

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**RIDUZIONE DEI SISTEMI DI FORZE
AI SISTEMI SEMPLICI
CON APPLICAZIONE ALLE FORZE
PARALLELE E COSTRUZIONE
DEL POLIGONO FUNICOLARE**

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Emanuela Caliceti

Presentata da:
Lucia Ferrari

IV Sessione
Anno Accademico 2019/2020

Introduzione

In questa tesi si studia il problema della riduzione dei sistemi di forze ai cosiddetti *sistemi semplici* nell'ambito della meccanica classica, con l'obiettivo di illustrare il risultato centrale in questo contesto, per il quale un qualunque sistema di forze (anche in numero infinito) risulta equivalente a un sistema costituito da una singola forza e da una coppia, con vettore della forza parallelo al momento della coppia. Questo risultato è molto importante, in quanto sistemi di forze equivalenti, aventi cioè lo stesso vettore risultante e lo stesso momento risultante, generano la stessa dinamica per i corpi a cui sono applicati. Pertanto nella determinazione dell'evoluzione temporale di un corpo, così come nella ricerca delle condizioni di equilibrio, è possibile sostituire al sistema di forze effettivamente agenti su di esso quello elementare equivalente. In questo contesto risulta di particolare interesse il caso delle *forze parallele*, per il quale è possibile determinare un'espressione esplicita per il *centro di riduzione*. Infine viene illustrato il metodo grafico per la costruzione del poligono funicolare, che consente di determinare graficamente la forza risultante di un sistema di forze complanari. Per la trattazione di questi temi, questa tesi si articola in quattro capitoli.

Più precisamente, nel primo capitolo verranno fornite alcune nozioni base sui sistemi di forze, seguendo la teoria dei vettori applicati descritta nel testo di Strumia [2]. Si daranno le definizioni di forza e momento (polare e assiale) e si illustrerà la legge fondamentale della distribuzione dei momenti ed il teorema di Varignon. Si cercherà poi di minimizzare il momento risultante introducendo il concetto di *asse centrale* e trovando la sua rappresentazione cartesiana.

Seguendo poi il trattato di Graffi [1], a cui rimandiamo per ulteriori dettagli e approfondimenti, verranno trattati i capitoli successivi. Il secondo capitolo rappresenta la parte centrale di questa tesi; verranno definite le operazioni elementari e si dimostrerà l'invarianza del vettore risultante e del momento risultante di un sistema rispetto a tali operazioni. Assieme alla nozione di sistemi di forze equivalenti si introdurranno quindi i sistemi semplici e verrà illustrato il teorema di riducibilità di un sistema di forze: *ogni sistema di*

forze equivale sempre ad una forza più una coppia.

Si mostrerà inoltre che è possibile scegliere il centro di riduzione del sistema in modo che la forza e il momento della coppia risultino paralleli e si vedrà che ciò avviene se e solo se si prende come polo un qualsiasi punto dell'asse centrale. Si studierà quindi il caso particolare dei sistemi a invariante nullo (che risultano equivalenti a una singola forza o a una coppia), in particolare si tratteranno i sistemi di forze parallele e i sistemi piani.

Nel terzo capitolo si studierà in dettaglio proprio il caso di forze parallele e si ricaveranno le coordinate del suo centro di riduzione.

Nel quarto capitolo si illustreranno alcune applicazioni. Si vedrà quindi lo studio del baricentro di un corpo: infatti il peso di un corpo si può trattare come un sistema di forze parallele applicate nei punti del corpo, il cui centro di riduzione sarà il baricentro stesso.

Si cercheranno inoltre procedimenti che permettano di trovare facilmente il sistema semplice equivalente al sistema dato; si tratterà dunque un metodo grafico per la riduzione di un sistema piano, chiamato *poligono funicolare*. (per maggiori dettagli si rimanda al testo di Belluzzi [4]).

In conclusione si osserverà che tali risultati possono essere generalizzati ai sistemi di vettori applicati e si noterà quindi un'analogia con gli stati cinetici del corpo rigido: traslazione, rotazione e rototraslazione. Verranno quindi richiamati alcuni risultati della Cinematica del corpo rigido, per la cui trattazione nel dettaglio rimandiamo sempre al libro di Graffi [1] o a quello di Veronesi e Fuschini [3].

Indice

Introduzione	2
1 Sistemi di forze	6
1.1 Forza e momento di una forza	6
1.2 Vettore risultante e momento risultante in un sistema di forze	8
1.3 Legge di distribuzione dei momenti	9
1.4 Momento assiale di una forza e di un sistema di forze	10
1.5 Trinomio invariante e asse centrale di un sistema di forze	12
1.5.1 Rappresentazione cartesiana dell'asse centrale	16
2 Riduzione dei sistemi di forze ai sistemi semplici	17
2.1 Operazioni elementari	17
2.2 Equivalenza dei sistemi di forze	18
2.3 Sistemi semplici	19
2.4 Teorema di riducibilità	22
2.5 Sistemi a invariante nullo	25
2.5.1 Sistemi piani	26
2.5.2 Sistemi di forze parallele	27
3 Forze parallele e centro delle forze parallele	28
3.1 Sistema di due forze parallele	28
3.2 Sistema di n forze parallele	31
3.3 Centro delle forze parallele	32
3.4 Decomposizione in forze parallele	34
4 Applicazioni	37
4.1 Baricentri	37
4.1.1 Baricentri di corpi continui	38
4.1.2 Teoremi per il calcolo del baricentro	40
4.2 Il poligono funicolare	41

5	Conclusioni e analogia con gli stati cinetici del corpo rigido	46
5.1	Richiami sul corpo rigido	46
5.2	Analogia con gli stati cinetici del corpo rigido	47
	Bibliografia	50

Capitolo 1

Sistemi di forze

1.1 Forza e momento di una forza

La prima nozione di cui abbiamo bisogno è quella di *forza*. Essa viene definita come qualsiasi causa capace di modificare lo stato di quiete o di moto di un corpo o capace di deformarlo. Ma per poterla studiare matematicamente la possiamo definire nel modo seguente:

Definizione 1.1. Una *forza* è determinata da:

- un numero, detto *intensità* della forza;
- una *direzione*;
- un *verso*;
- un punto, detto *punto di applicazione*;

Dunque una forza è proprio determinata da un vettore \vec{F} di \mathbb{R}^3 applicato ad un punto A , cioè un vettore applicato, e si indicherà con (\vec{F}, A) .

Chiamiamo inoltre *linea d'azione* della forza la retta passante per il punto di applicazione e parallela al vettore \vec{F} .

Un *sistema di forze* è quindi un sistema di vettori applicati, che in generale non saranno però tutti applicati allo stesso punto. Per poter studiare lo stato di quiete o di moto di un corpo su cui è applicato un sistema di forze è necessario introdurre il concetto di *momento* di una forza.

Definizione 1.2. Chiamiamo *momento (polare)* di una forza (\vec{F}, A) rispetto al punto O il vettore:

$$\vec{\Omega} = \vec{F} \times (O - A)$$

1.1. Forza e momento di una forza

Il punto O è detto **polo**.

Indicando con α l'angolo tra $(O - A)$ e \vec{F} , si ha che il modulo del momento vale

$$|\vec{\Omega}| = |\vec{F}||\vec{AO}| \sin\alpha = |\vec{F}|d$$

con $d = |\vec{AO}| \sin\alpha$, cioè la distanza di O dalla linea d'azione di \vec{F} , detto **braccio** della forza rispetto al punto O .

Notiamo inoltre che il momento di una forza cambia al variare della scelta del punto O . In particolare, se il punto O si trova sulla retta d'azione della forza, allora \vec{F} e $(O - A)$ sono paralleli.

Quindi *il momento di una forza rispetto a un punto della sua linea d'azione e, in particolare al suo punto di applicazione, è nullo.*

Osserviamo che, data la definizione, il momento è un vettore ortogonale al piano individuato dalla forza e dal polo.

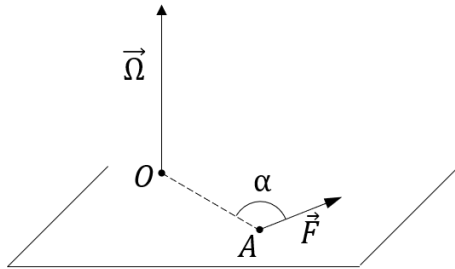


Figura 1.1: Momento di una forza

Proposizione 1.3. *Se si fa scorrere il polo lungo una retta parallela alla linea d'azione della forza, oppure si fa scorrere la forza lungo la propria retta d'azione, il momento non cambia.*

Dimostrazione. Consideriamo il primo caso: sia dunque O' un punto sulla retta passante per O e parallela a \vec{F} e sia $\vec{\Omega}'$ il momento della forza rispetto al polo O' ; si ha

$$\vec{\Omega}' = \vec{F} \times (O' - A) = \vec{F} \times (O' - O + O - A) = \vec{F} \times (O' - O) + \vec{F} \times (O - A).$$

Ma $\vec{F} \times (O' - O) = 0$ essendo $(O' - O)$ parallelo a \vec{F} . Dunque

$$\vec{\Omega}' = \vec{F} \times (O - A) = \vec{\Omega}.$$

Nel secondo caso, sia A' un punto sulla linea d'azione della forza, consideriamo la forza \vec{F} applicata in A' e sia $\vec{\Omega}'$ il suo momento rispetto a O ; si ha

$$\vec{\Omega}' = \vec{F} \times (O - A') = \vec{F} \times (O - A + A - A') = \vec{F} \times (O - A) + \vec{F} \times (A - A').$$

1.2. Vettore risultante e momento risultante in un sistema di forze

Ma $\vec{F} \times (A - A') = 0$ essendo $(A - A')$ parallelo a \vec{F} . Dunque

$$\vec{\Omega}' = \vec{F} \times (O - A) = \vec{\Omega}.$$

□

1.2 Vettore risultante e momento risultante in un sistema di forze

Consideriamo un sistema di forze rappresentate dai vettori applicati

$$(\vec{F}_1, A_1), (\vec{F}_2, A_2), (\vec{F}_3, A_3), \dots, (\vec{F}_n, A_n)$$

Definizione 1.4. Chiameremo **vettore risultante** il vettore \vec{R} somma dei vettori $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, ossia

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{s=1}^n \vec{F}_s$$

Osserviamo che il *vettore risultante* non deve essere confuso con la *risultante*. Quest'ultima infatti è una forza ed esiste solo nel caso in cui tutte le forze siano applicate nel medesimo punto. Il *vettore risultante* invece è un vettore, definito indipendentemente dal punto di applicazione.

Definizione 1.5. Chiameremo **momento risultante** $\vec{\Omega}$ del sistema di forze **rispetto al punto O**, la somma dei momenti $\vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2, \dots, \vec{\Omega}_n$ rispetto ad O delle singole forze del sistema, ossia

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2 + \dots + \vec{\Omega}_n = \sum_{s=1}^n \vec{F}_s \times (O - A_s)$$

Da questa definizione e da quella di vettore risultante si ottiene la seguente proprietà:

Proposizione 1.6. Dati due sistemi di forze con vettori risultanti \vec{R}, \vec{R}' e momenti risultanti rispetto ad O indicati con $\vec{\Omega}, \vec{\Omega}'$, si ha che $\vec{R} + \vec{R}'$ e $\vec{\Omega} + \vec{\Omega}'$ sono rispettivamente il vettore risultante e il momento risultante del sistema di forze formato dal primo e dal secondo sistema considerati.

Cioè, il vettore risultante e il momento risultante dell'unione di due o più sistemi si ottiene sommando i vettori risultanti dei singoli sistemi.

1.3 Legge di distribuzione dei momenti

In generale, il momento risultante di un sistema di forze varia al variare del punto rispetto al quale viene calcolato; cerchiamo quindi la relazione che lega i momenti del sistema rispetto a due punti generici.

Teorema 1.7. (*Legge di distribuzione dei momenti*)

Il momento risultante di un sistema di forze rispetto a un polo O' è uguale al momento risultante rispetto a un altro polo O sommato al momento del vettore risultante pensato applicato in O , calcolato rispetto al polo O' .

