

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Vuko Vukčević

Zagreb, 2013.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Hrvoje Jasak, dipl. ing.

Prof. dr. sc. Većeslav Čorić, dipl. ing.

Student:

Vuko Vukčević

Zagreb, 2013.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se profesoru Jasaku na širenju mog znanja iz područja računalne dinamike fluida, te na izuzetnoj podršci koju mi je pružio tijekom izrade diplomskog rada. Također se zahvaljujem profesoru Čoriću koji je bio mentor i kroz moj cijeli diplomski studij. Puno sam naučio uz obojicu, hvala Vam.

Vuko Vukčević



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarški i inženjersko modeliranje i računalne
simulacije

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student:

Mat. br.:

Naslov:

Opis zadatka:

Zadatak zadan:

Rok predaje rada:

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Mladen Andrassy

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA	VI
SAŽETAK.....	X
SUMMARY	XI
1. UVOD.....	12
2. MATEMATIČKI MODEL.....	14
2.1. Navier – Stokesove jednađbe	14
2.1.1. Rubni uvjeti Navier – Stokesovih jednađbi	15
2.2. Modeliranje turbulencije u računalnoj dinamici fluida.....	16
2.2.1. Priroda turbulentnog strujanja.....	16
2.2.2. Modeliranje turbulencije	17
2.2.2.1. Direktna numerička simulacija	18
2.2.2.2. Reynoldsove osrednjene Navier – Stokesove jednađbe.....	18
2.2.2.3. Modeli turbulentne viskoznosti.....	20
2.2.3. $k - \omega$ SST model turbulencije.....	22
2.2.4. Rubni uvjeti turbulencije.....	24
2.2.4.1. Procjena fiksnih vrijednosti rubnih uvjeta turbulencije	25
2.3. „Volume of Fluid“ metoda za dvofazna strujanja sa slobodnom površinom	26
2.3.1. Matematički model dvofaznog strujanja.....	26
2.3.1.1. Jednađba za indikatorsku funkciju	27
2.3.1.2. Modifikacija Navier – Stokesovih jednađbi uslijed površinske napetosti .	29
2.3.2. Rubni uvjeti indikatorske funkcije.....	32
2.4. Model difrakcije i radijacije	33
2.5. Gibanje krutog tijela.....	39
2.5.1. Translacijsko gibanje krutog tijela.....	40
2.5.2. Rotacijsko gibanje krutog tijela	40
2.5.2.1. Jednađbe rotacije krutog tijela u matričnom obliku pomoću Eulerovih kutova	40
2.5.2.2. Algebra kvaterniona.....	43
2.5.2.3. Kvaternionski oblik jednađbi za rotaciju krutog tijela.....	46
3. DISKRETIZACIJA JEDNAĐBI MATEMATIČKOG MODELA	48
3.1. Diskretizacija standardne transportne jednađbe	48
3.1.1. Diskretizacija nestacionarnog člana.....	49
3.1.2. Diskretizacija konvekcijjskog člana.....	50
3.1.2.1. Konvekcijjske interpolacijske sheme.....	50
3.1.3. Diskretizacija difuzijskog člana	53
3.1.4. Diskretizacija izvorskog člana	55
3.1.5. Diskretizirani sustav linearnih jednađbi.....	56
3.1.6. Implementacija rubnih uvjeta.....	56

3.2.	Poludiskretizirane modificirane Navier – Stokesove jednačbe.....	58
3.2.1.	Jednačba tlaka	59
3.2.2.	Sprega brzine i tlaka.....	61
3.2.2.1.	SIMPLE algoritam za stacionarna strujanja	61
3.2.2.2.	PISO algoritam za nestacionarna strujanja	64
3.3.	k i ω jednačbe modela turbulencije	66
3.4.	Diskretizacija kompresijskog člana indikatorske funkcije.....	66
3.5.	Pregled rubnih uvjeta	68
3.5.1.	Numerička implementacija rubnih uvjeta turbulencije blizu zida	69
3.6.	3D panel metoda za rješavanje modela difrakcije i radijacije	70
3.7.	Sprega gibanja krutog tijela i računalne dinamike fluida	71
4.	OTPOR BRODA	73
4.1.	Modelska ispitivanja otpora broda	73
4.2.	CFD proračun otpora broda US Navy Combatant, DTMB 5415 u programskom paketu OpenFOAM.....	74
5.	MODELIRANJE VALOVA	84
6.	PRORAČUNI GIBANJA POLUURONJIVE PLATFORME	86
6.1.	Karakteristike razmatrane poluuronjive platforme	86
6.2.	Proračun sile zalijetanja i poniranja na nepomičnu platformu uslijed harmonijskog vala.....	87
6.3.	Proračun zalijetanja platforme uslijed harmonijskog vala.....	100
6.4.	Prigušenje ljujanja platforme	102
7.	ZAKLJUČAK.....	104
8.	LITERATURA	105

POPIS SLIKA

Slika 1.	Sila površinske napetosti na zakrivljenu površinu [3].....	30
Slika 2.	Gradijent indikatorske funkcije α	31
Slika 3.	Interpolacija skalarnog polja na stranicu kontrolnog volumena	51
Slika 4.	Korekcija zbog neortogonalnosti.....	54
Slika 5.	Geometrijske karakteristike proizvoljnog rubnog kontrolnog volumena.....	57
Slika 6.	Dijagram toka SIMPLE algoritma za spregu brzine i tlaka	63
Slika 7.	Dijagram toka PISO algoritma za spregu brzine i tlaka.....	65
Slika 8.	Dijagram toka za rješavanje nestlačivog, dvofaznog i turbulentnog strujanja.....	67
Slika 9.	Model broda opremljen za pokus otpora.....	73
Slika 10.	US Navy Combatant, DTMB 5415, trup bez privjesaka.....	75
Slika 11.	Izometrijski prikaz slobodne površine, DTMB 5415	77
Slika 12.	Slobodna površina iz ptičje perspektive, DTMB 5415	77
Slika 13.	Oplakana površina trupa, DTMB 5415	78
Slika 14.	Dinamički tlak na trupu, DTMB 5415	78
Slika 15.	Konvergencija sile otpora, gruba mreža, DTMB 5415	79
Slika 16.	Konvergencija sile otpora, fina mreža, DTMB 5415	79
Slika 17.	Profil vala na $y/LPP = 0.082$, eksperimentalni i CFD rezultati, DTMB 5415 ...	81
Slika 18.	Profil vala na $y/LPP = 0.172$, eksperimentalni i CFD rezultati, DTMB 5415 ...	81
Slika 19.	Profil vala na $y/LPP = 0.259$, eksperimentalni i CFD rezultati, DTMB 5415 ...	82
Slika 20.	Profil vala na $y/LPP = 0.317$, eksperimentalni i CFD rezultati, DTMB 5415 ...	82
Slika 21.	Profil vala na trupu broda, eksperimentalni i CFD rezultati, DTMB 5415.....	83
Slika 22.	Prikaz težinske funkcije i zadanih polja 2D generatora valova.....	85
Slika 23.	Izometrijski prikaz poluuronjive platforme (bez palube).....	86
Slika 24.	Izometrijski prikaz slobodne površine, $\lambda = 100$ m	88
Slika 25.	Polje dinamičkog tlaka u simetralnoj ravnini $y = 0$ m, $\lambda = 100$ m.....	88
Slika 26.	Polje dinamičkog tlaka u ravnini $y = 40$ m, $\lambda = 100$ m	89
Slika 27.	Izometrijski prikaz slobodne površine, $\lambda = 150$ m	89
Slika 28.	Polje dinamičkog tlaka u simetralnoj ravnini $y = 0$ m, $\lambda = 150$ m.....	90
Slika 29.	Polje dinamičkog tlaka u ravnini $y = 40$ m, $\lambda = 150$ m	90
Slika 30.	Izometrijski prikaz slobodne površine, $\lambda = 200$ m	91
Slika 31.	Polje dinamičkog tlaka u simetralnoj ravnini $y = 0$ m, $\lambda = 200$ m.....	91
Slika 32.	Polje dinamičkog tlaka u ravnini $y = 40$ m, $\lambda = 200$ m	92
Slika 33.	Sila zalijetanja, $\lambda = 100$ m	92
Slika 34.	Sila zalijetanja, $\lambda = 150$ m	93
Slika 35.	Sila zalijetanja, $\lambda = 200$ m	93
Slika 36.	Amplitude sile zalijetanja za različite frekvencije, CFD i 3D panel metoda	95
Slika 37.	Polje enstropije u simetralnoj ravnini $y = 0$ m, $\lambda = 200$ m.....	96
Slika 38.	Polje enstropije u ravnini $y = 40$ m, $\lambda = 200$ m	96
Slika 39.	Amplitude sile zalijetanja za različite valne visine, CFD i 3D panel metoda.....	98
Slika 40.	Sila poniranja, $\lambda = 100$ m	99
Slika 41.	Sila poniranja, $\lambda = 150$ m	99
Slika 42.	Sila poniranja, $\lambda = 200$ m	100
Slika 43.	Sila zalijetanja na slobodnu platformu, $\lambda = 200$ m, $H = 6$ m	101
Slika 44.	Zalijetanje slobodne platforme, $\lambda = 200$ m, $H = 6$ m.....	101
Slika 45.	Prigušeno ljuľjanje platforme uslijed nametnute početne kutne brzine.....	102

Slika 46.	Polje entropije u simetralnoj ravnini $y = 0$ m, prigušenje ljuljanja.....	103
Slika 47.	Polje entropije u simetralnoj ravnini $y = 40$ m, prigušenje ljuljanja.....	103

POPIS TABLICA

Tablica 1. Generalizirani kosinusi smjera.	36
Tablica 2. Prikaz rubnih uvjeta ovisno o vrsti granice	69
Tablica 3. Karakteristike modelskog ispitivanja.	75
Tablica 4. Prikaz rubnih uvjeta za simulaciju otpora broda.	76
Tablica 5. Sila otpora i relativna greška CFD proračuna, gruba i fina mreža, DTMB 5415.	80
Tablica 6. Parametri poluuronjive platforme.	87
Tablica 7. Amplitude sile zalijetanja za različite frekvencije, CFD i 3D panel metoda.	94
Tablica 8. Amplitude sile zalijetanja za različite valne visine, CFD i 3D panel metoda.	97

POPIS OZNAKA

Latinska slova

Oznaka	Jedinica	Opis
A_{nm}	-	matrični koeficijenti prilikom diskretizacije panel metodom
A	-	konstantna za prilagodbu modela turbulencije
a_{kj}	kg, kgm, kgm ²	matrica hidrodinamičke dodane mase
a	-; m	skalarni dio kvaterniona, stranica kvadratnog presjeka pontona
B	m	širina na vodnoj liniji
b_{kj}	kg/s, kgm/s, kgm ² /s	matrica hidrodinamičkog prigušenja
\underline{b}	-	vektorski dio kvaterniona
COG	m	položaj težišta mase
Co	-	Courantov broj
C_T	-	koeficijent ukupnog otpora
c_{kj}	kg/s ² , kgm/s ² , kgm ² /s ²	matrica povratnih sila
d_i	m	vektor udaljenosti dvaju susjednih kontrolnih volumena
Err	-	relativna greška sile otpora
E	-	empirijska konstanta logaritamske funkcije zida
e	-	Eulerov broj
F_{iA}	kN	amplituda sile
F_k	N, Nm; N	vektor hidrodinamičke reakcije, općeniti vektor sile
F_n	-	Froudeov broj
F	kg/s	maseni protok
f_σ	m/s ²	masena sila uslijed površinske napetosti
G	-	Greenova funkcija
g_i	m/s ²	vektor masene sile
g	m/s ²	gravitacijsko ubrzanje
H	-; m	operator u diskretiziranoj Navier – Stokesovoj jednadžbi, valna visina
h	m	dubina mora
I_{ij}	kgm ²	tenzor inercije
i	-	imaginarna jedinica, prva imaginarna jedinica kvaterniona
J_0	-	Besselova funkcija prve vrste, nultog reda
j	-	druga imaginarna jedinica kvaterniona
K_c	-	parametar kompresije slobodne površine
k_i	m ²	neortogonalni dio površinskog vektora

k	$m^2/s^2; -$	turbulentna kinetička energija, treća imaginarna jedinica kvaterniona
M_i	Nms	vektor momenta količine gibanja u koordinatnom sustavu tijela
m_i	Nms	vektor momenta količine gibanja u fiksnom koordinatnom sustavu
m	kg	masa
N	-	norma kvaterniona
L_c	m	karakteristična duljina geometrije
L_{PP}	m	duljina između okomica
n_i	-; -, m	vektor normale, generalizirani kosinusi smjera
P	Pa	tlak
P_k	m^2/s^3	produksijski član u jednadžbi turbulentne kinetičke energije
p	$m^2/s^2; Pa$	kinematički tlak, dinamički tlak u potencijalnom strujanju
Q_{ij}	-	matrica ortogonalne transformacije koja opisuje rotaciju
q	-	kvaternion
R_{ij}	m^2/s^2	Reynoldsov tenzor naprezanja
Re	-	Reynoldsov broj
R	m, N	radijus zakrivljenosti slobodne površine, ukupna sila otpora
r_{ii}	m	radijus tromosti
S_{ij}	1/s	tenzor brzine deformacije
S_i	m^2	površinski vektor
S	m^2	površina
S_ϕ	-	izvorski dio skalarnog polja ϕ
s_{ij}	1/s	antisimetrična matrica koja opisuje rotaciju
T_j	Nm	vektor vanjskih momenata u koordinatnom sustavu tijela
T	s; -	period fluktuacije, čisti kvaternion vanjskog momenta u koordinatnom sustavu tijela
t_i	Nm	vektor vanjskih momenata u fiksnom koordinatnom sustavu, jedinični vektor tangencijalan na površinu tijela
t	s; -	vrijeme, čisti kvaternion vanjskog momenta u fiksnom koordinatnom sustavu
u_i	m/s	vektorsko polje brzine
u_τ	m/s	brzina trenja
u	m/s	skala brzine turbulentnog strujanja
V	m^3	volumen
V_1	m^3	volumen zauzet prvom fazom fluida
v	-	čisti kvaternion
w	-	težinska funkcija
X_k	N, Nm; m	vektor hidrodinamičke uzbudne sile, vektor položaja u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo
X	m	čisti kvaternion položaja u koordinatnom sustavu tijela
x_i	m	vektor položaja u fiksnom koordinatnom sustavu

x	m	abscisa koordinatnog sustava, čisti kvaternion položaja u fiksnom koordinatnom sustavu
y	m; m	udaljenost od zida, ordinata koordinatnog sustava
z	m	aplikata koordinatnog sustava

Grčka slova

Oznaka	Jedinica	Opis
α_u	-	podrelaksacijski faktor brzine
α_p	-	podrelaksacijski faktor tlaka
α	-	indikatorska funkcija VOF modela
β_m	-	parametar u Gamma interpolacijskoj shemi
β	rad	smjer vala
Γ_ϕ	-	koeficijent difuzije skalarnog polja
γ	-	parametar u Gamma interpolacijskoj shemi
Δ_i	m	ortogonalni dio površinskog vektora
Δ	m; t	duljinska skala turbulencije, istisnina
δ_{ij}	-	Kroneckerov delta simbol, odnosno jedinični tenzor
ε_{ijk}	-	Levi – Civita simbol, odnosno tenzor permutacije
ε	m ² /s ³	disipacija turbulentne kinetičke energije
ζ	m	elevacija vala
η_j	m	pomak j – tog stupnja slobode
θ	rad	kut rotacije
κ	-; 1/m	von Kármánova konstanta, srednja zakrivljenost slobodne površine
λ	m, -	valna duljina, koeficijent linearne interpolacije
μ_{eff}	Pas	efektivna dinamička viskoznost fluida
μ	Pas	dinamička viskoznost fluida
ν_t	m ² /s	turbulentna kinematička viskoznost fluida
ν	m ² /s; 1/m	kinematička viskoznost fluida, valni broj u dubokom moru
ρ	kg/m ³	gustoća
σ_{ij}	Pa	tenzor naprezanja
σ_j	1/s	kompleksni intenzitet izvora
σ	kg/s ²	površinska napetost
τ_w	Pa	tangencijalno naprezanje na zidu
Φ	m ² /s	potencijal brzine
ϕ	m ² /s; -	prostorni dio potencijala brzine, skalarno polje
Ω_i	rad/s	vektor kutne brzine u koordinatnom sustavu tijela
ω_i	rad/s	vektor kutne brzine u fiksnom koordinatnom sustavu
ω	1/s; rad/s	specifična disipacija turbulentne kinetičke energije, kružna frekvencija vala

Oznake s karakterističnim natpisom

Oznaka	Jedinica	Opis
\hat{a}	-	koordinata kompleksnog izvora, odnosno ponora
\tilde{a}	-	normalizirana varijabla
\bar{a}	-	vremenski osrednjena vrijednost
a'	-	fluktuirajuća komponenta oko osrednjene vrijednosti
a^M	-	vrijednost u centru kontrolnog volumena „M“
a^S	-	vrijednost u centru kontrolnog volumena „S“
a^f	-	vrijednost u centru stranice kontrolnog volumena
a^b	-	vrijednost na graničnoj stranici
a^n	-	vrijednost u novom vremenskom trenutku
a^o	-	vrijednost iz starog vremenskog trenutka
a^{oo}	-	vrijednost iz dva puta starog vremenskog trenutka
g^b	-	vrijednost gradijenta na graničnoj stranici
\hat{n}_i	m	jedinični vektor normale
q^{-1}	-	inverzni kvaternion
q^c	-	konjugirani kvaternion
u_i^r	m/s	reducirano polje brzine za kompresiju slobodne površine
y^+	-	bezdimenzijska udaljenost od zida

Pisana slova

Oznaka	Jedinica	Opis
\mathcal{A}_{ij}	kgm ²	tenzor inercije krutog tijela
\mathcal{E}	1/s ²	enstropija
\mathcal{N}	-	operator Navier – Stokesove jednadžbe
$\Im m$	-	imaginarni dio kompleksnog broja
$\Re e$	-	realni dio kompleksnog broja
\mathcal{R}_+	-	skup svih pozitivnih realnih brojeva

SAŽETAK

Vuko Vukčević

PRIMJENA RAČUNALNE DINAMIKE FLUIDA U ANALIZI GIBANJA PLOVNIH OBJEKATA

U ovom radu se razmatra računalna dinamika fluida (engleski „Computational Fluid Dynamics“, skraćeno CFD) temeljena na diskretizaciji kontrolnim volumenima. Domena problema se aproksimira skupom kontrolnih volumena, te se raznim interpolacijskim shemama problem svodi s parcijalnih diferencijalnih jednadžbi na linearne sustave jednadžbi. U radu je prikazan matematički model gibanja fluida koji obuhvaća: vremenski osrednjene Navier – Stokesove jednadžbe („Reynolds Averaged Navier – Stokes“, skraćeno RANS), $k - \omega$ SST model turbulencije, te „Volume of Fluid“ metodu (skraćeno VOF) za opis gibanja dvofaznog medija. Model difrakcije i radijacije temeljen na potencijalnom strujanju, kao i jednadžbe gibanja krutog tijela su ukratko opisani. Jednadžbe rotacije krutog tijela u kvaternionskom zapisu su izvedene. Također su opisani i potrebni rubni uvjeti za cijeli matematički model. Detaljno je prikazana diskretizacija standardne transportne jednadžbe. PISO i SIMPLE algoritmi za spregu brzine i tlaka su također prikazani. U svrhu testiranja CFD – a i njegovu primjenu u brodograđevnoj industriji, napravljen je CFD proračun otpora broda na mirnom moru, te su rezultati spomenutog proračuna uspoređeni s mjerenjima u bazenu. Opisano je modeliranje valova na temelju relaksacijskih zona. Također je napravljen CFD proračun odziva poluuronjive platforme na harmonijskom valu. Rezultati CFD proračuna su uspoređeni s rezultatima dobivenim pomoću modela difrakcije i radijacije temeljenim na klasičnoj linearnoj valnoj teoriji i 3D panel metodi. Za sve CFD proračune je korišten programski paket OpenFOAM.

Ključne riječi: računalna dinamika fluida, volume of fluid, $k - \omega$ SST model turbulencije, otpor broda, simulacija valova, analiza odziva poluuronjive platforme

SUMMARY

Vuko Vukčević

APPLICATION OF COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS IN THE MOTION ANALYSIS OF SHIPS AND OFFSHORE PLATFORMS

Computational Fluid Dynamics (CFD) based on the Finite Volume Method (FVM) is described in this thesis. In the FVM, domain of the problem is approximated with a set of finite volumes. Governing partial differential equations are discretized using various interpolation schemes, resulting in a linear equation system. Mathematical model which includes the Reynolds Averaged Navier – Stokes equations (RANS), $k - \omega$ SST turbulence model and Volume of Fluid method (VOF) for interface capturing is described. Wave diffraction and radiation model based on potential theory, as well as rigid body dynamics equations are presented. For rotation of a rigid body, equations in quaternion notation are derived. Boundary conditions are presented for every part of the complete mathematical model. Discretization of the standard transport equation is derived in detail. PISO and SIMPLE algorithms for pressure – velocity coupling are also presented. In order to test the performance of CFD simulations on marine hydrodynamics application, results for ship resistance obtained with CFD are compared with experimental results. Wave modelling in CFD based on relaxation zone technique is described. Also, a CFD simulation of global response analysis of an offshore semisubmersible platform in harmonic waves has been carried out. Results were compared with the ones obtained by diffraction and radiation model based on the 3D panel method and classical linear wave theory. The CFD solver used for the simulations is OpenFOAM.

Key words: computational fluid dynamics, volume of fluid, $k - \omega$ SST turbulence model, ship resistance, wave simulation, semisubmersible platform response analysis

1. UVOD

Fluidi okružuju cijeli svijet, pa je tako i većina problema u brodogradnji i pomorskoj industriji barem na neki način povezana s dinamikom fluida. Razvoj računalne dinamike fluida je usko povezan s vrlo brzim razvojem računala u prethodnom i ovom stoljeću. U današnjem svijetu, tvrtke moraju imati brze odgovore na zahtjeve tržišta da bi opstale. Tu dolazi do izražaja računalna dinamika fluida, koja za razliku od eksperimentalnih metoda, može ponuditi brža, i najvažnije, jeftinija rješenja. Međutim, ta rješenja još uvijek u dobrom dijelu tehničkih problema nisu dovoljno točna, ali često daju dobru približnu sliku problema. Dinamika fluida je opisana Navier – Stokesovim jednadžbama (zakon o očuvanju količine gibanja), jednadžbom kontinuiteta (zakon o očuvanju mase), te prvim i drugim glavnim stavkom termodinamike [1]. Analitičko rješenje tih jednadžbi je poznato samo za jednostavnija strujanja, koja se svode na jednodimenzionalne ili dvodimenzionalne probleme, uz zanemarenje pojedinih članova u jednadžbama. Međutim, ta jednostavnija strujanja su od male važnosti u tehnici, pa tako i u pomorskoj industriji, gdje je strujanje često izrazito trodimenzionalno uslijed kompliciranih geometrija. Upravo iz tih razloga su se razvile numeričke metode.

Samom strujanju fluida je moguće pristupiti na dva načina, te su se stoga razvile dvije glavne vrste metoda u računalnoj dinamici fluida. Prvi način, Eulerov opis strujanja, promatra fluid u određenim fiksnim točkama prostora. Metode temeljene na Eulerovom pristupu (metoda kontrolnih volumena, metoda konačnih razlika) su konzervativne i danas više istražene i prilagođene rješavanju raznih problema. Kod drugog, Lagrangeovog opisa, koordinatni sustav nije nepomičan, već se giba s česticom fluida. Iz tog razloga je ovaj pristup možda intuitivniji, posebno za promatranje same kinematike fluida.

U ovom radu će se ukratko opisati i koristiti metoda kontrolnih volumena koja je najrasprostranjenija i najkorištenija metoda u području numeričke simulacije strujanja. Ona se temelji na Eulerovom pristupu, gdje je domena promatranog problema podijeljena na fiksne kontrolne volumene. Integracijom spomenutih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi po kontrolnom volumenu, primjenom Gaussovog teorema, te odabirom neke od brojnih interpolacijskih shema se dobije sustav jednadžbi koji se rješava u svakom vremenskom koraku. Kako su Navier – Stokesove jednadžbe nelinearne zbog konvekcijskog člana, dobiveni sustav jednadžbi je također nelinearan. Međutim, taj član se linearizira, pa se iterativno dolazi do konačnog rješenja sustava. Rješenjem sustava se dobiju nepoznata polja

brzine, tlaka, temperature i slično kao diskretni skup vrijednosti u pojedinim kontrolnim volumenima.

Kako je većina hidrodinamičkih problema u brodogradnji i pomorskoj industriji vezana za približno izotermna, nestlačiva i turbulentna strujanja sa slobodnom površinom, u Poglavlju 2 će se prikazati matematički model takvog strujanja. Prikazan je i model difrakcije i radijacije temeljen na potencijalnom strujanju i klasičnoj linearnoj valnoj teoriji. Također će se prikazati matematički model translacije i rotacije krutog tijela. Početni i rubni uvjeti za sve modele su spomenuti. U Poglavlju 3 je prikazana diskretizacija jednadžbi metodom kontrolnih volumena. Također je prikazana sama implementacija rubnih uvjeta u računalni kod. Diskretizacija metodom panela i sprega računalne dinamike fluida i gibanja krutog tijela su također opisani. Poglavlje 4 opisuje simulaciju otpora broda na mirnom moru te usporedbu dobivenih rezultata s eksperimentalnim mjerenjima. U Poglavlju 5 je ukratko opisan princip modeliranja valova temeljen na relaksacijskim zonama. Konačno, u posljednjem Poglavlju je opisan proračun odziva poluuronjive platforme na harmonijskom valu. Neki od rezultata dobivenih pomoću računalne dinamike fluida (engleski „Computational Fluid Dynamics“, skraćeno CFD) su uspoređeni s rezultatima modela radijacije i difrakcije koji je poznat i dobro utemeljen u brodograđevnoj struci.

2. MATEMATIČKI MODEL

Matematički model nestlačivog, izotermnog i turbulentnog strujanja sa slobodnom površinom obuhvaća parcijalne diferencijalne jednačbe od kojih je većina drugog reda. Spomenute jednačbe nemaju analitička rješenja za gotove sve probleme od interesa u pomorskoj industriji. U ovom Poglavlju će se ukratko opisati Navier – Stokesove jednačbe [1], jednačbe $k - \omega SST$ modela turbulencije [2], te jednačba za indikatorsku funkciju koja opisuje slobodnu površinu [3]. Model difrakcije i radijacije temeljen na klasičnoj linearnoj valnoj teoriji, potencijalnom strujanju i Greenovoj funkciji je također ukratko opisan. Za proračun gibanja plovnih objekata je potrebno napraviti spregu računalne dinamike fluida i gibanja tijela. Iz tog razloga je ovdje opisan i matematički model gibanja krutog tijela.

2.1. Navier – Stokesove jednačbe

Nestlačivo gibanje fluida je opisano parcijalnim diferencijalnim jednačbama; jednačbom kontinuiteta (1) i Navier – Stokesovim jednačbama (2). U indeksnoj notaciji [1] koja će se koristiti kroz ovaj rad, ove jednačbe se mogu zapisati prema:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (2)$$

gdje su uvedene supstitucije:

$$p = \frac{P}{\rho}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (3)$$

Članovi u jednačbi (2) se redom nazivaju:

- nestacionarni član, koji opisuje akceleraciju kao vremensku promjenu brzine;
- konvekcijski član, koji opisuje utjecaj povezan s promjenom brzine u prostoru;
- difuzijski član, koji je rezultat pretpostavke Newtonovskog fluida [4] (tenzor naprezanja je linearno proporcionalan tenzoru brzine deformacije preko dinamičke viskoznosti);

- član masene sile (u ovom slučaju gravitacijsko ubrzanje);
- član gradijenta tlaka.

Difuzijski član predstavlja devijatorski dio simetričnog tenzora naprezanja, dok član s gradijentom tlaka predstavlja sferni dio tenzora naprezanja, invarijantan na rotaciju koordinatnog sustava.

Kako postoje četiri nepoznanice (vektor brzine u_i i kinematički tlak p) i četiri jednačbe, sustav je zatvoren. Međutim, kako se kinematički tlak pojavljuje u jednačbi (2), sustav je spregnut, te je potrebno povezati polje brzine i tlaka da bi sustav bio rješiv [5]. Postupak rješavanja sustava parcijalnih diferencijalnih jednačbi će biti prikazan u Poglavlju 3.

Također se javlja problem uslijed nelinearnosti konvekcijskog člana. Tijekom diskretizacije, konvekcijski član bi proizveo nelinearne članove u sustavu jednačbi. Da bi se izbjegli nelinearni članovi i time nelinearni rješavači sustava, taj član se linearizira, a efekt nelinearnosti se razrješava iterativno.

2.1.1. Rubni uvjeti Navier – Stokesovih jednačbi

Jedinstvenost rješavanja sustava opisanog jednačbama (1) i (2) osiguravaju upravo rubni uvjeti. Jasno je da se rubni uvjeti zadavaju na granici domene. Postoje dva tipa rubnih uvjeta iz kojih se mogu dobiti mnogobrojni različiti oblici izvedenih rubnih uvjeta. Dirichletov rubni uvjet propisuje vrijednost varijable na granici domene. S druge strane, von Neumannov rubni uvjet propisuje vrijednost nultog gradijenta na granici, dok generalizirani von Neumannov uvjet propisuje proizvoljnu vrijednost gradijenta varijable u smjeru normale na granicu. Granice po tipu mogu biti različite, a četiri najčešća tipa su: ulazna granica, izlazna granica, zid i ravnina simetrije. Ulazna granica fizikalno označava ulaz fluida u domenu, te je najčešće zadana s Dirichletovim rubnim uvjetom brzine te von Neumannovim uvjetom za tlak. Izlazna granica predstavlja izlaz fluida iz domene, te se na njoj najčešće postavlja von Neumannov rubni uvjet za brzinu i tlak. Zid predstavlja nepropusnu granicu, te je u viskoznom strujanju brzina jednaka nuli. Simetrija uvelike smanjuje vrijeme proračuna jer se domena nekog simetričnog strujanja može smanjiti dva puta.

2.2. Modeliranje turbulencije u računalnoj dinamici fluida

Ovo Podpoglavlje opisuje osnovne probleme vezane za turbulentna strujanja u računalnoj dinamici fluida. Dan je kratak prikaz same prirode turbulentnog strujanja, te je objašnjeno odakle proizlazi potreba za modeliranjem turbulencije. Prikazane su Reynoldsove osrednjene Navier – Stokesove jednačbe („RANS“), te je ukratko opisan problem zatvaranja sustava jednačbi. Osnovni, najpoznatiji modeli turbulencije s dvije jednačbe su spomenuti. Konačno, prikazan je $k - \omega SST$ (engleski „Shear Stress Transport“) model turbulencije koji je korišten u ovom radu.

2.2.1. Priroda turbulentnog strujanja

Taylor i von Kármán predlažu sljedeću definiciju turbulencije: „Turbulencija je nepravilno gibanje koje se općenito pojavljuje u bilo plinovitim ili kapljevitim fluidima, prilikom njihovog toka kraj krutih površina ili čak kada se dvije struje istog fluida gibaju jedna preko druge“ [6]. Takvo gibanje je karakterizirano širokim rasponom vremenskih i duljinskih skala. Laminarno gibanje je pravilno, slojevito gibanje fluida, koje je nažalost više iznimka nego pravilo, barem što se tiče inženjerskih problema. Uzrok turbulencije u graničnom sloju leži upravo u nestabilnostima koje se javljaju u laminarnom sloju.

Suprotno popularnom mišljenju da je turbulencija najveći neriješeni problem klasične fizike, ona je potpuno opisana Navier – Stokesovim jednačbama. Međutim, turbulencija se prostire preko širokog raspona duljinskih i vremenskih skala; interakcije među vrtlozima su krajnje nelinearne, te ju je teško pravilno statistički opisati. Spomenuta svojstva u inženjerskom svijetu nisu nimalo privlačna. Karakteristike turbulentnog strujanja su [7]:

- slučajnost (ukazuje na nered i neponovljivost);
- vrtloženje (velika koncentracija i intenzitet vrtloženja);
- nelinearnost;
- trodimenzionalnost;
- kontinuitet strukture vrtloga, to jest kontinuirani spektar fluktuacija po frekvencijama;
- kaskada energije, to jest izmjena energije s većih na manje skale;
- nepovratnost procesa;
- povećana disipacija energije;

- isprekidanost (turbulencija se događa samo u dijelovima domene);
- visoka difuzija (odnosi se i na količinu gibanja i energiju i ostale varijable);
- samoočuvanje i sličnost (u jednostavnim strujanjima struktura turbulencije najviše ovisi o lokalnim svojstvima strujanja).

Turbulencija se može promatrati u vidu dinamike vrtloga. Veliki vrtlozi nastaju samim strujanjem, te se kroz istežanje vrtloga (engleski „vortex stretching“) oni razbijaju na sve manje i manje vrtloge. Taj mehanizam premješta energiju s velikih na male skale. Kako je disipacija energije u sustavu proporcionalna gradijentu brzine, ona je najveća u malim vrtlozima (odnosno malim skalama) jer su upravo u njima najveći gradijenti brzine. Opisana kaskada energije pomoću vrtloga se može podijeliti u četiri dijela, ovisno o promatranim skalama:

- Veliki vrtlozi koji ovise o obliku domene strujanja te o samom strujanju. Ova skala je problematična jer je teško razlučiti što je turbulencija, a što je koherentni oblik strujanja.
- Vrtlozi koji nose najveći dio kinetičke turbulentne energije. Ova skala se naziva Taylorova skala.
- Inercijska skala, u kojoj na istežanje vrtloga najviše utječu inercijski efekti, dok se utjecaji viskoznosti mogu zanemariti.
- Mali vrtlozi, koji sadrže mali dio ukupne energije, ali najviše doprinose disipaciji. Ovo je najmanja relevantna skala u turbulentnim strujanjima, koja se naziva Kolmogorova mikro – skala. Iako je najmanja, ona je nekoliko redova veličine veća od molekularne skale, tako da i dalje vrijede postulati mehanike kontinuuma [1].

2.2.2. Modeliranje turbulencije

Cilj modeliranja turbulencije je pronaći rješenja Navier – Stokesovih jednadžbi koja su od interesa u praktičnoj primjeni. Na primjer, u problemu otpora broda na mirnom moru, od interesa je pronaći neko osrednjeno polje brzine, gdje ne dolazi do izražaja nestacionarnost i ostale karakteristike turbulencije. Na taj način se može dobiti osrednjena vrijednost sile otpora u stacionarnom stanju, što je u konačnici i cilj proračuna.

2.2.2.1. *Direktna numerička simulacija*

Direktna numerička simulacija (engleski „Direct Numerical Simulation“, ili skraćeno DNS) u stvari nije model turbulencije. Kao što je spomenuto, Navier – Stokesove jednačbe sadrže sve informacije dovoljne za opis turbulencije. U ovakvom pristupu se simuliraju sve vremenske i duljinske skale u tranzijentnom strujanju. Međutim, to zahtijeva vrlo visoku prostornu i vremensku rezoluciju (odnosno finu proračunsku mrežu i male vremenske korake). Prilikom određivanja rezolucije treba imati na umu:

- Vrtlozi koji su manji od Kolmogorove skale nisu od značaja pošto će oni disipacijom nestati prije nego što se okrenu jedan puni krug. Dakle, nije potrebno razlučivati gibanja manja od Kolmogorove skale. Kolmogorova skala je funkcija Reynoldsovog broja.
- Vremenska rezolucija je također ovisna o Kolmogorovoj skali.

DNS dakle direktno simulira sve skale turbulentnog strujanja. Iz tog razloga je DNS metoda pretjerano skupa za simulaciju strujanja koja su od inženjerskog interesa. Međutim, ovakva simulacija nekih jednostavnijih strujanja služi za produbljivanje znanja o turbulenciji, te za validaciju pojedinih modela turbulencije. Ako se usporedi sa eksperimentalnim mjerenjima, rezultati dobiveni DNS su pouzdaniji i temeljitiji [7], to jest, jednostavno se mogu dobiti razne korelacije od interesa, te se može dobro vizualizirati strujanje. Jedan od problema eksperimentalnih mjerenja je što sama mjerna armatura utječe na polje strujanja.

2.2.2.2. *Reynoldsove osrednjene Navier – Stokesove jednačbe*

Kao što je gore spomenuto, najčešće su od interesa neke osrednjene vrijednosti koje opisuju strujanje, a ne fluktuacije uslijed turbulencije. Usprkos fluktuacijama, inače nestacionarno turbulentno strujanje se može promatrati kao stacionarno u osrednjenim varijablama. Ukoliko se jednačbe izvedu tako da ovise samo o osrednjenim karakteristikama strujanja, nije potrebno rješavati tranzijentno strujanje, te je moguće koristiti manju prostornu rezoluciju (grublju proračunsku mrežu). Polje brzine i tlaka se mogu zapisati kao zbroj vremenski osrednjene i fluktuirajuće komponente:

$$u_i(x_i, t) = \bar{u}_i(x_i) + u'_i(x_i, t), \quad (4)$$

$$P(x_i, t) = \bar{P}(x_i) + P'(x_i, t),$$

gdje prvi članovi s desne strane jednadžbi predstavljaju vremenski osrednjene komponente ovisne samo o vektoru položaja, dok drugi članovi predstavljaju fluktuirajuće komponente. Osrednjena komponenta je definirana s:

$$\bar{u}_i(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i(x_i, \tau) d\tau. \quad (5)$$

Može se pokazati da je srednja vrijednost fluktuirajuće komponente jednaka nuli. Jednostavan dokaz kao i ostale karakteristike gornjeg osrednjavanja su detaljno opisane u [6].

