

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

DIPLOMSKI RAD

Stojan Stevanović

Zagreb, 2012

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

DIPLOMSKI RAD

Mentor:
doc.dr.sc. Josip Kasać

Student:
Stojan Stevanović

Zagreb, 2012

IZJAVA

Izjavljujem da sam ovaj diplomski rad izradio samostalno znanjem stečenim tijekom dosadašnjeg studija na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu.

S.S

ZAHVALA

Zahvaljujem profesoru doc.dr.sc. Josipu Kasaću na mentorstvu prilikom izrade rada, na strpljenju, korisnim savjetima i diskusijama koje su mi uvelike pomogle.

Sadržaj

Sadržaj	iv
Popis slika	vi
Popis oznaka	viii
Sažetak	xii
1 Uvod	1
2 Osnove leta helikoptera	3
2.1 Povijesni pregled razvoja helikoptera	3
2.2 Osnovi modeli helikoptera	5
2.3 Standardni model helikoptera	6
2.4 Potisak rotora	8
2.5 Zakretna ploča i kontrolni rotor	10
3 Dinamički model helikoptera	12
3.1 Uvod	12
3.2 Potisak i mahanje glavnog i repnog rotora	15
3.2.1 Potisak glavnog i repnog rotora	15
3.2.2 Mahanje glavnog rotora	16
3.3 Sile i momenti	19
3.3.1 Sile	19
3.3.2 Momenti	20
3.4 Opis gibanja krutog tijela	21

4	Linearizacija dinamičkog modela helikoptera	24
4.1	Linearizacija potiska glavnog rotora	24
4.2	Linearizacija momenta otpora glavnog rotora	26
4.3	Linearizacija mahanja glavnog rotora	27
4.4	Linearizacija akceleracija	29
4.5	Linearizacija promjene <i>Eulerovih</i> kutova	33
4.6	Matrice sustava linearnog modela	35
5	Sinteza linearnih regulatora	38
5.1	Linearni regulator stanja	41
5.2	Optimalni linearni kvadratični regulator	46
6	Zaključak	56
	Literatura	58
A	Helikopter Yamaha R-50	60

Popis slika

2.1	<i>Bamboo-copter</i> - igračka nalik rotoru helikoptera stara oko 2500 godina [1]	3
2.2	Leonardov da Vincijev koncept helikoptera [1]	4
2.3	Helikopteri: (a) i (b) tandem, (c) koaksijalni [2]	5
2.4	Helikopter	6
2.5	Prikaz sila na lopatici rotora [3]	8
2.6	Kolektivni kuta napada lopatice rotora [11]	8
2.7	Ciklički kut napada lopatice rotora [11]	9
2.8	Prikaz komandi pilota [3]	9
2.9	Zakretna ploča [3]	10
2.10	Glavni rotor i kontrolni rotor [14]	11
3.1	Prikaz pridruženih koordinatnih sustava	13
3.2	Model helikoptera u Simulinku	14
3.3	Blokovni prikaz djelovanja SP na mahanje CR i MR	17
3.4	Kontrolni rotor	18
4.1	Prikaz ovisnosti potiska glavnog rotora T_{MR} i komande pilota u_{col}	25
4.2	Prikaz ovisnosti momenta otpora Q_{MR} i potiska glavnog rotora T_{MR}	26
4.3	Odziv B_{MR} na step A_{SP}	28
4.4	Odziv A_{MR} na step B_{SP}	29
5.1	Odziv nelinearnog modela helikoptera	38
5.2	Odziv translacijskih brzina nelinearnog modela helikoptera na $u_{col} = 0,0938$	39
5.3	Odziv translacijskih brzina nelinearnog modela helikoptera na $u_{col} = 0,1026$	40
5.4	Odziv nelinearnog modela helikoptera s <i>PP</i> regulatorom	43
5.5	Odziv nelinearnog modela helikoptera s <i>PP</i> regulatorom uz $u_{col} = 0,0938$	43
5.6	Odziv nelinearnog modela helikoptera s <i>PP</i> regulatorom $u_{col} = 0,1026$	44

5.7	Odziv nelinearnog modela helikoptera s PP regulatorom $u_{col} = 0,0982$	45
5.8	Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQ regulatorom	48
5.9	Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQ regulatorom uz $u_{col} = 0,0938$. .	49
5.10	Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQ regulatorom uz $u_{col} = 0,1026$. .	49
5.11	Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQR pojačanja L_d uz $K_d = 0,1226$.	51
5.12	Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQR pojačanja L_d uz $K_d = 0,1226$.	52
5.13	Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQR pojačanja L_d uz $K_d = 0,1226$.	52
5.14	Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQR pojačanja K_{LD}	53
5.15	Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQR pojačanja K_{LD} uz $u_{col} = 0,0938$	54
5.16	Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQR pojačanja K_{LD} uz $u_{col} = 0,0938$	54

Popis korištenih oznaka

Oznaka	Jedinica	Opis
R	$[m]$	Promjer glavnog rotora
A	$[m^2]$	Površina glavnog rotora
R_t	$[m]$	Promjer repnog rotora
l_m	$[m]$	Udaljenost između CoG i centra glavnog rotora u smjeru x osi
y_m	$[m]$	Udaljenost između CoG i centra glavnog rotora u smjeru y osi
h_m	$[m]$	Udaljenosti između CoG i centra glavnog rotora u smjeru z osi
l_t	$[m]$	Udaljenost između CoG i centra repnog rotora u smjeru x osi
y_t	$[m]$	Udaljenost između CoG i centra repnog rotora u smjeru y osi
h_t	$[m]$	Udaljenost između CoG i centra repnog rotora u smjeru z osi
m	$[kg]$	Masa helikoptera
I	$[kg \cdot m^2]$	Matrica inercije helikoptera
I_{xx}	$[kg \cdot m^2]$	Moment inercije oko x osi
I_{yy}	$[kg \cdot m^2]$	Moment inercije oko y osi
I_{zz}	$[kg \cdot m^2]$	Moment inercije oko z osi
Ω	$[rad/s]$	Kutna brzina rotora
σ	$[-]$	Krutost rotora
m_b	$[kg]$	Masa lopatice rotora
I_b	$[kg \cdot m^2]$	Inercija lopatice u odnosu za centar rotora
B	$[-]$	Broj lopatica rotora
θ_b	$[rad]$	Kut napada lopatice

Oznaka	Jedinica	Opis
Ψ	[rad]	Kut zakreta lopatice glavnog rotora, azimut
i_s	[rad]	Inicijalni zakret lopatice rotora
θ_{tw}	[rad]	Zakrivljenost lopatice
γ	[—]	<i>Lockova</i> konstanta
ρ	[kg/m ³]	Gustoća zraka
a	[—]	Nagib pravca uzgona
B	[—]	Broj lopatica rotora
c	[m]	Duljina tetive
w_b	[m/s]	Brzina lopatice u odnosu na zrak
v_i	[m/s]	Inducirana brzina strujanja zraka
w_r	[m/s]	Brzina diska glavnog rotora u odnosu na zrak
e_{MR}	[m]	Udaljenost između centra rotora i zgloba mahanja
R_{CR}	[m]	Udaljenost centra i vanjskog radijusa kontrolnog rotora
$R_{CR,P}$	[m]	Udaljenost centra i unutarnjeg radijusa kontrolnog rotora
T_{MR}	[N]	Potisak glavnog rotora
T_{TR}	[N]	Potisak repnog rotora
C_T	[—]	Koeficijent potiska za ravnotežni let
Q_{MR}	[Nm]	Moment otpora glavnog rotora
$A_{Q,MR}$	[—]	Koeficijent otpora glavnog rotora
$B_{Q,MR}$	[—]	Koeficijent otpora glavnog rotora
K_{MR}	[—]	<i>Bellovo</i> pojačanje
K_{CR}	[—]	<i>Hillovo</i> pojačanje
β_{1s}	[rad]	Kut između HP i TPP u longitudinalnom smjeru
β_{1c}	[rad]	Kut između HP i TPP u lateralnom smjeru
u_{col}	[rad]	Komanda pilota za kolektivni kuta napada glavnog rotora
u_{long}	[rad]	Komanda pilota za longitudinalni kut napada glavnog rotora
u_{lat}	[rad]	Komanda pilota za lateralni kut napada glavnog rotora
u_{ped}	[rad]	Komanda pilota za kolektivni kut napada repnog rotora

Oznaka	Opis	Jedinica
A_{SP}	$[rad]$	Longitudinalni nagib zakretne ploče
B_{SP}	$[rad]$	Lateralni nagib zakretne ploče
A_{MR}	$[rad]$	Longitudinalni nagib glavnog rotora
B_{MR}	$[rad]$	Lateralni nagib glavnog rotora
bF	$[N]$	Vektor sile koja djeluje na helikopter
${}^bf_x, {}^bf_y, {}^bf_z$	$[N]$	Komponente bF u smjeru osi ${}^bx, {}^by, {}^bz$
${}^b\tau$	$[Nm]$	Vektor momenta koji djeluje na helikopter
${}^bL, {}^bN, {}^bM$	$[Nm]$	Komponente ${}^b\tau$ u smjeru ${}^bx, {}^by, {}^bz$
bV	$[m/s]$	Vektor translacijskih brzina izražen u BF
${}^bu, {}^bv, {}^bw$	$[m/s]$	Komponente vektora bV u smjeru osi ${}^bx, {}^by, {}^bz$
${}^b\omega$	$[rad/s]$	Vektor rotacijskih brzina izražen u BF
${}^bp, {}^bq, {}^br$	$[rad/s]$	Komponente vektora ${}^b\omega$
ϕ, θ, ψ	$[rad]$	<i>Eulerovi</i> kutovi
t	$[s]$	Vrijeme

Oznaka	Opis
BF	Koordinatni sustav helikoptera
SF	Spacijalni koordinatni sustav helikoptera
EF	Koordinatni sustav Zemlje (neinercijski)
CoG	Centar gravitacije
HP	Ravnina rotacije glavnog rotora
TPP	Ravnina nagiba glavnog rotora
SP	Zakretna ploča
A	Matrica koeficijenata sustava
B	Matrica ulaza sustava
B_d	Matrica poremećaja sustava
C	Matrica izlaza sustava
D	Matrica prijenosa sustava
$x(t)$	Vektor stanja
$u(t)$	Vektor ulaza
$d(t)$	Vektor poremećaja sustava
$y(t)$	Vektor izlaza sustava
K_P	Matrica pojačanja regulatora stanja
K_L	Matrica pojačanja optimalnog linearnog kvadratičnog regulator
K_{LD}	Matrica pojačanja proširenog optimalnog linearnog kvadratičnog regulatora
p	Vektor željenih polova regulatora stanja
K_d	Pojačanje poremećaja na brzinu helikoptera b_v

Sažetak

U ovom radu izveden je nelinearni dinamički model helikoptera. Na osnovu njega, implementiran je simulacijski model dinamike helikoptera u *Matlab Simulinku*. Model helikoptera zasnovan je na dinamičkim jednačbama kretanja krutog tijela sa šest stupnjeva slobode gibanja, te na izrazima koji povezuju sile i momente krutog tijela s potiskom glavnog i repnog rotora. Upravljačke varijable su longitudinalni i lateralni nagib glavnog rotora, te napadni kutevi glavnog i repnog rotora. U radu su korišteni parametri helikoptera *Yamaha R-50*. Provedene su simulacije nelinearnog dinamičkog modela helikoptera u slučaju konstantne upravljačke pobude. Izvršena je linearizacija nelinearnog dinamičkog modela uz poznate iznose varijabli stanja u radnoj točki ravnotežnog leta helikoptera. Na temelju linearnog dinamičkog modela helikoptera provedena je sinteza linearnog regulatora stanja primjenom metode podešavanja polova, te sinteza optimalnog linearnog kvadratičnog regulatora. Linearnom regulatorom stanja podesili smo polove tako da dinamika zatvorenog regulacijskog kruga helikoptera daje brže odzive translacijskim brzinama spram rotacijskih brzina. Za optimalni regulator, sinteza ne zahtjeva poznavanje utjecaja pojedinih polova na dinamiku helikoptera, već definiranje željene dinamike helikoptera takozvanom funkcijom cilja. Funkcijom cilja dali smo naglasak na uštedu energije ograničenjem amplituda upravljačkih pobuda. Na nelinearnom dinamičkom modelu helikoptera izvršena je komparativna analiza oba regulatora kojom je pokazano da oba regulatora daju zadovoljavajuće rezultate.

Ključne riječi: upravljanje, modeliranje, helikopter, linearni, nelinearni, dinamički model helikoptera, regulator stanja, optimalni regulator

Poglavlje 1

Uvod

Upravljanje letećih vozila danas privlači sve veću pozornost. Primjenjuje se niz različitih pristupa za upravljanje aviona, helikoptera, satelita, raketa, a za sve navedeno dostupna je brojna literatura u kojoj je moguće pronaći odgovarajuće matematičke modele i razne pristupe upravljanja.

U velikom broju radova ponajviše se razmatra upravljanje bespilotnih RC (eng. *Radio Control*) aviona i helikoptera koji su također sve više popularniji i kod RC hobista. Popularnost RC hobija raste sve većom dostupnošću različitih RC modela, s obzirom da su početkom 1990. godina njihove cijene bile nekoliko puta više od današnjih. Posljedično, RC helikopteri postaju gotovo jednako pristupačni kao i RC avioni, uz dodatne posebnosti helikoptera kao što je mogućnost lebdjenja na mjestu. Osim u vertikalnom i horizontalnom načinu leta koje nalazimo i kod aviona, helikopter može letjeti i u ravnotežnom načinu leta.

Bespilotni se helikopteri, osim radi zabave, primjenjuju i za nadzor teže dostupnih mjesta u industrijskim postrojenjima, primjerice za nadzor pomoću kamere stanja elemenata na dalekovodima. Također se koriste i za panoramske snimke iz prirodnih znamenitosti ili sportskih aktivnosti.

Upravljanje helikopterom znatno je teže u odnosu na avione, što zahtjeva od pilota puno više iskustva. Iskustvo dobiveno letenjem avionom, nije dovoljno za svladavanje leta helikoptera, te je pilotu potrebna dodatna edukacija.

Helikopteri spadaju u skupinu najkompleksnijih letećih vozila. Njihova je dinamika leta inherentno nelinearna i sadrži snažnu spregu, odnosno međusobnu ovisnost svih varijabli stanja. Avioni također imaju nelinearnu dinamiku leta, no moguća je podjela dinamike sustava na nezavisne podsustave, a time i dobivanje jednostavnijeg dinamičkog modela. Takvu podjelu sustava nije moguće učiniti kod helikoptera bez ograničenja njegovih načina

leta. Dakle, helikopter sa sva tri načina letenja je kao sustav nelinearan, multivarijabilan, spregnut i podaktuiran, a time i vrlo složen za upravljanje.

U drugom poglavlju ovoga rada opisane su osnove o helikopteru – povijesne zanimljivosti razvoja helikoptera, način upravljanja helikopterom, te utjecaj pojedinih komandi pilota na dinamiku helikoptera.

U trećem poglavlju, izveden je dinamički model helikoptera u ravnotežnom letu. Prilikom izrade modela uzete su u obzir neke pretpostavke kojima se dolazi do jednostavnije dinamike helikoptera. Dinamički model helikoptera izrađen je u *Matlab Simulinku*, te će u tom poglavlju biti opisani pojedini blokovi modela.

Za potrebe sinteze linearnih regulatora, u četvrtom je poglavlju izveden linearni dinamički model helikoptera u ravnotežnom letu. Na prethodno dobivenom nelinearnom dinamičkom modelu, izvršena je linearizacija primjenom *Taylorove* aproksimacije, numeričke metode, te metode crne kutije (eng. *black box method*). Na kraju poglavlja dane su matrice sustava dobivene prema podacima helikoptera Yamaha R-50 koji su priloženi na kraju rada.

Sinteza linearnih regulatora u petom poglavlju provedena je na temelju linearnog dinamičkog modela helikoptera. Najprije je izvršena sinteza regulatora stanja metodom podešavanja polova, a zatim sinteza linearnog kvadratičnog regulatora. Ispitivanje regulatora provedeno je u *Matlab Simulinku* na prethodno izrađenom nelinearnom dinamičkom modelu helikoptera, te su snimljeni odzivi. Snimanjem odziva pojedinih linearnih regulatora izvršena je njihova usporedba.

U šestom poglavlju izneseni su zaključci rada. Time su objedinjena sva važnija saznanja o primijenjenim linearnim regulatorima koja su temelj ovog rada.

Primijenjen *Matlabov* kod zajedno sa *Simulink* modelom, priložen je uz rad na CD-u.

Poglavlje 2

Osnove leta helikoptera

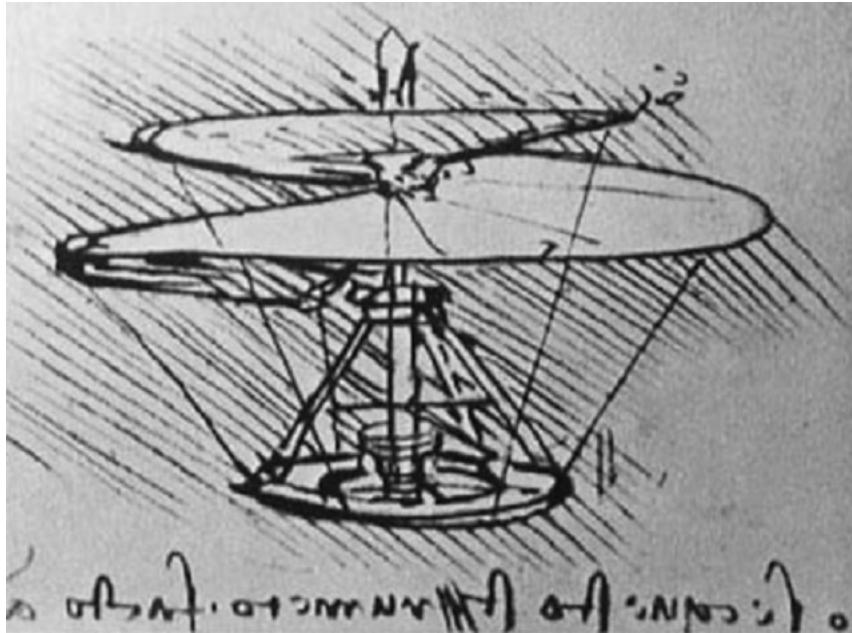
2.1 Povijesni pregled razvoja helikoptera

Prvi princip leta koji je čovjek zamislio sličan je onome kod današnjih helikoptera. Naime, još prije dvije i pol tisuće godina, Kinezi su izradili igračku od bambusa poznatu pod nazivom *Bamboo-copter*. Igračka je mogla poletjeti tako da se zavrti s rukama, slika 2.1. To je bila prva zabilježena ideja leta nalik na današnje helikoptere.



