenido en cuenta la lección de Høystrup (1998), según la cual la traducción latina de Cremona es mejor testimonio del texto de al-Khwārizmī que el manuscrito árabe conservado en la Bodleyan. Rashed también le da ese valor a la traducción de Cremona en su reciente edición que utiliza más manuscritos. También hemos consultado la edición árabe de Masharrafa y Ahmad (1939), hecha a partir del manuscrito de Oxford y las ediciones de la traducción latina medieval de Robert de Chester (Karpinski, 1915; Hughes, 1989).

La versión castellana la hemos compuesto a partir de la traducción latina de Cremona y la versión francesa de Rashed, contrastándolas con el texto árabe. Hemos usado “tesoro” como traducción de *māl*, término que Rosen traduce por “square”, Rashed por “*carré*” (en cursiva) y Cremona por “census”, siguiendo también en esto la opinión de Høystrup.

En el caso de Pedro Nunes, hemos utilizado el texto original, del que hay dos ediciones que sólo se diferencian en la portada y el pie de imprenta (Nuñez, 1567a, 1567b). También hemos consultado la edición de la Academia de Ciencias de Lisboa de las Obras Completas de Pedro Nunes, en la que el texto aparece en el volumen VI (Nunes, 1946).

Para estudiar esas demostraciones, seguiremos el tipo de análisis usado en Puig (1998) en Infante y Puig (2009) y en Infante (2010). En concreto, examinaremos en detalle la construcción de la figuras que sustentan las demostraciones y el papel que desempeñan en éstas, comparándolas con lo que en esos textos se llaman procedimientos de cortar y pegar, siguiendo la interpretación de Høystrup (1994, 1996, 2002a) del álgebra babilónica. En Puig (in press) se compara explícitamente los procedimientos de cortar y pegar babilónicos con la construcción de las figuras en las demostraciones de al-Khwārizmī, extremo que no podemos tratar aquí.

Las Formas Canónicas

Al-Khwārizmī comienza su libro exponiendo cuáles son las especies de números (*tesoros*, *raíces* y simples números) que se usan en los cálculos, dice que, en los cálculos necesarios para resolver los problemas, “unas [especies de números] pueden ser iguales a otras”, y establece todas las posibilidades, tres simples y tres compuestas, que son las siguientes (escribimos la forma canónica en una traducción conforme del árabe, que conserva la terminología de al-Khwārizmī, y una equivalencia en el lenguaje del álgebra actual):

1. Tesoro igual a raíces $x^2 = bx$

2. Tesoro igual a números $x^2 = c$
3. Raíces iguales a números $bx = c$
4. Tesoro y raíces igual a números $x^2 + bx = c$
5. Tesoro y números igual a raíces $x^2 + c = bx$
6. Raíces y números igual a tesoro $bx + c = x^2$

Para lo que hemos llamado especies de números, Pedro Nunes (siguiendo a Luca Pacioli, según Cajori, 1993), usa el término de *dignidades*, y los nombres de las dignidades que se corresponden con *tesoro*, *raíz* y simple número son *censo*, *cosa* y número. Las formas canónicas Pedro Nunes las llama *conjugaciones de la igualdad*, y mantienen la misma estructura y número que las de al-Khwārizmī, es decir, seis conjugaciones organizadas en dos grupos: tres simples, de dos dignidades y tres conjugaciones compuestas por tres dignidades. El orden en que se enuncian es diferente: Pedro Nunes parece haberlas organizado por grado de dificultad, cambiando el orden de las dos últimas conjugaciones compuestas. Sin embargo, es relevante el parecido en la estructura de cada conjugación.

El algoritmo de solución de la Ecuación Canónica

Para cada una de las seis formas canónicas, al-Khwārizmī propone un algoritmo de solución. Analicemos el de la cuarta forma canónica, “tesoro y raíces igual a números” ($x^2 + bx = c$), usando el mismo esquema con que en Puig (1998, in press) se analiza la quinta forma canónica.

Veremos el algoritmo propuesto y, en paralelo, la simbolización en términos modernos. Al-Khwārizmī utiliza ejemplos genéricos para explicar sus algoritmos y sobre ellos estructura su demostración. En este caso, el ejemplo es:

Los tesoros más las raíces iguales a un número es por ejemplo cuando dices: un tesoro y diez raíces son iguales a treinta y nueve dirhams, cuyo significado es: de qué tesoro al que se le añaden diez de sus raíces el total es treinta y nueve.

$$x^2 + 10x = 39 \quad x^2 + bx = c$$

Procedimiento: divide en dos las raíces, lo que en este problema resulta cinco.

$$\frac{10}{2} = 5 \quad \frac{b}{2}$$

Multiplicalo por sí mismo, y resulta veinticinco.

$$(5)^2 = 25 \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

A lo que le añades treinta y nueve, y será sesenta y cuatro.

$$25 + 39 = 64 \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

Cuya raíz extraes, que es ocho;

$$\sqrt{64} = 8 \quad \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

de la que subtraes la mitad de las raíces, que es cinco. Queda tres, que es la raíz del tesoro, y el tesoro es nueve

$$8 - 5 = 3 \quad \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

(Rashed, 2007, pp. 100-101;
Hughes, 1986, p. 234)

En la obra de Nunes se pueden encontrar tres grupos principales de algoritmos, el primero son los que él llama *Reglas “antiguas”* –muy semejantes a las de al-Khwārizmī– aunque en términos generales. Hacia el final de la obra se presentan los que Nunes llama *Nuestras Reglas*, que son un nuevo grupo de algoritmos para las conjugaciones compuestas, y, a continuación de éstas, muestra otro nuevo grupo de reglas, enfocadas en la generalización de los algoritmos de solución de las conjugaciones. En este trabajo nos referiremos a los dos primeros grupos.

