

広島経済大学経済研究論集
第31巻第2号 2008年9月

株価収益率の GH 分布モデルによるオプション価格評価

前 川 功 一*
朱 涵 明**

概要

Black-Scholes(1973)は、いくつかの単純化の仮定の下で、ヨーロッパ・オプションに関する解析的なオプション価格付公式—Black-Scholes の公式—を与えた。しかし現実にはこれらの単純化の仮定は厳密には成立せず、あくまでも現実の近似に過ぎない。これらの過程が満たされない場合に、Black-Scholes の公式から得られる結果と現実との乖離に関する多くの研究がこれまでにこなわれてきた。本研究は、これらの単純化の仮定のひとつである収益率の正規性の仮定を検証するため、日経225構成銘柄と日経225インデックスの日次収益率の分布に対して正規分布、NIG (Normal Inverse Gaussian) 分布、GH (Generalized Hyperbolic) 分布の適合度検定を行った。その結果、日本の株価収益率の分布には、裾の厚い NIG 分布と GH 分布のほうが正規分布より当て嵌まりが良いことが示された。また Black-Scholes モデルでは市場は完備であると仮定されているのに対して、現実の市場は一般的に非完備であると考えられるため、リスク中立測度を一意に定めることができない。そこで、われわれは NIG 分布及び GH 分布を仮定した上で、エッシャー変換を行うことによってリスク中立測度を求め、ヨーロッパ・オプションの理論価格を求め、それらの価格と Black-Scholes の理論価格との比較を行った。さらに日次収益率に対して正規分布、NIG 分布及び GH 分布を適用した場合のバリュー・アット・リスクを計算し、リスク管理の観点からこれらの分布の現実妥当性を比較検討した。

* 広島経済大学大学院経済学研究科教授

** 蘇州大学商学院講師

1 はじめに

Black-Scholes(1973)―以下ではBSと略記する―は、市場の完備性、無裁定性などの理論的な仮定に加えて、原資産の収益率の分布が分散一定の正規分布に従うことを仮定してヨーロッパ・オプションに関する解析的なオプション価格付公式(Black-Scholesの公式、以下BS公式と略記する)を与えた。Black-Scholesの理論モデル(以下、BSモデルと略記する)は正規性を仮定することによってオプション価格公式の数学的導出を容易にした半面、正規性の仮定が現実的ではないため、モデルの有効性に限界が生じたことも否めない。現実に観察される収益率分布は、分散が時系列的に一定ではなく、また分布の形状は正規分布より裾野が広く先端が正規分布より尖っている。そこで、これまでにBSモデルから計算される理論的オプション価格と、正規性の仮定が満たされないより現実的な仮定に基づいて計算されるオプション価格との乖離に関する、多くの理論的、実証的比較研究が行われてきた。本論文もこの系列に属する研究であり、特に下記の諸問題を検証しようとするものである。

本研究では第一に、まず日経225構成銘柄と日経225インデックスを取り上げ、日次収益率の分布に対して正規分布、NIG(Normal Inverse Gaussian)分布、GH(Generalized Hyperbolic)分布の適合度検定を行い、どの分布が収益率の分布として適切かを検証する。

第二に、リスク管理の観点からは、分布の下側分位点を正確に推定することが重要であるので、本研究では正規分布、NIG分布、及びGH分布の各々の分布における下側1%、2%、5%の分位点と経験分布のそれとを実証的に比較し、分布の適合度の優劣を比較する。

第三に、NIGモデルとGHモデルの下で計算されるオプション価格をBS公式から計算される価格と比較することによって、BS公式の現実からの乖離を計測する。ヨーロッパ・オプションを評価するBSモデルにおいて市場は完備であると仮定されているのに対して、現実の市場は一般的に非完備であると考えられるため、リスク中立確率測度を一意的に定めることができない。しかし、無裁定の条件のもとで、リスク中立確率測度を一意的に求める方法の一つにエッシャー変換がある。そこで、われわれはエッシャー変換を行うことによって、ヨーロッパ・オプションの理論価格を求める。こうして求められたオプションの理論価格とBlack-Scholesの理論価格との比較を行う。

2 GH (Generalized Hyperbolic) 分布

2.1 GH 分布の定義と性質

1次元 GH 分布の密度関数は次のように定義される。

$$gh(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \alpha(\lambda, \alpha, \beta, \delta) \left(\delta^2 + (x - \mu)^2 \right)^{(\lambda-1/2)/2} \times K_{\lambda-1/2} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right) \exp(\beta(x - \mu)) \quad (2.1)$$

$$\alpha(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda-1/2} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

ここで、 K_λ は変形された第3種ベッセル関数である。パラメーターは $\mu \in \mathfrak{R}$ 、かつ

$$\begin{aligned} \lambda > 0 \text{ の時, } & \delta \geq 0, \alpha > |\beta|, \\ \lambda = 0 \text{ の時, } & \delta > 0, \alpha > |\beta|, \\ \lambda < 0 \text{ の時, } & \delta > 0, \alpha \geq |\beta|, \end{aligned}$$

を満たす。各パラメーターの持つ意味は、次の通りである。

- λ : GH 族の部分族を決定するパラメーター
- α : 形状パラメーター
- μ : 非対称性の度合いを表すパラメーター
- μ : 位置パラメーター
- δ : 尺度パラメーター