Slika 2.1: *Bamboo-copter* - igračka nalik rotoru helikoptera stara oko 2500 godina [1]

Nakon toga, naprave za letenje javljaju se u djelima Leonarda da Vinci. Godine 1483. izradio je vrlo poznatu skicu leteće naprave uz koju se po prvi put javlja pojam helikopter. Smatra se da je riječ helikopter nastala kombinacijom riječi *heliks* i *pteron* koje ujedno odaju koncept vijčanog (spiralnog) krila. Inspiraciju je navodno dobio promatrajući Arhimedov vijak za uzdizanje vode radi navodnjavanja. Njegov teoretski rotor nalik vijku, pokretale bi četiri osobe pomoću poluga. Vijak bi stlačivao zrak, te bi uzdigao napravu u vis, slika 2.2. [1]



Slika 2.2: Leonardov da Vincijev koncept helikoptera [1]

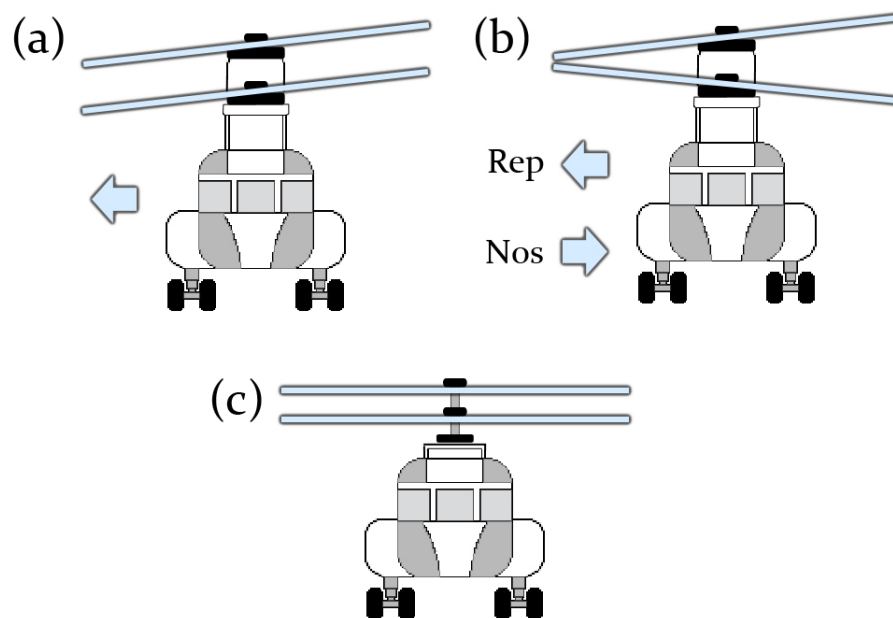
Kroz povijest, zabilježeno je niz različitih konstrukcija helikoptera koji su imali malu visinu i kratko vrijeme leta, a uz to su bili prilično zahtjevni za upravljanje. Godine 1909. i 1910., ruski inženjer Ivan Sikorsky izradio je svoje prve modele helikoptera, ali je testom pokazano da oba imaju premalo snage za uzlet. Testom je shvatio da tadašnji materijali, motori, novčana sredstava i iskustva nisu dovoljna da se razvije uspješan helikopter. Neuspjeh ga je naveo na razvoj aviona, u čemu je postao vrlo uspješan. Trideset godina nakon svojih prvih modela, ponovno se vratio izradi helikoptera. Godine 1939. izradio je prvi uspješni model helikoptera, VS-300. Helikopter je smatrao vrlo pogodnim za primjenu u industriji i zračni prijevoz, te za spašavanje ljudi zahvaćenih nekom prirodnom nepogodom. [1]

Više o razvoju helikoptera kroz povijest može se pronaći u literaturi [1], [4], [3] i [5]. U sljedećem potpoglavlju bit će opisani osnovni modeli helikoptera i princip leta standardnog modela helikoptera.

2.2 Osnovi modeli helikoptera

Današnji modeli helikoptera mogu se grubo podijeliti prema principu leta u tri vrste: tandem, koaksijalni i standardni helikopter. Jedna od sličnosti su dva rotora koji se jedan u odnosu na drugi rotiraju u suprotnom smjeru, a jedna od većih razlika je način upravljanja. [2]

Tandem se sastoji od dva podjednako snažna rotora, prednjeg i stražnjeg, usmjerenih prema gore. Uobičajeno je stražnji rotor je malo izdignut u odnosu na prednji, te se rotira u suprotnom smjeru od prednjeg. Zakretanje helikoptera dobiva se razlikom momenata prednjeg i stražnjeg rotora, a bočno gibanje nagibom oba rotora u istom smjeru, slika 2.3. Ostala gibanja ostvaruju se raznim kombinacijama promjene nagiba prednjeg i stražnjeg rotora. Ovi modeli helikoptera imaju veliku nosivost, stoga se često primjenjuju za transport.



Slika 2.3: Helikopteri: (a) i (b) tandem, (c) koaksijalni [2]

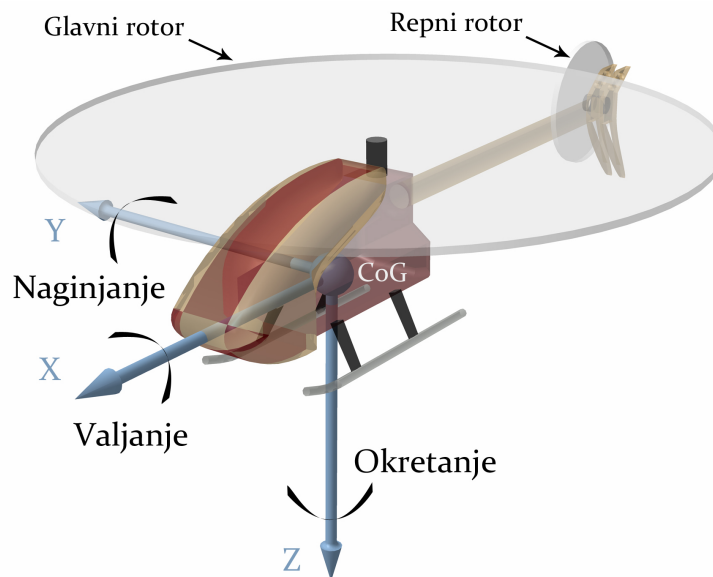
Koaksijalni je najjednostavniji model za izvedbu i upravljanje, slika 2.3. Njegova oba rotora nalaze se iznad kabine, te se rotiraju jedan spram drugog u suprotnome smjeru. Dodatna prednost ovog modela je mali broj upravljačkih kanala, odnosno varijabli, a mana što obično ostvaruje sporije brzine u odnosu na ostale modele i teže savladava nagle nalete vjetra.

Dinamički modeli opisanih helikoptera mogu se pronaći u literaturi [2], [11] i [10]. Ovaj

rad usmjeren je na sintezu regulatora standardnog helikoptera, pa će stoga biti detaljnije opisan.

2.3 Standardni model helikoptera

Standardni model helikoptera ima glavni rotor iznad kabine i jedan bočni manje snage, takozvani repni rotor. Gibanje u prostoru ostvaruje glavni rotor, a repni se koristi za usmjeravanje nosa helikoptera te za stabilizaciju prilikom leta tako da kompenzira momenta rotacije glavnog rotora.



Slika 2.4: Helikopter

Pilot upravlja helikopterom pomoću dvije palice, kolektivne i ciklične, i nožnih pedala. Preko kolektivne palice vrši promjenu kolektivnog kuta napada glavnog rotora. S drugom, kružnim pomicanjem, mijenja se kut napada glavne elise u longitudinalnom i lateralnom smjeru. Pedalama se mijenja kolektivni kut napada repnog rotora.

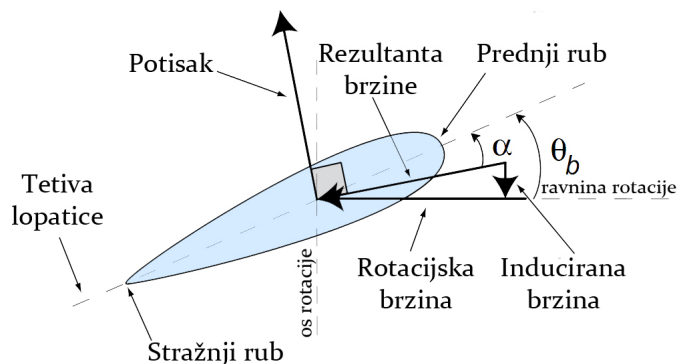
Promjenom kuta napada glavnog rotor dolazi do promjene iznosa potiska glavnog rotora, a dodatnim longitudinalnim i lateralnim promjenama kuta napada mijenja se smjer potiska glavnog rotora. Ovi modeli helikoptera opremljeni su sustavom za stabilizaciju položaja repa tako da se pedalama dodatno uveća kolektivni kut napada repnog rotora, a

time se mijenja iznos potiska repnog rotora. Promjena potiska repnog rotora uzrokuje zakretanje, odnosno rotaciju oko z -osi. Ostale rotacije, nagnjanje i valjanje, ostvaruju se nagibom glavnog rotora. Također nagibom glavnog rotora, helikopter mijenja prostorni položaj.

Dakle, za puni opis položaja helikoptera u prostoru, osim poznatih orijentacija, potrebno je poznavanje prostornih koordinata. Najpogodnije je uzeti za razmatranje promjene položaja centra gravitacije helikoptera (eng. *Center of Gravity, CoG*) u odnosu na neki referentni koordinatni sustav, slika 2.4.

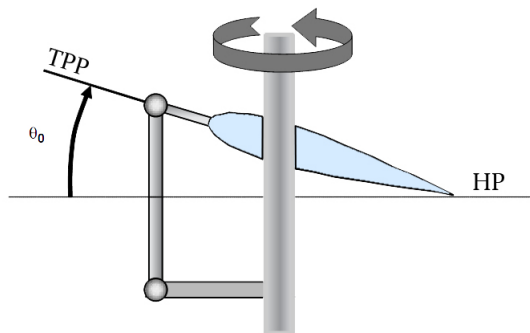
2.4 Potisak rotora

Rotor helikoptera najčešće se sastoji od dva kraka, odnosno dvije lopatice odgovarajućih profila. Potisak rotora ovisi o profilu i dužini lopatica, postavnom kutu, kutnoj brzini rotora, gustoći zraka itd. Obično se kutna brzina rotora održava konstantnom tako da pilot promjenom kuta napada lopatica dobiva promjenu potiska. Radi pojednostavljenja, efektivni radijus rotora i gustoća zraka smatraju se konstantnima. Na slici 2.5 prikazana je jedna lopatica rotora, te sile koje djeluju na nju.



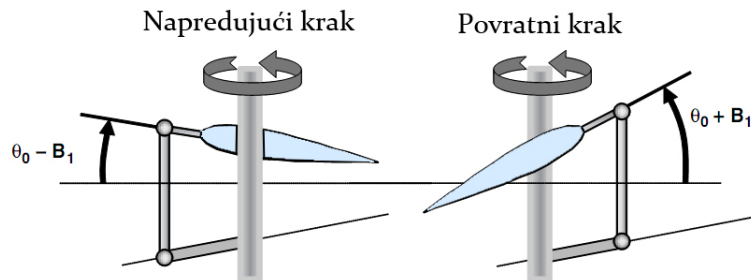
Slika 2.5: Prikaz sila na lopatici rotora [3]

Okretanjem lopatica kutnom brzinom javlja se strujanje određene količine zraka kroz površinu rotora. Na nekom presjeku lopatice javlja se rotacijska brzina zbog kutne brzine, te inducirana brzina zbog strujanja zraka. Rezultanta rotacijske i inducirane brzine po definiciji je uvijek okomita na potisak. Prema tome, sumiranjem potiska duž svake lopatice tijekom jednog okretaja glavnog rotora, dobivamo rezultantni potisak koji će također biti okomit na napadni kut glavnog rotora opisanog ravninom *TTP* (eng Tip Path Plane). [3]



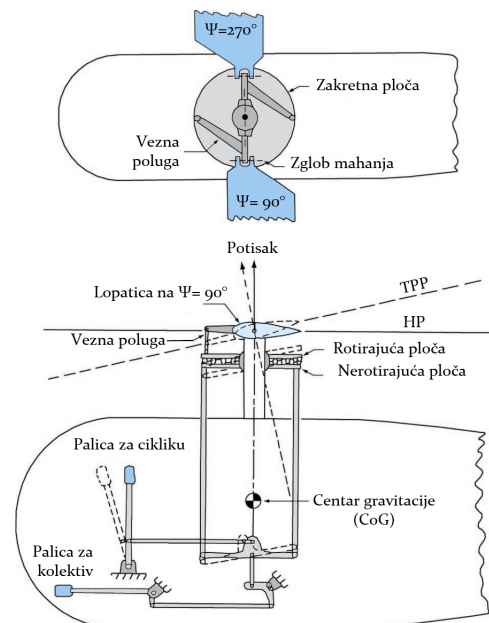
Slika 2.6: Kolektivni kuta napada lopatice rotora [11]

Primjenom kolektivne komande na glavnom rotoru, kut napada θ_b se povećava, a time i iznos vektora potiska, slika 2.6. Isto se događa prilikom promjene kolektivnog nagiba repnog rotora preko pedala u kabini helikoptera. Ciklička komandom, podešava se kut napada θ_b u lateralnom i longitudinalnom smjeru. Primjerice u lateralnom smjeru, napredujući krak ima kut napada θ_b umanjen za B_1 , dok povratni krak ima θ_b uvećan za B_1 , slika 2.7. [1]



Slika 2.7: Ciklički kut napada lopatice rotora [11]

Za nulti postavni kut napada, kružnim gibanjem lopatica glavnog rotora opisana je ravnina rotacije HP (eng. *Hub Plane*). Trenutni položaj lopatica glavnog rotora definira se kutom Ψ poznatog pod nazivom azimut. Za početak, nulu, uzet je smjer nosa helikoptera tako da za rep azimut iznosi 180° . [1]

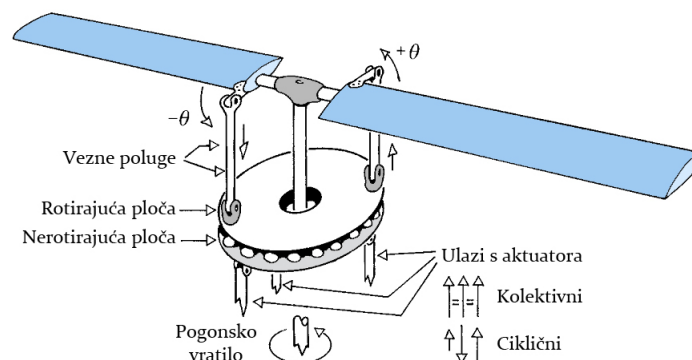


Slika 2.8: Prikaz komandi pilota [3]

Pilot preko kolektivne palice podešava kut napada lopatica glavnog rotora koji pri tome ostaje konstantan duž cijelog azimuta. Preko cikličke palice mijenja se kut napada u ovisnosti o azimutu. Npr. postavimo da je kut napada na $\Psi = 0^\circ$ dodatno veći od postavljenog preko kolektivne palice, rotacija lopatica opisat će novu ravninu *TPP* (eng. *Tip Path Plane*). Potisak glavnog rotora imat će dodatnu horizontalnu komponentu prema nosu helikoptera koja će uzrokovati gibanje helikoptera prema naprijed. Kut između ravnina *HP* i *TTP* za azimute 0° i 180° imaju isti iznos, ali suprotnog predznaka, koji označavamo sa β_{1s} . Za azimute 90° i 270° također ravnine *HP* i *TPP* tvore kutove istog iznosa, ali suprotnog predznaka. Taj kut označavamo sa β_{1c} . Promjena kutova napada β_{1s} i β_{1c} mehanički se ostvaruje preko tzv. zakretne ploče (eng. *Swash Plate, SP*), slika 2.8.

2.5 Zakretna ploča i kontrolni rotor

Kod prvih modela helikoptera, na glavnom rotoru mogao se mijenjati samo kolektivni kut napada, čime se ostvarivalo samo vertikalno podizanje ili spuštanje helikoptera. Horizontalno gibanje ostvarivalo se preusmjeravanjem strujanja zraka preko zasebnih krilaca koja su bila smještena na bočnom djelu trupa helikoptera. Metoda nije bila toliko efektivna, stoga je razvijena metoda promjene nagiba glavnog rotora opisanog ravninom *TPP* pomoću zakretne ploče *SP* (eng. *Swash plate*), slika 2.9.

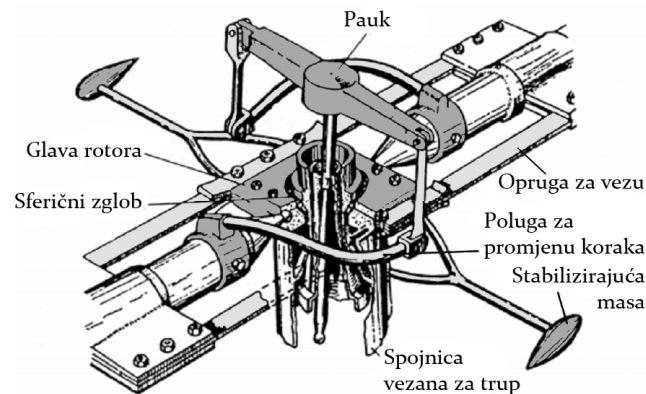


Slika 2.9: Zakretna ploča [3]

Zakretna ploča sastoji se od nerotirajuće i rotirajuće ploče. Nerotirajuća ploča mehanički je vezana za komande pilota, te zakreće rotirajuću ploču. Rotirajuća ploča dalje utječe na promjenu kuta napada lopatica glavnog rotora.

Helikopteri s visokim brojem okretaja glavnog rotora, obično iznad 120 okretaja u minuti,

imaju dodatni takozvani kontrolni rotor. Kod tih helikoptera, pored direktnog spoja lopatica glavnog rotora na zakretnu ploču SP , imaju spojen i kontrolni rotor. Kontrolni rotor poznat je pod nazivom *Bell-Hiller bar*, te se ponaša kao stabilizator nagiba TPP u odnosu na HP čineći tako cjelokupnu dinamiku helikoptera znatno stabilnijom. Doprinos uzgonu nastalog dodavanjem kontrolnog rotora zanemariv je spram uzgona glavnog rotora, slika 2.10.



Slika 2.10: Glavni rotor i kontrolni rotor [14]

Primjenom ciklične komande, zakrećemo SP u željenom longitudinalnom i lateralnom smjeru. S obzirom na mehaničku vezu kontrolnog i glavnog rotora na SP , istovremeno dolazi do manjeg naginjanje glavnog rotora i većeg naginjanja kontrolnog rotora. Unutar nekog vremenskog intervala, kontrolni rotor svojim nagibom djeluje na zakretanje glavnog rotora sve dok se njihov zakret ne izjednači. Kontrolnim rotorom javlja se prigušeniji zakret glavnog rotora, ali je zato položaj znatno stabilniji.

