広島経済大学研究論集
第38巻第2号　2015年9月

教科書の問題理解に関する方略を基にした授業づくりに関する研究*

――中学校数学の題材を事例にして――

平岡　賢治**・野本　純一***

1.　は　じ　め　に

数学の授業の導入時に教師が提示する問いや課題に対する生徒達の活動が積極性に乏しいと感じることがよくある。その際，筆者達は次のような疑問を持つ。「教師は，生徒が理解できるような説明や問題の提示をしているのだろうか？」「教師は，これまでの学習で，当然理解できるはずだ！と思って，授業を進めているのだろうか？」。実際，授業の導入時に，教師は授業の学習内容を説明したり，問題の説明や提示をしたりすることから始める。次に，問題を解くように指示する。そして，生徒達は一斉にノートに提示された問題を解き始める。しかし，その実態は生徒の多くは問題を解くのではなく，教師の板書を書き写す活動から始めるのである。彼らは問題を十分に理解できないまま授業が始まり，その結果として，何をしていいかわからず，とりあえずノートをとるなど，数学的活動[1)]が積極性に乏しいものになり，教師主導の授業になることが多い。

筆者達はこれまで，このような授業ではなく，生徒達に積極的な数学的活動を促す授業づくりに取り組んできた（平岡・野本（2015a・b））。単に，授業は教科書の内容や問題を解くだけではなく，生徒の数学的活動を促し，その結果，より活発な授業づくりを行うことが，授業内容の理解にとって重要である。そこで，本稿は，生徒に数学的活動を促す視点から教科書の問題を考察し，その問題理解の方略を提案し，それを基にした授業づくりについて具体例を通して考察する。

2.　本 稿 の 目 的

教育学における教師の知識に関する研究はShulman（1986）による知識のカテゴリーの研究から派生している。その研究の中で，Shulman（1987）は，教師が保有している知識の全体像を示す「知識基礎（the Knowledge Base）」（p. 8）を提示している。「知識基礎」は７つの知識で構成され[2)]，その中に，教科内容に関わるものとその授業実践をつなぐ知識として，Pedagogical Content Knowledge（以下PCKと略記）を位置付けている。それは，「教授学習内容と教授法が結合したものであり，教師に独特のものである。また，教師の持つ専門的理解の特別な形式」（Shulman, 1987, p. 8）であるとし，教授学習内容を基本としつつ，教育学的知識と関わり，授業を想定した，教材に関する最も適切な知識である。また，それは日々の実践に取り組む教師独特の知識である。さらに，PCKの実際を理解するために，教師の学習過程を，以下のような「教育学的推論と行為（pedagogical reasoning and action）」と呼んで定式化している[3, 4)]。

・理　　　解（comprehension）

* 本稿は，全国数学教育学会第41回研究発表会（広島大学）で口頭発表した論文を加筆・修正したものである。

** 広島経済大学経済学部教授
*** 長崎市立式見中学校教諭

・翻　　　案（transformation）
・指　　　導（instruction）
・評　　　価（evaluation）
・省　　　察（reflection）
・新しい理解（new comprehension）

この教育学的推論の思考過程を通して，Shulman（1987）は，「翻案」の過程において PCK が最も表出すると指摘し，次のように述べている。

> 「教師はまず内容と目標の両方について理解する必要があるということは，教師を他の人々から特に区別するものではない。我々は，数学の専攻生が数学を理解し，歴史の専門家が歴史を理解していることを期待する。しかし，教師の知識ベースを区別するための鍵は，内容と教授法の交差するところ，つまり教師が持っている学問内容についての知識を教授（学）的に力強く，さらに学習者の多様な能力や背景に対応できるような形態に翻案する能力にある。」[5]（p. 16）

そして，「翻案」の詳細を下位プロセスとして，次のように分節化している[6]。

・教材の準備（preparation）
・表　　　現（representation）
・選　　　択（selection）
・適　　　合（adaptation）
・仕　立　て（tailoring）

つまり，授業づくりでは，教科書で扱われている教材の内容を理解すると同時に，教育目標やこれまでの学習内容・生徒達の特性を考慮しながら，教材の提示や教授方法を決定することが重要であり，そのためには，学習内容の知識やカリキュラムについての知識などを活用する必要があるということである。

数学科の授業づくりを「翻案」に沿って考えると，授業で扱う教科書の問題を，数学的内容や教科書の扱い方などから考察するとともに，生徒の数学的活動を促す視点から，学習内容とその広がりを精査する。次に，生徒が理解できる場面や表現・操作を設定し，それらを数学的知識に対象化していくように授業を構成することと考えることができる。