Cioè, chiamando \vec{R} il vettore risultante, $\vec{\Omega}$ il momento risultante rispetto al polo O e $\vec{\Omega}'$ il momento risultante rispetto al polo O' , si ha:

$$\vec{\Omega}' = \vec{\Omega} + \vec{R} \times (O' - O) \quad (1.1)$$

Dimostrazione. Si dimostra banalmente osservando che, dato il sistema di forze $(\vec{F}_1, A_1), (\vec{F}_1, A_2), \dots, (\vec{F}_n, A_n)$, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}' &= \sum_{s=1}^n \vec{F}_s \times (O' - A_s) = \sum_{s=1}^n \vec{F}_s \times (O' - O + O - A_s) = \\ &= \sum_{s=1}^n \vec{F}_s \times (O' - O) + \sum_{s=1}^n \vec{F}_s \times (O - A_s) = \vec{R} \times (O' - O) + \vec{\Omega}. \end{aligned}$$

□

Osserviamo quindi che il momento risultante è uguale per tutti i punti dello spazio solo quando si annulla l'ultimo termine di (1.1), cioè (essendo $(O' - O)$ arbitrario e perciò anche diverso da zero e non parallelo a \vec{R}) quando $\vec{R} = 0$. Dunque abbiamo il seguente risultato:

Proposizione 1.8. *L'annullarsi del vettore risultante è condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di forze abbia ugual momento risultante rispetto a tutti i punti dello spazio.*

Perciò, quando un sistema di forze ha il vettore risultante nullo, il momento risultante rispetto a un qualunque punto dello spazio si chiama, senz'altro **momento risultante**.

Osserviamo ora due casi particolari con vettore risultante non nullo:

1. $(O' - O)$ parallelo a \vec{R} ;
2. il momento risultante rispetto a un punto O dello spazio si annulla.

Analizzando il primo caso si ottiene che *in un sistema di forze con vettore risultante non nullo il momento risultante non cambia se si fa scorrere il polo lungo una retta parallela al risultante.*

Nel secondo caso invece, la (1.1) si riduce a

$$\vec{\Omega}' = \vec{R} \times (O' - O).$$

In questo caso e solo in questo caso *il vettore momento risultante coincide con il momento del vettore risultante*

Otteniamo quindi il seguente risultato:

Teorema 1.9. (Teorema di Varignon)

Un sistema di forze applicate in uno stesso punto, o tali che le loro rette d'azione passino per lo stesso punto, ha momento risultante uguale al momento del vettore risultante applicato in quel punto.

Dimostrazione. Scelto come polo il punto comune alle rette d'azione di tutte le forze, che può essere anche il punto di applicazione, almeno di alcune di esse, e che chiamiamo O , calcoliamo il momento risultante rispetto a tale polo:

$$\vec{\Omega} = \sum_{s=1}^n \vec{F}_s \times (O - A_s).$$

Ora, se la retta d'azione di una generica forza del sistema passa per O o addirittura O coincide proprio con il punto di applicazione A_s , segue immediatamente che, per $s = 1, \dots, n$

$$\vec{F}_s \times (O - A_s) = 0.$$

Dunque $\vec{\Omega} = 0$ e ci troviamo quindi nel secondo caso particolare che abbiamo considerato precedentemente. \square

1.4 Momento assiale di una forza e di un sistema di forze

Consideriamo una forza (\vec{F}, A) ; se si fa scorrere il polo lungo una retta qualsiasi (in generale non parallela alla linea d'azione di \vec{F}), il momento varierà e si ha:

$$\vec{\Omega}' = \vec{\Omega} + \vec{F} \times (O' - O).$$

Il termine di cui varia, cioè $\vec{F} \times (O' - O)$, risulterà ortogonale a $(O' - O)$, e quindi alla retta su cui scorre il polo. Otteniamo quindi la seguente proprietà:

Proposizione 1.10. *Se si proietta il momento polare su una retta r che contiene il polo, otterremo una quantità invariabile rispetto alla scelta del polo sulla retta; cioè, detto \vec{u} il versore di tale retta, la quantità*

$$\Omega_r = (A - O) \times \vec{F} \cdot \vec{u} = \vec{\Omega} \cdot \vec{u}$$

non dipende dalla scelta del polo O sulla retta r . Essa prende il nome di **momento assiale** di \vec{F} rispetto alla retta r .

Dimostrazione. Calcoliamo il momento assiale rispetto a un polo O' sulla retta r ; si ha che:

$$\begin{aligned} \Omega'_r &= (A - O') \times \vec{F} \cdot \vec{u} = (A - O + O - O') \times \vec{F} \cdot \vec{u} = \\ &= (A - O) \times \vec{F} \cdot \vec{u} + (O - O') \times \vec{F} \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

Ma $(O - O') \times \vec{F} \cdot \vec{u} = 0$, dunque

$$\Omega'_r = (A - O) \times \vec{F} \cdot \vec{u} = \Omega_r.$$

□

Il momento assiale di una forza risulta essere nullo quando il prodotto misto che lo definisce si annulla e cioè quando i tre vettori $(A - O)$, \vec{F} e \vec{u} sono complanari. Ma O sta sulla retta di versore \vec{u} e A sta sulla retta d'azione di \vec{F} , quindi, affinché i tre vettori considerati siano complanari, occorre e basta che \vec{u} e \vec{F} siano complanari (in questo modo anche $(A - O)$ sta sullo stesso piano). Di conseguenza si ha la seguente

Proposizione 1.11. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il momento assiale di una forza non nulla \vec{F} , rispetto ad una retta r , sia non nullo è che la retta r e la retta d'azione di \vec{F} siano sghembe.*

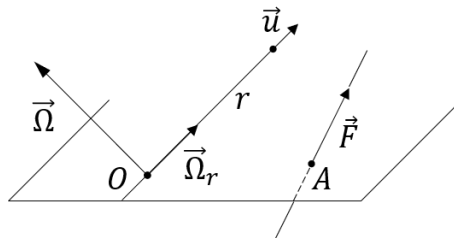


Figura 1.2: Momento assiale

Introduciamo ora il concetto di momento assiale per un sistema di forze:

Definizione 1.12. Dato un sistema di forze, si dice **momento assiale** relativo a una retta r la quantità

$$\Omega_r = \vec{\Omega} \cdot \vec{u}$$

dove \vec{u} è il versore della retta r .

Grazie alla (1.1), anche per un sistema di forze il momento assiale risulta indipendente dalla scelta del polo lungo la retta r assegnata; infatti abbiamo:

$$\Omega_r = \vec{\Omega}' \cdot \vec{u} = \vec{\Omega} \cdot \vec{u} + \vec{R} \times (O - O') \cdot \vec{u}.$$

Ma dal momento che O e O' appartengono alla retta r di direzione \vec{u} , segue che $(O - O')$ è parallelo a \vec{u} e quindi il prodotto misto $\vec{R} \times (O - O') \cdot \vec{u}$ è nullo, perché i tre vettori risultano complanari.

1.5 Trinomio invariante e asse centrale di un sistema di forze

In un sistema di forze i *vettori principali* sono \vec{R} e $\vec{\Omega}$; con questi due vettori è possibile costruire uno pseudoscalare che prende il nome di **trinomio invariante**, o anche, brevemente, **invariante**:

$$J = \vec{\Omega} \cdot \vec{R} \tag{1.2}$$

La denominazione di *invariante* deriva dal fatto che la quantità J non dipende dalla scelta del polo O nello spazio. Infatti, prendiamo come polo un altro punto O' e chiamiamo $\vec{\Omega}'$ il momento calcolato rispetto a tale polo; la (1.1) (legge di distribuzione dei momenti) comporta:

$$\vec{\Omega}' \cdot \vec{R} = \vec{\Omega} \cdot \vec{R} + \vec{R} \times (O' - O) \cdot \vec{R} = J$$

dove il prodotto misto $\vec{R} \times (O' - O) \cdot \vec{R}$ è evidentemente nullo poiché contiene due vettori uguali.

Notiamo che, in generale, se il risultante è non nullo l'annullarsi dell'invariante equivale a dire che il momento risultante è ortogonale al risultante oppure è nullo. Ciò accade, per esempio, come vedremo, per i *sistemi di forze parallele* e per i sistemi di forze appartenenti ad uno stesso piano (*sistemi piani*).

Consideriamo nuovamente i vettori principali di un sistema di forze \vec{R} e $\vec{\Omega}$; di questi due, il primo è fissato e il secondo dipende dalla scelta del polo. Nasce, perciò il problema di ricercare, se esistono, dei punti che presi come

1.5. Trinomio invariante e asse centrale di un sistema di forze

poli di riduzione rendono minimo il modulo del momento. Questa ricerca conduce all'introduzione del concetto di *asse centrale* di un sistema di forze. Consideriamo un punto O dello spazio e supponiamo di conoscere il momento $\vec{\Omega}_O$ rispetto a tale punto; sia P un polo variabile caratterizzato dal suo vettore spostamento rispetto ad O :

$$(P - O) = \vec{x} \equiv (x_i) \equiv (x_1, x_2, x_3), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Con queste notazioni il momento rispetto al polo variabile viene espresso come una funzione della variabile vettoriale \vec{x} :

$$\vec{\Omega}_P = \vec{\Omega}_O + \vec{R} \times (P - O) = \vec{\Omega}_O + \vec{R} \times \vec{x}. \quad (1.3)$$

A noi interessa ricercare, se esistono, i minimi del modulo, ovvero del modulo al quadrato, il cui studio risulta più semplice. Allora la funzione da studiare è:

$$f(x) = (\vec{\Omega}_O + \vec{R} \times \vec{x})^2.$$

Differenziando otteniamo:

$$df(x) = 2(\vec{\Omega}_O + \vec{R} \times \vec{x}) \cdot \vec{R} \times d\vec{x}.$$

Mediante le proprietà del prodotto misto possiamo scambiare l'ordine dei prodotti ottenendo:

$$df(x) = 2(\vec{\Omega}_O + \vec{R} \times \vec{x}) \times \vec{R} \cdot d\vec{x}.$$

Poiché per qualsiasi funzione differenziabile $f(x)$ si ha $df(x) = \nabla f(x) \cdot dx$ è immediato ottenere il gradiente della funzione:

$$\nabla f(x) = 2(\vec{\Omega}_O + \vec{R} \times \vec{x}) \times \vec{R}.$$

La condizione necessaria perché un punto sia un estremante è che $\nabla f(x) = 0$, che nel nostro caso si traduce in:

$$(\vec{\Omega}_O + \vec{R} \times \vec{x}) \times \vec{R} = 0.$$

Abbiamo ora tre possibilità:

- (1) $\vec{R} = 0$
- (2) $\vec{\Omega}_O + \vec{R} \times \vec{x} = 0$
- (3) $\vec{\Omega}_O + \vec{R} \times \vec{x}$ parallelo ad \vec{R} .

1.5. Trinomio invariante e asse centrale di un sistema di forze

Il caso (1) non è di alcun interesse perché se il risultante è nullo, allora il momento è indipendente dalla scelta del polo ed è perciò una funzione costante e non ha senso una ricerca del minimo del modulo.

I casi (2) e (3) si possono unire nella seguente equazione:

$$\vec{\Omega}_O + \vec{R} \times \vec{x} = \lambda \vec{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

che corrisponde al caso (2) per $\lambda = 0$ e al caso (3) per $\lambda \neq 0$.

Questa equazione vettoriale rappresenta il luogo geometrico dei punti dello spazio che sono estremanti del modulo del momento risultante. Si tratta di un'equazione vettoriale lineare in x , contenente un parametro λ e rappresenta perciò una retta, che chiameremo **asse centrale**.

Mostriamo ora che si tratta effettivamente di punti di minimo.

Combinando la (1.3) e la (1.4) otteniamo che il momento calcolato rispetto ai punti dell'asse centrale presi come poli, vale:

$$\vec{\Omega}_P = \lambda \vec{R}$$

dove λ si ricava facilmente prendendo il prodotto scalare con \vec{R} :

$$\vec{\Omega}_P \cdot \vec{R} = \lambda \vec{R}^2.$$

Tenendo conto della definizione di *invariante* e del fatto che il risultante è supposto non nullo ricaviamo:

$$\lambda = \frac{J}{\vec{R}^2} \quad (1.5)$$

e dunque, rispetto ai punti dell'asse centrale presi come poli, il momento vale:

$$\vec{\mu} = \vec{\Omega}_P = \frac{J}{\vec{R}^2} \vec{R}.$$

Esso risulta essere parallelo al risultante e inoltre è indipendente dal polo considerato sull'asse stesso.