Do sada su opisi neki bitni dijelovi helikoptera, komandi pilota, te način na koji se ostvaruje gibanje u prostoru. Dalje u radu bit će opisano gibanje standardnog modela helikoptera, ali preko jednadžbi uz neka pojednostavljena dobivena na temelju pretpostavki.

Poglavlje 3

Dinamički model helikoptera

3.1 Uvod

U ovom poglavlju bit će izveden model standardnog helikoptera. Dobiveni model bit će sustav jedanaestog reda koji će uvjerljivo opisivati nelinearnu dinamiku helikoptera u ravnotežnom letu. Na temelju dobivenog modela, izradit će se dva tipa regulatora koji će biti opisani u sljedećem poglavlju. Pretpostavke uzete u obzir radi pojednostavljenja modela helikoptera su sljedeće:

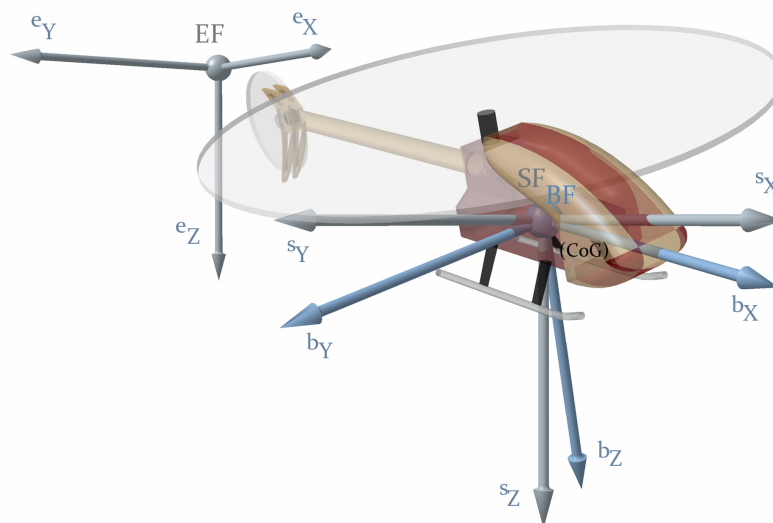
- Helikopter se razmatra kao kruto tijelo – mogu se primijeniti jednadžbe opisa gibanja krutog tijela
- Masa helikoptera je konstantna i stacionarna u vremenu – zanemaren je gubitak mase izgaranjem goriva, te nema promjene položaja centra mase uslijed djelovanja vibracije
- Savijanje lopatica rotora – zanemaren je efekt savijanja lopatica pod pretpostavkom da su lopatice izgrađene od krutog materijala, te potisak djeluje u centru rotacije rotora
- Brzina vrtnje glavnog rotora je konstantna – smatra se da helikopter ima ugrađen podsustav za regulaciju brzine vrtnje glavnog rotora
- Stražnji rotor kompenzira moment glavnog rotora – smatra se da helikopter ima ugrađen podsustav za stabilizaciju položaja repa helikoptera
- Helikopter se nalazi na većim visinama – zanemaren je efekt zemlje (efekt zračnog jastuka) koji doprinosi potisku rotora radi težeg izraza za opis razvijenog potisak, smatra se da se helikopter nalazi na većoj visini od dvostrukog promjera glavnog rotora

- Gustoća zraka je konstantna – helikopter se prilikom leta kreće u prostoru unutar kojeg je zanemariva promjena gustoće zraka
- Sve veličine stanja su mjerljive – u stvarnosti, kod helikoptera su najčešće mjerljive sedam od jedanaest veličina, no u ovom slučaju smatra se da je helikopter opremljen dodatnim senzorima ili relevantnim observerom

Navedene pretpostavke i drugi efekti koji se javljaju kod realnog helikoptera, uzimaju se u obzir primjerice za razvoj profila lopatica. Više o tome može se pronaći u literaturi [3] i [5].

Koordinatni sustavi

Radi lakšeg opisa dinamike gibanja, helikopteru su dodijeljena tri različita koordinatna sustava: neinercijski, spacijalni, te koordinatni sustav tijela helikoptera, odnosno krutog tijela. Svi su definirani kao desni koordinatni sustavi, slika 3.1.



Slika 3.1: Prikaz pridruženih koordinatnih sustava

Za ne inercijski koordinatni (EF) sustav uzet je koordinatni sustav *Zemlje* EF (eng. *Earth Frame*) s nekom proizvoljnom početnom referentnom točkom. Osi su usmjerene na način da X -os gleda u nekom pogodnom smjeru, Z -os vertikalno prema dolje u središte Zemlje, a Y -os okomita je na obje osi.

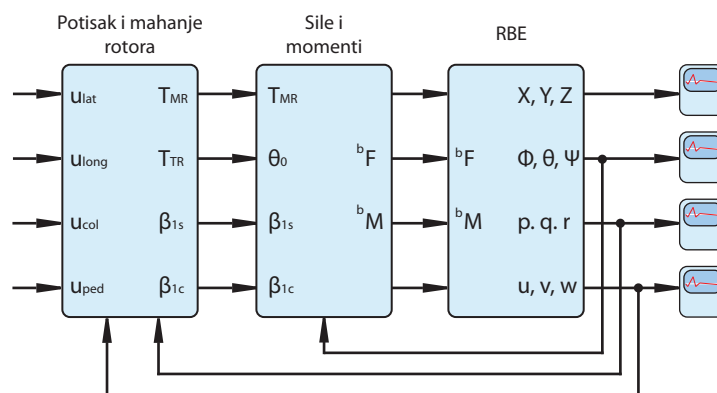
Koordinatni sustav tijela helikoptera BF (eng. *Body Frame*) ima ishodište u centru mase helikoptera. X -os usmjerena je prema nosu helikoptera, dok je Z -os usmjerena prema dolje. Y -os je definirana vektorskim produktom Z -osi i X -osi.

Spacijalni koordinatni sustav SF (eng. *Spatial Frame*) također ima ishodište u centru mase kao i BF , no orijentacija X , Y i Z osi ista je kao i kod koordinatnog sustava Zemlje EF . Uvođenjem spacijalnog koordinatnog sustava olakšan je prikaz orijentacije helikoptera kao krutog tijela u odnosu na globalni, neinercijski koordinatni sustav Zemlje EF .

Pridruženim koordinatnim sustavima može se u potpunosti definirati položaj i orijentacija helikoptera u prostoru, te lakše opisati dinamika leta helikoptera.

Blok dijagram modela helikoptera

Na slici 3.2 su prikazana tri bloka modela helikoptera izrađenog u *Matlab Simulink*-u koji ujedno predstavljaju i tri daljnje cjeline rada.



Slika 3.2: Model helikoptera u Simulinku

Prvi blok opisuje kako ulazne varijable utječu na dobiveni potisak glavnog T_{MR} i repnog T_{TR} rotora, te zakret glavnog rotora definirano kutovima β_{1s} i β_{1c} u lateralnom i longitudinalnom smjeru između ravnina TPP i HP . U drugom bloku na osnovu poznavanja vektora potiska glavnog i repnog rotora, te trenutnih brzina helikoptera, izračunavaju se sile i momenti koji djeluju na tijelo. Dobivene sile i momenti utječu na gibanje krutog tijela, odnosno helikoptera u prostoru. Jednadžbe su sadržane u zadnjem, trećem bloku.

Vektor varijabli stanja je:

$$x = \begin{bmatrix} b_u & b_v & b_w & p & q & r & \phi & \theta & \psi & \beta_{1s} & \beta_{1c} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

gdje su ${}^b u$, ${}^b v$, ${}^b w$ brzine helikoptera, p , q , r kutne brzine helikoptera, ϕ , θ , ψ Eulerovi kutovi, a β_{1s} i β_{1c} kutovi između TPP i HP .

Vektor ulaznih varijabla je:

$$u = \begin{bmatrix} u_{long} & u_{lat} & u_{col} & u_{ped} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

gdje su u_{long} i u_{lat} komande kojima se postiže longitudinalni i lateralni nagib glavnog rotora. Komandama u_{col} i u_{ped} vrši se promjena kutova napada glavnog i repnog rotora.

3.2 Potisak i mahanje glavnog i repnog rotora

3.2.1 Potisak glavnog i repnog rotora

Potiska glavnog rotora dobiva se iz jednadžbe [8]:

$$T_{MR} = \frac{1}{4}(w_b - v_i)\rho\Omega R^2 a B c \quad (3.3)$$

gdje je ρ gustoća zraka, Ω kutna brzina rotora, R radijus rotora, a nagib pravca uzgona, B broj lopatica, c duljina tetive, w_b brzina lopatica glavnog rotora u odnosu na zrak, a v_i inducirana brzina strujanja zraka kroz TTP .

Inducirana brzina dobiva se iz jednadžbe:

$$v_i^2 = \sqrt{\left(\frac{\hat{v}^2}{2}\right)^2 - \frac{T_{MR}}{2\rho A}} - \frac{\hat{v}^2}{2} \quad (3.4)$$

a ostale članove iz gornje jednadžbe dobivamo iz izraza:

$$\begin{aligned} w_b &= w_r + \frac{2}{3}\Omega R(u_{col} + \frac{3}{4}\theta_{tw}) \\ w_r &= {}^b w + (\beta_{1c} + i_s){}^b u - \beta_{1s}{}^b v \\ \hat{v}^2 &= {}^b u^2 + {}^b v^2 + w_r(w_r - 2v_i) \\ A &= R^2\pi \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdje je w_r vektor brzine diska glavnog rotora u odnosu na strujanje zraka nastalo translacijskim brzinama ${}^b u$, ${}^b v$, ${}^b w$. u_{col} je komanda pilota, θ_{tw} je zakrivljenost lopatice, ${}^b u$, ${}^b v$, ${}^b w$ su translacijske brzine u uzdužnom, bočnom i vertikalnom smjeru, a i_s je inicijalni zakret elise rotora.

Zakrivljenost lopatica od početka prema kraju postiže se ravnomjerniji raspored potiska duž profila lopatice. S obzirom da je zakrivljenost lopatice zanemariva, $\theta_{tw} \approx 0$, izraz za w_b se može pojednostaviti.

$$w_b = w_r + \frac{2}{3}\Omega R u_{col} \quad (3.6)$$

Potisak glavnog rotora T_{MR} i v_i ovise jedno o drugom, tako da se računaju matematičkom metodom preko iteracija. Dovoljno je provesti pet iteracija da se dobije dovoljno precizan iznos.

Potisak repnog rotora lakše je izraziti. Smatra se da helikopter u sebi već ima ugrađen žiroskop koji preko dodatnog kontrolera upravlja kutom napada tako da kutnu brzinu oko z -osi održava na nuli. Time se cijelo vrijeme kompenzira rotacija helikoptera oko z -osi, a komandom pilota u_{ped} stvaramo dodatnu silu koja uzrokuje rotaciju nosa helikoptera u željenom smjeru.

$${}^b N = {}^b f_{y,MR} \cdot l_m - {}^b f_{y,TR} \cdot l_t + {}^b f_{x,MR} \cdot y_m + Q_{MR} \cdot \cos(\beta_{1s}) \cdot \cos(\beta_{1c}) \quad (3.7)$$

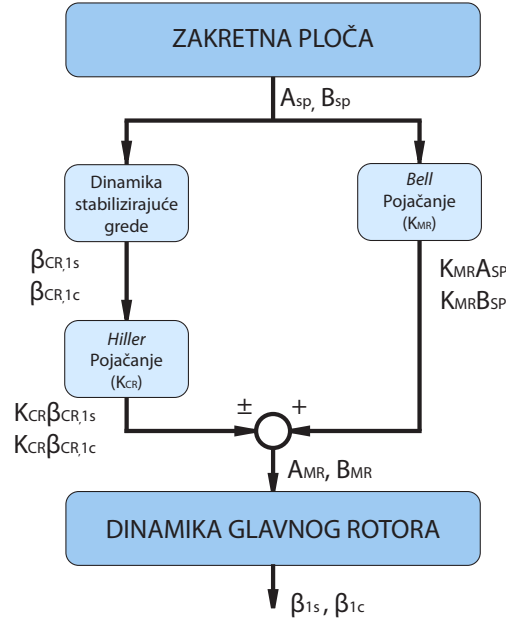
Iz prethodno navedenog izraza slijedi da je moment ${}^b N$ oko osi ${}^b z$ jednak nuli, prema tome potisak repnog rotora je:

$${}^b f_{y,TR} \cdot l_t = T_{TR} = \frac{{}^b f_{y,MR} \cdot l_m + {}^b f_{x,MR} \cdot y_m + Q_{MR} \cdot c(\beta_{1c})c(\beta_{1s})}{l_t} + u_{ped} \quad (3.8)$$

gdje je u_{ped} komanda pilota kojom se helikopter zakreće oko ${}^b z$ -osi. T_{TR} je sila što iz gornje jednadžbe vodi do zaključka da je i u_{ped} također sila, za razliku od ostalih upravljačkih varijabli koje se izražavaju u radijanima.

3.2.2 Mahanje glavnog rotora

Repni rotor nema mogućnost promjene smjera potiska, već samo intenziteta, dok je glavnom rotoru to omogućeno pomoću zakretne ploče SP i kontrolnog rotora (eng. *Bell-Hill barr*). Zakretanjem SP djeluje se na glavni rotor i na kontrolni rotor, slika 3.3.



Slika 3.3: Blokovni prikaz djelovanja SP na mahanje CR i MR

Iz zadnje točke sumacije prikazano na slici 3.3 dobivaju se sljedeće jednačbe:

$$A_{MR} = K_{MR}A_{SP} + K_{CR}\beta_{CR,1s} \quad (3.9)$$

$$B_{MR} = K_{MR}B_{SP} - K_{CR}\beta_{CR,1c} \quad (3.10)$$

gdje je K_{MR} konstanta i označava pojačanje kojim se direktno djeluje preko SP na glavni rotor, poznato pod nazivom *Bell* pojačanje. K_{CR} je također konstanta pojačanja, poznata pod nazivom *Hill* pojačanje, kojom se djeluje na zakretanje glavnog rotora preko kontrolnog rotora.

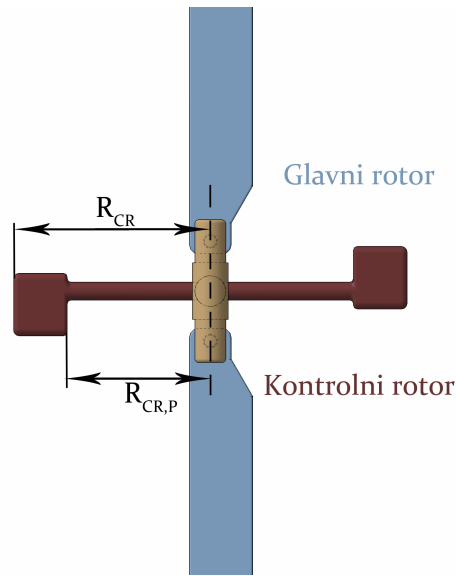
Jednačbe koje opisuju dinamiku mahanja kontrolnog rotora izvode se izjednačavanjem momenata M_{sine} i M_{cosine} s nulom. [9]

$$\begin{aligned}
 M_{SINE} &= \frac{1}{2}T_1B_{SP}(t) + \frac{1}{2}T_2p(t) - \frac{2q(t)}{\Omega} + \frac{1}{2}T_1\beta_{CR,1c}(t) \\
 &\quad - \frac{2\dot{\beta}_{CR,1c}(t)}{\Omega} + \frac{1}{2}T_2\dot{\beta}_{CR,1s}(t) + \frac{\ddot{\beta}_{CR,1s}(t)}{\Omega^2} \\
 M_{COSINE} &= \frac{1}{2}T_1A_{SP}(t) + \frac{2p(t)}{\Omega} + \frac{1}{2}T_2q(t) + \frac{1}{2}T_1\beta_{CR,1s}(t) \\
 &\quad + \frac{2\dot{\beta}_{CR,1s}(t)}{\Omega} + \frac{1}{2}T_2\dot{\beta}_{CR,1c}(t) + \frac{\ddot{\beta}_{CR,1c}(t)}{\Omega^2}
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

T_1 i T_2 su konstante uvedene radi pojednostavljenja gornjeg izraza te se računaju prema sljedećem:

$$\begin{aligned} T_1 &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{R_{CR,p}^4}{4R_{CR}^4}\right) \\ T_2 &= \left(-\frac{1}{4\Omega} + \frac{R_{CR,p}^4}{4R_{CR}^4\Omega}\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

gdje je $R_{CR,p}$ udaljenost centra rotacije rotora od unutarnjeg radijusa kontrolnog rotora, a R_{CR} udaljenost centra rotacije do vanjskog promjera kontrolnog rotora slika 3.4. Možemo primijetiti da je konstanta T_1 , Ω puta veća od konstante T_2 .



Slika 3.4: Kontrolni rotor

Sređivanjem izraza za momente M_{sine} i M_{cosine} dobivamo izraze za kutne brzine $\dot{\beta}_{CR,1s}$ i $\dot{\beta}_{CR,1c}$.

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_{CR,1c} &= \frac{1}{4}\Omega T_1 B_{SP} + \frac{1}{4}\Omega T_2 p - q + \frac{1}{4}\Omega T_1 \beta_{CR,1c} + \frac{1}{4}\Omega T_2 \dot{\beta}_{CR,1s} + \frac{1}{2\Omega} \ddot{\beta}_{CR,1s} \\ \dot{\beta}_{CR,1s} &= -\frac{1}{4}\Omega T_1 A_{SP} - p - \frac{1}{4}\Omega T_2 q - \frac{1}{4}\Omega T_1 \beta_{CR,1s} - \frac{1}{4}\Omega T_2 \dot{\beta}_{CR,1c} - \frac{1}{2\Omega} \ddot{\beta}_{CR,1c} \end{aligned} \quad (3.13)$$

gdje je A_{SP} i B_{SP} longitudinalni i lateralni nagib zakretne ploče SP , γ lock-ova konstanta kontrolnog rotora, Ω kutna brzina rotacije glavnog rotora. Kutna brzina rotora Ω smatra se konstantnom.