Ukoliko se jednadžbe (4) uvrste u jednadžbu kontinuiteta (1), slijedi:

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (6)$$

Vremenskim osrednjavanjem gornje jednadžbe, uz $\bar{\bar{u}}_i = \bar{u}_i$ i $\bar{\bar{u}}'_i = 0$ dobije se jednadžba kontinuiteta za osrednjeno polje brzine koja je po obliku ista kao i prethodna:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (7)$$

Koristeći (7) i (6) vidljivo je da i fluktuirajuća komponenta brzine mora zadovoljavati jednadžbu kontinuiteta, odnosno:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0. \quad (8)$$

Uvrštavajući jednadžbe (4) u Navier – Stokesove jednadžbe (2) koje nisu podijeljene s gustoćom, bez člana koji opisuje masenu silu (jer on ostaje nepromijenjen), dobije se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho(\bar{u}_i + u'_i))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j))}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} \right) \\ = -\frac{\partial(\bar{P} + P')}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (9)$$

Vremenskim osrednjavanjem gornje jednadžbe, uz $\bar{\bar{u}}_i = \bar{u}_i$ i $\bar{\bar{u}}'_i = 0$ dobije se Reynoldsove osrednjena Navier – Stokesova jednadžba:

$$\frac{\partial(\rho\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{u}_i\bar{u}_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial(\overline{\rho u'_i u'_j})}{\partial x_j}. \quad (10)$$

Gornja jednačba napisana u ovisnosti o vremenski osrednjenim brzinama i tlaku je gotovo jednaka po obliku jednačbi (2). Dodatni član na krajnjoj desnoj strani posljednje jednačbe proizlazi iz nelinearnosti konvekcijskog člana, a zove se Reynoldsov tenzor naprežanja, a označava se s:

$$R_{ij} = -\overline{u'_i u'_j}. \quad (11)$$

Kao što je vidljivo, to je simetrični tenzor drugog reda, te uvodi novih šest nepoznanica u sustav jednačbi. Upravo zbog novih nepoznanica sustav nije još uvijek zatvoren, te je potrebno odrediti nove jednačbe koje će omogućiti rješavanje sustava.

Moguće je direktno izvesti jednačbe za Reynoldsov tenzor naprežanja ukoliko se formira sljedeća jednačba koja prikazuje osrednjeni prvi moment Navier – Stokesovih jednačbi:

$$\overline{u'_i \mathcal{N}(u_j) + u'_j \mathcal{N}(u_i)} = 0. \quad (12)$$

gdje $\mathcal{N}(u_j)$ opisuje Navier – Stokesovu jednačbu (odnosno operator) za polje brzine u_j . Na taj način se dobije šest novih jednačbi za R_{ij} . Međutim, uvode se dodatne dvadeset i dvije nepoznanice [6]. Zbog nelinearnog konvekcijskog člana, ukoliko se formuliraju sve viši i viši momenti, dolazi do velikog povećanja broja nepoznanica. Stoga su se razvili jednostavniji modeli turbulencije, koji na različite načine aproksimiraju Reynoldsov tenzor naprežanja.

2.2.2.3. Modeli turbulentne viskoznosti

Reynoldsov tenzor naprežanja je simetrični tenzor drugog reda, te se može promatrati kao da opisuje povećanu difuziju količine gibanja. Iz tih razmatranja, koja se slažu s Boussinesqovom aproksimacijom [6], slijedi da je Reynoldsov tenzor linearna funkcija osrednjenog tenzora brzine deformacije (koji predstavlja gradijent brzine), odnosno:

$$R_{ij} = f(\bar{S}_{ij}), \quad (13)$$

gdje je:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (14)$$

Koristeći dimenzijsku analizu, jednostavno se može pokazati da je potrebno S_{ij} pomnožiti s faktorom koji u sebi nosi dimenziju kinematičke viskoznost, koja se naziva turbulentna viskoznost, a označava s ν_t . Problem se dakle svodi na određivanje turbulentne viskoznosti. Iz dimenzijske analize slijedi da su potrebne dvije karakteristike turbulentnog strujanja: skala brzine i duljinska skala (ili vremenska skala). Množenjem tih dvaju veličina će se dobiti odgovarajuće dimenzije turbulentne viskoznost. Konačno, može se zapisati:

$$R_{ij} = \nu_t \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (15)$$

gdje je turbulentna viskoznost općenito definirana prema:

$$\nu_t = Au\Delta. \quad (16)$$

A je konstanta koja omogućava prilagodbu modela prema stvarnom fizikalnom ponašanju, u predstavlja skalu brzine, dok Δ predstavlja duljinsku skalu. Za procjenu skale brzine se u gotovo svim modelima turbulencije koristi turbulentna kinetička energija, koja je definirana prema:

$$k = \frac{3}{2} u'_i u'_i. \quad (17)$$

Transportna jednačba za turbulentnu kinetičku energiju će se prikazati u sljedećem Podpoglavlju, te ju je moguće izvesti kontrakcijom indeksa iz jednačbe (12), uz prikladno modeliranje dodatnih članova [7]. Da bi se mogla procijeniti turbulentna viskoznost, potrebno je poznavati još i duljinsku ili vremensku skalu. To je moguće postići formuliranjem slične transportne jednačbe za turbulentnu disipaciju ε ili specifičnu disipaciju (po jedinici kinetičke energije) ω . Na taj način nastaju dvije najpoznatije obitelji modela turbulencije s dvije jednačbe: $k - \varepsilon$ i $k - \omega$ modeli.

Potrebno je napomenuti da postoje i jednostavniji modeli turbulencije [6], [7]. Oni obuhvaćaju algebarske modele, modele s jednom običnom diferencijalnom jednačbom (popularni engleski naziv „half equation models“), te modele s jednom parcijalnom diferencijalnom jednačbom (engleski „one equation models“). Naravno, postoje i složeniji modeli koji pretpostavljaju nelinearnu ovisnost R_{ij} o \bar{S}_{ij} [6], te modeli sa šest jednačbi koji modeliraju svaku komponentu tenzora R_{ij} posebno [7]. Međutim, modeli s dvije parcijalne diferencijalne jednačbe su najrasprostranjeniji i najkorišteniji modeli u današnjoj praksi

računalne dinamike fluida, te će se u sljedećem Podpoglavlju prikazati jedan upravo takav model.

2.2.3. $k - \omega$ SST model turbulencije

$k - \varepsilon$ modeli turbulencije su najpoznatiji modeli, međutim, danas se sve manje i manje koriste. Najveći problem takvih modela je njihova netočnost pri velikim, a i suprotnim gradijentima tlaka, time i prilikom pojave natražnog strujanja. Prednost ovog modela je njegova mala ovisnost o rubnim uvjetima daleko od zida [6]. S druge strane, $k - \omega$ modeli se bolje ponašaju prilikom velikih i suprotnih gradijenata tlaka, te se bolje slažu s eksperimentalnim podacima za dvodimenzionalna strujanja u graničnom sloju. Nedostatak ovakvih modela je njihova velika osjetljivost o rubnim uvjetima daleko od zida.

Kombinacija prethodno spomenutih modela turbulencije je upravo $k - \omega$ SST model. Korištenje $k - \omega$ formulacije u domeni strujanja unutar i blizu graničnog sloja omogućava primjenu modela i do viskoznog podsloja, pa i do samog zida [2], bez korištenja posebnih prigušnih funkcija kao što je to slučaj u mnogim ostalim modelima. Model se daleko od zida prebacuje na $k - \varepsilon$ model, te se time izbjegava problem osjetljivosti o rubnim uvjetima daleko od zida (najčešći problem je ulazni rubni uvjet), od kojeg pate mnogi $k - \omega$ modeli. $k - \omega$ SST model je karakterističan po dobrom ponašanju prilikom velikih gradijenata tlaka i pojave odvojenog strujanja. Model je opisan sljedećim parcijalnim diferencijalnim transportnim jednadžbama, jednom algebarskom jednadžbom i dodatnim relacijama:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(k\bar{u}_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left((v + \sigma_k v_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) = P_k - \beta^* k \omega, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega\bar{u}_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left((v + \sigma_\omega v_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) = \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \\ + 2\sigma_{\omega 2} (1 - F_1) \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$v_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)}. \quad (20)$$

Prva jednadžba predstavlja transportnu jednadžbu turbulentne kinetičke energije, dok druga predstavlja transportnu jednadžbu specifične disipacije. Algebarska jednadžba (20) za

turbulentnu viskoznost je po formi jednaka jednadžbi (16). Prilikom rješavanja Navier – Stokesovih jednadžbi, turbulentna viskoznost se jednostavno pridodaje molekularnoj viskoznosti. Dodatne relacije i koeficijenti potrebni za zatvaranje sustava su:

$$\begin{aligned}
 F_2 &= \tanh\left(\max\left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^*\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega}\right)^2\right), \\
 P_k &= \min\left(R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, 10\beta^*k\omega\right), \\
 F_1 &= \tanh\left(\min\left(\left(\max\left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^*\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega}\right), \frac{4\sigma_{\omega 2}k}{CD_{k\omega}y^2}\right)\right)^4\right), \\
 CD_{k\omega} &= \max\left(2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-10}\right), \\
 \alpha_1 &= \frac{5}{9} & \beta_1 &= \frac{3}{40} & \sigma_{k1} &= 0.85 & \sigma_{\omega 1} &= 0.5 \\
 \alpha_2 &= 0.44 & \beta_2 &= 0.0828 & \sigma_{k2} &= 1 & \sigma_{\omega 2} &= 0.856 \\
 \beta^* &= \frac{9}{100}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Prva tri člana s lijeve strane jednadžbi za k (18) i ω (19) redom predstavljaju nestacionarni, konveksijski i difuzijski član. S desne strane istih jednadžbi se nalaze mnogi izvorski, odnosno ponorski članovi koji ukazuju na jači lokalni karakter ovakve parcijalne diferencijalne jednadžbe. U jednadžbama se nalaze koeficijenti α , β , σ_k i σ_ω (bez indeksa), dok su u koeficijentima potrebnim za zatvaranje sustava dane krajnje vrijednosti koeficijenata (s indeksom 1 i 2). Vrijednosti potrebne u jednadžbi se jednostavno dobiju linearnom interpolacijom pomoću funkcije F_1 ovisno o krajnjim vrijednostima, primjerice za α :

$$\alpha = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 (1 - F_1), \tag{22}$$

Također, y predstavlja udaljenost promatranog kontrolnog volumena od zida, dok je:

$$S = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}. \tag{23}$$

2.2.4. Rubni uvjeti turbulencije

Da bi sustav bio rješiv, potrebno je zadati rubne uvjete turbulentne kinetičke energije i specifične disipacije na granicama domene. Na ulaznoj granici i zidu se najčešće zadavaju konstantne vrijednosti, dok ostale granice predstavljaju slobodan izlaz.

Zid je rubni uvjet sa zadanom vrijednosti brzine. Turbulencija u graničnom sloju blizu zida se bitno razlikuje od turbulencije u ostalim dijelovima toka. Kao što je spomenuto u ovom Poglavlju, u realnom strujanju se događa kaskada energije s velikih na sve manje i manje vrtloge. Kraj zida se događa obrnuti proces. Mali vrtlozi koji nastaju u graničnom sloju bivaju izbačeni od zida, te stvaraju velike vrtloge. Taj obrnuti proces nije uzet u obzir prilikom modeliranja turbulencije. Zid također i na neki način ograničava vrtloge, odnosno daje im određenu orijentaciju što ima utjecaj na duljinske skale turbulencije. Najveći problem predstavljaju veliki gradijenti brzine i turbulentnih svojstava (k i ω) u blizini zida. Da bi model turbulencije vjerno prikazao, primjerice, tangencijalna naprezanja na zidu (potrebna za silu otpora), spomenuti se problemi trebaju riješiti.

„Low – Re“ modeli turbulencije razriješavaju osrednjeno strujanje sve do zida [7]. Da bi se to postiglo, u model turbulencije blizu zida se dodaju razne prigušne funkcije prilagođene rezultatima eksperimentalnih mjerenja ili rezultatima dobivenih DNS – om. Ovakvi modeli zahtijevaju veliki broj kontrolnih volumena u samom graničnom sloju, što najčešće nije prihvatljivo.

Vrijednost koja je zanimljiva u industrijskim simulacijama je često sila na neko tijelo, a ne detalji toka u tankom graničnom sloju. Koristeći funkcije zida, moguće je izbjeći gustu mrežu u području blizu zida. Funkcije zida predstavljaju jednostavan model koji se temelji na ravnoteži potpuno razvijenog, ne odvojenog graničnog sloja. Iz tih razloga je nemoguće očekivati točno rješenje za proizvoljne vrste strujanja. Međutim, ovakvi jednostavni modeli vjerno prikazuju trendove strujanja. Primjerice, sila otpora nekog broda na gruboj mreži se možda neće moći dovoljno točno izračunati, međutim, korištenje CFD proračuna s ovakvim modelima turbulencije će dati vjernu usporedbu dviju različitih brodskih formi. Na temelju toga se može odlučiti koja je forma hidrodinamički bolja, a koja lošija.

Turbulentno strujanje blizu zida se može podijeliti na tri različita područja [8]:

1. Viskozni podsloj: $0 < y^+ \leq 5$
2. Prijelazni sloj: $5 < y^+ \leq 30$
3. Inercijski sloj: $30 < y^+ \leq 200$

gdje je:

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}. \quad (24)$$

U gornjem izrazu y^+ predstavlja bezdimenzijsku udaljenost od zida, u_τ brzinu trenja na zidu, y stvarnu udaljenost od zida, a ν lokalnu kinematičku viskoznost fluida. Turbulencija je zanemarivo mala unutar viskoznog podsloja, dok su viskozni efekti u inercijskom sloju također mali. U prijelaznom sloju, i viskoznost i turbulencija dolaze do izražaja.

Launder i Spalding [9] predlažu sljedeću, danas standardnu logaritamsku zidnu funkciju za srednju brzinu:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+). \quad (25)$$

gdje su:

κ	= 0.4187	von Kármánova konstanta
E	= 9.793	empirijska konstanta
\bar{u}		srednja brzina fluida u promatranoj točki

Tangencijalno naprezanje na zidu je definirano prema:

$$\tau_w = \rho u_\tau^2. \quad (26)$$

2.2.4.1. Procjena fiksnih vrijednosti rubnih uvjeta turbulencije

Turbulentna kinetička energija i specifična disipaciju su dvije varijable kojima je opisana turbulencija. Kao što je vidljivo iz prethodnog Podpoglavlja, potrebno je zadati te dvije varijable na nepropusnom zidu i na ulaznoj granici domene. Idealno bi se ti rubni uvjeti postavili na temelju eksperimentalnih mjerenja ili DNS simulacije za svaki pojedini proračun s modelima turbulencije. Međutim, to često nije slučaj, pa se vrijednosti dvaju varijabli mogu procijeniti na jednostavan način. Promjenjiva komponenta brzine se može procijeniti prema:

$$u' \approx (0.5 \div 10\%) \bar{u}_{ulaz}, \quad (27)$$

gdje je \bar{u}_{ulaz} srednja brzina na ulazu. Vrijednost od 10% odgovara strujanju s jako puno turbulencije, dok vrijednost od 0.5% odgovara strujanju s malo turbulencije. Za strujanje u cijevi se primjerice uzimaju vrijednosti $1 \div 3\%$, dok se za atmosferska strujanja uzima oko 0.3%.

Pomoću tako određene promjenjive brzine, dobije se turbulentna kinetička energija:

$$k = \frac{3}{2} u'^2. \quad (28)$$

Disipacija kinetičke energije se računa prema:

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{L_c}, \quad (29)$$

gdje je L_c karakteristična duljina geometrije. Ta veličina je grubo definirana, te se za problem otpora broda može uzeti $L_c = 0.1L_{PP}$. Za $k - \omega$ SST model turbulencije, specifična disipacija se dobije prema:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* k}. \quad (30)$$

Turbulentna viskoznost se može procijeniti prema:

$$\nu_t = \frac{k}{\omega}. \quad (31)$$

U uobičajenim strujanjima, ν_t bi trebao biti približno 100 puta veći od molekularne viskoznosti ν . Na taj način se može prilagođavati L_c da se dobije spomenuta vrijednost turbulentne viskoznosti.

Vrijednosti izračunate pomoću gornjih procjena vjerojatno nisu točne. Međutim, potrebno je naglasiti da velika promjena u fisknim rubnim uvjetima za turbulenciju neće izazvati bitno drugačije rješenje. Ovakav pristup omogućava jednostavnu i inženjerski prihvatljivu procjenu vrijednosti koje bi inače bilo jako skupo odrediti.

2.3. „Volume of Fluid“ metoda za dvofazna strujanja sa slobodnom površinom

Većina hidrodinamičkih problema u brodograđevnoj industriji je vezana za strujanja sa slobodnom površinom između vode (odnosno mora) i zraka. Pri tome se dvije faze ne miješaju. Iz tih razloga je u ovom Podpoglavlju opisan matematički model „Volume of Fluid“ (VOF) [3] metode koja opisuje strujanja dvofaznih fluida.

2.3.1. Matematički model dvofaznog strujanja

Jednadžbe gibanja fluida su parcijalne diferencijalne jednadžbe dobivene s pretpostavkama fluida kao kontinuuma. Ideja ovog matematičkog modela je da opiše strujanje dva fluida koja se ne miješaju kao strujanje jednog fluida. To je moguće ukoliko se uvede takozvana

indikatorska funkcija [3], koja prilikom rješavanja sustava predstavlja nepoznato skalarno polje, a najčešće se označuje s α i ima sljedeće svojstvo:

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{za prvi fluid} \\ 0, & \text{za drugi fluid.} \end{cases} \quad (32)$$

Uz tako definiranu indikatorsku funkciju, svojstva fluida se mogu izračunati prema:

$$\rho = \alpha\rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2, \quad (33)$$

$$\mu = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2.$$

Kao što je vidljivo iz prethodnih jednadžbi, svojstva jednog, novog kontinuuma se opisuju pomoću svojstava pojedine faze. Funkcija $\alpha(x_i, t)$ je na taj način skokovita funkcija zbog prisutnosti slobodne površine, a može se definirati i na sljedeći način:

$$\alpha = \frac{V_1}{V}, \quad (34)$$

gdje je V volumen promatranog dijela prostora, a V_1 volumen kojeg zauzima prva faza u promatranom ukupnom volumenu. Ovaj matematički model se zove „Volume of Fluid“ (VOF).

Iako su funkcije koje opisuju gustoću i kinematičku viskoznost neprekidne po cijeloj domeni, one su tek djelomično derivabilne zbog skoka funkcije α . Spomenuti problem se rješava drugačijom definicijom funkcije α prema:

$$\alpha(x_i, t) = \begin{cases} 1, & \text{ako točka } x_i \text{ leži unutar prvog fluida} \\ 0 < \alpha < 1, & \text{ako točka } x_i \text{ leži unutar tankog prijelaznog sloja } \delta \\ 0, & \text{ako točka } x_i \text{ leži unutar drugog fluida.} \end{cases} \quad (35)$$

Ovakav model se zove „Continuum Surface Force“ (CSF) i čini indikatorsku funkciju derivabilnom po cijeloj domeni. To je potrebno za tretiranje sile uslijed površinske napetosti, što će se objasniti u sljedećim Podpoglavljima.

2.3.1.1. Jednadžba za indikatorsku funkciju

Kako uvedena indikatorska funkcija predstavlja dodatnu nepoznanicu u sustavu, potrebno je odrediti njenu jednadžbu. Pretpostavka prethodnog modela je da se dvije faze ne miješaju, što znači da nema razmjene mase kroz slobodnu površinu. Ukoliko se prati jedan volumen fluida

koji se kreće zajedno sa slobodnom površinom, udio pojedinih faza opisan funkcijom α će biti konstantan. Prema tome, vremenska promjena funkcije α će biti jednaka nuli, odnosno:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + u_i \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} = 0. \quad (36)$$

Gornja jednačba se može drugačije zapisati da bi se olakšala njena diskretizacija. Ukoliko se jednačba kontinuiteta za nestlačiva strujanja (1) pomnoži s indikatorskom funkcijom, dobije se:

$$\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (37)$$

Zbrajajući jednačbe (36) i (37), te korištenjem lančanog pravila za deriviranje produkta dvaju funkcija [10], slijedi:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + u_i \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial(u_i\alpha)}{\partial x_i} = 0. \quad (38)$$

Gornja jednačba je pogodna za diskretizaciju jer se na produkt skalarnog polja α i vektorskog polja u_i primijenjuje operator divergencije, što se jednostavno diskretizira pomoću Gaussovog teorema (vidi Poglavlje 3).

Indikatorska funkcija poprima vrijednosti između 0 i 1, odnosno ograničena je s obje strane. Korištenjem interpolacijskih shema drugog ili višeg reda (vidi Poglavlje 3) bi proizvelo oscilatorna rješenja, takve sheme u svom jednostavnom obliku ne mogu proizvesti valjana rješenja. Jedine sheme koje osiguravaju ograničenost su one prvog reda točnosti (npr. UDS), međutim one bi razvukle slobodnu površinu, odnosno povećale bi prijelazni sloj δ koji bi trebao biti što manji. Slobodnu površinu bi tada trebalo komprimirati, odnosno smanjiti prijelazni sloj δ . U Wellerovoj shemi [11] se kompresija slobodne površine ostvaruje uvođenjem dodatnog, kompresijskog člana u jednačbu za indikatorsku funkciju (38).

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial(u_i\alpha)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i^r\alpha(1-\alpha)) = 0, \quad (39)$$

gdje u_i^r predstavlja polje brzine koje je prikladno za kompresiju slobodne površine. Nedostatak gornjeg kompresijskog člana je njegova nelinearnost. Dodatni član ima doprinos samo u tankom prijelaznom sloju oko slobodne površine upravo zbog nelinearnog oblika $\alpha(1-\alpha)$. Prednost gornje jednačbe leži u činjenici što se mogu koristiti jednostavnije

interpolacijske sheme za članove jednadžbe, a da ne dođe do narušavanja ograničenosti indikatorske funkcije; uz prikladno odabrano polje brzine u_i^r .

Uz Navier – Stokesove jednadžbe i jednadžbe modela turbulencije, potrebno je i riješiti jednadžbu (39). Kao što je vidljivo, ona je opisana jednim nestacionarnim članom i s dva konvekcijska člana.

2.3.1.2. Modifikacija Navier – Stokesovih jednadžbi uslijed površinske napetosti

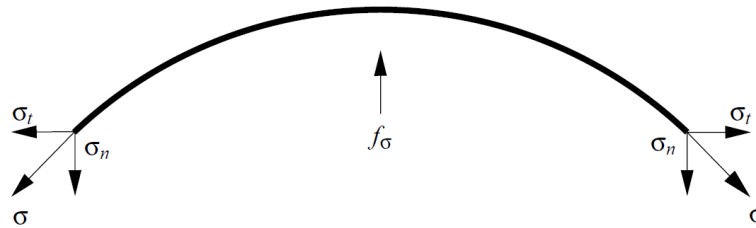
Molekula nekog fluida, koja je duboko unutar jednog fluida (daleko od slobodne površine) je okružena molekulama iste vrste, pa su kohezijske sile između molekula istog fluida uniformne u svim smjerovima. Međutim, ako se molekula nalazi na samoj slobodnoj površini, na nju djeluje samo pola takvih sila, što vodi do rezultantne sile prema unutrašnjosti fluida iste faze. Ova sila se protivi bilo kakvom povećanju slobodne površine. Da bi se slobodna površina promijenila, potrebno je napraviti rad koji je proporcionalan površini. Koeficijent površinske napetosti σ je definiran kao rad potreban da se napravi jedinična slobodna površina [3], i iznosi 0.074 kg/s^2 za zrak i vodu pri $20 \text{ }^\circ\text{C}$ [12].

Sila uslijed površinske napetosti se označava s f_σ i dodaje se na desnu stranu Navier – Stokesovih jednadžbi (2) kao izvorski član. Površinska napetost se očituje kao sila koja je tangencijalna na površinu koja dijeli dva fluida. Međutim, ukoliko je ta površina zakrivljena, sila uslijed površinske napetosti ima i komponentu koja ima smjer normale na slobodnu površinu, Slika 1. Ukoliko su fluidi u ravnoteži, normalna komponenta sile f_σ je uravnotežena pomoću skoka tlaka preko slobodne površine.

Kao što je spomenuto, površinska napetost uzrokuje skok tlaka ΔP_{st} na zakrivljenoj slobodnoj površini. Model Laplace-a i Young-a pretpostavlja da skok tlaka ovisi o srednjoj zakrivljenosti slobodne površine prema [3]:

$$\Delta P_{st} = P_i - P_o = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \sigma \kappa, \quad (40)$$

gdje su R_1 i R_2 glavni radijusi zakrivljenosti slobodne površine, κ srednja zakrivljenost, a P_i i P_o , veći, odnosno manji tlak što ovisi o zakrivljenosti slobodne površine [3].



Slika 1. Sila površinske napetosti na zakrivljenu površinu [3].

Međutim, da bi se mogla modelirati masena sila uslijed površinske napetosti f_σ koja se može shvatiti kao gradijent tlaka uslijed skoka tlaka ΔP_{st} , potrebno je povezati skok tlaka (40) i gradijent tlaka. Tu nastaju dva problema. Prvo, skok tlaka je prisutan jedino na slobodnoj površini, dok jednadžbe gibanja fluida vrijede za cijeli kontinuum opisan pomoću dvaju faza i indikatorske funkcije. Drugi problem je diskontinuitet uslijed skoka tlaka. Oba problema se rješavaju primjenom spomenutog CSF modela. Skalarno polje α je tada glatka funkcija, te je pomoću njega moguće definirati vektor normale na slobodnu površinu, koji je različit od nule samo u tankom prijelaznom sloju δ između dvaju faza. Također se pretpostavlja da se tlak mijenja shodno indikatorskoj funkciji u tankom prijelaznom sloju. Na taj način je skok tlaka definiran kao kontinuirana funkcija. Gradijent indikatorske funkcije, koji je različit od nule samo u tankom prijelaznom sloju koji opisuje slobodnu površinu, tada ima isti smjer kao normala na slobodnu površinu, Slika 2:

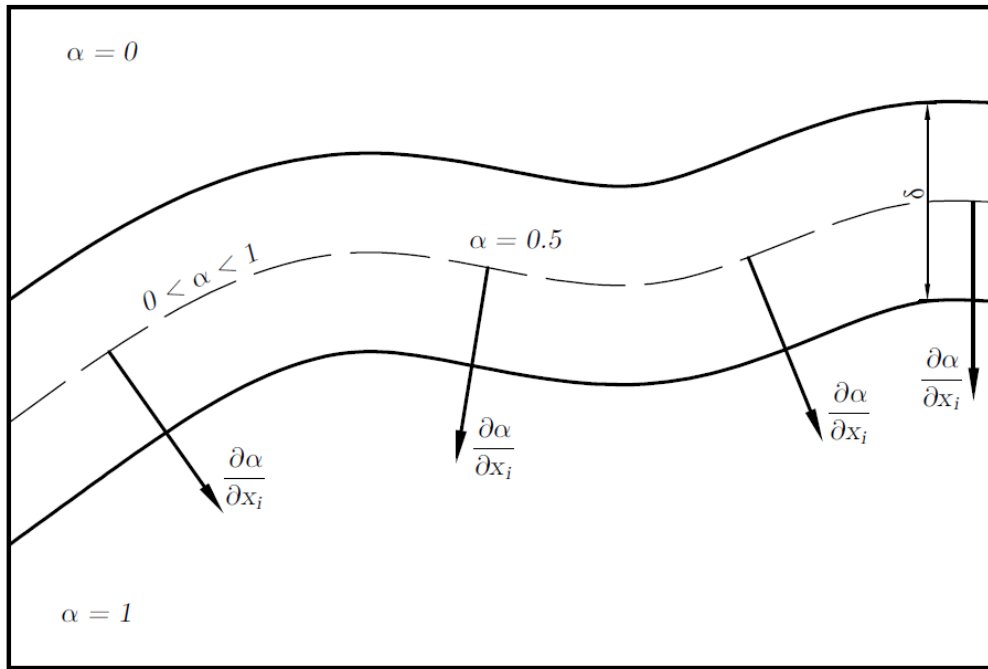
$$n_i = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}. \quad (41)$$

Ukoliko je poznata normala na slobodnu površinu, moguće je odrediti srednju zakrivljenost površine kao divergenciju jediničnog vektora normale, odnosno:

$$\kappa = -\frac{\partial \hat{n}_i}{\partial x_i}, \quad (42)$$

gdje je \hat{n}_i jedinični vektor normale:

$$\hat{n}_i = \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}}{\left| \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right|}. \quad (43)$$



Slika 2. Gradijent indikatorske funkcije α .

Ako se pretpostavi da se tlak uslijed površinske zakrivljenosti u tankom prijelaznom sloju mijenja kao i indikatorska funkcija, on se može prikazati na sljedeći način:

$$P_{st} = P_o + \sigma\kappa(\alpha - \alpha_o), \quad (44)$$

gdje su P_o i α_o konstante. Ukoliko se primijeni operator gradijenta na gornji izraz, dobije se konačni izraz za masenu silu uslijed površinske zakrivljenosti predstavljenu pomoću gradijenta tlaka:

$$f_\sigma = \frac{\partial P_{st}}{\partial x_i} = \sigma\kappa \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = -\sigma \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}}{\left| \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right|} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}. \quad (45)$$

Kao što je spomenuto, gustoća i dinamička viskoznost više nemaju konstantne vrijednosti, već se računaju prema (33) u ovisnosti o indikatorskoj funkciji. Iz tog razloga je potrebno uzeti generalni oblik Navier – Stokesovih jednadžbi, uz dodatak izvorskog člana uslijed zakrivljenosti slobodne površine:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i + f_\sigma, \quad (46)$$

gdje je σ_{ij} simetrični tenzor naprezanja, koji je po generaliziranom Newtonovom zakonu viskoznosti [1] jednak:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right). \quad (47)$$

Iako bi jednadžbu kontinuiteta (1) trebalo raspisati da uzima u obzir promjenu gustoće, može se pokazati da uz jednadžbu za gustoću iz (33) i jednadžbu za indikatorsku funkciju (38), ona ne mijenja oblik [3]. To jest, polje brzine i dalje mora biti solenoidalno. Koristeći jednadžbu kontinuiteta (1), tenzor napreznja se pojednostavljuje na:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (48)$$

Uvrštavanjem gornjeg izraza u (46) dobiju se Navier – Stokesove jednadžbe koje imaju dva dodatna člana usporedivši s (2):

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + f_\sigma + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (49)$$

Zadnji član na desnoj strani prethodne jednadžbe izčezava u slučaju kada je dinamička viskoznost konstantna. Kako se viskoznost mijenja ovisno o indikatorskoj funkciji, primijenjujući pravilo o lančanom deriviranju i jednadžbu kontinuiteta, slijedi:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (50)$$

Konačno se jednadžba (49) može zapisati prema:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \sigma \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}}{\left| \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right|} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (51)$$

Konačno, jednadžba kontinuiteta (1), Navier – Stokesove jednadžbe u obliku (51), jednadžbe modela turbulencije (18) i (19), te dodatna jednadžba za indikatorsku funkciju (39) predstavljaju kompletan matematički model nestlačivog, izotermnog, dvofaznog i turbulentnog strujanja fluida. Taj model obuhvaća sedam parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

2.3.2. Rubni uvjeti indikatorske funkcije

Na ulaznoj granici se zadaje konstantna vrijednost indikatorske funkcije. Na ostalim granicama se najčešće zadaje von Neumannov uvjet u obliku nultog gradijenta. Posebnu pažnju treba

obratiti prilikom zadavanja rubnih uvjeta indikatorske funkcije na nepropusnom zidu gdje se najčešće zadaje nulti gradijent indikatorske funkcije. Međutim, ako kontaktni kut slobodne površine nije u smjeru normale na zid, potrebno je računati zakrivljenost slobodne površine pomoću rubnog uvjeta adhezije na zidu [3].

2.4. Model difrakcije i radijacije

Ovo Podpoglavlje opisuje princip simulacije strujanja oko plutajućeg objekta na valovima koristeći model difrakcije i radijacije koji se zasniva na potencijalnom strujanju fluida. Metoda koja će se ovdje prikazati je primjenjiva za tijela proizvoljnog oblika bez brzine napredovanja, te je detaljnije opisana u [13]. Prema linearnoj potencijalnoj teoriji, fluid se smatra nestlačivim, neviskoznonim i bezrotacijskim. Površinska napetost je također zanemarena. Amplitude gibanja i brzine se smatraju malima, tako da se svi nelinearni članovi (rubnog uvjeta na slobodnoj površini, na krutom tijelu, te kvadratni član brzine u Euler – Bernoullijevoj jednadžbi) mogu zanemariti. Ukupni potencijal strujanja je linearna superpozicija potencijala nailaznog vala Φ_0 , potencijala difrakcije Φ_7 i potencijala radijacije Φ_j uzrokovanih gibanjem tijela sa šest stupnjeva slobode, odnosno:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_7 + \sum_{j=1}^6 \Phi_j. \quad (52)$$

Svi potencijali trebaju zadovoljiti sljedeće uvjete:

1. Laplaceova diferencijalna jednadžba:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \quad (53)$$

Ova jednadžba predstavlja jednadžbu kontinuiteta za potencijalno strujanje i treba biti zadovoljena u cijeloj domeni strujanja fluida, osim u točki singulariteta.

2. Nepropusni rubni uvjet na dnu:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right|_{x_3=-h} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0. \quad (54)$$

Ovaj kinematički rubni uvjet govori da brzina u smjeru osi z mora biti jednaka nuli na morskom dnu (odnosno da nema protoka kroz morsko dno). Dno se smatra horizontalnim na konstantnoj dubini $z = -h$ od srednje slobodne površine.

3. Rubni uvjet na slobodnoj površini:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0. \quad (55)$$

Gornji rubni uvjet predstavlja kombinaciju kinematičkog i dinamičkog rubnog uvjeta na slobodnoj površini. Ovdje je uvedena jedna od linearizacija problema jer se gornja jednačba zadovoljava na srednjoj slobodnoj površini, $z = 0$, dok bi se trebala zadovoljiti na stvarnoj slobodnoj površini, odnosno na $z = \zeta(x, y, t)$.

4. Npropusni rubni uvjet na tijelu:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S_0} = v_i n_i. \quad (56)$$

v_i je vektor brzine osciliranja tijela, dok je n_i jedinični vektor normale koji je usmjeren od tijela prema fluidu. Ovo također predstavlja kinematički rubni uvjet koji govori da nema protoka kroz stijenku tijela. Da bi se uvjet zadovoljio, brzina fluida uz samo tijelo mora biti jednaka brzini gibanja tijela. Kao što je vidljivo, rubni uvjet se zadovoljava samo na srednjoj oplakanoj površini tijela S_0 , što predstavlja dodatno pojednostavljenje.

5. Uvjet radijacije:

Ovaj uvjet se odnosi na potencijale difrakcije i radijacije (Φ_7 i Φ_j). Riječima, u velikoj udaljenosti od tijela, ovi potencijali moraju izčeznuti. Ovi uvjeti omogućavaju jedinstvenost rješenja za spomenute potencijale. Više o uvjetu radijacije se može naći u [14].

U ovom radu će se razmatrati teorija za pravilni progresivni Airyev val (vidi jednačbu (59)). Superpozicijom takvih valova se može dobiti proizvoljno valovito more. Koordinatni sustav koji se koristi za opis valova, odnosno svih potencijala je desnokretni fiksni koordinatni sustav $Oxyz$ kojemu je ishodište u težištu srednje vodne linije plutajućeg objekta, a os z gleda vertikalno prema gore. Linearni potencijali su funkcije prostornih i

vremenskih koordinata, te se mogu zapisati kao produkt prostorno ovisnog potencijala i vremenski ovisnog harmonijskog dijela, odnosno:

$$\Phi(x, y, z; t) = \phi(x, y, z)e^{-i\omega t}. \quad (57)$$

Prema [15], jednostavni zapis prostorno ovisnog potencijala je:

$$\phi = (\phi_0 + \phi_7)\zeta_0 + \sum_{j=1}^6 \phi_j \bar{\eta}_j. \quad (58)$$

gdje je ζ_0 amplituda nailaznog vala, a $\bar{\eta}_j$ kompleksna amplituda j – tog stupnja slobode. Iz gornje jednadžbe je vidljivo da potencijal nailaznog vala i difrakcije linearno ovise o amplitudi nailaznog vala, dok su komponente potencijala radijacije ovisne o amplitudama njihanja broda.

Nailazni, progresivni Airyev val u vodi konstantne dubine je definiran prema:

$$\phi_0 = -i \frac{g \cosh k(h+z)}{\omega \cosh kh} e^{ik(x \cos \beta + y \sin \beta)}. \quad (59)$$

gdje su:

- ω – kružna frekvencija vala,
- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – valni broj,
- λ – valna duljina,
- β – smjer vala, $\beta = 0$ za val u pozitivnom smjeru osi Ox .

Disperzijska jednadžba povezuje dubinu, kružnu frekvenciju vala i valni broj, te glasi:

$$\omega^2 = kg \tanh kh. \quad (60)$$

Za duboko more, odnosno za $kh > \pi$, dobije se jednostavniji izraz za valni broj:

$$v = \frac{\omega^2}{g}. \quad (61)$$

Elevacija vala se može izračunati prema:

$$\zeta(x, y; t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = \zeta_0 e^{ik(x \cos \beta + y \sin \beta) - i\omega t}. \quad (62)$$

Oscilatorno gibanje tijela se može izraziti pomoću produkta kompleksne amplitude pomaka i vremenskog harmonijskog dijela:

$$\eta_j(x, y; t) = \bar{\eta}_j e^{-i\omega t}. \quad (63)$$

Dinamički tlak slijedi iz Euler – Bernoullijeve jednadžbe:

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = i\rho\omega \left((\phi_0 + \phi_7)\zeta_0 + \sum_{j=1}^6 \phi_j \eta_j \right) e^{-i\omega t}. \quad (64)$$

Pomoću dinamičkog tlaka je moguće izračunati uzbudne sile ($k = 1, 2, 3$) i momente ($k = 4, 5, 6$) prvog reda. Uzbudna sila proizlazi iz dva dijela: prvi dio je uslijed potencijala nailaznog vala (Froude – Krylovljeva sila), a drugi uslijed potencijala difrakcije. Integracija tlaka se vrši po srednjoj oplakanoj površini S_0 , te predstavlja još jednu linearizaciju:

$$X_k = i\rho\omega\zeta_0 e^{-i\omega t} \int_{S_0} (\phi_0 + \phi_7) n_k dS_0. \quad (65)$$

Hidrodinamičke sile i momenti koji nastaju uslijed potencijala radijacije se još nazivaju i hidrodinamička reakcija, te se računaju prema:

$$F_k = i\rho\omega \sum_{j=1}^6 \eta_j e^{-i\omega t} \int_{S_0} \phi_j n_k dS_0. \quad (66)$$

U gornjim jednadžbama n_k predstavlja generalizirane kosinuse smjera na srednju slobodnu površinu S_0 , a definirani su u sljedećoj tablici, Tablica 1.

Tablica 1. Generalizirani kosinusi smjera.

