

Šesti susret Hrvatskoga društva za mehaniku
Rijeka, 29-30. svibnja 2014.

PROCJENA MOGUĆNOSTI MJERENJA LOKALNIH PARAMETARA VISKOELASTIČNE ARTERIJSKE STIJENKE

Korade, I., Virag, Z. & Krizmanić, S.

Sažetak: Analizirane su tri moguće metode za određivanje parametara Voigtova modela arterijske stijenke na temelju mjerenja vremenske promjene dvije veličine u poprečnom presjeku arterije. Prva metoda zahtijeva mjerenje tlaka i površine poprečnog presjeka, druga tlaka i prostorne derivacije protoka, a treća protoka i prostorne derivacije površine poprečnog presjeka. Metode su uspoređene na način da su se umjesto mjerenja koristili rezultati numeričke simulacije u koje je uvedena slučajna pogreška s ciljem oponašanja realnih mjerenja. Zaključeno je da je prva metoda najmanje osjetljiva na pogrešku mjerenja, a najlošija je treća.

Cljučne riječi: Hemodinamika, Arterijsko stablo, Metoda mjerenja parametara modela stijenke

1 UVOD

Jedna od prepreka široj primjeni jednodimenzijских modela strujanja krvi u arterijskom stablu je nepoznavanje lokalnih svojstava stijenke arterija. Poznato je da velike arterije pokazuju svojstvo viskoelastičnosti. U slučaju Voigtova modela arterijska stijenka je karakterizirana s popustljivošću (elastičnošću) arterijske stijenke, i viskoznošću (otporom) stijenke. U nedostatku mjernih metoda za neinvazivno mjerenja viskoznosti stijenke najčešće se pretpostavlja čisto elastična priroda stijenke. Ovdje će se analizirati mogućnost mjerenja parametara viskoelastične stijenke.

U radu će se koristiti rezultati simulacije strujanja krvi u arterijskom stablu dobiveni rješavanjem jednodimenzijskog matematičkog modela temeljenog na Voigtovoj konstitutivnoj relaciji. Izračunate vrijednosti protoka, tlaka i površine poprečnog presjeka cijevi, te vrijednosti njihovih prostornih derivacija, će se uzimati za mjerene vrijednosti. Analizirat će se iz koje kombinacije mjerenih vrijednosti će se moći najtočnije rekonstruirati traženi parametri Voigtova modela. Uvođenjem slučajne pogreške u „mjerene“ rezultate, ocijenit će se osjetljivost metoda za određivanje parametara arterijske stijenke.

2 SIMULACIJA STRUJANJA KRVI U VELIKIM ARTERIJAMA

2.1 Matematički model jednodimenzijskog strujanja krvi

Problem jednodimenzijskog strujanja krvi u velikim arterijama je opisan sljedećim sustavom jednažbi [1]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

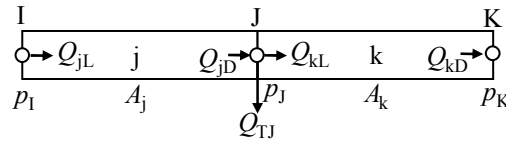
$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(Qv)}{\partial x} = -fQ, \quad (2)$$

$$p - p_0 = \frac{1}{C}(A - A_0) + \eta \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (3)$$

gdje su: x i t prostorna i vremenska koordinata, p je tlak, Q je protok, A je površina poprečnog presjeka arterije ($A=D^2\pi/4$), v je prosječna brzina po presjeku ($v=Q/A$), C je površinska popustljivost arterijske stijenke ($C=dA/dp$), η je otpor stijenke, ρ je gustoća fluida, f je faktor trenja, ovdje definiran Hagen-Poiseuilleovim zakonom $f=32\mu/(\rho D^2)$, a μ je viskoznost fluida. A_0 označuje konstantnu vrijednost površine A pri tlaku $p = p_0$.