Za dobivanje konačnog izraza za longitudinalni i lateralni nagib TPP , potrebni su nam još izrazi za opis mahanja glavnog rotora. Mahanje glavnog rotora dobiva se iz

pojednostavljenog izraza uz pretpostavku da se zglobovi koji dozvoljavaju mahanje lopatica nalaze u samom centru rotacije [9]:

$$\beta_{1c}(t) = \frac{3,06 \cdot 10^{-7} \cdot (-3,26 \cdot 10^6 \cdot B_{MR}\pi^2 - 816,97 \cdot {}^b v^2(t) \cdot B_{MR} - 3275,88 \cdot {}^b u(t) \cdot v_i)}{\pi^2} - \frac{3,06 \cdot 10^{-7}(2456,91 \cdot {}^b u^2(t) \cdot B_{MR} - 1637,94 \cdot A_{MR} \cdot {}^b v(t) \cdot {}^b u(t) + 1,13 \cdot 10^5 \pi p(t))}{\pi^2} - \frac{3,06 \cdot 10^{-7} \cdot (4,67 \cdot 10^5 \pi q(t) + 1,95 \cdot 10^5 \pi u_{col}(t) \cdot {}^b u(t))}{\pi^2} \quad (3.14)$$

$$\beta_{1s}(t) = \frac{3,06 \cdot 10^{-7} \cdot (1,94 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot u_{col}(t) \cdot {}^b v(t) - 3,26 \cdot 10^6 \cdot \pi^2 A_{MR})}{\pi^2} - \frac{3,06 \cdot 10^{-7}(1637,94 \cdot B_{MR} \cdot {}^b u(t) {}^b v(t) \cdot v_i + 4,67 \cdot 10^5 \pi \cdot p(t) - 3275,88 \cdot v_i)}{\pi^2} - \frac{3,06 \cdot 10^{-7} \cdot (2456,91 \cdot A_{MR} \cdot {}^b v^2(t) - 818,97 \cdot {}^b u^2(t) \cdot A_{MR} + 1,12 \cdot 10^5 \pi \cdot q(t))}{\pi^2} \quad (3.15)$$

3.3 Sile i momenti

U prethodnom poglavlju prikazani su izrazi za dobivanje potiska glavnog i repnog rotora, te zakreta TPP u odnosu na HP koji je definirano kutovima β_{1c} i β_{1s} . Korištenjem poznatih navedenih izraza možemo izračunati sumu svih sila i momenata koji djeluju na helikopter.

3.3.1 Sile

Na helikopter djeluje sila potiska glavnog rotora koja može imati komponentu u ${}^b x$, ${}^b y$ i ${}^b z$ smjeru, sila potiska repnog rotora koja djeluje u ${}^b y$ smjeru, te sila gravitacije koja djeluje u ${}^e z$ smjeru što je identično ${}^s z$ smjeru. Ukupna sila koja djeluje na helikopter dobiva se iz izraza:

$${}^b F = {}^b F_{MR} + {}^b F_{TR} + {}^b F_g \quad (3.16)$$

gdje je ${}^b F_{MR}$ sila glavnog rotora, ${}^b F_{TR}$ sila repnog rotora, ${}^b F_g$ gravitacijska sila u BF .

Djelovanje gravitacijske sile iz EF u BF dobiva se iz izraza:

$${}^bF_g = R_{bs}(\theta) \cdot {}^sF_g = R_{bs}(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \cdot g \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

gdje je m masa helikoptera, a $R_{bs}(\theta)$ matrica transformacije iz SP u BF . Matrica $R_{bs}(\theta)$ prikazana je u idućem poglavlju, a njen izvod može se pronaći u literaturi [2] i [5]. Konačan izraz za sile koje djeluju na helikopter glasi:

$$\begin{aligned} {}^bF &= \begin{bmatrix} {}^bf_x \\ {}^bf_y \\ {}^bf_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{MRS}(\beta_{1c}) \\ T_{MRS}(\beta_{1s}) \\ T_{MRC}(\beta_{1s})c(\beta_{1c}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T_{TR} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s(\theta)mg \\ s(\phi)c(\theta)mg \\ c(\phi)c(\theta)mg \end{bmatrix} \\ {}^bF &= \begin{bmatrix} -T_{MRS}(\beta_{1c}) - s(\theta)mg \\ T_{MRS}(\beta_{1s}) + T_{TR} + s(\phi)c(\theta)mg \\ -T_{MRC}(\beta_{1s})c(\beta_{1c}) + c(\phi)c(\theta)mg \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.3.2 Momenti

Prethodno dobivene sile uzrokuju moment oko centra mase helikoptera CoG . Ukupni moment može se prikazati pomoću tri komponente bL u bx smjeru, bM u by smjeru i bN u bz smjeru.

$${}^b\tau = \begin{bmatrix} {}^bL \\ {}^bM \\ {}^bN \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^bf_{y,MR} \cdot h_m - {}^bf_{z,MR} \cdot y_m \\ -{}^bf_{x,MR} \cdot h_m - {}^bf_{z,MR} \cdot l_m \\ {}^bf_{x,MR} \cdot y_m + {}^bf_{y,MR} \cdot l_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^bf_{y,TR} \cdot h_t \\ 0 \\ -{}^bf_{y,TR} \cdot l_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{MRS}(\beta_{1c}) \\ -Q_{MRS}(\beta_{1s}) \\ Q_{MRC}(\beta_{1c})c(\beta_{1s}) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

gdje je l_m , y_m i h_m udaljenost glavnog rotora u smjeru osi bx , by , bz od CoG , dok je l_t , y_t i h_t udaljenost repnog rotora u smjeru osi bx , by , bz od CoG .

Q_{MR} je moment otpora koji djeluje na helikoptera. Zbog kompleksnosti, za izračunavanje je korišten pojednostavljeni izraz, gdje je otpor Q_{MR} u ovisnosti o potisku glavnog rotora T_{MR} i dva koeficijenta $A_{Q,MR}$ i $B_{Q,MR}$. [10]

$$Q_{MR} = -(A_{Q,MR} \cdot T_{MR}^{1.5} + B_{Q,MR}) \quad (3.20)$$

gdje je $A_{Q,MR}$ koeficijent ovisnosti Q_{MR} i T_{MR} , a $B_{Q,MR}$ inicijalna sila otpora kada je kut napada lopatice jednak nuli.

3.4 Opis gibanja krutog tijela

Komponente bF_x , bF_y , bF_z vektora sile bF i komponente L , M , N ukupnog momenta ${}^b\tau$ izražene su u prethodnom poglavlju. Uz pretpostavku da se helikopter može razmatrati kao kruto tijelo, vrijede *Eulerovi* izrazi za kruto tijelo koji određuju gibanje tijela u prostoru (*Rigid Body Equation*). [6]

$$\begin{bmatrix} {}^b\dot{V} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^bF - \omega \times {}^bV \\ P_{sb}(\Theta) \cdot \omega \\ I^{-1}({}^b\tau - \omega \times (I \cdot \omega)) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Gdje je bF vektor sila koja djeluje na kruto tijelo, bV vektor translacijskih brzina kojim se giba tijelo u BF , $P_{sb}(\Theta)$ matrica transformacije, ω kutne brzine u BF , I matrica inercija tijela, ${}^b\tau$ vektor momenata koji djeluju na kruto tijelo, odnosno helikopter.

$${}^bF = \begin{bmatrix} {}^bF_x \\ {}^bF_y \\ {}^bF_z \end{bmatrix}; {}^bV = \begin{bmatrix} {}^bV_u \\ {}^bV_v \\ {}^bV_w \end{bmatrix}; \omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}; \tau = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix};$$

Vektor akceleracija računa se iz izraza:

$${}^b\dot{V} = \begin{bmatrix} {}^b\dot{u} \\ {}^b\dot{v} \\ {}^b\dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} {}^bF_x + {}^bV_v \cdot r - {}^bV_w \cdot q \\ \frac{1}{m} {}^bF_y - {}^bV_u \cdot r - {}^bV_w \cdot p \\ \frac{1}{m} {}^bF_z + {}^bV_u \cdot q - {}^bV_v \cdot p \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Vektor kutnih brzina helikoptera izražen u EF dobiva umnoškom matrice transformacije $P_{sb}(\Theta)$ i vektora kutnih brzina ω . Kutovi ϕ , θ i ψ poznati su pod nazivom *Eulerovi* kutovi, a opisuju zakret helikoptera u prostoru.

$$\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + \sin(\phi) \cdot \tan(\theta) \cdot q + \cos(\phi) \cdot \tan(\theta) \cdot r \\ \cos(\phi) \cdot q - \sin(\phi) \cdot r \\ \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} \cdot q + \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \cdot r \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Vektor kutnih akceleracija $\dot{\omega}$ dobivamo uz poznavanje vektora kutnih brzina ω , vektora momenata τ koji djeluju na helikopter i matrice inercija I .

$$\dot{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx}^{-1}[(I_{yy} - I_{zz})q \cdot r + L] \\ -I_{yy}^{-1}[(I_{xx} - I_{zz})p \cdot r - M] \\ I_{zz}^{-1}[(I_{xx} - I_{yy})p \cdot q + N] \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Matrica inercije I je određena prema slijedećem:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

a članovi matrice inercije I su

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum (y_m^2 + z_m^2) dm \\ I_{yy} &= \sum (x_m^2 + z_m^2) dm \\ I_{zz} &= \sum (x_m^2 + y_m^2) dm \\ I_{xy} &= I_{yx} = \sum x_m y_m dm \\ I_{xz} &= I_{zx} = \sum x_m z_m dm \\ I_{yz} &= I_{zy} = \sum y_m z_m dm \end{aligned} \quad (3.26)$$

gdje se dm odnosi na segment mase helikoptera, a x_m , y_m i z_m udaljenost segmenta mase od centra mase CoG . Radi pojednostavljenja, pretpostavlja se da su članovi $I_{xy} = I_{yx} = 0$, $I_{yz} = I_{zy} = 0$ i $I_{xz} = I_{zx} = 0$, te je prema tome matrica inercije helikoptera I

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

S obzirom da imamo sile koje djeluju na helikopter u BF i gravitacijsku silu koja djeluje u EF , odnosno u SF , trebamo sile iz BF prikazati s odgovarajućim komponentama u SF . Matricu transformacije $R_{sb}(\theta)$ koristimo za pretvorbu vektora iz BF u SF .

$$R_{sb}(\theta) = R_{bs}^T(\theta) = \begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & s(\phi)s(\theta)c(\psi) - c(\phi)s(\psi) & c(\phi)s(\theta)c(\psi) + s(\phi)s(\psi) \\ c(\theta)s(\psi) & s(\phi)s(\theta)s(\psi) + c(\phi)c(\psi) & c(\phi)s(\theta)s(\phi) - s(\phi)c(\psi) \\ -s(\theta) & s(\phi)c(\theta) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Sada možemo dobiti i vektor brzina izražen u EF .

$${}^eV = \begin{bmatrix} {}^e u \\ {}^e v \\ {}^e w \end{bmatrix} = R_{sb}(\theta) \cdot \begin{bmatrix} ux \\ uy \\ uz \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$${}^eV = \begin{bmatrix} [c(\theta)c(\psi)]ux + [s(\phi)s(\theta)c(\psi) - c(\phi)s(\psi)]uy + [c(\phi)s(\theta)c(\psi) + s(\phi)s(\psi)]uz \\ [c(\theta)s(\psi)]ux + [s(\phi)s(\theta)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)]uy + [c(\phi)s(\theta)s(\phi) - s(\phi)c(\psi)]uz \\ [-s(\theta)]ux + [s(\phi)c(\theta)]uy + [c(\phi)c(\theta)]uz \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

gdje su ux , uy , uz translacijske brzine u BF koje su u biti identične brzinama ${}^b u$, ${}^b v$, ${}^b w$.

Poglavlje 4

Linearizacija dinamičkog modela helikoptera

Prilikom linearizacije nelinearnog dinamičkog modela helikoptera, trebamo odabrati točku u kojoj ćemo imati poznate sve vrijednosti vektora stanja.

Odabrana je točka s pripadajućim stanjem helikoptera u ravnotežnom letu. Prethodno dobivene izraze linearizirat ćemo pomoću *Taylorove* aproksimacije, numeričke metode i metodom crne kutije (eng. *black box method*).

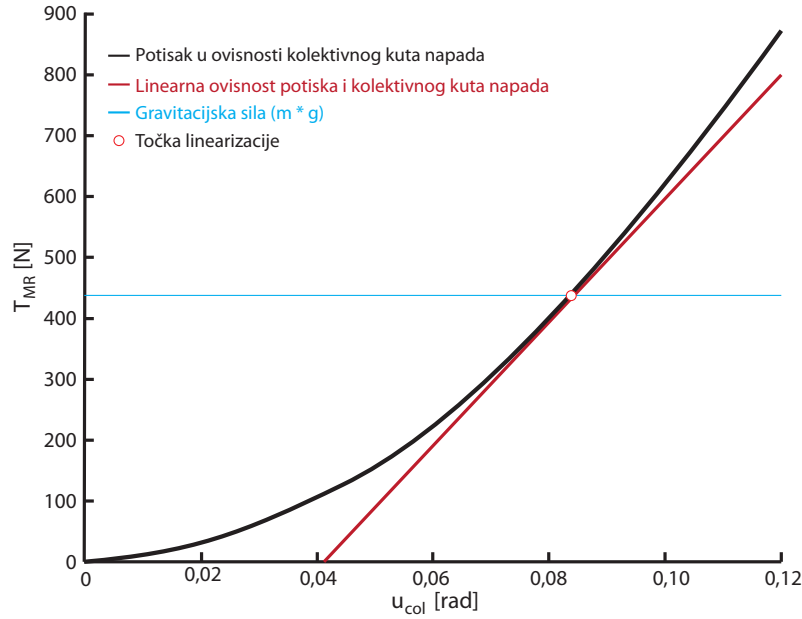
Varijable stanja helikoptera $q(t)$ prikazat ćemo kao sumu neke početne vrijednosti $q_0(t)$ u točki linearizacije i vrijednost malenog odstupanja $\tilde{q}(t)$ od početne vrijednost.

$$q(t) = q_0(t) + \tilde{q}(t) \quad (4.1)$$

4.1 Linearizacija potiska glavnog rotora

Kao što je prije navedeno, potisak glavnog rotora izračunava se numeričkom metodom, odnosno pomoću iteracija. Uzmemo li različite vrijednosti u_{col} i provedemo za svaku vrijednost pet iteracija, dobivamo pripadnu silu potiska glavnog rotora T_{MR} u ovisnosti o u_{col} .

Za odabranu točku linearizacije uzeta je vrijednost u_{col} koja poništava djelovanje gravitacijske sile. Time bi helikopter trebao održavati konstantnu visinu, a to vodi do sljedećeg izraza za $T_{MR}(t)$:



Slika 4.1: Prikaz ovisnosti potiska glavnog rotora T_{MR} i komande pilota u_{col}

$$T_{MR}(t) = 10190 \cdot u_{col} - 520,4 \quad (4.2)$$

Proširivanjem T_{MR} i u_{col} prema izrazu 4.1 dobivamo:

$$\begin{aligned} T_{MR,0} + \tilde{T}_{MR} &= 10190 \cdot (u_{col,0} + \tilde{u}_{col}) - 520,4 \\ T_{MR,0} &= 10190 \cdot u_{col,0} - 520,4 \\ \tilde{T}_{MR} &= 10190 \cdot \tilde{u}_{col} \end{aligned} \quad (4.3)$$

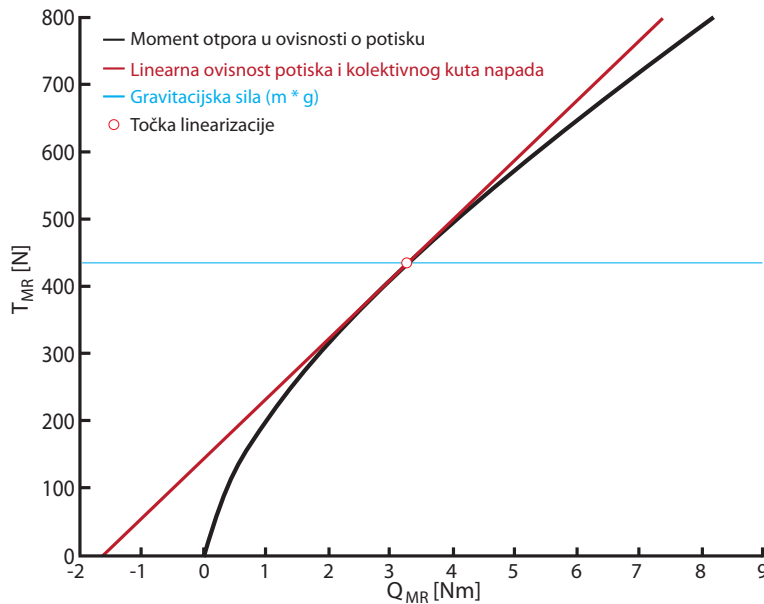
Uz pretpostavku da je \tilde{u}_{col} jednako nuli, $u_{col,0}$ treba biti jednak gravitacijskoj sili kako bi helikopter ostao u ravnotežnom stanju.

$$\begin{aligned} T_{MR,0} = m \cdot g &= 10190 \cdot u_{col,0} - 520,4 \\ u_{col,0} &= \frac{m \cdot g + 520,4}{10190} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ubacivanjem u izraz za T_{MR} imamo:

$$\begin{aligned}
 T_{MR} &= 10190 \cdot u_{col} - 520,4 \\
 &= 10190 \cdot (u_{col,0} + \tilde{u}_{col}) - 520,4 \\
 &= 10190 \cdot \left(\frac{m \cdot g + 520,4}{10190} + \tilde{u}_{col} \right) - 520,4 \\
 &= 10190 \cdot \tilde{u}_{col} + m \cdot g
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

4.2 Linearizacija momenta otpora glavnog rotora



Slika 4.2: Prikaz ovisnosti momenta otpora Q_{MR} i potiska glavnog rotora T_{MR}

Linearizacija momenta otpora glavnog rotora provodi se numeričkom metodom na sličan način kao i za potisak glavnog rotora T_{MR} . Iz sljedeće jednadžbe za svaki poznati potisak glavnog rotora T_{MR} izračunamo pripadnu silu otpora rotora Q_{MR} .

$$Q_{MR}(t) = A_{Q,MR} \cdot T_{MR}^{1,5}(t) + B_{Q,MR} \tag{4.6}$$

Linearizaciju provodimo na isti način kao i silu potiska glavnog rotora T_{MR} . Na slici 4.2 prikazana je ovisnost sile potiska T_{MR} i momenta otpora Q_{MR} . Uvrštavanjem poznatih

vrijednosti koeficijenta ovisnosti sile otpora Q_{MR} i potiska glavnog rotora T_{MR} , označeno s $A_{Q,MR}$, i inicijalne sile otpora $B_{Q,MR}$ dobivamo linearni izraz momenta otpora glavnog rotora:

$$Q_{MR}(t) = 0,0113 \cdot T_{MR}(t) - 1,6275 \quad (4.7)$$

Proširenjem gornje jednačbe na velike početne vrijednosti i mala odstupanja prema 4.1, izraz možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} Q_{MR,0}(t) + \tilde{Q}_{MR}(t) &= 0,0113 \cdot (T_{MR,0} + \tilde{T}_{MR}(t)) - 1,6275 \\ Q_{MR,0} &= 0,0113 \cdot T_{MR,0} - 1,6275 \\ \tilde{Q}_{MR}(t) &= 0,0113 \cdot \tilde{T}_{MR} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ubacivanjem izraza 4.4 za $T_{MR,0}$ u gornji, dobivamo vrijednost otpora u točki linearizacije:

$$\begin{aligned} Q_{MR,0} &= 0,0113 \cdot m \cdot g - 1,6275 \\ &= 0,0113 \cdot 435,4 - 1,6275 \\ &= 6,5313 \end{aligned} \quad (4.9)$$