Sobre las Demostraciones

Abdeljaouad (2002) señala que “Lo que distingue a al-Khwārizmī de sus predecesores [...] es su deseo de justificar los algoritmos de resolución de las ecuaciones cuadráticas [...] Esta parte del tratado de al-Khwārizmī no sirve de nada al calculador, pero permite al autor mostrar que su trabajo es científico, en el sentido de que sus objetos matemáticos han sido definidos y las propiedades que se derivan de aquéllos han sido demostradas”.

De manera semejante Pedro Nunes, ha sido muy cuidadoso de estructurar matemáticamente su trabajo, justificando y demostrando todas las “*Reglas de q[ue] vsō*”, como él mismo lo menciona (Nunes, 1567a).

Pero volvamos a al-Khwārizmī para examinar qué tipo de pruebas son las que desarrolla. Lo primero que podemos observar es que éstas emplean figuras y

construcciones geométricas, pero que no son demostraciones que sigan el esquema de las presentadas en los *Elementos*, con el recurso a definiciones y proposiciones ya demostradas.

En las pruebas de al-Khwārizmī hay figuras geométricas, como también las hay en el texto euclídeo, pero la demostración es un discurso que describe operaciones de cortar y pegar las figuras y de relacionar partes de ellas, y que no busca el fundamento en definiciones, postulados y proposiciones ya demostradas, sino en lo que se atestigua por la vista, sin poner en duda en ningún momento lo que se ve.

En Puig (2009b) se presenta un panorama preliminar de tipos de demostración en textos algebraicos pre-simbólicos, y se adopta una clasificación en tres grandes tipos de demostración. Se llama “ingenua” a una demostración cuya argumentación se apoya en una figura geométrica que está acompañada de letras, y en un discurso que se refiere a lo que se ve en la figura, y a acciones sobre ella, y en el que la garantía de la verdad de lo que se dice es lo que se ve en la figura. “Geométrica” se reserva para las demostraciones que siguen el modelo euclídeo, en las que sigue habiendo figuras geométricas, pero en las que la garantía de la verdad ya no reside en lo que se ve en la figura, sino en el conjunto de la arquitectura del texto euclídeo: definiciones, postulados y proposiciones ya demostradas. Finalmente, se llaman “algebraicas” las demostraciones en las que las figuras geométricas han desaparecido, y el discurso demostrativo se apoya en las operaciones que se realizan con las expresiones algebraicas.

Siguiendo esta caracterización, diremos que las demostraciones de al-Khwārizmī son “ingenuas”, y que, en algunos momentos hay un embrión de demostración “algebraica” (este extremo no lo mostramos en este artículo), pero no hay demostraciones “geométricas”. Veremos también cómo las pruebas realizadas por Pedro Nunes son “geométricas”, y en algunos casos “algebraicas”.

Las demostraciones de la cuarta forma canónica

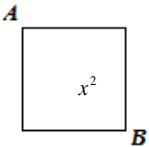
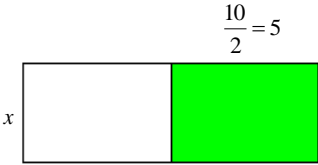
Al-Khwārizmī propone para esta forma canónica dos pruebas diferentes, lo que ya es una singularidad. De la primera de ellas, Høystrup (1996) ha logrado rastrear sus orígenes en Babilonia, y es una prueba que utiliza una figura diferente de la que veremos aquí, que en su construcción no sigue estrictamente el algoritmo, que presenta una explicación más detallada y que emplea una identidad algebraica en su argumento.

Hemos escogido para este trabajo la segunda prueba de al-Khwārizmī, porque en ella se sigue fielmente el algoritmo de solución en la construcción de la figura. Además esta demostración presenta un cercano parecido con las que luego desarrollará Pedro Nunes. Esta prueba utiliza lo que Høystrup (1994) considera que era un procedimiento ya conocido por los babilonios, con el nombre del “Método Akadio”.

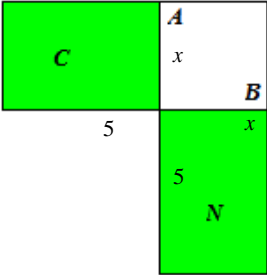
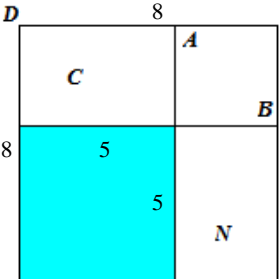
Para analizarla, seguiremos el texto, realizando la comparación con el algoritmo en notación moderna y como ejemplo genérico, y, en paralelo, describiremos la

construcción de la figura. Es importante anotar cómo los dos autores sólo presentan para cada demostración una figura ubicada al final de la demostración.¹⁴⁷