Se calcoliamo ora il momento rispetto ad un polo qualsiasi O che, in generale, può non appartenere all'asse centrale, mediante la legge di distribuzione, abbiamo:

$$\vec{\Omega}_O = \vec{\Omega}_P + \vec{R} \times (P - O) = \vec{\mu} + \vec{R} \times (P - O),$$

ovvero:

$$\vec{\Omega}_O = \vec{\mu} + \vec{N}_O \quad (1.6)$$

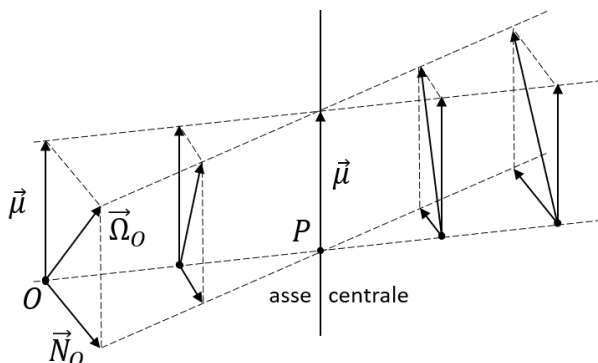


Figura 1.3: Asse centrale

dove $\vec{N}_O = \vec{R} \times (P - O)$ rappresenta la componente del momento $\vec{\Omega}_O$ normale al risultante \vec{R} , mentre $\vec{\mu}$ rappresenta la componente parallela al risultante. Di conseguenza il modulo del momento risultante calcolato rispetto al polo O è dato dalla composizione pitagorica delle due componenti e vale:

$$|\vec{\Omega}_O| = \sqrt{\vec{\mu}^2 + \vec{N}_O^2}.$$

Poiché \vec{N}_O^2 è sempre positivo quando O non appartiene all'asse centrale ed è nullo se e solo se O appartiene all'asse centrale, ne viene di conseguenza che il modulo del momento sull'asse centrale è minimo e vale $|\vec{\mu}|$.

Notiamo che il momento risultante calcolato rispetto a un polo qualsiasi è costituito da due componenti: una parallela al risultante e indipendente dal polo ($\vec{\mu}$) e una, normale al risultante, che è nulla sull'asse centrale e cresce linearmente allontanandosi da esso (\vec{N}_O) in quanto risulta:

$$|\vec{N}_O| = |\vec{R}|d$$

dove d è la distanza del polo O dall'asse centrale. Riassumendo:

Proposizione 1.13. *L'asse centrale è il luogo geometrico dei punti dello spazio, che presi come poli di riduzione, rendono il momento risultante parallelo al risultante e di minimo modulo oppure nullo.*

Osserviamo inoltre la seguente proprietà.

Proposizione 1.14. *L'asse centrale è una retta parallela al risultante.*

Dimostrazione. Si può mostrare facilmente utilizzando la legge di distribuzione dei momenti per due poli P e P' appartenenti all'asse centrale, per i quali il momento è identico e vale $\vec{\mu}$. Allora si ha che:

$$\vec{\mu} = \vec{\mu} + (P - P') \times \vec{R} \iff (P - P') \times \vec{R} = 0,$$

e dunque, essendo $\vec{R} \neq 0$, supposto $P' \neq P$, segue che $(P' - P)$ è parallelo a \vec{R} , e quindi l'asse centrale risulta parallelo ad \vec{R} . \square

1.5.1 Rappresentazione cartesiana dell'asse centrale

Ricordiamo l'equazione (1.4) dell'asse centrale nella forma:

$$\vec{\Omega}_O + \vec{R} \times \vec{x} = \lambda \vec{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Considerando un sistema di assi cartesiani $Oxyz \equiv Ox_1x_2x_3$ e, denotando con x, y, z gli indici relativi agli assi cartesiani otteniamo il seguente sistema di tre equazioni lineari in x, y e z e nel parametro λ :

$$\begin{cases} \Omega_x + R_y z - R_z y = \lambda R_x \\ \Omega_y + R_z x - R_x z = \lambda R_y \\ \Omega_z + R_x y - R_y x = \lambda R_z \end{cases} \quad (1.7)$$

dove R_x, R_y, R_z rappresentano le proiezioni di \vec{R} sugli assi O_x, O_y, O_z rispettivamente.

Le (1.7) sono le equazioni parametriche dell'asse centrale. Eliminando il parametro λ si ottengono le equazioni cartesiane dell'asse centrale. Può essere più semplice tener conto dell'espressione (1.5) per λ ottenuta mediante l'invariante. In tal caso, le tre equazioni precedenti, dopo aver sostituito l'espressione per λ risultano essere linearmente dipendenti. Prendendo allora due di esse che risultano linearmente indipendenti (supponiamo ad esempio che siano le prime due), abbiamo le equazioni cartesiane dell'asse centrale:

$$\begin{cases} \Omega_x + R_y z - R_z y = \lambda R_x \\ \Omega_y + R_z x - R_x z = \lambda R_y, \end{cases}$$

che nello spazio rappresentano proprio una retta.

Capitolo 2

Riduzione dei sistemi di forze ai sistemi semplici

2.1 Operazioni elementari

Definizione 2.1. Chiameremo *operazioni elementari* su un sistema di forze le operazioni di scorrimento, composizione e decomposizione così definite:

- (a) Lo **scorrimento** di una forza consiste nel sostituirla con un'altra avente lo stesso vettore e il punto di applicazione lungo la linea d'azione della forza originaria;
- (b) La **composizione** di due o più forze applicate nello stesso punto consiste nel sostituirla con una forza applicata nello stesso punto e avente come vettore il risultante delle forze di partenza;
- (c) La **decomposizione** di una forza consiste nel sostituirla con due o più forze applicate nello stesso punto e che abbiano come risultante il vettore della forza data.

Notiamo che tali operazioni non alterano il vettore risultante del sistema. Infatti esso è il vettore somma di tutti i vettori delle singole forze e non dipende dal punto di applicazione.

Mostriamo che esse non modificano neanche il momento risultante. Infatti:

Proposizione 2.2. *Le operazioni di scorrimento, composizione e decomposizione applicate ad una o più forze del sistema non ne alterano il momento risultante.*

2.2. Equivalenza dei sistemi di forze

Dimostrazione. Il momento risultante è la somma di tutti i momenti delle singole forze del sistema, che, come si è visto precedentemente, non vengono alterati dallo scorrimento della forza lungo la propria linea d'azione.

Supponiamo ora che due forze \vec{F}_1, \vec{F}_2 del sistema siano applicate nello stesso punto A_1 ; allora avremo

$$\begin{aligned}\Omega &= \vec{F}_1 \times (O - A_1) + \vec{F}_2 \times (O - A_1) + \cdots + \vec{F}_n \times (O - A_n) = \\ &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \times (O - A_1) + \cdots + \vec{F}_n \times (O - A_n).\end{aligned}$$

Poiché $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2, A_1)$ è la risultante delle forze (\vec{F}_1, A_1) e (\vec{F}_2, A_1) , si conclude che il momento risultante di un sistema di forze non si altera sostituendo alle forze applicate nello stesso punto la loro risultante, e analogamente nel caso inverso di decomposizione. \square

Abbiamo ottenuto dunque il seguente risultato:

Teorema 2.3. *Le operazioni elementari non alterano il vettore risultante e il momento risultante di un sistema di forze.*

2.2 Equivalenza dei sistemi di forze

Definizione 2.4. *Diremo che due sistemi di forze*

$$(\vec{F}_1, A_1), (\vec{F}_2, A_2), \dots, (\vec{F}_n, A_n), \quad (\vec{F}'_1, A'_1), (\vec{F}'_2, A'_2), \dots, (\vec{F}'_m, A'_m)$$

sono equivalenti quando, indicati con \vec{R} e $\vec{\Omega}$ il vettore risultante e il momento risultante, rispetto a un generico punto O , del primo sistema, e con \vec{R}' e $\vec{\Omega}'$ il vettore risultante e il momento risultante, rispetto allo stesso punto O , del secondo sistema, si ha:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}' \\ \vec{\Omega} = \vec{\Omega}' \end{cases} \quad (2.1)$$

Dal Teorema 2.3 si può affermare che *applicando le operazioni elementari ad un sistema di forze se ne ottiene sempre un altro equivalente.*

Notiamo inoltre il seguente importante risultato.

Proposizione 2.5. *Due sistemi equivalenti hanno momenti risultanti uguali per ogni punto dello spazio.*

2.3. Sistemi semplici

Dimostrazione. Infatti, sia O_1 un nuovo punto diverso da O , e siano $\vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}'_1$ i rispettivi momenti risultanti dei due sistemi rispetto al punto O_1 ; allora, per la legge di distribuzione dei momenti (1.1) si ha:

$$\vec{\Omega}_1 = \vec{\Omega} + \vec{R} \times (O_1 - O)$$

$$\vec{\Omega}'_1 = \vec{\Omega}' + \vec{R}' \times (O_1 - O).$$

Ma i sistemi sono equivalenti, dunque $\vec{R} = \vec{R}'$ e $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}'$, dunque

$$\vec{\Omega}_1 = \vec{\Omega}'_1.$$

□

Diamo ora la seguente definizione di equilibrio per un sistema di forze.

Definizione 2.6. *Un sistema di forze si dice in equilibrio se sono nulli il suo vettore e il suo momento risultante.*

Un'altra proprietà fondamentale è la seguente:

Proposizione 2.7. *L'insieme delle forze di un sistema e di quelle ottenute da un altro sistema equivalente, invertendo il verso delle forze, costituisce un sistema in equilibrio.*

Dimostrazione. Infatti il suo vettore risultante vale la differenza tra i vettori risultanti dei due sistemi equivalenti, dunque è nullo. Analogamente si annulla anche il momento risultante rispetto a qualsiasi punto. Quindi il sistema è in equilibrio. □

2.3 Sistemi semplici

Definizione 2.8. *Sono detti **sistemi semplici** i seguenti sistemi di forze:*

- una sola **forza**;
- una **coppia**.

Con **coppia** si intende un sistema formato da due forze di vettore opposto, ma con diversa linea d'azione.

Forza

Il più semplice sistema di forze è quello formato da *una sola forza* (\vec{F}, A) . Per tale sistema il *vettore risultante* è evidentemente uguale a \vec{F} e il *momento risultante* rispetto a un punto generico O vale

$$\vec{F} \times (O - A),$$

che è nullo solo nel caso in cui O sia sulla linea d'azione di \vec{F} .

Notiamo che i sistemi di una forza sola, o equivalenti a una forza \vec{F} , sono quelli che, cambiati di senso, la mantengono in equilibrio; cioè i sistemi che si ottengono facendo scorrere \vec{F} lungo la sua linea d'azione.

Più in dettaglio, due forze (\vec{F}, A) e (\vec{F}, B) sono *equivalenti* se e solo se hanno lo stesso momento, ossia

$$\vec{F} \times (O - A) = \vec{F} \times (O - B),$$

e pertanto se e solo se $\vec{F} \times (O - A) = 0$, che equivale a dire che \vec{F} è parallelo a $(A - B)$, cioè che B sta sulla linea d'azione di entrambe le forze. Vale quindi il seguente risultato:

Proposizione 2.9. *Un sistema di due forze dirette secondo rette sghembe non può essere equivalente a una forza sola.*

Dimostrazione. Infatti, se ciò avvenisse, le due forze date e quella loro equivalente, invertite di senso, dovrebbero essere in equilibrio, e perciò giacere sullo stesso piano, contro l'ipotesi che le due forze date abbiano linee d'azione sghembe. \square

Coppia

L'altro sistema semplice di forze è la *coppia*, formata da due forze (\vec{F}, A_1) , $(-\vec{F}, A_2)$ con diversa linea d'azione.

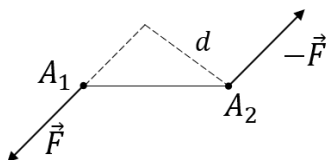


Figura 2.1: Coppia

Ovviamente il *vettore risultante* è nullo, perciò il *momento risultante* è uguale per tutti i punti dello spazio; lo chiameremo anche **momento della coppia** e lo indicheremo con $\vec{\Omega}$. Dunque otteniamo che:

Proposizione 2.10. *Il momento di una coppia vale il momento di una delle due forze rispetto al punto di applicazione dell'altra.*

In particolare, calcolando il momento rispetto a A_2 , si ha $\vec{\Omega} = \vec{F} \times (A_2 - A_1)$. Notiamo che, poiché la coppia si trova sullo stesso piano, il *momento di una coppia* è normale al piano delle due forze, detto anche **piano della coppia**; il *verso*, invece, è tale che un osservatore posto nel punto di applicazione di una forza e diretto secondo il momento vede l'altra forza andare da destra verso sinistra; infine, il *modulo* vale $|\vec{\Omega}| = |\vec{F}|d$, dove d è la distanza del punto di applicazione di una forza dall'altra o, in altre parole, la distanza tra le due linee d'azione, chiamata anche **braccio della coppia**.