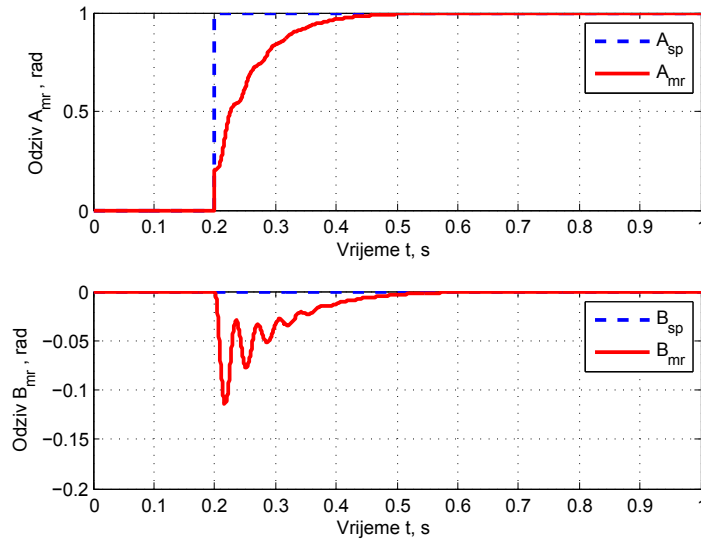
Konačni linearizirani izraz za otpor glavnog rotora je:

$$\begin{aligned} Q_{MR}(t) &= Q_{MR,0} + \tilde{Q}_{MR}(t) \\ &= \tilde{Q}_{MR}(t) + 6,5313 \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.3 Linearizacija mahanja glavnog rotora

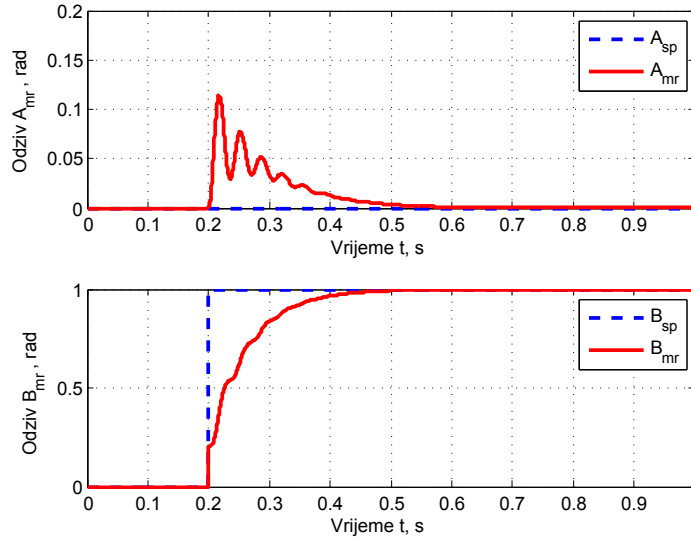
Za linearizaciju derivacije kutova mahanja glavnog rotora β_{1s} i β_{1c} koristimo metodu crne kutije (eng. *black box method*). Metodu provodimo na način da u *Simulinku* provedemo simulaciju samo bloka modela za računanje kutova mahanja β_{1s} i β_{1c} . U *Simulink* bloku dovedemo jedinični step signal i nulu na ulaze A_{SP} i B_{SP} , zatim pokretanjem simulacije snimimo odzive. Jediničnom step signalu na ulazu A_{SP} dodali smo vremenski odmak od $0,2s$, te smo dobili odzive vidljive na slici 4.4.

Postupak se zatim ponavlja, ali uz zamjenu vrijednosti ulaznih signala. Ponovnim pokretanjem simulacije dobivamo odzive vidljive na slici 4.4.

Slika 4.3: Odziv B_{MR} na step A_{SP}

Vidimo da su odzivi u prvom i drugom slučaju jednakog vremenskog trajanja, te ih je moguće aproksimirati odzivom sustava prvog reda vremenske konstante iznosa $0,078$ s. Time možemo dobiti izraze za $\dot{\beta}_{1s}$ i $\dot{\beta}_{1c}$.

$$\begin{aligned}
 \beta_{1s}(s) &= \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_{1s}}} \cdot A_{sp}(s) \\
 \beta_{1c}(s) &= \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_{1c}}} \cdot B_{sp}(s) \\
 \beta_{1s}(s) \cdot s &= -\frac{1}{\tau_{1s}} \cdot A_{sp}(s) \\
 \beta_{1c}(s) \cdot s &= -\frac{1}{\tau_{1c}} \cdot B_{sp}(s) \\
 \dot{\beta}_{1s}(t) &= -\frac{1}{\tau_{1s}} \cdot A_{sp}(t) \\
 \dot{\beta}_{1c}(t) &= -\frac{1}{\tau_{1c}} \cdot B_{sp}(t)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Slika 4.4: Odziv A_{MR} na step B_{SP}

4.4 Linearizacija akceleracija

Helikopteru u ravnotežnom letu su longitudinalna, lateralna i vertikalna akceleracija jednaka nuli. Prethodno dobiveni nelinearni izraz za \dot{u} je:

$$\dot{u}(t) = \frac{{}^b f_x(t)}{m} - q(t) \cdot {}^b w(t) + r(t) \cdot {}^b v(t) \quad (4.12)$$

gdje je sila ${}^b f_x$ i T_{MR} :

$${}^b f_x(t) = -T_{MR}(t) \cdot \sin(\beta_{1c}(t)) - \sin(\theta(t)) \cdot m \cdot g \quad (4.13)$$

Ubacivanjem u izraz za \dot{u} :

$$\dot{u}(t) = \frac{-T_{MR} \cdot \sin(\beta_{1c}(t)) - \sin(\theta(t)) \cdot m \cdot g}{m} - q(t) \cdot w(t) + r \cdot v \quad (4.14)$$

Linearizirani izraz za T_{MR} nam je otprije poznat, a početne vrijednosti ${}^b v(t)$, ${}^b w(t)$, $q(t)$, $r(t)$, $\theta(t)$, $\beta_{1c}(t)$ jednake su nuli. Slijedi:

$$\begin{aligned}
T_{MR}(t) &= 10190 \cdot \tilde{u}_{col} + m \cdot g \\
\beta_{1c}(t) &= \tilde{\beta}_{1c}(t) \\
\theta(t) &= \tilde{\theta}(t) \\
{}^b v(t) &= {}^b \tilde{v}(t) \\
{}^b w(t) &= {}^b \tilde{w}(t) \\
q(t) &= \tilde{q}(t) \\
r(t) &= \tilde{r}(t)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Nakon uvrštavanja, linearizirana jednačba za \dot{u} glasi:

$$\dot{u} = -g \cdot \tilde{\theta} - g \cdot \tilde{\beta}_{1c} \tag{4.16}$$

Za akceleraciju ${}^b \dot{v}$ u ${}^b y$ smjeru imamo poznatu formulu:

$$\dot{v} = \frac{{}^b f_y}{m} + p \cdot {}^b w - r \cdot {}^b u \tag{4.17}$$

Uvrštavanjem sljedećih jednačbi u gornji izraz:

$$\begin{aligned}
{}^b f_y &= T_{MR} \cdot \sin(\beta_{1s}) + {}^b f_{y,TR} + \sin(\phi) \cdot \cos(\theta) \cdot m \cdot g \\
{}^b f_{y,TR} &= {}^b f_{y,MR} \cdot l_m + Q_{MR} \cdot \cos(\beta_{1s}) \cdot \cos(\beta_{1c}) \cdot l_t^{-1} - u_{ped} \\
{}^b f_{y,MR} &= T_{MR} \cdot \sin(\beta_{1s}) \\
T_{MR} &= 10190 \cdot \tilde{u}_{col} + m \cdot g \\
Q_{MR} &= -(115,147 \cdot \tilde{u}_{col} + 6,5313)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

dobivamo konačni izraz:

$$\dot{v} = \left(1 + \frac{l_m}{l_t}\right) \cdot g \cdot \tilde{\beta}_{1s} + g \cdot \tilde{\phi} - \frac{115,147}{m \cdot l_t} \cdot \tilde{u}_{col} - \frac{6,5313}{m \cdot l_t} - \frac{1}{m} \tilde{u}_{ped} \tag{4.19}$$

Sređeni izraz za akceleraciju u vertikalnom smjeru:

$$\dot{w} = -\frac{10190}{m} \tilde{u}_{col} \tag{4.20}$$

Linearizacija kutnih akceleracija provodi se na sličan način. Imamo poznati izraz za kutnu akceleraciju oko x osi:

$$\dot{p}(t) = \frac{I_{yy}q(t)r(t) - I_{zz}q(t)r(t) + L(t)}{I_{xx}} \quad (4.21)$$

$L(t)$ je komponenta vektora momenta τ , te iznosi:

$$L(t) = -{}^b f_{z,MR}(t)y_m + {}^b f_{y,MR}(t)h_m + {}^b f_{y,TR}(t)h_t + Q_{MR}(t) \sin \beta_{1c}(t) \quad (4.22)$$

a komponente sila ${}^b f_{z,MR}$, ${}^b f_{y,MR}$, ${}^b f_{y,TR}$ su dane izrazima:

$$\begin{aligned} {}^b f_{z,MR} &= -T_{MR} \cos(\beta_{1s}) \cos(\beta_{1c}) \\ {}^b f_{y,MR} &= T_{MR}(t) \sin \beta_{1s}(t) \\ {}^b f_{y,TR} &= \frac{T_{MR}(t) \sin \beta_{1s}(t) + Q_{MR}(t)}{l_t} - u_{ped}(t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Uvrštavanjem 4.23 u izraz 4.22, a zatim u 4.24 dobivamo

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= \frac{I_{yy}}{I_{xx}}q(t)r(t) - \frac{I_{zz}}{I_{xx}}q(t)r(t) - \frac{y_m}{I_{xx}}T_{MR}(t) \cos \beta_{1s}(t) \cos \beta_{1c}(t) + \frac{h_t}{I_{xx}l_t}T_{MR}(t) \sin \beta_{1s}(t) \\ &+ \frac{h_t}{I_{xx}l_t}Q_{MR}(t) - \frac{h_t}{I_{xx}}u_{ped}(t) + \frac{h_m}{I_{xx}}T_{MR}(t) \sin \beta_{1s}(t) + \frac{1}{I_{xx}}Q_{MR}(t) \sin \beta_{1c}(t) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Primijenimo li sada aproksimaciju malih kuteva gdje je \sin malog kuta jednak malom kutu, a \cos jednak jedinici, gornji izraz postaje

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= \frac{I_{yy}}{I_{xx}}q(t)r(t) - \frac{I_{zz}}{I_{xx}}q(t)r(t) - \frac{y_m}{I_{xx}}T_{MR}(t) + \frac{h_t}{I_{xx}l_t}T_{MR}(t)\beta_{1s}(t) \\ &+ \frac{h_t}{I_{xx}l_t}Q_{MR}(t) - \frac{h_t}{I_{xx}}u_{ped}(t) + \frac{h_m}{I_{xx}}T_{MR}(t)\beta_{1s}(t) + \frac{1}{I_{xx}}Q_{MR}(t)\beta_{1c}(t) \end{aligned} \quad (4.25)$$

a u točki linearizacije vrijede izrazi

$$\begin{aligned} q(t) &= \tilde{q}(t) \\ r(t) &= \tilde{r}(t) \\ \beta_{1s}(t) &= \tilde{\beta}_{1s}(t) \\ \beta_{1c}(t) &= \tilde{\beta}_{1c}(t) \\ u_{ped}(t) &= \tilde{u}_{ped}(t) \end{aligned} \quad (4.26)$$

te imamo otprije poznate izraze za T_{MR} i Q_{MR} koji glase

$$\begin{aligned} T_{MR}(t) &= 10190\tilde{u}_{col}(t) + mg \\ Q_{MR}(t) &= 115,147\tilde{u}_{col}(t) + 6,5313 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Uvrštavanjem gornjih izraza u 4.25, gdje je umnožak malih vrijednosti zanemariva vrijednost, dobivamo konačni izraz za \dot{p}

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= \frac{I_{yy}}{I_{xx}}\tilde{q}(t)\tilde{r}(t) - \frac{I_{zz}}{I_{xx}}\tilde{q}(t)\tilde{r}(t) - 10190\frac{y_m}{I_{xx}}\tilde{u}_{col}(t) - \frac{y_m}{I_{xx}}mg \\ &+ \frac{h_t}{I_{xx}l_t}mg\tilde{\beta}_{1s}(t) + 115,147\frac{h_t}{I_{xx}l_t}\tilde{u}_{col}(t) + 6,5313\frac{h_t}{I_{xx}l_t} \\ &- \frac{h_t}{I_{xx}}\tilde{u}_{ped}(t) + \frac{h_m}{I_{xx}}mg\tilde{\beta}_{1s}(t) + 6,5313\frac{1}{I_{xx}}\tilde{\beta}_{1c}(t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Izraz za kutnu akceleraciju oko y os, $\dot{q}(t)$ je:

$$\dot{q}(t) = \frac{I_{xx}p(t)r(t) - I_{zz}p(t)r(t) + M(t)}{I_{yy}} \quad (4.29)$$

$M(t)$ je komponenta vektora momenta τ , a iznosi

$$M(t) = -{}^b f_{z,MR}(t)l_m + {}^b f_{x,MR}(t)h_m - Q_{MR}(t)\sin\beta_{1s}(t) \quad (4.30)$$

gdje su komponente ${}^b f_{z,MR}$ i ${}^b f_{x,MR}$ dane izrazima:

$$\begin{aligned} {}^b f_{z,MR}(t) &= -T_{MR}\cos(\beta_{1s})\cos(\beta_{1c}) \\ {}^b f_{x,MR}(t) &= -T_{MR}(t)\sin\beta_{1c}(t) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Uvrštavanjem 4.31 i 4.30 u izraz 4.29 uz aproksimaciju malih kuteva za \sin i \cos dobivamo

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \frac{I_{xx}}{I_{yy}}p(t)r(t) - \frac{I_{zz}}{I_{yy}}p(t)r(t) + \frac{l_m}{I_{xx}}T_{MR}(t) \\ &+ \frac{h_m}{I_{yy}}T_{MR}(t)\beta_{1c}(t) + \frac{1}{I_{yy}}Q_{MR}(t)\beta_{1s}(t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Uvedemo li sada vrijednosti za točku linearizacije

$$\begin{aligned}
p(t) &= \tilde{p}(t) \\
r(t) &= \tilde{r}(t) \\
\beta_{1s}(t) &= \tilde{\beta}_{1s}(t) \\
\beta_{1c}(t) &= \tilde{\beta}_{1c}(t)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

dobivamo konačni izraz za kutnu akceleraciju oko y osi

$$\dot{q}(t) = 10190 \frac{l_m}{I_{yy}} \tilde{u}_{col}(t) + \frac{l_m}{I_{yy}} mg + \frac{h_m}{I_{yy}} + \frac{6,5313}{I_{yy}} \tilde{\beta}_{1s}(t) \tag{4.34}$$

Na isti način dobivamo izraz za kutnu akceleraciju oko z osi \dot{r} :

$$\dot{r}(t) = \frac{l_t}{I_{zz}} \tilde{u}_{ped}(t) + \frac{y_m}{I_{zz}} \tilde{u}_{ped}(t) \tilde{\beta}_{1c}(t) + \frac{y_m}{I_{zz}} mg \beta_{1c}(t) \tag{4.35}$$

4.5 Linearizacija promjene *Eulerovih* kutova

Prema prije dobivenom vektoru *Eulerovih* kutnih brzina 3.23, imamo

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}(t) &= p(t) + \sin \phi(t) \tan \theta(t) \cdot q(t) + \cos \phi(t) \tan \theta(t) \cdot r(t) \\
&= \frac{p(t) \cdot \cos \theta(t) + \sin \phi(t) \sin \theta(t) \cdot q(t) + \cos \phi(t) \sin \theta(t) \cdot r(t)}{\cos \theta(t)}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Primjenom aproksimacije malih kuteva izraz se pojednostavljuje:

$$\dot{\phi}(t) = p(t) + \phi(t) \theta(t) \cdot q(t) + \theta(t) \cdot r(t) \tag{4.37}$$

Zatim uvrštavanjem sljedećeg

$$\begin{aligned}
p(t) &= \tilde{p}(t) \\
q(t) &= \tilde{q}(t) \\
r(t) &= \tilde{r}(t) \\
\phi(t) &= \tilde{\phi}(t) \\
\theta(t) &= \tilde{\theta}(t)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

u prethodni izraz, dobivamo

$$\dot{\phi}(t) = \tilde{p}(t) + \tilde{\phi}(t)\tilde{\theta}(t) \cdot \tilde{q}(t) + \tilde{\theta}(t) \cdot \tilde{r}(t) \quad (4.39)$$

Umnožak malih signala daje još manju vrijednosti koja se može zanemariti, a time dobivamo konačan izraz za $\dot{\phi}(t)$

$$\dot{\phi}(t) = \tilde{p}(t) \quad (4.40)$$

Promjena *Eulerovog* kuta oko y osi prema prije dobivenim jednadžbama u trećem poglavlju je

$$\dot{\theta}(t) = \cos \phi(t) \cdot q(t) - \sin \theta(t) \cdot r(t) \quad (4.41)$$

Gornji izraz se pojednostavljuje aproksimacijom malih kutova u

$$\dot{\theta}(t) = q(t) - \theta(t) \cdot r(t) \quad (4.42)$$

U točki linearizacije vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} q(t) &= \tilde{q}(t) \\ r(t) &= \tilde{r}(t) \\ \phi(t) &= \tilde{\phi}(t) \end{aligned} \quad (4.43)$$

te uvrštavanjem u izraz 4.42 dobivamo

$$\dot{\theta}(t) = \tilde{q}(t) - \tilde{\theta}(t) \cdot \tilde{r}(t) \quad (4.44)$$

gdje je umnožak malih signala jednak nuli, te prema tome vrijedi izraz za $\dot{\theta}(t)$

$$\dot{\theta}(t) = \tilde{q}(t) \quad (4.45)$$

Za linearizaciju posljednje varijable stanja, promjene *Eulerovog* kuta oko z osi $\dot{\psi}(t)$, uzimamo početnu jednadžbu dobivenu u trećem poglavlju

$$\dot{\psi}(t) = \frac{\sin \phi(t) \cdot q(t)}{\cos \theta(t)} + \frac{\cos \psi(t) \cdot r(t)}{\cos \theta(t)} \quad (4.46)$$

Zatim ponovno primjenom aproksimacijom malih kutova na gornji izraz, dalje dobivamo

$$\dot{\psi}(t) = \phi(t) \cdot q(t) + r(t) \quad (4.47)$$

Za odabranu radnu točku linearizacije vrijedi da je

$$\begin{aligned} q(t) &= \tilde{q}(t) \\ r(t) &= \tilde{r}(t) \\ \psi(t) &= \tilde{\psi}(t) \end{aligned} \tag{4.48}$$

te uvrštavanjem u izraz 4.47 dobivamo

$$\dot{\psi}(t) = \tilde{\phi}(t) \cdot \tilde{q}(t) + \tilde{r}(t) \tag{4.49}$$

S obzirom da je umnožak malih signala približno jednak nuli, iz gornjeg izraza dobivamo konačan za $\dot{\psi}(t)$

$$\dot{\psi}(t) = \tilde{r}(t) \tag{4.50}$$

4.6 Matrice sustava linearnog modela

Nakon provedene linearizacije svake jednadžbe, sustav nelinearnih jednadžbi možemo prikazati kao sustav linearnih jednadžbi. Na temelju linearnog dinamičkog modela helikoptera, u sljedećem poglavlju napraviti ćemo sinteze linearnih regulatora.

