

Peti susret Hrvatskog društva za mehaniku
Terme Jezerčica, Donja Stubica, 6.-7. lipnja 2013.

ANALIZA PULSIRAJUĆEG STRUJANJA U CIJEVI

Korade, I., Virag, Z. & Korbar, R.

Sažetak: U radu je izvedeno analitičko rješenje za slučaj pulsirajućeg laminarnog, nestlačivog strujanja u okrugloj cijevi pod djelovanjem poznatog gradijenta tlaka (zadanog harmonijskom funkcijom). Bezdimenzijsko rješenje ovisi o bezdimenzijskom Womerslyjevom broju, koji označuje omjer inercijske i viskozne sile. Analiziran je utjecaj Womerslyjeva broja na protok i smično naprezanje na stijenci cijevi. Zaključuje se da su pri niskim vrijednostima Womerslyjeva broja (kad je utjecaj viskoznosti veći) sile tlaka uravnotežene uglavnom viskoznim silama, a pri visokim vrijednostima Womerslyjeva broja uravnotežene uglavnom inercijskim silama. Povećanjem Womerslyjeva broja dolazi do smanjenja amplituda smičnog naprezanja i protoka.

Cljučne riječi: strujanje u cijevi, pulsirajuće strujanje, Womerslyjev broj

1 UVOD

Strujanje krvi u krvožilnom sustavu je izrazito pulsirajućeg karaktera. Krvne žile su elastične odnosno viskoelastične cijevi, promjenjivog promjera i fizikalnih svojstava stijenke, te zbog toga ne postoji analitičko rješenje toga problema. Za objašnjavanje pulsirajućeg strujanja u velikim arterijama u hemodinamici se najčešće koristi analitičko rješenje koje je još davne 1955. godine izveo Womersly [1] za strujanje fluida pod djelovanjem harmonijskog gradijenta tlaka. To rješenje se zasniva na pojednostavljenom matematičkom modelu u kojem je pretpostavljena beskonačno velika brzina širenja tlačnih poremećaja (teorija krutog stupca) što ne odgovara stvarnosti. Bez obzira na tu činjenicu model može objasniti prirodu pulsirajućeg strujanja i pulsacije smičnog naprezanja na stijenci cijevi [2, 3], pri čemu se pretpostavka o konačnoj brzini širenja tlačnih poremećaja može naknadno uvesti u analizu.

Prednost pojednostavljenog modela leži u činjenici da on predstavlja linearnu diferencijalnu jednadžbu, što omogućuje princip superpozicije. Na taj način se s pomoću Womerslyjeva rješenja mogu analizirati i stvarno izmjereni vremenski profili brzine i tlaka, na način da se signali prikažu Fourierovim redom, te se analizira svaka frekvencija za sebe.

U literaturi se može pronaći Womerslyjevo rješenje za sinusnu promjenu gradijenta tlaka, a u slučaju primjene Fourierove analize, pojavljuje se i kosinusna komponenta. Cilj ovoga rada je izvesti Womerslyjevo rješenje za slučaj obje komponente pulsirajućeg gradijenta tlaka, te sačiniti računalni program za računanje brzine, protoka i smičnog naprezanja na stijenci u funkciji parametara krvne žile. Ovaj program će činiti osnovu za analizu pulsirajućih veličina u stvarnom krvotoku.

2 MATEMATIČKI MODEL

Nestlačivo strujanje fluida u krutoj cijevi polumjera R , pod djelovanjem harmonijskog gradijenta tlaka zadanog jednačbom:

$$\frac{dp}{dx} = S \sin(\omega t) + C \cos(\omega t), \quad (1)$$

uz zanemarenje konvekcijskog člana opisano je jednačbom količine gibanja, koja glasi:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) - \frac{dp}{dx}. \quad (2)$$

U gornjim jednačbama su: r , x – radijalna i aksijalna koordinata cilindarskog koordinatnog sustava, t – vremenska koordinata, $p(x, t)$ – polje tlaka, ω – kružna frekvencija, S i C – amplitude gradijenta tlaka, ρ – gustoća fluida, $u(r, t)$ – aksijalna brzina i μ – viskoznost fluida. Ovaj model pretpostavlja beskonačnu brzinu širenja tlačnih poremećaja, pa zato aksijalna brzina nije funkcija x koordinate. S druge strane, tlak nije funkcija r koordinate. Uz zadani gradijent tlaka jednačba (2) daje jednoznačno rješenje za aksijalnu brzinu uz sljedeće rubne uvjete: za $r = 0$: $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ i

za $r = R$: $u = 0$.