2.2 Metoda karakteristika za rješavanje jednodimenzijuskog modela

Matematički model, opisan sustavom jednažbi od (1) do (3), efikasno se rješava numeričkom metodom karakteristika. Za potrebe te metode arterijsko stablo se podijeli na određeni broj elemenata duljine Δx , na čijim se rubovima nalaze čvorovi. Slika 1. prikazuje dva susjedna elementa (označena sa **j** i **k**) koja su omeđena čvorovima **I**, **J** i **K**. Vrijednosti tlaka su definirane u čvorovima, površina A poprečnog presjeka elementa se definira u sredini elementa (i smatra se konstantnom duž elementa duljine Δx), a protoci Q se definiraju na oba ruba svakog elementa. Na taj način se uz svaki element pamte četiri varijable. Na primjer, nepoznanice koje se odnose na element **j** su: tlak p_j , protok na lijevom rubu Q_{jL} , i desnom Q_{jD} te površina A_j , kao što je prikazano na slici 1. Detaljan opis metode je dan u [2].



Sl.1: Prikaz dijela diskretiziranog arterijskog stabla s rasporedom varijabli.

2.3 Simulacija mjerenih rezultata

Rezultate simulacije dobivene opisanom metodom će se koristiti umjesto mjerenih podataka, temeljem kojih će se određivati parametri C i η arterijske stijenke. S obzirom da u stvarnim mjerenjima uvijek postoji pogreška u dobivene rezultate simulacije ćemo uvesti slučajnu pogrešku (primjenom generatora slučajnih brojeva) u obliku:

$$p^M = p + \Delta p_{\max} (2r - 1), \quad (4)$$

gdje je p^M simulirani tlak s unesenom pogreškom, p je tlak dobiven iz simulacije, Δp_{\max} maksimalna pogreška tlaka, a r slučajni broj u intervalu nula do jedan. Analogno se uvode pogreške i u rezultate za Q i A . S obzirom da su u numeričkoj metodi p i Q definirani na rubu elementa, a površina na sredini elementa, p i Q u sredini elementa će se definirati kao aritmetička sredina vrijednosti s ruba, a parcijalne derivacije na sredini elementa (npr. elemenata **j**, prema slici 1), definiraju se izrazima:

$$\frac{\partial p^M}{\partial x} = \frac{p_j^M - p_l^M}{\Delta x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial Q^M}{\partial x} = \frac{Q_{jD}^M - Q_{jL}^M}{\Delta x}, \quad (5)$$

3 METODE MJERENJA SVOJSTAVA ARTERIJSKE STIJENKE

3.1 Metode određivanja svojstava arterijske stijenke

Cilj je definirati postupak određivanja popustljivosti C i otpora η arterijske stijenke, koji se direktno pojavljuju u jednadžbi (3). Jasno je da se iz simultanog mjerenja vremenske promjene tlaka i vremenske promjene površine poprečnog presjeka arterije mogu odrediti ova dva parametra. Iz jednadžbe (3) je jasno da za slučaj $\eta = 0$, tlak i površina moraju biti u fazi, te bi se C mogao odrediti iz mjerenih signala tlaka i promjene površine kao nagib pravca u p - A ravnini (npr. primjenom metode najmanjih kvadrata). U slučaju kada postoji otpor stijenke, signali tlaka i vremenske promjene površine su povezani linearnom diferencijalnom jednadžbom, te je problem pogodno promatrati u frekvencijskoj domeni. U tom pristupu se vremenski signal tlaka i površine razvijaju u Fourierov red:

$$p(t) = \sum_{n=0}^N [S_n^p \sin(n\omega_0 t) + C_n^p \cos(n\omega_0 t)], \quad (6)$$

gdje koeficijenti Fourierova reda čine fazor tlaka u kompleksnom prostoru $\hat{p}_n = S_n^p + iC_n^p$ na kružnoj frekvenciji $\omega = n\omega_0$, gdje n označuje redni broj harmonika, a $\omega_0 = 2\pi/T$ osnovnu kružnu frekvenciju definiranu periodom T srčanog takta.