$n_1 = \cos(n, x)$	$n_4 = yn_3 - zn_2$
$n_2 = \cos(n, y)$	$n_5 = zn_1 - xn_3$
$n_3 = \cos(n, z)$	$n_6 = xn_2 - yn_1$

Derivirajući jednadžbu (63) po vremenu, mogu se dobiti fazni pomaci brzine i ubrzanja. Brzina kasni za $\pi/2$ ($-i$) prema pomaku, dok ubrzanje kasni za π ($i^2 = -1$). Na taj način se hidrodinamička reakcija može zapisati kao linearna kombinacija doprinosa koji je u fazi s brzinom i doprinosa koji je u fazi s ubrzanjem:

$$F_k = \sum_{j=1}^6 a_{kj} \dot{\eta}_j + \sum_{j=1}^6 b_{kj} \eta_j = i\rho\omega \sum_{j=1}^6 \eta_j e^{-i\omega t} \int_{S_0} \phi_j n_k dS_0, \quad (67)$$

gdje η_j označava brzinu, a $\ddot{\eta}_j$ ubrzanje j – tog stupnja slobode gibanja. Izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova lijeve i desne strane jednadžbe (67) slijede izrazi za hidrodinamičku dodatnu masu a_{kj} i hidrodinamičko prigušenje b_{kj} :

$$a_{kj} = \Im \left(\frac{\rho}{\omega} \int_{S_0} \phi_j n_k dS_0 \right), \quad (68)$$

$$b_{kj} = -\Re \left(\rho \int_{S_0} \phi_j n_k dS_0 \right). \quad (69)$$

Indeksi u izrazima a_{kj} i b_{kj} označavaju dodatnu silu u k – toj jednadžbi uslijed gibanja tijela u j – tom smjeru. Može se pokazati da su koeficijenti dodatne mase i hidrodinamičkog prigušenja simetrični, odnosno da vrijedi $a_{kj} = a_{jk}$ i $b_{kj} = b_{jk}$.

Da bi se omogućio proračun koeficijenata hidrodinamičke reakcije, potrebno je poznavati potencijale strujanja. Potencijal nailaznog vala ϕ_0 je poznat (59). Preostali, nepoznati potencijali radijacije i difrakcije se mogu predstaviti kontinuiranom razdiobom izvora, odnosno ponora po srednjoj oplakanoj površini tijela. To jest:

$$\phi_j(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \sigma_j(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) G(x, y, z, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) dS_0 \quad \text{za } j = 1, \dots, 7, \quad (70)$$

gdje su:

$\phi_j(x, y, z)$ – potencijal u točki (x, y, z) na srednjoj oplakanoj površini S_0 . $j = 1, \dots, 6$ odgovaraju pripadnim potencijalima radijacije, dok $j = 7$ odgovara potencijalu difrakcije. Potrebno je naglasiti da svaki potencijal pojedinačno zadovoljava sve rubne uvjete.

$\sigma_j(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ – kompleksni intenzitet izvora u točki $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ na srednjoj oplakanoj površini S_0 uslijed gibanja tijela u j – tom smjeru.

$G(x, y, z, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ – Greenova funkcija koja opisuje utjecaj pulsirajućeg izvora $\sigma_j(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ (koji se nalazi na svojim, fiksnim koordinatama $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$) na potencijal $\phi_j(x, y, z)$ (u točki x, y, z). Greenova funkcija je singularna u $(x, y, z) = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, što predstavlja problem u numeričkom proračunu. Ona također zadovoljava sve rubne uvjete.

Jedan od brojnih oblika Greenove funkcije za hidrodinamičke probleme je [13], [14]:

$$\begin{aligned}
G(x, y, z, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \\
&+ PV \int_0^{\infty} \frac{2(\xi + \nu) e^{-\xi h} \cosh \xi(h + \hat{z}) \cosh \xi(h + z)}{\xi \sinh \xi h - \nu \cosh \xi h} J_0(\xi R) d\xi + \\
&+ i \frac{2\pi(k^2 - \nu^2) \cosh k(h + \hat{z}) \cosh k(h + z)}{h(k^2 - \nu^2) - \nu} J_0(kR), \quad (71)
\end{aligned}$$

gdje su:

$$r = \sqrt{(x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2 + (z - \hat{z})^2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2 + (z + \hat{z})^2},$$

$$R = \sqrt{(x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2},$$

$$\xi = \text{varijabla integracije,}$$

$$J_0 = \text{Besselova funkcija prve vrste, nultog reda.}$$

Nepravi integral u gornjoj jednadžbi ima neodređenu vrijednost zbog singulariteta podintegralne funkcije. Iz tog razloga se koristi Cauchyeva glavna vrijednost integrala, koja je prikazana oznakom *PV* (engleski „principal value“) [16].

Nepoznati intenziteti izvora $\sigma_j(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ se određuju tako da zadovolje nepropusni rubni uvjet na tijelu (56). Ukoliko se u tu jednadžbu uvrsti (70) i derivacija izraza za pomak tijela (63) koja predstavlja brzinu tijela u j – tom smjeru, dobije se:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \sigma_j(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \frac{\partial G(x, y, z, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})}{\partial n} dS_0 = n_j. \quad (72)$$

Kako se za proračun predpostavljaju jedinične amplitude gibanja, desna strana jednadžbe jednostavno predstavlja kosinuse smjera, Tablica 1.

Potencijal difrakcije se dobije iz modela difrakcije u kojemu tijelo mirno stoji, odnosno brzina tijela uzrokovana nailaznim valom mora poništiti brzinu tijela uzrokovanu difrakcijom:

$$\frac{\partial \phi_7}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial n}. \quad (73)$$

Rješavajući integralne jednadžbe (72) i (73) dobiju se nepoznati intenziteti izvora, odnosno ponora. Uvrštavajući ih u izraz (70), dobiju se nepoznati potencijali, te se mogu izračunati koeficijenti dodatne mase i hidrodinamičkog prigušenja (68) i (69), kao i uzbudna sila uslijed

nailaznog vala i difrakcije (65). Konačno, gibanje broda kao linearnog oscilatora se tada može opisati pomoću sljedećih spregnutih običnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\sum_{j=1}^6 \left((m_{kj} + a_{kj}) \ddot{\eta}_j + b_{kj} \dot{\eta}_j + c_{kj} \eta_j \right) = X_k. \quad (74)$$

Pošto su gibanja harmonijska u vremenu (63), kao i uzbudne sile (65), gornja jednadžba prelazi u sistem algebarskih jednadžbi koje imaju sljedeći oblik:

$$\sum_{j=1}^6 \left(-\omega^2 (m_{kj} + a_{kj}) - i\omega b_{kj} + c_{kj} \right) \bar{\eta}_j = \bar{X}_k, \quad (75)$$

jer se može zapisati: $X_k = \bar{X}_k e^{-i\omega t}$, gdje je \bar{X}_k kompleksna amplituda uzbudne sile. Zbog preglednosti, u gornjim jednadžbama pojedine matrice su:

- m_{kj} = matrica masa, odnosno momenata masa tijela,
- a_{kj} = matrica dodane mase,
- b_{kj} = matrica hidrodinamičkog prigušenja,
- c_{kj} = matrica hidrostatske krutosti (povratne sile i momenti uslijed statičkog tlaka).

2.5. Gibanje krutog tijela

U ovom Podpoglavlju će se ukratko opisati gibanje krutog tijela. Kruto tijelo je skup točaka čija se međusobna udaljenost ne mijenja s vremenom. Također će se opisati princip rješavanja problema gdje su gibanje fluida i nekog proizvoljnog tijela (npr. broda) spregnuti. Rotacijsko gibanje zahtijeva posebnu pažnju, te je ovdje detaljnije opisano. Kvaternionski zapis Eulerovih jednadžbi rotacijskog gibanja omogućuje znatno pojednostavljenje proračuna gibanja krutog tijela. Iz tog razloga su ukratko objašnjeni i sami kvaternioni.

Za razliku od elastičnog, svako kruto tijelo ima samo šest stupnjeva slobode gibanja: tri translacijska i tri rotacijska. Tijelo rotira oko osi desnokretnog koordinatnog sustava koji je vezan za tijelo, odnosno koji se giba zajedno s tijelom. Ishodište spomenutog koordinatnog sustava je smješteno u težištu tijelu, a sam sustav se označava s $OX_1X_2X_3$. U slučaju broda, os OX_1 je postavljena u uzdužnoj simetralnoj ravnini od krme prema pramcu, dok je os OX_2 postavljena prema lijevom boku broda (gledajući od krme). Shodno tome, os OX_3 gleda vertikalno prema gore. Translacijska gibanja se redom od osi OX_1 do OX_3 nazivaju: zalijetanje (engleski „surge“), zanošenje (engleski „sway“) i poniranje (engleski „heave“).

Rotacijska gibanja oko istih osi su redom: ljuljanje ili valjanje (engleski „roll“), posrtanje (engleski „pitch“), te zaošijanje (engleski „yaw“).

2.5.1. *Translacijsko gibanje krutog tijela*

Translacijsko gibanje tijela je opisano poznatim drugim Newtonovim zakonom. U slučaju kad je masa tijela konstantna, tri obične diferencijalne jednačbe opisuju translacijsko gibanje tijela:

$$F_i = m \frac{d^2 x_i}{dt^2}. \quad (76)$$

Da bi se riješile gornje jednačbe potrebno je poznavati početne uvjete. Kako je diferencijalna jednačba drugog reda, zadaje se početni uvjet brzine i položaja tijela. Ako je poznato rješenje strujanja fluida, moguće je odrediti sile s lijeve strane jednačbe (76) koje uključuju i vanjske utjecaja (primjerice pogonska sile i slično.)

2.5.2. *Rotacijsko gibanje krutog tijela*

Rotacijsko gibanje krutog tijela je opisano Eulerovim jednačbama [17]. U sljedećem Podpoglavlju će se izvesti spomenute jednačbe na temelju Eulerovih kutova, te će se kratko opisati problemi koji se javljaju u takvoj formulaciji. Dalje su prikazane osnove kvaternionske algebre [18] i jednačbe za rotaciju u kvaternionskom zapisu, detaljnije opisane u [19].

2.5.2.1. *Jednačbe rotacije krutog tijela u matričnom obliku pomoću Eulerovih kutova*

Za razmatranja u ovom dijelu, definiraju se dva ortogonalna koordinatna sustava. Koordinatni sustav $Ox_1x_2x_3$ je inercijski, fiksni koordinatni sustav, dok je s $OX_1X_2X_3$ označen koordinatni sustav vezan za tijelo. Neki vektor ima koordinate x_i promatrajući iz fiksnog koordinatnog sustava, te koordinate X_i u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo. Transformacija iz jednog u drugi koordinatni sustav je dana s:

$$x_i = Q_{ij}(t)X_j, \quad (77)$$

gdje je $Q_{ij}(t)$ matrica ortogonalne transformacije (koja predstavlja rotaciju pomoću Eulerovih kutova) za koju vrijedi:

$$Q_{ij}Q_{kj} = \delta_{ik}, \quad (78)$$

ili u matricnoj notaciji $QQ^T = I$. Deriviranjem izraza (77) po vremenu, dobije se vremenska promjena vektora:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dQ_{ij}}{dt} X_j + Q_{ij} \frac{dX_j}{dt}. \quad (79)$$

Kako je $X_j = Q_{kj} x_k$, uvrštavanjem slijedi:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dQ_{ij}}{dt} Q_{kj} x_k + Q_{ij} \frac{dX_j}{dt}. \quad (80)$$

Iz jednakosti (78), deriviranjem slijedi:

$$\frac{dQ_{ij}}{dt} Q_{kj} + Q_{ij} \frac{dQ_{kj}}{dt} = 0. \quad (81)$$

Promatranjem gornjeg izraza u $t = 0$, slijedi da je $Q_{ij}|_{t=0} = \delta_{ij}$, te se može pisati:

$$\frac{dQ_{ij}}{dt} \delta_{kj} + \delta_{ij} \frac{dQ_{kj}}{dt} = 0 \quad \text{slijedi} \quad \frac{dQ_{ik}}{dt} = -\frac{dQ_{ki}}{dt}. \quad (82)$$

Time je pokazano da vremenska derivacija ortogonalne matrice proizvodi antisimetričnu matricu. Antisimetrične matrice imaju samo tri različite vrijednosti, te se može pisati:

$$s_{ik}(t) = \frac{dQ_{ij}}{dt} Q_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (83)$$

Jednadžba (80) se na taj način može jednostavnije zapisati kao:

$$\frac{dx_i}{dt} = \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k + Q_{ij} \frac{dX_j}{dt}, \quad (84)$$

gdje je ω_j vektor kutne brzine u fiksnom koordinatnom sustavu, a ε_{ijk} Levi – Civita simbol, odnosno tenzor permutacije. Koristeći (77), jednadžba u koordinatnom sustavu tijela glasi:

$$\frac{dx_i}{dt} = Q_{ij} \left(\varepsilon_{jkm} \Omega_k X_m + \frac{dX_j}{dt} \right), \quad (85)$$

gdje je $\omega_i = Q_{ij} \Omega_j$. Za raspisivanje gornjeg izraza je korištena invarijanta vektorskog produkta [19].

Moment količine gibanja m_i (u fiksnom koordinatnom sustavu) je povezan s kutnom brzinom pomoću tenzora inercije $\mathcal{A}_{ij}|_{Ox_1x_2x_3}$ (također u fiksnom koordinatnom sustavu):

$$m_i = \mathcal{A}_{ij}|_{Ox_1x_2x_3} \omega_j. \quad (86)$$

U koordinatnom sustavu koji je vezan za tijelo, tenzor inercije $\mathcal{A}_{ij}|_{OX_1X_2X_3}$ je konstantan, odnosno nije funkcija vremena. Također, ukoliko se koriste glavne osi inercije pri definiranju koordinatnog sustava tijela, kao što je to često slučaj, problem se dodatno pojednostavljuje:

$$\mathcal{A}_{ij}|_{OX_1X_2X_3} = I_{ij} \begin{cases} \neq 0, = \text{const.}, & \text{za } i = j \\ = 0, & \text{za } i \neq j. \end{cases} \quad (87)$$

Drugi Newtonov zakon primijenjen na rotacijska gibanja kaže da je vremenska promjena momenata količine gibanja jednaka vanjskim momentima koji djeluju na tijelo:

$$\frac{dm_i}{dt} = t_i. \quad (88)$$

Po analogiji s izrazom (85), lijeva strana gornje jednadžbe se može zapisati kao:

$$\frac{dm_i}{dt} = Q_{ij} \left(\varepsilon_{jkm} \Omega_k M_m + \frac{dM_j}{dt} \right). \quad (89)$$

Uz transformaciju vanjskih momenata $t_i = Q_{ij} T_j$ slijedi:

$$Q_{ij} \left(\varepsilon_{jkm} \Omega_k M_m + \frac{dM_j}{dt} \right) = Q_{ij} T_j. \quad (90)$$

Množenjem gornjeg izraza slijeva s Q_{ni} , slijedi:

$$\varepsilon_{nkm} \Omega_k M_m + \frac{dM_n}{dt} = T_n. \quad (91)$$

Sređivanjem gornjeg izraza (zamjena indeksa zbog jednostavnosti, te zamjena redoslijeda u vektorskom produktu) dobije se:

$$\frac{dM_i}{dt} = \varepsilon_{ijk} M_j \Omega_k + T_i. \quad (92)$$

Gornji izraz predstavlja poznate Eulerove jednadžbe, koje se uz $M_i = I_{ij} \Omega_j$ mogu jednostavnije zapisati:

$$I_{ij} \frac{d\Omega_j}{dt} = \varepsilon_{ijk} I_{jm} \Omega_m \Omega_k + T_i. \quad (93)$$

Zbog preglednosti, ovdje su prikazane i gornje jednadžbe u raspisanom, matričnom obliku:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_{22} - I_{33}}{I_{11}} \Omega_2 \Omega_3 + \frac{T_1}{I_{11}} \\ \frac{I_{33} - I_{11}}{I_{22}} \Omega_3 \Omega_1 + \frac{T_2}{I_{22}} \\ \frac{I_{11} - I_{22}}{I_{33}} \Omega_1 \Omega_2 + \frac{T_3}{I_{33}} \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Gornje tri nelinearne, spregnute diferencijalne jednačbe predstavljaju rotaciju krutog tijela u koordinatnom sustavu koji je vezan za tijelo. Međutim, da bi se kompletno odredilo gibanje tijela u prostoru, potrebno je poznavati i vremensku evoluciju ortogonalne transformacije $Q_{ij}(t)$. Dakle, potrebno je riješiti i jednačbe (83). Množenjem spomenute jednačbe s Q_{km} zdesna, dobije se:

$$s_{ik}Q_{km} = \frac{dQ_{ij}}{dt}\delta_{jm}. \quad (95)$$

Odnosno, uz $s_{ik}Q_{km} = Q_{km}s_{ik}$ (jer se matrica transformira prema: $s_{im} = Q_{ij}S_{jk}Q_{mk}$):

$$\frac{dQ_{im}}{dt} = Q_{km}s_{ik}. \quad (96)$$

Zbog preglednosti, ovdje su prikazane i gornje jednačbe u matričnom obliku:

$$\frac{dQ}{dt} = Q \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (97)$$

Ove jednačbe predstavljaju još devet dodatnih jednačbi koje je potrebno riješiti da bi se opisala rotacija krutog tijela u prostoru. Zajedno s jednačbama (94), to je ukupno dvanaest jednačbi. Numerička integracija ovakvog sistema jednačbi je skupa, te može unijeti greške zbog aritmetike računala, odnosno ortogonalnost matrice $Q(t)$ može biti ne očuvana. Ukoliko se rotacija opiše kvaternionima, potrebno je riješiti samo četiri jednačbe koje kompletno opisuju rotaciju tijela u prostoru. Također, Eulerovi kutovi, iako najintuitivniji način prikaza rotacije imaju ozbiljan problem. Naime, rotacija se prema Euleru odvija kao tri uzastopne rotacije oko tri različite (ili dvije iste, ali rotirane) osi. Najčešće se rotacija vrši oko osi Oz , pa oko osi Ox , te konačno, oko pomaknute osi Oz . Problem nastaje u prikazu rotacija kao triju uzastopnih. Na taj način može doći do takozvanog zaključavanja kardana (engleski „gimbal lock“), što je naziv za gubitak jednog stupnja slobode rotacije. U gornjoj konfiguraciji se primjerice to može dogoditi ukoliko se tijelo u drugoj rotaciji oko osi Ox uopće ne zarotira. Na taj način će prva i zadnja rotacija opisivati rotaciju oko jedne te iste osi.

2.5.2.2. Algebra kvaterniona

Kvaternioni se najlakše mogu shvatiti ako se zamisli jedan kompleksni broj, primjerice:

$$q = n + im, \quad (98)$$

gdje je i imaginarna jedinica. Dalje, ukoliko su n i m posebni kompleksni brojevi, s različitom imaginarnom dimenzijom, redom $n = a + jc$ i $m = b + jd$, uvrštavanjem u (98) slijedi:

$$q = (a + jc) + i(b + jd) = a + jc + ib + ijd = a + ib + jc + kd, \quad (99)$$

gdje je iskorištena definicija $ij = k$. Gornja jednačba definira općeniti kvaternion, koji ima četiri dimenzije: jednu realnu i tri imaginarne. Za određivanje operacija s kvaternionima, potrebno je napisati sljedeće definicije:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1, \\ ij = -ji &= k, \\ jk = -kj &= i, \\ ki = -ik &= j. \end{aligned} \quad (100)$$

Odnosno skraćeno zapisano u indeksnoj notaciji, uz $1 = e_0, i = e_1, j = e_2$ i $k = e_3$, slijedi:

$$e_i e_j = \varepsilon_{ijk} e_k - \delta_{ij} e_0. \quad (101)$$

Notacija kvaterniona koja će se koristiti pri definiranju algebarskih operacija je:

$$q = (a, \underline{b}), \quad (102)$$

gdje a predstavlja skalarni dio (uz e_0), dok \underline{b} predstavlja vektorski dio (uz e_1, e_2, e_3). Ovakva notacija je izabrana radi slaganja s literaturom [19]. Koristeći pravilo (101), jednostavno se raspisivanjem mogu dokazati sljedeće operacije i definicije s kvaternionima:

- zbrajanje dvaju kvaterniona:

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2, \underline{b}_1 + \underline{b}_2), \quad (103)$$

- množenje dvaju kvaterniona:

$$q_1 q_2 = (a_1 a_2 - \underline{b}_1 \cdot \underline{b}_2, a_1 \underline{b}_2 + a_2 \underline{b}_1 + \underline{b}_1 \times \underline{b}_2), \quad (104)$$

gdje je $\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_2$ skalarni produkt dvaju vektora, a $\underline{b}_1 \times \underline{b}_2$ vektorski produkt.

- konjugirani kvaternion nekog kvaterniona $q = (a, \underline{b})$ je:

$$q^c = (a, -\underline{b}). \quad (105)$$

Kvaternion $e_0 = (1, \underline{0})$ je jedinični kvaternion. Za bilo koji kvaternion q vrijedi:

$$e_0 q = q e_0 = q. \quad (106)$$

Norma kvaterniona je definirana slično kao kod kompleksnih brojeva:

$$N(q) = qq^c. \quad (107)$$

Svaki kvaternion $q = (a, -\underline{b})$ koji je različit od nule ima inverzni kvaternion koji se može izračunati prema:

$$q^{-1} = \frac{(a, -\underline{b})}{qq^c} = \frac{q^c}{N(q)}. \quad (108)$$

Potrebno je naglasiti da množenje dvaju kvaterniona nije komutativno, odnosno $q_1q_2 \neq q_2q_1$. Slično kao i u linearnoj algebri prilikom operacija s matricama, tako se i dijeljenje mora definirati kao lijevo ili desno množenje s q^{-1} , što u općenitom slučaju daje različite rezultate. Asocijativnost zbrajanje i množenja vrijedi, kao i distributivnost.

Rotacija prostornog vektora $v = (0, \underline{v})$ (koji se još naziva i čisti kvaternion, engleski „pure quaternion“) oko osi \underline{p} za kut θ daje novi prostorni vektor $v' = (0, \underline{v}')$ koji se može izračunati prema:

$$v' = qvq^{-1}, \quad \text{za } N(q) = 1 \quad \rightarrow \quad v' = qvq^c. \quad (109)$$

gdje je q kvaternion koji predstavlja rotaciju, a definiran je dvoznačno prema:

$$q = \pm \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\underline{p} \right). \quad (110)$$

\underline{p} je jedinični vektor oko kojeg se vrši rotacija. Znak \pm fizikalno znači da oba kvaterniona predstavljaju jednu te istu rotaciju. Detaljan izvod gornjeg izraza se može naći u [19]. Rotacija se najčešće vrši jediničnim kvaternionom (kojemu je norma jednaka jedinici). Na taj način je očuvana norma vektora koji se rotira. U protivnom slučaju bi došlo do istezanja ($N(q) > 1$) ili skupljanja vektora ($N(q) < 1$). Jednostavno objašnjenje zašto u izrazu (110) stoji polovica kuta rotacije se može dobiti usporedbom s kompleksnim brojevima. Ako se promatra neka točka u kompleksnoj ravnini ($x + iy$), množenje tog kompleksnog broja s drugim kompleksnim brojem (kojemu je apsolutna vrijednost jednaka jedinici) uzrokuje rotaciju. Primjerice, množenjem nekog kompleksnog broja koji predstavlja točku u kompleksnoj ravnini s imaginarnom jedinicom i odgovara rotaciji te točke za $\pi/2$. Međutim, kako je množenje kompleksnih brojeva komutativno ($z_1z_2 = z_2z_1$), potrebno je samo jedno množenje da bi se ostvarila rotacija. Da bi se ostvarila rotacija vektora pomoću kvaterniona, potrebno je vektor pomnožiti slijeva s kvaternionom i zdesna s konjugiranim kvaternionom (109). Upravo zbog tog „dvostrukog“ množenja, u izrazu (110) stoji polovica kuta rotacije.

Tako se, primjerice, jedinični kvaternion $\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 i + 0j + 0k\right)$ može poistovjetiti s rotacijom od $\pi/2$ (90°) oko osi Ox .

Slično kao i s matričnom reprezentacijom rotacija, kompozicija od dvaju uzastopnih rotacija oko osi \underline{p}_1 i \underline{p}_2 za kutove θ_1 i θ_2 se može poistovjetiti s rotacijom oko osi \underline{p}_3 za kut θ_3 . Kvaternion koji opisuje takvu rotaciju je $q_3 = q_2 q_1$ gdje je q_i ($i = 1, 2, 3$) definiran prema (110) za odgovarajuće \underline{p}_i i θ_i .

2.5.2.3. Kvaternionski oblik jednadžbi za rotaciju krutog tijela

Neka je $q(t)$ kvaternion koji predstavlja rotaciju identičnu rotaciji prikazanoj pomoću ortogonalne matrice $Q(t)$ (za konstruiranje kvaterniona iz matrice Q , i obrnuto vidjeti [19]). Također, njegova norma je $N(q) = 1$. Vektor položaja u fiksnom, prostornom koordinatnom sustavu je definiran pomoću kvaterniona $x = (0, \underline{x})$, dok je vektor položaja u koordinatnom sustavu tijela definiran pomoću kvaterniona $X = (0, \underline{X})$. Prema (109), slijedi:

$$x = qXq^C. \quad (111)$$

Deriviranjem gornjeg izraza po vremenu, dobije se:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dq}{dt} X q^C + q \frac{dX}{dt} q^C + qX \frac{dq^C}{dt}. \quad (112)$$

Uz $X \neq X(t) = \text{const.}$ (radi se o vektoru koji je konstantan u koordinatnom sustavu fiksnim za tijelo), te uz $Xq^C = q^C x$ i $qX = xq$, slijedi:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dq}{dt} q^C\right) x + x \left(q \frac{dq^C}{dt}\right), \quad (113)$$

gdje su zagrade postavljene zbog preglednosti. Jednostavnim raspisivanjem se može pokazati da vrijedi [19]:

$$\frac{dq}{dt} q^C = v = (0, \underline{v}). \quad (114)$$

Odnosno, v je čisti kvaternion kao što su i x i X . Kako je čistim kvaternionima skalarni dio jednak nuli, jednostavno se može provjeriti da je konjugirani kvaternion jednak negativnom kvaternionu, to jest: $v^C = -v$. Imajući to u vidu, jednadžba (113) prelazi u:

$$\frac{dx}{dt} = vx - xv. \quad (115)$$

Gornja kvaternionska jednadžba se može zapisati kao vektorska jednadžba u indeksnoj notaciji (gdje indeksi $i = 1, 2, 3$ odgovaraju pripadnim imaginarnim jedinicama e_1, e_2, e_3):

$$\frac{dx_i}{dt} = \varepsilon_{ijk} 2v_j x_k. \quad (116)$$

Uvodeći supstituciju $\omega = 2v$, te uz (114), jednostavno slijedi dodatna kvaternionska jednadžba:

$$\omega = 2v = 2 \frac{dq}{dt} q^c \rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} \omega q = \frac{1}{2} q \Omega. \quad (117)$$

Množenje dvaju kvaterniona (104) se može zapisati u matričnom obliku, detaljan izvod se može naći u [19]. Zbog preglednosti, jednadžba (117) u matričnom obliku glasi:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}. \quad (118)$$

Kao što je vidljivo, postoje četiri, umjesto devet dodatnih jednadžbi. Upravo iz tog razloga se najčešće za opis rotacije krutog tijela koriste kvaternioni. Prva jednadžba u (118) jednostavno osigurava očuvanje jedinične norme kvaterniona q . Uz gornje jednadžbe, potrebno je riješiti i Eulerove jednadžbe (94). Vremenska promjena cijelog sustava je sada opisana s ukupno sedam, umjesto dvanaest jednadžbi što predstavlja znatnu uštedu. Također je izbjegnuta problem očuvanja ortogonalnosti matrice rotacije.

Vanjski moment promatran u koordinatnom sustavu tijela se također može prikazati pomoću pripadnog čistog kvaterniona, odnosno $T = (0, \underline{T})$. Transformacija iz prostornog koordinatnog sustava u koordinatni sustav tijela se također vrši prema:

$$T = q^c t q. \quad (119)$$

Ovakva transformacija je analogna transformaciji pomoću ortogonalne matrice $T_i = Q_{ji} t_j$. Konačno, položaj točke X u fiksnom, prostornom koordinatnom sustavu se dobije pomoću jednadžbe (111), što odgovara transformaciji pomoću ortogonalne matrice $x_i = Q_{ij} X_j$.

Kako kvaternioni predstavljaju složenu rotaciju tijela kao jednu rotaciju oko proizvoljne prostorne osi, problem zaključavanja kardana je riješen. Međutim, treba napomenuti: ukoliko se Eulerove rotacije „pretvore“ u kvaternione, te se izvrši uzastopna rotacija kvaternionima, problem je i dalje postojan.

3. DISKRETIZACIJA JEDNADŽBI MATEMATIČKOG MODELA

Parcijalne diferencijalne jednačbe koje predstavljaju matematički model strujanja fluida su analitički nerješive za gotovo sve probleme u pomorskoj industriji. Međutim, različitim metodama je moguće doći do približnih, inženjerski prihvatljivih rješenja. U ovom Poglavlju će se opisati danas najkorištenija numerička metoda računalne dinamike fluida, metoda kontrolnih volumena. Domena je diskretizirana pomoću konačnog broja proizvoljnih, nestrukturiranih kontrolnih volumena, koji su tijekom vremenskog koraka nepomični. Integracijom parcijalnih diferencijalnih jednačbi po kontrolnom volumenu, primjenom Gaussovog teorema, te odabirom neke od brojnih interpolacijskih shema, dobije se sustav linearnih jednačbi. Taj sustav jednačbi se rješava u svakom vremenskom koraku. Njegovo rješenje daje nepoznata vektorska i skalarna polja u diskretnom obliku (u samim centrima kontrolnih volumena) koja opisuju strujanje.

U ovom Poglavlju će se opisati diskretizacija standardne skalarne transportne jednačbe, sprega brzine i tlaka, te implementacija rubnih uvjeta u računalni kod. 3D panel metoda za proračun modela difrakcije i radijacije će se također prikazati. Konačno, dan je kratki opis sprege računalne dinamike fluida i gibanja krutog tijela.

3.1. Diskretizacija standardne transportne jednačbe

Standardna transportna jednačba za neko skalarno polje ϕ glasi:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i \phi)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = S_\phi(\phi). \quad (120)$$

Brzina u_i i koeficijent difuzije Γ_ϕ su poznati; jedina nepoznanica je skalarno polje ϕ . Članovi gornje jednačbe se redom nazivaju: nestacionarni, konvekcijski, difuzijski i izvorski član. Zbog difuzijskog člana, gornja parcijalna diferencijalna jednačba je drugog reda. Integracijom gornje jednačbe po kontrolnom volumenu koji se promatra V_M , te uzimanjem u obzir da je integral linearan operator [10], dobije se:

$$\int_{V_M} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{V_M} \frac{\partial(\rho u_i \phi)}{\partial x_i} dV - \int_{V_M} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dV = \int_{V_M} S_\phi(\phi) dV. \quad (121)$$

U sljedećim Podpoglavljima slijedi diskretizacija pojedinih članova gornje jednadžbe.

3.1.1. Diskretizacija nestacionarnog člana

Najjednostavnija vremenska diskretizacija koja osigurava prvi red točnosti je:

$$\int_{V_M} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV = V_M \frac{\partial(\rho\phi)^M}{\partial t} = V_M \frac{(\rho\phi)^{Mn} - (\rho\phi)^{Mo}}{\Delta t}, \quad (122)$$

gdje natpisi „ Mn “ označuju vrijednost brzine u centru kontrolnog volumena „ M “, u novom trenutku „ n “ (engleski „new“). Isto tako natpis „ o “ označava stari trenutak, odnosno vrijednost u prethodnom vremenskom koraku. Ukoliko se ostali članovi u jednadžbi diskretiziraju s obzirom na stari vremenski korak, radi se o eksplicitnoj metodi. U ovom radu će se opisati implicitna metoda, odnosno diskretizacija preostalih članova će se vršiti za novi vremenski korak. Diskretizacija (122) se tada zove Eulerova implicitna metoda. Razvojem u Taylorov red se može pokazati da je ona drugog reda točnosti. Međutim, napredovanjem po vremenu, nakon N vremenskih integracija, greška koja je reda veličine $\sigma(\Delta t^2)$ se povećava do reda veličine $N\sigma(\Delta t^2) \cong \sigma(\Delta t)$. Stoga se uzima da je ova metoda prvog reda točnosti. Kako će se u ovom radu opisati sheme drugog reda točnosti, a i kako je sama parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda uslijed difuzijskog člana, koristiti će se sljedeća vremenska shema [21]:

$$\int_{V_M} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV = V_M \frac{\partial(\rho\phi)^M}{\partial t} = V_M \frac{\frac{3}{2}(\rho\phi)^{Mn} - 2(\rho\phi)^{Mo} + \frac{1}{2}(\rho\phi)^{Moo}}{\Delta t}, \quad (123)$$

Ova metoda se naziva „Backward differencing scheme“ (BDS) i drugog je reda točnosti. Može se jednostavno izvesti ukoliko se vremenska ovisnost nepoznate funkcije aproksimira parabolom kroz tri vremenska trenutka. Novi i prethodni vremenski trenutak su označeni uobičajenim natpisima, dok je predprošli vremenski trenutak označen natpisom „ oo “ (engleski „old old“). Nedostatak ove metode je u zahtjevu za spremanjem nepoznatog polja u prethodna dva vremenska koraka.

Potrebno je naglasiti da postoje i mnoge druge metode, implicitne i eksplicitne. Pregled osnovnih metoda kao što su Eulerova, Crank – Nicolsonova, te prediktor – korektor i multistep metoda kao što su Adams – Bashfort, Runge – Kutta i druge, moguće je pronaći u [21] i [22].

3.1.2. Diskretizacija konvekcijskog člana

Korištenjem Gaussovog teorema [23], diskretizacija konvekcijskog člana glasi:

$$\int_{V_M} \frac{\partial(\rho u_i \phi)}{\partial x_i} dV = \oint_{S_M} (\rho u_i \phi) n_i dS = \sum_f S_i^f (\rho u_i \phi)^f = \sum_f F \phi^f, \quad (124)$$

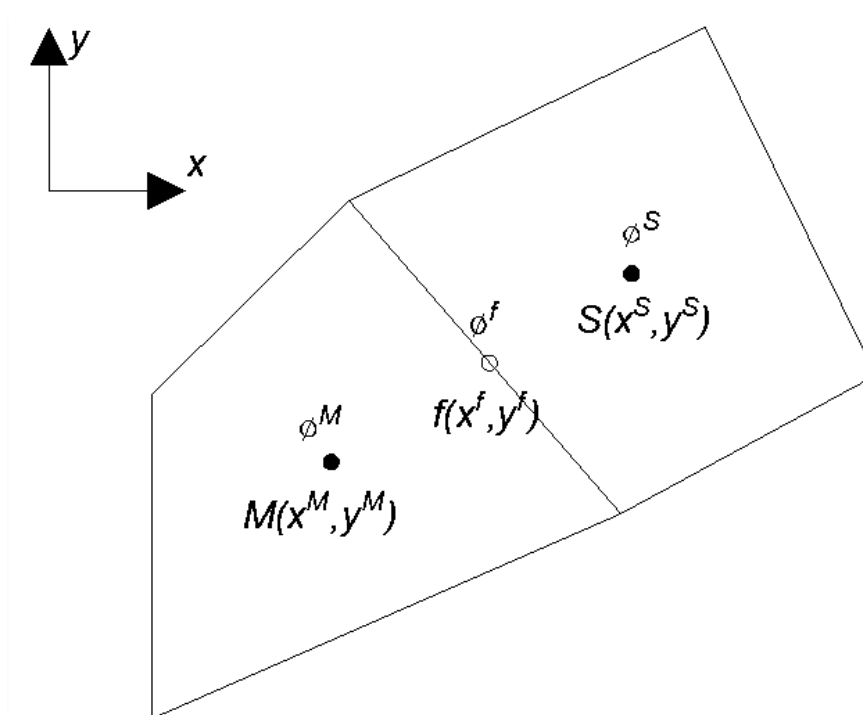
gdje donji indeksi uobičajeno označuju koordinatne osi, dok gornji natpisi govore da se brzina promatra u težištima stranica kontrolnog volumena (engleski „face“). n_i označava vektor vanjske normale na površinu kontrolnog volumena, dok je S_i^f površinski vektor koji ima iznos površine, a smjer normale, (vidi Sliku 4). F predstavlja maseni protok kroz stranice kontrolnog volumena.

Jednadžba (124) zahtijeva vrijednosti varijable ϕ na stranici kontrolnog volumena. Iz tog razloga je potrebno definirati konvekcijske interpolacijske sheme koje omogućuju interpolaciju ϕ^f pomoću centara kontrolnih volumena koji dijele tu stranicu.

Prije toga je potrebno naglasiti da bez obzira na brzinu fluida, konvekcijski član ne narušava ograničenost promatrane varijable ϕ koja je dana početnim uvjetima. Na primjer, ako ϕ u početku ima vrijednosti između 0 i 1 (indikatorska funkcija α ima upravo ovakvu ograničenost), konvekcijski član nikada neće proizvesti vrijednosti ϕ manje od 0 i veće od 1. Shodno tome, konvekcijske sheme trebaju osigurati očuvanje ograničenosti u svrhu sprječavanja nefizikalnih rezultata.

3.1.2.1. Konvekcijske interpolacijske sheme

Kao što je spomenuto, uloga konvekcijskih diferencijskih shema je interpolacija skalarnog polja ϕ sa centara na stranice kontrolnih volumena. Kako svaka stranica isključivo pripada paru kontrolnih volumena (osim ako se radi o granici domene), ona u programskom kodu ima svog vlasnika (engleski „master“) i susjeda (engleski „slave“), Slika 3. Na taj način je moguće u programu napraviti proračun vrijednosti potrebnih u težištu stranice (npr. u ovom slučaju ϕ^f) za svaku stranicu, te pridružiti tu vrijednost pripadnim kontrolnim volumenima; umjesto dvostrukog proračuna istih vrijednosti za dva susjedna kontrolna volumena koja dijele tu stranicu.



Slika 3. Interpolacija skalarnog polja na stranicu kontrolnog volumena.

Vrijednost ϕ^f se može dobiti interpolacijom na različite načine. Za proizvoljne mreže u kojima kontrolni volumeni mogu imati proizvoljan broj stranica, najčešće korištene sheme interpolacije su [21]:

- CD (engleski „Central Differencing“) – vrijednosti nepoznatog polja (skalarnog ili u slučaju brzine, vektorskog) na licu se računaju prema:

$$\phi^f = \lambda \phi^M + (1 - \lambda)\phi^S, \quad (125)$$

gdje je koeficijent linearne interpolacije za proizvoljnu trodimenzionalnu mrežu:

$$\lambda = \frac{|x_i^f - x_i^S|}{|x_i^M - x_i^S|}. \quad (126)$$

Ova shema je drugog reda točnosti, što se može jednostavno pokazati ukoliko se ϕ^f i ϕ^M razviju u Taylorov red oko točke S . Potrebno je naglasiti da svaka shema drugog ili višeg reda točnosti nije ograničena, odnosno može proizvesti oscilatorna rješenja. Stoga se ova shema u izvornom obliku ne koristi za konvekcijske članove.