Demostración del algoritmo para tesoro y raíces igual a números (versión 2) de Al-Khwārizmī

al-Khwārizmī	Algoritmo Ej. Genérico	Algoritmo Not. Moderna	Representación Geométrica
<p>En cuanto a la causa es la que sigue [...] (Rashed, 2007, pp. 108-109; Hughes, 1986, p. 236)</p> <p>Hay otra figura que conduce a lo mismo: que es la superficie <i>AB</i>, que es el tesoro. Queremos añadirle diez de sus raíces.</p>	$x^2 + 10x = 39$	$x^2 + bx = c$	
<p>Dividimos entonces diez en dos mitades y resulta cinco. Y hacemos de ella dos superficies</p>	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{b}{2}$	
<p>en las dos partes de <i>AB</i>, que son las superficies <i>C</i> y <i>N</i>, cuya longitud es igual a los lados de la superficie <i>AB</i>, y cuya anchura es cinco, que es la mitad de</p>			

¹⁴⁷ En las ediciones del texto de al-Khwārizmī revisadas sólo aparece una figura, al final de cada una de las pruebas. La única excepción que conocemos es la edición de Karpinski (1915) de la traducción latina medieval de Robert de Chester, en la que en particular para esta prueba del cuarto caso se muestran dos figuras como del Manuscrito de Dresden, pero todo apunta a que sea de la mano de algún comentarista.

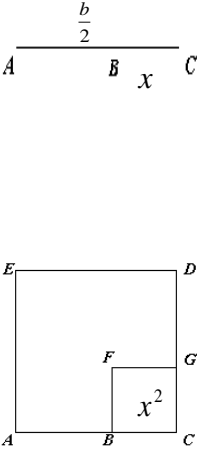
<p>diez. Nos queda por tanto sobre la superficie AB un cuadrado que es de cinco por cinco, que es la mitad de diez raíces que habíamos añadido en las partes de la primera superficie.</p> <p>Sabemos que la primera superficie es el tesoro y que las dos superficies que están sobre sus dos partes son diez de sus raíces, y que todo es treinta y nueve,</p>	$(5)^2 = 25$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$	
<p>y que falta para completar la figura más grande el cuadrado de cinco por cinco. Éste es veinticinco, que añadimos a treinta y nueve para completar la superficie más grande, que es la superficie DE. Se obtiene de todo esto sesenta y cuatro. Tomamos su raíz, que es un lado de la superficie más grande, que es ocho. Si le quitamos lo mismo que le habíamos añadido, que es cinco, queda tres, que es el lado de la superficie AB, que es el tesoro, y por tanto es su raíz, y el tesoro es nueve. [Y ésta es la figura]</p> <p>(Rashed, 2007, pp. 110-113; Hughes, 1986, p. 238)</p>	$25 + 39 = 64$ $\sqrt{64} = 68$ $8 - 5 = 3$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$ $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$ $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$	 <p>Figura 1</p>

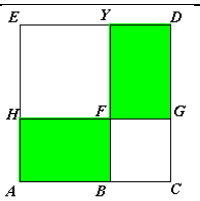
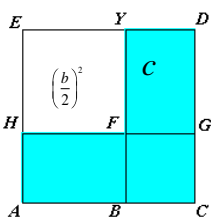
Demostraciones de Pedro Nunes

Las pruebas de las conjugaciones de Nunes se pueden organizar en varios grupos. En el primero las demostraciones tienen un referente geométrico, y se apoyan en proposiciones del segundo libro de los *Elementos* de Euclides. Estas pruebas presentan rasgos comunes con las de al-Khwārizmī. Un segundo grupo está formado por las pruebas que se basan en la proposición I.47 de los *Elementos* (teorema de Pitágoras) sobre la que se estructura el esquema demostrativo de la prueba. Un tercer grupo está formado por las pruebas de las “Reglas Nuevas”, los algoritmos nuevos propuestos por Nunes. Este grupo es relevante, porque estas pruebas no tienen un referente geométrico, son “algebraicas”. Finalmente, en un último grupo se demuestran estas mismas “Reglas Nuevas” nuevamente con el apoyo del libro segundo de los *Elementos*.

En este trabajo sólo profundizaremos en los primeros tres grupos citados, comenzando por las pruebas de referente geométrico.

Demostración del algoritmo antiguo de la primera conjugación
compuesta (versión 1) Pedro Nunes

<i>Pedro Nunes</i>	Notac. Moderna	Representación Geométrica
<p>La mitad del numero de cosas se represente por la línea a. b. La qual lleuaremos a delante estendiendola hasta el punto c. y sea b. c. vn lado del censo ignoto, el qual censo juntamente con las cosas q̄ nos fueron propuestas en numero noto aun q̄ el valor de cada vna sea ignoto, se ygualan con el numero que por si pulimos noto por tercera cantidad de la conjugacion primera, y queremos por estas cosas concedidas conocer quãto sea el valor dela cosa, q̄ es la raiz del quadrado fundado sobre la línea b. c. Haremos por tanto sobre toda la linea a. c. el quadrado a. c. d. e. y sobre la linea b. c. el quadrado b. c. g. f. q̄ es el censo propuesto. y entenderemos las dos</p>	<p>CONS. GEOMETRICA Se construye el segmento AC con</p> $AB = \frac{b}{2}$ $BC = x$ <p>Dms $x^2 + bx = c$ Si sabemos que b y c son constantes conocidas</p> <p>Se realizan las construcciones de los cuadrados ACDE y $BCGF = x^2$</p>	
	<p>Se extienden los dos segmentos BF y FG hasta los puntos Y y H en los lados ED y AE</p>	