$\lambda = -0.5$ の時、GH 分布は NIG (Normal Inverse Gaussian) 分布になり、その密度関数は、

$$nig(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\alpha \delta}{\pi} \exp\left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)\right) \frac{K_1\left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} \quad (2.2)$$

となる。

$\lambda = 1$ の時、GH 分布は H (Hyperbolic) 分布になり、密度関数は、

$$hyp(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha \delta K_1(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \exp\left(-\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu)\right) \quad (2.3)$$

となる。

GH 分布の積率母関数 $M(u)$ と特性関数 $\varphi(u)$ は、それぞれ

$$M(u) = e^{iu} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right)^{\lambda/2} \frac{K_\lambda \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right)}{K_\lambda \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)} \quad |\beta + \mu| < \alpha \quad (2.4)$$

$$\varphi(u) = e^{iu} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + iu)^2} \right)^{\lambda/2} \frac{K_\lambda \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2} \right)}{K_\lambda \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)} \quad (2.5)$$

である。

2.2 GH 分布における未知パラメーター推定法

原資産の日次対数収益率を GH 分布に従うと仮定し、最尤法によって GH 分布のパラメーターを推定する。GH 分布における対数尤度関数は、

$$L_{GH} = n \log a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4} \right) \sum_{i=1}^n \log \left(\delta^2 + (x_i - \mu)^2 \right) + \sum_{i=1}^n \left[\log K_{\lambda-1/2} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2} + \beta(x_i - \mu) \right) \right] \quad (2.6)$$

で与えられる。ここで、 $x_i, i=1, 2, \dots, n$ は観測された収益率データである。この対数尤度関数を最大にするパラメーター値を求めるため、MATLAB の非線形最小化法(Nelder-Mead 法)を用いた。日経225構成銘柄のうち途中上場、合併などによる連続性が欠如した銘柄を除く154銘柄を取り上げ、最尤法によって各パラメーターを推定する。さらに、GH の部分族である NIG 分布のパラメーターを、同じく最尤法に基づいて推定する。ただし、 $\lambda = -0.5$ なので、NIG 分布による尤度関数は、

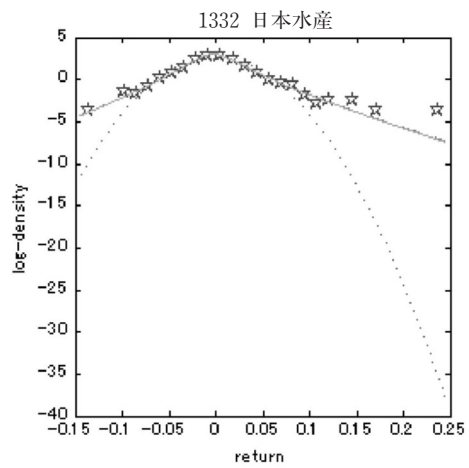
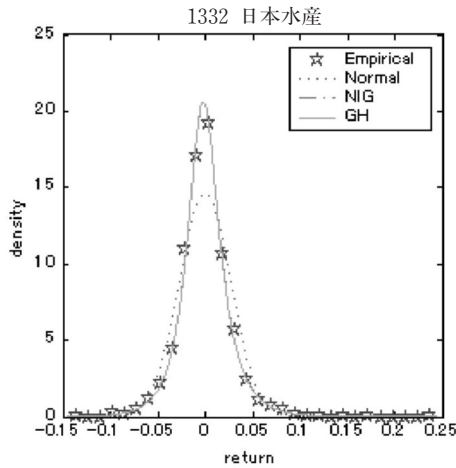
$$L_{NIG} = n \times \left[\log \left(\frac{\alpha \delta}{\pi} \right) + \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log \left(\delta^2 + (x_i - \mu)^2 \right) + \sum_{i=1}^n \left[\log K_1 \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2} \right) + \beta(x_i - \mu) \right]$$

である。推定した154銘柄の推定結果は、紙数の関係で本論にすべて掲載できないが、関心のある読者のために筆者らのウェブサイト <http://www.hue.ac.jp/prfssr/rcfe/index.html> にすべての推定結果を掲載した。

2.3 分布の比較

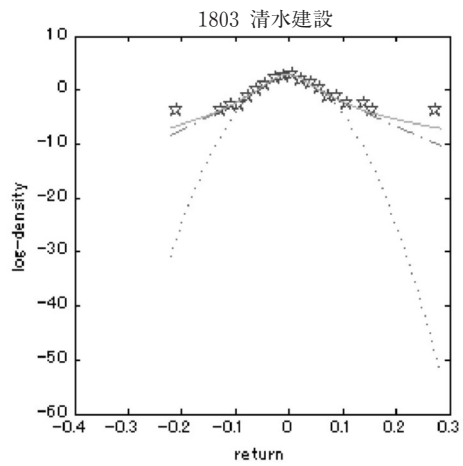
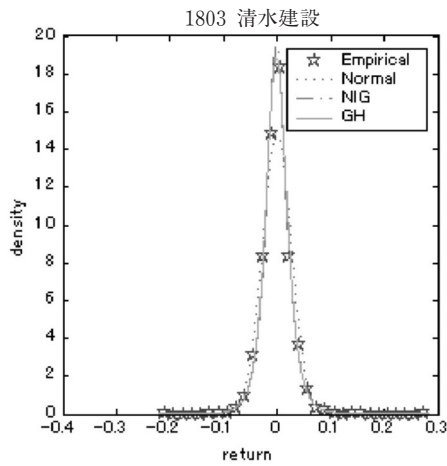
次に、前節で推定された GH 分布、NIG 分布と正規分布の、現実の収益率分布への当て嵌まりの良さをチェックするため、分布の適合度の比較を行う。まず、図による比較を行う。ここでは紙数の制限のため日本水産、清水建設、鹿島建設の3社を例として挙げるにとどめるが、関心のある読者のために上掲のウェブサイト