- UD (engleski „Upwind Differencing“) – vrijednosti nepoznatog polja (skalarnog ili u slučaju brzine, vektorskog) na licu se računaju prema:

$$\phi^f = \begin{cases} \phi^M, & \text{ako } F \geq 0 \\ \phi^S, & \text{ako } F < 0, \end{cases} \quad (127)$$

gdje je F maseni protok na promatranoj stranici.

Ova shema je bezuvjetno ograničena jer proizvodi matricu u kojoj su svi članovi koji nisu na dijagonali istog predznaka. To je dovoljan uvjet bezuvjetne ograničenosti [5]. Može se pokazati da je ova shema tek prvog reda točnosti ukoliko se primjeni Taylorov razvoj funkcije oko točke M (za $u_i^f n_i^f > 0$, ili točke S za $u_i^f n_i^f < 0$). Kako je vodeći odbačeni član proporcionalan prvom prostornoj derivaciji traženog skalarnog ili vektorskog polja, takva greška se još i naziva *numerička difuzija*. Ova vrsta greške posebno dolazi do izražaja u višedimenzionalnim problemima gdje se fluid giba pod proizvoljnim kutem s obzirom na mrežu. Brze prostorne promjene u skalarnim ili vektorskim poljima će biti razvučene i ublažene, te je potrebno koristiti finiju mrežu, barem na mjestima gdje se očekuju veći gradijenti funkcija.

Zbog spomenutih nedostataka CD i UD shema, razvijene su brojne ograničene sheme koje donekle zadržavaju drugi red točnosti. Većina ih se može podijeliti u dvije grupe:

- TVD shema („Total Variation Diminishing“);
- NVD shema („Normalized Variable Diagram“).

Ovdje će se opisati Gamma shema [24] koja je prikladna za proizvoljne, nestrukturirane mreže, a spada u NVD grupu shema. Kao i većina TVD i NVD shema, Gamma shema mijenja interpolaciju ovisno o lokalnim svojstvima toka, odnosno, ϕ^f se računa prema:

$$\phi^f = \begin{cases} \phi^M, & \text{ako je } \tilde{\phi}^M \leq 0 \text{ ili } \tilde{\phi}^M \geq 1 \\ \lambda \phi^M + (1 - \lambda) \phi^S, & \text{ako je } \beta_m \leq \tilde{\phi}^M < 1 \\ ((1 - \gamma(1 - \lambda)) \phi^M + \gamma(1 - \lambda) \phi^S, & \text{ako je } 0 < \tilde{\phi}^M < \beta_m b, \end{cases} \quad (128)$$

gdje su:

$$\tilde{\phi}^M = 1 - \frac{\phi^{So} - \phi^{Mo}}{2 \frac{\partial \phi^{Mo}}{\partial x_i} (x_i^S - x_i^M)},$$

$$\frac{1}{10} \leq \beta_m \leq \frac{1}{2},$$

$$\gamma = \frac{\tilde{\phi}^M}{\beta_m}.$$
(129)

Prva varijanta u jednadžbi (128) odgovara UD, dok druga odgovara CD interpolaciji. Treća varijanta predstavlja stapanje između te dvije sheme. Tilda u članu $\tilde{\phi}^M$ standardno označava normaliziranu varijablu, u ovom slučaju skalarno polje. $\tilde{\phi}^M$ se računa prije same diskretizacije na temelju starih vrijednosti u susjedima. β_m je parametar koji je bolje držati bliže donjoj granici ukoliko se želi dobiti bolje razlučivanje strmog profila transportirane varijable [24] (primjerice slobodne površine ako je riječ o indikatorskoj funkciji). γ predstavlja parametar koji kontrolira stapanje između UD i CD sheme, te se zove „blending factor“. Gornje varijante (128) se mogu sažeto zapisati na sljedeći način:

$$\phi^f = c_1 \phi^M + c_2 \phi^S, \quad (130)$$

gdje koeficijenti c_1 i c_2 poprimaju vrijednosti očite iz izraza (128) ovisno o $\tilde{\phi}^M$.

Ostale TVD i NVD sheme su također uglavnom različita kombinacija CD i UD shema, te se mogu pronaći u literaturi. Za više informacija o gornjim grupama shema, čitatelj se upućuje na [25] i [26].

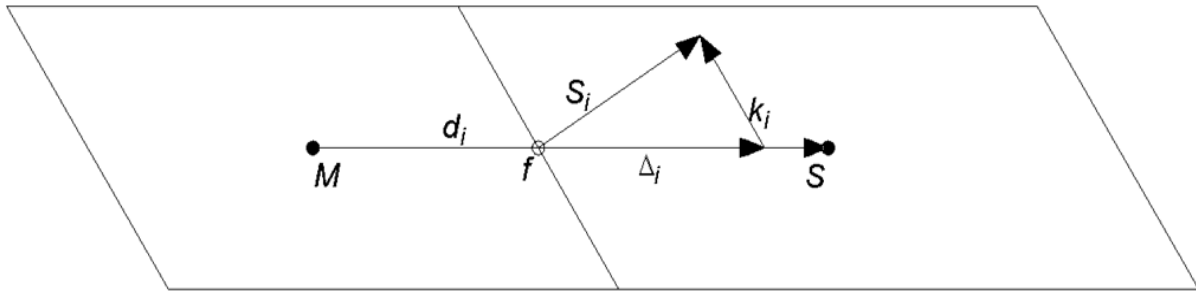
3.1.3. Diskretizacija difuzijskog člana

Diskretizacija difuzijskog člana se također vrši primjenom Gaussova teorema:

$$\int_{V_M} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dV = \oint_{S_M} \rho \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i dS = \sum_f (\rho \Gamma_\phi)^f S_i^f \frac{\partial \phi^f}{\partial x_i}. \quad (131)$$

Par kontrolnih volumena je okarakteriziran s vektorima S_i i d_i , Slika 4. Kao što je vidljivo na slici, vektor S_i ima smjer normale na stranicu, dok d_i spaja centre kontrolnih volumena. Oba vektora imaju smjer od kontrolnog volumena „ M “. Ako se radi o neortogonalnoj mreži, spomenuti vektori neće biti kolinearni. S druge strane, ukoliko su vektori S_i i d_i paralelni, interpolacija gradijenta skalarnog polja na stranicu se može vršiti prema:

$$S_i^f \frac{\partial \phi^f}{\partial x_i} = |S_i^f| \frac{\phi^S - \phi^M}{|d_i|}. \quad (132)$$



Slika 4. Korekcija zbog neortogonalnosti.

Da bi se mogla iskoristiti jednostavna interpolacija (132), produkt površinskog vektora i gradijenta brzine se dijeli u dva dijela [20], Slika 4:

$$S_i^f \frac{\partial \phi^f}{\partial x_i} = \Delta_i \frac{\partial \phi^f}{\partial x_i} + k_i \frac{\partial \phi^f}{\partial x_i}, \quad (133)$$

gdje je vektor Δ_i paralelan vektoru $d_i = x_i^S - x_i^M = \overline{MS}$. Prvi član s desne strane gornje jednadžbe predstavlja ortogonalni doprinos, dok drugi član predstavlja korekciju uslijed neortogonalnosti. Kao što je jasno s prethodne slike, vektori moraju zadovoljiti sljedeću jednadžbu:

$$S_i^f = \Delta_i + k_i. \quad (134)$$

Postoje različiti načini određivanja iznosa vektora Δ_i , a time i vektora k_i , no ovdje će se opisati način koji se engleski naziva „orthogonal correction approach“, i koji odgovara prethodnoj slici. Vektor Δ_i se tad definira prema:

$$\Delta_i = \frac{d_i}{|d_i|} |S_i^f|, \quad (135)$$

uz napomenu da se sumacija po ponovljenim indeksima ne ponavlja u gornjoj jednadžbi pošto se radi o apsolutnim vrijednostima vektora (unutar ravnih zagrada). Kako su vektori Δ_i i d_i paralelni, ortogonalni doprinos u jednadžbi (133) uz jednadžbu (132) postaje:

$$\Delta_i \frac{\partial \phi^f}{\partial x_i} = |\Delta_i| \frac{\phi^S - \phi^M}{|d_i|}. \quad (136)$$

Za proračun korekcije uslijed neortogonalnosti (drugi član u jednadžbi (133)) koja ima manji doprinos od ortogonalnog člana, koriste se vrijednosti iz prethodnog vremenskog koraka, te linearna interpolacija (CD):

$$k_i \frac{\partial \phi^{fo}}{\partial x_i} = k_i \left(\lambda \frac{\partial \phi^{fo}}{\partial x_i} + (1 - \lambda) \frac{\partial \phi^{fo}}{\partial x_i} \right). \quad (137)$$

Konačno, jednadžba (133) se može zapisati prema:

$$S_i^f \frac{\partial \phi^f}{\partial x_i} = |\Delta_i| \frac{\phi^S - \phi^M}{|d_i|} + k_i \left(\lambda \frac{\partial \phi^{fo}}{\partial x_i} + (1 - \lambda) \frac{\partial \phi^{fo}}{\partial x_i} \right), \quad (138)$$

gdje se vrijednosti gradijenta skalarnog polja u težištu kontrolnog volumena u prethodnom vremenskom koraku računaju pomoću Gaussovog teorema [23]:

$$\frac{\partial \phi^{fo}}{\partial x_i} = \frac{1}{V_M} \sum_f S_i^f \phi^{fo}. \quad (139)$$

3.1.4. Diskretizacija izvorskog člana

Svi članovi koji se ne mogu okarakterizirati kao nestacionarni, konvekcijski ili difuzijski članovi se nazivaju izvorski članovi. Izvorski član $S_\phi(\phi)$ može biti općenita funkcija traženog skalaranog polja ϕ . Ukoliko postoji nelinearnost u izvorskom članu (primjerice ovisnost o ω^2 s desne strane jednadžbe specifične disipacije turbulentne kinetičke energije (19)), potrebno ga je linearizirati. Shodno tome, može se pisati:

$$S_\phi(\phi) = S_u + S_p \phi, \quad (140)$$

gdje S_u i S_p mogu ovisiti o ϕ . Prilikom linearizacije, potrebno je nelinearne članove tretirati što više „implicitno“. Primjerice, u jednadžbi (19) za specifičnu disipaciju, izvorski član s ω^2 će se napisati kao $\omega^n \omega^o$, to jest jedna vrijednost će se uzeti iz prethodnog vremenskog koraka, dok će druga biti nepoznanica sustava.

Konačno, diskretizacija izvorskog člana je krajnje jednostavna i ima sljedeći oblik:

$$\int_{V_M} S_\phi(\phi) dV = S_u V_M + S_p V_M \phi^M. \quad (141)$$

Ovo je ujedno zadnji član standardne transportne jednadžbe, te se parcijalna diferencijalna jednadžba može zapisati kao sustav algebarskih linearnih jednadžbi, što je prikazano u sljedećem Podpoglavlju.

3.1.5. Diskretizirani sustav linearnih jednadžbi

Koristeći diskretizirane članove, standardna transportna jednadžba (121) se može zapisati u sljedećem obliku:

$$V_M \frac{(\rho\phi)^{Mn} - (\rho\phi)^{Mo}}{\Delta t} + \sum_f F\phi^{fn} - \sum_f (\rho\Gamma_\phi)^f S_i^f \frac{\partial\phi^f}{\partial x_i} = S_u V_M + S_p V_M \phi^M. \quad (142)$$

Interpolacija s centara kontrolnih volumena na stranice se vrši opisanim shemama. Kako sve sheme koriste samo vrijednosti u centrima kontrolnih volumena koji dijele tu stranicu, jednadžba (142) se može zapisati u sljedećem obliku:

$$a^M \phi^{Mn} + \sum_s a^S \phi^{Sn} = S^o. \quad (143)$$

Po jedna jednadžba (143) se formira za svaki kontrolni volumen. Vrijednost ϕ^{Mn} ovisi o vrijednostima u susjednim kontrolnim volumenima s kojima kontrolni volumen M dijeli stranicu. Na taj način se dobije sustav algebarskih jednadžbi:

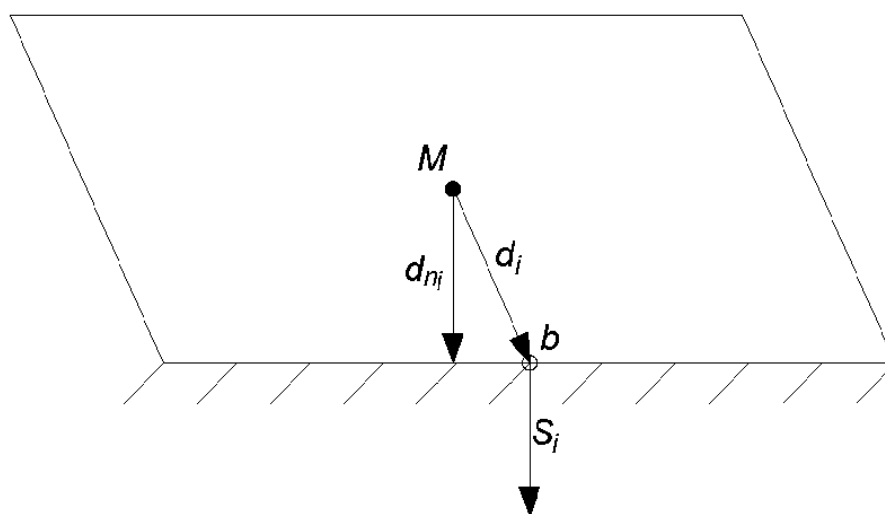
$$[A][\phi] = [S], \quad (144)$$

gdje je matrica $[A]$ rijetka (engleski „sparse“). a^M su dijagonalni koeficijenti matrice, dok a^S nisu na dijagonali. $[S]$ je vektor desne strane jednadžbe koji ohuvaća izvorske članove i sve poznate vrijednosti koje se uzimaju iz starog vremenskog koraka. Rješenjem sustava se dobije vektor $[\phi]$ koji predstavlja diskretno skalarno polje dano u centrima kontrolnih volumena.

3.1.6. Implementacija rubnih uvjeta

Da bi se riješio linearni sustav jednadžbi, potrebno je zadati rubne i početne uvjete. Pojedine stranice koja pripadaju samo jednom kontrolnom volumenu predstavljaju granicu domene u numeričkoj simulaciji. Prethodno opisane interpolacijske sheme često zahtijevaju poznavanje vrijednosti same varijable (npr. brzina u konvekcijskom članu) ili gradijenta varijable (npr. gradijent brzine u difuzijskom članu) na svim stranicama kontrolnog volumena. Kad se vrši proračun koeficijenata matrice sustava, obično se radi neka vrsta sumacije po stranicama. Ukoliko promatrani kontrolni volumen ima stranicu koja predstavlja granicu, potrebno je na određeni način uključiti rubne uvjete u sustav. Vektori koji opisuju geometriju rubnog

kontrolnog volumena, a potrebni su za numeričku implementaciju rubnih uvjeta su prikazani na sljedećoj slici, Slika 5.



Slika 5. Geometrijske karakteristike proizvoljnog rubnog kontrolnog volumena.

Prethodna slika opisuje kontrolni volumen M s jednim licem b (engleski „boundary“) koje pripada rubu domene. Vektor između centra kontrolnog volumena i težišta stranice je označen s d_i , dok mu je komponenta okomita na rubnu stranicu označena s d_{ni} . Pretpostavljajući da je zadani rubni uvjet konstantan po rubnoj stranici, implementacija dvaju osnovnih vrsta rubnih uvjeta se vrši na sljedeći način:

- Dirichletov uvjet – propisuje se fiksna vrijednost nekog polja na granici: ϕ^b
 - Gdje diskretizacija zahtijeva vrijednost polja na stranici, jednostavno se uzme $\phi^f = \phi^b$ (primjerice konvekcijski član)
 - Ako diskretizacija zahtijeva vrijednost gradijenta polja na stranici, on se aproksimira na sljedeći način (primjerice difuzijski član):

$$S_i \frac{\partial \phi^f}{\partial x_i} = |S_i| \frac{\phi^b - \phi^M}{|d_{ni}|}. \quad (145)$$

Ukoliko je ϕ^b konstanta preko stranice, prethodne diskretizacije su drugog reda točnosti. Za promjenjivi ϕ^b , te ako je mreža neortogonalna, aproksimacija je samo prvog reda točnosti. Međutim, moguće je uvesti korekciju uslijed neortogonalnost na sličan način kao i u Podpoglavlju 3.1.3. prilikom diskretizacije difuzijskog člana.

- generalizirani von Neumannov uvjet – propisuje se gradijent nekog polja u smjeru normale na granicu:

$$g^b = \frac{\partial \phi^b}{\partial n}.$$

- Ako diskretizacija zahtijeva vrijednost polja ϕ^f na stranici, vrši se ekstrapolacija prema:

$$\phi^f = \phi^M + d_{ni} \frac{\partial \phi^b}{\partial n_i} = \phi^M + |d_{ni}| g^b. \quad (146)$$

- Gdje je potrebna vrijednost gradijenta polja na stranici, uzme se:

$$S_i \frac{\partial \phi^f}{\partial x_i} = |S_i| g^b. \quad (147)$$

Diskretizacija za generalizirani von Neumannov rubni uvjet je drugog reda točnosti ukoliko je gradijent polja u smjeru normale konstantan preko stranice kontrolnog volumena. Kao što je slučaj i kod Dirichletovog rubnog uvjeta, gornjim diskretizacijama se smanjuje točnost ukoliko je mreža neortogonalna i ukoliko se gradijent polja u smjeru normale mijenja preko stranice.

3.2. Poludiskretizirane modificirane Navier – Stokesove jednadžbe

U Podpoglavlju 2.3.1.2. je prikazana modifikacija klasičnih Navier – Stokesovih jednadžbi za nestlačivo strujanje uslijed korištenja VOF pristupa. Modificirana Navier – Stokesova jednadžba (51) ima dva dodatna člana: uslijed sile površinske napetosti i uslijed gradijenta viskoznosti. Međutim, jednadžba se kao i standardna transportna jednadžba sastoji od nestacionarnog, konvekcijskog, difuzijskog i izvorskih članova. Konvekcijski član je posebno problematičan zbog njegove nelinearnosti. Da bi se izbjeglo formiranje nelinearnog sustava jednadžbi, te korištenje nelinearnih rješavača sustava, taj član se linearizira. To jest, proračun konvekcijskog člana se vrši pomoću masenog protoka kroz stranice kontrolnog volumena na temelju poznatog polja brzine iz prethodnog vremenskog koraka. Zbog linearizacije je potreban iterativni postupak unutar jednog vremenskog koraka, dok se polje brzine za proračun protoka i novo polje brzine ne izjednače. Ukoliko se koriste eksplicitne metode, ili

samo mali vremenski koraci, iterativni postupak se može preskočiti zbog malih razlika između polja brzine u dva uzastopna vremenska koraka. Potrebno je ponovno napomenuti da će se u ovom radu koristiti model turbulencije s dvije jednačbe; iako je izostavljena notacija osrednjene brzine \bar{u}_i zbog jednostavnosti u ovom Podpoglavlju, ona se podrazumijeva.

Prateći proceduru za diskretizaciju transportne jednačbe, slijede poludiskretizirane modificirane Navier – Stokesove jednačbe:

$$V_M \frac{\rho^M u_i^{Mn}}{\Delta t} + \sum_f F^o u_i^{fn} - \sum_f \mu^f |\Delta_j| \frac{u_i^{Sn} - u_i^{Mn}}{|d_j|} = S^o - V_M \frac{\partial P^M}{\partial x_i}, \quad (148)$$

gdje su sa S^o označeni poznati izvorski članovi:

$$S^o = V_M \left(\frac{\rho^M u_i^{Mo}}{\Delta t} + \rho^M g_i + \sigma \kappa^M \frac{\partial \alpha^M}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu^M}{\partial x_j} \frac{\partial u_j^{Mo}}{\partial x_i} \right) + \sum_f \mu^f k_j \frac{\partial u_i^{fo}}{\partial x_j}. \quad (149)$$

Kao i standardna transportna jednačba, tako je i jednačba (148) izražena pomoću vrijednosti brzine na stranicama koje se računaju interpolacijom samo pomoću susjeda koji dijele te stranice. Zadnji član u spomenutoj jednačbi, koji predstavlja gradijent tlaka je ostao u nediskretiziranom obliku. Takav poludiskretizirani oblik jednačbe nije matematički korektan, ali omogućuje jednostavniju spregu brzine i tlaka, što će biti objašnjeno u sljedećem Podpoglavlju. Grupirajući koeficijente uz u_i^{Mn} i u_i^{Sn} , dobije se:

$$a^M u_i^{Mn} = - \sum_s a^S u_i^{Sn} + S^o - V_M \frac{\partial P^M}{\partial x_i}. \quad (150)$$

Sažetiji zapis jednačbe (150) se dobije ukoliko se uvede operator $H(u_i)$ [20]:

$$a^M u_i^{Mn} = H(u_i) - V_M \frac{\partial P^M}{\partial x_i}. \quad (151)$$

3.2.1. Jednačba tlaka

U prethodnom Podpoglavlju je opisan izvod modificiranih poludiskretiziranih Navier – Stokesovih jednačbi. Jednačba (151) u sebi sadrži gradijent tlaka koji je također nepoznanica sustava. Međutim, polje tlaka treba biti takve prirode, da kada se uvrsti u jednačbu (151), zadovoljava jednačbu kontinuiteta (1). Polje brzine se u novom vremenskom koraku može izraziti prema:

$$u_i^{Mn} = \frac{1}{a^M} H(u_i) - \frac{V_M}{a^M} \frac{\partial P^M}{\partial x_i}. \quad (152)$$

Brzinu na pojedinim stranicama kontrolnih volumena moguće je dobiti interpolacijom koeficijenata gornje jednadžbe sa centara na stranice kontrolnih volumena:

$$u_i^{fn} = \frac{1}{a^f} H^f(u_i) - V_M \frac{1}{a^f} \frac{\partial P^f}{\partial x_i}, \quad (153)$$

gdje se $H^f(u_i)$ i a^f odvojeno interpoliraju. Jednadžbu kontinuiteta je krajnje jednostavno diskretizirati primjenom Gaussova teorema, te njen diskretizirani oblik glasi:

$$\sum_f S_i^f u_i^f = 0. \quad (154)$$

Uvrštavajući jednadžbu za brzinu na licima kontrolnih volumena (153) u diskretiziranu jednadžbu kontinuiteta (154), dobije se sljedeća jednadžba za tlak:

$$\sum_f S_i^f V_M \frac{1}{a^f} \frac{\partial P^f}{\partial x_i} = \sum_f S_i^f \frac{1}{a^f} H^f(u_i). \quad (155)$$

gdje se diskretizacija gradijenta tlaka na stranici kontrolnog volumena aproksimira slično kao i diskretizacija difuzijskog člana (uz uobičajenu korekciju zbog neortogonalnosti ako je potrebno):

$$S_i^f \frac{\partial P^f}{\partial x_i} = |\Delta_i| \frac{P^S - P^M}{|d_i|} + k_i \left(\lambda \frac{\partial P^{Mo}}{\partial x_i} + (1 - \lambda) \frac{\partial P^{So}}{\partial x_i} \right). \quad (156)$$

Korištenjem jednadžbe (153), moguće je izračunati protoke kroz stranicu kontrolnog volumena prema:

$$F = \rho^f S_i^f u_i^f = \rho^f S_i^f \left(\frac{1}{a^f} H^f(u_i) - V_M \frac{1}{a^f} \frac{\partial P^f}{\partial x_i} \right). \quad (157)$$

Kada je jednadžba (155) zadovoljena, polje brzine je solenoidalno, te je osiguran zakon o očuvanju mase.

3.2.2. Sprega brzine i tlaka

Kako su modificirane Navier – Stokesove jednačbe ostale u poludiskretiziranom obliku, potrebno je diskretizirati gradijent tlaka. To se vrši pomoću Gaussovog teorema:

$$V_M \frac{\partial P^M}{\partial x_i} = \sum_f S_i^f P^f. \quad (158)$$

Konačno, diskretizirani sustav jednačbi glasi:

$$a^M u_i^{Mn} = H(u_i) - \sum_f S_i^f P^f, \quad (159)$$

$$\sum_f S_i^f V_M \frac{1}{a^f} \frac{\partial P^f}{\partial x_i} = \sum_f S_i^f \frac{1}{a^f} H^f(u_i). \quad (160)$$

Prolazeći kroz sve kontrolne volumene, jednačbe (159) i (160) formiraju linearni sustav u kojima brzina ovisi o tlaku, i obrnuto. Spomenuti sustav je moguće riješiti istovremeno preko cijele domene. Takav pristup dolazi u obzir ukoliko je broj kontrolnih volumena malen (odnosno ukoliko je mreža gruba i domena mala). Kada je mreža finija, odnosno kada je domena predstavljena većim brojem kontrolnih volumena, rezultirajuća matrica spregnutog sustava raste, što izrazito povećava cijenu takvog proračuna.

U sljedećem Podpoglavlju će se opisati dva algoritma odvojenog pristupa rješenju sustava (engleski „segregated approach“) koji su u širokoj upotrebi. Algoritmi se temelje na iterativnom rješavanju linearnog sustava jednačbi. Postupak se ponavlja dok se ne zadovolje jednačba kontinuiteta i jednačba očuvanja količine gibanja.

3.2.2.1. SIMPLE algoritam za stacionarna strujanja

Ime SIMPLE potječe od kraticе engleskog naziva „Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations“ [21]. Kako su razlike između uzastopnih rješenja velike za stacionarne probleme, nije potrebno do kraja riješiti spregu brzine i tlaka. Pošto se koriste veliki vremenski koraci, nelinearnost sustava također postaje bitna. SIMPLE algoritam rješava sustav (159) i (160) na sljedeći način:

- Prvo se rješava sustav koji opisuje diskretizirane modificirane Navier – Stokesove jednadžbe (159) da bi se dobila brzina. Kako traženo polje tlaka nije poznato, koristi se poznato polje tlaka iz prethodnog vremenskog koraka (ili iz početnih uvjeta). Jednadžba (159) se implicitno podrelaksira [20], odnosno rješava se sljedeći sustav:

$$\frac{\alpha^M}{\alpha_u} u_i^{Mn} = H(u_i) - \sum_f S_i^f p^f + \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} u_i^{Mo} . \quad (161)$$

- Koristeći tako procijenjene brzine može se izračunati operator $H(u_i)$, što omogućava formulaciju jednadžbe za tlak. Rješenjem te jednadžbe (160) se dobije novo polje tlaka.
- Jednadžba (157) daje nove protoke koji su konzervativni (zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta). Međutim, novo polje tlaka nosi grešku gradijenta tlaka, te grešku konvekcije i difuzije. Kako su nelinearni efekti izraženiji nego kod nestacionarnih strujanja, dovoljno je dobiti samo aproksimaciju polja tlaka, te ponovno izračunati operator $H(u_i)$ s novim, konzervativnim protocima. Da bi se smanjio utjecaj greške uslijed krivog polja brzine, tlak se eksplicitno podrelaksira prema:

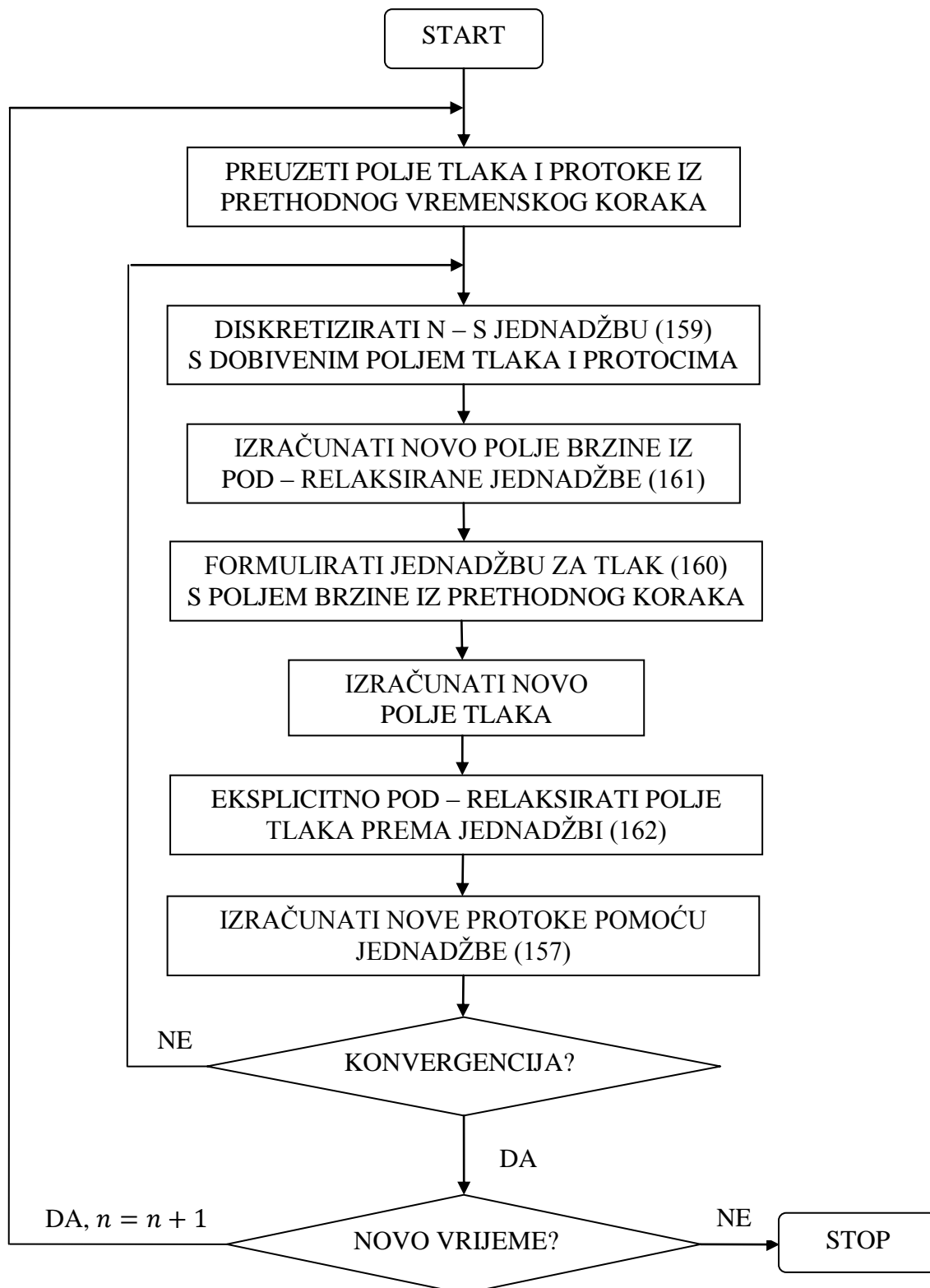
$$p^n = p^o + \alpha_p (p^p - p^o) , \quad (162)$$

gdje je p^p rješenje jednadžbe tlaka. Gornja jednadžba jednostavno govori da se rješenje za polje tlaka kreće u dobrom smjeru, ali se samo dio rješenja uzima za sljedeću iteraciju. Postupak se ponavlja dok se ne ostvari konvergencija.

Predložene vrijednosti podrelaksacijskih faktora za brzinu i tlak su [21]:

$$\begin{aligned} \alpha_u &= 0.8 , \\ \alpha_p &= 0.2 . \end{aligned} \quad (163)$$

Na sljedećoj slici je dan dijagram toka SIMPLE algoritma, Slika 6.



Slika 6. Dijagram toka SIMPLE algoritma za spregu brzine i tlaka.

3.2.2.2. PISO algoritam za nestacionarna strujanja

Ime PISO potječe od kratice engleskog naziva „Pressure Implicit with Splitting of Operators“. PISO algoritam rješava jednačbe (159) i (160) na sljedeći način:

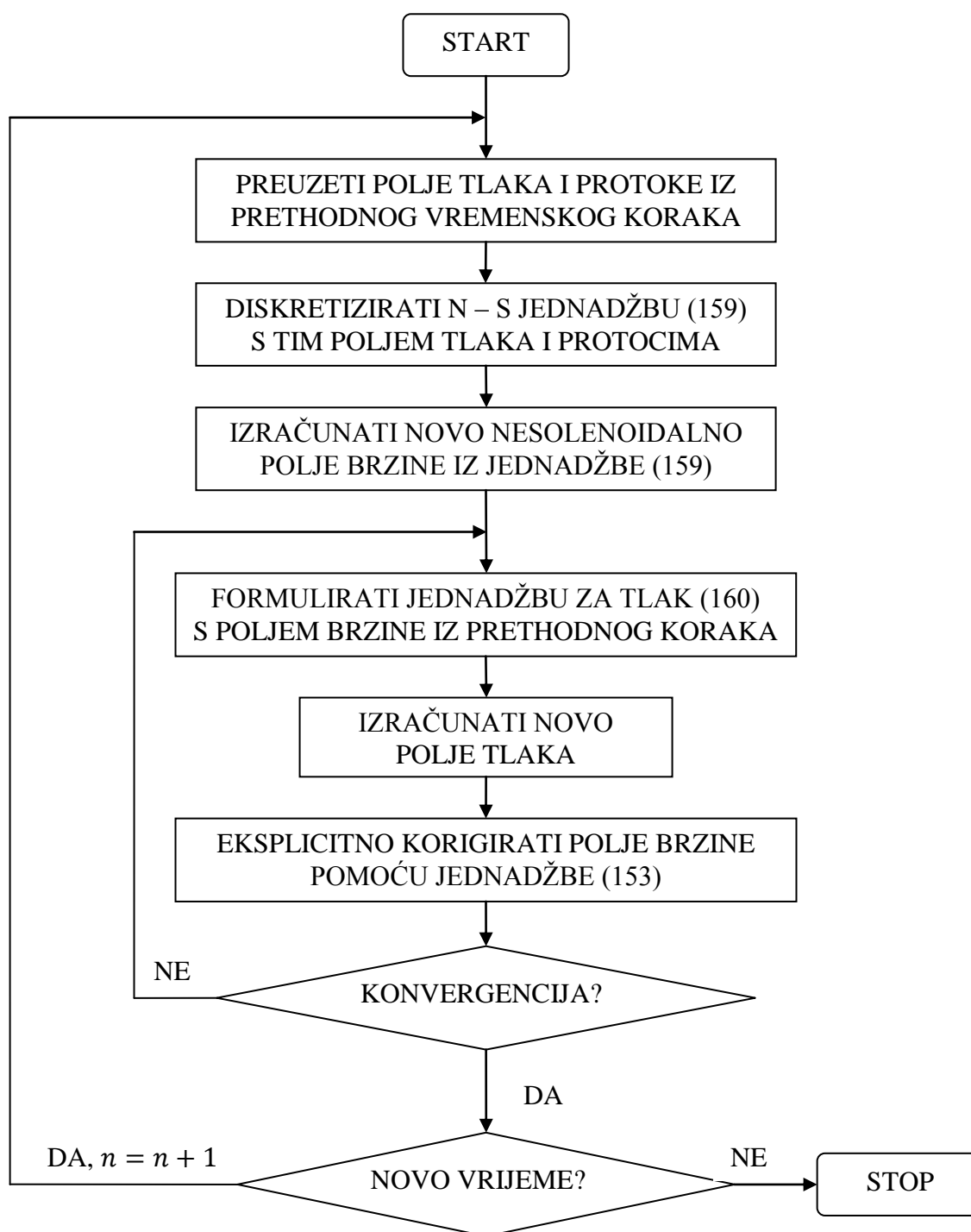
- Prvo se rješava sustav koji opisuje modificirane diskretizirane Navier – Stokesove jednačbe (159) da bi se dobila brzina. Kako traženo polje tlaka nije poznato, koristi se poznato polje tlaka iz prethodnog vremenskog koraka (ili iz početnih uvjeta). Također se uzimaju poznati protoci iz prethodnog vremenskog koraka zbog linearizacije jednačbi. Rješenje sustava daje aproksimaciju novog polja brzine koje nije solenoidalno. Ovaj korak se zove prediktor količine gibanja (engleski „momentum predictor“).
- Koristeći tako procijenjene brzine može se izračunati operator $H(u_i)$, što omogućava formulaciju jednačbe za tlak. Rješenjem te jednačbe (160) se dobije novo polje tlaka. Ovaj korak se zove rješenje tlaka (engleski „pressure solution“).
- Jednačba (157) daje nove volumne protoke koji su konzervativni (zadovoljavaju jednačbu kontinuiteta). Ti protoci su konzistentni s novim poljem tlaka. Međutim, kako postoji novo polje tlaka, potrebno je korigirati polje brzine. Polje brzine se eksplicitno korigira koristeći jednačbu (153).

Kao što pokazuje jednačba (153), korekcija polja brzine proizlazi iz razlike između starih i novih članova jednačbe. Prvi član nosi utjecaj koji je proporcionalan operatoru $H(u_i)$, što predstavlja utjecaj korekcije brzina u susjednim kontrolnim volumenima. Drugi član je korekcija uslijed utjecaja novog gradijenta tlaka. Polje brzine se korigira eksplicitno, što znači da se prvi član u potpunosti zanemaruje. Jedini utjecaj na korekciju brzine tada ima gradijent tlaka, što nije točno. Prema tome, potrebno je korigirati operator $H(u_i)$ s eksplicitno korigiranim brzinama, formulirati novu jednačbu tlaka, riješiti ju, te ponoviti postupak do konvergencije. Ukratko, PISO algoritam se sastoji od implicitnog koraka predikcije količine gibanja (proračun nesolenoidalnog polja brzine s tlakom i protocima iz prošlog vremenskog koraka), te niza rješenja jednačbe za tlak i eksplicitnih korekcija brzine.

Još jedan problem proizlazi iz ovisnosti operatora $H(u_i)$ o protocima. Nakon rješenja jedne od uzastopnih jednačbi tlaka, novi, konzervativni protoci su dostupni. Pomoću tih protoka bi se mogli korigirati koeficijenti u operatoru $H(u_i)$. To se u praksi ne radi jer se smatra da je sprege uslijed nelinearnosti manja od sprege brzine i tlaka [20]. To je istina

posebno za male vremenske korake, gdje se brzine između uzastopnih vremenskih koraka malo razlikuju. Za stacionarne pojave (npr. otpor broda na mirnom moru), obično se koriste veći vremenski koraci, i stoga drugi algoritmi za spregu brzine i tlaka. Dakle, koeficijenti u operatoru $H(u_i)$ vezani za protoke se drže konstantnim kroz cijeli niz korekcija brzine, te se mijenjaju samo u sljedećem vremenskom koraku.