そこで，実際の数学科の授業づくりに求められる点は，それらを支える数学教師のスキル・方略の顕在化である。その点について，Ball et al.（2008）は，数学科の領域で，Shulman の PCK を以下の図１のように図式化し，知識のカテゴリーに下位カテゴリーを設けて，指導の為の数学的知識（Mathematical Knowledge for Teaching, MKT）として６領域の区分を設定している。

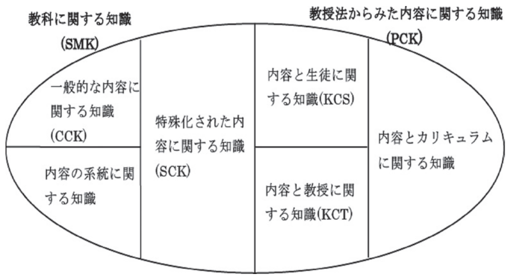


図１　指導の為の数学的知識[7]（Ball et al., 2008, p. 403）

これらの区分は，教授学的三角形の構成要素である，教材・生徒・教師それぞれに関する知識だけでなく，それらの関連性に焦点を当てた知識を提唱しており，授業づくりを行う際の教師が有する知識を分析する上で有用な枠組みになる。しかし，指導の為の数学的知識をカテゴリー化するあまり，それらが分離的に捉えられ，また，それらの知識が静的になりがちである（Ball et al., 2008）。したがって，授業づくりにおいては，これらを統合的に捉えることが必要である。

そのために本稿では，授業づくりを支える教

師のスキル・方略について，次の①，②の視点について考察を行う。

① 筆者達が提案している，教師が授業で使用する教科書の問題を数学的活動の視点から理解する方略（平岡・野本（2015a・b））
② 教科書の問題を，Shulman（1987）の「翻案」の下位プロセス「表現」に焦点を当て，①の方略をもとで具体化

筆者達が「翻案」の下位プロセス「表現」に焦点をあてる理由は，「表現」は教師が教えるべき教育内容を学習者が理解できる表現に改める過程であり，「表現」の具体化は，生徒の理解を促す場面の設定やその表現と本質的に関わることを通して，さらに数学的な知識に対象化するプロセスにつながるからである。

3. 教科書の問題理解に関する方略

授業は，「教科書を教えるのではなく，教科書で教える」ことが重要である。このことは，教師が教科書で扱われる内容や問題の知識だけではなく，生徒が知識を生成する過程やそれらを活用する過程，生徒が数学的知識を構成するための望ましい学習過程をそれぞれ理解することが重要であることを示唆している。そして，そのためには，教師が教科書を理解する方法，授業構成の過程やその方法の理論化が必要とされている（Remillard, 2009）。

そこで，筆者達は，数学教師が授業で使用する教科書の問題を生徒の活動の視点から理解する方略について研究を進めており，**「教科書の問題理解に関する方略」**（以下「方略」と略記）を提案した（平岡・野本（2015a・b））。また，教師の授業づくりの視点をさらに考察し，本稿では「方略」の視点3を，表1のように修正し，新たに提案することとした。

表1　教科書の問題理解に関する方略

視点1	数学化[8]（具体的な事象を数理的に捉える）の活動として，操作や図表示，帰納的な考え方などの数学的活動を取り入れること
視点2	定式化[8]（数学的な課題を設定する）の活動として，数学化で得られた結果を既習内容と関連させることや数学的不変性の考察などを通して，数学的性質を見いだすこと
視点3[9]	生徒個々のインフォーマルな数学的知識から，授業におけるコミュニケーションや数学的活動を通して，フォーマルな数学的知識を見出す活動を行うこと

視点1，視点2について，本研究では，数学的活動を理解する枠組みとして，平岡・宮内（吉田）（2006）が設定した，表2の「算数・数学的活動を促す5段階」，図2の「算数・数学的活動の視点に立った授業理解の枠組み」を拠り所にした。

表2　算数・数学的活動を促す5段階（平岡・宮内，2006，p. 203）

①	数学化の活動 具体的な場面における問題の数学化（具体的な事象を数理的に捉える）活動
②	定式化（課題の設定）の活動 具体的な事象を数学的に定式化（数学的な課題を設定する）活動。理想化・単純化・理想化ともいえる。
③	考察・処理の活動 既習の知識や数学的な考え方を基にした数学的な考察・処理活動
④	反省・適用・応用の活動 数学的な思考過程や数学的に得られた事柄をより一般的な場面において反省したり（振り返ったり），適用したり，応用したりする活動
⑤	発展・創造・文化の享受の活動 さらなる数学的な方法の広がりを導く発展的・創造的な活動，論理的体系性をもった数学文化を享受する活動

この枠組みは，教師の授業力向上を支援するための算数・数学的活動の視点に立った授業理解の枠組み（平岡・宮内，2008）である。また，小学校教員養成の学生がマイクロティーチングを用いた授業研究における，授業を分析する視点（Molina, R., Fernandez, M. L., & Nisbet, L., 2011）にも活用されている。