Osservazione 2.11. Due coppie, avendo il vettore risultante nullo, saranno equivalenti quando avranno ugual momento $\vec{\Omega}$; esse perciò dovranno:

- giacere sullo stesso piano o su piani paralleli (perché devono sempre essere normali a $\vec{\Omega}$);
- avere ugual verso (cioè uguale il verso con cui una persona posta nel punto di applicazione di una delle forze vede andare l'altra forza)
- uguale il prodotto del braccio per l'intensità della forza.

E' facile vedere che:

Proposizione 2.12. *Dato un vettore $\vec{\Omega}$, esistono sempre infinite coppie che hanno tale vettore per momento.*

Dimostrazione. Sia infatti \vec{F} un vettore normale a $\vec{\Omega}$ e del resto arbitrario. Allora, per un teorema di calcolo vettoriale, esiste un vettore $(A_1 - A_2)$ tale che:

$$\vec{\Omega} = (A_1 - A_2) \times \vec{F} = \vec{F} \times (A_2 - A_1);$$

allora la coppia formata dalle forze (\vec{F}, A_1) , $(-\vec{F}, A_2)$ ha proprio il momento $\vec{\Omega}$. Questa coppia e tutte le sue equivalenti costituiscono le coppie che hanno per momento il vettore dato. \square

Inoltre si ottiene anche la seguente

Proposizione 2.13. *Consideriamo n coppie di momenti $\vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2, \dots, \vec{\Omega}_n$; esse equivalgono a un'unica coppia (detta **coppia risultante**) di momento*

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2 + \dots + \vec{\Omega}_n$$

Dimostrazione. Infatti, questa coppia ha uguale vettore risultante (nullo) e uguale momento risultante dell'insieme delle coppie date. Quindi le coppie si compongono sommando i loro momenti. \square

2.4 Teorema di riducibilità

Prima di enunciare il *Teorema di riducibilità* osserviamo che con l'uso delle coppie è possibile eseguire un'operazione, che può chiamarsi *il trasporto di una forza parallelamente a se stessa*.

Si abbia una forza (\vec{F}, A) . In un punto A' si aggiungono due forze uguali e contrarie \vec{F} e $-\vec{F}$ come in figura.

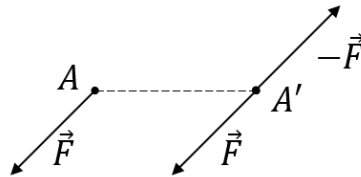


Figura 2.2: Aggiunta di due forze uguali e opposte

Ovviamente la forza (\vec{F}, A') e la coppia formata dalle altre due forze, è equivalente alla forza applicata in A . In questo modo, con l'opportuna aggiunta di una coppia, si può trasportare una forza parallelamente a se stessa.

Si può anche dimostrare che:

Proposizione 2.14. *Il sistema formato da una forza (\vec{F}, A) e da una coppia di momento $\vec{\Omega}$ normale alla forza equivale ad una forza ancora di vettore \vec{F} , ma applicata in un altro punto dello spazio.*

Dimostrazione. La coppia deve giacere in un piano qualunque normale a $\vec{\Omega}$, cioè un piano passante per la linea d'azione di \vec{F} ; può essere formata da due forze \vec{F} e $-\vec{F}$, con la forza $-\vec{F}$ applicata in A e \vec{F} applicata in un punto A' tale che sia

$$\vec{\Omega} = \vec{F} \times (A - A').$$

Il sistema allora è equivalente ad una sola forza applicata in A' e di vettore \vec{F} , come si vede in Figura 2.3.

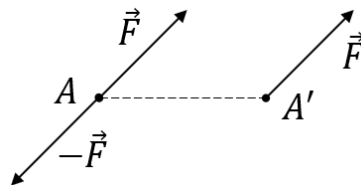


Figura 2.3: Forza e coppia con momento normale alla forza

2.4. Teorema di riducibilità

Ovviamente, poiché una forza si può far scorrere lungo la propria linea d'azione, esistono infiniti punti A' e tutti su una retta parallela alla \vec{F} in cui si può applicare la forza equivalente al sistema. \square

Dimostriamo ora il teorema fondamentale per la riduzione dei sistemi di forze:

Teorema 2.15. (Teorema di riducibilità)

Ogni sistema di forze equivale sempre a un sistema costituito da una forza e da una coppia.

Dimostrazione. Sia \vec{R} il vettore risultante del sistema, $\vec{\Omega}$ il suo momento risultante rispetto a un punto O . Consideriamo la forza di vettore $\vec{F} = \vec{R}$ applicata in O e una coppia di momento $\vec{\Omega}$.

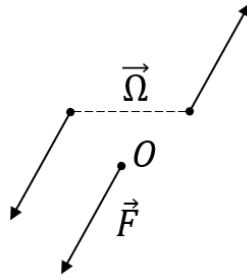


Figura 2.4: Sistema equivalente al sistema dato

Questo sistema ha come vettore risultante $\vec{F} = \vec{R}$ e come momento risultante, rispetto al punto O , il momento della coppia; quindi è equivalente al sistema dato. \square

Il punto O , che si chiama **centro di riduzione** del sistema, è arbitrario. Infatti, al variare della scelta di O , non varia l'intensità della forza; cambia invece la coppia, perché in sostanza si sposta la forza parallelamente a se stessa e quindi si aggiunge al sistema una nuova coppia. Si può dimostrare però che:

Proposizione 2.16. *Il centro di riduzione si può scegliere in modo che la forza e il momento della coppia risultino paralleli, o, in altre parole, che la coppia agisca in un piano normale alla forza.*

Dimostrazione. Sia $\vec{\Omega}$ il momento del sistema rispetto a O . Decomponiamo tale vettore in due $\vec{\Omega}_1$ e $\vec{\Omega}_2$, uno parallelo e l'altro normale a \vec{F} . Allora nel sistema con la forza in O e la coppia di momento $\vec{\Omega}$ decomponiamo quest'ultima in due di momento rispettivamente $\vec{\Omega}_1$ e $\vec{\Omega}_2$. Ora, la coppia di

2.4. Teorema di riducibilità

momento $\vec{\Omega}_2$ e la \vec{F} danno luogo, per la Proposizione 2.14, ad una sola forza uguale ancora a \vec{F} applicata in un altro centro di riduzione O' ; il sistema si riduce allora ad una forza e ad una coppia con momento parallelo alla forza. \square

Esistono infiniti punti O' con la proprietà citata nella Proposizione 2.16, cioè tutti quelli che giacciono sulla retta r passante per uno di essi e parallela alla \vec{F} .

Inoltre si ottiene anche un risultato più forte, cioè la seguente

Proposizione 2.17. *Scelto un centro di riduzione O' in modo che la forza e il momento della coppia risultino paralleli, allora solo i punti della retta r passante per O' e parallela alla \vec{F} continuano a soddisfare suddetta proprietà.*

Dimostrazione. Sappiamo che i punti della retta r soddisfano la proprietà richiesta; dobbiamo mostrare che non ce ne sono altri. Sia O_1 un punto esterno ad r ; prendiamo tale punto come centro di riduzione, consideriamo la forza (\vec{F}, O_1) e aggiungiamo alla coppia di momento $\vec{\Omega}_1$, l'altra di momento $\vec{\Omega}'$ normale a \vec{F} formata dalle forze (\vec{F}, O') e $(-\vec{F}, O_1)$.

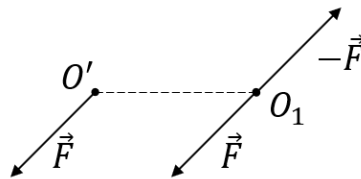


Figura 2.5: Aggiunta della coppia di momento Ω'

Allora quando il centro di riduzione è O_1 , la coppia ha momento $\vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}'$ non parallelo a \vec{F} . \square

Possiamo dunque concludere enunciando il seguente teorema:

Teorema 2.18. *Per ogni sistema di forze esiste una retta tale che i suoi punti (e soltanto questi punti) presi come centri di riduzione, determinano come sistema equivalente al dato una forza e una coppia con momento parallelo al vettore della forza.*

Da quanto visto nel capitolo precedente (Proposizione 1.13), l'asse centrale di un sistema di forze soddisfa questa proprietà; dunque, per unicità, tale retta è proprio l'asse centrale del sistema.

2.5 Sistemi a invariante nullo

Ricerchiamo ora sotto quali condizioni un sistema di forze equivale ad una sola coppia o a una sola forza.

Osserviamo innanzi tutto che in entrambi i casi l'invariante J è nullo. Infatti nel caso della coppia è nullo il vettore risultante \vec{R} , mentre nel caso della forza è nullo il momento rispetto al suo punto di applicazione.

Consideriamo quindi il caso particolare dei *sistemi a invariante nullo*, cioè tali che:

$$J = \vec{\Omega} \cdot \vec{R} = 0.$$

Si possono infatti presentare le seguenti possibilità:

- \vec{R} e $\vec{\Omega}$ non nulli e ortogonali tra loro. L'asse centrale in questo caso esiste e la componente del momento parallela al risultante $\vec{\mu}$ è nulla. *Il sistema equivale al vettore risultante applicato nel polo e ad una coppia di momento normale al risultante*, dunque per la Proposizione 2.14 equivale ad una forza sola. Questa situazione si verifica per i poli che non appartengono all'asse centrale;
- $\vec{R} = 0$. In questo caso l'asse centrale risulta non definito e *il sistema equivale alla sola coppia*, poiché naturalmente la forza è nulla.
- $\vec{\Omega} = 0$, $\vec{R} \neq 0$. Questa situazione si verifica per i poli appartenenti all'asse centrale: infatti sull'asse centrale il momento è uguale a μ , che per un sistema a invariante nullo è nullo e *il sistema equivale ad una sola forza*, avendo momento della coppia nullo.

Dunque, per un sistema a invariante nullo e di risultante non nullo, il momento rispetto a un polo non appartenente all'asse centrale è ortogonale all'asse centrale stesso ed è uguale al momento del vettore risultante rispetto a quel polo; invece, il momento rispetto a un polo appartenente all'asse centrale è nullo.

Abbiamo ottenuto quindi il seguente risultato.

Teorema 2.19. *Un sistema a invariante nullo e risultante non nullo è equivalente ad una forza sola.*

Un sistema a invariante e risultante nulli è equivalente ad una coppia.

Esistono due classi notevoli di *sistemi a invariante nullo*:

- (1) *sistemi piani*;
- (2) *sistemi di forze parallele*.

2.5.1 Sistemi piani

Definizione 2.20. *Un sistema di forze si dice **piano** quando le linee d'azione delle forze che lo compongono appartengono a uno stesso piano, che si dice **piano del sistema**.*

Scelto un polo O su questo piano, il momento di ciascuna forza del sistema sarà ortogonale alla forza stessa e al vettore del piano che congiunge il polo O con il punto di applicazione della forza. Di conseguenza anche il momento risultante risulta ortogonale al piano delle forze e quindi al loro risultante, che appartiene pure al piano essendo la somma delle forze del piano; oppure risulta nullo.

Di conseguenza l'invariante di un sistema di vettori piani è nullo. Si noti che se si sceglie un polo esterno al piano dei vettori, il nuovo momento non sarà più ortogonale al piano, pur rimanendo sempre ortogonale al risultante (poiché l'invariante deve rimanere nullo). Prendendo invece un polo sull'asse centrale il momento è nullo.

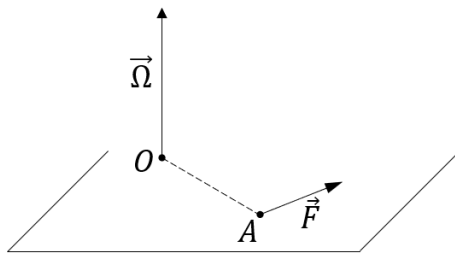


Figura 2.6: Il momento di un sistema piano è normale al piano o nullo

Inoltre, poiché un sistema piano ha invariante nullo, dal Teorema 2.19 deriva il seguente risultato.

Teorema 2.21. *Un sistema di forze in un piano è equivalente ad una sola forza, se il vettore risultante non è nullo, ad una sola coppia nel caso contrario.*

Vogliamo dare ora una rappresentazione cartesiana dell'asse centrale di un sistema piano; scegliamo dunque un sistema cartesiano ortogonale il cui piano xy coincide con il piano dei vettori.