に推定した154銘柄すべてのグラフを掲載した。以下のグラフにおいて、左側のグラフは推定された密度関数と経験分布、右側のグラフは推定された対数密度関数と経験分布を表わしている。



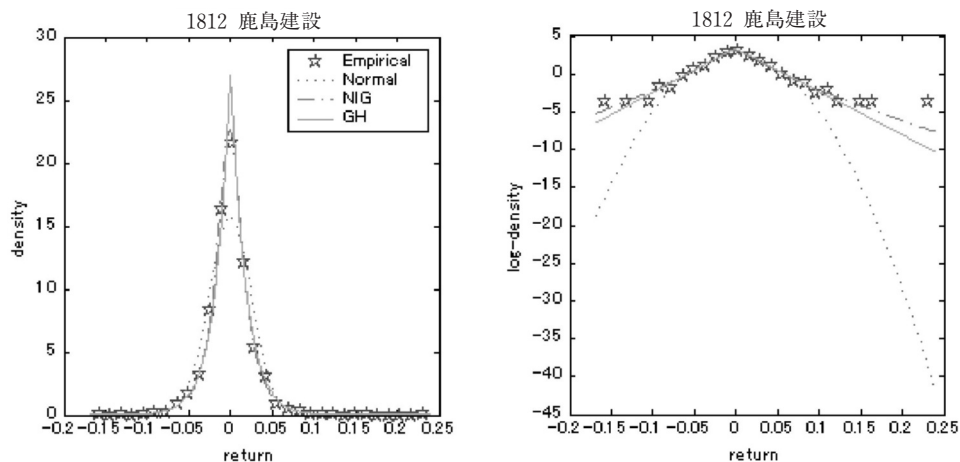
$GH : \alpha = 34.014, \beta = 3.1404, \delta = 0.02203, \mu = -0.00269, \lambda = -0.37094$

$NIG : \alpha = 32.004, \beta = 3.1271, \delta = 0.02231, \mu = -0.00269$



$GH : \alpha = 2.7385, \beta = 2.7384, \delta = 0.004295, \mu = -0.0242, \lambda = -2.3087$

$NIG : \alpha = 39.127, \beta = 2.6105, \delta = 0.002724, \mu = -0.0236$



GH : $\alpha=58.665$, $\beta=1.0414$, $\delta=6.49E-8$, $\mu=-0.00041$, $\lambda=1.066$

NIG : $\alpha=31.661$, $\beta=1.234$, $\delta=0.02043$, $\mu=-0.00143$

図1 密度関数と対数密度関数

データ期間：1992年1月6日から2002年12月30日まで

これらのグラフから、全体として、NIG分布とGH分布は明らかに正規分布より現実の収益率分布を的確に把握している。特に、対数密度関数からNIG分布とGH分布のすその部分が正規分布よりかなり現実を捉えていることを読み取ることができる。NIG分布とGH分布の優劣に関しては、日本水産の場合これら二つの分布はほぼ重なっているが、清水建設の場合はGH分布の方が、また鹿島建設の場合はNIG分布の方が現実のデータに対する適合度がやや優っている。

2.4 分布の適合度検定

さらに、現実の収益率分布への当て嵌まりの良さを表すために、次のように定義されるコルモゴロフ距離 (Kolmogorov distance) と Anderson & Darling 適合度検定統計量を使い、NIG分布、GH分布、正規分布を比較する。

$$\text{Kolmogorov distance} = \text{Max} |F_{emp}(x) - F_{est}(x)| \quad (2.7)$$

$$\text{Anderson \& Darling} = \text{Max} \frac{|F_{emp}(x) - F_{est}(x)|}{\sqrt{F_{est}(x)(1 - F_{est}(x))}} \quad (2.8)$$

上の3銘柄に関するそれぞれの検定統計量は表1のように計算された。上に図示したことはこれらの検定統計量によって裏づけられる。残りの各銘柄について計算した結果は前掲のウェブサイトに示されている。

表 1 正規分布, NIG 分布と GH 分布の適合度検定統計量

	Normal	NIG	GH
Kolmogorov Distance			
日本水産	0.0612265	0.00520354	0.00558998
清水建設	0.0553113	0.0112694	0.00898077
鹿島建設	0.048132	0.00501297	0.0263525
Anderson & Darling			
日本水産	13226.8	0.0425998	0.0476031
清水建設	22060.5	0.183587	0.0508909
鹿島建設	710.493	0.0515933	0.199427