Množenjem jednačbe (2) brzinom u dobije se jednačba kinetičke energije, koja glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} \right) = \mu \frac{u}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{dp}{dx} u, \quad (3)$$

gdje svaki član ima dimenziju snage po jedinici volumena, a član na lijevoj strani označuje brzinu promjene kinetičke energije (snagu inercijske sile), dok članovi na desnoj strani označuju, redom, snagu viskozne sile (brzinu pretvorbe mehaničke energije u toplinu) i snagu sile tlaka.

3 ANALITIČKO RJEŠENJE

Jednačbu (2) ćemo riješiti u frekvencijskoj domeni, pri čemu ćemo gradijent tlaka prikazati pomoću kompleksne amplitude (fazora): $\hat{P} = S + iC$, gdje je $i = \sqrt{-1}$. U tom slučaju izraz (1) se može prikazati realnim dijelom izraza:

$$\frac{dp}{dx} = \mathcal{Re} \left\{ -i\hat{P}e^{i\omega t} \right\}. \quad (4)$$

Rješenje za aksijalnu brzinu ćemo pretpostaviti u obliku [1]:

$$u(r, t) = \mathcal{Re} \left\{ \hat{U}(r) e^{i\omega t} \right\}. \quad (5)$$

Uvrštavanjem izraza (3) i (4) u jednačbu (2) slijedi diferencijalna jednačba:

$$\frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{U}}{\partial r} - \frac{i\rho\omega}{\mu} \hat{U} = -\frac{i\hat{P}}{\mu}, \quad (6)$$

čiji homogeni dio označuje Besselovu jednadžbu [4, 5]. Rješenje jednadžbe (6) je oblika:

$$\hat{U} = \frac{\hat{P}}{\rho\omega} + CJ_0\left(r\sqrt{\frac{\rho\omega}{\mu}}e^{\frac{3\pi_i}{4}}\right), \quad (7)$$

Gdje je C konstanta integracije, $J_0(z)$ označuje Besselovu funkciju prve vrste, nultog reda, a z je kompleksni broj. Uvođenjem bezdimenzijskog Womerslyjevog broja Wo , bezdimenzijskog radijusa y , brzine u_0 , te parametra Λ prema izrazima:

$$Wo = R\sqrt{\frac{\rho\omega}{\mu}}, \quad y = \frac{r}{R}, \quad u_0 = \left|\frac{\hat{P}}{4\mu}\right| \frac{R^2}{4\mu} \quad \text{i} \quad \Lambda = Wo e^{\frac{3\pi_i}{4}}, \quad (8)$$

te primjenom rubnih uvjeta dobije se konačno rješenje za aksijalnu brzinu koje glasi:

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_0} = \mathcal{Re}\left\{\frac{\hat{P}}{|\hat{P}|} \frac{4}{Wo^2} \left[1 - \frac{J_0(\Lambda y)}{J_0(\Lambda)}\right] e^{i\omega t}\right\} \quad (9)$$

Protok fluida kroz poprečni presjek cijevi $Q = \int_0^R 2\pi ur dr$, definiran je izrazom:

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{u_0 R^2 \pi} = \mathcal{Re}\left\{\frac{\hat{P}}{|\hat{P}|} \frac{8i}{Wo^4} \left[-\frac{Wo^2 i}{2} - \frac{\Lambda J_1(\Lambda)}{J_0(\Lambda)}\right] e^{i\omega t}\right\}, \quad (10)$$

a smično naprezanje na stijenci cijevi $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R}$ definirano je izrazom:

$$\tilde{\tau}_w = \frac{\tau_w}{\mu \frac{u_0}{R}} = \mathcal{Re}\left\{4 \frac{\hat{P}}{|\hat{P}|} \frac{e^{\frac{3\pi_i}{4}} J_1(\Lambda)}{Wo J_0(\Lambda)} e^{i\omega t}\right\} \quad (11)$$

U izrazima (10) i (11) $J_1(z)$ označuje Besselovu funkciju prve vrste, prvog reda, koju se može jednostavno izračunati u programskom paketu Matlab, ili s pomoću algoritama danih u [4]. Za izračun vrijednosti brzine, protoka i smičnih naprezanja u ovom se radu koristi programski paket Matlab. Jednom kad se odredi polje brzine, mogu se numeričkom integracijom jednadžbe (3) po presjeku, odrediti snage pojedinih sila, tako da je snaga P_p sile tlaka i snaga P_i inercijske sile:

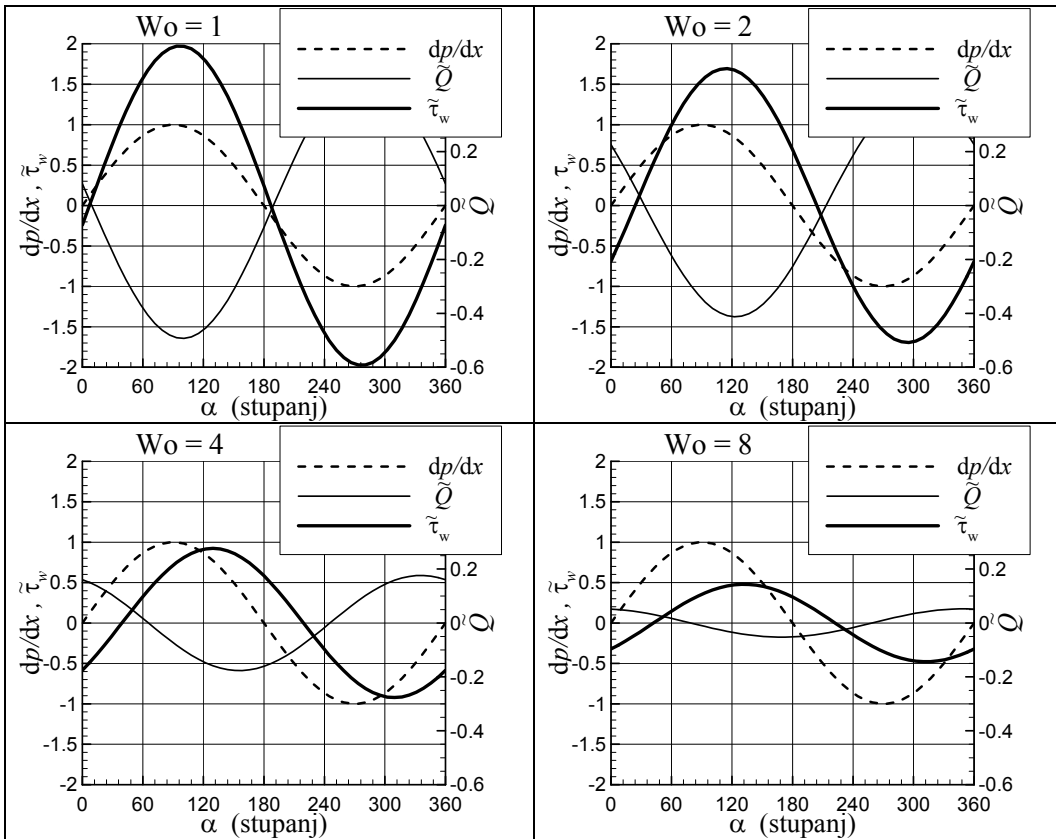
$$\tilde{P}_p = \frac{P_p}{|\hat{P}| u_0 R^2 \pi} = -\frac{1}{|\hat{P}|} \frac{dp}{dx} \tilde{Q} \quad (12) \quad \tilde{P}_i = \frac{P_i}{|\hat{P}| u_0 R^2 \pi} = \frac{\rho u_0}{|\hat{P}|} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 y \tilde{u}^2 dy, \quad (13)$$

a snaga viskoznih sila

$$\tilde{P}_\mu = \frac{P_\mu}{|\hat{P}| u_0 R^2 \pi} = \frac{2\mu u_0}{|\hat{P}| R^2} \int_0^1 y \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right) dy. \quad (14)$$

4 ANALIZA RJEŠENJA

Iz rješenja postavljenog problema je jasno da će brzina strujanja fluida zavisiti od gradijenta tlaka i Womerslyjeva broja. Ovdje ćemo u svim primjerima imati isti gradijent tlaka (zadan sa $S=1 \text{ Pa/m}$ i $C=0$), a mijenjat ćemo vrijednosti Womerslyjeva broja pri čemu on poprima vrijednosti: $Wo=1, 2, 4$ i 8 . Rezultati proračuna (bezdimenzijski protok, prema jednadžbi (9) i bezdimenzijsko smično naprezanje prema jednadžbi (10)) su prikazani na slici 1 u funkciji kuta $\alpha = \omega t$ (za jedan period).