Na sljedećoj slici je dan dijagram toka PISO algoritma, Slika 7.



Slika 7. Dijagram toka PISO algoritma za spregu brzine i tlaka.

3.3. k i ω jednadžbe modela turbulencije

Jednadžbe turbulentne kinetičke energije k i specifične disipacije ω se ne razlikuju po ničemu od standardne transportne jednadžbe. Slično kao i kod standardne transportne jednadžbe i Navier – Stokesove jednadžbe, dobije se linearni sustav jednadžbi za k i ω koji se rješava u svakom vremenskom trenutku. Ove jednadžbe se obično rješavaju zadnje; prvo slijedi rješavanje brzine i tlaka s vrijednostima v_t iz prethodnog vremenskog koraka, te rješavanje indikatorske funkcije. Prije prelaska na sljedeći vremenski korak, prvo se rješava jednadžba za specifičnu disipaciju ω (s najnovijim vrijednostima ostalih varijabli), te konačno jednadžba za turbulentu kinetičku energiju k . Pomoću poznatih polja k i ω se može dobiti turbulentna viskoznost prema jednadžbi (20) koja se dodaje molekularnoj viskoznosti u modificiranim Navier – Stokesovim jednadžbama.

3.4. Diskretizacija kompresijskog člana indikatorske funkcije

Jednadžba za indikatorsku funkciju (39) se sastoji od nestacionarnog člana i od dva konvekcijska člana: standardnog konvekcijskog člana i kompresijskog člana. Nestacionarni i standardni konvekcijski član se ne razlikuju od članova standardne transportne jednadžbe, te se ovdje neće razmatrati. Posebnu pažnju zahtijeva kompresijski član čija se diskretizacija vrši na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \int_{V_M} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i^r \alpha (1 - \alpha)) dV &= \oint_{S_M} u_i^r \alpha (1 - \alpha) n_i dS = \\ &= \sum_f S_i^f u_i^{rf} \alpha^f (1 - \alpha^f) = \sum_f F^{rb} \alpha^f . \end{aligned} \quad (164)$$

U gornjem izrazu je uvedena supstitucija za reducirani protok prema:

$$F^{rb} = S_i^f u_i^{rf} (1 - \alpha^{fo}) = F^r (1 - \alpha^{fo}) , \quad (165)$$

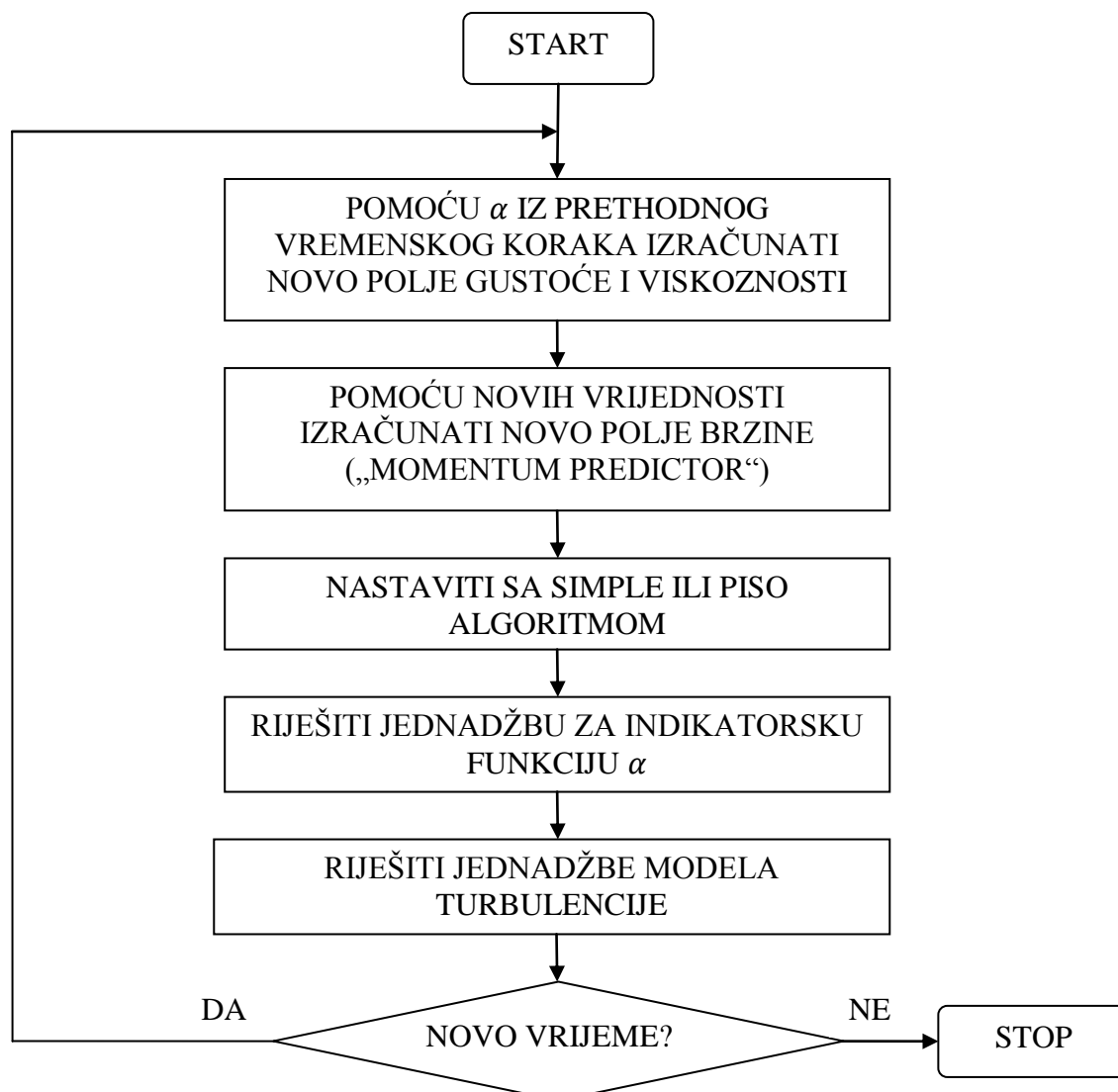
gdje se zbog linearizacije člana, koristi vrijednost $(1 - \alpha^{fo})$ iz starog vremenskog koraka (ili iz početnih uvjeta). Postoji mnogo načina za određivanje kompresijske brzine u_i^r . U ovom radu će se koristiti pristup opisan u [11] koji se zasniva na najvećoj brzini u prijelaznom području. Kako bi se kompresija trebala odvijati u smjeru okomitom na slobodnu površinu,

maksimalna amplituda brzine se množi s vektorom normale na slobodnu površinu, odnosno koristi se sljedeći izraz za procjenu protoka F^r :

$$F^r = K_c \hat{n}_i S_i^f \max\left(\frac{F}{|S_i^f|}\right), \quad (166)$$

gdje je K_c parametar koji određuje jačinu kompresije slobodne površine. U [11] je pokazano da vrijednost parametra $K_c = 1.5$ daje dobre rezultate. Jedinični vektor normale na slobodnu površinu je označen s \hat{n}_i . Kako indikatorska funkcija može imati dosta strmi oblik, odnosno velike gradijente u prijelaznom sloju, ponekad ju je potrebno izgladiti da bi se mogao što pravilnije odrediti vektor normale. Ako se koristi glađenje indikatorske funkcije, najčešće su ona eksplicitna zbog jednostavnosti. Za dodatne informacije o glađenju indikatorske funkcije, čitatelj se upućuje na [3] i [11].

Slika 8 prikazuje dijagram toka za rješavanje dvofaznog strujanja.



Slika 8. Dijagram toka za rješavanje nestlačivog, dvofaznog i turbulentnog strujanja.

3.5. Pregled rubnih uvjeta

Mnogobrojna strujanja fluida, a time i same CFD simulacije karakteriziraju uobičajeni tipovi rubova domene. Neki od njih su:

- Ulazna granica

Polje brzine na ulazu je zadano kao fiksna vrijednost, dok je za polje tlaka shodno tome zadana vrijednost nultog gradijenta. Također se zadavaju fiksne vrijednosti za indikatorsku funkciju, turbulentnu kinetičku energiju i specifičnu disipaciju.

- Izlazna granica

Na izlazu se obično zadaje fiksna vrijednost dinamičkog tlaka, dok se za polje brzine zadaje vrijednost nultog gradijenta. To fizikalno znači da se strujanje fluida nastavlja bez promjena. Za indikatorsku funkciju, turbulentnu kinetičku energiju i specifičnu disipaciju se također zadaje vrijednost nultog gradijenta.

- Nepropusni zid

Brzina fluida na nepropusnom zidu se zadaje jednaka nuli, odnosno jednaka brzini zida ukoliko se zid giba. Kako protok kroz zid mora biti jednak nuli, zadaje se nulti gradijent dinamičkog tlaka. Nulti gradijent se također zadaje za indikatorsku funkciju, dok se za turbulentnu kinetičku energiju i specifičnu disipaciju koriste konstantne vrijednosti u skladu sa sljedećim Podpoglavljem.

- Simetrije

Ukoliko se pretpostavi da je strujanje simetično oko neke ravnine, moguće je dva puta umanjiti domenu strujanja, a time i znatno skratiti proračun. Npr. otpor broda se najčešće računa s polovicom modela. Na simetralnoj ravnini se rubni uvjet dobije razmatrajući zrcalnu simetriju. Za skalarna polja, to odgovara nultom gradijentu u smjeru normale.

U sljedećoj tablici je dan pregledan prikaz spomenutih rubnih uvjeta, Tablica 2.

Tablica 2. Prikaz rubnih uvjeta ovisno o vrsti granice.

Varijabla	Nepropusni zid	Ulazna granica	Izlazna granica	Simetrija
\bar{u}_i	Dirichlet	Dirichlet	von Neuman	Zrcalna slika
\bar{p}	von Neuman	von Neuman	Dirichlet	von Neuman
α	von Neuman	Dirichlet	von Neuman	von Neuman
k	Dirichlet	Dirichlet	von Neuman	von Neuman
ω	Dirichlet	Dirichlet	von Neuman	von Neuman

3.5.1. Numerička implementacija rubnih uvjeta turbulencije blizu zida

Kao što je spomenuto u Podpoglavlju 2.2.4., najčešće se koristi funkcija zida (25). Korsiteći (26), tangencijalno naprežanje na zidu se računa prema:

$$\tau_w = \frac{\rho u_\tau \bar{u}^M \kappa}{\ln(Ey^+)}. \quad (167)$$

Međutim, tangencijalno naprežanje na zidu se također može zapisati prema:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_w = \mu_{eff} \frac{\bar{u}^M}{y^M}, \quad (168)$$

gdje je μ_{eff} efektivna viskoznost. Kombinirajući izraze (167) i (168), slijedi jednačba za efektivnu viskoznost:

$$\mu_{eff} = \frac{\rho u_\tau y^M \kappa}{\ln(Ey^{M+})}. \quad (169)$$

Turbulentna kinetička energija se za kontrolne volumene blizu zida određuje iterativno iz sljedeće funkcije zida [6]:

$$k^M = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{\beta^*}}, \quad (170)$$

gdje je $\beta^* = 0.09$.

Početni u_τ se odredi iz gornje jednačbe, te se pomoću te vrijednosti izračuna y^+ . Novi y^+ služi za računanje novog u_τ iz logaritamske zidne funkcije. Postupak se ponavlja do

konvergencije, odnosno dok se lijeva i desna strana jednadžbe (25) ne izjednače. Turbulentna kinetička energija se tada jednostavno izračuna iz (170).

Pomoću turbulentne kinetičke energije se može jednostavno izračunati specifična turbulentna disipacija [6]:

$$\omega^M = \frac{\sqrt{k^M}}{\beta^{*1/4} y^M}. \quad (171)$$

Ukratko, postupak rješavanja se svodi na tri koraka:

- riješe se Navier – Stokesove jednadžbe za brzinu s modificiranim tangencijalnim naprezanjem na zidu, najčešće pomoću efektivne viskoznost;
- iterativno se postavi k^M za kontrolne volumene kraj zida;
- pomoću k^M se jednostavno izračuna ω^M .

OpenFOAM koristi logaritamsku zidnu funkciju (25) za $y^+ > 11.6$, dok se za $y^+ < 11.6$ koristi linearna funkcija koja opisuje profil brzine u viskoznom podsloju, to jest, nema funkcije zida:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = y^+. \quad (172)$$

3.6. 3D panel metoda za rješavanje modela difrakcije i radijacije

Model difrakcije i radijacije je opisan u Podpoglavlju 2.4. Ovdje je ukratko opisan princip numeričkog proračuna spomenutog modela pomoću 3D panel metode, koji se nastavlja na prethodni matematički model.

U svrhu numeričkog proračuna se srednja oplakana površina diskretizira pomoću N panela. Svaki panel je opisan homogenim intenzitetom izvora. Na taj način se može jednadžba (72) diskretizirati:

$$-\frac{1}{2}\sigma_{mj} + \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \sigma_{nj} \frac{\partial G_{mn}}{\partial n} \Delta S_n = n_{mj} \quad \text{za } m = 1, \dots, N, n \neq m. \quad (173)$$

Uvjet nepropusnosti, odnosno brzine u smjeru normale može biti zadovoljen samo za jednu točku za svaki panel. Najčešće se koriste točke u središtu panela, koje se nazivaju kolokacijske točke. Greenova funkcija ima singularitet u točki $(x, y, z) = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, što

onemogućava lako određivanje brzine u kolokacijskoj točki panela uslijed izvora tog istog panela. Za rješenje tog problema, najčešće se oko singulariteta postavi sfera radijusa ε , te se računa integral po površini koja ne obuhvaća sami singularitet. Granična vrijednost integrala kada $\varepsilon \rightarrow 0$, daje traženi utjecajni koeficijent koji opisuje brzinu u točki panela nastalu uslijed samog izvora na istom panelu. Iz tog razloga je lijeva strana jednadžbe (173) podijeljena u dva dijela. Prvi član predstavlja upravo utjecajni koeficijent panela m na samog sebe, dok suma u drugom članu predstavlja utjecajne koeficijente panela m na panel n . Kao što je napomenuto u jednadžbi, suma iz tog razloga ide samo za $n \neq m$. ΔS_n predstavlja površinu n – tog panela. Gornji izraz predstavlja linearni sustav jednadžbi koji se može zapisati u matričnom obliku:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{1j} \\ \vdots \\ \sigma_{Nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1j} \\ \vdots \\ n_{Nj} \end{pmatrix}. \quad (174)$$

gdje matrični koeficijenti poprimaju sljedeće vrijednosti:

$$A_{nm} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{za } n = m \\ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial G_{mn}}{\partial n} \Delta S_n, & \text{za } n \neq m. \end{cases} \quad (175)$$

Prilikom ovakve diskretizacije može nastati takozvani problem nepravilnih frekvencija [13]. Taj problem se pojavljuje samo kod tijela koja plutaju na slobodnoj površini. Determinanta matričnih koeficijenata za određene vrijednosti frekvencija postaje jednaka nuli, što vodi do neprimjenjivih i nerealnih rezultata. Taj problem se može zaobići ukoliko se na diskretiziranu slobodnu površinu doda „poklopac“, odnosno ukoliko se površina koju omeđuje srednja vodna linija pomorskog objekta također diskretizira panelima. Sistem jednadžbi se može smanjiti dva puta ukoliko je tijelo simetrično s obzirom na uzdužnu ravninu, odnosno četiri puta ako je simetrično i s obzirom na poprečnu ravninu.

Kako su matrice pune, odnosno svi koeficijenti su različiti od nule, moguće je koristiti i direktne rješavače sustava, primjerice LU dekompoziciju s pivotiranjem [22]. Međutim, najčešće se koriste iterativni rješavači, koji postaju brži ako se koristi više od ~ 500 panela.

3.7. Sprega gibanja krutog tijela i računalne dinamike fluida

Rješenja translacijskih gibanja su numerički prilično jednostavna. Pomoću CFD proračuna metodom kontrolnih volumena, u svakom vremenskom trenutku se dobije polje brzine i tlaka.

Kako je promatrano tijelo opisano stranicama graničnih kontrolnih volumena, jednostavnom integracijom tlačnih i viskoznih sila je moguće dobiti ukupnu silu koja djeluje na tijelo:

$$F_i = \int_S p n_i dS + \int_S \tau_w t_i dS, \quad (176)$$

gdje je n_i jedinični vektor normale, a t_i jedinični vektor tangencijalan na površinu tijela. Nakon rješavanja gibanja fluida u cijeloj domeni u nekom vremenskom koraku, pomoću gornje jednadžbe se izračunaju spomenute sile. One predstavljaju uzbudne sile na tijelo. Numeričkom integracijom drugog Newtonovog zakona (76) se dobije brzina, te pomak tijela u željenom smjeru ΔX_i . Kako se radi o nestacionarnim problemima, koriste se eksplicitne numeričke metode za vremensku integraciju (76). OpenFOAM najčešće koristi Runge – Kutta metodu četvrtog reda [22]. Kada se dobije pomak krutog tijela nakon nekog vremenskog trenutka, potrebno je „fizički pomaknuti“ tijelo za sljedeći vremenski trenutak u kojem se ponovno rješava gibanje fluida. Međutim, barem u problemima vezanim za pomorsku industriju, najčešće se ne giba tijelo, nego cijela mreža kontrolnih volumena. Jednostavno se svi vrhovi i stranice kontrolnih volumena (time i pripadni centri) u sljedećem vremenskom koraku premjeste za ΔX_i . Na taj način se izbjegava pretjerana deformacija mreže (skupljanje ili istežanje kontrolnih volumena u smjeru gibanja).

Kao što je moguće izračunati sile na tijelo pomoću (176), moguće je izračunati i vanjske momente nakon rješenja strujanja fluida. Momenti se računaju u fiksnom, prostornom koordinatnom sustavu (koji je isti kao i koordinatni sustav tijela u početnom vremenskom trenutku). Pomoću jednadžbe (119), ti isti momenti se mogu izraziti u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo. Nakon toga se rješavaju Eulerove jednadžbe za rotaciju kutog tijela koje daju vektor rotacije Ω_i . Dalje, rješenjem jednadžbi (118) se dobije kvaternion koji predstavlja rotaciju tijela. Kako kvaternion u sebi nosi kut rotacije i os oko koje tijelo rotira (110), moguće je shodno tome „pomaknuti“ tijelo u novi položaj za novi vremenski trenutak. Međutim, cijela mreža kontrolnih volumena se pomiče za izračunati kut (kao što je bio slučaj kod translacijskih gibanja), naravno u suprotnom smjeru. Nakon pomaka mreže, slijedi novi vremenski trenutak u kojem se računa samo strujanje fluida, ali sada na pomaknutoj mreži koja naravno mijenja polje strujanja. Postupak se nastavlja do željenog vremena.

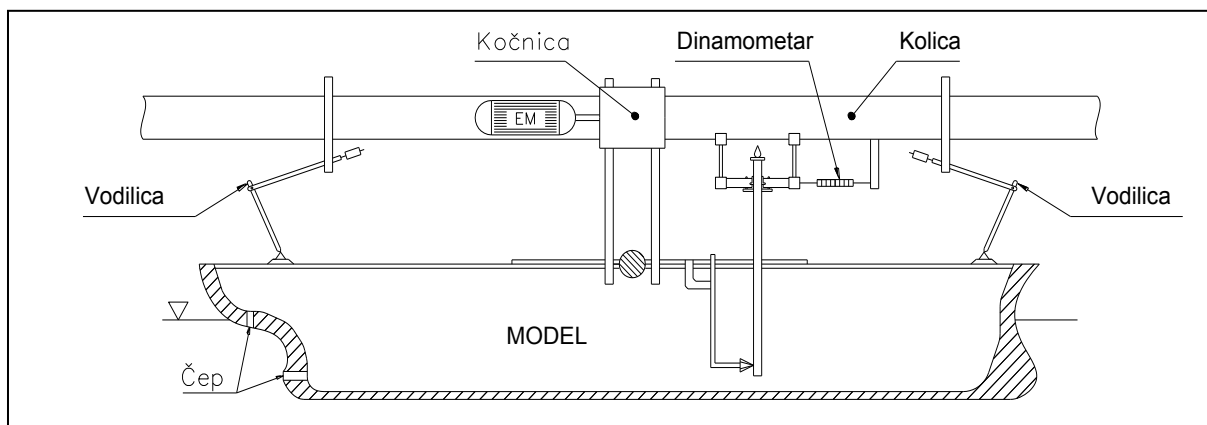
Svih sedam običnih diferencijalnih jednadžbi koje potpuno opisuju rotaciju krutog tijela se također najčešće rješavaju Runge – Kutta metodom četvrtog reda.

4. OTPOR BRODA

Sila otpora broda pri različitim brzinama je najvrijednija informacija koja opisuje hidrodinamiku trupa broda. Ona utječe na izbor propelera i pogonskog stroja, te cijelog pogonskog sustava. Dobro projektirana brodska forma i pogonsko postrojenje mogu donijeti velike novčane uštede. Primjerice, ako se specifična potrošnja goriva velikog trgovačkog broda smanji za 1%, moguće je smanjiti ukupni trošak goriva tijekom životnog vijeka broda i za više milijun dolara. Stoga, da bi se projektirao ekonomski dobar brod, potrebno je dovoljno točno procijeniti silu otpora broda. Trenutno, najčešće korištena metoda za procjenu sile otpora je modelsko ispitivanje brodske forme. Međutim, danas se sve više i više koriste razne računalne metode, gdje vodeću ulogu ima upravo metoda kontrolnih volumena, posebno u svrhu optimizacije trupa broda, raspodjele tereta, trima, itd.

4.1. Modelska ispitivanja otpora broda

Sila otpora broda se određuje tegljenjem geometrijski sličnog modela broda kroz bazen. Model se tegli kroz bazen određenom brzinom pomoću pokretnih kolica za koja je pričvršćen. Na sljedećoj slici je shematski prikazan model broda spreman za tegljenje kroz bazen.



Slika 9. Model broda opremljen za pokus otpora.

Tokom ubrzanja kolica do određene mjerne brzine, model je zakočen pomoću kočnice radi zaštite instrumenata. Kada se dostigne određena brzina, potrebno je određeno vrijeme da se strujanje oko trupa ustali, odnosno da postane stacionarno. Nakon ustaljenja strujanja, kočnica se otpušta te se pomoću dinamometra mjeri ukupna sila otpora. Mjerenje sile otpora se vrši točno određenom frekvencijom uzrokovanja. Obično se mjeri 15 do 20 mjernih točaka koje

su vremenski jednako udaljene. Rezultati tih mjerenja se statistički obrade, te se dobije srednja vrijednost ukupne sile otpora pri toj brzini. Ukoliko je bazen dovoljno velik, model se kočnicom zakoči, kolica ubrzavaju na sljedeću brzinu, te se postupak ponavlja. U slučaju da bazen nije dovoljno velik (npr. ako su brzine velike), kolica se usporavaju te vraćaju na početak bazena zajedno s modelom. Najčešće se koristi elektromotorni pogon za kolica.

Jednostavna procedura, temeljena na zakonima sličnosti u mehanici fluida [27] omogućuje proračunavanje ukupne sile otpora s modelskih vrijednosti na brod u naravi. Potrebno je naglasiti da se prilikom ovog postupka ne zadovoljava jednakost Reynoldsovog broja modela i broda. Sila otpora se općenito može podijeliti na silu otpora trenja i silu preostalog otpora, kojemu je najveća komponenta otpor valova. Zbog jednakosti Froudevog broja, koeficijent preostalog otpora je jednak za model i za brod. Za proračun koeficijenta otpora se najčešće koriste dobro utemeljeni empirijski izrazi ovisni o Reynoldsovom broju. Prilikom pokusa slobodne vožnje propelera, najčešće nije moguće zadovoljiti ni geometrijsku sličnost jer bi tada krilo propelera bilo nedopustivo tanko. To su glavni, iako lako premostivi, nedostaci eksperimentalnih mjerenja. CFD ne pati od takvih problema, jer se jednostavno mogu modelirati brod i propeler u naravi.

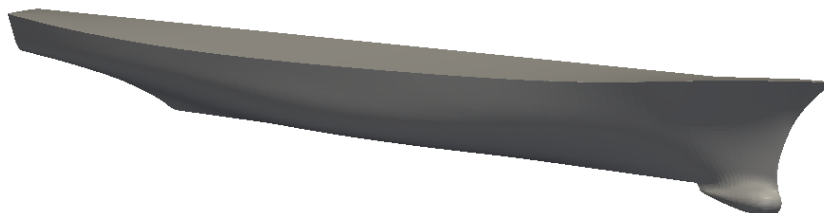
4.2. CFD proračun otpora broda US Navy Combatant, DTMB 5415 u programskom paketu OpenFOAM

OpenFOAM (engleski „Field Operation and Manipulation“) je „open source“ CFD programski paket. Neke od mogućnosti programskog paketa su rješavanje kompleksnih problema u mehanici fluida, s prikladim modeliranjem kemijskih reakcija, turbulencije i prijenosa topline, te rješavanje problema nelinearne dinamike elastičnih tijela i elektromagnetizma. Također sadržava alate za generiranje potrebnih mreža kontrolnih volumena, a za post procesiranje koristi program ParaView.

Za sve simulacije u ovom radu je korišten solver navalFoam koji je prilagođen rješavanju problema u pomorskoj industriji. navalFoam rješava sustave jednadžbi opisane u ovom radu, dakle radi se o izotermnom, dvofaznom i turbulentnom strujanju fluida.

Brod US Navy Combatant, DTMB 5415 je bio preliminarni projekt Američke ratne mornarice u 1980 – tim godinama. Trup ima kupolu za sonar i zrcalnu krmu. Svi parametri

broda, kao i njegova geometrija su preuzeti s internet stranice [28]. Polovica trupa broda bez privjesaka je prikazana u izometriji na sljedećoj slici, Slika 10.



Slika 10. US Navy Combatant, DTMB 5415, trup bez privjesaka.

Pregled geometrijskih i ostalih karakteristika razmatranog broda su dani u sljedećoj tablici, Tablica 3. Prikazan je i ukupni koeficijent otpora broda dobiven eksperimentalnim mjerenjem za spomenutu brzinu, te pripadna sila otpora. Također su prikazani i uvjeti u bazenu tijekom mjerenja, koji su korišteni i u simulaciji.

Tablica 3. Karakteristike modelskog ispitivanja.

$L_{PP} = 5.72 \text{ m}$	duljina između okomica
$B_{WL} = 0.768 \text{ m}$	maksimalna širina na vodnoj liniji
$T = 0.248 \text{ m}$	gaz
$S = 4.829 \text{ m}^2$	oplakana površina trupa bez privjesaka
$u_x = 2.097 \text{ m/s}$	ispitivana brzina broda
$Re = 1.19 \cdot 10^7$	Reynoldsov broj (na bazi $L_{PP} - a$)
$F_n = 0.28$	Froudeov broj (na bazi $L_{PP} - a$)
$\nu = 1.008 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	kinematička viskoznost vode u bazenu
$\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$	gustoća vode u bazenu
$C_T = 4.23 \cdot 10^{-3}$	izmjereni ukupni koeficijent otpora
$R_{eks} = 44.83 \text{ N}$	izmjerena ukupna sila otpora

Kao što je spomenuto, proračun je napravljen pomoću solvera navalFoam programskog paketa OpenFOAM. Sa spomenute stranice su preuzete i volumne mreže kontrolnih volumena. Prva, grublja mreža ima otprilike 450 000 kontrolnih volumena, dok druga, finija ima oko 13 milijuna. Mreže su po geometriji jednake, samo se razlikuju u broju ćelija:

posebno po rezoluciji graničnog sloja. Obje mreže se sastoje od sljedećih granica: ulaza, izlaza, atmosfere (gornja granica), dna (donja granica), simetralne ravnine i dalekog polja (engleski „far field“), te samog trupa. Prikaz rubnih uvjeta pojedinih varijabli je dan u sljedećoj tablici, Tablica 4.

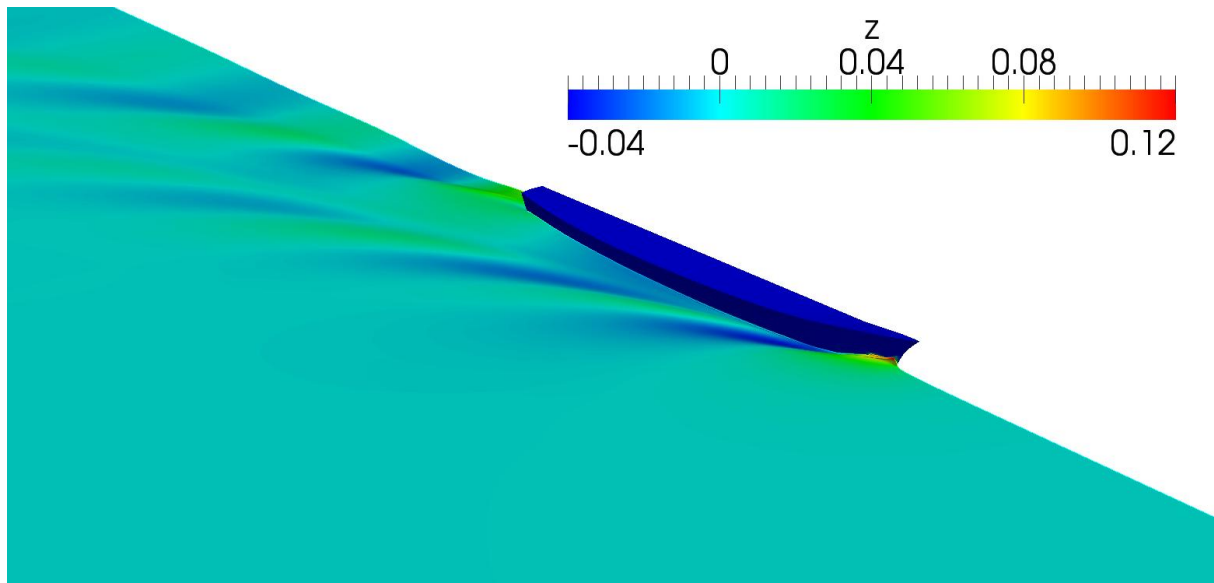
Tablica 4. Prikaz rubnih uvjeta za simulaciju otpora broda.

	Trup	Ulaz	Izlaz	Atmosfera	Dno	Simetralna ravnina	Daleko polje
\bar{u}_i	(0,0,0)	(2.097,0,0)	$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n} = 0$	<i>slip</i>	(0,0,0)	<i>zrcalna slika</i>	<i>slip</i>
\bar{p}	$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = 0$	0	$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = 0$
α	$\frac{\partial \alpha}{\partial n} = 0$	$\alpha = const.$	$\frac{\partial \alpha}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \alpha}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \alpha}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \alpha}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \alpha}{\partial n} = 0$
k	<i>funkcija zida</i>	$2.43 \cdot 10^{-5}$	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$	$2.43 \cdot 10^{-5}$	$2.43 \cdot 10^{-5}$	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$	$2.43 \cdot 10^{-5}$
ω	<i>funkcija zida</i>	100	$\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$

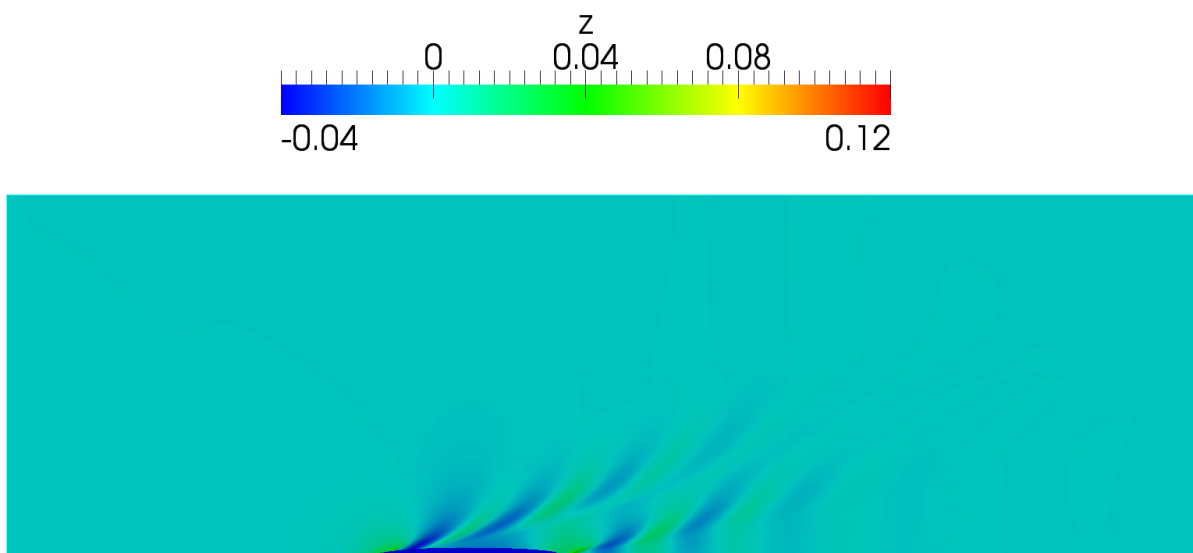
Indikatorska funkcija α se inicijalizira tako da se do visine slobodne površine postavi $\alpha = 1$, dok je u ostatku domene $\alpha = 0$. Takva raspodjela se drži konstantnom na ulaznoj granici kroz sve vremenske korake. Okvirne fiksne vrijednosti turbulentne kinetičke energije i specifične disipacije su dobivene proračunom prikazanim u Podpoglavlju 2.2.4.1. Rubni uvjet brzine *slip* znači da je gradijent brzine u tangencijalnom smjeru i normalna komponenta brzine jednaki nuli. Za više detalja o brojnim rubnim uvjetima u OpenFOAM programu, vidi [29].

Prije svega, potrebno je napomenuti da sve slike u ovom Poglavlju prikazuju rezultate proračuna na finoj mreži, osim ako nije drugačije naznačeno. Slika 11 i Slika 12 prikazuju slobodnu površinu koja se dobije kao izopovršina indikatorske funkcije $\alpha = const. = 0.5$. Slobodna površina je obojana u ovisnosti o visini uzdignute površine radi bolje vizualizacije, te je prikazan samo zanimljivi dio domene. Pomoću tako odabrane vizualizacije, može se vidjeti područje valnih dolova (plava boja na slici), te područje valnih brijegova (tamno zelena, žuta i crvena boja). Vidljivo je da su pramčani i krmeni valovi najizraženiji. Na sljedećoj slici je prikazana indikatorska funkcija na samom trupu broda, Slika 13: pomoću čega se može vizualizirati oplakana površina trupa. Prema legendi, crvena boja odgovara $\alpha = 1$, što predstavlja vodu, dok plava boja $\alpha = 0$ predstavlja zrak. Blagi prijelaz indikatorske funkcije s $\alpha = 0$ na $\alpha = 1$ (odnosno s vode na zrak) je posebno istaknut ispred

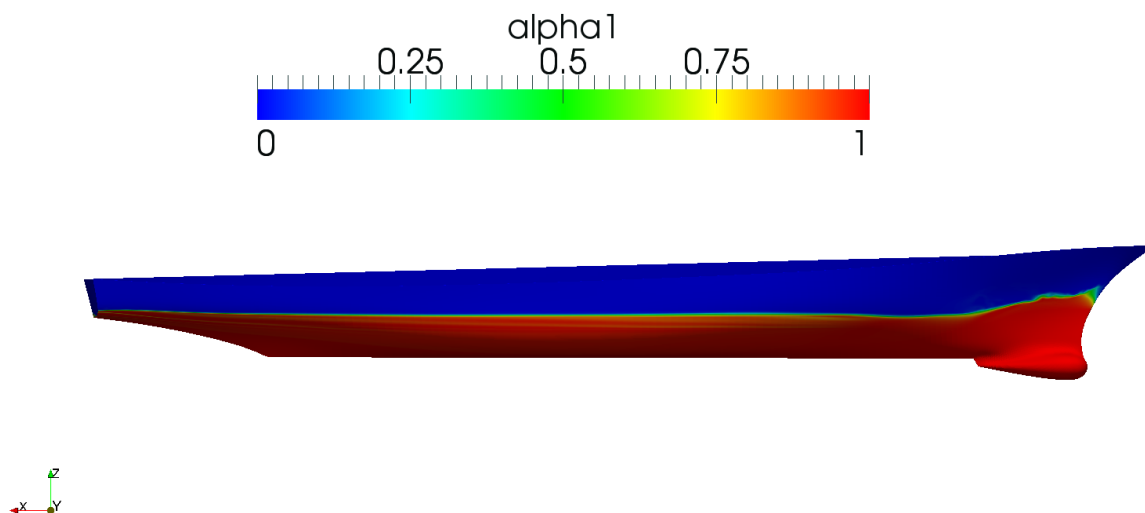
pramčanog ramena. Potrebno je napomenuti da je poželjno da spomenuti prijelaz bude što tanji, odnosno da indikatorska funkcija ima veći gradijent. Također je na slici jasno vidljiv pramčani val, što se slaže s prethodnom slikom.



Slika 11. Izometrijski prikaz slobodne površine, DTMB 5415.

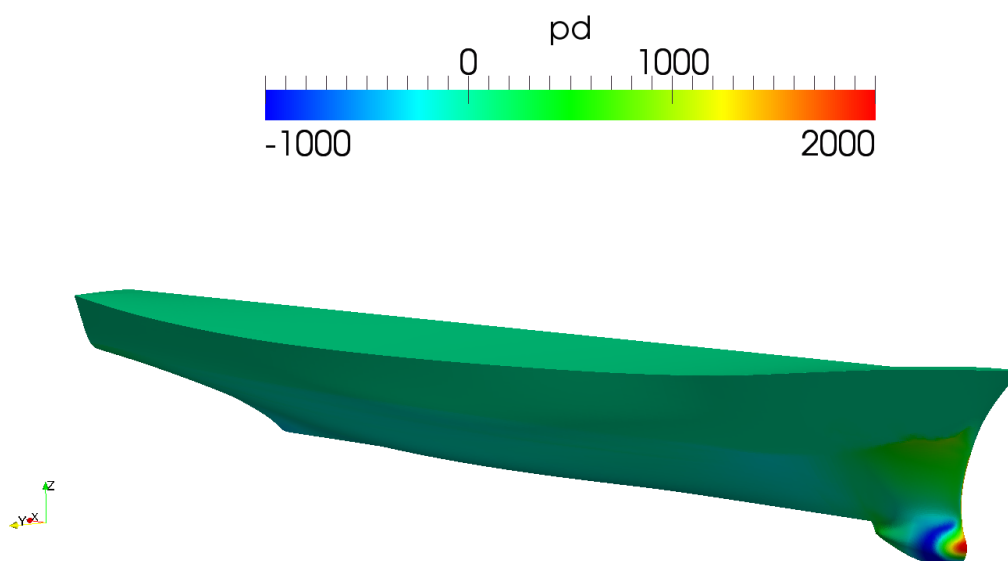


Slika 12. Slobodna površina iz ptičje perspektive, DTMB 5415.