Denotando con x, y e z gli indici relativi agli assi cartesiani, abbiamo le seguenti informazioni:

- il risultante è un vettore del piano xy , dunque $R_z = 0$;
- il momento risultante è ortogonale al piano, dunque $\Omega_x = 0$ e $\Omega_y = 0$;

2.5. Sistemi a invariante nullo

- l'invariante è nullo, dunque $\lambda = \frac{J}{R^2} = 0$.

Introducendo queste informazioni nelle equazioni parametriche (1.7) dell'asse centrale, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} z = 0 \\ \Omega_z + R_x y - R_y x = 0. \end{cases}$$

Dunque l'asse centrale risulta essere una retta del piano $z = 0$, che è il piano dei vettori, e parallela al vettore risultante.

2.5.2 Sistemi di forze parallele

Definizione 2.22. *Si dice che un sistema di forze è un **sistema di forze parallele** quando le linee d'azione di tutte le sue forze sono parallele.*

Anche l'invariante di un sistema di vettori paralleli è nullo; infatti il risultante ha la direzione comune di tutte le forze, mentre il momento di ogni forza è normale a ciascuna forza del sistema, e quindi il momento risultante è normale al risultante.

Dunque, anche in questo caso, il momento risulta essere nullo quando è calcolato rispetto a un punto dell'asse centrale scelto come polo.

Analogamente al caso precedente dunque, dal Teorema 2.19 si deduce il seguente

Teorema 2.23. *Un sistema di forze parallele equivale ad una forza sola se il vettore risultante è diverso da zero, ad una coppia se esso è uguale a zero.*

Per la determinazione delle equazioni cartesiane dell'asse centrale è conveniente scegliere il sistema cartesiano in modo che la direzione dell'asse z coincida con la direzione comune dei vettori paralleli. Abbiamo dunque le seguenti informazioni:

- il risultante ha solo la componente lungo l'asse z , dunque $R_x = 0$ e $R_y = 0$;
- il momento risultante è normale al risultante, dunque $\Omega_z = 0$;
- l'invariante è nullo, dunque $\lambda = 0$.

Dalle equazioni parametriche dell'asse centrale otteniamo dunque il sistema:

$$\begin{cases} \Omega_x = R_z y \\ \Omega_y = -R_z x \end{cases}$$

da cui deduciamo che l'asse centrale è proprio una retta parallela all'asse z , cioè al risultante.

Capitolo 3

Forze parallele e centro delle forze parallele

3.1 Sistema di due forze parallele

Analizziamo per prima cosa il caso più semplice di sistema di forze parallele, cioè un *sistema di due forze parallele*, che chiameremo (\vec{F}_1, A_1) e (\vec{F}_2, A_2) e che potranno avere:

- uguale verso (*cospiranti*);
- verso opposto (*non cospiranti*), ma con vettore risultante non nullo;

Non consideriamo il caso di due forze non cospiranti e con vettore risultante nullo; infatti esse avrebbero uguale intensità e formerebbero dunque una coppia, che è già un sistema semplice.

Forze cospiranti

Consideriamo due forze parallele cospiranti (\vec{F}_1, A_1) e (\vec{F}_2, A_2) ; poiché si tratta di forze parallele con vettore risultante non nullo, esse equivalgono, per il Teorema 2.23, ad una sola forza \vec{F} (detta *risultante*) rappresentata da un vettore uguale alla somma dei vettori delle altre due, cioè

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

E poiché le tre forze sono di ugual direzione e verso, si ha anche

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|. \quad (3.1)$$

Cerchiamo ora la *linea d'azione* della forza \vec{F} o, che è lo stesso, il suo punto di intersezione A con la retta A_1A_2 . Il momento di \vec{F} rispetto ad A è nullo

3.1. Sistema di due forze parallele

e perciò, poiché si tratta di sistemi equivalenti, deve essere nullo anche il momento di \vec{F}_1 e \vec{F}_2 rispetto ad A , ossia i momenti di \vec{F}_1 e di \vec{F}_2 rispetto ad A devono avere stessa intensità, ma verso opposto. Trattandosi di forze in un piano, questa condizione sarà soddisfatta quando i momenti di \vec{F}_1 e \vec{F}_2 sono uguali e di segno contrario. Perciò il punto A deve essere *interno* al segmento A_1A_2 (affinché un osservatore posto in A possa vedere le due forze andare in verso opposto); inoltre, se d_1 e d_2 sono le distanze di A da \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , deve essere

$$|\vec{F}_1|d_1 = |\vec{F}_2|d_2. \quad (3.2)$$

Chiamiamo ora α l'angolo in A formato dal segmento A_1A_2 e dal segmento d_1 , come in Figura 3.1.

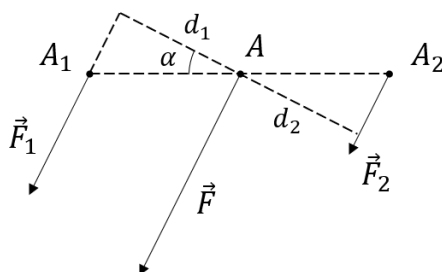


Figura 3.1: Riduzione di due forze parallele cospiranti

Dividiamo la (3.2) per $\cos \alpha$, ottenendo

$$|\vec{F}_1|AA_1 = |\vec{F}_2|AA_2,$$

ossia

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{AA_2}{AA_1}. \quad (3.3)$$

Deduciamo quindi il seguente

Teorema 3.1. *Due forze parallele cospiranti equivalgono ad una forza sola, parallela sempre alle due forze, avente*

- intensità uguale alla somma delle intensità delle due forze;
- verso uguale a quello delle due forze;
- linea d'azione passante per un punto interno al segmento congiungente i punti di applicazione delle forze e che divide tale segmento in parti inversamente proporzionali all'intensità delle due forze stesse.

3.1. Sistema di due forze parallele

Ovviamente, la forza \vec{F} si può applicare in qualunque punto della sua linea d'azione, però il punto A sul segmento A_1A_2 è determinato dall'intensità delle due forze, ma non dalla loro direzione. Il punto A si chiama perciò **centro delle forze parallele**, e non dipende dalla direzione delle forze. Infatti, in esso si può sempre applicare il vettore risultante, comunque si ruotino le forze, purché rimangano sempre parallele, della stessa intensità, e applicate negli stessi punti.

Forze non cospiranti

Consideriamo ora due forze parallele (\vec{F}_1, A_1) e (\vec{F}_2, A_2) non cospiranti, ma con vettore risultante $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ non nullo. Anche questo sistema di forze parallele, per il Teorema 2.23, equivale ad una forza sola $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Essa avrà *intensità* uguale alla differenza di intensità delle due forze, sarà *parallela* a queste e con *verso* della maggiore. Se A è l'intersezione della linea d'azione di \vec{F} con A_1A_2 , come nel caso precedente, il momento di una forza rispetto ad A deve essere uguale e contrario al momento dell'altra; A , in questo caso, deve essere *esterno* al segmento A_1A_2 , come in Figura 3.2.

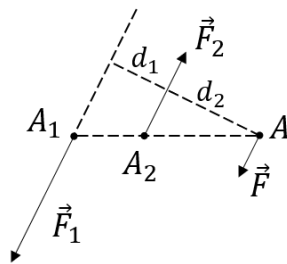


Figura 3.2: Riduzione di due forze non cospiranti

Inoltre, procedendo come nel caso delle forze concordi, si ottiene

$$\frac{A_1A}{A_2A} = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}_1|}, \quad (3.4)$$

da cui deduciamo il seguente

Teorema 3.2. *Due forze parallele non cospiranti equivalgono ad una forza sola, parallela anch'essa alle due forze, avente*

- *intensità uguale alla differenza delle intensità delle due forze;*
- *verso uguale a quello della forza maggiore;*

3.2. Sistema di n forze parallele

- *linea d'azione passante per un punto esterno al segmento congiungente i punti di applicazione delle forze e che divide tale segmento (esternamente) in parti inversamente proporzionali all'intensità delle due forze stesse.*

Anche in questo caso, comunque si ruotino le forze (purché rimangano parallele, con la stessa intensità e con lo stesso punto di applicazione), la risultante si può sempre applicare in A , che è perciò il **centro delle forze parallele**.

3.2 Sistema di n forze parallele

Si abbia ora un sistema di n forze parallele *cospiranti*. Esse equivalgono ad un'unica forza. Basta infatti comporre la prima con la seconda, il risultato così ottenuto con la terza e così via.

Se poi si ha un sistema di forze parallele, ma parte in un verso e parte nell'altro, si compongono quelle in un verso e poi quelle in verso opposto. Si otterranno così due forze parallele di verso opposto.

Se hanno uguale intensità, cioè se il vettore risultante è nullo, esse costituiscono una *coppia*; se la loro intensità è diversa, esse possono comporsi in *una forza sola*, confermando così quanto enunciato nel Teorema 2.23. Vale inoltre il seguente

Teorema 3.3. *Consideriamo un sistema di forze parallele; se il vettore risultante è diverso da zero, le forze ammettono un **centro** C , cioè un punto in cui non solo si può applicare la risultante delle forze, ma che resta invariato comunque si ruotino le forze, purché rimangano sempre parallele, con uguale intensità, e applicate negli stessi punti.*

Più precisamente, il *centro* è un punto dove si può applicare la risultante delle forze parallele e che è *indipendente dalla loro direzione*.

Dimostrazione. Per dimostrare l'*esistenza* del centro delle forze parallele basta, nel metodo di composizione appena trattato, applicare ciascuna risultante di due forze che si compongono nel loro centro; la risultante del sistema sarà così applicata in un punto indipendente dalla direzione delle forze, che è perciò il loro centro. \square

L'asse centrale del sistema sarà perciò la retta che passa per il centro e parallela alla direzione delle forze.

3.3 Centro delle forze parallele

Ricerchiamo ora analiticamente la posizione e le coordinate del centro C di un sistema di n forze parallele $(\vec{F}_1, A_1), (\vec{F}_2, A_2), \dots, (\vec{F}_n, A_n)$.

Detto \vec{a} un vettore unitario parallelo alle forze date, avremo

$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{a}, \quad \vec{F}_2 = F_2 \vec{a}, \quad \dots \quad \vec{F}_n = F_n \vec{a}, \quad (3.5)$$

dove F_1, F_2, \dots, F_n sono numeri che rappresentano i moduli delle forze se queste hanno il verso di \vec{a} ; i moduli con il segno cambiato, altrimenti.

Per l'esistenza del centro sarà innanzi tutto necessario supporre diverso da zero il vettore risultante del sistema. Avremo

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = (F_1 + F_2 + \dots + F_n) \vec{a} \neq 0,$$

ed essendo \vec{a} sempre diverso da zero, sarà

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n \neq 0.$$

Ora, se C è il centro delle forze parallele, il momento della forza equivalente al sistema rispetto a tale punto è nullo (poiché la forza equivalente si può applicare nel centro del sistema) e perciò dovrà essere nullo il momento risultante del sistema dato rispetto a C ; dovrà essere cioè

$$\vec{F}_1 \times (C - A_1) + \vec{F}_2 \times (C - A_2) + \dots + \vec{F}_n \times (C - A_n) = 0,$$

e per le (3.5) si ha

$$F_1 \vec{a} \times (C - A_1) + F_2 \vec{a} \times (C - A_2) + \dots + F_n \vec{a} \times (C - A_n) = 0,$$

che, raccogliendo \vec{a} , diventa

$$\vec{a} \times [F_1(C - A_1) + F_2(C - A_2) + \dots + F_n(C - A_n)] = 0.$$

Ora, per la definizione di centro, questo prodotto vettoriale deve essere uguale a zero indipendentemente dalla direzione delle forze, cioè qualunque sia la direzione del vettore \vec{a} , quindi potremo scrivere

$$F_1(C - A_1) + F_2(C - A_2) + \dots + F_n(C - A_n) = 0. \quad (3.6)$$

Per identificare la posizione del centro C , fissiamo arbitrariamente un sistema di coordinate $Oxyz$ e determiniamo il vettore $(C - O)$.