2.5 VaR (バリュー・アット・リスク)

現実に観測された裾の厚い現象によく当て嵌まる分布を利用することは, VaR を推定する際にとっても重要である。VaR は, 金融機関のリスク管理実務で最も標準的なリスク指標となっている。VaR とは, リスク資産を将来のある一定期間保有すると仮定した場合に, ある一定の確率 α の範囲内で, マーケットの変動によりどの程度損失を被るかを計測したものである。この一定の確率としてしばしば 1% あるいは 5% が選ばれる。われわれは正規分布, NIG 分布と GH 分布の優劣を検討するため, 各分布の下側 1%, 2%, 5% 水準におけるリターンの臨界値を求め, これらの比率 (%) と現実のデータから得られた経験分布におけるこれらの臨界値以下となる比率 (%) との絶対誤差を計算する (この誤差が小さいほど理論分布は現実データによく適合しているといえる)。

表 2 によると, 下側 1%, 2% と 5% の VaR について GH 分布の絶対誤差はいずれの銘柄でも正規分布のそれより小さい。NIG 分布について, 清水建設の 1% と 2% の VaR を除けばその絶対誤差は正規分布のそれより小さい。

3 エッシャー変換

オプションの価格を求める際に, リスク中立確率測度を見付けることは最も重要である。ところが, 一般に市場は非完備であると考えられ, リスク中立確率測度を一意に決定することができない (BS モデルでは市場の完備性が前提とされる)。そこで, われわれは, 無裁定の条件を満たしながら, かつリスク中立確率測度を一意に求める方法の一つであるエッシャー変換を使うことにする。

表2 正規分布, NIG分布, GH分布の下方リスク

	Normal	NIG	GH	Empirical	Nor-Emp	NIG-Emp	GH-Emp
1%							
日本水産	-0.06378	-0.07138	-0.07137	-0.06882	0.005046	0.002553	0.002551
清水建設	-0.06321	-0.06912	-0.06727	-0.06601	0.002798	0.003113	0.001263
鹿島建設	-0.05978	-0.07022	-0.0673	-0.06643	0.006648	0.003791	0.00087
2%							
日本水産	-0.05635	-0.05817	-0.05825	-0.05959	0.003242	0.001423	0.001343
清水建設	-0.05587	-0.05714	-0.05539	-0.05493	0.000933	0.00221	0.000457
鹿島建設	-0.05285	-0.0566	-0.05554	-0.05526	0.002411	0.001337	0.000273
5%							
日本水産	-0.04521	-0.04169	-0.04178	-0.04297	0.002244	0.001271	0.001187
清水建設	-0.04485	-0.04183	-0.04086	-0.04208	0.00277	0.000248	0.001222
鹿島建設	-0.04246	-0.03983	-0.03994	-0.04103	0.001424	0.001197	0.001091

3.1 エッシャー変換の定義

$X(t)$ を定常増分をもつ確率過程とし, その確率密度関数を $f(x,t)$ とする。また積率母関数

$$M(x,t) = E[e^{ux(t)}] \quad (3.1)$$

が存在すると仮定する。ある実数を所与として, $X(t)$ の新たな確率密度関数を

$$f(x,t,h) = \frac{e^{hx}f(x,t)}{M(h,t)} \quad (3.2)$$

と定義する。この変換をパラメーター h によるエッシャー変換と呼ぶ。

3.2 リスク中立エッシャー測度

エッシャー変換後の新しい確率分布の下でも, $X(t)$ は定常増分を持つ。エッシャー変換後の積率母関数は

$$M(u,t;h) = \int e^{ux}f(x,t;h)dx = \frac{M(u+h,t)}{M(h,t)} \quad (3.3)$$

となる。エッシャー変換後の確率分布がリスク中立確率測度の下での確率分布となるためには, 原資産価格は,

$$S(0) = E^h[e^{-rT}S(T)] \quad (3.4)$$

を満たさなければならない。ここで, r は無リスク金利(定数)であり, $E^h[\]$ はパラ

メーター h によるエッシャー変換後の確率分布の下での期待値である。株価過程を

$$S(t) = S(0)e^{x(t)} \quad (3.5)$$

とすると、

$$\begin{aligned} S(0) &= E^h[e^{-rT}S(0)e^{X(T)}] = e^{-rT}S(0)E^h[e^{X(T)}] \\ e^{rT} &= M(1, T, h) \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。式 (3.6) を満たす h を h^* とすると、このパラメーター h^* を用いたエッシャー変換をリスク中立エッシャー変換と呼ぶ。

補題 1 (K. Prause 1999) : $X(t)$ の定常性を仮定するならば、エッシャー変換を用いると、任意の $t(0 < t < T)$ 時点のリスク中立確率測度を一意に特定できる。すなわち、 h^* を一意的に決めることができる。⁽¹⁾

3.3 GH 分布におけるリスク中立エッシャー変換

Keller(1997 Lemma 14)により、リスク中立エッシャー測度は次の等式を満たす。

$$\begin{aligned} r &= \log \frac{M(h^*+1)}{M(h^*)} \\ &= \mu + \frac{\lambda}{2} \log \frac{\alpha^2 - (\beta + h^*)^2}{\alpha^2 - (\beta + h^* + 1)^2} + \log \frac{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + h^*)^2})}{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + h^* + 1)^2})} \end{aligned} \quad (3.7)$$