Slika 13. Oplakana površina trupa, DTMB 5415.

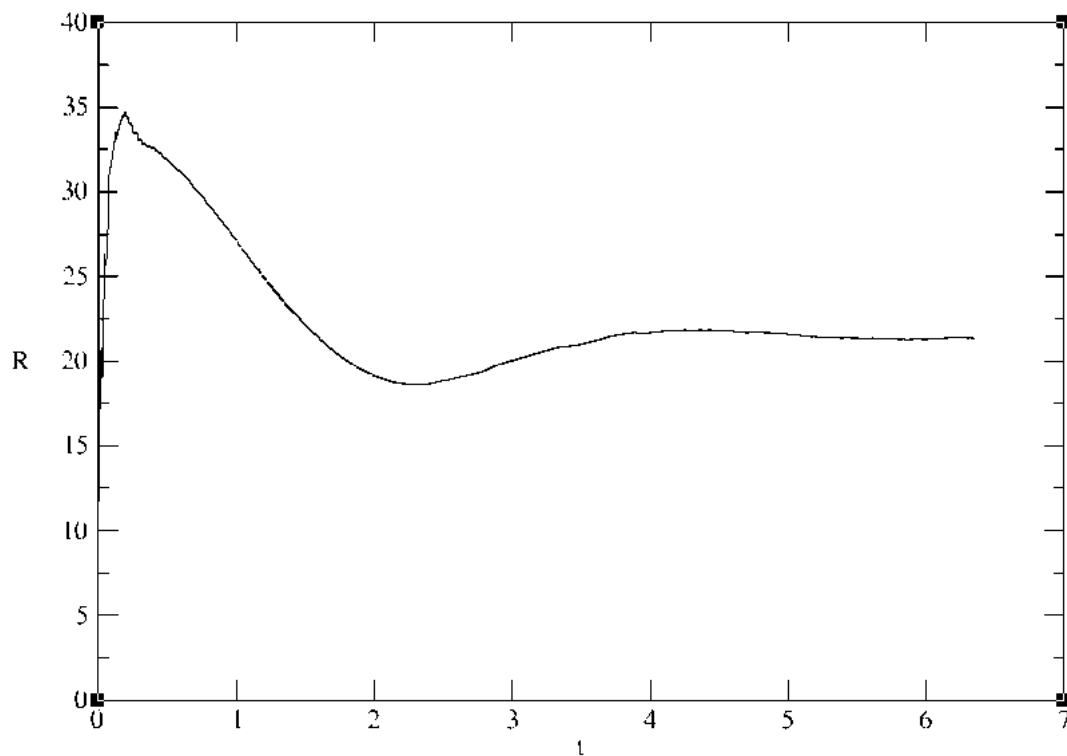
Posljednja slika prikazuje dinamički tlak na trupu broda, Slika 14. Očekivano, točka zastoja se nalazi na pramčanoj statvi, odnosno bulbu. Prikazana je crvenom bojom, te je karakterizira najveći dinamički tlak. Također je blago vidljivo područje većeg dinamičkog tlaka uslijed pramčanog vala.



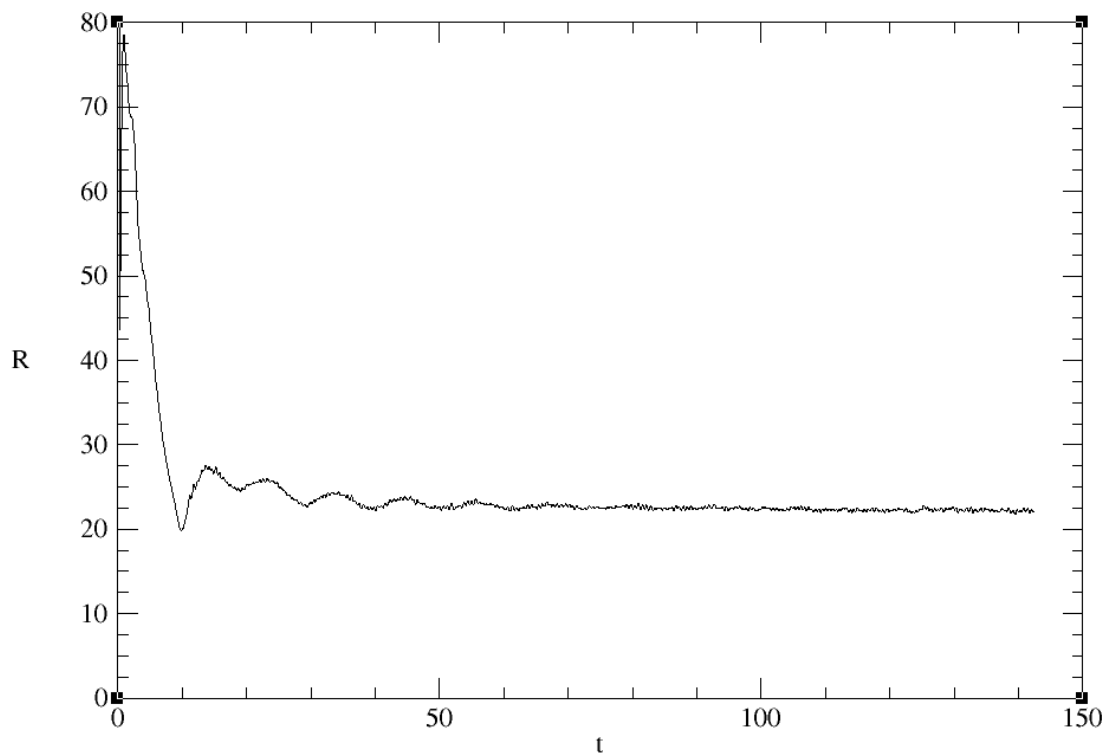
Slika 14. Dinamički tlak na trupu, DTMB 5415.

Sljedeći dijagrami prikazuju konvergenciju sile otpora u ovisnost o vremenima simulacija, Slika 15 i Slika 16, na gruboj i finoj mreži. Vremenski korak se mijenjao u ovisnost o maksimalnom Courantovom broju. Zbog proizvoljnih poliedarskih mreža koje OpenFOAM koristi, Courantov broj je u programu definiran na sljedeći način:

$$Co = \frac{u_i^f S_i^f}{d_i S_i^f} \Delta t . \quad (177)$$



Slika 15. Konvergencija sile otpora, gruba mreža, DTMB 5415.



Slika 16. Konvergencija sile otpora, fina mreža, DTMB 5415.

U gornjim dijagramima je prikazana polovica ukupne sile, jer su mreže napravljene s ravninom simetrije. Tablica 5 prikazuje konvergirane vrijednosti polovice sile otpora. Konvergirano rješenje je definirano kao srednja vrijednost dovoljnog broja zadnjih iteracija, da bi se umanjio utjecaj oscilacija u rješenju. Također su procijenjene relativne greške CFD proračuna prema eksperimentu. Ukoliko se uzme da je izmjerena, ekperimentalna vrijednost sile otpora točna, Tablica 2, relativna greška se može definirati prema:

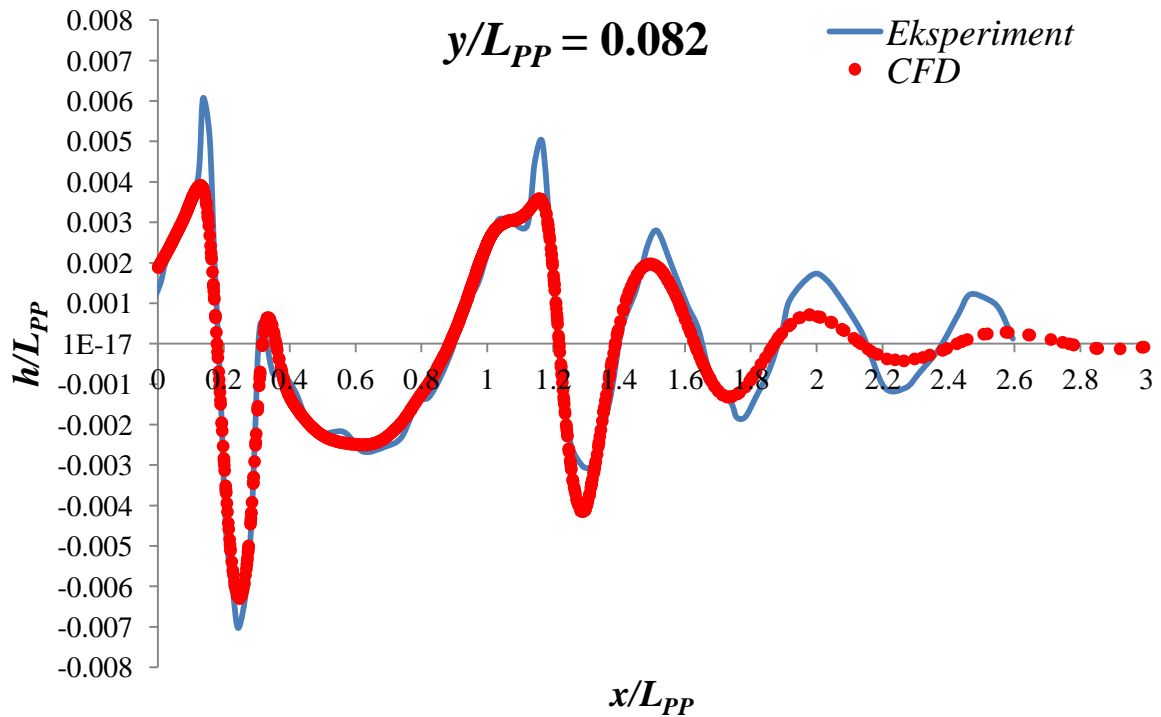
$$Err = \frac{|R_{CFD} - R_{eks}|}{R_{eks}} \cdot 100. \quad (178)$$

Tablica 5. Sila otpora i relativna greška CFD proračuna, gruba i fina mreža, DTMB 5415.

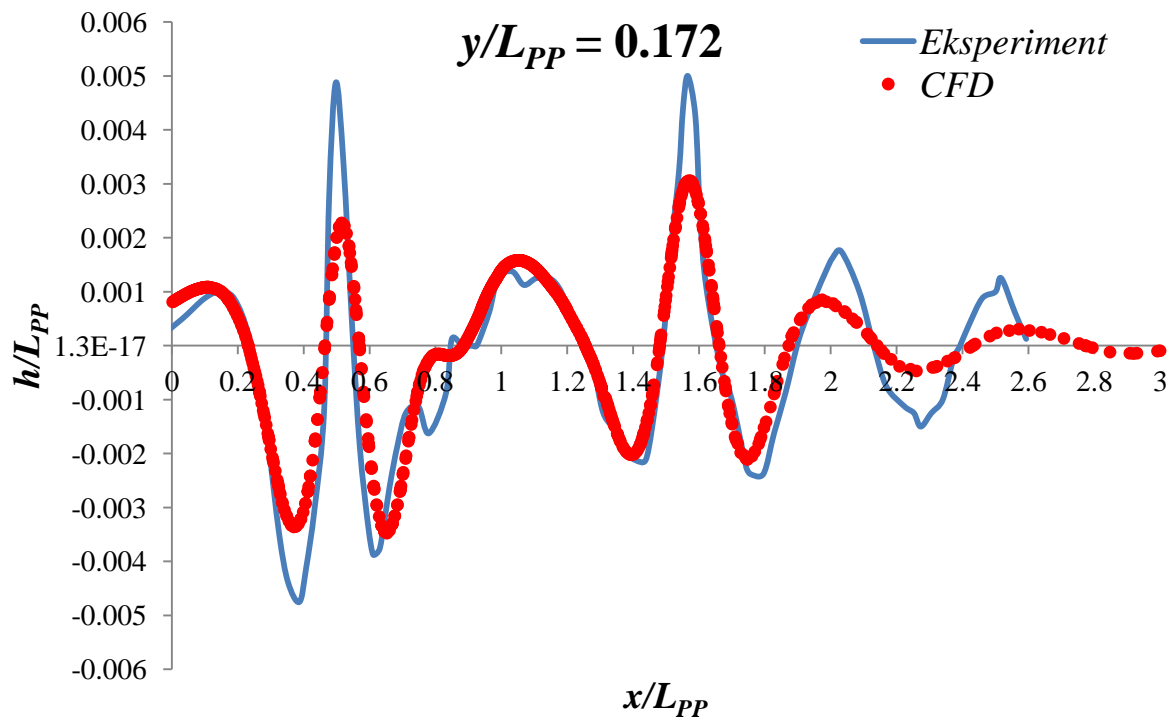
$R_{eks} = 44.83 \text{ N}$	Gruba mreža ~450 000 ćelija	Fina mreža ~13 000 000 ćelija
$R_{CFD}/2, \text{ N}$	21.33	22.23
$R_{CFD}, \text{ N}$	42.66	44.46
$Err, \%$	4.84	0.84

Kao što je vidljivo, relativna greška na finoj mreži iznosi samo 0.84%, što je i više nego prihvatljivo za inženjerske potrebe.

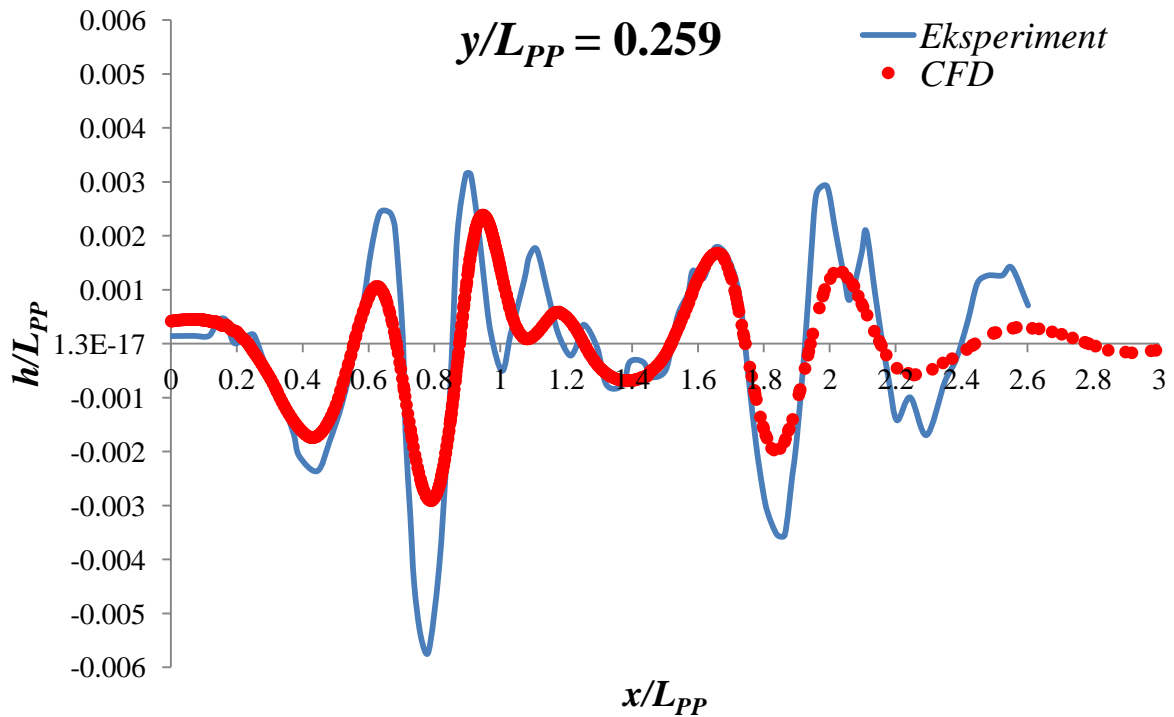
Ekperimentalni podaci preuzeti iz [28] obuhvaćaju profile elevacije slobodne površine na raznim ravninama paralelnim sa simetralnom ravninom broda. Ravnine su određene s $y/L_{PP} = const$. Na sljedećim dijagramima je prikazana usporedba eksperimentalnih podataka s rezultatima CFD proračuna. Radi slaganja s eksperimentalnim podacima, abscise i ordinate dijagrama su dane u bezdimenzijskom obliku, odnosno, redom u x/L_{PP} i h/L_{PP} , gdje je h visina profila vala. Zadnja slika prikazuje profil vala na samom trupu broda.



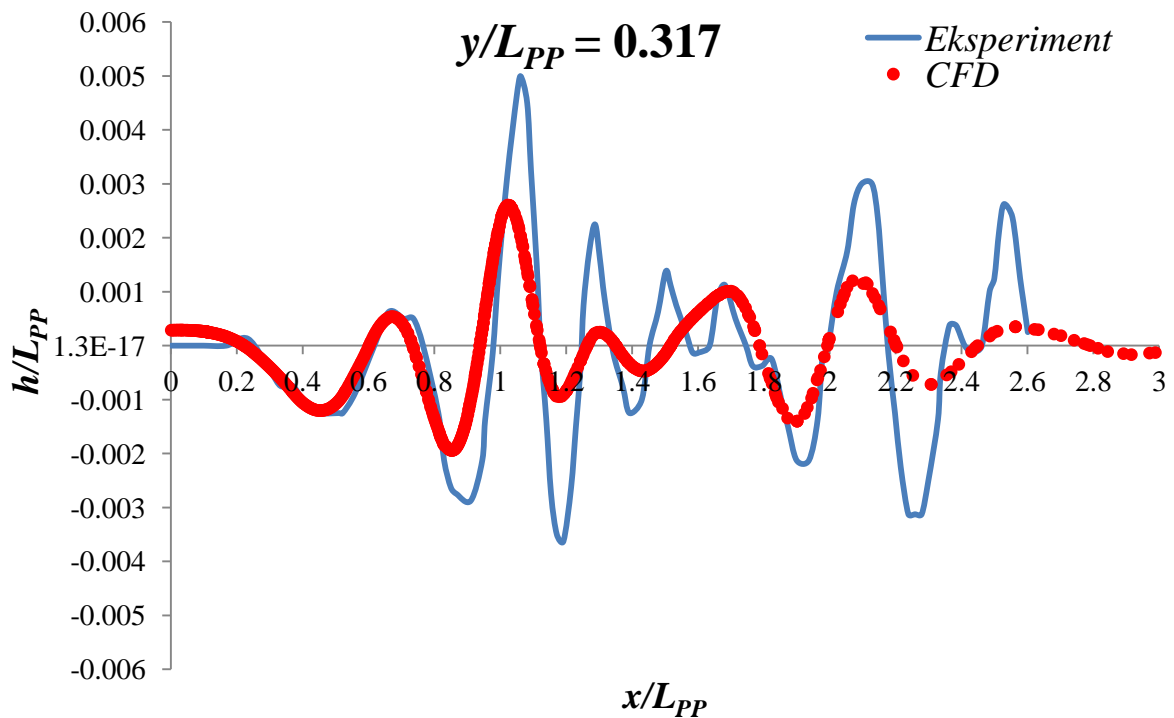
Slika 17. Profil vala na $y/L_{PP} = 0.082$, eksperimentalni i CFD rezultati, DTMB 5415.



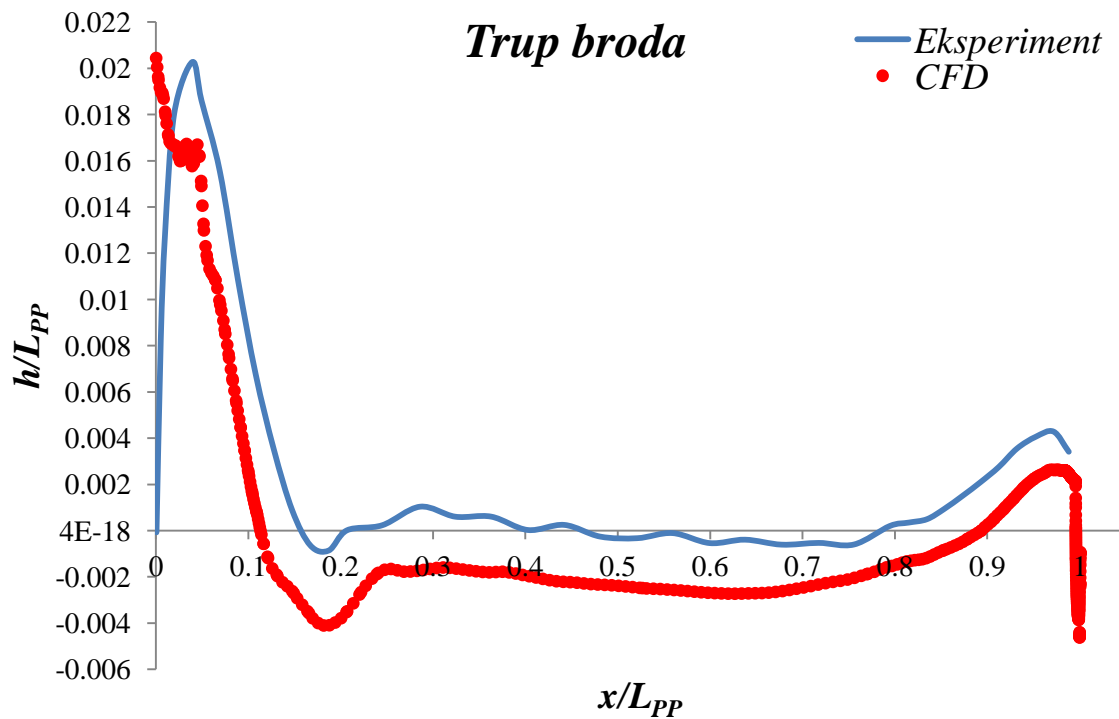
Slika 18. Profil vala na $y/L_{PP} = 0.172$, eksperimentalni i CFD rezultati, DTMB 5415.



Slika 19. Profil vala na $y/L_{PP} = 0.259$, eksperimentalni i CFD rezultati, DTMB 5415.



Slika 20. Profil vala na $y/L_{PP} = 0.317$, eksperimentalni i CFD rezultati, DTMB 5415.



Slika 21. Profil vala na trupu broda, eksperimentalni i CFD rezultati, DTMB 5415.

Iz prethodnih slika je vidljivo da se trendovi gornjih krivulja jako dobro slažu. Iako se vrijednosti samih visina u područjima lokalnih ekstrema ne slažu, može se zaključiti da CFD proračun vjerno prikazuje slobodnu površinu. Također, ove krivulje su se dobile koristeći izokonture na kojima je indikatorska funkcija imala vrijednost od 0.5, te bi se možda dobili bolji rezultati ukoliko bi se uzela neka druga vrijednost.

5. MODELIRANJE VALOVA

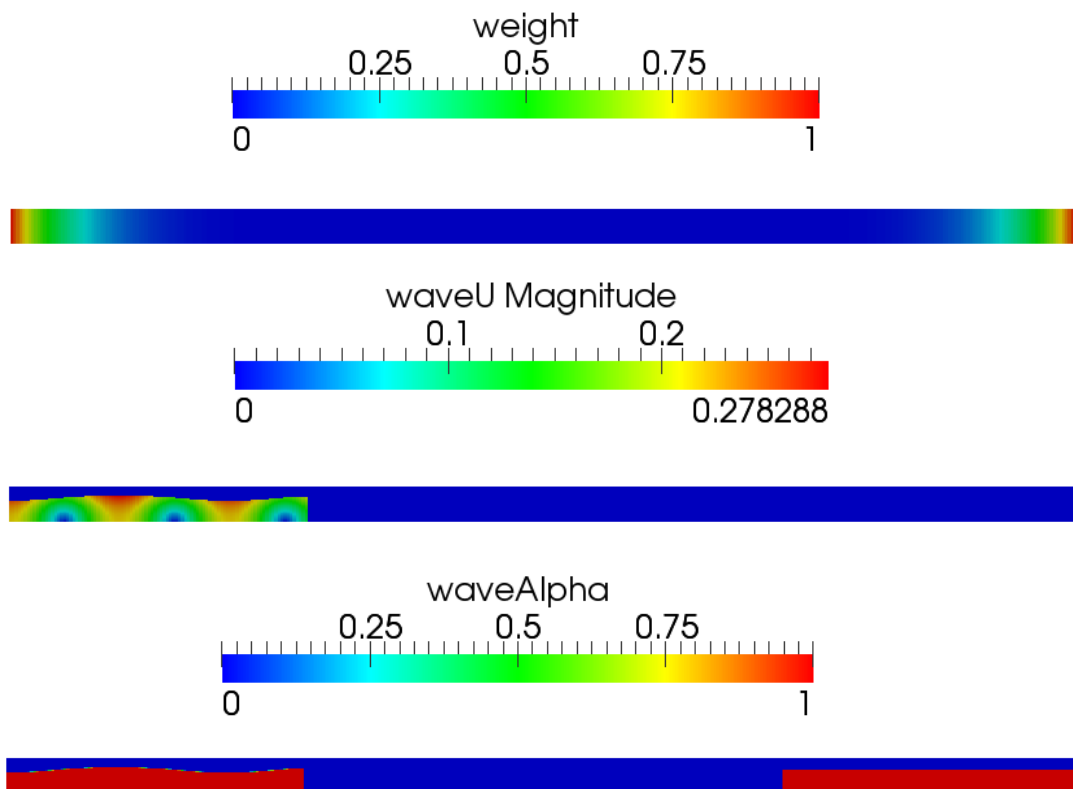
U svrhu simulacije valova u OpenFOAM programskom paketu, koristila se aplikacija waves2Foam. Aplikacija služi za generiranje i upijanje površinskih valova [30]. Metoda korištena u aplikaciji je temeljena na relaksacijskim zonama koje se koriste kraj odgovarajućih granica domene. U relaksacijskoj zoni na ulaznoj granici se postavlja željeni profil vala i polje brzine dobiveno pomoću željene valne teorije. S druge strane, u svrhu uklanjanja reflektiranih valova, odnosno upijanja valova na izlaznoj granici se također postavlja relaksacijska zona u kojoj je u svakom trenutku zadana mirna vodna linija i nulto polje brzine. Relaksacijske zone se ažuriraju u svakom vremenskom koraku u slučaju da postoji gibanje mreže. Najčešće se koristi eksplicitna relaksacija varijabli prije rješavanja jednadžbe količine gibanja:

$$\begin{aligned} u_i &= (1 - w)u_i^{\text{željeno}} + wu_i^{\text{izračunato}}, \\ \alpha &= (1 - w)\alpha^{\text{željeno}} + w\alpha^{\text{izračunato}}. \end{aligned} \quad (179)$$

U gornjim jednadžbama natpis „željeno“ označava parametre koji se žele postaviti (primjerice brzina i profil vala određen s α po Airyjevoj linearnoj valnoj teoriji), dok natpis „izračunato“ označava vrijednosti izračunate pomoću CFD proračuna. $w \in [0, 1]$ je težinska funkcija. Korisnik može izabrati između par težinskih funkcija, dok je najčešće korištena ekponencijalna težinska funkcija. Ona se koristila i u uvom radu, te glasi:

$$w = 1 - \frac{e^{\chi^p} - 1}{e - 1}, \quad (180)$$

gdje je $p \in \mathcal{R}_+$, najčešće $p = 3.5$. $\chi \in [0, 1]$ je bezdimenzijska duljinska funkcija definirana linearno po relaksacijskoj zoni, tako da je $w = 0$ na granicama. Na taj način se blizu granica postižu parametri (u_i, α) koji odgovaraju rubnim uvjetima zadanim pomoću željene valne teorije. Slika 22 prikazuje jednostavan 2D generator valova s očito vidljivim relaksacijskim zonama. Vidljivo je da težinska funkcija zamire prema unutrašnjosti domene, dok je maksimalna na samim granicama. Kao što je spomenuto, u relaksacijskim zonama je nametnuto polje brzine i indikatorske funkcije prema željenoj valnoj teoriji. Slika prikazuje $u_i^{\text{željeno}}$ i $\alpha^{\text{željeno}}$, a ne stvarnu sliku strujanja, koja se računa prema (179).



Slika 22. Prikaz težinske funkcije i zadanih polja 2D generatora valova.

Valne teorije koje se mogu reproducirati pomoću aplikacije su:

1. Morska struja
 - Potencijalno konstantno strujanje $u_i = const.$
2. Pravilni valovi
 - Airyev progresivni val;
 - Airyev stojni val;
 - Stokesov val drugog reda;
 - Stokesov val petog reda;
 - Knoidalna teorija prvog reda;
 - Valna teorija pomoću strujne funkcije;
3. Jedan (engleski „solitary“) pravilni val
 - Airyev progresivni val;
4. Uzburkano more
 - Bikromatski (linearna kombinacija dvaju valova) Airyev progresivni val;
 - Bikromatski (linearna kombinacija dvaju valova) Stokesov val drugog reda;
 - Superpozicija Airyevih progresivnih valova na temelju spektra valova;

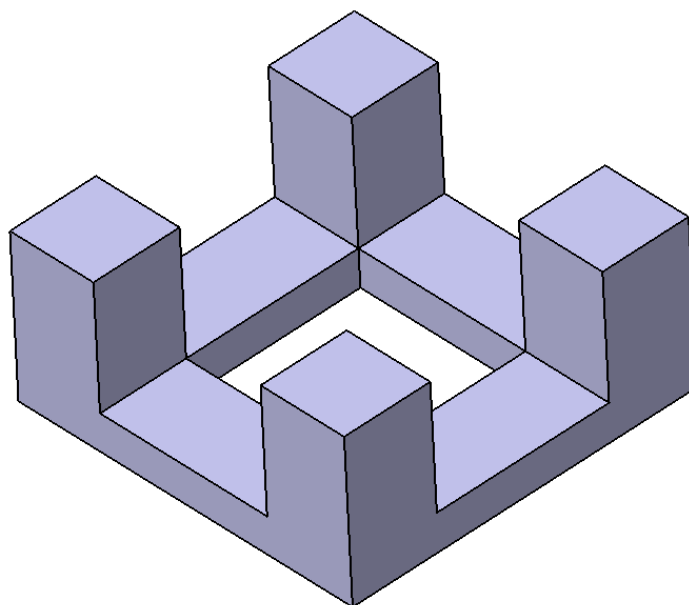
Za detalje o gonjim valnim teorijama, čitatelj se upućuje na [31].

6. PRORAČUNI GIBANJA POLUURONJIVE PLATFORME

U ovom Poglavlju će se opisati razni CFD proračuni gibanja poluuronjive platforme. Proračuni obuhvaćaju fiksnu platformu (bez gibanja) na harmonijskom valu u svrhu usporedbe sila dobivenih CFD proračunom sa silama dobivenih iz modela difrakcije i radijacije. Prikazan je i proračun na jednom harmonijskom valu sa zalijetanjem platforme gdje se izrazito vide efekti drugog reda. Konačno, napravljen je proračun prigušenja ljuljanja platforme (engleski „roll damping“).

6.1. Karakteristike razmatrane poluuronjive platforme

Geometrija poluuronjive platforme razmatrana u ovom radu se sastoji od šupljeg pontona na kojem se nalaze četiri pilona kvadratnog presjeka, Slika 23.



Slika 23. Izometrijski prikaz poluuronjive platforme (bez palube).

Kao što je vidljivo, platforma ima i uzdužnu i poprečnu ravninu simetrije. Zbog sličnosti ove platforme s primjerom iz literature, iz [32] su preuzeti radijusi tromosti i položaj težišta mase. Podatci koji kompletno opisuju platformu su prikazani u sljedećoj tablici, Tablica 6. Potrebno je naglasiti da koordinatni sustav u kojem je dan položaj težišta mase ima ishodište u presjecištu spomenutih ravnina simetrije s osnovicom. Tako vertikalna vrijednost *COG* predstavlja vertikalnu udaljenost od kobilice.

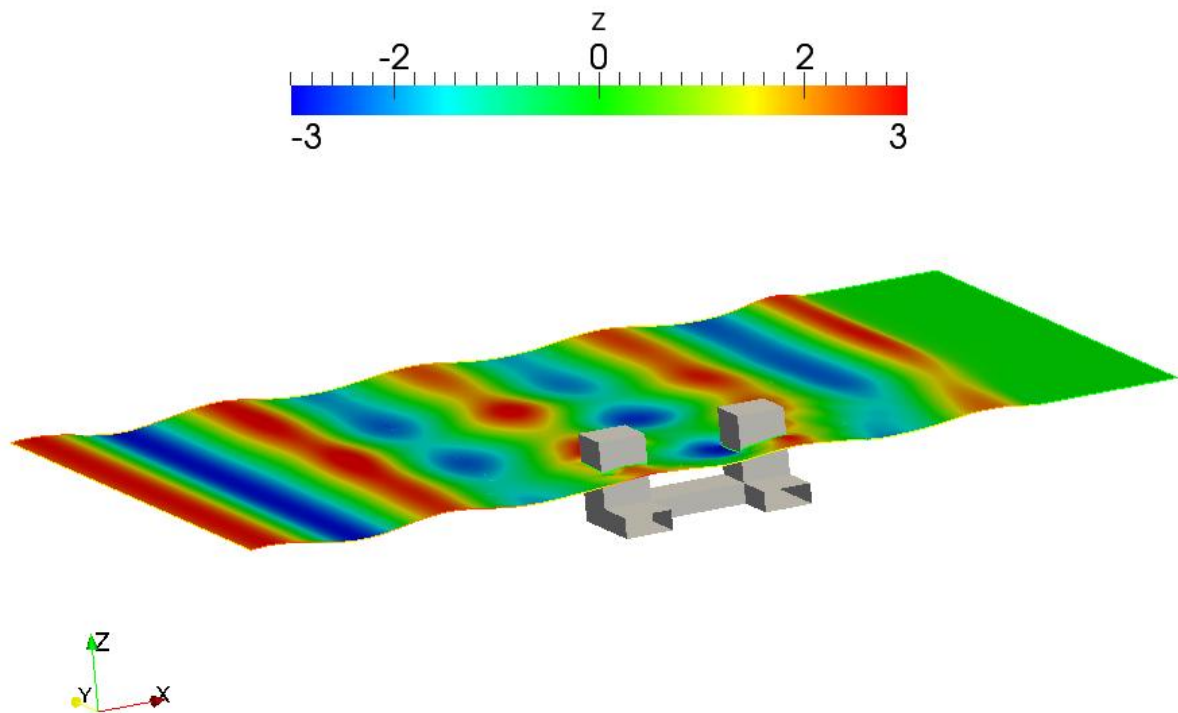
Tablica 6. Parametri poluuronjive platforme.

<i>Duljina: L, m</i>		100
<i>Širina: B, m</i>		100
<i>Gaz: T, m</i>		28
<i>Stranica kvadratnih presjeka pilona: a, m</i>		25
<i>Visina pontona: h_1, m</i>		10.5
<i>Visina pilona: h_2, m</i>		34
<i>Istisnina: Δ, t</i>		125562.5
<i>Položaj težišta mase COG, m</i>	<i>Uzdužni</i>	0
	<i>Poprečni</i>	0
	<i>Vertikalni</i>	33
<i>Radijusi tromosti r_{ii}, m</i>	<i>Ljuljanje</i>	38
	<i>Posrtanje</i>	42
	<i>Zaošijanje</i>	46

Za CFD proračun se definirala samo polovica poluuronjive platforme zbog simetrije, što znatno ubrzava proračun. Kako je mreža kontrolnih volumena bila parametarski zadana, jednostavno se mogao mijenjati broj ćelija u svim smjerovima. Također se mogla mijenjati i sama veličina domene. Za sve simulacije su korištene različite mreže ovisno o valnoj duljini. Ispred, kao i iza platforme se uvijek ostavilo najmanje dvije valne duljine. U smjeru širine platforme je uvijek bila najmanje jedna i pol valna duljina. Korištenjem veće domene bi se sigurno dobili bolji rezultati, ali takve analize nisu obuhvaćene u ovom radu zbog ograničenog vremena. Broj ćelija po valnoj duljini (~ 30) i po valnoj visini (~ 10) se nastojao držati konstantnim. To je značilo gušće mreže za simulacije s manjim valnim duljinama i valnim visinama.

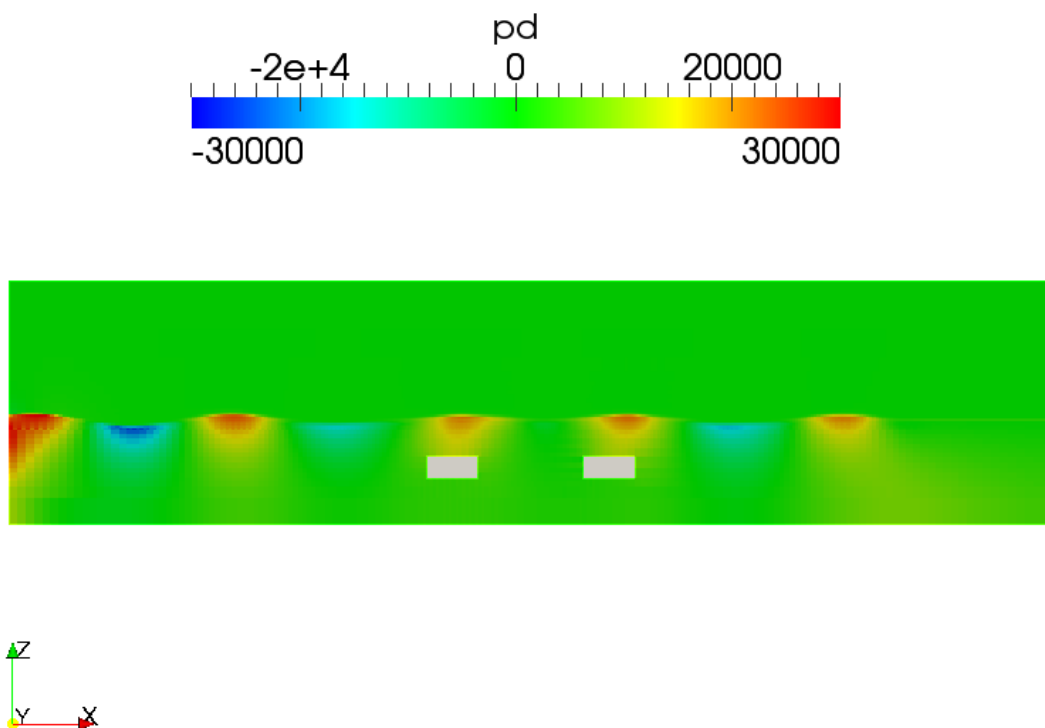
6.2. Proračun sile zalijetanja i poniranja na nepomičnu platformu uslijed harmonijskog vala

Mreža kontrolnih volumena za sve simulacije u ovom Podpoglavlju se sastojala od istih granica kao i u Poglavlju 4. U cilju smanjenja domene, a time i bržeg proračuna, dubina mora je postavljena na 50 m. Rubni uvjeti su također bili isti kao u simulaciji otpora broda, s iznimkom ulaznih i izlaznih relaksacijskih zona. Na ulaznoj relaksacijskoj zoni je postavljeno polje brzine i indikatorske funkcije prema Airyevoj valnoj teoriji za željeni val. Na izlaznoj relaksacijskoj zoni je postavljeno nulto polje brzine i mirna vodna linija u cilju smanjenja refleksije valova. Napravljen je proračun za tri valne duljine, odnosno tri frekvencije. Odabrana valna visina je 6 m, što je jasno vidljivo sa sljedeće slike, Slika 24.