授業づくりにおいて，表2の「①数学化の活

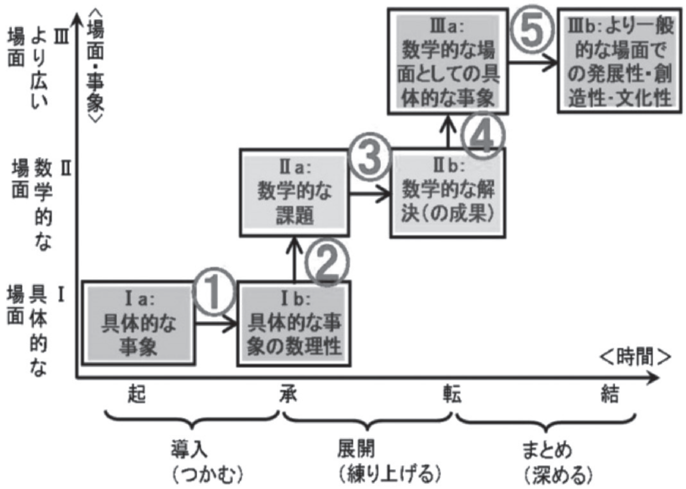


図2　算数・数学的活動の視点にたった授業理解の枠組み（平岡・宮内，2006，p. 203）

動」，「②定式化（課題の設定）の活動」では，具体的な事象を数理的に捉える活動，さらには，数学的に定式化する活動を行う。言い換えれば，具体的な事象を数学的な課題に翻訳する活動である。このような場面では，生徒達の既習内容からの導出だけではなく，教師の役割が不可欠であるという指摘（平岡・宮内，2008; Hiraoka and Yoshida-Miyauchi, 2007）がある。筆者達は，これらの活動を生徒の立場に立って具体化することが，生徒に数学的活動を促す授業づくりにとって大切であると考えている。そこで，平岡・野本（2015a）は，具体的な授業実践とその考察を通して，表1の視点1・視点2を提案した。

視点3について，筆者達は思考活動において日常経験や具体物，絵図などの外的に結びついた知識，すなわち，インフォーマルな知識（Mack, 1990）を用いて考察する。授業では生徒個々のインフォーマルな数学的知識を生徒どうしや生徒・教師のコミュニケーションを通して，授業のめあてであるフォーマルな数学的知識に練り上げることに焦点をあてた研究が行われている（例えば，布川，1993；吉田・河野，2003；石井，2012)。これらの研究では，生徒が主観的・直観的に持っている素朴な知識や既習の知識に着目し，授業づくりにおいても，教師が学習内容を，生徒の素朴な知識や既習の知識を基に学習場面を構成している。

そこで，筆者達は，Freudenthal（1968）の「人間の活動としての数学」という数学観を背景に（Gravemeijer, 1997; van den Heuvel-Panhuizen, 2003），授業において，生徒にとって経験的に現実的であるような問題場面を取り上げながら，インフォーマルな推論を数学化する過程を重視している Realistic Mathematics Education（RME）理論を手がかりに，具体的事例の考察を通して，視点3を提案した（平岡・野本（2015b））。

教師は，数学的形式やそれらの操作に関する方略になれ親しんでいる。しかし，授業では，生徒が初めに行う形式化されていない数学的活動から，より洗練された数学的概念を形成する過程が重要になる。David et al.（2008）も，教師教育の観点から，形式化されていない表現や形式化につながる表現を具体的に調べることが，学習過程や生徒が用いる方略に考える際の支えとなると指摘している。そこで，筆者達は，形式化されていない数学的活動から，授業として

のフォーマルな数学に至るまでの過程を具体的に考察する手立てとして「方略」を提案する。なお，この「方略」は，今後の研究を通して，さらに精査・修正を継続することが必要である。

次節では，Shulman（1986）の「翻案」の中でも「表現」に焦点をあてて，筆者達が提案した「方略」をもとに教科書で扱われている問題について具体的に考察する。

4.　具 体 的 事 例

全国・学力学習状況調査の結果（2013）でも明らかなように，全体的な状況として，「数学的に表現したり，数学的に表現された事柄を読み取ったりすること」（p. 8）が課題の１つである。そこで，具体的事例については，中学校数学の中で，事象を数学的に表現する例として，今回は図形の証明の問題と連立方程式の文章題を取り上げる。まず，各問題の課題等をまとめた上で，「方略」の視点に沿って「表現」の過程を具体的に記述する。