La (3.6) si può riscrivere come

$$F_1(C - O + O - A_1) + F_2(C - O + O - A_2) + \dots + F_n(C - O + O - A_n) = 0,$$

3.3. Centro delle forze parallele

da cui si ricava

$$(F_1 + F_2 + \cdots + F_n)(C - O) = F_1(A_1 - O) + F_2(A_2 - O) + \cdots + F_n(A_n - O).$$

Dividendo poi per $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$, per ipotesi non nullo, avremo

$$(C - O) = \frac{F_1(A_1 - O) + F_2(A_2 - O) + \cdots + F_n(A_n - O)}{F_1 + F_2 + \cdots + F_n}$$

e, più sinteticamente,

$$(C - O) = \frac{\sum_{s=1}^n F_s(A_s - O)}{\sum_{s=1}^n F_s}. \quad (3.7)$$

Poiché le componenti di $A_s - O$ sono le coordinate x_s, y_s, z_s di A_s , abbiamo per le coordinate x_c, y_c, z_c del centro C le espressioni

$$x_c = \frac{\sum_{s=1}^n F_s x_s}{\sum_{s=1}^n F_s}, \quad y_c = \frac{\sum_{s=1}^n F_s y_s}{\sum_{s=1}^n F_s}, \quad z_c = \frac{\sum_{s=1}^n F_s z_s}{\sum_{s=1}^n F_s}. \quad (3.8)$$

La forza equivalente al sistema delle n forze date ha vettore

$$(F_1 + F_2 + \cdots + F_n)\vec{a} = \vec{a} \sum_{s=1}^n F_s.$$

E' *parallela* dunque alle forze date, ha *modulo* uguale al modulo della somma algebrica delle F_s ed ha il *verso* di \vec{a} , o il verso opposto a seconda del segno della sommatoria $\sum_{s=1}^n F_s$.

Tale forza può essere applicata nel centro C , come si fa di solito, o in qualsiasi punto della retta passante per C e parallela alle forze date (asse centrale del sistema).

Supponiamo ora che le forze parallele siano tutte sullo stesso piano, che facciamo coincidere con il piano xy . Poiché allora tutte le componenti in direzione dell'asse z sono nulle, le (3.8) ci dicono che il centro delle forze giace anch'esso sul piano xy .

Siano poi tutte le forze nello stesso verso in modo da poter scegliere \vec{a} nello stesso verso delle forze e avere tutte le F_s positive. Inoltre, indichiamo con σ un'area limitata da una curva *convessa* (cioè ogni sua tangente lascia dalla stessa parte tutta la superficie racchiusa dalla curva) γ tale che i punti di applicazione delle forze siano tutti interni ad essa. Per tale sistema di forze vale il seguente risultato.

3.4. Decomposizione in forze parallele

Proposizione 3.4. *Anche il centro C delle forze è interno a σ .*

Dimostrazione. Sia, per assurdo, C esterno: esisterà in un punto O di γ una tangente alla stessa γ che lasci da una parte C e dall'altra σ .

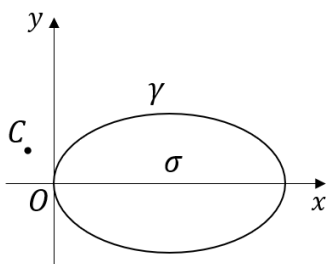


Figura 3.3: C esterno alla curva γ

Allora, si ponga in O l'origine degli assi, l'asse y tangente a γ , l'asse x diretto verso l'interno di σ ; ogni x_s sarà positiva, quindi, per la prima equazione di (3.8), sarà $x_C > 0$, mentre, se C fosse esterno, dovrebbe essere $x_C < 0$. Il centro è dunque interno a σ come si voleva dimostrare. \square

3.4 Decomposizione in forze parallele

Abbiamo visto come comporre due o più forze parallele in un'unica forza; vediamo ora il procedimento inverso, cioè come si possono *costruire due o tre forze parallele che abbiano come risultante la forza data*.

Decomposizione in due forze parallele

Consideriamo una forza (\vec{F}, A) ; la vogliamo decomporre in due forze parallele \vec{F}_1 e \vec{F}_2 applicate nei punti A_1 e A_2 complanari con la linea d'azione di \vec{F} e allineati con A come in Figura 3.4.

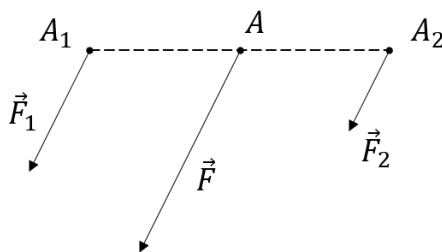


Figura 3.4: Decomposizione di \vec{F} in due forze parallele \vec{F}_1 e \vec{F}_2

3.4. Decomposizione in forze parallele

Supponiamo, per fissare le idee, che A sia interno al segmento A_1A_2 ; avremo quindi \vec{F}_1 e \vec{F}_2 nello stesso verso di \vec{F} e, per la (3.1) e la (3.3), sarà

$$F_1 + F_2 = F, \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{AA_2}{AA_1}, \quad (3.9)$$

dove con F_1 e F_2 si intendono i moduli di \vec{F}_1 e \vec{F}_2 .
Ma la seconda equazione di (3.9) si può scrivere

$$\frac{F_1}{F_1 + F_2} = \frac{AA_2}{AA_1 + AA_2},$$

da cui, per la prima equazione di (3.9), si ha

$$F_1 = \frac{AA_2}{A_1A_2} F, \quad F_2 = \frac{AA_1}{A_1A_2} F; \quad (3.10)$$

si ottengono così i moduli delle forze in cui si è decomposta \vec{F} .

In modo analogo si può studiare il caso in cui A sia esterno al segmento A_1A_2 .

Decomposizione in tre forze parallele

Vogliamo ora decomporre la forza (\vec{F}, A) in tre forze parallele tra loro, e quindi ad \vec{F} , applicate rispettivamente nei punti non allineati A_1, A_2, A_3 , complanari con A , ma non con \vec{F} .

Chiamiamo A' l'intersezione di AA_1 con A_2A_3 e decomponiamo \vec{F} in due forze \vec{F}_1 e \vec{F}' , applicate rispettivamente in A_1 e A' .

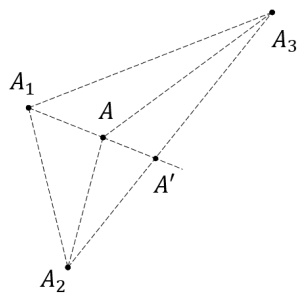


Figura 3.5: Costruzione di A'

Decomponiamo poi la \vec{F}' in \vec{F}_2 e \vec{F}_3 applicate in A_2 e A_3 ; in questo modo si sono costruite le tre forze applicate in A_1, A_2, A_3 , equivalenti a \vec{F} .

Se A è interno al triangolo $A_1A_2A_3$, allora A sarà interno ad A_1A' e A' sarà interno ad A_2A_3 , quindi le tre forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ avranno tutte lo stesso verso. Vale inoltre la seguente

3.4. Decomposizione in forze parallele

Proposizione 3.5. *Il sistema di forze ora costruito è l'unico (se formato da forza parallele e applicate in A_1, A_2, A_3) equivalente alla forza \vec{F} .*

Dimostrazione. Sia infatti $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \vec{F}'_3$, un altro sistema equivalente a \vec{F} ; allora le tre forze $\vec{F}_1 - \vec{F}'_1, \vec{F}_2 - \vec{F}'_2, \vec{F}_3 - \vec{F}'_3$, costituiranno un sistema in equilibrio, quindi dovranno essere complanari. Ma ciò è possibile solo se una delle tre forze è nulla. Restano allora due forze in equilibrio e con diversa linea d'azione, perciò devono essere nulle. Si conclude così che deve essere

$$\vec{F}_1 - \vec{F}'_1 = 0, \quad \vec{F}_2 - \vec{F}'_2 = 0, \quad \vec{F}_3 - \vec{F}'_3 = 0,$$

e dunque i due sistemi considerati sono uguali; cioè la forza si può decomporre in modo unico. \square

Calcoliamo ora i *moduli* di $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, supposto A interno a $A_1A_2A_3$. Per la (3.10), sostituendo A_2 con A' , otteniamo

$$F_1 = \frac{AA'}{A_1A'}F \tag{3.11}$$

e moltiplicando la frazione a secondo membro della (3.11) per $A_2A_3 \sin \alpha$, essendo $\alpha = \widehat{A_1A'A_2}$, si ha

$$F_1 = \frac{AA' \cdot A_2A_3 \sin \alpha}{A_1A' \cdot A_2A_3}F. \tag{3.12}$$

Indicando ora con T_1 e T le aree dei triangoli $AA_2A_3, A_1A_2A_3$, e con h_1 e h le loro altezze relative ad A_2A_3 , la (3.12) diventa

$$F_1 = \frac{A_2A_3 \cdot h_1}{A_2A_3 \cdot h}F = \frac{T_1}{T}F;$$

e perciò sarà, analogamente

$$F_2 = \frac{T_2}{T}, \quad F_3 = \frac{T_3}{T}F,$$

essendo T_2 e T_3 le aree dei triangoli AA_1A_3 e AA_1A_2 .

Capitolo 4

Applicazioni

In questo Capitolo si tratteranno alcune applicazioni dei risultati finora ottenuti. Si vedrà per prima cosa lo studio del *baricentro* di un corpo (pensato come centro di un sistema di forze parallele, cioè i pesi dei singoli punti); poi si tratterà un metodo grafico, detto metodo del *poligono funicolare*, per la riduzione di un sistema piano.

4.1 Baricentri

Consideriamo un qualsiasi corpo con una determinata massa. I pesi dei singoli punti materiali di cui è formato costituiscono un *sistema di forze parallele* (alla verticale), applicate ai punti stessi.

Definizione 4.1. *Si definisce **baricentro** G di un corpo il centro del sistema delle forze parallele costituito dai pesi dei punti del corpo stesso.*

Il peso del corpo è una forza che si immagina, di solito, applicata nel baricentro, però, per quanto visto nel Teorema 2.18, si può applicare in qualunque altro punto della sua linea d'azione, che è la verticale passante per il baricentro stesso (ed è l'asse centrale del sistema).

Se P_s è un punto generico del corpo, π_s il suo peso, N il numero dei punti del corpo, $\pi = \sum_{s=1}^N \pi_s$ il suo peso, il baricentro sarà dato dalla formula (3.7) con le dovute sostituzioni; cioè

$$(G - O) = \frac{\sum_{s=1}^N \pi_s (P_s - O)}{\sum_{s=1}^N \pi_s} \quad (4.1)$$

4.1. Baricentri

Assumiamo ora noto dalla Fisica il concetto di massa m e ricordiamo che il peso di un corpo vale $\pi = mg$, dove g è l'accelerazione di gravità; avremo dunque che, se m_s è la massa del punto P_s e $m = \sum_{s=1}^N m_s$ è la massa totale del corpo,

$$(G - O) = \frac{\sum_{s=1}^N m_s g (P_s - O)}{\sum_{s=1}^N m_s g} = \frac{\sum_{s=1}^N m_s (P_s - O)}{m}. \quad (4.2)$$

Come nel caso delle forze parallele, date x_s, y_s, z_s coordinate di P_s , le coordinate x_G, y_G, z_G del baricentro saranno

$$x_G = \frac{\sum_{s=1}^N m_s x_s}{m}, \quad y_G = \frac{\sum_{s=1}^N m_s y_s}{m}, \quad z_G = \frac{\sum_{s=1}^N m_s z_s}{m}. \quad (4.3)$$

Se G coincide con O , dalla (4.2) otteniamo la formula

$$\sum_{s=1}^N m_s (P_s - G) = 0,$$

oppure, se l'origine degli assi è posta in G , le x_G, y_G, z_G sono nulle e le (4.3) danno

$$\sum_{s=1}^N m_s x_s = 0, \quad \sum_{s=1}^N m_s y_s = 0, \quad \sum_{s=1}^N m_s z_s = 0,$$

formule utili soprattutto nella Dinamica.

4.1.1 Baricentri di corpi continui

Attraverso le formule ricavate, il calcolo del baricentro risulta facile se il corpo si può supporre composto di un numero *finito* e non troppo elevato di punti materiali. Ma per corpi continui il numero di punti è infinito, dunque conviene sostituire la formula (4.2) con un'altra equivalente, considerando la materia non concentrata in punti materiali, ma distribuita con continuità nello spazio occupato dal corpo.