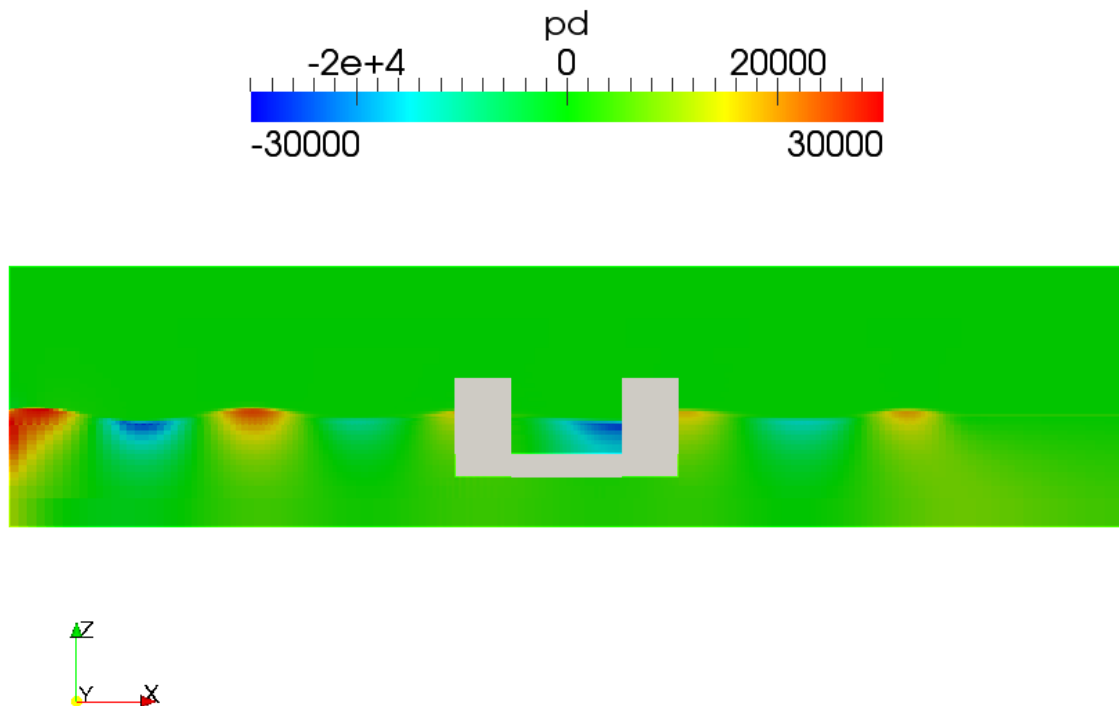


Slika 24. Izometrijski prikaz slobodne površine, $\lambda = 100$ m.

Gornja slika prikazuje slobodnu površinu u proizvoljnom trenutku za valnu duljinu od 100 m, gdje je vidljiv utjecaj platforme na samo polje strujanja.

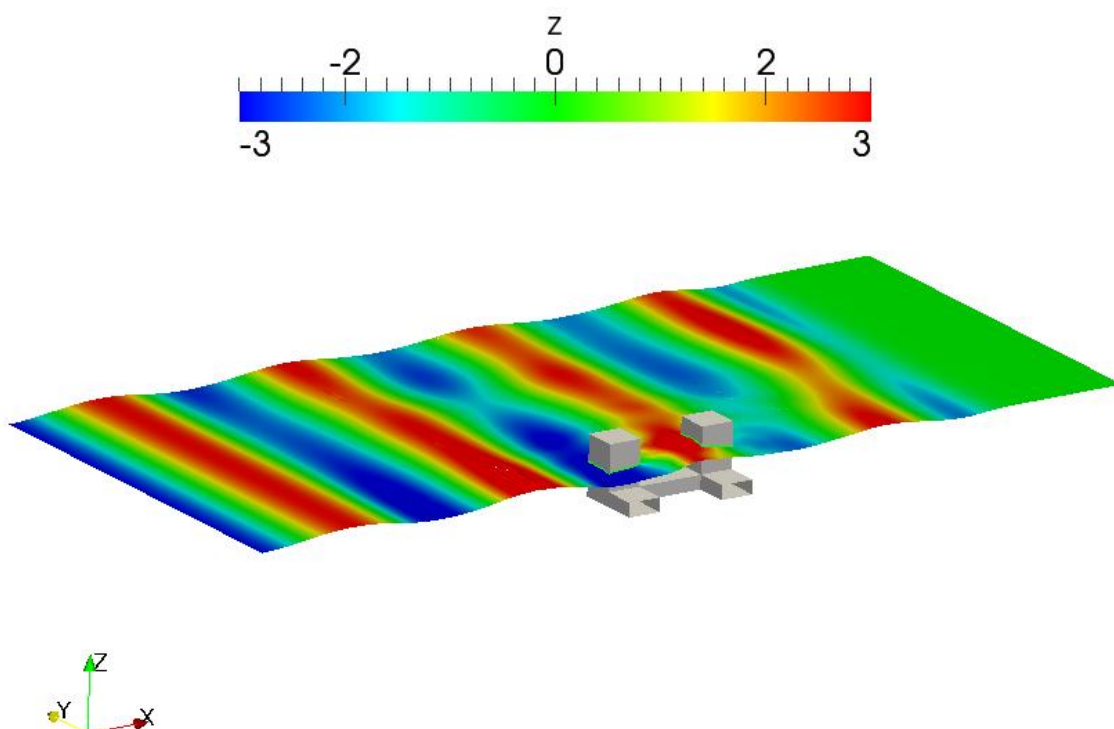


Slika 25. Polje dinamičkog tlaka u simetralnoj ravnini $y = 0$ m, $\lambda = 100$ m.



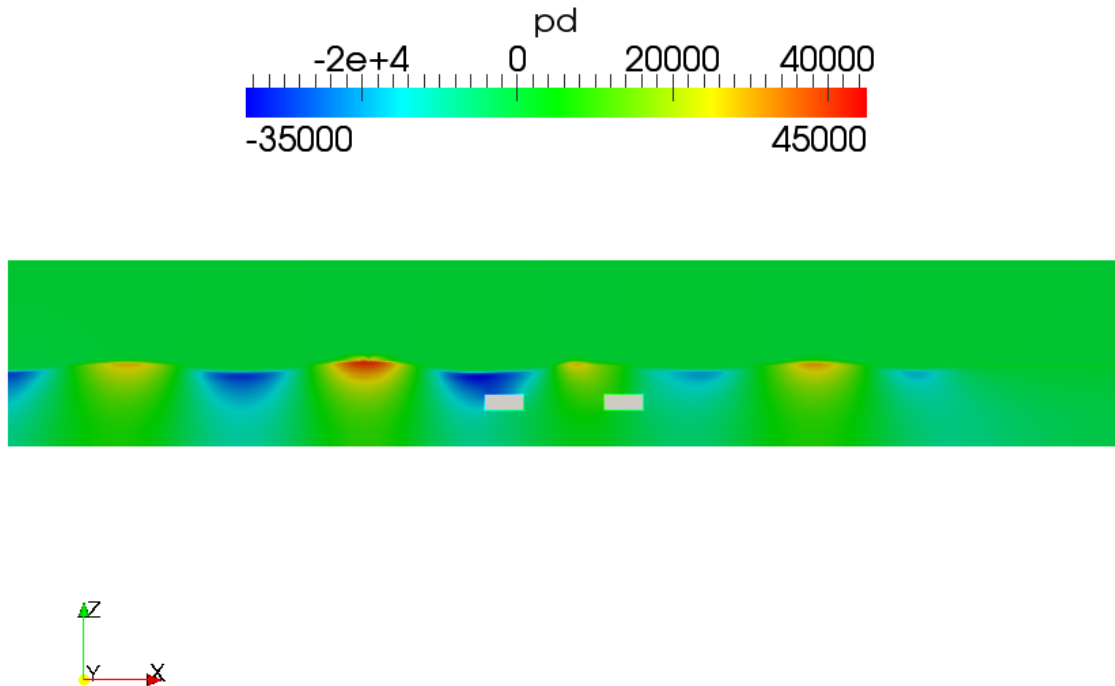
Slika 26. Polje dinamičkog tlaka u ravnini $y = 40$ m, $\lambda = 100$ m.

Prethodne dvije slike prikazuju polje dinamičkog tlaka u dvjema paralelnim ravninama u istom vremenskom trenutku. Na području daljeg pilona se vidi razlika u dinamičkom tlaku: tlak ima valni brijeg u simetralnoj ravnini, dok u ravnini koja siječe pilon ima valni dol.

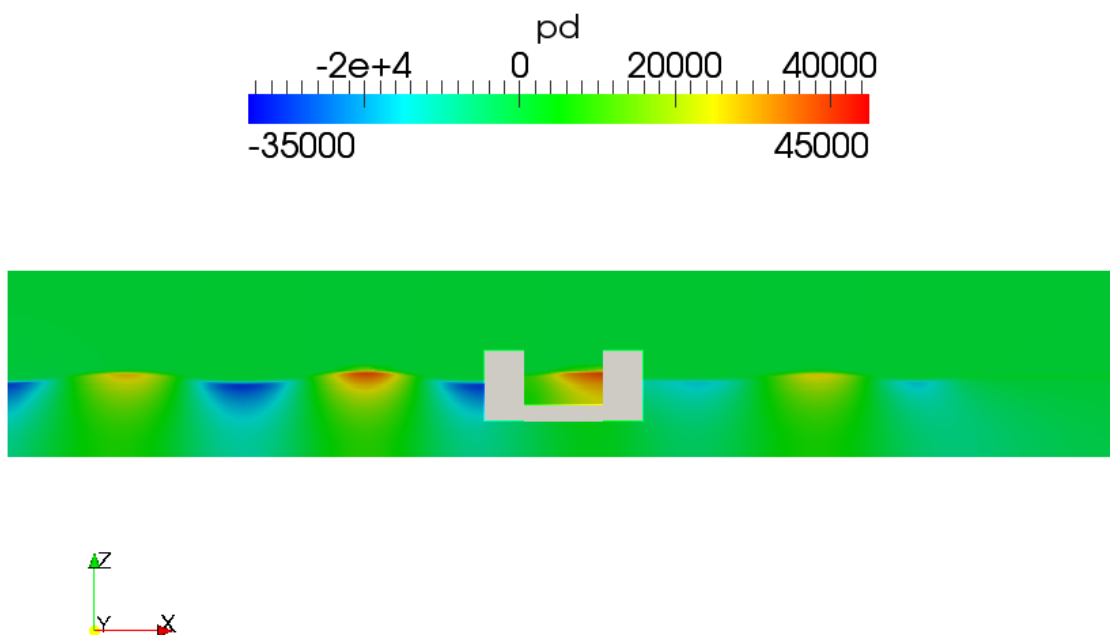


Slika 27. Izometrijski prikaz slobodne površine, $\lambda = 150$ m.

Slika 27 također prikazuje slobodnu površinu za slučaj valne duljine od 150 m. Vidljiv je manji utjecaj same platforme na polje strujanja nego što je to bio slučaj za prethodnu valnu duljinu od 100 m. Zelena boja, koja označava nultu vodnu liniju ukazuje na veličinu relaksacijske zone blizu izlazne granice.

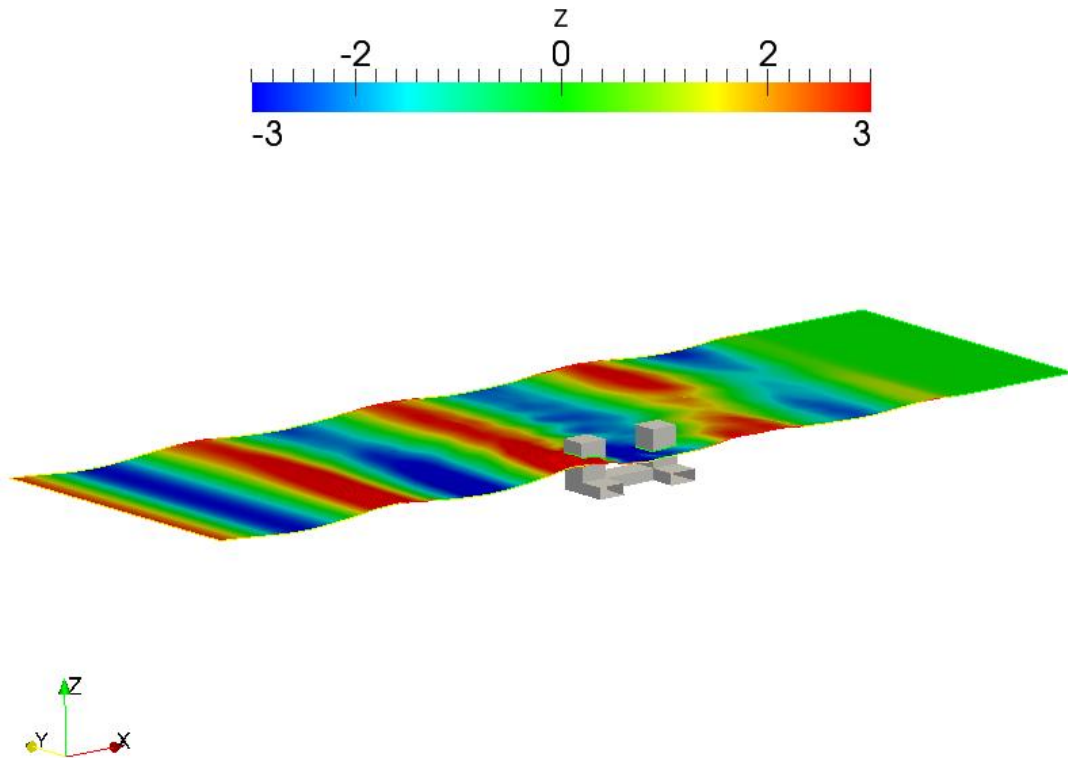


Slika 28. Polje dinamičkog tlaka u simetralnoj ravnini $y = 0$ m, $\lambda = 150$ m.

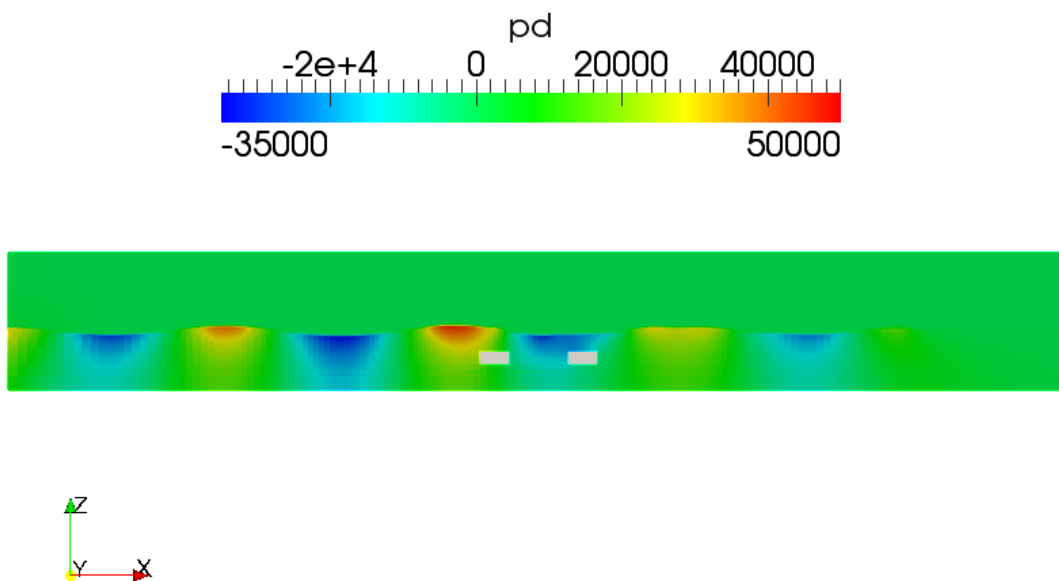


Slika 29. Polje dinamičkog tlaka u ravnini $y = 40$ m, $\lambda = 150$ m.

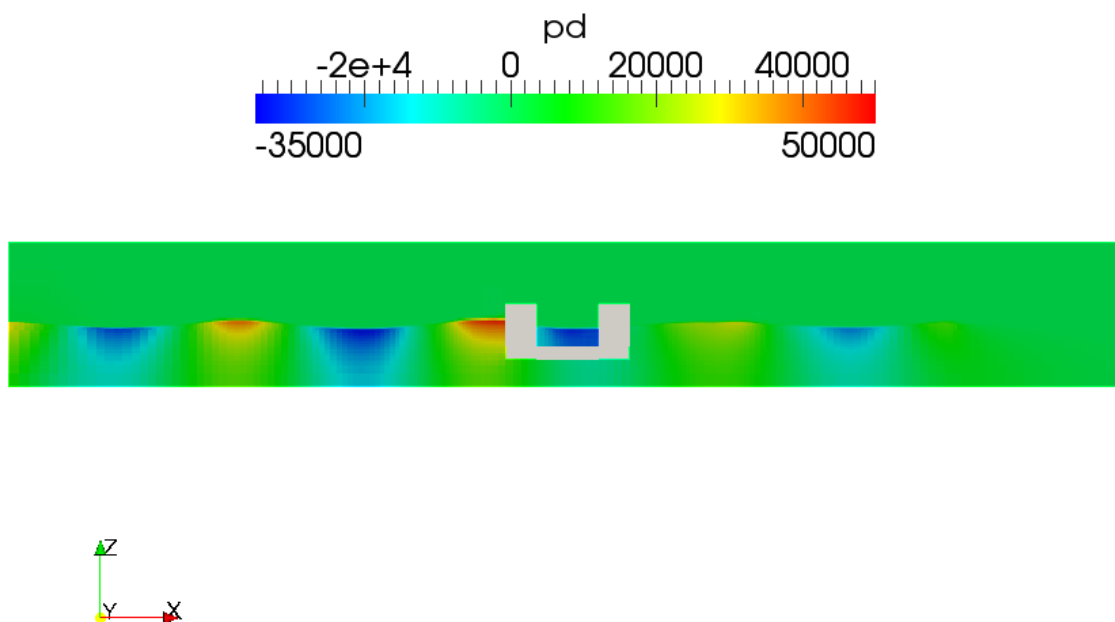
Slike 28 i 29 prikazuju polje dinamičkog tlaka u dvjema ravninama (u istom vremenskom trenutku) za valnu duljinu od 150 m. Kao i za prethodnu valnu duljinu, vidljive su različite maksimalne vrijednosti dinamičkog tlaka u tim ravninama.



Slika 30. Izometrijski prikaz slobodne površine, $\lambda = 200$ m.



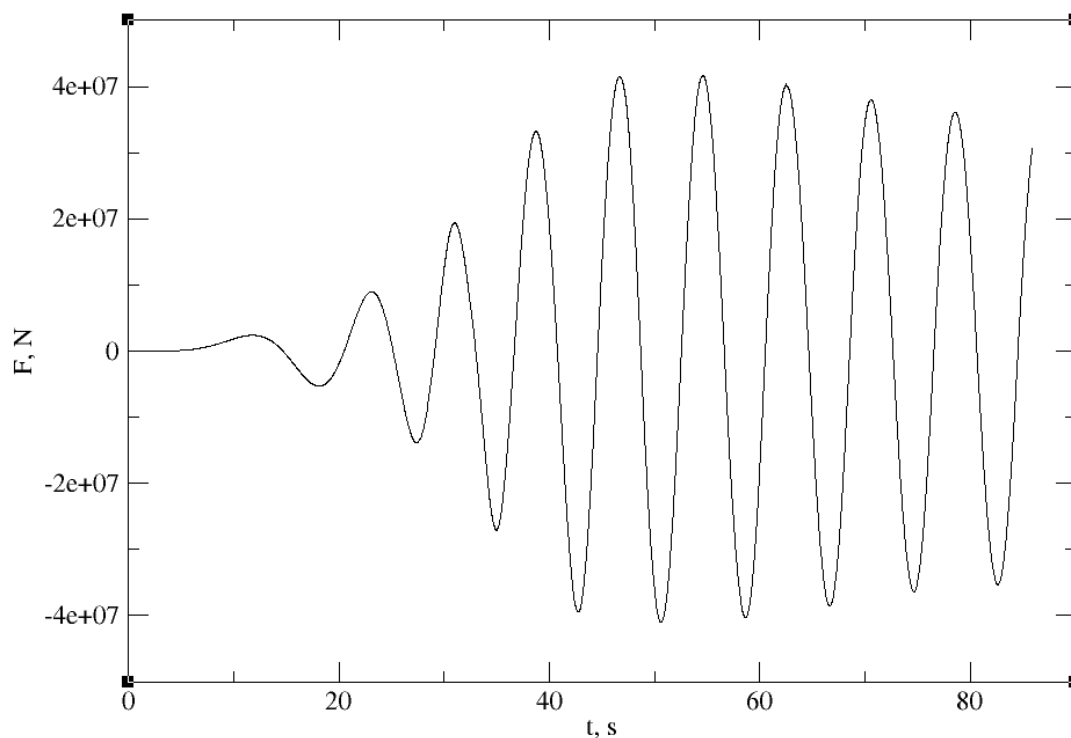
Slika 31. Polje dinamičkog tlaka u simetralnoj ravnini $y = 0$ m, $\lambda = 200$ m.



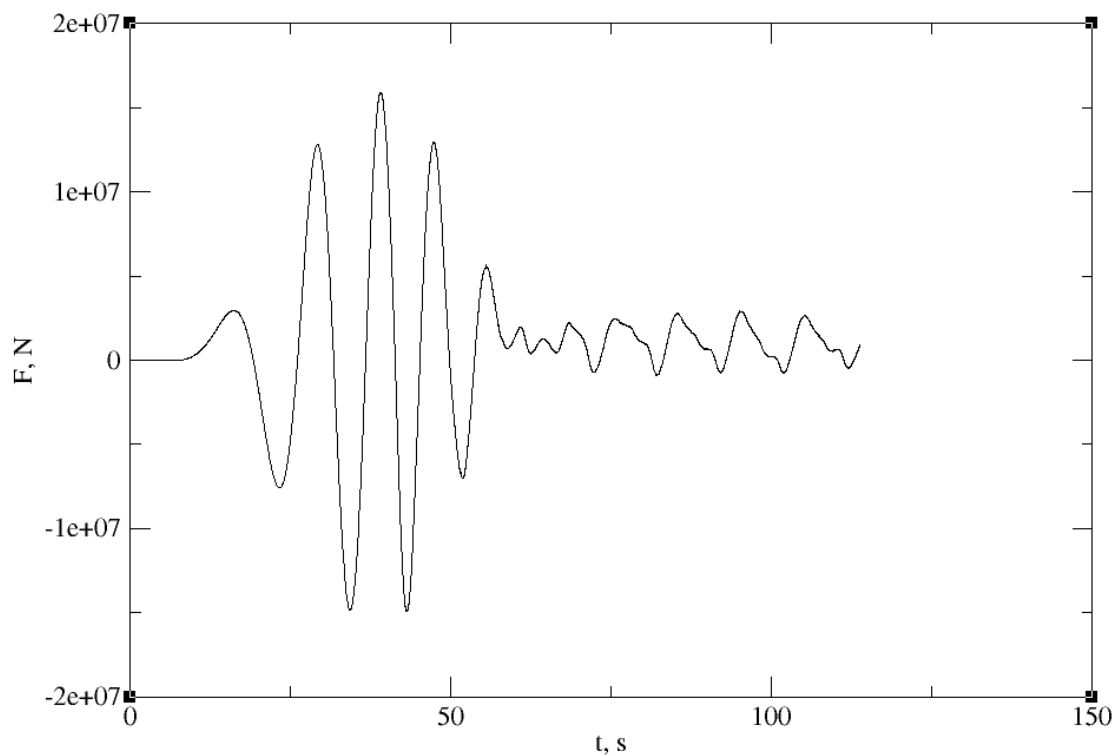
Slika 32. Polje dinamičkog tlaka u ravnini $y = 40$ m, $\lambda = 200$ m.

Slika 30 prikazuje slobodnu površinu, dok Slike 31 i 32 prikazuju polje dinamičkog tlaka kao i prije, sve za valnu duljinu od 200 m.

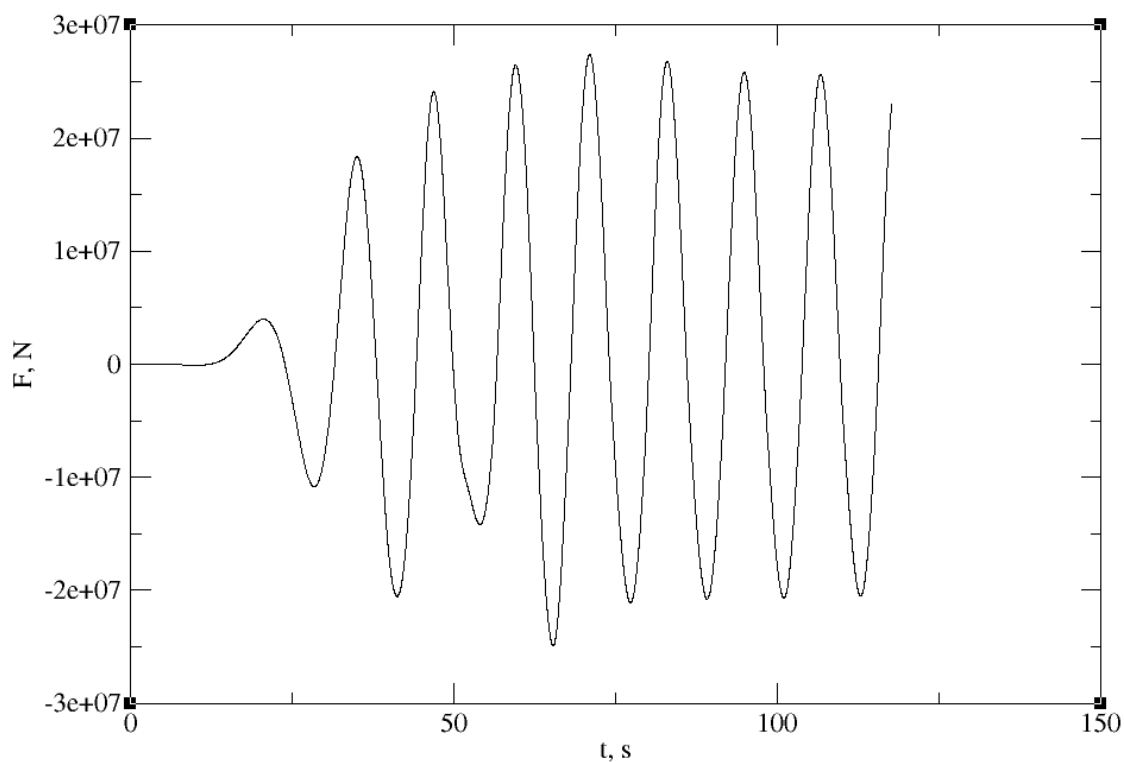
Na sljedećim slikama je prikazana vremenska promjena sile zalijetanja (sila u smjeru osi Ox) za prethodne tri valne duljine.



Slika 33. Sila zalijetanja, $\lambda = 100$ m.



Slika 34. Sila zalijetanja, $\lambda = 150$ m.



Slika 35. Sila zalijetanja, $\lambda = 200$ m.

Kao što je vidljivo sa Slika 33, 34 i 35: simulacije su prekinute nakon 100 s stvarnog vremena. Razlog tomu je bilo ograničeno vrijeme. Međutim, vidljivo je da su u tom periodu

gornje sile došle do približno harmonijski stacionarnog strujanja. Ako se dijagrami malo bolje analiziraju, na njima su vidljivi i efekti drugog reda (u standardnom hidrodinamičkom žargonu potencijalnog strujanja). To je očito iz sljedećeg: ukoliko se uzme vrijednost sile na jednom brijegu i sljedećem dolu, njihov zbroj neće biti jednaka nuli. Slika 34 prikazuje dosta neočekivan i malen rezultat sile zalijetanja. To je posebno čudno jer slobodna površina i polje dinamičkog tlaka izgledaju očekivano. Moguće je da pri toj valnoj duljini, odnosno frekvenciji, platforma ima obrnuti efekt od rezonancije te jako ublažava silu zalijetanja. Također je potrebno naglasiti da se u gornjim dijagramima radi o polovici ukupne sile jer je korišteno pola modela za simulaciju.

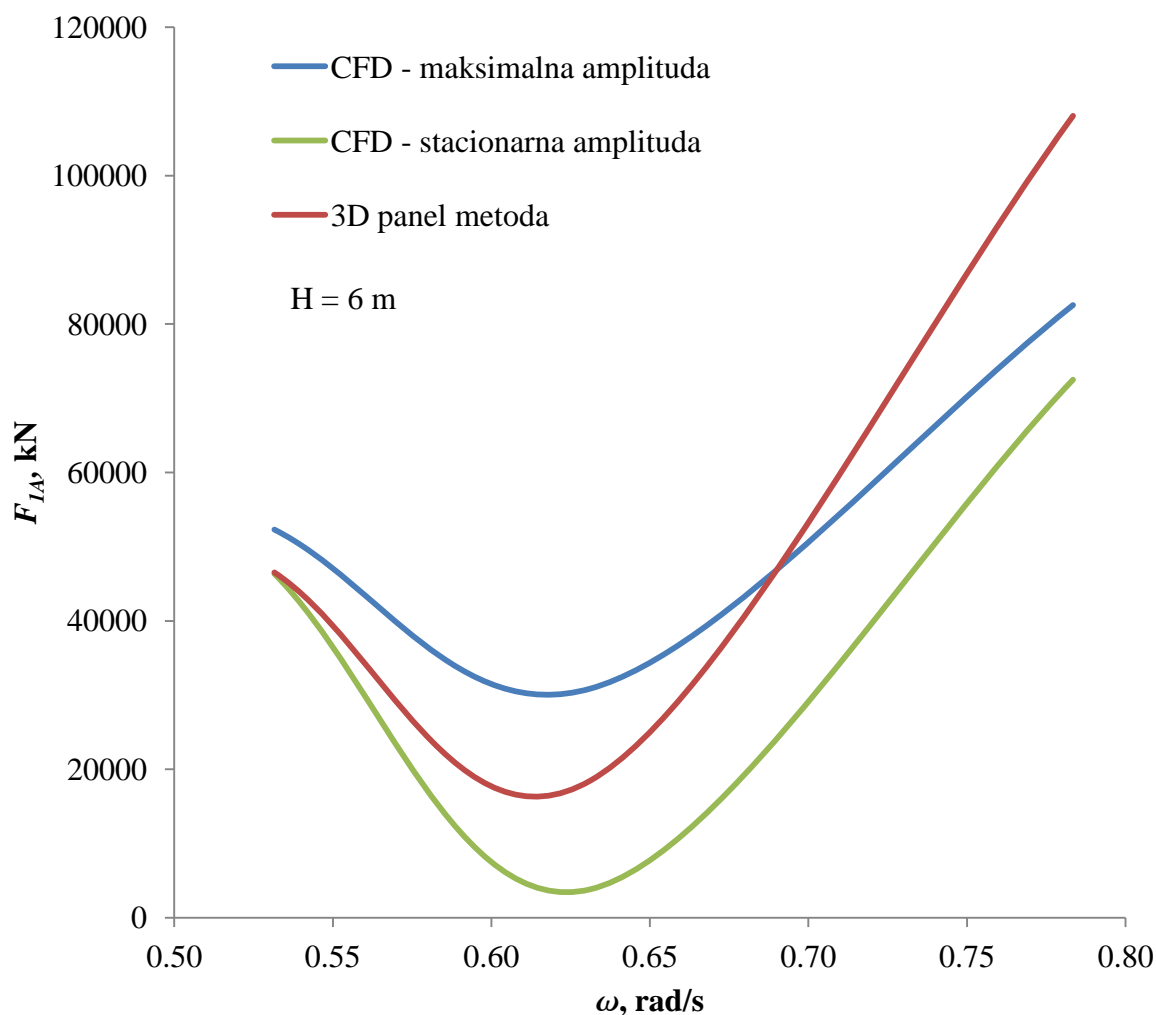
Pomoću gornjih dijagrama je moguće približno odrediti maksimalnu i stacionarnu amplitudu sile. Tijekom nailaska prvih valova, dobiju se najveće vrijednosti sile. Maksimalna amplituda sile je određena tako da se očitao maksimalni brijeg s dijagrama, te sljedeći dol. Ako se od maksimalnog brijega oduzme (zbog različitih predznaka) sljedeći dol i podijeli s dva, dobije se približna amplituda sile. Na taj način su umanjeni spomenuti efekti drugog reda. Za stacionarnu amplitudu sile su uzeti posljedni brijeg i dol s dijagrama, te također osrednjeni na spomenuti način. Kako je platforma u simulaciji bila nepomična, to odgovara modelu difrakcije. Na taj način su se spomenute amplitude dobivene CFD proračunom mogle usporediti s rezultatima iz modela difrakcije i radijacije. Rezultati odziva poluuronjive platforme razmatrane u ovom radu pomoću 3D panel metode se mogu naći u [33]. Sljedeća tablica prikazuje spomenute amplitude u ovisnosti o valnoj duljini, odnosno frekvenciji koja se odredi iz disperzijske jednadžbe (60), Tablica 7. Amplitude sila su dane u kN zbog preglednosti.

Tablica 7. Amplitude sile zalijetanja za različite frekvencije, CFD i 3D panel metoda.

$H = 6 \text{ m}$		CFD		3D panel metoda
$\lambda, \text{ m}$	$\omega, \text{ rad/s}$	$F_{1Amax}, \text{ kN}$	$F_{1Astac}, \text{ kN}$	$F_{1A}, \text{ kN}$
100	0.784	82568	72529	108075
150	0.631	30855	3825	18493
200	0.532	52294	46345	46541

Sljedeći dijagram, Slika 36, grafički prikazuje podatke iz gornje tablice. Os ordinata predstavlja amplitudu sile zalijetanja, dok je na osi abscise kružna frekvencija. Trend krivulja

dobivenih pomoću CFD – a i 3D panel metode se dobro slaže. Također je zanimljivo da se u razmatranom području frekvencija, stacionarna amplituda dobivena pomoću CFD – a uvijek nalazi ispod krivulje dobivene pomoću 3D panel metode. To znači da model difrakcije i radijacije daje prilično veće amplitude, posebno u rezonantnom području koje je prema [33] u području frekvencija $0.75 < \omega < 0.8$. Zanimljivo je da su i maksimalne amplitude dobivene pomoću CFD – a znatno manje u tom području.



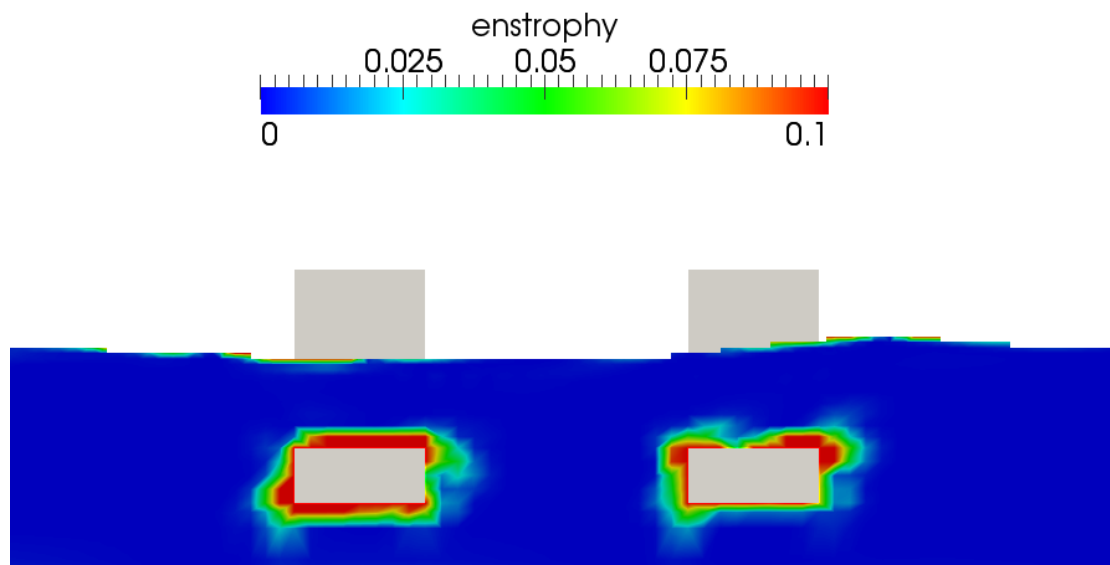
Slika 36. Amplitude sile zalijetanja za različite frekvencije, CFD i 3D panel metoda.