4.1　図形の証明（中学校２年）

この問題では，１点を共有する２つの正三角形を考える。このとき AE＝DB を証明するために，導入に，△ACE≡△DCB であることに気づかせることが大切になる。

ただ，生徒達にとって，問題文と図のイメージが捉えにくく，

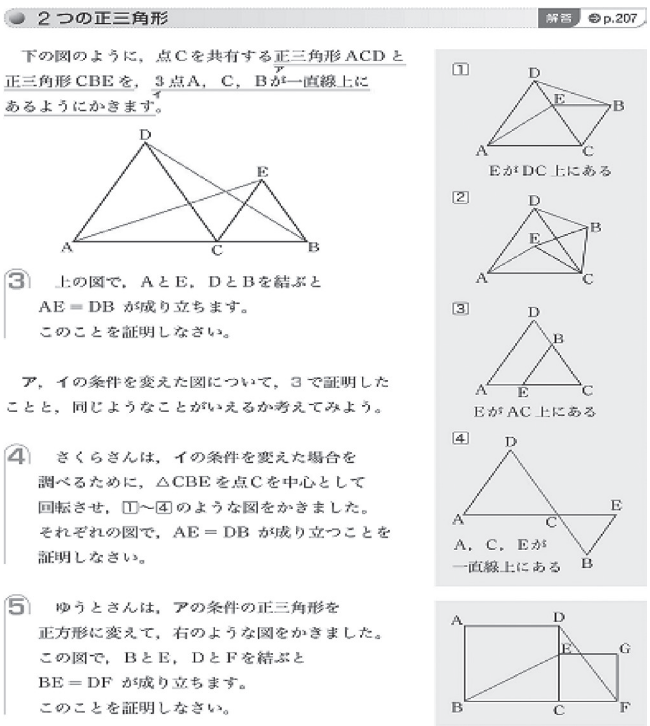
・△ACE と△DCB に着目すること

・この２つの三角形の合同を示すこと

などに気づくのはなかなか難しい。そこで，AE＝DB が成り立つことに気づかせるための方略が必要になる。

例えば，

① AE＝DB を確認するために，図を描いて実測したり，コンパスを用いて２つの長さが等しいことを確認したりすることができる。



２つの正三角形　解答 ➡p.207

下の図のように，点Cを共有する正三角形ACDと正三角形CBEを，３点A，C，Bが一直線上にあるようにかきます。

3　上の図で，AとE，DとBを結ぶと AE＝DB が成り立ちます。このことを証明しなさい。

ア，イの条件を変えた図について，３で証明したことと，同じようなことがいえるか考えてみよう。

4　さくらさんは，イの条件を変えた場合を調べるために，△CBEを点Cを中心として回転させ，1～4のような図をかきました。それぞれの図で，AE＝DB が成り立つことを証明しなさい。

5　ゆうとさんは，アの条件の正三角形を正方形に変えて，右のような図をかきました。この図で，BとE，DとFを結ぶと BE＝DF が成り立ちます。このことを証明しなさい。

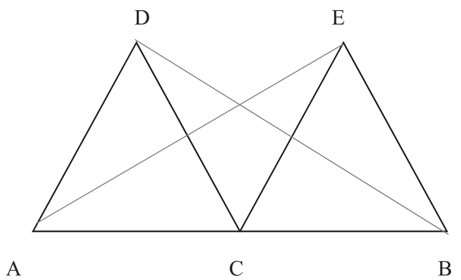
東京書籍　新しい数学２　p. 201

②　２つの合同な三角形を描いて，AE＝DB に気づくことができる。

このような考察を基に，以下のような導入問題を提示することができる。

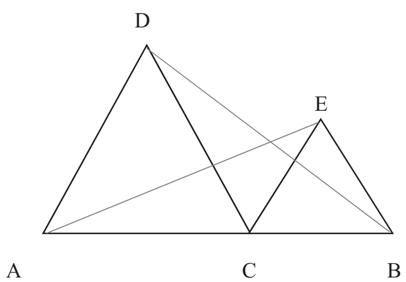
【視点１】

例えば，次の図のように，２つの正三角形△ADC と△BEC が合同である場合を提示する。すると，直観的に AE＝DB となることに気づく生徒も多いと考えることができる。



そこで，この直観から図形の性質を用いて説明するためには，△ABE≡△BAD，△ACE≡△BCD のように，三角形の合同を用いるとよいという見通しを立てることができるであろう。このことから，改めて問題の図で考えさせる。

【視点２】



AE＝DB を示すために，必要な既習事項は，【視点１】で述べたように，２つの三角形の合同である。そこで，図のなかで，線分 AE を辺にもつ三角形，線分 BD を辺にもつ三角形に気づくことや，線分 AC，CB を辺にもつ２つの三角形に視点をあてることなどの活動を通して，これらを辺にもつ２つの合同な三角形に視点をあてることを促していく。次のような三角形が見つかる。