上の式から h が一意に定まる。NIG 分布 ($\lambda = -0.5$) の場合、上の式は、

$$r = \mu + \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + h^*)^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + g^* + 1)^2} \right) \quad (3.8)$$

となる。静的な確率論におけるエッシャー変換を用いて、新たな確率密度関数は、

$$gh(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu; h^*) = \frac{e^{h^*x}}{M(h^*)} gh(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) \quad (3.9)$$

で与えられる。

ところが、時間を表す変数 t を加えて密度関数 $gh(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ を確率過程に対応する $gh^{*t}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ に拡張すると、通常の GH 分布の合成積は GH 分布にならない。⁽²⁾ 次に次節の計算の基礎となる 3 つの補題を掲げておく。

補題 2 (K. Prause 1999) GH 分布に従う確率過程 X の合成積 $gh^{*t}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ は、

$$\begin{aligned} gh^{*t}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) &= \frac{e^{\beta x}}{M_t^h(\beta)} gh^{*t}(x; \lambda, \alpha, 0, \delta, \mu) \\ &= \frac{e^{\beta x}}{M_t^h(\beta)} gh^{*t}(x - \mu t; \lambda, \alpha, 0, \delta, 0) \end{aligned} \quad (3.10)$$

で与えられる。ここで、

$$\begin{aligned} M_0^t(\beta) &= [M(\beta; \lambda, \alpha, 0, \mu)]^t \\ &= \left[e^{\mu\beta} \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} \right)^{\lambda/2} \frac{K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{K_\lambda(\alpha\delta)} \right]^t \end{aligned}$$

証明 合成積の定義から、 $t=2$ のとき、

$$gh^{*2}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \int gh(x-y; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) gh(y; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) dy \quad (3.11)$$

となる。式(2.1)のGH分布の密度関数を式(3.11)に代入すると、

$$\begin{aligned} gh^{*2}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) &= a^2(\lambda, \alpha, \beta, \delta) \int \left(\delta^2 + (x-y-\mu)^2 \right)^{(\lambda-1/2)/2} \\ &\quad \times K_{\lambda-1/2} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x-y-\mu)^2} \right) \exp(\beta(x-y-\mu)) \\ &\quad \times \left(\delta^2 + (y-\mu)^2 \right)^{(\lambda-1/2)/2} K_{\lambda-1/2} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (y-\mu)^2} \right) \exp(\beta(y-\mu)) dy \\ &= a^2(\lambda, \alpha, \beta, \delta) \exp(\beta x - 2\beta\mu) a^{-2}(\lambda, \alpha, 0, \delta) gh^{*2}(x, \lambda, \alpha, 0, \delta, \mu) \\ &= \frac{a^2(\lambda, \alpha, \beta, \delta)}{a^2(\lambda, \alpha, \beta, \delta) \exp(2\beta\mu)} \exp(\beta x) gh^{*2}(x; \lambda, \alpha, 0, \delta, \mu) \\ &= [M(\beta; \lambda, \alpha, 0, \delta, \mu)]^2 \exp(\beta x) gh^{*2}(x; \lambda, \alpha, 0, \delta, \mu) \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $M_0(\beta) := M(\beta, \lambda, \alpha, 0, \delta, \mu)$ と定義し、

$$gh^{*2}(x, \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{e^{\beta x}}{M_0^2(\beta)} gh^{*2}(x; \lambda, \alpha, 0, \delta, \mu)$$

となる。次に、 $t=n$ のとき(3.10)式が成立すると仮定し、 $t=n+1$ のとき等式が成り立つことを証明すればいい。 $t=2$ における式の転換とまったく同じなので、ここでは省略するが、計算の結果、

$$gh^{*t}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{e^{\beta x}}{M_0^t(\beta)} gh^{*t}(x; \lambda, \alpha, 0, \delta, 0) \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

を得る。次に、 $gh^{*t}(x-\mu t; \lambda, \alpha, 0, \delta, 0)$ を求めるために、逆フーリエ変換を利用して、

$$gh^{*t}(x-\mu t; \lambda, \alpha, 0, \delta, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(u(x-\mu t)) \varphi^t(\mu; \lambda, \alpha, \delta) du$$

を得る。ここで、 $\varphi(\mu; \lambda, \alpha, \delta)$ は、 $\beta=u=0$ のときの特性関数である。すなわち、

$$\varphi(\mu; \lambda, \alpha, \delta) = \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + u^2} \right)^{\lambda/2} \frac{K_\lambda(\sqrt{\delta(\alpha^2 + u^2)})}{K_\lambda(\alpha\delta)}$$

補題3 (K. Prause 1999) $gh^{*t}(x, \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ のエッシャー変換⁽³⁾は

$$\begin{aligned} gh^{*t}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu; h^*) &= \frac{e^{h^*x}}{M^t(h^*)} gh^{*t}(x, \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) \\ &= \frac{e^{h^*x}}{M^t(h^*)} \frac{e^{\beta x}}{M_0^t(\beta)} gh^{*t}(x-\mu t; \lambda, \alpha, 0, \delta, 0) \end{aligned}$$