Sl. 1. Promjena protoka i smičnog naprezanja unutar jednog perioda, za različite Wo brojeve

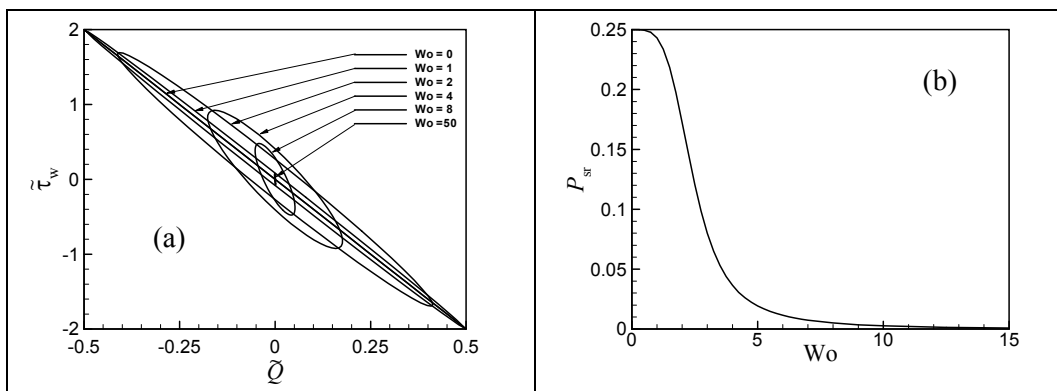
Fizikalno je jasno da Womerslyjev broj označuje odnos inercijske sile (uslijed lokalnog ubrzanja) i viskozne sile, pa će niske vrijednosti Wo broja označavati veliki utjecaj viskoznosti (ili mali utjecaj inercijskih sila), dok će visoke vrijednosti Wo broja označavati mali utjecaj viskoznosti (ili veliki utjecaj inercijskih sila). Prema tome može se očekivati da će kod niskih vrijednosti Wo broja u ravnoteži biti sile tlaka i viskozne sile (jer se inercijske sile mogu zanemariti), dok će kod visokih vrijednosti Wo broja u ravnoteži biti sile tlaka i inercijske sile.

Kao što je vidljivo iz slike 1, pri $Wo=1$, u fazi su gradijent tlaka i smično naprezanje, što označuje ravnotežu sila tlaka i viskoznih sila, dok je kod $Wo=8$ očit fazni pomak protoka u odnosu na gradijent tlaka od približno 90° , što ukazuje da su u fazi sile tlaka i inercijske sile (jer inercijske sile odgovaraju vremenskoj derivaciji protoka, a

vremenska derivacija protoka je za 90° pomaknuta u odnosu na sam protok). Slučaj kada Wo teži k nuli, odgovara stacionarnom režimu strujanja, u kojem je amplituda bezdimenzijske vrijednosti smičnog naprezanja jednaka 2, a amplituda bezdimenzijskog protoka jednaka 0,5. Očito je da s povećanjem Wo broja (uz zadani promjer cijevi i svojstva fluida, to znači s povećanjem frekvencije ω) dolazi do smanjivanja amplitude smičnih naprezanja i amplitude protoka, što je vidljivo i iz slike 2(a). Jasno je da je rad inercijske sile unutar jednog takta jednak nuli, pa je prosječna snaga te sile jednaka nuli. Iz toga slijedi da se prosječna snaga sile tlaka

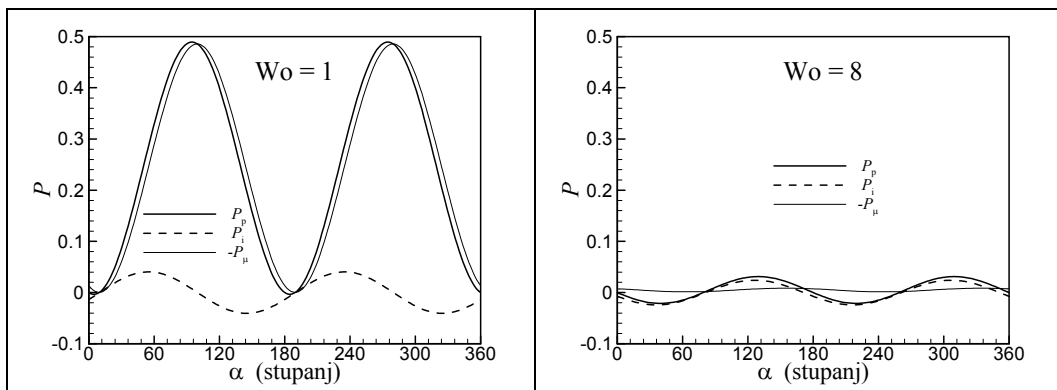
$$P_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T P_p dt, \text{ troši isključivo na svladavanje viskozne sile, tj. da se disipira u toplinu.}$$

Slika 2(b) prikazuje promjenu te snage s Wo brojem, a očito je da porastom Wo broja ta snaga teži k nuli (zbog smanjenja amplituda protoka i smičnog naprezanja).