線分 AE が含まれる三角形

・・・△ACE，△ABE，△ADE

線分 BD が含まれる三角形

・・・△ABD，△CBD，△EBD

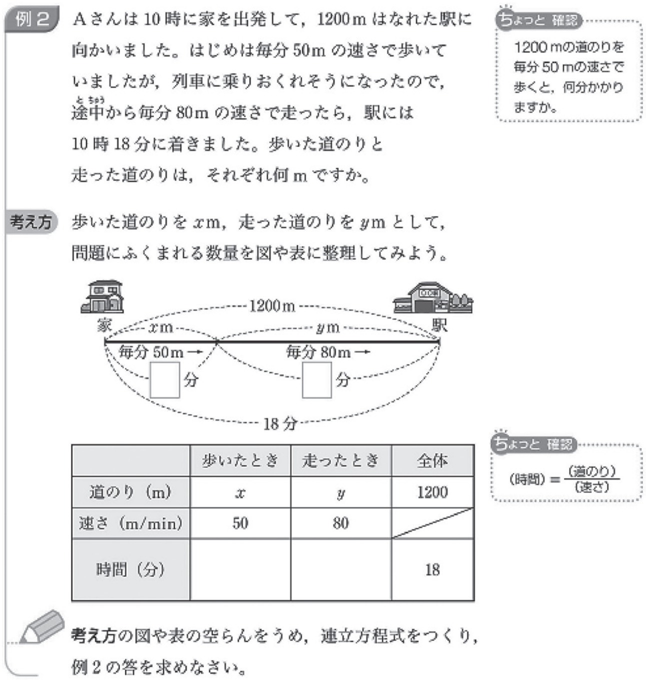
以上のような三角形を見つける活動を通して，【視点１】の段階で出てきた三角形の合同の中で，△ACE と△DCB が合同であるという見通しをもつことを期待する。そして，既習の正三角形であることにつながり，理由を「それぞれの辺の長さが等しい」，「正三角形の１つの角度が60°である」などを想起することから，△ACE≡△DCB に帰着させていく。

【視点３】

教科書の図だけでは，この問題の目的である AE＝BD であることを実感しながら証明していくことはなかなか難しい。そこで，点 C が辺 AB 上の中点の場合を考えると，直観的に AE＝DB となることに気づかせるようにするとともに，合同な三角形を見つける多様なアプローチを仕掛けることができる。そして，教科書の図に戻ることで，直観から，等辺，等角など現単元の既習の内容に制限されていき，結果として，三角形の合同条件を使って，AE＝DB を使った証明に帰着させていく。

4.2　連立方程式の文章題（中学校２年）

この問題は，道のり・時間・速さに関する文章題である。道のり・時間・速さの関係については小学校６年で学習し，中学校１年でも利用する。これは伴って変わる量であり，全国学力学習状況調査の結果も悪い。その理由として関



例２　Aさんは10時に家を出発して，1200mはなれた駅に向かいました。はじめは毎分50mの速さで歩いていましたが，列車に乗りおくれそうになったので，途中から毎分80mの速さで走ったら，駅には10時18分に着きました。歩いた道のりと走った道のりは，それぞれ何mですか。

ちょっと確認
1200mの道のりを毎分50mの速さで歩くと，何分かかりますか。

考え方　歩いた道のりをxm，走った道のりをymとして，問題にふくまれる数量を図や表に整理してみよう。

	歩いたとき	走ったとき	全体
道のり（m）	x	y	1200
速さ（m/min）	50	80	
時間（分）			18

ちょっと確認
$(時間)=\frac{(道のり)}{(速さ)}$

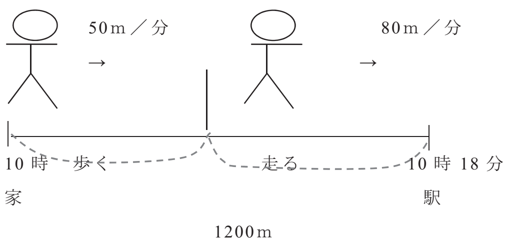
考え方の図や表の空らんをうめ，連立方程式をつくり，例２の答を求めなさい。

東京書籍　新しい数学２　p. 46

数関係にある２つの量に関する問題を理解することの難しさが挙げられる。例えば，時間や速さは抽象的な概念であること，速さは距離と時間から求められる内包量であることなどがある。問題理解の方略の１つに問題文を図で表すことは，算数科でも学習している。問題文を図で表し，歩くことから走ることに変えた地点を具体的に図に点を定めることは，数学化への第一歩となる。

【視点１】

まず，以下のように，歩いた地点と走った地点が切り替わる地点を仮定することで，２つの動きを図表示することができ，このことを通して問題文のモデル化につなげるきっかけができる。



次に，上の線分図に問題文の情報を書き加えることで，問題文に含まれている新たな情報に気づかせ，それらの数値化を通して生徒個々のインフォーマルな数学化へつなげることができる。