である。

補題 4 (K. Prause 1999) リスク中立エッシャー測度 Q^{h^*} の下で、コール・オプション価格は次のように求められる。

$$\begin{aligned} C_{gh} &= e^{-rT} E_{Q^{h^*}}[(S_T - K)^+] = e^{-rT} E_{Q^{h^*}}[(S_0 e^{X_T} - K)^+] \\ &= e^{-rT} \int_{\{S_0 e^{X_T} > K\}} (S_0 e^{X_T} - K) dQ_{X_T}^{h^*}(x) \\ &= S_0 \int_{\log \frac{K}{S_0}} g h^{*T}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu; h^* + 1) dx \\ &\quad - e^{-rT} K \int_{\log \frac{K}{S_0}}^{\infty} g h^{*T}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu; h^*) dx \end{aligned}$$

ここで、 S_t : 時点における原資産の価格

K : コール・オプションの行使価格

T : コール・オプションの満期までの残存期間

4 ヨーロピアン・コール・オプションの評価

4.1 分布の推定

この節では、われわれは GH 分布による日経平均株価指数のヨーロピアン・コール・オプションの評価を試みる。まず、1991年1月4日から2003年12月30日までの日経平均株価指数のデータを用いて、NIG モデルと GH モデルのパラメーターをそれぞれ推定する。推定した結果は以下の通りである。

得られたパラメーターを用いて、図によって正規分布との比較を行う。図 2 から、明らかに GH 分布と NIG 分布のほうが正規分布より現実のデータによく適合している。

さらに、Kolmogorov 距離と Anderson & Darling 適合度検定統計量を求め、GH 分布、NIG 分布と正規分布の現実の収益率分布への適合度を調べる。その結果は表 4 に示されている。

日経平均株価指数についても、個別銘柄と同様に GH 分布と NIG 分布の現実の収益率への適合度は正規分布よりも優れている。最後に、各分布の下側 1%、2%、

表 3 日経平均株価指数の推定したパラメーター

	α	β	δ	μ	λ
GH	9.4751	-1.9898	0.026984	7.37E-05	-2.5684
NIG	78.004	0.7391	0.017525	-0.00042	-0.5

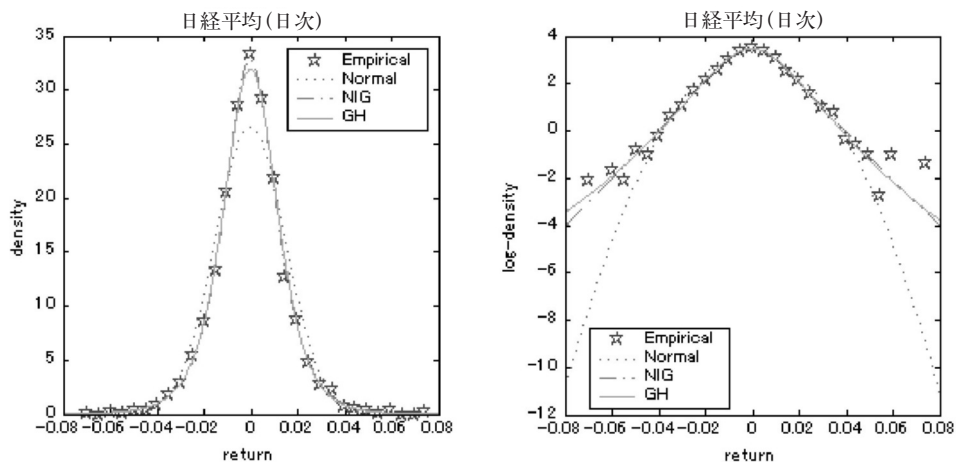


図2 日経平均株価指数の密度関数と対数密度関数

表4 日経平均株価指数における正規分布、NIG分布とGH分布の適合度検定統計量

	Kolmogorov Distance	Anderson & Darling
Normal	0.0408068	1.19082
NIG	0.00687213	0.0347681
GH	0.00772118	0.0288472

表5 日経平均株価指数の下方リスク

	Normal	NIG	GH	Empirical	Nor-Emp	NIG-Emp	GH-Emp
1%	-0.03509	-0.03959	-0.04035	-0.03784	0.002746	0.001748	0.002516
2%	-0.03101	-0.03291	-0.03313	-0.03238	0.001366	0.000535	0.000754
5%	-0.02489	-0.02425	-0.0243	-0.02447	0.000416	0.000216	0.000171

5%水準におけるリターンの臨界値を求め、これらの比率(%)と現実のデータから得られた経験分布におけるこれらの臨界値以下となる比率(%)との絶対誤差を計算する(この誤差が小さいほど理論分布は現実データによく適合しているといえる)。結果として、いずれのリスク水準でも、GH分布とNIG分布のほうが正規分布より優れていることが示された。

4.2 オプションの評価

残存期間 $T=1$ の場合

3 節で説明したエッシャー変換により、コール・オプションの評価を行う。リスク中立変換において必要なパラメーター h^* は、GH 分布と NIG 分布の場合において、それぞれ次式を満たす。

$$\text{GH} \quad : \quad r = \mu + \frac{\lambda}{2} \log \frac{\alpha^2 - (\beta + h^*)^2}{\alpha^2 - (\beta + h^* + 1)^2} + \log \frac{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + h^*)^2})}{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + h^* + 1)^2})}$$

$$\text{NIG} \quad : \quad r = \mu + \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + h^*)^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + h^*)^2})$$