Linearni regulator bi trebao biti u mogućnosti stabilizirati sustav u odabranoj točki linearizacije. Međutim, pomakom od točke linearizacije, regulator svojim linearnim djelovanjem može dovesti sustav u neku drugu stabilnu točku ili ga odvesti u nestabilnost. Naime, ograničenje linearnog regulatora je mogućnost stabilizacije nelinearnog sustava samo za neke granične vrijednosti odstupanja od točke linearizacije, odnosno lokalnog minimuma.

Matrice sustava A , B , B_d , C i D vremenski su invarijantne tako da sustav spada u *LTI* sustave. Linearni vremenski-invarijantni model helikopter možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_d d(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{4.51}$$

gdje je A matrica koeficijenata sustava, B matrica ulaza sustava, B_d matrica poremećaja sustava, C matrica izlaza sustava, a D matrica prijenosa sustava. $x(t)$ je vektor stanja, $u(t)$ vektor ulaza, $d(t)$ vektor poremećaja, a $y(t)$ vektor izlaza.

Uvrštavanjem parametara helikoptera *Yamaha R-50*, dobivamo maticu koeficijenata

sustava A izraženu numeričkim vrijednostima

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9,81 & 0 & 0 & -9,81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9,81 & 0 & 0 & 9,81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 260,7 & -4,453 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,427 & 83,54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{0,078} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{0,078} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Matrica ulaza sustava B je

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,162 & -0,02253 \\ 0 & 0 & -229,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2723 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Matrica izlaza sustava C je jedinična matrica pod pretpostavkom da imamo mjerljive sve

varijable stanja.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Matrica prijenosa D je nul matrica. Poremećaj koji djeluje na helikopter u ravnotežnom letu utječe samo na translacijsku brzinu v , prema tome matrica poremećaja B_d je:

$$B_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Vektor stanja je

$$x = \begin{bmatrix} u & v & w & p & q & r & \phi & \theta & \psi & \beta_{1s} & \beta_{1c} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

gdje su u , v i w translacijske brzine helikoptera, p , q i r kutne brzine helikoptera, ϕ , θ i ψ Eulerovi kutovi, a β_{1s} i β_{1c} kutovi zakreta glavnog rotora, odnosno kutovi između ravnina TPP i HP .

Vektor ulaza je

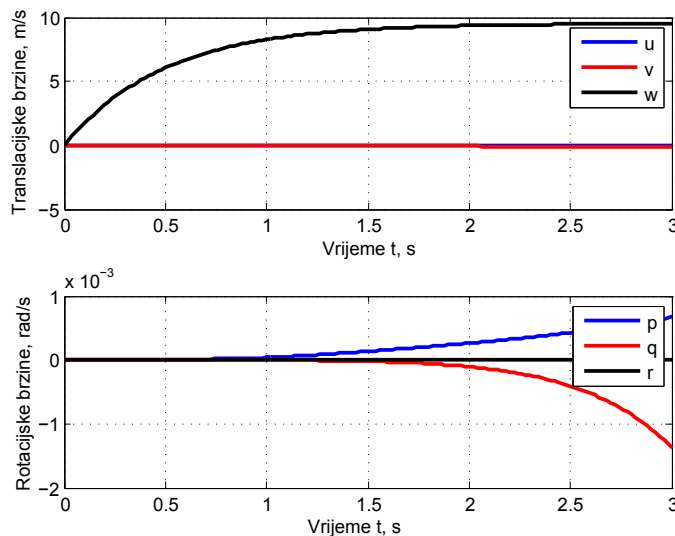
$$u = \begin{bmatrix} u_{long} & u_{lat} & u_{col} & u_{ped} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

gdje je u_{long} komanda pilota za kut napada glavnog rotora u longitudinalnom smjeru, u_{lat} komanda pilota za kut napada glavnog rotora u lateralnom smjeru, u_{col} komanda pilota za kolektivni kut napada glavnog rotora, a u_{ped} komanda pilota za kolektivni kut napada repnog rotora.

Poglavlje 5

Sinteza linearnih regulatora

U prethodnim poglavljima dobili smo nelinearni i linearni model helikoptera u ravnotežnom letu. Simulacijom nelinearnog modela u *Matlab Simulinku*, nakon manje od minute dolazi do vrlo visokih vrijednosti varijabli stanja, iz čega zaključujemo da je helikopter kao sustav nestabilan. Odzivi nelinearnog modela helikoptera za vrijednosti ulaznih signala jednakih nuli u vremenskom intervalu od 0 – 3s prikazani su na slikama ispod. Vidimo da s vremenom sve brzine počinju rasti, osim rotacijske brzine oko b_z osi



Slika 5.1: Odziv nelinearnog modela helikoptera

koja se, prema navedenoj pretpostavci na početku, kompenzira preko ugrađenog žiroskopa. Vertikalna brzina w znatno je više vrijednosti od u i v , što je za očekivati jer na helikopter

djeluje gravitacijska sila. Pozitivna vrijednost vertikalne brzine w ukazuje na smanjivanje visine helikoptera jer je pozitivna os $^b z$ usmjerena prema središtu Zemlje.

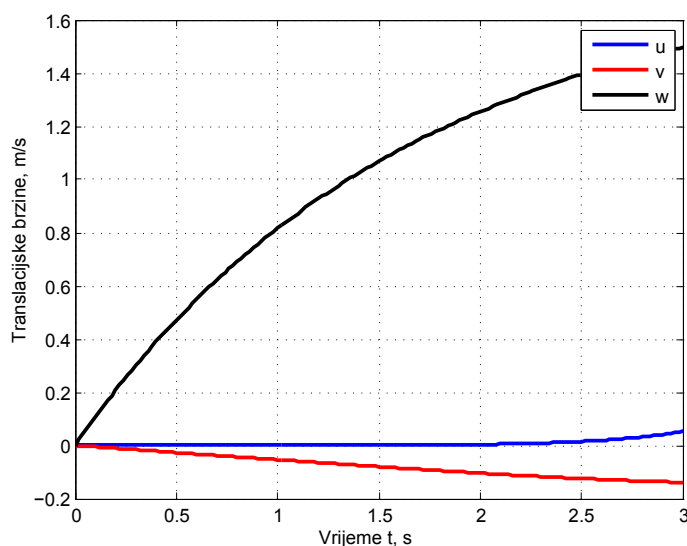
Vertikalna brzina w može se kompenzirati postavljanjem početne vrijednosti upravljačke komande u_{col} tako da se ostvari dovoljni potisak glavnog rotora T_{MR} koji će kompenzirati djelovanje gravitacijske sile.

Iznos upravljačke varijable u_{col} možemo izračunati iz jednadžbe dobivene za linearizaciju T_{MR} :

$$u_{col} = \frac{m \cdot g + 520,4}{10190} \quad (5.1)$$

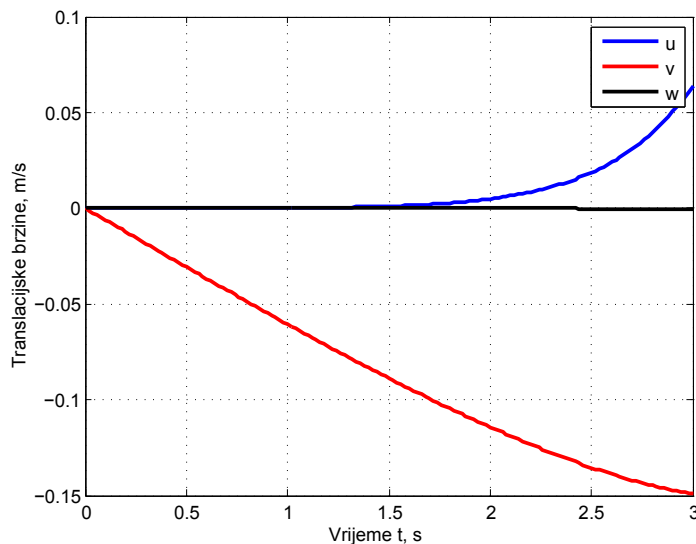
$$u_{col} = 0,09379854$$

Postavljanjem u_{col} na dobivenu vrijednost opet nam se kod nelinearnog modela javlja komponenta brzine w , ali manjeg iznosa, slika 5.2. Daljnjim povećanjem do vrijednost



Slika 5.2: Odziv translacijskih brzina nelinearnog modela helikoptera na $u_{col} = 0,0938$

$u_{col} = 0,1026$, brzina w postaje približno jednaka nuli, slika 5.3.



Slika 5.3: Odziv translacijskih brzina nelinearnog modela helikoptera na $u_{col} = 0,1026$

Dalje u radu napravit ćemo sinteze regulatora koji nam osiguravaju stabilnost helikoptera kao sustava nelinearnih jednadžbi. Regulatori korišteni za stabilizaciju položaja helikoptera su linearni regulator stanja dobiven metodom podešavanja polova *PPR* (eng. *Pole Placement Regulator*) i optimalni linearni kvadratični regulator *LQR* (eng. *Linear Quadratic Regulator*). Pojačanja oba regulatora dobivena su pomoću linearnog vremenski-invarijantnog sustava helikoptera:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{5.2}$$

gdje su matrice sustava A , B i C , te vektori stanja i ulaza $x(t)$ i $u(t)$ prikazani u prošlom poglavlju.

5.1 Linearni regulator stanja

Jedna od boljih i često primjenjivanih metoda za pronalazak matrice pojačanja linearnog regulatora je metoda podešavanjem polova. Metoda je bazirana na manipulaciji jednadžbi gibanja formuliranih u obliku prostora stanja. Praktična primjena metode kod helikoptera je ograničena s obzirom da zahtjeva mjerljivost svih varijabli stanja, što obično nije slučaj. Unatoč ograničenju metode, metoda je vrlo korisna u početnom stadiju razvoja regulatora. [19]

Dinamičke jednadžbe stanja i izlaza modela helikoptera su:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{5.3}$$

Dodavanjem negativne povratne veze vektora stanja $x(t)$ na ulazni vektor $u(t)$, zakon upravljanja možemo zapisati na sljedeći način:

$$u(t) = v(t) - K_p x(t)\tag{5.4}$$

gdje je $v(t)$ traženi vektor ulaznih varijabli, a K_p matrica pojačanja povratne veze. Uvrštavanjem 5.4 u 5.3 dobivamo jednadžbe zatvorenog kruga.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [A - BK_p]x(t) + Bv(t) \\ y(t) &= [C - DK_p]x(t) + Dv(t)\end{aligned}\tag{5.5}$$

Ili još jednostavnije zapisano

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_r x(t) + Bv(t) \\ y(t) &= C_r x(t) + Dv(t)\end{aligned}\tag{5.6}$$

Jednadžbe zatvorenoga kruga 5.5 se rješavaju na isti način kao i jednadžbe za otvoreni krug 5.3 za dobivanje odziva prijenosne funkcije upravljanog helikoptera. Kod helikoptera, matrica prijenosa sustava D jednaka je nul matrici, a matrica izlaza C jednaka je jediničnoj matrici I , pa su jednadžbe od 5.3 do 5.6 dodatno simplificirane.

Karakteristična jednadžba zatvorenoga regulacijskog kruga helikoptera glasi:

$$\begin{aligned} \Delta(s) = & |sI - A_r| \\ & |sI - A + BK| = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

gdje korijeni jednadžbe 5.7, odnosno svojstvene vrijednosti matrice A , opisuju stabilnost helikoptera.

Za pronalazak matrice pojačanja K_p kojim će se dobiti specificirani polovi zatvorenoga kruga, sustav opisan jednadžbama 5.3 mora biti kontrolabilan što u ovom slučaju sustav zadovoljava. Problem se svodi na određivanja polova zatvorenoga kruga koji će davati željene performanse helikoptera.

Matlabova naredba `place(A, B, p)` korištena za računanje K_p ima dodatni uvjet kojim uspoređuje moguća rješenja. Na kraju daje pojačanje regulatora K_p s kojim su polovi što manje osjetljivi na perturbacije koeficijentata matrica sustava. [13]

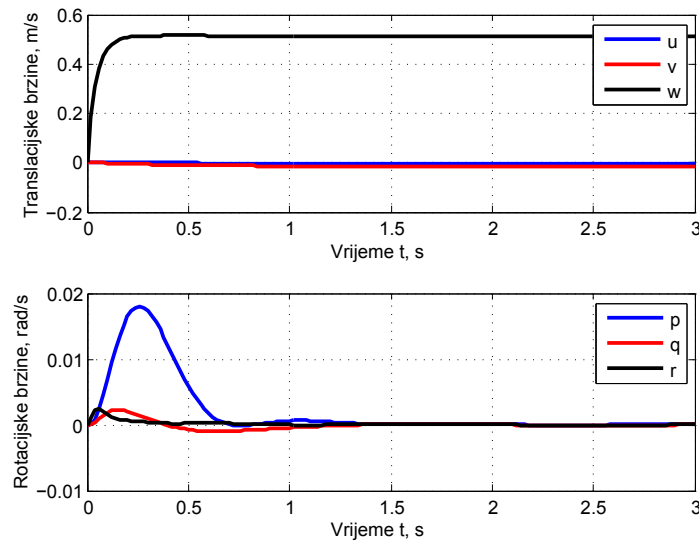
Kao što je prije navedeno, helikopter ima kontrolni rotor koji nam osigurava stabilizaciju zakreta glavnog rotora. Nadalje, tijekom simulacije javljaju se visoke kutne brzine koje znatno utječu na stabilnost helikoptera. Prema tome, izabran je vektor polova p s vrijednostima za β_{1s} i β_{1c} daleko od imaginarne osi, dok je translacijskim brzinama dana prednost spram rotacijskim brzinama.

$$p = 5 \cdot [4 \ 5 \ 6 \ 1 \ 2 \ 3 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11] \quad (5.8)$$

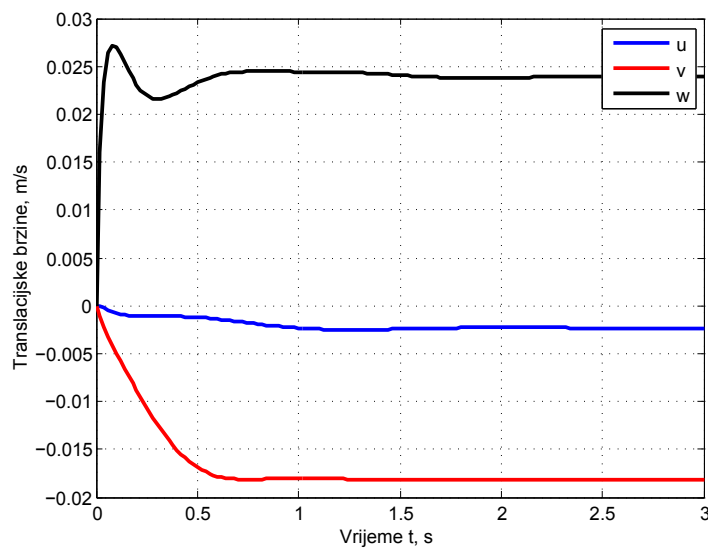
Dobivamo matricu pojačanja K_p :

$$K_p = \begin{bmatrix} -70,8 & 71,3 & -7 & 11,6 & -3,6 & 6 & 182,8 & 108,5 & 3,8 & 94,2 & 4,2 \\ -436 & 112,8 & -1,2 & 3,1 & 3,2 & 9,6 & 168,6 & 848,3 & 11,1 & 23,4 & 102,8 \\ -6,4 & 2,3 & -0,2 & 0,1 & -0,3 & 0,2 & 3,8 & 10,3 & 0 & 0,5 & 0,4 \\ -1429,3 & 690,3 & -4 & 9,8 & -100,5 & 291,9 & 994,4 & 1925,5 & 3501,4 & 92,9 & 59,3 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Dodavanjem regulatora dinamičkom modelu helikoptera u povratnu vezu s pojačanjem K_p , te saturacijom ulaznih veličina, imamo odzive prikazane na slici 5.4. Vidimo da rotacijske brzine trnu u nulu, a translacijske brzine dostižu konačnu vrijednost. Iz toga zaključujemo da je sustav stabilan, te imamo visok iznos brzine w u odnosu na ostale.

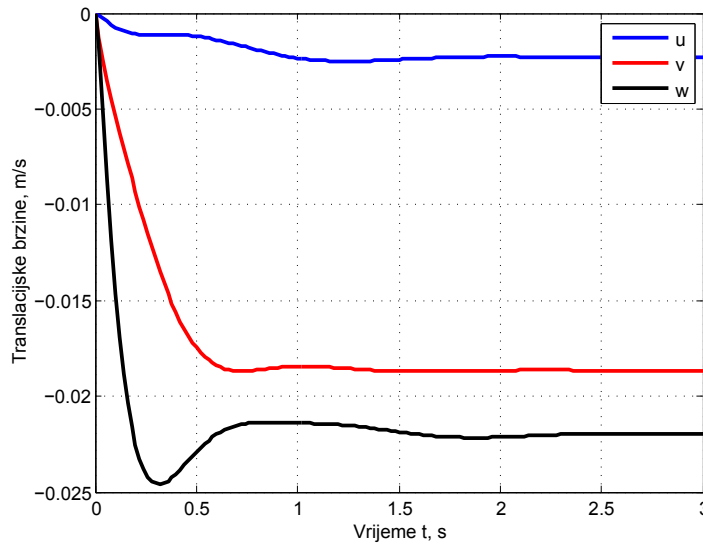
Slika 5.4: Odziv nelinearnog modela helikoptera s PP regulatorom

Brzinu w moguće je smanjiti postavljanjem inicijalne vrijednosti kolektivnog kuta napada glavnog rotora u_{col} na izračunatu vrijednost prema 5.1. Dobiveni odzivi brzina prikazani su na slici 5.5.