【視点２】

この問題では歩いた道のりと走った道のりをそれぞれ求める。問題解決の方略の１つとして，求める値を未知数で表し，それを式で表すことがある。ここでは，未知数２つを用いることになる。だから，文章の中にある関係を読みとり，未知数２つの関係を立式することになる。そこで，歩いた道のりをx m，走った道のりをy mとおく。すると，視点１の活動で用いた図の中に，問題文の情報や新たに求められた情報を記入したり，次の表にまとめたりすることができる。

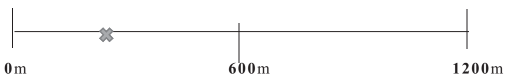
	歩いた道のり	走った道のり	実際の合計
道のり	x	y	1200
時　間	$x \div 50 = \dfrac{x}{50}$	$y \div 80 = \dfrac{y}{80}$	18

上の表から，歩いた時間も走った時間もそれぞれの距離と速さを用いて表すことができる。そして，不変量であるそれぞれの合計に注目することで，次のような連立方程式を立式することができる。

$$x + y = 1200$$
$$\frac{x}{50} + \frac{y}{80} = 18$$

【視点３】

上の図のように，歩くことから走ることに変わる地点を決める活動では，個々の生徒はそれぞれ異なる地点を選択することが予想される。



しかし，これを連立方程式で表示すると同じ式になること，同じ答になることに気づく。これは，

図 ——→ 式 ——→ 答
インフォーマル　フォーマル　フォーマル

という活動と考えることができる。さらに，このような設定により，未知数に関する等式の関係を構成するきっかけを与えることができる。そして，そこでの気づきを，x, y を使った数学的な関係に対象化させていくことができる。

5.　ま　と　め

筆者達は，Shulman（1986）の提示した教科内容に関わるもとと授業実践をつなぐ知識である PCK の「翻案」，中でも「表現」の過程の具現化が，生徒達に数学的活動を促す授業づくりの方向性を示唆していると考えている。そこで，これまで授業づくりを支える教師のスキル・方略の１つについて研究を進め，授業実践とその考察を通して「方略」（平岡・野本（2015a・b））について提案してきた。

本稿では，「方略」で提案している３つの視点に立ち，数学科の授業において生徒達が数学化や定式化の活動を通して，生徒個々のインフォーマルな数学的知識を見出す活動を促す問題場面の具体的な設定について実践的な考察をしている。提示する問題場面を，これまでの既習事項と関連させることで，生徒達は学習したことの振り返りを通して，問題場面の理解ができるとともに，数学的な不変性を捉えることができるようになる。このように，「翻案」の「表現」の過程を具体的に考察していくことは，数学教師の普段の授業づくりなどにおいて，大きな効果を与えることができる。

数学教師は，表記の観点で言えば，数学の対象表記に慣れ親しんでいる。しかし，生徒の学習の観点で言えば，平林（1973）が指摘しているように，生徒のメタ表記を具体的に把握し，その対象化を図ることが大切である。観察可能な表記から生徒の思考を見出したり，表記と記号とのつながりを具体的に考察したりすることは，数学教師にとって重要であり（Presmeg, 2006），本稿で考察したことは，そのことを考察する具体的な材料になる。

そして，「翻案」の「表現」を具体的に考察していくことは，教室において生じ得る数学学習に関する教師の予測につながる。

今後の課題として，本稿で提案した視点を教科書で扱われている他の問題についても考察・実践を通して，授業づくりにより役立つ実践的な方略を提案できるよう考察を進めていく。また，その授業づくりにおいて生徒の思考やコ

ミュニケーションを促す教師の役割についても言及した上で授業実践を行っていきたい。

注

1) 中学校学習指導要領解説数学編（2008）によれば，数学的活動は「生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」（p. 52）と規定されている。それは，小学校においては，算数的活動と呼ばれている。算数・数学的活動は，小学校・中学校・高等学校の算数・数学科の学習指導要領の各目標に一貫して用いられており，その重要性は明らかである。
中学校数学科においては，数学的活動のうち，特に重視するものとして，上記の解説に，「数や図形の性質などを見いだすことや，学んだ数学を利用すること，またその過程で数学的な表現を用いて説明し伝え合うこと」（p. 52）が規定されている。

2) Shulman の「知識基礎」の構成要素は次の７つの知識である。７つの知識の訳は徳岡（1995）に従った。
・教育内容についての知識（content knowledge）
・授業一般についての知識（general pedagogical knowledge）
・カリキュラムについての知識（curriculum knowledge）
・pedagogical content knowledge
・学習者と学習者の特性についての知識（knowledge of learners and their characteristics）
・教育的文脈についての知識（knowledge of educational contexts）
・教育的目標・価値とそれらの哲学的・歴史的根拠についての知識（knowledge of educational ends, purposes, and values and their philosophical and Historical grounds）