ここで、 r はリスクフリーレートを表す。近年日本の公定歩合が非常に低いので、計算の便宜上 $r=0$ とし、 h^* を求めることにする。

$$\text{GH} \quad : \quad h^* = 1.16758$$

$$\text{NIG} \quad : \quad h^* = 0.629039$$

得られたパラメーターを h^* 用い、リスク中立エッシャー測度のもとで、行使価格 $K=8000 \sim 12000$ 円のコール・オプションの価格をそれぞれ計算する。ただし、現在の日経平均株価指数 $S_0=10000$ 円とする。このような想定の下で、NIG 分布、及び GH 分布の下で求めたオプションの価格と BS の理論価格と比較する。図 3 の縦軸は BS 公式から求めた価格と NIG 分布の下で計算した価格の差 (BS-NIG) を、図 4 の縦軸は BS 公式から求めた価格と GH 分布の下で計算した価格の差 (BS-GH) を表わしている。またこれらのグラフの横軸はマネーネスを表わしている。これらの図から、GH モデルと NIG モデルはアット・ザ・マネーのところで BS モデルの理論価格との差が最も大きい。BS モデルの理論価格は GH モデル、NIG モデルのより 4 円ぐらい高くなっている。行使価格がアウト・オブ・ザ・マネーとイン・ザ・マネーへと変化すると、その差が縮まるばかりか、ついに逆転し、BS モデルの理論価格は GH モデル、NIG モデルのより割安になる。ディープ・アウト・オブ・ザ・マネーとディープ・イン・ザ・マネーへ進むと、その差がゼロに収束する。

残存期間 $T > 1$ の場合

NIG の合成積は依然として NIG 分布であるが、GH 分布の合成積は GH 分布にならないので、3.3 節で述べた補題によりオプション価格を求める。ここで、現在の日経平均株価指数を $S_0=1000$ 円とする。行使価格 $K=7000 \sim 13000$ 円、残存期間 $T=2 \sim 250$ 日のコール・オプションを求め、BS モデルの理論価格と比較してみる。図 4 に比較結果が示されている。BS 理論価格との差 (垂直軸) が、マネーネス、残存期間の 2 方向の水平軸に対して描かれている。

残存期間 $T > 1$ の場合は、 $T=1$ と同様に GH モデル、NIG モデルがアット・ザ・マネーのところで BS モデルの理論価格との差が最も大きく、残存期間が長くなる