Slika 5.5: Odziv nelinearnog modela helikoptera s PP regulatorom uz $u_{col} = 0,0938$

Iz odziva vidimo da je sada brzina w otprilike dvadesetak puta manjeg iznosa, te istog reda veličine kao bočna translacijska brzina v .

Nadalje, postavljanjem vrijednosti upravljačke komande za kolektivni nagib elisa glavnog rotora na $u_{col} = 0,1026$, vertikalna brzina w dodatno smanjuje se, te postaje negativna, slika 5.6.



Slika 5.6: Odziv nelinearnog modela helikoptera s PP regulatorom $u_{col} = 0,1026$

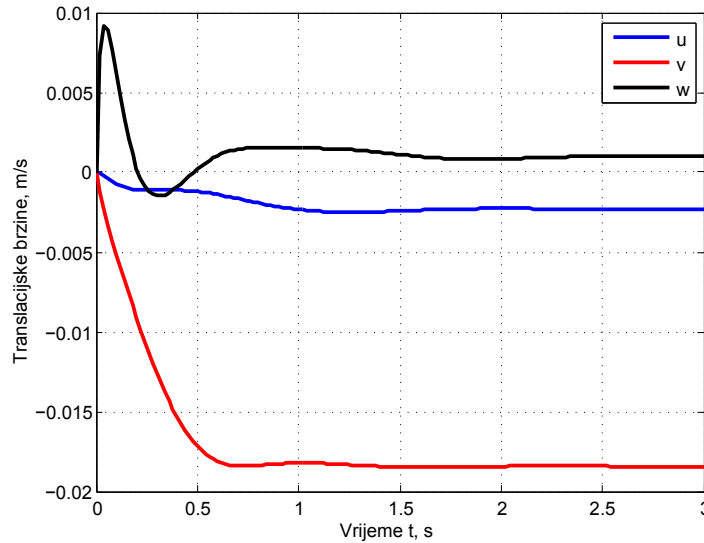
Regulator u oba slučaja stabilizira helikopter. Rotacijske brzine u oba su slučaja svedene na nulu, no javlja se lagani pomak od početnog položaja radi prisutnih stacionarnih vrijednosti translacijskih brzina različitim od nule, pa čak i vertikalne brzine w koja bi trebala biti jednaka nuli. Razlog tomu je što se dodavanjem regulatora u povratnu vezu promijenila dinamika sustava. Za nelinearni model vrijednost koja eliminira brzinu w je $u_{col} = 0,1026$, dok za linearni, na temelju kojeg se izračunava pojačanje regulatora K_{pp} , $u_{col} = 0,0938$. Usporedbom gornja dva slučaja, vidimo da je apsolutni iznos vertikalne brzine $|w|$ za vrijednosti $u_{col} = 0,0928$ i $u_{col} = 0,1026$ približno jednak.

Izračunavanjem novog iznosa u_{col} preko izraza

$$u_{col} = \frac{0,0938 + 0,1026}{2} \quad (5.10)$$

$$u_{col} = 0,0982$$

zatim ponovnim provođenjem simulacije, dobivamo brzinu w za jedan red veličine manji od brzine v , slika 5.7.



Slika 5.7: Odziv nelinearnog modela helikoptera s PP regulatorom $u_{col} = 0,0982$

Dodavanjem inicijalne vrijednosti upravljačkog signala $u_{col} = 0,0982$, brzine u i w svedene su na isti red veličine, dok je v za jedan red veličine veća.

Prilikom izrada linearnog modela helikoptera, dobili smo za brzinu \dot{v} izraz

$$\dot{v} = \left(1 + \frac{l_m}{l_t}\right) \cdot g \cdot \tilde{\beta}_{1s} + \tilde{\phi} \cdot g - \frac{115,147}{m \cdot l_t} \cdot \tilde{u}_{col} - \frac{6,5313}{m \cdot l_t} - \frac{1}{m} \tilde{u}_{ped} \quad (5.11)$$

Kao što vidimo, imamo jedan slobodni član na koji nemamo direktan utjecaj preko upravljačkih varijabli. Primjenom ovog dobivenog regulatora, uvijek ćemo imati prisutan poremećaj. U sljedećem koraku, izračunat ćemo matricu pojačanja linearnog kvadratičnog regulatora LQR uz poznate matrice sustava A , B , te matrica Q i R . Zatim ćemo navedeni poremećaj eliminirati proširivanjem jednim dodatnim članom [12].

5.2 Optimalni linearni kvadratični regulator

U prošlom poglavlju vidjeli smo da dobiveni regulator metodom podešavanja polova može stabilizirati helikopter, ali se javljaju translacijske brzine niskih iznosa. Te brzine uzrokuju lagano udaljšavanje od početne pozicije. Prilikom linearizacije uveli smo pogrešku time što smo zanemarili utjecaj jednog člana u izrazu za lateralnu brzinu \dot{v} .

$$\dot{v} = \left(1 + \frac{l_m}{l_t}\right) \cdot g \cdot \tilde{\beta}_{1s} + \tilde{\phi} \cdot g - \frac{115,147}{m \cdot l_t} \cdot \tilde{u}_{col} - \frac{6,5313}{m \cdot l_t} - \frac{1}{m} \tilde{u}_{ped} \quad (5.12)$$

Slobodni član je vremenski nezavisan, te djeluje na dinamički model, odnosno helikopter, kao poremećaj. Iz tog razloga nam je matrica poremećaja B_d prema izrazu 4.55 prethodno definirana nulama osim člana $B_{d-2,1}$ vezanog uz translacijsku brzinu v .

$$B_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Prema [12] poremećaj moguće je eliminirati proširenjem matrice pojačanja LQR . Prije toga, potrebno je prvo izraditi LQR regulator. Razmatrat ćemo ponovno slučaj da imamo mjerljive sve varijable stanja, odnosno da je matrica C jednaka jediničnoj matrici I .

Dobivene matrice sustava helikoptera vremenski su invarijantne, te sustav prikazujemo pomoću jednadžbi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Za pronalazak optimalnog rješenja, trebamo pronaći upravljački vektor koji minimizira kvadratični kriterij optimalnosti:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q(t)x + u^T R(t)u] \quad (5.15)$$

Dobiveni upravljački vektor imat će rješenje u sljedećem obliku:

$$u(t) = -R^{-1}B^T P x(t) \quad (5.16)$$

gdje je P realna simetrična pozitivno definitna matrica koja zadovoljšava algebarsku Riccatijevu matričnu jednadžbu [16]:

$$PBR^{-1}B^T P - PA - A^T P - Q = 0 \quad (5.17)$$

Gornja jednažba predstavlja sustav od $\frac{1}{2}n(n+1)$ kvadratnih jednažbi po elementima matrice P . Rješenje je jedinstveno ukoliko postoji pozitivno definitna matrica koja zadovoljava gornju jednažbu.

Indeks performanse korišten za pronalazak optimalnog rješenja u diskretnom obliku je:

$$I = \sum_{k=0}^N x_s^T(k)Qx_s(k) + u^T(k)Ru(k) \quad (5.18)$$

gdje su odabrane početne vrijednosti matrica Q i R s poznavanjem maksimalnih vrijednosti vektora stanja x i vektora ulaza u .

$$Q(i, i) = \frac{1}{x_{i,max}^2} \quad (5.19)$$

$$R(i, i) = \frac{1}{u_{i,max}^2}$$

Ovakvim određivanjem matrica Q i R ne osiguravamo nužno saturaciju vektora ulaza, prema tome trebamo izlaz iz regulatora, odnosno ulazne veličine u sustav helikoptera ograničiti na minimalne i maksimalne vrijednosti. Takvo ograničenje ulaznih varijabli može utjecati na stabilnost sustava, te trebamo provjeriti da li dobiveno rješenje, odnosno pojačanje, stvarno stabilizira sustav.

Odabrane su konačne vrijednosti matrica Q i R :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 132.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 132.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 132.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14.6 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

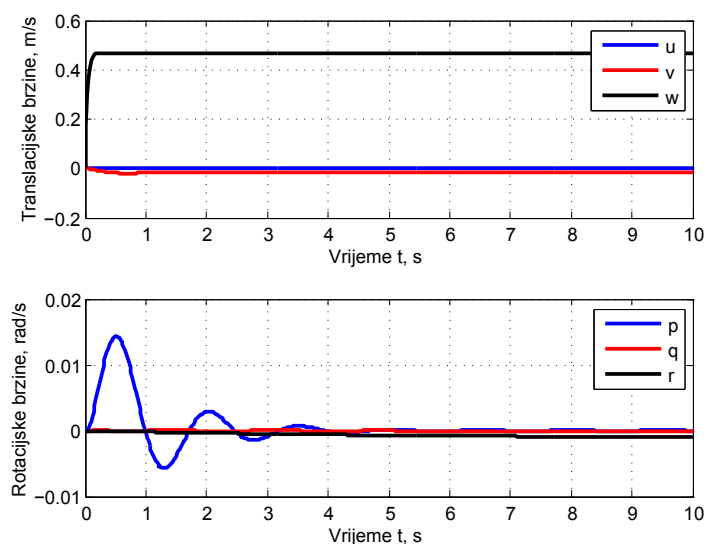
$$R = 10000 \cdot \begin{bmatrix} 32.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 42.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Dobivamo matricu pojačanja K_L :

$$K_L = \begin{bmatrix} -0.0265 & 1.5277 & -0.0144 & 0.8778 & 0.0241 \\ -1.5950 & -0.0252 & 0.0002 & -0.0142 & 1.6317 \\ -0.0000 & -0.0020 & -0.2135 & -0.0000 & 0.0000 \\ -0.0001 & -0.0709 & 0.0007 & -0.0097 & 0.0001 \end{bmatrix} \dots \quad (5.22)$$

$$\dots \begin{bmatrix} 0.0059 & 5.1295 & 0.1151 & 0.0004 & 12.6097 & -0.0681 \\ -0.0001 & -0.0881 & 7.1457 & -0.0000 & -0.0679 & 8.7810 \\ -0.0000 & -0.0004 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0003 & -0.0000 \\ 0.5086 & -0.1177 & 0.0004 & 0.0354 & -0.1232 & 0.0020 \end{bmatrix}$$

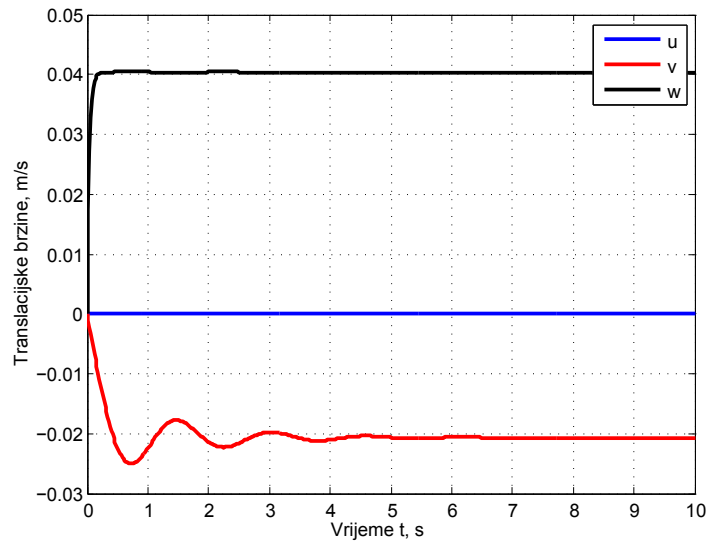
U *Matlab Simulinku* dodana su ograničenja ulaznih veličina, te LQ regulator pojačanja K_L koji ima mogućnost mjerenja svih varijabli stanja. Dobiveni su sljedeći odzivi:



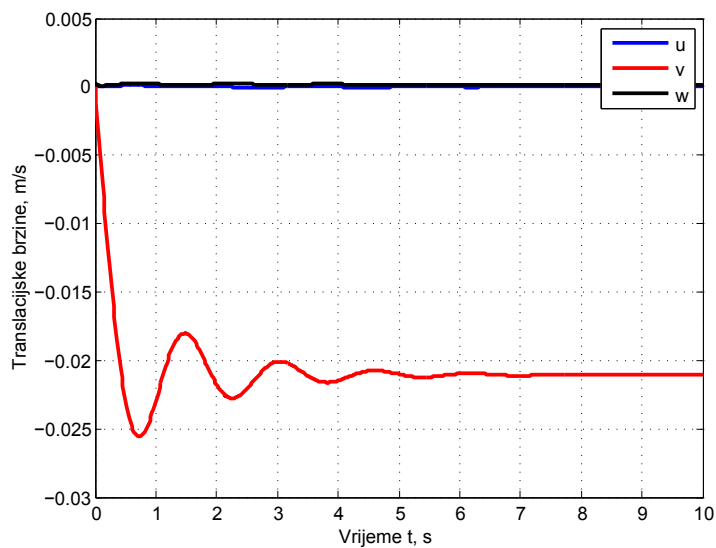
Slika 5.8: Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQ regulatorom

Dodavanjem kompenzacije gravitacijske sile upravljačkom varijablom $u_{col} = 0,0938$ prema lineariziranom izrazu 5.1 ovisnosti T_{MR} o u_{col} , smanjuje se translacijska brzina w za jedan red veličine.

Zatim uz postavljanje inicijalne vrijednosti kolektivnog kuta naprada glavnog rotora $u_{col} = 0,1026$ određenog pomoću simulacije nelinearnog modela helikoptera, brzina w je približno jednaka nuli, odnosno približno jednaka vrijednosti brzine u , slika 5.10. Brzina v je naravno i dalje prisutna, te istog reda veličine kao u slučaju primjene regulatora dobivenog metodom



Slika 5.9: Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQ regulatorom uz $u_{col} = 0,0938$



Slika 5.10: Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQ regulatorom uz $u_{col} = 0,1026$

podešavanja polova pojačanja K_p .

Simulacije nam pokazuju da rotacijske brzine trnu u nulu, dok translacijske brzine dostižu neku konačnu stacionarnu vrijednost. Iz toga zaključujemo da je helikopter stabiliziran, no ponovno se pojavljuje se lagano udaljavanje od početnog položaja kao i u slučaju regulatora s matricom pojačanja K_p . Slobodni član u izrazu 5.12 za translacijsku brzinu v djeluje

kao vremenski neovisan poremećaj. Poremećaj možemo prema [12] prikazati kao dodatni autonomni vremenski diskretni sustav:

$$\begin{aligned}x_d(k+1) &= \Phi_d x_d(k) \\ d(k) &= H_d x_d(k)\end{aligned}\tag{5.23}$$

gdje su Φ_d i H_d skalarne veličine jediničnog iznosa jer poremećaj djeluje samo na v , $x(k)$ je jednak konstanti K_d , odnosno slobodnom članu iz lineariziranog izraza za brzinu v .

$$\begin{aligned}x_d(0) &= K_d \\ K_d &= -\frac{6,5313}{m \cdot l_t} = -0,1226\end{aligned}\tag{5.24}$$

Sustav možemo zapisati u vremenski diskretnom obliku na sljedeći način

$$\begin{aligned}x_s(k+1) &= \Phi_s x_s(k) + \Gamma_s u(k) + \Gamma_d d(k) \\ y(k) &= H_s x_s(k)\end{aligned}\tag{5.25}$$

te ga preformulirati proširivanjem vektora stanja $x(k)$ u sustav

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_s(k+1) \\ x_d(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_s & \Gamma_d H_d \\ 0 & \Phi_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(k) \\ x_d(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_s(k) \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} H_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(k) \\ x_d(k) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.26}$$

Skraćeno zapisano preko jednadžbi

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= H x(k)\end{aligned}\tag{5.27}$$

Indeks performanse koji sada trebamo minimizirati je

$$I = \sum_{k=0}^N [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)]\tag{5.28}$$

koji je u biti isti kao u prethodnom slučaju, s jedinom razlikom što sada vektor stanja $x(k)$ i matrica Φ sadrži poznati poremećaj.

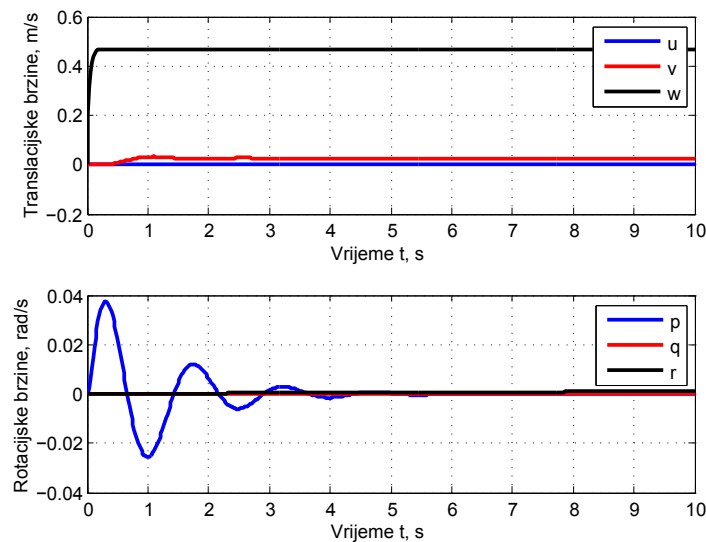
$$\begin{aligned}x(k) &= \begin{bmatrix} x_s(k) \\ x_d(k) \end{bmatrix} \\ Q_D &= \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_d \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.29}$$

gdje je matrica Q ista kao u prošlom slučaju, a matrica težina poremećaja je $Q_d = 0$. Uzmemo li sada gore navedene matrice Φ , Γ , Q_D i matrice R , dobivamo sljedeću matricu pojačanja:

$$K_{LD} = \begin{bmatrix} -0.0265 & 1.5277 & -0.0144 & 0.8778 & 0.0241 & 0.0059 \\ -1.5950 & -0.0252 & 0.0002 & -0.0142 & 1.6317 & -0.0001 \\ -0.0000 & -0.0020 & -0.2135 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0001 & -0.0709 & 0.0007 & -0.0097 & 0.0001 & 0.5086 \end{bmatrix} \dots \quad (5.30)$$

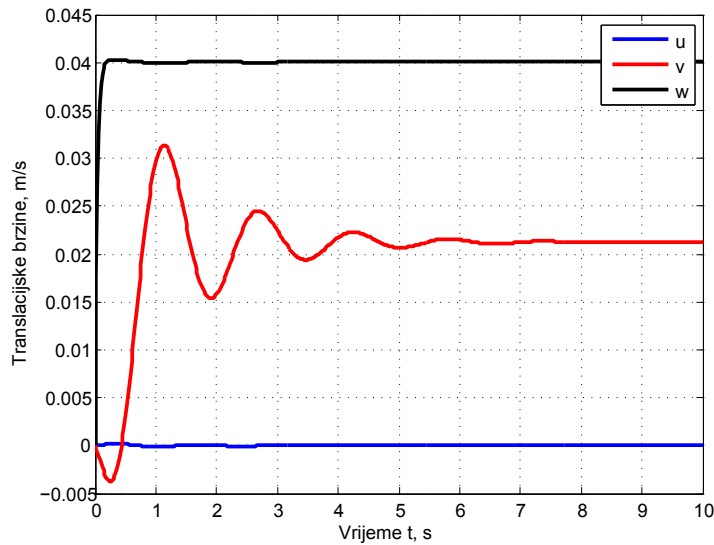
$$\dots \begin{bmatrix} 5.1295 & 0.1151 & 0.0004 & 12.6097 & -0.0681 & 0.5229 \\ -0.0881 & 7.1457 & -0.0000 & -0.0679 & 8.7810 & -0.0090 \\ -0.0004 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0003 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.1177 & 0.0004 & 0.0354 & -0.1232 & 0.0020 & -0.0120 \end{bmatrix}$$

Provedemo li ponovno simulaciju s regulatorom pojačanja K_{LD} uz $K_d = -0,1226$ izračunatog iz jednadžbe 5.24, dobivamo odzive brzina prikazanih na slici 5.11. Vertikalna



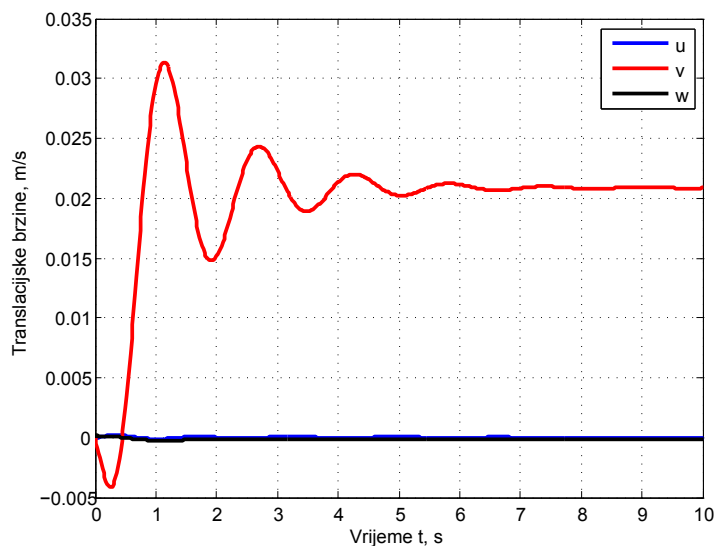
Slika 5.11: Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQR pojačanja L_d uz $K_d = 0,1226$

brzina w je znatno veća od brzina u i v , a rotacijske brzine trnu u nulu. Dodavanjem $u_{col} = 0,0938$ iz lineariziranog izraza za T_{MR} kao kod prethodnog LQ regulatora, konačni iznos brzine w postaje manji, slika 5.12.