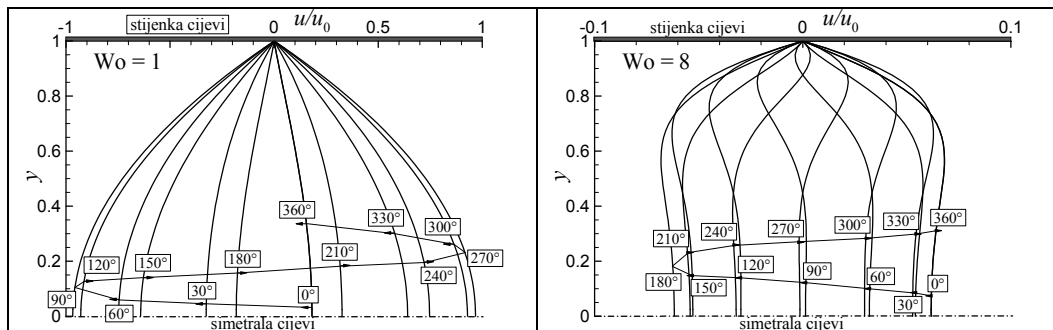
Sl. 2. (a) Zavisnost smičnog naprezanja na stijenci o protoku kroz cijev, (b) Zavisnost prosječno disipirane snage od Wo broja

Slika 3 prikazuje promjene snage sile tlaka, inercijske sile i viskozne sile za $Wo=1$ i $Wo=8$. Očito je kod niskog Wo broja snaga viskozne sile približno jednaka snazi sile tlaka, što znači da se gotovo sva snaga sile tlaka disipira u toplinu, dok kod visokog Wo broja snaga inercijske sile slijedi snagu sile tlaka, a snaga viskozne sile teži k nuli.



Sl. 3. Promjena snaga sile tlaka, inercijske sile i viskozne sile za dva različita Wo broja

Slika 4 prikazuje profile aksijalne brzine za dva Wo broja. Ponovno se uočava da je pri nižem Wo broju amplituda brzine veća.



Sl. 4. Promjena profila brzine unutar jednog perioda, za dva različita Wo broja

5 ZAKLJUČAK

U radu je prikazano analitičko rješenje pulsirajućeg, laminarnog, nestlačivog strujanja u okrugloj cijevi pod djelovanjem zadanog gradijenta tlaka (zadanog sinusnom i kosinusnom komponentom koja se može pojaviti pri razvoju funkcije gradijenta tlaka u Fourierov red). Ilustriran je utjecaj Womerslyjeva broja na brzinu, protok i smično naprezanje na stijenci cijevi. Zaključeno je da su pri niskim vrijednostima Womerslyjeva broja sile tlaka uravnotežene uglavnom viskozim silama, a pri visokim vrijednostima Womerslyjeva broja inercijskim silama. Povećanjem Womerslyjeva broja dolazi do smanjenja amplituda smičnog naprezanja i protoka. Prikazano rješenje će u daljnjem radu biti dobra osnova za analizu stvarnog strujanja krvi u cirkulacijskom sustavu.

Literatura:

- [1] Womersley, J.R., "Method for the Calculation of Velocity, Rate of Flow and Viscous Drag in Arteries when the Pressure Gradient is Known, J. Phys.. No.127, 1955, str. 553-563.
- [2] Nichols, W.W.; O'Rourke, M.F.: McDonald's Blood Flow in Arteries, (5th ed.) Oxford Univ. Press, New York, USA, 2005.
- [3] Westerhof, N; Stergiopulos, N.; Noble, M.I.M: Snapshots of Hemodynamics, (2nd ed.) Springer, New York, USA, 2010.
- [4] Shanjie, Z., Jianming, J.: "Computation of Special Functions", John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 1996, str. 126-201.
- [5] Web stranica: <http://mathworld.wolfram.com/BesselDifferentialEquation.html>

Autori:

Ivan Korade, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01/6168166, fax 01/6156940, e-mail: ivan.korade@fsb.hr,
 Zdravko Virag, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01/6168137, fax 01/6156940, e-mail: zdravko.virag@fsb.hr,
 Radoslav Korbar, Veleučilište u Karlovcu, Ivana Meštrovića 10, 47000 Karlovac, e-mail: rkorbar@vuka.hr.