<p>líneas b f. f g. hasta los puntos y. h. en los lados e. d. a. e. y la figura e. y. f. h. resultara quadrada, y los dos rectángulos a. b. f. h. y f. g. d. y. seran yguales, por la ygualdad de las líneas opo- sitas equiditantes, y de los dos lados del qua- drado b. c. f. g.</p> <p>Es por que a. b. es la mitad del número de las cosas que fueron propuestas, y la línea b. f. es lado del censo ignoto, sera por esta causa el rectángulo a. b. f. h. la mitad del va- lor de las dichas cosas conforme a la doctrina del capitulo pasado, y otro tanto valdra el re- ctángulo f. g. d. y. y los dos rectángulos juntos seran el entero valor de las cosas.</p>	<p>EYFH cuadrado, ABFH =FGDY</p> $AB = \frac{b}{2}$ $BF = x$ $ABFH = \frac{bx}{2}$ $FGDY = \frac{bx}{2}$ $ABFH +FGDY = bx$	 <p>ABFH = FG DY ABFH +FGDY = bx</p>
<p>Es por q̄ las [cosas] fas con el censo todo juntamente fue propuesto y igual a vn cierto numero o cantidad nota, seran por esta causa los dos rectángulos con el censo o quadrado b. c. g. f. en vna Sūma con- noscidos.</p> <p>A esta Sūma añadiremos el quadra- do e. y. f. h. el qual es noto, por que tiene por lado la línea f. h. q̄ por ser y igual a la línea a. b. es conocida, y resultara el quadrado vniuersal</p> <p>[total ACDE]</p> <p>q̄ todo en si cōprende, el qual sera conocido, y por esta causa su lado q̄ es la línea a. c. sera co- noscido. Desta línea a. c. q̄ nos es nota, facare- mos la línea a. b. q̄ nos es nota, por ser la mitad del numero de las cosas, y restara conocido el lado b. c. del quadrado b. c. g. f. y la raíz del mesmo quadrado otro s̄ sera nota. Y esto es lo q̄ se propuso para demostrar.</p>	<p>Por la premisa de la demostración $x^2 + bx = c$</p> $ABFH + FG DY + BCGF = c$ $ABFH + FG DY + BCGF + EYFH = ACDE$ <p>Como $FH = AB = \frac{b}{2}$ es conocido</p> $EYFH = \frac{b^2}{2}$ es conocido <p>y $ACDE = \frac{b^2}{2} + c$ es conocido, por lo tanto podremos hallar su lado AC y restándole AB que es conocido tendremos $BC = x$</p>	 <p>ABFH + FG DY + BCGF = c Figura 2</p>

<p>Luego quando vn censo y cosas en numero conocido se proponen y iguales a vn numero conocido, $x^2 + bx = c$ bien hazemos en tomar la mitad del numero delas cosas que es $AB \left[\frac{b}{2} \right]$ y multiplicarlo en si haciendo el quadrado $EYFH \left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 \right]$ y juntarle el numero propuesto que se da conocido $\left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 + C \right]$ el qual numero es la summa de los dos rectangulos, y del quadrado $BCGF$ y de toda la summa q[ue] es el quadrado vniuersal [total $ACDE$] tomar la raiz, $\left[\sqrt{\left(\frac{b}{2} \right)^2 + C} \right]$ la qual raiz es respondente [corresponde] a las vnidades o qua[n]tidad del lado AC. Del qual quitando la mitad del numero delas cosas $\left[\frac{b}{2} \right]$, q[ue] es AB restara conocida la raiz del censo $BCGF \left[\sqrt{\left(\frac{b}{2} \right)^2 + C} - \frac{b}{2} \right]$ la qual raiz se representa por el lado BC [...] y esto queremos demonstrar, como en la primera regla delas cõpuertas se contiene. Desta figura y demonstraciõ vfo Euclides en la quarta propoficion del.2.lib. [Euclides II.4]¹⁴⁸ para prouar que si la linea a. c. fuere partida en dos partes, como en el punto b. el quadrado de toda la linea a. c. sera yqual a los quadrados de entrambas las partes, juntamente con el rectangulo q̃ las partes contienen tomado dos vezes.</p>	<p>TRADUCCIÓN AL ALGORITMO</p> $x^2 + bx = c$ $\frac{b}{2}$ $\left(\frac{b}{2} \right)^2$ $\left(\frac{b}{2} \right)^2 + c$ $\sqrt{\left(\frac{b}{2} \right)^2 + c}$ $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2} \right)^2 + c} - \frac{b}{2}$ <p>FASE EUCLIDEA</p> <p>Se usa la proposición II.4 de los <i>Elementos</i> (cfr. nota 3)</p>	
---	--	--

(Nunes, 1567a, f. 6v.)

Varias características son relevantes en este primer grupo de pruebas de Nunes: la primera es que utiliza como referencia figuras muy semejantes a las usadas por al-Khwārizmī. En segundo lugar, que estas demostraciones son “geométricas”, ya que las pruebas cuentan con el respaldo de referencias directas a Euclides.