Poznato je da potencijalno strujanje na kojem se temelji model difrakcije i radijacije te 3D panel metoda pretpostavlja bezvrtložno strujanje fluida. To znači da je rotacija vektorskog polja brzine u svim točkama jednaka nuli. Veličina koja vjerno prikazuje intenzitet rotacije fluida je enstropija. Enstropija je proporcionalna kvadratu absolutne vrijednosti vektora koji nastaje ako se na vektorsko polje brzine primijeni operator rotacije. Ona uz vrtložnost fluida

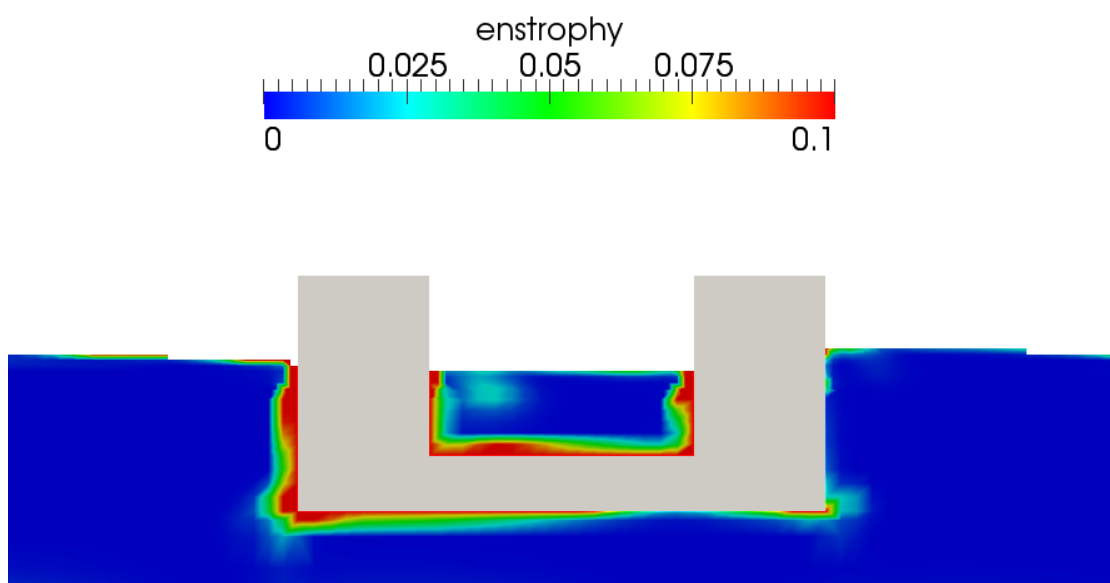
prikazuje i područja turbulencije i odvajanja strujanja. Matematički, enstropija je skalarno polje definirano prema:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left| \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right|^2. \quad (181)$$

Slike 37 i 38 prikazuju polje enstropije na paralelnim ravninama u istom vremenskom trenutku, za valnu duljinu od 200 m. Sa slika je vidljivo da se najveće vrtloženje događa upravo oko oštih rubova, te malo oko slobodne površine.



Slika 37. Polje enstropije u simetralnoj ravnini $y = 0$ m, $\lambda = 200$ m.



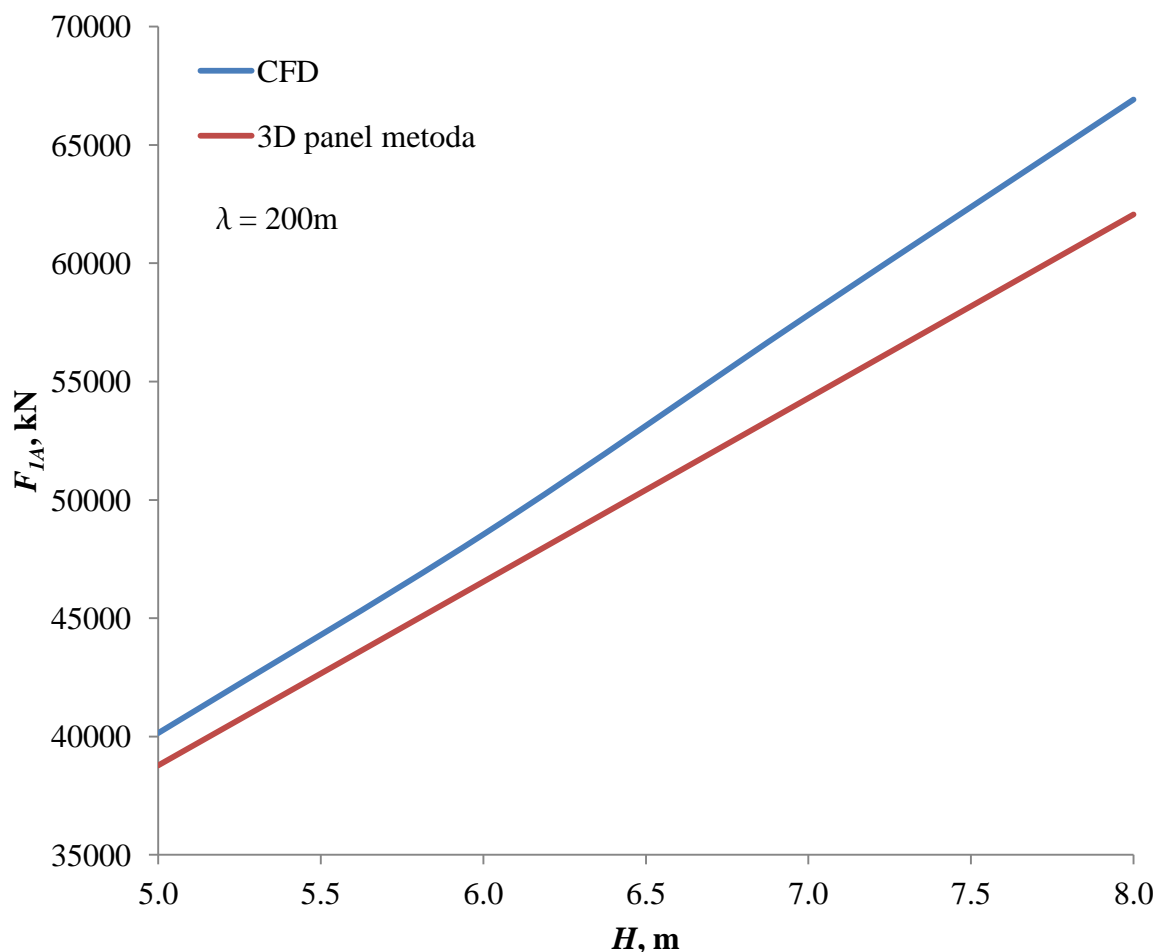
Slika 38. Polje enstropije u ravnini $y = 40$ m, $\lambda = 200$ m.

Kao što je poznato, linearna valna teorija i model difrakcije i radijacije pretpostavljaju linearni odnos amplitude odziva (primjerice sile) i amplitude uzbude (odnosno vala). Riječima, dva puta veći val daje točno dva puta veći odziv. To omogućava spektralnu analizu, ali predstavlja i nedostatak. Iz tog razloga je napravljen CFD proračun s različitim valnim visinama, ali istom valnom duljinom, odnosno frekvencijom. Odabrana valna duljina je 200 m, dok su se valne visine mijenjale od 5 do 8 metara, s korakom od 1 m. S ciljem smanjenja proračunskog vremena, za analizu su se koristile amplitude sile izračunate između 70 – te i 80 – te sekunde proračuna, vidi Sliku 35. Tablica 8 prikazuje rezultate proračuna.

Tablica 8. Amplitude sile zalijetanja za različite valne visine, CFD i 3D panel metoda.

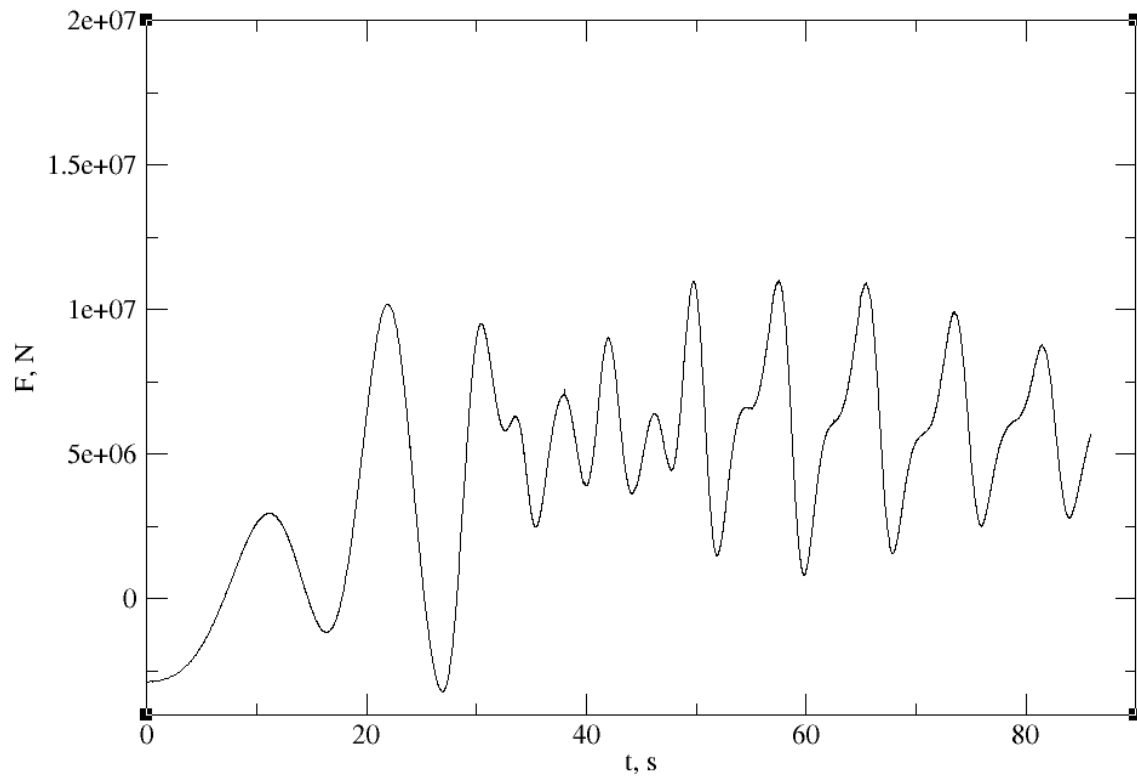
$\lambda = 200 \text{ m}$	CFD	3D panel metoda
$H, \text{ m}$	$F_{1A}, \text{ kN}$	$F_{1A}, \text{ kN}$
5	40150	38784
6	48541	46541
7	57814	54298
8	66914	62055

Konačno, Slika 39 prikazuje podatke iz gornje tablica u obliku dijagrama. 3D panel metoda pokazuje uobičajenu linearnu ovisnost između amplitude sile zalijetanja i valne visine, dok CFD rezultati pokazuju rast pri većim valnim visinama. Taj rast nije prilično izražen, te se može zaključiti da je linearna ovisnost u modelu difrakcije i radijacije opravdana. Međutim, amplituda sile dobivena pomoću CFD proračuna je nešto veća od amplitude dobivene potencijalnim strujanjem. Razlog tomu vjerojatno leži u ograničenosti vremena, odnosno činjenici da CFD proračuni nisu trajali dovoljno dugo, te da je sila još uvijek bila u tranzijentnom području koje linearna valna teorija ne uzima u obzir. Također, za detaljniju analizu bi trebalo provesti proračune s različitim valnim duljinama, te pokriti veće područje valnih visina. Takva analiza bi trajala jako dugo, što je glavni nedostatak CFD-a u analizama pomorstvenosti. Zanimljivo je kako linearna valna teorija, uz sva zanemarenja i linearizacije [15] daje prilično dobre i vjerodostojne rezultate.

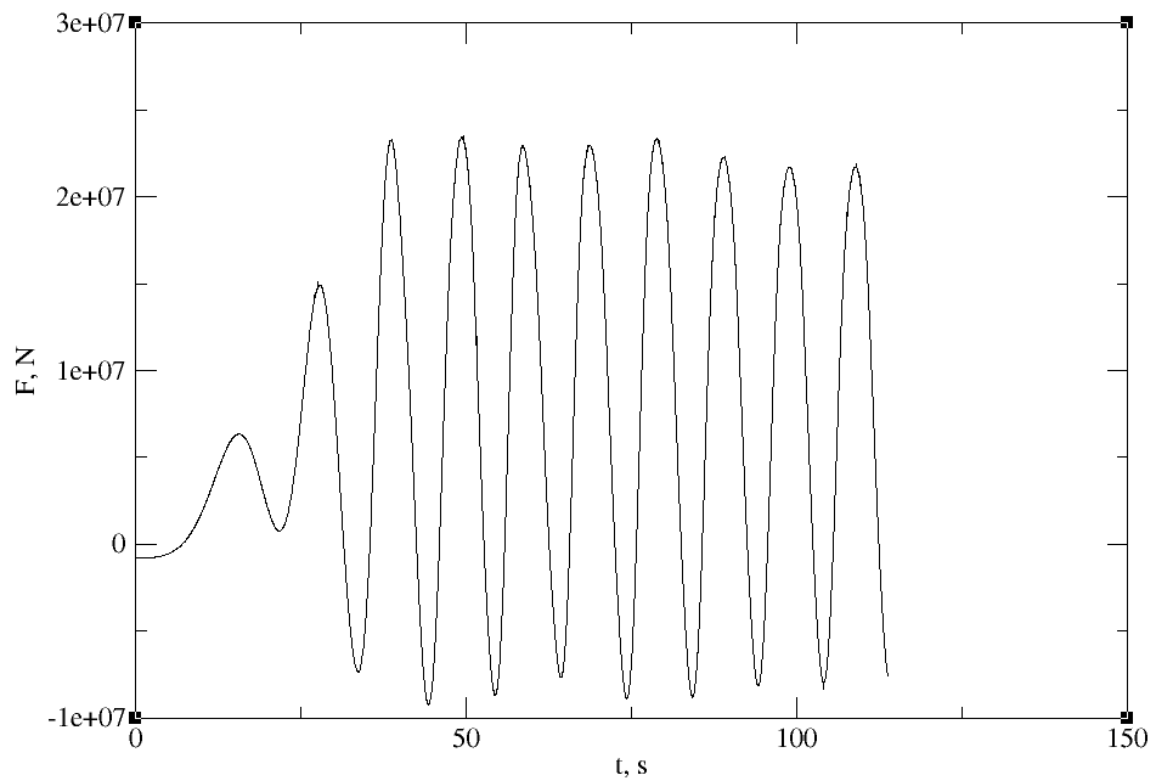


Slika 39. Amplitude sile zalijetanja za različite valne visine, CFD i 3D panel metoda.

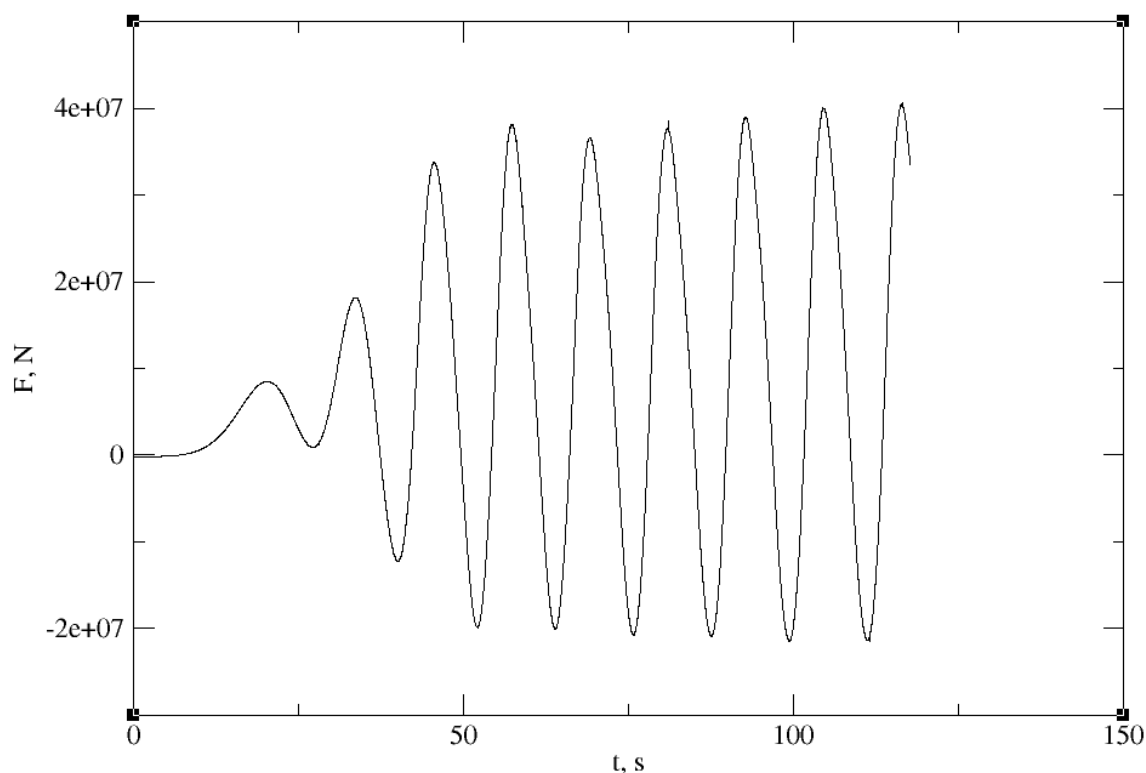
CFD proračunom je određena i sila poniranja za sve slučajeve spomenute prilikom analize sile zalijetanja. Kako je prilikom CFD simulacije izračunata ukupna sila u vertikalnom smjeru, od te ukupne sile je oduzet dio koji odgovara hidrostatskom uzgonu. Na taj način su se dobili sljedeći dijagrami, Slika 40, 41 i 42. U svim dijagramima su vidljivi izraženi efekti drugog reda. Primjerice, za valnu duljinu od $\lambda = 100$ m, nakon 40 – te sekunde su sve vrijednosti sile pozitivne. Za ostale valne duljine su maksimalne pozitivne vrijednosti sile otprilike dva puta veće od maksimalnih negativnih vrijednosti. Upravo iz tih razloga je vrlo teško usporediti rezultate CFD proračuna i 3D panel metode.



Slika 40. Sila poniranja, $\lambda = 100$ m.



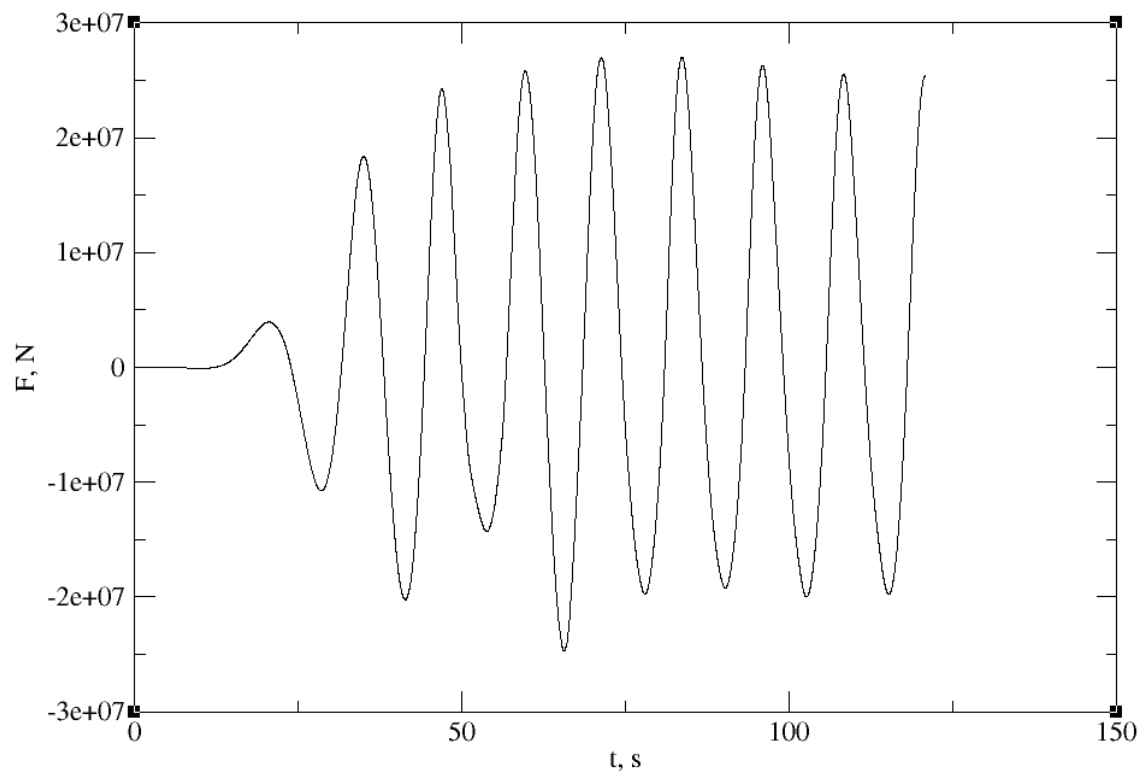
Slika 41. Sila poniranja, $\lambda = 150$ m.



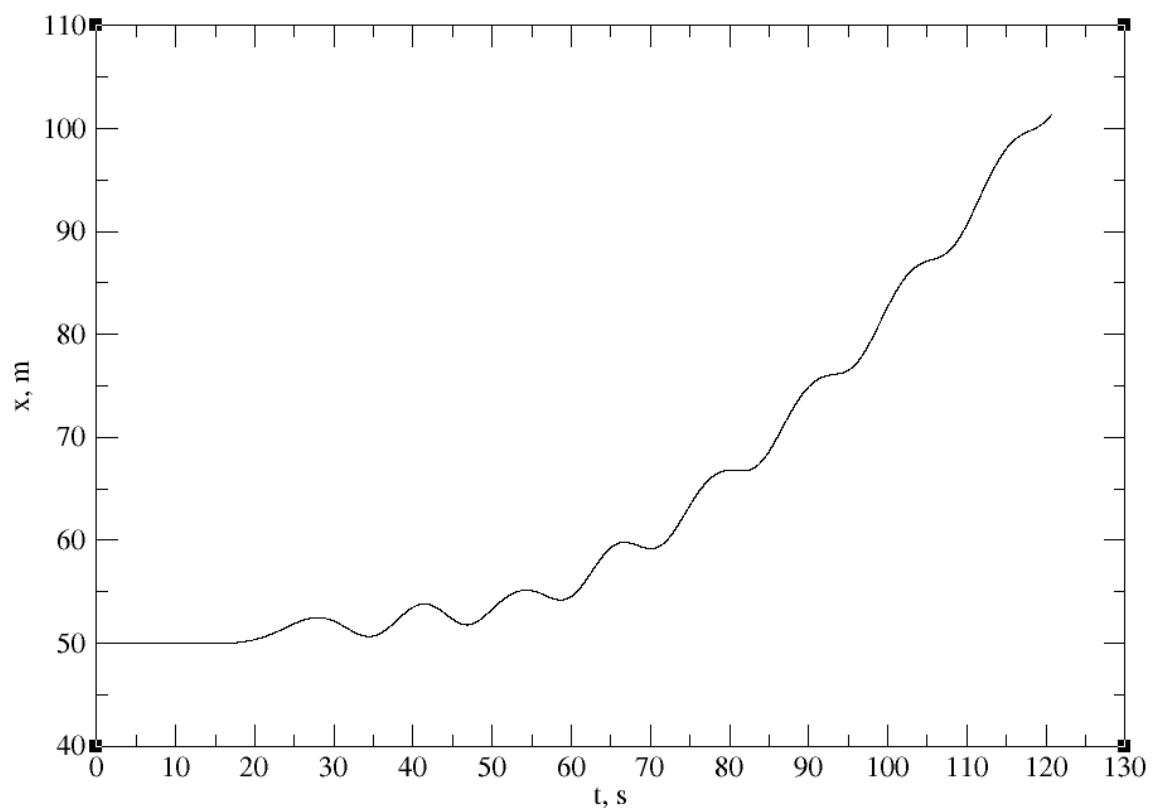
Slika 42. Sila poniranja, $\lambda = 200$ m.

6.3. Proračun zalijetanja platforme uslijed harmonijskog vala

U ovom Podpoglavlju su prikazani rezultati CFD proračuna na harmonijskom valu visine 6 m i valne duljine 200 m, uz oslobođen stupanj slobode zalijetanja. Dakle, platforma se slobodno kretala u uzdužnom smjeru. Sljedeće slike redom pokazuju silu zalijetanja na platformu, te sam pomak platforme u uzdužnom smjeru, Slika 43 i 44. Slike 35 i 43 prikazuju rezultate sile zalijetanja za isti val, uz jedinu razliku što je u drugom slučaju platforma slobodna. Ukoliko se usporede spomenute slike, može se zaključiti da samo gibanje platforme nema veliki utjecaj na ukupnu silu. Na sljedećoj slici, Slika 44, je dan pomak platforme kroz vrijeme. Izrazito su vidljivi efekti drugog reda, to jest, pomak platforme uz malu harmonijsku komponentu ima progresivno rastuću komponentu. Slika ukazuje da se u samo 100 s platforma pomaknula otprilike 50 m. Ovakvi proračuni se mogu koristiti u svrhu analize sidrenja ili dinamičkog pozicioniranja plutajućeg objekta.



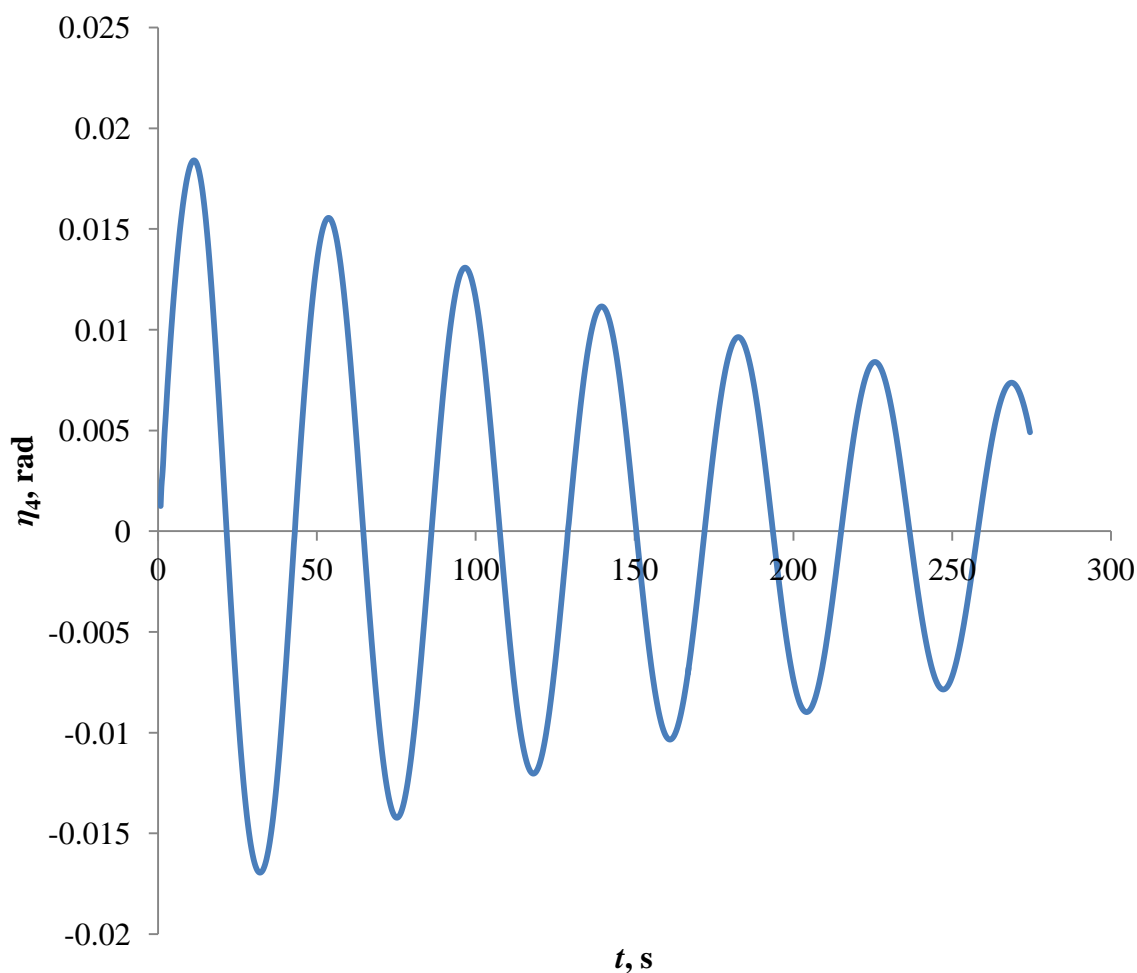
Slika 43. Sila zalijetanja na slobodnu platformu, $\lambda = 200$ m, $H = 6$ m.



Slika 44. Zalijetanje slobodne platforme, $\lambda = 200$ m, $H = 6$ m.

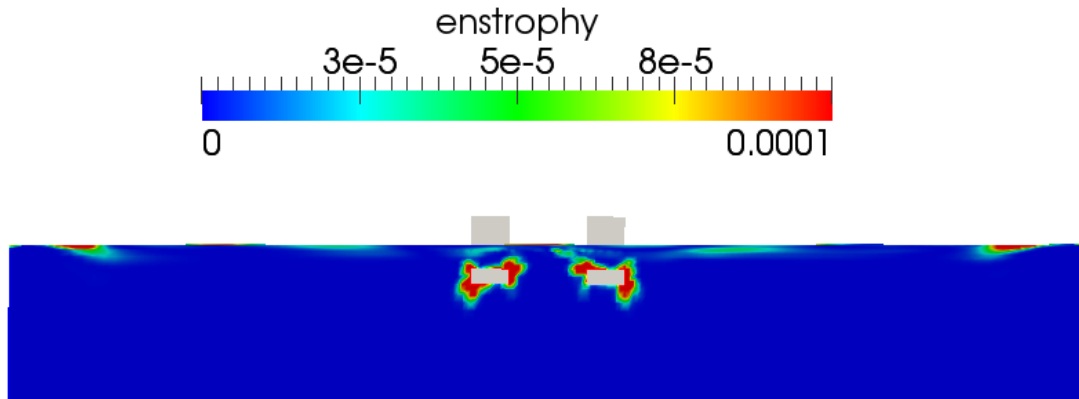
6.4. Prigušenje ljujanja platforme

U ovom Poglavlju je prikazan CFD proračun prigušenja ljujanja platforme. Na nepomičnu platformu u prvom vremenskom trenutku je nametnuta kutna brzina od 0.005 rad/s. Na krajevima domene su korištene relaksacijske zone u svrhu smirivanja nastalih valova. Dubina mora je postavljena na 228 m. Slika 45 prikazuje ljujanje platforme u vremenu. Sa slike je vidljivo prigušenje amplitude gibanja u vremenu. Proračun se proveo do 275 – te sekunde zbog ograničenog vremena. Također je približno moguće odrediti prirodni nulti period ljujanja platforme. Izmjereni nulti periodi se kreću od 42 do 43 sekunde. Prosječni period ljujanja je $T_{\eta_4} = 42.8$ s. Prirodna kružna frekvencija ljujanje iznosi $\omega_{\eta_4} = 0.147$ rad/s.

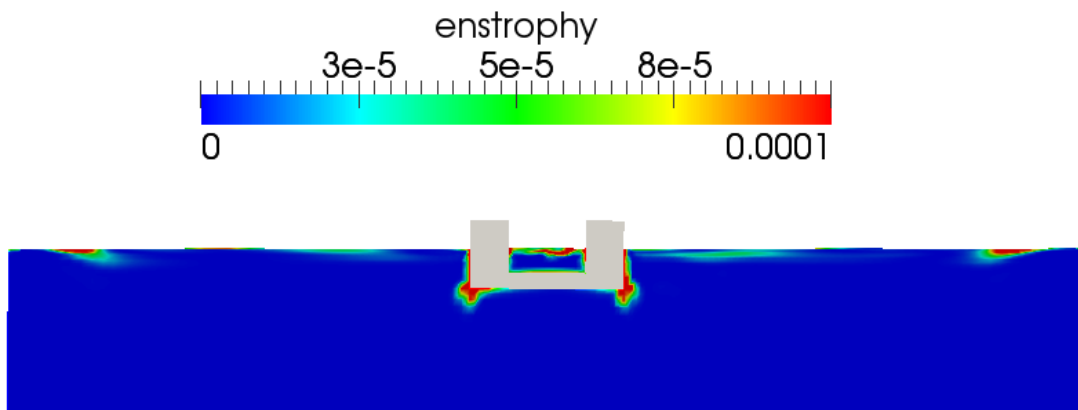


Slika 45. Prigušeno ljujanje platforme uslijed nametnute početne kutne brzine.

Sljedeće slike, Slika 46 i 47, prikazuju polje enstropije prilikom prigušenja ljujanja platforme u dvjema paralelnim ravninama u zadnjem vremenskom trenutku simulacije. Kao i kod nepomične platforme, područja većeg vrtloženja fluida se nalaze blizu samog trupa.



Slika 46. Polje enstropije u simetralnoj ravnini $y = 0$ m, prigušenje ljujanja.



Slika 47. Polje enstropije u simetralnoj ravnini $y = 40$ m, prigušenje ljujanja.

7. ZAKLJUČAK

U radu je prikazana primjena računalne dinamike fluida temeljena na metodi kontrolnih volumena. Dva tipična brodograđevna problema su razmatrana: otpor broda na mirnom moru i ponašanje poluuronjive platforme na harmonijskom valu.

Rezultati otpora broda dobiveni CFD proračunom se vrlo dobro slažu s eksperimentalnim podacima. Proračun na finoj mreži s otprilike 13 milijuna ćelija je trajao svega 25 sati. Prema tome, može se zaključiti da CFD predstavlja jako moćan alat za analizu otpora broda. Iako korištenje finijih proračunskih mreža osigurava veću točnost, primjena grubljih mreža štedi vrijeme i može dati dobre i brze odgovore vezane za samu optimizaciju forme trupa.

Poglavlje 6 detaljno opisuje različite proračune poluuronjive platforme na harmonijskom valu. Očekivano je da se rezultati CFD – a i 3D panel metode razlikuju, upravo zbog zanemarivanja u linearnom modelu difrakcije i radijacije. Međutim, trendovi razmatranih krivulja u kojima su uspoređene spomenute metode se prilično dobro slažu. 3D panel metoda, iako jednostavna, daje jako dobre rezultate u kratkom vremenu. Moguće je dobiti prijenosne krivulje za željeni raspon frekvencija u manje od 2 sata. Također je zbog linearnosti omogućena spektralna analiza koja omogućuje vrlo jednostavno dobivanje globalnog odziva plutajućeg objekta na uzburkanom moru (koje je opisano spektrom valova). Glavni nedostatak metode je nemogućnost opisivanja efekata uslijed vrtloženja i turbulencije, što predstavlja poseban problem prilikom određivanja prigušenja ljuljanja ili nekog drugog stupnja slobode. S druge strane, iako CFD opisuje vrtložno, turbulentno strujanje, proračuni traju prilično dugo (oko 3 – 4 dana za jednu valnu visinu i duljinu; na 4 Intel procesora: 2GHz; 2GB RAM). Stoga CFD u ovakvom obliku nije dovoljno zreo za samostalno preuzimanje analize pomorstvenosti plovnih objekata. S inženjerske strane, CFD se može koristiti upravo za analize sidrenja ili dinamičkog pozicioniranja, te prirodnog prigušenja pojedinih stupnjeva slobode gibanja. Također, ako se u prijenosnoj krivulji dobivenoj 3D panel metodom pojave veliki odzivi u rezonantnoj frekvenciji, moguće je opovrgnuti (ili potvrditi) takve odzive upravo CFD analizom koja bi trebala dati vjerodostojnije rezultate. Primjerice, rezonantna valna duljina sile zalijetanja platforme u ovom radu je bila upravo oko 100 m [33]. Maksimalna amplituda dobivena CFD – om je bila oko 20% manja od amplitude dobivene 3D panel metodom, Slika 36, dok je stacionarna amplituda bila manja za otprilike 25%.

8. LITERATURA

- [1] Degiuli, N., Werner, A.: Mehanika Fluida IB - podloge za nastavu, <http://www.fsb.hr/zbrodo/>, 2009.
- [2] http://www.cfd-online.com/Wiki/SST_k-omega_model/, 2013.
- [3] Ubbink, O.: Numerical prediction of two fluid systems with sharp interfaces, Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, 1997.
- [4] Batchelor, G. K.: An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press, 1998.
- [5] Patankar, S. V.: Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere Publishing Corporation, 1981.
- [6] Wilcox, D. C.: Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries, Inc., California, 1993.
- [7] Jasak, H.: Lecture slides: Turbulence Modelling for CFD, NUMAP – FOAM Summer School, Zagreb, 2011.
- [8] Bredberg, J.: On the Wall Boundary Conditions for Turbulence Models, Chalmers Universtiy of Technology, Sweden, 2000.
- [9] Launder, B. E., Spalding, D. B.: The Numerical Computation of Turbulent Flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3: 269 – 289, 1974.
- [10] Kurepa, S.: Matematička analiza 1 (diferenciranje i integriranje), Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- [11] Rusche, H.: Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two – Phase Flows at High Phase Fractions, Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, 2002.
- [12] Jacobsen, N. G.: A Full Hydro – and Morphodynamic Description of Breaker Bar Development, Technical University of Denmark, 2011.
- [13] Journée, J. M. J. Massie, W. W.: Offshore Hydromechanics, First Edition, Delft University of Technology, 2001.
- [14] Wehausen, J. V., Laitone E. V.: Surface Waves, Encyclopedia of Physics, Springer – Verlag, 1960.
- [15] Prpić – Oršić, J., Čorić, V.: Pomorstvenost plovnih objekata, Zigo, Rijeka, 2006.
- [16] Kurepa, S.: Matematička analiza 2 (funkcije jedne varijable), Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.
- [17] Goldstein, H., Poole, C., Safko, J.: Classical Mechanics, Third Edition, Addison Wesley, 2000.
- [18] Kovačić, Z., Krajči, V., Bogdan, S.: Osnove robotike, Grafis, Zagreb, 2000.
- [19] Coutsias, E. A., Romero, L.: The Quaternions with an application to Rigid Body Dynamics, University of New Mexico , 1999.
- [20] Jasak, H.: Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows, Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, 1996.
- [21] Ferziger J. H., Perić, M.: Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer, Berlin, 1996.
- [22] Singer, S.: Numerička matematika, predavanja, Zagreb, 2009.
- [23] Kreyszig, E.: Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2006.

- [24] Jasak, H., Weller, H. G., Gosman, A. D.: High Resolution NVD Differencing Scheme For Arbitrarily Unstructured Meshes, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 31: 431 – 449, John Wiley & Sons, Ltd., 1999.
- [25] Virag, Z.: Računalna dinamika fluida – podloge za nastavu, Zagreb, 2009.
- [26] Hirsch, C.: Numerical Computation of Internal and External Flows, Volume 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows, John Wiley & Sons, Ltd., 1990.
- [27] Degiuli, N., Werner, A.: Mehanika Fluida IIB - podloge za nastavu, <http://www.fsb.hr/zbrodo/>.
- [28] <http://www.insean.cnr.it/sites/default/files/gothenburg2010/dtmb5415.html>, 2013.
- [29] <http://www.openfoam.org/docs/user/boundaries.php>, 2013.
- [30] Jacobsen, N. G., Fuhrman, D. R., Fredsøe, J.: A Wave Generation Toolbox for the Open – Source CFD library: OpenFoam, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 9: 1073 – 1088, 2012.
- [31] Chakrabarti, S. K.: Hydrodynamics of Offshore Structures, WIT Press, 1987.
- [32] Ye, W., Shanks, J., Fang, J.: Effects of Fully Coupled and Quasi – Static Semi – Submersible Vessel Motions on Steel Catenary Riser’s Wave Loading Fatigue, Offshore Technology Conference, 2003.
- [33] Vukčević, V.: Projekt B, Zagreb, 2013.