Analogno se može definirati i fazor $\hat{A}_n = S_n^A + iC_n^A$ iz mjerenog signala vremenske promjene površine A . Temeljem jednadžbe (3) se može definirati **1. metoda** za određivanje C i η , na osnovu mjerenja p i A (ovdje ne ulazimo u raspravu kako bi se to mjerilo) u jednom presjeku, koja glasi:

$$\frac{1}{C} + i\omega\eta = \frac{\hat{p}}{\hat{A}}, \quad \text{gdje je } \omega = n\omega_0, \text{ a } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

Teorijski gledano vrijednosti C i η bi trebale biti jedne te iste na svim frekvencijama, što naravno u mjerenjima neće biti slučaj. Može se ili definirati neka srednja vrijednost iz vrijednosti dobivenih na različitim frekvencijama, ili vrijednost dobivenu na osnovnoj frekvenciji proglasiti za najtočniju vrijednost, budući da se na višim frekvencijama može očekivati sve veći utjecaj slučajne pogreške.

2. metoda se može izvesti iz vremenski derivirane jednadžbe (3) u koju se uvrsti jednadžba (1), te se dobije:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{C} \frac{\partial Q}{\partial x} - \eta \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x}, \quad (8)$$

ili u frekvencijskoj domeni

$$\frac{1}{C} + i\omega\eta = -\frac{i\omega\hat{p}}{\frac{\partial \hat{Q}}{\partial x}} \quad \text{gdje je } \omega = n\omega_0, \text{ a } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9)$$

Jasno je da u ovoj metodi treba mjeriti tlak i prostornu derivaciju protoka (protok u dvije točke ili razliku protoka u dvije bliske točke).

3. metoda se dobije iz jednačbe (3), derivirane po prostornoj koordinati, nakon što se u nju uvrsti pojednostavljena jednačba (2) (sa zanemarenim trenjem i konvekcijskim članom) koja glasi:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{A_0}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

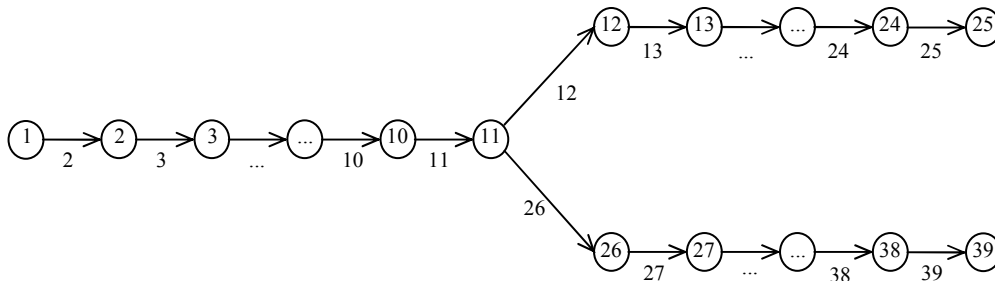
Gledano u frekvencijskoj domeni, dobije se:

$$\frac{1}{C} + i\omega\eta = -\frac{\rho}{A_0} \frac{i\omega\hat{Q}}{\frac{\partial \hat{A}}{\partial x}} \quad \text{gdje je } \omega = n\omega_0, \text{ a } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (11)$$

Jasno je da su se pri izvodu prve dvije metode koristile originalne jednačbe jednodimenzijuskog modela, dok se kod ove metode koristila pojednostavljena jednačba (2).