La estructura de esta prueba posee tres partes y una introducción. En la primera, se construye la figura justificando cada paso con propiedades geométricas, y, una

¹⁴⁸ Euclides “II.4 Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos”. Puertas (1991, v.1, p. 270).

vez que se tiene esta figura con las características adecuadas, comienza la segunda parte en la que se hace una traducción del algoritmo de solución de la conjugación a cada una de los elementos correspondientes de la figura; la tercera y última parte es un comentario en el que se cuenta cómo Euclides utilizó esta misma demostración y figura para probar una determinada proposición, en este caso la II.4, y se explica cómo esta proposición está íntimamente relacionada con la prueba en cuestión.

De esta manera Nunes organiza toda su prueba, sin nombrar a Euclides, pero teniéndolo en mente, pues, después de que parece que ha terminado la prueba con todo el rigor necesario, incluye la proposición de los *Elementos* que encaja perfectamente en el razonamiento, como volviendo a demostrarlo, pero esta vez con el respaldo de Euclides.

La división en estas tres fases, construcción geométrica, traducción del algoritmo y fase euclídea, es uno de los dos modelos, que con frecuencia va a utilizar Pedro Nunes como estructura de sus demostraciones.

La idea básica de la prueba es la misma: la relación entre el cuadrado mayor con los dos cuadrados pequeños y los dos rectángulos congruentes contenidos todos ellos en el mayor. Pero en la demostración de Nunes se pueden contar las tres fases anotadas. Es diferente el formato de al-Khwārizmī, en el que las propiedades geométricas están inmersas en la misma discusión sobre el algoritmo y en la construcción de la prueba.

Por otro lado, la función que desempeña la figura es diferente en las dos demostraciones aunque en ambas se busque el respaldo de la geometría para darle validez al argumento de la prueba. En la de al-Khwārizmī la figura es fundamental en tanto que sobre ella se realizan transformaciones y se visualizan relaciones, y es sobre ella que se entiende la demostración a partir de lo que se ve. Sin embargo, en la de Pedro Nunes, aunque la figura también cumple un papel ilustrativo del razonamiento y marca claramente las relaciones entre sus partes, estas relaciones ya no son por la figura en sí, sino por las propiedades generales allí representadas, que ya han sido justificadas y son necesarias para poder desarrollar la demostración. Ahora bien, sí que es importante la figura en la de Pedro Nunes en cuanto al detalle con que se ha construido para que sea una réplica de la presentada por Euclides, de manera que sea evidente la inclusión en el razonamiento de la proposición adecuada de los *Elementos* —en este caso la II. 4—, con lo cual el criterio de validez de la prueba ha tomado otro nivel.

Veamos en el apartado siguiente la prueba de esta misma conjugación, pero ahora con el uso de la proposición I.47 (teorema de Pitágoras).

Demostración del algoritmo antiguo de la primera conjugación
compuesta (versión 3) Pedro Nunes

<i>Pedro Nunes</i>	Notac. Moderna	Representación Geométrica
<p>Sea la línea a. b. el numero de las cosas, y el numero que pusimos ser yqual alas cosas con el censo tenga por lado quadrado [raíz cuadrada] la línea ¹⁴⁹ z</p> <p>y partiremos la línea a. b. por la mitad en el punto d. y desse mismo punto falga la línea d. e. que haga angulos rectos con la línea a. b. y haremos d. e. yqual ala línea z</p> <p>y del punto e. para b. lleuaremos línea recta e. b. y quedara por este modo constituido el triangulo rectangulo e. d. b. Estenderemos pues la línea d. b. quanto cumpliere, y della cortaremos d. f. yqual ala línea e. b. y dezimos. Que la línea b. f. es lado de vn censo, que juntamente con las cosas cuyo numero es a. b. se yquala con el numero propuesto, que tiene por lado quadrado [raíz cuadrada] la línea z y la demonstracion sera esta</p>	<p>Sean: $AB=b$ $z=\bar{c}$</p> <p>Se construye $ED \perp AB$ en el punto D, con $DB=\frac{b}{2}$ $DE=z=\bar{c}$</p> <p>Triángulo EDB es rectángulo</p> <p>$DF=EB$ $BF=x$</p> <p>Sea la premisa a demostrar: $x^2 + bx = c$</p> <p>y la demostración será esta:</p>	

¹⁴⁹ Se ha cambiado la notación original de Pedro Nunes, para la línea \bar{c} por z en favor de la claridad.

<p>El quadrado de <i>b. e.</i> es y qual al quadrado de <i>e. d.</i> y al quadrado de <i>d. b.</i> ambos juntos, por la proposición .47. del primero lib. de Euclides. Y por q̄ <i>b. e.</i> y <i>d. f.</i> son y guales, tanto valdra luego el fole quadrado de <i>d. f.</i> quanto los dichos dos quadrados de <i>b. d.</i> y <i>d. e.</i></p>	<p>$BE^2 = DE^2 + DB^2$ por la proposición I.47 de los <i>Elementos</i>, y como:</p> <p>$BE = DF$ $DF^2 = DE^2 + DB^2$</p>	
<p>Y por que esse mismo quadrado de <i>d. f.</i> vale tanto como los dos quadrados de <i>b. d.</i> y de <i>b. f.</i> con el duplo del rectangulo cõprehenfo por <i>d. b.</i> y <i>b. f.</i> por la .4. propo proposicio[n] del segu[n]do lib. [Euclides II.4]</p>	<p>Y como también:</p> <p>$DF^2 = DB^2 + 2DB \times BF + BF^2$</p> <p>por la proposición II.4 de los <i>Elementos</i></p>	
<p>facaremos por tanto deffias dos sũmas q̄ por cõmun lentencia son y guales, el cõmun quadrado, q̄ es de la linea <i>b. d.</i> y q̄ dara el quadrado de la linea <i>d. e.</i> y gual a la sũma del quadrado de <i>b. f.</i> con el duplo del rectangulo cõprehenfo por <i>d. b.</i> y <i>b. f.</i></p> <p>Y porque <i>DB</i> es</p>	<p>$DF^2 = DB^2 +$ $DE^2 =$ $2DB \times BF + BF^2$</p> <p>Y como: $DB = \frac{b}{2}$ $BF = x$ $DB \times BF = \frac{bx}{2}$</p>	<p>Figura 3</p>