Sia allora dv un elemento infinitesimale del corpo, dm la massa contenuta in dv . Potremo scrivere, se immaginiamo la materia distribuita in dv , che dm è proporzionale a dv , cioè

$$dm = \rho dv$$

dove ρ è la cosiddetta *densità* del corpo nel punto P centro dell'elemento dv . Ovviamente, la massa m del corpo vale la somma delle masse infinitesime dm

4.1. Baricentri

contenute in un suo elemento dv . Trattandosi però di una somma di quantità infinitesime, alla sommatoria si dovrà sostituire un integrale e si avrà

$$m = \int_v \rho \, dv.$$

E' ovvio che, se il corpo è *omogeneo*, ρ è uguale in tutti i suoi punti. Quindi possiamo scrivere

$$m = \rho \int_v dv = \rho v,$$

da cui:

$$\rho = \frac{m}{v}$$

cioè, *la densità di un corpo omogeneo è il rapporto tra la sua massa e il suo volume.*

Detto ciò, procediamo nel cercare la formula del baricentro di un corpo. Dividiamo dunque il suo volume in elementi infinitesimi dv : consideriamoli come un insieme di punti P ognuno di massa ρdv . Allora, sostituendo nella (4.2) ρdv a m_s e alla sommatoria il simbolo di integrale, si ha

$$(G - O) = \frac{\int_v \rho(P - O) \, dv}{\int_v \rho \, dv} = \frac{\int_v \rho(P - O) \, dv}{m}. \quad (4.4)$$

Se il corpo è omogeneo, ρ è costante, e si ha allora

$$(G - O) = \frac{\rho \int_v (P - O) \, dv}{\rho \int_v dv} = \frac{\int_v (P - O) \, dv}{v}. \quad (4.5)$$

Abbiamo dunque la seguente

Proposizione 4.2. *Il baricentro di un corpo omogeneo non dipende dalla sua densità, ma solo dalla forma e dalle dimensioni, cioè dal suo volume.*

Si chiama perciò baricentro di un volume v il baricentro di un corpo omogeneo che occupa quel volume e la sua posizione è data dalla formula (4.5).

Inoltre, dalla (4.4) si ottengono subito le coordinate del baricentro:

$$x_G = \frac{\int_v \rho x \, dv}{\int_v \rho \, dv}, \quad y_G = \frac{\int_v \rho y \, dv}{\int_v \rho \, dv}, \quad z_G = \frac{\int_v \rho z \, dv}{\int_v \rho \, dv} \quad (4.6)$$

Se poi il corpo è omogeneo, ρ scompare dal secondo membro delle (4.6) e si ottengono le coordinate del baricentro di volume.

4.1.2 Teoremi per il calcolo del baricentro

Il calcolo del baricentro mediante le formule appena scritte viene ricondotto alla determinazione di integrali. Enunciamo alcuni teoremi utili per conoscere il baricentro senza dover risolvere alcun integrale.

Teorema 4.3. *Se un corpo di volume v si suddivide in due parti, di volumi v_1 e v_2 , di masse m_1 e m_2 , di baricentri G_1 e G_2 , il baricentro G del corpo è il baricentro delle due masse m_1 e m_2 concentrate nei punti G_1 e G_2 .*

Dimostrazione. Indichiamo con P_s i punti del corpo, in modo che i punti di v_1 siano quelli per $s = 1, \dots, r-1$ e i punti di v_2 quelli con $s = r, \dots, N$. Dunque, si ha, ricordando la (4.2)

$$\begin{aligned} (G - O) &= \frac{\sum_{s=1}^N m_s(P_s - O)}{m} = \frac{\sum_{s=1}^{r-1} m_s(P_s - O) + \sum_{s=r}^N m_s(P_s - O)}{m} = \\ &= \frac{m_1(G_1 - O) + m_2(G_2 - O)}{m}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

□

Dal Teorema (4.3) si ha un'importante conseguenza.

Corollario 4.4. *Se il corpo ha un piano di simmetria h , il baricentro giace in questo piano.*

Dimostrazione. Dividiamo il corpo mediante il piano di simmetria: otteniamo due volumi v_1 e v_2 simmetrici, perciò di uguale massa $\frac{m}{2}$ e con baricentri G_1 e G_2 anch'essi simmetrici. Allora, posto O sull'intersezione del segmento G_1G_2 con h , avremo $(G_1 - O) = -(G_2 - O)$ quindi, per la (4.7),

$$(G - O) = 0,$$

cioè il baricentro coincide col punto O e si trova perciò sul piano di simmetria. □

Osservazione 4.5. Notiamo che, se un corpo possiede due piani di simmetria, il baricentro sarà sulla retta di intersezione dei due piani, in particolare sarà u un'asse di simmetria.

Se poi il corpo ha tre piani di simmetria, non passanti per la stessa retta, il baricentro è nella loro intersezione.

Applichiamo ora questi teoremi per ricavare i baricentri di alcuni corpi:

4.2. Il poligono funicolare

- una *sfera omogenea* ha infiniti piani di simmetria passanti per il suo centro, dunque come baricentro ha il centro stesso;
- un *ellissoide omogeneo* ha tre piani di simmetria diametrali ortogonali passanti per il suo centro, quindi anch'esso ha come baricentro il suo stesso centro;
- un *parallelepipedo omogeneo* ha il baricentro nel punto di intersezione dei suoi piani diagonali, quindi anch'esso nel suo centro.

4.2 Il poligono funicolare

Abbiamo visto che un sistema di forze in un piano ha invariante nullo e dunque, per il Teorema 2.21, equivale a una sola forza oppure ad una sola coppia. Vogliamo ora indicare un procedimento, detto **metodo del poligono funicolare**, che la cosiddetta *statica grafica* insegna per la costruzione di quella forza o coppia (per maggiori dettagli si veda il testo di Belluzzi [4]).

Consideriamo dunque un sistema di forze piane

$$(\vec{F}_1, A_1), (\vec{F}_2, A_2), (\vec{F}_3, A_3), \dots, (\vec{F}_n, A_n)$$

Nel metodo che tratteremo sarà per prima cosa necessario costruire il **poligono delle forze**. Tale poligono si ottiene disegnando tutte le forze del sistema in successione *testa-coda* in qualsiasi ordine a partire da un punto qualsiasi B_0 del piano, detto *punto iniziale*, fino ad arrivare al *punto finale* B_n .

Siano B_0, B_1, \dots, B_n i vertici della poligonale. Per costruzione sarà

$$B_1 - B_0 = \vec{F}_1; \quad B_2 - B_1 = \vec{F}_2; \quad \dots \quad B_i - B_{i-1} = \vec{F}_i; \quad \dots \quad B_n - B_{n-1} = \vec{F}_n$$

Ovviamente $B_n - B_0$ rappresenta il vettore risultante del sistema.

Definizione 4.6. *Quando i punti iniziale e finale B_0 e B_n sono distinti, il poligono delle forze si dice **aperto** e il vettore risultante è diverso da zero. Quando invece i punti iniziale e finale B_0 e B_n coincidono, il poligono delle forze si dice **chiuso** e in tal caso il vettore risultante è nullo.*

Per semplicità, nelle figure illustrative che seguono (Figura 4.1 e Figura 4.2), consideriamo un sistema formato da quattro forze. Costruiamo il poligono delle forze e procediamo con la costruzione del poligono funicolare:

- Sia O un punto (che chiameremo *polo*) esterno al poligono delle forze e congiungiamolo con i vertici B_0, B_1, \dots, B_n ;

4.2. Il poligono funicolare

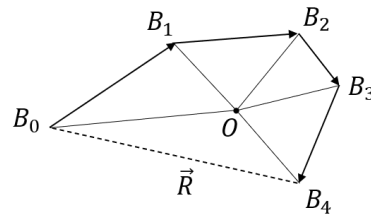


Figura 4.1: Poligono delle forze

- Tracciamo per un punto C_1 , arbitrariamente scelto sulla linea d'azione della forza \vec{F}_1 , la parallela alla retta OB_1 , fino ad incontrare in C_2 la linea d'azione della forza \vec{F}_2 ;

Notiamo che il punto C_2 esiste sempre: infatti, nell'ipotesi contraria, la C_1C_2 sarebbe parallela a \vec{F}_2 e alla B_1B_2 , il che è assurdo poiché abbiamo scelto O esterno al poligono delle forze.

- Dal punto C_2 tracciamo la parallela alla retta OB_2 fino a incontrare in C_3 la linea d'azione della forza \vec{F}_3 ;
- Continuiamo a procedere in questa maniera fino a tracciare dal punto C_{n-1} della linea d'azione della forza \vec{F}_{n-1} la parallela alla retta OB_{n-1} , che incontra in C_n la linea d'azione dell'ultima forza \vec{F}_n ;
- Tiriamo infine dai punti C_1 e C_n due rette r_0 e r_n parallele rispettivamente a OB_0 e a OB_n ;

Supponiamo ora di avere il *poligono delle forze chiuso*; dunque il risultante è nullo, $B_0 = B_n$ e le rette r_0 e r_n sono parallele: esse ci forniscono una utile indicazione a proposito della coppia cui equivale il nostro sistema.

Supponiamo invece di avere un *poligono delle forze aperto*; dunque il vettore risultante non è nullo e il punto B_0 sarà distinto da B_n ; dunque le rette OB_0 e OB_n (come pure le r_0 e r_n) non saranno parallele.

- Sia dunque C il punto intersezione delle rette r_0 e r_n ; in esso si può applicare la risultante \vec{F} del sistema.

4.2. Il poligono funicolare

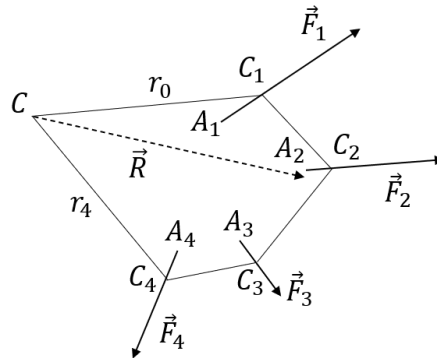


Figura 4.2: Costruzione del poligono funicolare

Dimostriamo tale affermazione;

Supponiamo che il poligono delle forze, aperto, sia costruito a distanza finita. Si noti che il vettore $B_1 - B_0$, uguale a \vec{F}_1 , vale la somma vettoriale di $O - B_0$ e $B_1 - O$;

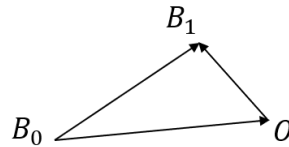


Figura 4.3: $(B_1 - B_0) = (O - B_0) + (B_1 - O)$

se ora facciamo scorrere la forza \vec{F}_1 lungo la sua linea d'azione fino a portarla con la sua origine nel punto C_1 e la decomponiamo secondo la direzione C_1C e C_1C_2 , otterremo due vettori \vec{F}_a e \vec{F}_b rispettivamente, non solo paralleli, ma anche uguali ai vettori $O - B_0$ e $B_1 - O$.

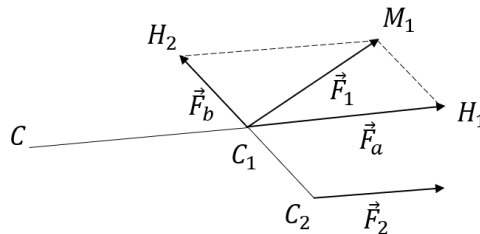


Figura 4.4: Decomposizione di \vec{F}_1

Infatti per i moduli e direzione basta osservare i triangoli B_0B_1O e $C_1M_1H_1$, uguali perché hanno $B_0B_1 = C_1M_1$ e gli angoli uguali, essendo i lati corri-

4.2. Il poligono funicolare

spondenti paralleli; dunque:

$$H_1M_1 = C_1H_2 = OB_1, \quad C_1H_1 = B_0O.$$

Per quanto riguarda i versi basta osservare che coincidono i versi dei vettori \vec{F}_1 e $B_1 - B_0$. Allora potremo, nel nostro sistema, sostituire a \vec{F}_1 due forze \vec{F}_a e \vec{F}_b , uguali ai vettori $O - B_0$ e $B_1 - O$, applicate nel punto C_1 ; facciamo poi scorrere \vec{F}_b lungo la sua linea d'azione, fino a poterla applicare nel punto C_2 e componiamola con la \vec{F}_2 , che avremo portata anch'essa in C_2 .

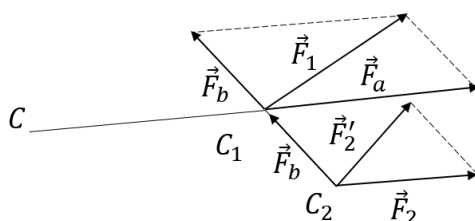


Figura 4.5: Composizione di \vec{F}_b e \vec{F}_2

Otterremo una forza \vec{F}'_2 applicata nel punto C_2 , rappresentata da un vettore uguale a $B_2 - O$. Ciò avviene perché \vec{F}'_2 è la somma vettoriale di \vec{F}_b e \vec{F}_2 , uguali il primo a $B_1 - O$ e il secondo a $B_2 - B_1$.