3) Shulman の「教育的推論と行為」モデルにおける各過程の訳は，八田（2010）に従った。

4) Shulman の「教育的推論と行為」における，「翻案」以外の過程について，徳岡（1995）は，次のようにまとめている。
・理解（comprehension）
学習者に教えることはまず教師が目標と教育内容について理解することから始まる。教える内容について批判的に検討することが望ましい。またその教育内容と同じ教科の他の教育内容との関係，他の教科の教育内容との関係についての理解が望まれる。
・指導（instruction）
実際の授業場面であり，観察可能な教授行為がみられる。
・評価（evaluation）
授業中に学習者とのやり取りの中で彼らの理解度をチェックすること，公式的なテストや評価を含む。
・省察（reflection）
教師が自らの授業を振り返って，そこでの出来事，感情，成果などについて検討することである。ここでは，目標がどの程度実現したかの観点からの反省が中心である。この過程は，医師などの専門家が自分の経験から学ぶ過程と同じである。
・新しい理解（new comprehension）
これまでの過程を経て，教師は新しい包括的理解に至るのである。ここでの理解がその前の包括的理解と異なるのは，ここでの包括的理解にはその直前までの推論の経験が加わっていることである。ただしこの経験は，うっかりすると忘れ去られてしまうので，教師は意識してこの経験の把握に努めなければならないのである。

5) 翻訳は，徳岡（1995）に従った。

6) Shulman の「翻案」の下位プロセスについて，徳岡（1995）は，次のようにまとめている。
・教材の準備（preparation）
教材を丹念に調べ，学習者に教えられるように教材を構造化し，分節化することである。既成の教材を批判的に検討することを含む。
・表現（representation）
教師が教えたい教育内容を学習者が理解できるように表現を改めることである。新しい類推，比喩などの形態で教育内容を復元することになる。この作業は教師の理解と学習者が望む方法との間に橋を掛けることである。多様な表現形式があることが望ましい。
・選択（selection）
一連の教授法とモデルから教授（学）的な選択を行うことである。ここでのレパートリーは，豊富でなければならない。講義，実演，暗唱，作業，グループ学習，対話法，ソクラテス法，発見学習，プロジェクト法，教室外での学習などの多様な形態から適切なものを選択する。
・適合（adaptation）
学習者の一般的な特性（characteristics）にそれらの表現を適合させることである。表現された素材（教材）を学習者の特性に合致させる過程である。ここで考慮すべき学習者の特性は，学習者の能力，性別，言語，文化，動機づけ，先行知識・スキル，概念，誤った先行概念，期待，動機，困難度，ストラテジーなどである。
・仕立て（tailoring）
適合させたものを特定の学習者に仕立て直すことである。学習者全体よりもクラスの特定の学習者に教材を合わせることになる。この活動は服の製作に似ている。服は，特定のお客が購入すると，それがお客に完全に合うように仕立て直さなければならない。もっとも，教授活動において教師が特定の学習者を対象にすることはまれである。教師は，少なくとも15人，より典型的には25人～35人の学習者を対象に授業を行っている。そこで，授業における仕立ては，特定の学習者に対するだけでなく，一定規模の傾向・理解力を持つグループを対象にすることになるのである。

7)　図それ自体は木根（2012）のものを使用している。

8)　数学化・定式化という語に関する筆者らの規定について述べる。Freudenthal（1968）は，数学化について，「人間が学ばなければならないものは，閉じた体系としての数学ではなく，活動としての数学，つまり，現実を数学化するプロセスであり，可能ならば，数学を数学化するプロセスである。」（p. 7）と述べ，数学化は数学を創り出すプロセスを総称する言葉として捉えられている。また，定式化について，数学的モデル化の過程の中でよく使われる語であり，例えば，三輪（1983）は，それを「その事象に光を当てるように，数学的課題に定式化する」（p. 286）と述べている。

それに対し，筆者達は，数学化を「具体的な場面における問題の数学化（具体的な事象を数理的に捉える）活動」，定式化を「具体的な事象を数学的に定式化（数学的な課題を設定する）活動。理想化・単純化・理想化ともいえる。」と規定した。その理由は，数学的活動の視点に立った授業づくりでは，数学的事象の各要素を数理的に具体的に捉えることと，数理的な視点で捉えたことを数学的な課題に設定することは異なる相であり，それぞれを意識して捉えていくことが授業づくりにおいて大切であると考えたからである。したがって，筆者達は，数学化・定式化の語について狭義の意味で規定している。

9)　視点3を修正した理由について，数学教育における認識論の研究を踏まえたからである。例えば，Ernest（1991）は，社会的構成主義の背景には，次の3つの要素があると述べている。

