Daniel FROHN, Bielefeld & Joachim LOTZ, Bielefeld

Schnittstellenaufgaben in Analysis I - Wie können sie aussehen und wie hilfreich sind sie?

Der Übergang von der Schule zur Universität stellt für Studierende eine große Herausforderung dar: Nachdem Sie in der Schule eher einen induktiven und an Anschauungen gekoppelten Zugang zur Mathematik kennengelernt haben, wird ihnen die Hochschulmathematik nun in einem axiomatisch-deduktiven Aufbau präsentiert, in dem formal-logisch und nicht anschaulich argumentiert werden soll. Ein Ansatz, dieser Schwierigkeit und der damit verbundenen *doppelten Diskontinuität* konzeptionell zu begegnen, ist der Einsatz von *Schnittstellenaufgaben* in der gymnasialen Lehramtsausbildung, die explizit Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik thematisieren (Bauer 2012/2013; Ableitinger, Hefendehl-Hebeker, Herrmann 2013).

Anknüpfend an diesen Ansatz wurden in einem Projekt an der Universität Bielefeld im Sommersemester 2019 Schnittstellenaufgaben zum Übungsbetrieb einer regulären Analysis-I-Vorlesung entwickelt. Die Studierenden (Fachwissenschaft und Lehramt) hatten wie üblich wöchentlich ein Aufgabenblatt zu bearbeiten, wobei nun eine der Aufgaben eine Schnittstellenaufgabe war. Diese sollte thematisch zu den aktuellen Vorlesungsinhalten passen, was die Aufgabenkonstruktion an enge Vorgaben band.

1. Merkmale von Schnittstellenaufgaben

In manchen Fällen war es möglich, eine übliche Aufgabe durch hinführende oder illustrierende Aufgabenteile zu ergänzen, in anderen Fällen wurden eigenständige Aufgaben konzipiert. Die konstruierten Schnittstellenaufgaben hatten jeweils mindestens eines der folgenden Merkmale **E**, **B**, **G** oder **R**:

- **E**xplizites Anknüpfen an schulisches Vorwissen
- **B**eispielkontexte zur Verdeutlichung mathematischer Ideen
- **G**eometrische Veranschaulichungen abstrakterer Sachverhalte
- **R**eflexion der abstrakteren fachmathematischen Methoden im Vergleich zur konkreteren schulischen Vorgehensweise

Die Schnittstellenaufgabe „*Kartesisches Produkt*“ ist ein Beispiel für die Merkmale **E** und **G**, da explizit auf die aus der Schule bekannte kartesische Koordinatenebene und den dreidimensionalen Anschauungsraum Bezug genommen wird. Die vier Quadranten in (a) dienen als Hinführung zur allgemeineren Gleichung, die in (b) bewiesen werden soll. Die Anknüpfung auf die acht Oktanden in (c) zeigt auch auf, wie (b) verallgemeinert werden kann.

Aufgabe 6 *(4 Punkte)*

In den folgenden Teilaufgaben (a) und (c) beziehen wir uns auf die geometrische Deutung der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, wie Sie sie aus der Schule kennen: Dabei entspricht jeder reellen Zahl genau ein Punkt der Zahlengeraden und umgekehrt. Die Menge $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist dann die ebenfalls aus der Schule bekannte reelle Zahlenebene: Jedem Element $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ entspricht genau ein Punkt dieser Ebene und umgekehrt.

(a) *Sei $A := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Verdeutlichen Sie geometrisch die Gültigkeit der Gleichung*

$$\mathbb{R}^2 = (A \times A) \cup (A^c \times A) \cup (A \times A^c) \cup (A^c \times A^c),$$

wobei A^c das Komplement von A in $\mathbb{R}$ ist.

(b) *Seien X und Y beliebige Mengen und $A \subset X$ sowie $B \subset Y$ beliebig. Beweisen Sie, dass*

$$X \times Y = (A \times B) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c) \cup (A^c \times B^c),$$

wobei A^c das Komplement von A in X und B^c das Komplement von B in Y ist.