Slika 5.12: Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQR pojačanja L_d uz $K_d = 0,1226$

Uzmemo li da je $u_{col} = 0,1026$, brzina w je približno jednaka nuli kao brzina u . Brzina v je ponovno za red veličine veća kao kod prethodnog LQ regulatora, te približnog iznosa, ali suprotnog smjera, slika 5.13.



Slika 5.13: Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQR pojačanja L_d uz $K_d = 0,1226$

Provedenom simulacijom s dobivenom matricom pojačanja K_{LD} uz pritom postavljeni $K_d = 0$ imati ćemo iste odzive kao s matricom pojačanja K_L . Uzevši u obzir da su u oba

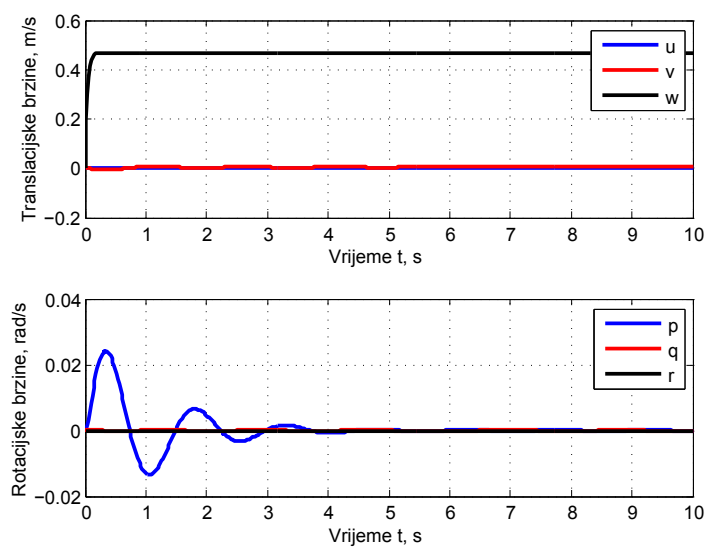
slučaja brzine v približno iste, ali suprotnog predznaka, postavljanjem K_d prema izrazu

$$K_d = \frac{K_{d,L} + K_{d,LD}}{2} \quad (5.31)$$

$$K_d = 0,0613$$

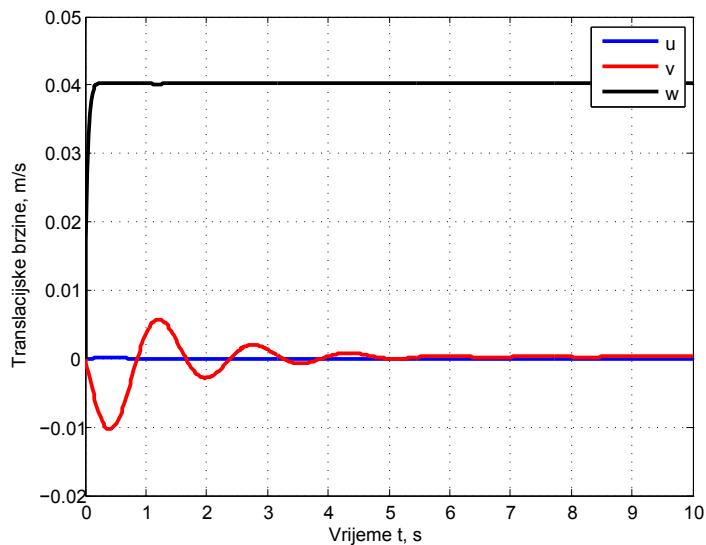
brzina v bi trebala s vremenom stacionirati u vrijednost približno jednakoj nuli.

Provedemo li ponovno simulaciju s istom matricom pojačanja K_{LD} uz K_d iz izraza 5.31 dobivamo odzive vidljive na slici 5.14.



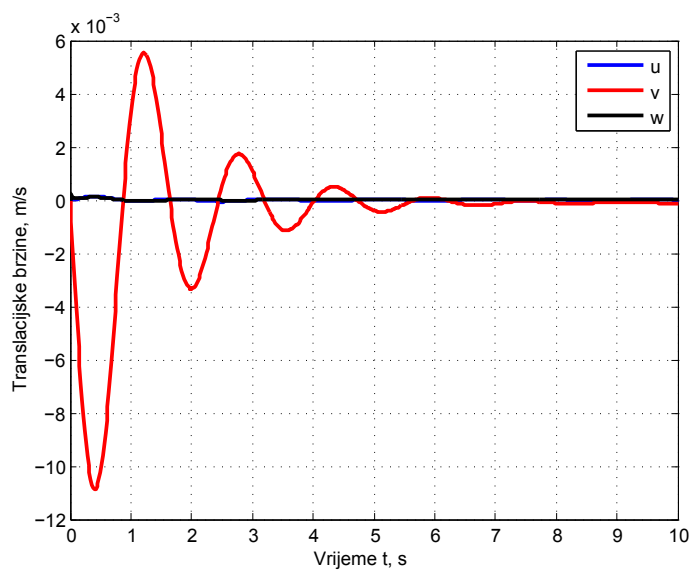
Slika 5.14: Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQR pojačanja K_{LD}

Zatim dodavanjem $u_{col} = 0,0938$, brzina w se smanjuje, ali je i dalje veća od ostalih translacijskih brzina, slika 5.15.



Slika 5.15: Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQR pojačanja K_{LD} uz $u_{col} = 0,0938$

Daljnijim povećanjem u_{col} na $0,0938$ dobivamo sve translacijske brzine približno jednake nuli, slika 5.16.



Slika 5.16: Odziv nelinearnog modela helikoptera s LQR pojačanja K_{LD} uz $u_{col} = 0,0938$

Na slici 5.16 vidimo da brzina v ima prigušeni oscilacijski odziv maksimalne amplitude reda veličine 10^{-2} u trajanju oko pet sekundi. Nakon pet sekundi brzine dosegnu konačnu vrijednost reda veličine 10^{-4} .

Iz konačnih dobivenih odziva zaključujemo da je helikopter ponovno stabiliziran u ravnotežnom letu. Možemo primjetiti da i kod LQ regulatora s pojačanjem K_{LD} ponovno se javlja pomak od početnog položaja. Primjenom regulatora pojačanja K_{LD} u odnosu na prethodne, pomak je sveden na vrlo mali iznos. Za potpunu eliminaciju, odnosno da sve brzine trnu u nulu, trebali bismo ponovno proširiti matricu K_{LD} . Proširenje se vrši na sličan način kao što smo proširili matricu pojačanja K_L . Više o tome može se pronaći u literaturi [12].

Poglavlje 6

Zaključak

Dinamički model helikoptera opisan je sustavom nelinearnih jednadžbi, te ima snažnu spregu, odnosno međusobnu ovisnost varijabli stanja. Iz tog razloga, sinteza regulatora nije jednostavna. Uz prethodno navedene pretpostavke, napravljen je linearni dinamički model helikoptera. Time su uvedene pogreške radi simplifikacije opisa dinamike helikoptera, ali nam je to omogućilo provođenje sinteze linearnih regulatora. U ovom radu izrađeni su linearni regulatori metodom podešavanja polova i optimalni regulator, odnosno regulator stanja i linearni kvadratični regulator. Oba regulatora osiguravaju stabilnost helikoptera u ravnotežnom letu. Simulacijom je pokazano da matricom pojačanja K_p prvog navedenog regulatora postizemo stabilnost helikoptera, ali se javlja konstantna brzina koja uzrokuje stalno prisutno udaljšavanje helikoptera od početne pozicije. Dodavanjem konstantne upravljačke pobude varijable u_{col} , smanjujemo vertikalnu brzinu. Prisutna lateralna brzina helikoptera nekoliko je puta veća od longitudinalne brzine. Naime, prilikom izrade linearnog dinamičkog modela helikoptera zanemarili smo konstantan poremećaj potiska repnog rotora.

Repni rotor ima ulogu stabilizacije položaja nosa. On mora proizvesti silu na određenom kraku tvoreći moment koji će poništiti djelovanje momenta glavnog rotora. Taj potisak uzrokuje prisutnu lateralnu brzinu. Stabilizaciju je moguće postići promjenom smjera potiska glavnog rotora tako da poništi djelovanje repnog rotora.

U radu su korišteni podatci o helikopteru *Yahmaha R-50*. Poznavanjem parametara nekog drugog helikoptera i ponovnim određivanjem matrica sustava linearnog dinamičkog modela, može se izvršiti sinteza regulatora dotičnog modela helikoptera. Svi parametri moraju biti poznati, a netočnost parametara može prouzročiti čak i nestabilnost helikoptera. Prilikom sinteze regulatora stanja metodom podešavanja polova, uzet je u obzir dodatni kriterij koji

uključuje odstupanja parametara linearnog sustava od stvarnih vrijednosti. Dodatnim kriterijem dobiven je robustan regulator stanja.

Prilikom sinteze linearnog kvadratičnog regulatora, kriterijem optimalnosti dali smo naglasak na uštedu energije. Implementiranjem optimalnog regulatora, ponovno nam se javlja konstantna brzina helikoptera. Prisutnu brzinu smanjili smo na približno jednak iznos dodavanjem konstantne upravljačke pobude varijable u_{col} kao u slučaju regulatora stanja. Smanjenje izražene lateralne brzine ostvarili smo proširivanjem linearnog dinamičkog modela helikoptera s jednom dodatnom varijablom stanja koja uključuje poremećaj. Provođenjem sinteze takvog regulatora, dobili smo u simulaciji relativno malu prisutnu brzinu.

Svaki regulator ima svoje prednosti i nedostatke. Implementacijom regulatora na simulacijskom modelu helikoptera pokazano je da su oba regulatora u stanju dovoljno smanjiti brzinu helikoptera. Nedostatak korištenih regulatora je što većim odstupanjem od točke linearizacije, dinamika helikoptera postaje nestabilna. Daljnji nedostatak je što vektor stanja mora biti u potpunosti mjerljiv ili se može rekonstruirati observerom. Helikopter ima najčešće mogućnost mjerenja translacijskih i rotacijskih brzina, te položaj nosa u odnosu na sjever, odnosno *Eulerov* kut ψ . Dakle, helikopter ima mjerljivost sedam od jedanaest varijabli stanja korištenih u radu tako da prije implementacije dobivenih linearnih regulatora na realnom modelu, trebamo izraditi observer stanja.

Literatura

- [1] Seddon, J., Newman, S.: Basic Helicopter Aerodynamics, Wiley, London, 2011.
- [2] Castillo, P., Lozano, R., Dzul, A. E.: Modelling And Control of Mini-Flying Machines, Springer, London, 2005.
- [3] Prouty, R. W.: Helicopter Performance, Stability and Control, PWS Publishers, 1986.
- [4] Raptis, I. A., Valavanis, K. P.: Linear and Nonlinear Control of Small-Scale Unmanned Helicopters, Springer, 2011.
- [5] Padfield, G. D.: Helicopter Flight Dynamics: The Theory and Application of Flying Qualities and Simulation Modeling, AIAA Educational Series, 1995.
- [6] Tewari, A.: Atmospheric and Space Flight Dynamics, Birkhäuser, Berlin, 2007.
- [7] Munzinger, C.: Development of a Real-time Flight Simulator For an Experimental Model Helikopter, Georgia Institute of Technology - School of Aerospace Engineering, Magistarski rad, 1998.
- [8] Heffley, R. K., Mnich, M. A.: Minimum-Complexity Helicopter Simulation Math Model, NASA, 1988.
- [9] Mustafic, E., Fogh, M., Pettersen, R.: Non-Linear Control of a Rotary Unmanned Aerial Vehicle, Aalborg University, Magistarski rad, 2005.
- [10] Koo, T. J., Ma, Y., Sastry, S. S.: Nonlinear Control of a Helicopter Based Unmanned Aerial Vehicle Model, 2001.
- [11] Cai, G., Chen, B. M., Heng, L. T.: Unmanned Rotorcraft System, Springer, Berlin, 2011.
- [12] Sorensen, O.: Optimal regulering, Materijali za predavanje, Aalborg, 1995.

-
- [13] Kautsky, J., Nichols, N. K., Dooren, P. V.: Robust Pole Assignment in Linear State Feedback, *Internacional Journal of Control* 41, str. 1129-1155, 1985.
- [14] Božić, Ž.: Osnove konstrukcije helikoptera, *Materijali za predavanja*, Zagreb, 2010.
- [15] Vrdoljak, M.: Osnove aerodinamike i mehanike leta helikoptera, *Materijali za predavanja*, Zagreb, 2010.
- [16] Kasać J.: Vođenje tehničkih sustava, *Materijali za predavanja i vježbe*, Zagreb, 2007.
- [17] Keane, A. J, Nair, P. B.: *Computational Approaches for Aerospace Design*, Wiley, Chichester, 2005.
- [18] Bullo, F, Fujimoto, K.: *Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*, Springer, Berlin, 2007.
- [19] Cook, M. V.: *Flight Dynamics Principles*, Elsevier, Amsterdam, 2007.
- [20] Barnard, R. H., Philpott, D. R.: *A Description of The Physical Principles of Aircraft Flight*, Pearson, London, 2010.
- [21] Geering, H. P.: *Optimal Control with Engineering Application*, Springer, Berlin, 2007.

Dodatak A

Helikopter Yamaha R-50

U radu su korišteni podatci o helikopteru Yamamha R-50 prikazani u tablici ispod [7].

Tablica A.1: Parametri helikoptera Yamaha R-50

Oznaka	Jedinica	Opis
$R = 1,5392$	$[m]$	Promjer glavnog rotora
$R_t = 0,26$	$[m]$	Promjer repnog rotora
$l_m = 0$	$[m]$	Udaljenost između CoG i centra glavnog rotora u smjeru x osi
$y_m = 0$	$[m]$	Udaljenost između CoG i centra glavnog rotora u smjeru y osi
$h_m = 0,2$	$[m]$	Udaljenosti između CoG i centra glavnog rotora u smjeru z osi
$h_t = 0$	$[m]$	Udaljenost između CoG i centra repnog rotora u smjeru z osi
$l_t = 1,2$	$[m]$	Udaljenost između CoG i centra repnog rotora u smjeru x osi
$m = 44,38$	$[kg]$	Masa helikoptera
$I_{xx} = 1,467$	$[kg \cdot m^2]$	Moment inercije oko x osi
$I_{yy} = 4,577$	$[kg \cdot m^2]$	Moment inercije oko y osi
$I_{zz} = 4,407$	$[kg \cdot m^2]$	Moment inercije oko z osi
$\rho = 1,2$	$[kg/m^3]$	Gustoća zraka
$\gamma = 5,4037$	$[-]$	Lockova konstanta
$\Omega = 91,1062$	$[rad/s]$	Kutna brzina glavnog rotora
$A = 7,443$	$[m^2]$	Površina glavnog rotora
$\sigma = 0,0446$	$[-]$	Krutost rotora
$m_b = 0,3$	$[kg]$	Masa lopatice rotora
...

Oznaka	Jedinica	Opis
$I_b = 0,8675$	$[kg \cdot m^2]$	Inercija lopatice u odnosu za centar rotora
$B = 2$	$[-]$	Broj lopatica
$a = 4$	$[1/rad]$	Nagib pravca uzgona
$c = 0,1079$	$[m]$	Srednja duljina tetive
$i_s = 0$	$[rad]$	Inicijalni zakret lopatice
$e_{MR} = 0$	$[m]$	Udaljenost između centra rotora i zgloba mahanja
$R_{CR} = 0,5$	$[m]$	Udaljenost centra i vanjskog radijusa kontrolnog rotora
$R_{CR,P} = 0,42$	$[m]$	Udaljenost centra i unutarnjeg radijusa kontrolnog rotora
$C_T = 0,00226$	$[-]$	Koeficijent potiska za ravnotežni let
$K_{MR} = 0,2$	$[-]$	<i>Bellovo</i> pojačanje
$K_{CR} = 0,8$	$[-]$	<i>Hillovo</i> pojačanje
$A_{Q,MR} = 0,00036$	$[-]$	Koeficijent otpora glavnog rotora
$B_{Q,MR} = 0,01$	$[-]$	Koeficijent otpora glavnog rotora