<p>la mitad del numero delas cosas, pornemos b.f. lado del censo, y fera por tanto el rectangulo comprehenfo por d. b. y b.f. la mitad del valor delas cosas, y el duplo deffe rectangulo fera el entero valor dellas. y el censo con las cosas serã yguales al quadrado dela linea d. e. q̄ pufimos yqual a la linea z cuyo quadrado pufimos que fuesse el numero, q̄ en principio auemos puesto ser yqual a las cosas juntamente con el censo, y esto es lo que queremos demostrar.</p>	<p>$DE=z=\bar{c}$</p> <p>Entonces: $2DB \times$ $BF = bx$ $DE^2=c$</p> <p>Luego: $DE^2=$ $2DB \times BF$ $+BF^2$</p> <p>$c = bx$ $+ x^2$</p> <p>y esto es lo que queríamos demostrar.</p>	
---	---	--

(Nunes, 1567a, f. 14r.)

Aparte de incluir la proposición I.47 de los *Elementos*, que permite establecer nuevas relaciones entre los términos de la expresión y que obliga al necesario cambio en su representación gráfica, además, esta prueba presenta ciertas variantes interesantes.

El rigor es el rasgo fundamental aquí, ya que es por esta razón por la que se ha estructurado la prueba. Pedro Nunes considera las demostraciones “antiguas” faltas de rigor –ya que presuponen la existencia de la solución de la ecuación– y decide presentar este grupo de pruebas, en donde el presupuesto de la igualdad de la conjugación se demuestre. En otras palabras, Pedro Nunes busca probar que la ecuación es posible, que siempre tendrá respuesta.

En sus palabras “[...] en la demonstracion de la primera [conjugación] *presuponemos*, que vn censo con las cosas en qualquier numero que ellas sean, puede[n] ser yguales aqualquier numero, [...] [y] *este presupuesto no es cierto. Por lo qual sera necesario demostrarlo.* [...]”¹⁵⁰ (Nunes, 1567, f. 14r.).

Por esto Nunes comienza su prueba con dos segmentos –los dos datos de la ecuación b y c o, más exactamente, b y \sqrt{c} – y, a partir de ellos, con el uso de la proposición I.47 y de la II.4 y el andamiaje construido, consigue establecer la conjugación que quiere demostrar, con lo cual ha logrado su principal objetivo: mostrar que la conjugación *siempre* tiene solución.

La estructura de esta prueba no es lineal, pues simultáneamente está llevando adelante dos razonamientos: por una parte, las relaciones pitagóricas entre los segmentos y sus áreas, y, por otra parte, la estructura para el uso de II.4. En la

¹⁵⁰ La cursiva es nuestra.

medida en que se ha construido desde los primeros pasos el cuadrado del lado DF y sus polígonos relacionados, se percibe la estructura de la prueba y el uso de II.4. El punto culminante es el uso de la identidad que permite interrelacionar estos dos argumentos en uno solo: “[...] sacaremos por tanto destas dos sumas $q[ue]$ por comun sentençia son yguales, el comun quadrado, $q[ue]$ es dela linea BD y $q[ue]$ dara el quadrado dela linea DE yqual a la summa del quadrado BF con el duplo del rectangulo $co[m]prehenso$ [comprendido] por BD y BF . [...]”¹⁵¹. Y a partir de este momento se retoma la demostración puntual de la conjugación utilizando la proposición II.4, pero se ha ganado todo el razonamiento preliminar.

Finalmente, revisemos las pruebas que realiza Nunes para sus nuevos algoritmos, pero sin utilizar el referente geométrico, tal vez la más clara evolución en la obra del proceso de prueba hacia nuestra idea moderna de demostración matemática.