(c) *Die Menge $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist der aus der Schule bekannte dreidimensionale Anschauungsraum: Jedem Element $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ entspricht genau ein Punkt des Raumes und umgekehrt. Verallgemeinern Sie Aufgabenteil (a) mithilfe der Menge $A := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, so dass $\mathbb{R}^3$ als Vereinigung von 8 Mengen geschrieben wird, und beschreiben Sie die geometrische Idee dahinter.*

Abb.: Schnittstellenaufgabe „*Kartesisches Produkt*“

Merkmal **B** wird durch die Aufgabe „*Potenzmenge*“ illustriert. Der Induktionsbeweis in (c) wird dadurch vorbereitet, dass zunächst der Begriff und dann auch die Beweisidee in (a) und (b) in einen gut vorstellbaren Kontext eingekleidet wird.

Aufgabe 26 *(4 Punkte)*

(a) *Eine vierköpfige Familie geht zum Fotografen und möchte in allen möglichen Kombinationen Fotos machen lassen (sowohl Einzel- als auch Gruppenfotos in allen möglichen Gruppengrößen). Dabei soll es nicht auf die Anordnung der Personen ankommen. Listen Sie alle Fälle auf.*

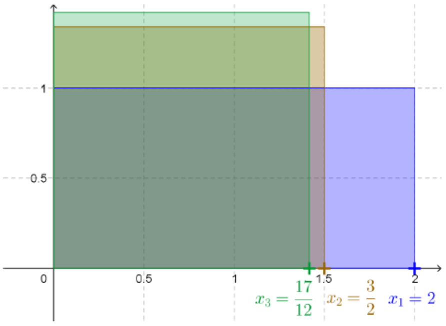
(b) *Bei (a) gibt es 15 Möglichkeiten. Wir zählen nun auch das „leere Foto“ mit und erhalten damit 16 Möglichkeiten. Begründen Sie, dass sich diese Anzahl verdoppelt, wenn man statt einer vier- eine fünfköpfige Familie betrachtet.*

(c) *Sei X eine endliche Menge mit $\mathbf{card}(X) = n$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $\mathbf{card}(2^X) = 2^n$, wobei 2^X die Potenzmenge von X ist.*

Abb.: Schnittstellenaufgabe „*Potenzmenge*“

Die Aufgabe „*Heron-Verfahren*“ ist ein weiteres Beispiel für Merkmal **G**. Die in (b) und (c) formal nachzuweisende Konvergenz wie auch die Rekursionsvorschrift der Folge können in (a) geometrisch begründet werden.

Aufgabe 38 *(4 Punkte) Mit dem sogenannten* Heron-Verfahren *definiert man eine Folge reeller Zahlen, die gegen* $\sqrt{2}$ *konvergiert. Die geometrische Idee dabei ist, eine Folge von Rechtecken mit Flächeninhalt 2 zu konstruieren, deren Seitenlängen sich immer mehr einander annähern. Das erste Rechteck habe die Breite* $x_1 := 2$ *(und damit die Höhe 1). Als Breite* x_{n+1} *des* $(n+1)$*-ten Rechtecks wird nun für alle* $n \in \mathbb{N}$ *der Mittelwert von Breite und Höhe des* n*-ten Rechtecks gewählt.*



(a) *Begründen Sie, dass* $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$*, und machen Sie geometrisch plausibel, dass* $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

(b) *Zeigen Sie, dass die Folge* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton fallend ist.*
Tipp: *Beweisen Sie zunächst die Gleichung* $x_{n+1}^2 = 2 + \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{2}{x_n}\right)^2$.

(c) *Zeigen Sie, dass die Folge* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent ist, und bestätigen Sie den Grenzwert aus (a) durch eine Rechnung.*

Abb.: Schnittstellenaufgabe „*Heron-Verfahren*“

Merkmal **R** wird durch die Aufgabe „*Induktion*“ verdeutlicht: Es wird dazu angeregt, über die unterschiedlichen Beweismethoden (anschaulicher „Pünktchenbeweis“ vs. vollständige Induktion) zu reflektieren.

Aufgabe 22 *(4 Punkte)*
Für $x, y \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *gilt die Potenzregel* $(xy)^n = x^n y^n$.

(a) *Betrachten Sie folgenden „Beweis“ der Potenzregel:*

$$(xy)^n = (xy)(xy)\cdots(xy) = (xx\cdots x)(yy\cdots y) = x^n y^n$$

Benennen Sie bei jedem Umformungsschritt, welche Eigenschaften reeller Zahlen hierbei verwendet werden.