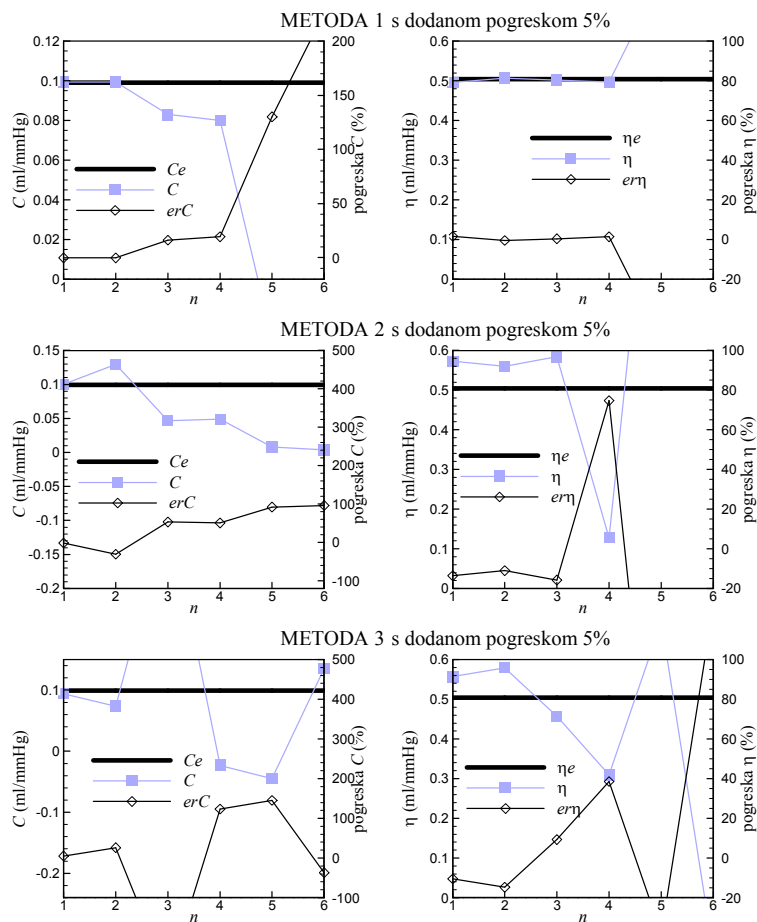
4 USPOREDBA METODA

Primjenom opisane metode simulirano je strujanje fluida u račvastoj cijevi, koja je shematski prikazana na slici 2.



Sl. 2: Shematski prikaz elemenata račvaste cijevi

Cijev je podijeljena na 38 elemenata duljine $\Delta x = 6$ cm. Prvih deset elemenata je jednolike površine $A_0 = 5$ cm² (na pretlaku $p_0 = 0$), a poprečni presjek granajućih cijevi je $A_1 = 3$ cm². Na ulazu u cijev (čvor 1), propisan je protok, oblika polusinusnog vala trajanja $T/3$ ($T = 0,3$ s) amplitude 50 ml/s. Na izlazima iz cijevi (u čvorovima 25 i 39), zadan je otpor $R_{25} = 1$ mmHg·s/ml i $R_{39} = 3$ mmHg·s/ml. U proračunu su parametri C i η stijenske cijevi zadani indirektno konstantnom brzinom širenja vala $c_w = 10$ m/s, pri čemu je $C = A / (\rho \cdot c_w^2)$ i vremenskom konstantom $\tau = C \cdot \eta = 0,05$ s. Treba primijetiti da je uz konstantni c_w parametar C vremenski promjenjiv jer se mijenja površina A , a onda je uz konstantni τ promjenjiv i parametar η . Međutim, s obzirom da su vremenske promjene površine A male, promjene parametara će se zanemariti. Period integracije ovog problema je $10T$, a za simulaciju mjerenja se uzimaju rezultati na petom elementu i to iz zadnjeg perioda integracije, kada se postiglo ustaljeno oscilirajuće strujanje u cijevi.



Sl. 3. Vrijednosti parametara C i η u funkciji rednog broja harmonika, rekonstruiranih s tri metode, pri čemu je u simuliranom signalu uvedena pogreška 5 %.