Demostración del algoritmo nuevo para la primera conjugación
compuesta Pedro Nunes

<i>Pedro Nunes</i>	Comentario	Algoritmo Nuevo (AN)	Algoritmo Antiguo (AA)
E STas nuestras Reglas tienen iu fundam to en las antiguas, que en su lugar auer demonstrado.	La prueba busca establecer la equivalencia entre los dos algoritmos	$x^2 + bx = c$ b	$x^2 + bx = c$ $\frac{b}{2}$
Porque multiplicamos todo el numero delas cosas en fi, y el numero por 4, y por la Regla antigua, multiplicauamos en fi la mitad del numero delas cosas, y el numero no le multiplicaua. Y quedara por tanto proporcion	En el Algoritmo Nuevo (AN) se eleva al cuadrado el término de las cosas [b^2] y el número [c , el término indep.] se multiplica para ser $4c$.	b^2 $4c$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$ c

¹⁵¹ Veamos esta parte del razonamiento en notación moderna

Sean $z = \sqrt{c} = ED, AB = b, DB = \frac{b}{2}, BF = x$

Si

$$BE^2 = ED^2 + DB^2$$

$$BE = DF$$

$$\left\{ \begin{aligned} DF^2 &= ED^2 + DB^2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} DF^2 &= DB^2 + 2DB \times BF + BF^2 \end{aligned} \right.$$

$$ED^2 = 2DB \times BF + BF^2$$

$$c = bx + x^2$$

<p>quadrupla entre el quadrado del numero de las cosas, y el quadrado dela mitad, como tambien el numero creció en quadruplo. Y la razón desto es, que el duplo y el subduplo multiplicados en fi, hazen quadruplo y subquad</p> <p>[proporción en cuartas partes]</p>	<p>En el Algoritmo Antiguo (AA) se eleva al cuadrado la mitad del número de las cosas $\frac{b}{2}$ y el número [c] no se multiplica.</p> <p>Los dos términos del AN quedan en proporción cuádrupla (son cuatro veces) con respecto a los términos del AA.</p>		
<p>y los quadruplos en vna suma también quedan en la misma proporción quadrupla con los subquadruplos puestos en vna suma. Y esto se demuestra por el quinto libro de Euclides; porque si de vn antecedente para su conseqüente ay la proporción q̄ tiene otro antecedente con su conseqüente, tal proporción aura de los antecedentes juntos a los conseqüentes juntos, qual ay de vno de los antecedentes a su cõseqüente, y esto sirve para la primera Regla. [...]</p> <p>y desta manera lo que por vna via resulta, ora sea fumando, como sera quadrupla a lo que resulta por la otra via,</p>	<p>Las sumas de los términos que son consecuentes en una proporción cuádrupla, también quedan en proporción cuádrupla con respecto a la suma de sus antecedentes.</p> <p>Esto se demuestra por la proposición V.12 de los <i>Elementos</i>.¹⁵²</p> <p>De esta forma la expresión del AN será cuádrupla</p>	$b^2 + 4c$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$

¹⁵² Euclides V.12: “Si un número cualquiera de magnitudes fueren proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así serán todas las antecedentes a las consecuentes” (Puertas, 1991, v.2, p. 37).

	(cuatro veces) la del AA.		
Y sera luego la raíz del quadruplo dupla de la raíz del subquadruplo, y procediendo conforme a los dos modos, conforme a estos principios, el valor de la cosa sera vn mismo.	Luego la raíz de esta expresión en el AN es el doble de la expresión en el AA. Así el valor de la cosa [x] será el mismo por ambos procedimiento s.	$\sqrt{b^2 + 4c}$ $2x = \sqrt{b^2 + 4c} - b$ $x = \frac{1}{2} \left[\sqrt{b^2 + 4c} - b \right]$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$ $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$ $x = \frac{1}{2} \left[\sqrt{b^2 + 4c} - b \right]$

(Nunes, 1567a, f. 143v.)

El esquema de esta demostración consiste en lograr la equivalencia que establece Pedro Nunes entre el algoritmo “antiguo” ya demostrado y el algoritmo nuevo que hay que demostrar. Esa equivalencia la consigue apoyándose en la *Teoría de las proporciones*.

Esta prueba marca una profunda diferencia dentro de las presentadas por Nunes, en la medida en que cambia radicalmente el contexto de justificación. Aunque sigue inmerso dentro del marco de los *Elementos* y por ende mantiene parte de las características que ha empleado en otras pruebas, como el rigor, o la justificación de cada paso en términos de reglas o proposiciones ya demostradas, sin embargo, se desprende del referente geométrico, las justificaciones vienen ahora de la *Teoría de las proporciones*, del Libro V de los *Elementos*.

Este cambio en el marco de justificación también implica cambios en el lenguaje empleado y la forma de justificación, lo que implica separarse del referente concreto, de la figura, para pensar en nuevas reglas y propiedades, más abstractas. Pero más allá de ello, este cambio implica el que se utilicen identidades algebraicas como justificaciones, y por ende transformaciones algebraicas, no exactamente iguales a las actuales, pero identidades sobre variables, en términos de proporciones, y en proposiciones del Libro V de Euclides.

A manera de conclusión

Hemos visto cómo las ecuaciones canónicas en al-Khwarizmi y Pedro Nunes están estrechamente relacionadas, manteniendo la misma estructura y cantidad, a pesar de las diferencias plasmadas en el lenguaje y la generalidad.

En los autores estudiados se notan cambios en los tipos de demostración, desde unas primeras demostraciones realizadas con la ayuda de figuras en que la justificación de los argumentos y transformaciones se da por procesos de “cortar y pegar”, y donde la veracidad está dada en términos de aquello que se ve. Para pasar luego a un estado de pruebas en que también con la ayuda de

figuras se estructuran argumentos pero donde la veracidad está expresada en términos de las propiedades de las figuras y sus particulares características, incluyendo ahora como herramienta de demostración todo el saber geométrico y en particular las proposiciones de los *Elementos* de Euclides. Para pasar finalmente a demostraciones en donde la referencia a la figura ya no es necesaria, pero más que eso, es que toda la función justificadora de la Geometría se ha remplazado por otras herramientas, las del álgebra, en particular las de la Teoría de las proporciones, plasmada en los *Elementos* de Euclides.