①　数学的知識の基盤は，言語的知識，規約，規則であり，言語は社会的構成物である。

②　個人間の社会的過程は，個人の主観的な数学的知識を，公表の後で受容された客観的な数学的知識に変えることが求められている。

③　客観性そのものは社会的に理解される。

そこで筆者らは，数学的知識の社会的構成物であるという観点から，視点3の文言に，コミュニケーションの言葉を追加した。

参　考　文　献

石井康博（2012），『数的活動で利用される具体物が子どものインフォーマルな知識および方略に与える影響』，早稲田大学学位論文（人間科学）

木根主税（2012），『ザンビア数学教師の教授的力量形成における省察の役割に関する研究―授業日誌を用いた質的分析を中心に―』，広島大学学位論文（教育学）

国立教育政策研究所（2013），『平成25年度　全国学力・学習状況調査　報告書　中学校　数学』

徳岡慶一（1995），「pedagogical content knowledgeの特質と意義」，『教育方法学研究』，21，67−75

布川和彦（1993），「van Hiele 理論に対する新たな意味づけ―インフォーマルな知識と発達と発達の最近接領域を手がかりとして―」，『教育方法学研究』，19，37−46

八田幸恵（2010），「リー・ショーマンにおける教師の知識と学習過程に関する理論の展開」，『教育方法学研究』，35，71−81

平岡賢治・野本純一（2015a），「数学の教科書をより有効的に使う力の育成に関する研究(1)―算数・数学的活動の視点から―」，『九州地区国立大学教育系・文系論文集』2(2)，No. 7

平岡賢治・野本純一（2015b），「数学の教科書をより有効的に使う力の育成に関する研究(2)― RME 理論を手がかりにして―」，『長崎大学教育学部研究紀要（教科教育学）』，87−98

平岡賢治・宮内香織（2008），「複式教育の算数科授業創りにおける「算数・数学的活動の視点に立った授業理解の枠組み」の活用」，『研究論文集―教育系・文系の九州地区国立大学間連携論文集』，1(1)

平岡賢治・宮内香織（2006），「算数・数学的活動の視点に立った授業理解に関する研究(1)―「授業理解の枠組み」の構築に向けて」，『数学教育論文発表会論文集』，39，199−204

平林一栄（1973），「数学教育学の課題Ⅱ―表記論的にみた数学教育の問題―」，『広島大学教育学部紀要　第一部』，22，177−186

藤井斉亮ほか（2012），『新しい数学2』，東京書籍

三輪辰郎（1983），「モデル化」，『現代教育学の基礎』，筑波大学教育学研究会編，286−289

文部科学省（2008），『中学校学習指導要領解説数学編』，教育出版

吉田　甫・河野康男（2003），「インフォーマルな知識を基にした教授介入―割合の概念の場合―」，『科学教育研究』，27(2)，111−119

Ball, D, L. et al.（2008），Content Knowledge for teaching: What makes it special?, *Journal of Teacher Education*, 59, 389−407

David C. Webb, Nina Boswinkel, Toruus Dekker（2008），Beneath the Tip of the Iceberg: Using Representations to Support Student Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(2)，110−113

Ernest, P.（1991），*The Philosophy of Mathematics*, The Falmer Press, 1991

Gravemeijer, K.（1997），Mediating between concrete and abstract, Nunes, T. & Bryant, P.（eds），Learning and Teaching Mathematics: *An International Perspective, Psychology Press*, 315−345

Freudenthal, H.（1968），Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3−8

Hiraoka, K. and Yoshida-Miyauchi, K.（2007），A framework for creating or analyzing Japanese lessons from the viewpoint of mathematical activities: A fraction lesson. In J. Woo, H. Lew, K. Park, and D. Seo（Eds.），*Proceedings of the 31st* *conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *Vol. 3*, 33–40

Mack, N. K. (1990), Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 16–32

Molina, R., Fernandez, M. L. and Nisbet, L. (2011), Analyzing elementary preservice teachers' development of content and pedagogical content knowledge in mathematics through microteaching lesson study. *In M. S. Plakhotmik*, S. M. Nielsen and D. M. Pane (Eds.), *Proceedings of the Tenth Annual College of Education & GSN Research Conference*, 162–168

Presmeg, N. C. (2006), Semiotics and "Connections" Standard: Significance of Semiotics for Teachers of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61, 163–182

Remillard, J. T. (2009), Part II commentary: Considering what we know about the relationship between teachers and curriculum materials. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann and G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work*: *Connecting curriculum materials and classroom instruction*, 17–36. New York; Routledge.

Shulman, L. (1986), Those who understand: knowledge growth in teaching, *Educational Researcher*, 15, No. 2, 4–14

Shulman, L. (1987), Knowledge and Teaching: Founation of New Reform, *Harvard Education Review*, 57(1), 1–22

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003), The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9–35