Tablica 1. prikazuje vrijednosti zadanih (točnih) parametara C i η izračunatih pri srednjoj površini poprečnog presjeka A_0 . U istoj tablici su dane rekonstruirane vrijednosti tih parametara primjenom triju metoda, te njihovo odstupanje od točnih vrijednosti i to za dva slučaja: bez uvođenja slučajne pogreške u rezultat simulacije i s pogreškom od 5 %. Slika 3. prikazuje rezultate za slučaj uvedene pogreške od 5 %. Jasno je da u slučaju da u signalu nema pogreške sve tri metode vrlo dobro rekonstruiraju vrijednosti parametara C i η (vrijednosti relativne pogreške za η su za prva tri harmonika ispod 1 %, jedino treća metoda pokazuje malo veće odstupanje parametra C na višim harmonicima). Kad se u „mjereni signal“ uvede pogreška od 5%, očito je da sve metode na višim harmonicima rekonstruiraju parametre stijenke sa znatnijim odstupanjem. Pa ipak prve dvije metode daju dobre rezultate na prvom harmoniku.

Tablica 1. Vrijednosti rekonstruiranih parametara stijenske, temeljem simulacije i pogreška u odnosu na zadane (točne) vrijednosti pri A_0 , te odstupanja u odnosu na točne vrijednosti, $erC=100(Ce- C)/Ce$, $er\eta=100(\etae- C)/\etae$

	n	Točno		Bez uvođenja pogreške				Uvedena pogreška od 5 %			
		100 Ce	ηe	100 C	erC	η	er η	100 C	erC	η	er η
Metoda 1	1	9.91	0.504	9.95	-0.366	0.502	0.559	10.03	-1.15	0.501	0.626
	2			9.93	-0.203	0.504	0.081	10.35	-4.38	0.500	0.779
	3			9.90	0.160	0.508	0.687	8.88	10.5	0.514	-1.87
	4			9.78	1.325	0.515	-2.00	14.1	-42.5	0.613	-21.5
	5			10.1	-1.81	0.517	-2.52	822	-8189	0.478	5.29
	6			10.1	-1.84	0.529	-4.78	7.09	28.5	0.422	16.4
Metoda 2	1	9.91	0.504	9.93	-0.199	0.503	0.383	9.97	-0.544	0.550	-9.10
	2			9.98	-0.693	0.503	0.360	8.74	11.8	0.518	-2.61
	3			10.1	-1.45	0.503	0.323	4.06	59.1	0.420	16.7
	4			10.2	-2.65	0.503	0.234	9.82	0.95	0.213	57.9
	5			10.2	-3.18	0.502	0.470	-7.08	171	-0.180	135.7
	6			10.4	-4.98	0.503	0.385	-5.06	151	0.133	73.6
Metoda 3	1	9.91	0.504	9.84	0.709	0.503	0.204	9.28	6.35	0.457	9.49
	2			9.68	2.32	0.504	0.140	6.18	37.7	0.538	-6.75
	3			9.35	5.67	0.504	0.071	24.5	-146	0.363	28.1
	4			8.43	15.0	0.505	-0.176	3.25	67.1	-0.067	113.2
	5			10.4	-4.89	0.500	0.880	-7.29	173	-0.010	119.8
	6			9.04	8.82	0.501	0.598	-6.13	162	0.037	92.7

5 ZAKLJUČAK

U radu su uspoređene tri metode za određivanje parametara stijenske u Voigtovom modelu. Za mjerenja su uzeti rezultati numeričke simulacije u koje su unesene slučajne pogreške. Metoda koja se temelji na simultanom mjerenju tlaka i površine poprečnog presjeka se pokazala najmanje osjetljivom na uvedenu pogrešku, s tim da se za parametre uzimaju vrijednosti iz prvog harmonika.

Literatura

- [1] Kitawaki, T., "Numerical Simulation Model with Viscoelasticity of Arterial Wall", Chapter 9, <http://dx.doi.org/10.5772/49976>, (2012).
- [2] Korade, I., Virag, Z., Šavar, M., "Numerical Simulation Of One-Dimensional Flow In Elastic And Viscoelastic Branching Tube" prihvaćen rad za 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI), Barcelona, Spain, 20.-25. July 2014.

Autori:

Ivan Korade, Zdravko Virag, Severino Krizmanić. Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, Katedra za mehaniku fluida, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01/6168-222, e-mail: ivan.korade@fsb.hr, zdravko.virag@fsb.hr, severino.krizmanic@fsb.hr.