También hay diferencias en los dos autores estudiados en cuanto a la función de la figura en la prueba. Ya hemos dicho que en al-Khwārizmī la figura es fundamental ya que sobre ella se visualizan relaciones y se realizan transformaciones, y la garantía de la verdad de la demostración está en lo que se ve; mientras que en Pedro Nunes lo que se busca en la figura son las propiedades generales que ya han sido demostradas en los *Elementos* de Euclides, y la garantía de verdad es la arquitectura euclídea, por lo que la importancia del examen de la figura en detalle reside en que sea una réplica de la presentada por Euclides, de manera que sea evidente la inclusión en el razonamiento de la proposición adecuada de los *Elementos*.

Finalmente otro aspecto a destacar es el cambio en el rigor, desde argumentos justificados por la figura, y las características que “se ven” en ella en al-Khwārizmī, se va cambiando en Pedro Nunes hacia pruebas justificadas por propiedades geométricas y proposiciones de los *Elementos*, hasta proponer una prueba en que más que justificar el algoritmo, lo que se busca demostrar es la seguridad de su existencia en todos los casos. Aspecto éste que lleva el rigor matemático a una nueva cota.

Referencias

- Abdeljaouad, M. (2002). La demostración en el álgebra de los árabes. En <http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/02Hiver/02hiverThemeES.html>
- Cajori, F. (1993). *A History of Mathematical Notations*. New York: Dover.
- Høyrup, J. (1994). The Antecedents of Algebra. *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter*. 3. Række: Preprint og Reprints, 1994 nr. 1.
- Høyrup, J. (1996). The Four Sides And The Area. Oblique Light on the Prehistory of Algebra. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica. Historical Research and Integration with Teaching* (pp. 45-65). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Høyrup, J. (1998). “Oxford” and “Cremona”: on the relation between two versions of al-Khwarizmi’s algebra. In Association Algérienne d’Histoire des Mathématiques. *Actes du 3me Colloque Maghrébin sur l’Histoire des Mathématiques Arabes* (vol. 2. pp. 159–178), Tipaza (Alger, Algérie), 1-3 Décembre 1990.
- Høyrup, J. (2002a). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer.
- Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona’s Translation of al-Khwārizmī’s al-jabr: A Critical Edition. *Mediaeval Studies* 48, pp. 211-263.
- Hughes, B. (1989). *Robert of Chester’s Translation of al-Khwārizmī’s al-jabr: A New Critical Edition*, Boethius, Band XIV. Stuttgart: Franz Steiner Verlag.
- Karpinski, L. (1915). *Robert of Chester’s Latin Translation of The Algebra of Al-Khwarizmi*. New York: The MacMillan Company, University of Michigan Studies [electronic version].

- Infante, J. F. (2010). *Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Abū Kāmil, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes*. Trabajo Fin de Máster del Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València.
- Infante, J. F. y Puig, L. (2009). Demostraciones de los algoritmos de las ecuaciones de segundo grado en el *Kitāb Al-Jabr W'al-Muqābala de Al-Khwārizmī*. Comunicación presentada en el grupo de trabajo “Historia de las Matemáticas y de la Educación Matemática” en el *Decimotercer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Santander, 10 al 12 de septiembre de 2009.
- Masharrafa, A. M. y Ahmad, M. M. (Eds.) (1939). *Al-Khwārizmī, Mubammad ibn Mūsa. Kitāb al-mukhtasar fī bisāb al-jabr wa'l-muqābala*. Cairo: al-Qahirah. Reprinted 1968.
- Nunes P. (1946). *Obras Vol. VI. Libro de Algebra en aritmetica y geometria*. Lisboa: Imprensa Nacional de Lisboa Academia das Ciências de Lisboa.
- Nuñez P. (1567a). *Libro de Algebra en aritmetica y geometria*. Compuesto por el Doctor Pedro Nuñez, Cosmografo Mayor del Rey de Portugal, y Cathedratico Iubilado en la Cathedra de Mathematicas en la Vniversidad de Coymbra. Anvers: En la casa de los herederos d'Arnoldo Birckman a la Gallina gorda.
- Nuñez P. (1567b). *Libro de Algebra en aritmetica y geometria*. Compuesto por el Doctor Pedro Nuñez, Cosmografo Mayor del Rey de Portugal, y Cathedratico Iubilado en la Cathedra de Mathematicas en la Vniversidad de Coymbra. Anvers: En la casa de la biuda y herederos de Juan Stelsio.
- Puertas, M. (Ed.) (1991). *Elementos de Euclides*, v. 1, 2 Madrid: Gredos.
- Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Puig, L. (2009b). Naïve, geometric and algebraic proof in ancient and modern times. Talk to the meeting *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics, and Mathematics Education (SemMHistEd) – 3rd Meeting*. Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17, 2009.
- Puig, L. (in press). Researching the History of Algebraic Ideas from an Educational Point of View. In. V. Katz & C. Tzanakis (Eds.) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*. The Mathematical Association of America.
- Rashed, R. (Ed.) (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre*. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.
- Rosen, F. (1831). *The algebra of Mohammed Ben Musa*. London: Oriental Translation Fund.