La forza \vec{F}'_2 ha per linea d'azione la retta C_2C_3 ; con un opportuno scorrimento la si porti ad avere C_3 come punto di applicazione. Si componga poi \vec{F}_3 (portata anch'essa ad avere l'origine in C_3) con \vec{F}'_2 ; si otterrà, ripetendo il ragionamento precedente, una forza \vec{F}'_3 rappresentata da un vettore uguale a $B_3 - O$, applicato nel punto C_3 .

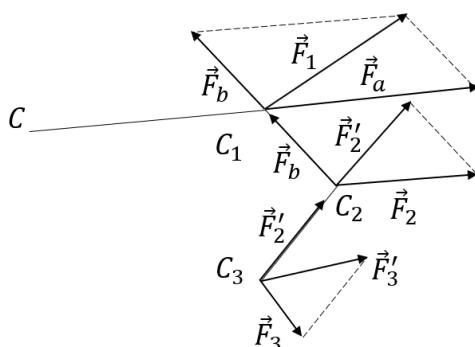


Figura 4.6: Composizione di \vec{F}'_2 e \vec{F}_3

Proseguendo in tal modo il sistema dato si riduce a un sistema di due sole forze, di cui una è la \vec{F}_a , il cui vettore corrispondente è uguale a $O - B_0$, e

4.2. Il poligono funicolare

l'altra è la \vec{F}'_n , che potremo indicare con un vettore uguale a $B_n - O$. Le loro linee d'azione sono dunque evidentemente r_0 e r_n ; applicandole nel punto C comune a tali due rette e componendole, si otterrà un vettore uguale a $B_n - B_0$, che rappresenta perciò la forza equivalente al sistema dato. Essa potrà venire applicata in un qualsiasi punto della retta passante per C e parallela al vettore $B_n - B_0$, cioè al vettore risultante del sistema.

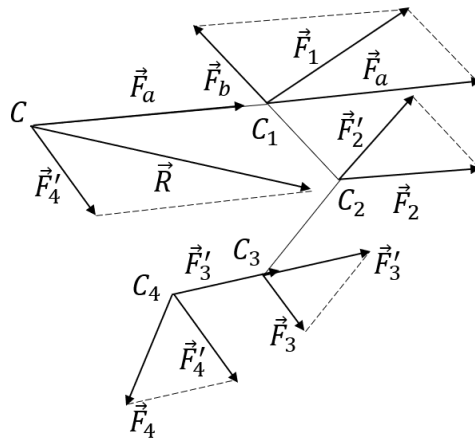


Figura 4.7: Composizione di \vec{F}'_3 e \vec{F}_4 e successiva composizione di \vec{F}'_4 e \vec{F}_a

Abbiamo dunque dimostrato che nel punto C , ottenuto mediante la costruzione ora esposta, può essere applicata la forza equivalente al sistema dato. Se il poligono dei vettori è *chiuso*, B_0 coincide con B_n e il punto C va all'infinito; allora i vettori \vec{F}_a e \vec{F}'_n , che sono uguali a $O - B_0$ e $B_n - O$ rispettivamente, sono uguali e contrari, senza avere la medesima linea d'azione. Essi, portati sulle rette r_0 e r_n , parallele, costituiscono la coppia cui equivale il sistema dato.

Al poligono $CC_1C_2 \dots C_n$ si dà il nome di **poligono funicolare**.

Capitolo 5

Conclusioni e analogia con gli stati cinetici del corpo rigido

La trattazione finora è stata svolta con applicazione alle forze, ma può essere generalizzata alla teoria dei vettori applicati. Tutti i risultati visti si possono quindi estendere a sistemi di vettori applicati, di cui un sistema di forze è una possibile applicazione. Un'ulteriore applicazione è quella relativa agli stati cinetici di un corpo rigido. Richiamiamo quindi alcune nozioni dalla Cinematica per approfondire la stretta analogia che si crea tra tali stati cinetici e i sistemi di forze.

5.1 Richiami sul corpo rigido

Ricordiamo per prima cosa la definizione di *corpo rigido*.

Definizione 5.1. *Un corpo rigido \mathcal{C} è un corpo tale che, presi due suoi punti qualsiasi, essi hanno distanza costante; cioè*

$$\forall P, Q \in \mathcal{C} \quad |P - Q| = \text{costante}.$$

Per conoscere il moto di un corpo rigido è sufficiente conoscere la sua configurazione nello spazio a un dato istante $t_0 \in \mathbb{R}$ e il moto di tre suoi punti non allineati.

Introduciamo un sistema di riferimento *solidale* con il corpo rigido \mathcal{C} , cioè un sistema di riferimento rispetto al quale \mathcal{C} è fermo, chiamiamo O_1 la sua origine e $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ i suoi versori ortogonali.

Ricordiamo quindi il seguente

Teorema 5.2. *Dato un corpo rigido \mathcal{C} , esiste un unico vettore $\vec{\omega}$ tale che*

$$\begin{cases} \frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_1 \\ \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}_1 \\ \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}_1 \end{cases} \quad (5.1)$$

*Esso è chiamato **vettore di Poisson** (o **velocità angolare**) del corpo rigido.*

Ricordiamo inoltre la **formula fondamentale della cinematica rigida**, che ci da informazioni sulla velocità di un punto P del corpo rigido:

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) + \vec{\omega} \times (P - O_1), \quad (5.2)$$

dove con $\vec{v}(P)$ e $\vec{v}(O_1)$ si intendono le velocità dei punti P e O_1 .

5.2 Analogia con gli stati cinetici del corpo rigido

Richiamiamo ora le definizioni dei tre stati cinetici del corpo rigido: *traslazione*, *rotazione* e *rototraslazione* e notiamo che anch'esse possono essere viste come vettori applicati, permettendo così di osservare un'analogia con quanto trattato finora.

Definizione 5.3. *Si dice che, in un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$, un corpo rigido si muove di **moto di traslazione** se e solo se*

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) \quad \forall P, O_1 \in \mathcal{C}.$$

*Se tale condizione si verifica in un preciso istante t si parlerà di **stato cinetico di traslazione**.*

Definizione 5.4. *Si dice che, in un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$, un corpo rigido si muove di **moto di rotazione** se e solo se $\forall t \in [t_1, t_2] \exists A, B \in \mathcal{C}$ tali che*

$$\vec{v}(A) = \vec{v}(B) = 0.$$

*Se tale condizione si verifica in un preciso istante t si parlerà di **stato cinetico di rotazione**.*

Se due punti sono fissi, allora sono fissi anche tutti i punti della retta che li congiunge; quindi, scegliendo O_1 su questa retta, la (5.2) diventa

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \times (P - O_1), \quad \forall P \in \mathcal{C}. \quad (5.3)$$

Definizione 5.5. *Se in ogni istante $t \in [t_1, t_2]$ esiste $O_1 \in \mathcal{C}$ tale che $\vec{v}(O_1) \parallel \vec{\omega}$, si parla di **moto di rototraslazione** (o **elicoidale**).*

Se tale moto si verifica in un preciso istante t si parlerà di **stato cinetico di rototraslazione**.

Osservazione 5.6. Per avere uno stato cinetico di traslazione è necessario e sufficiente che sia $\vec{\omega} = 0$. Per avere uno stato cinetico di rotazione è necessario e sufficiente che esista $O_1 \in \mathcal{C}$ tale che $\vec{v}(O_1) = 0$. Pertanto la traslazione e la rotazione possono essere considerati casi particolari della rototraslazione.

Ricordiamo ora il seguente importante risultato.

Teorema 5.7. (Teorema di Mozzi)

Un corpo rigido in moto generico passa in ogni istante per uno stato cinetico di rototraslazione.

Infatti, se osserviamo la (5.2), notiamo che il primo termine al secondo membro, essendo indipendente da P , rappresenta uno stato cinetico di traslazione, il secondo uno stato cinetico di rotazione. Inoltre, l'asse dello stato cinetico di rototraslazione in cui passa in ogni istante un corpo rigido prende il nome di **asse di Mozzi**.

Osservazione 5.8. La (5.3) ci dice che in uno stato cinetico di rotazione, la velocità di un punto del corpo rigido è il momento rispetto al punto di un vettore applicato $(\vec{\omega}, O_1)$ che definisce la rotazione.

Dalla Dinamica si ha inoltre che *lo stato cinetico di traslazione equivale alla somma di due stati cinetici di rotazione con velocità angolare di modulo uguale e di verso opposto*. Dunque abbiamo che:

- uno *stato cinetico di rotazione* è definito da un vettore applicato analogo a una *forza*;
- uno *stato cinetico di traslazione* è definito da due vettori applicati analoghi ad una *coppia*.

Ovviamente, come per le forze, anche i vettori applicati che rappresentano gli stati cinetici si può parlare di *vettore e momento risultanti*. Basta infatti sostituire nelle Definizioni 1.4 e 1.5 alle forze quei vettori applicati. Allora due sistemi di stati cinetici rappresentati da opportuni vettori applicati si diranno *equivalenti* quando hanno uguale vettore e ugual momento risultante rispetto allo stesso punto.

Dunque, come un sistema di forze è equivalente ad una forza e ad una coppia con momento parallelo alla forza, ogni sistema di stati cinetici è equivalente

5.2. Analogia con gli stati cinetici del corpo rigido

ad un solo stato cinetico di rotazione sommato ad uno stato cinetico di traslazione in direzione parallela all'asse istantaneo di rotazione. L'*asse di Mozzi* dello stato cinetico di rototraslazione che ne consegue corrisponde all'*asse centrale* di un sistema di forze.

Osservazione 5.9. Notiamo ora un'ulteriore analogia; ricordiamo la definizione di *invariante* di un sistema di forze (Definizione 1.2):

$$J = \vec{\Omega} \cdot \vec{R}.$$

Nella Cinematica si definisce invece l'**invariante cinematico**:

$$I = \vec{v}(O_1) \cdot \vec{\omega}.$$

Esso si chiama invariante perché non dipende dalla scelta del punto O_1 nel corpo rigido, così come l'invariante di un sistema di forze non dipende dalla scelta del polo rispetto al quale viene calcolato il momento $\vec{\Omega}$.

Come condizione affinché un sistema di forze sia equivalente ad una sola coppia o ad una sola forza avevamo trovato che deve essere $J = 0$. Analogamente, uno stato cinetico generico è equivalente a una traslazione o a una rotazione se e solo se $I = 0$. In particolare notiamo che tali stati cinetici hanno entrambi invariante nullo: la traslazione ha $\vec{\omega} = 0$ e la rotazione ha $\vec{v}(O_1) = 0$ se O_1 è il punto fisso.

Escludendo il caso banale in cui $\vec{\omega}$ e $\vec{v}(O_1)$ sono entrambi nulli (stato cinetico nullo), si possono presentare le seguenti possibilità:

- $\vec{\omega} = 0$. In questo caso il corpo si trova in uno stato cinetico di *traslazione*. Nei sistemi di forze, questo corrisponde al caso $\vec{\Omega} = 0$, equivalente ad una *coppia*;
- $\vec{v}(O_1) = 0$. In questo caso il corpo si trova in uno stato cinetico di *rotazione*. Nei sistemi di forze, questo corrisponde al caso $\vec{R} = 0$, equivalente ad *una sola forza*;
- $\vec{v}(O_1)$ e $\vec{\omega}$ non nulli e ortogonali tra loro. Questa situazione si verifica ancora per uno stato cinetico di *rotazione*. Nei sistemi di forze, questo corrisponde al caso in cui \vec{R} e $\vec{\Omega}$ sono non nulli e ortogonali tra loro, equivalente ad una *coppia*.

Invece, se $I \neq 0$, il corpo si trova in ogni istante in uno stato cinetico di *rototraslazione*.

Bibliografia

- [1] D. Graffi - *Elementi di Meccanica Razionale* - Patron Editore, Bologna, 1973.
- [2] A. Strumia - *Meccanica Razionale* - Nautilus, II ed, Bologna, 1996 - <http://www.albertostrumia.it/meccanica-razionale-parte-I>.
- [3] P. Veronesi, E. Fuschini - *Fondamenti di Meccanica Classica* - Cooperativa Libraiia Universitaria Editrice, II ed, Bologna, 1977.
- [4] O. Belluzzi - *Scienza delle Costruzioni* - Zanichelli, Bologna.