(b) *Für* $x \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *sind die Potenzen* x^n *wie folgt induktiv definiert:*

$$x^1 := x, \qquad x^{n+1} := x^n \cdot x$$

Beweisen Sie obige Potenzregel nun durch vollständige Induktion.

(c) *Vergleichen Sie die beiden Zugänge in a) und b) und begründen Sie, warum man in der wissenschaftlichen Mathematik den Induktionsbeweis bevorzugt.*

Abb.: Schnittstellenaufgabe „*Induktion*“

Insgesamt sind im Rahmen des Projekts 12 Schnittstellenaufgaben erstellt worden, von denen alle mindestens eines der aufgeführten Merkmale hatten.

2. Evaluation

Die eingesetzten Schnittstellenaufgaben wurden durch Befragungen an vier Zeitpunkten im Laufe des Semesters evaluiert. Zu den Aufgaben „*Kartesisches Produkt*“ bzw. „*Potenzmenge*“ wurde gefragt: „*Wie sehr haben Ihnen die Aufgabenteile (a) und (c) [(a) und (b)] geholfen, den abstrakteren Aufgabenteil (b) [(c)] erfolgreich zu bearbeiten?*“ Die Fragestellung zu der Aufgabe „*Heron-Verfahren*“ war allgemeiner: „*Wie sehr helfen Ihnen konkrete Veranschaulichungen, also z.B. Verbindungen zwischen geometrischen und analytischen Methoden wie in Aufgabe 38, im Rahmen einer Analysisvorlesung?*“ Die Frage zur Aufgabe „*Induktion*“ lautete: „*Wie sehr hat Ihnen die Aufgabe geholfen, den Sinn und Nutzen der vollständigen Induktion zu erfassen?*“

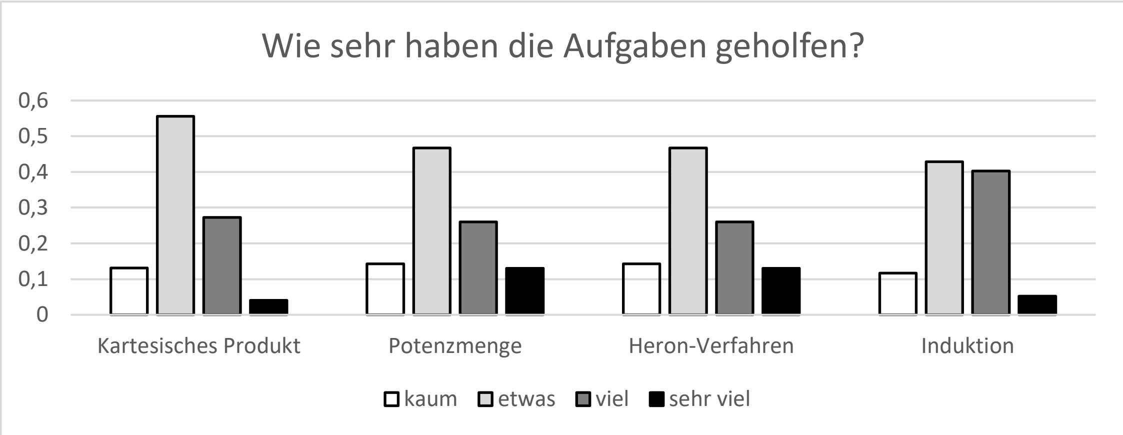


Abb.: Evaluation der Schnittstellenaufgaben

Die Ergebnisse können so zusammengefasst werden, dass die Aufgaben den meisten Studierenden mindestens etwas und einem Anteil von rund 40% sogar viel geholfen haben. Neben diesen recht heterogenen Studierendeneinschätzungen müssen aber auch normative Überlegungen aus fachdidaktischer Sicht einfließen, um eine umfassende Beurteilung dieses Aufgabenformats vornehmen zu können.

Literatur

Ableitinger, C., Hefendehl-Hebeker, L., & Herrmann, A. (2013). Aufgaben zur Vernetzung von Schul-und Hochschulmathematik. In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns, & G. Wickel (Hrsg.), Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung (S. 217–233). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bauer, T. (2012). Analysis – Arbeitsbuch. Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik, sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen. Wiesbaden: Springer Spektrum

Bauer, T. (2013). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung (S. 39–56). Wiesbaden: Springer Spektrum.