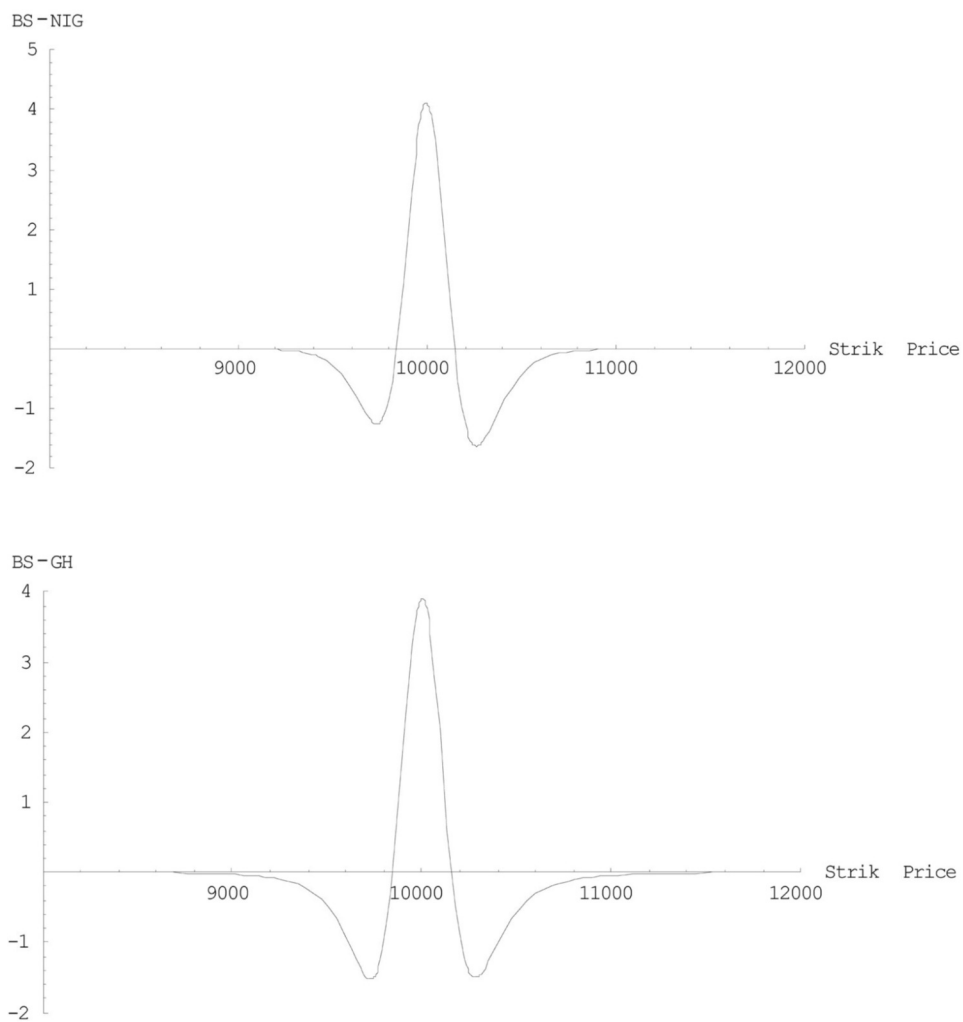


図3 コール・オプションの価格の比較 ($T=1$)

と共にその差が縮まる。

5 まとめ

Black-Scholes(1973)は、市場の完備性と無裁定性を前提にし、原資産の収益率分布として分散一定の正規分布を仮定してヨーロッパン・オプションの価格付けに関するBSの公式を与えた。BSの理論モデルはこの正規性を仮定することによっ

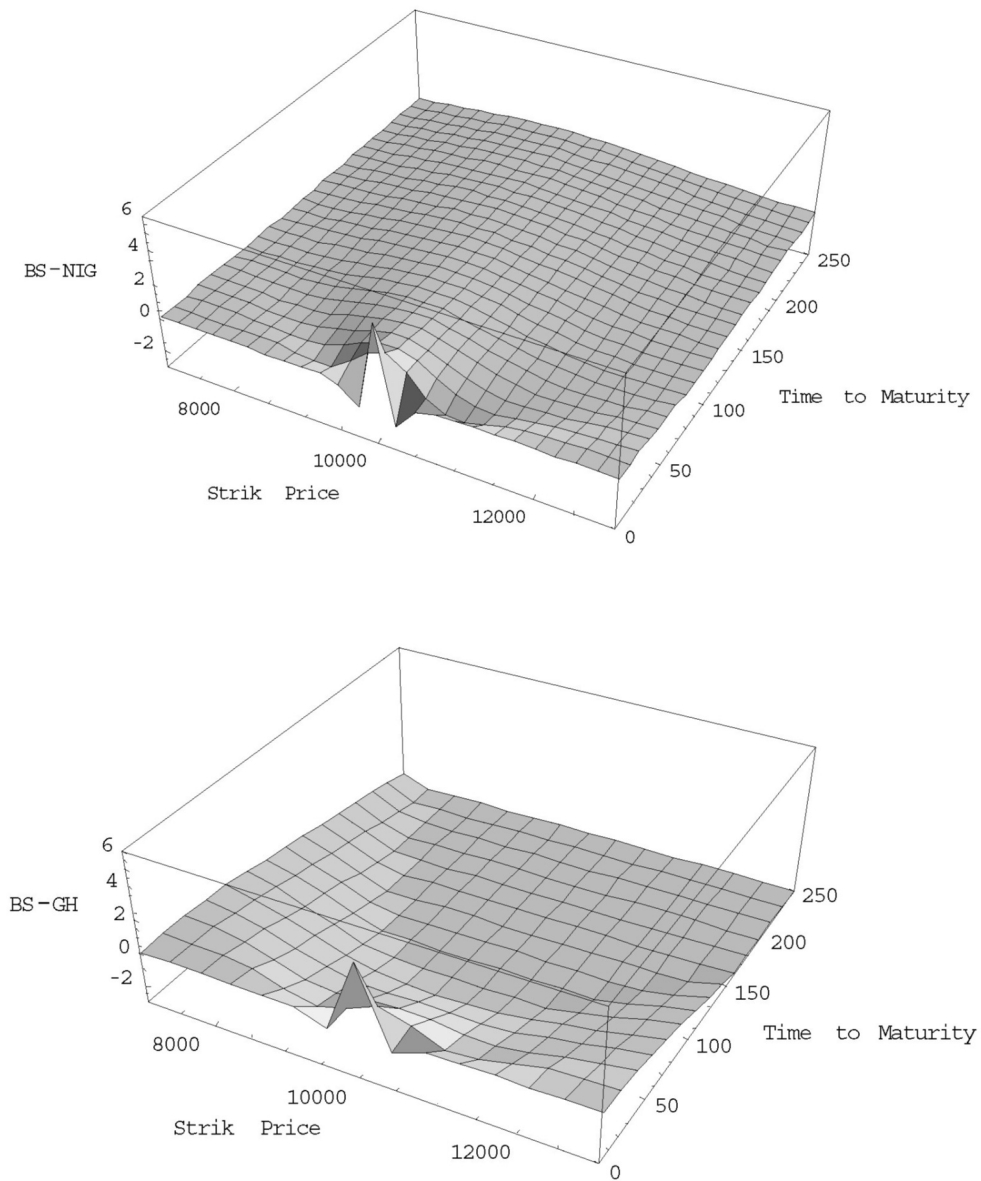


図4 コール・オプションの価格の比較 ($T>1$)

てオプション価格公式の数学的導出が容易になった。しかし多くの実証研究により、現実の収益率分布は、分散が時系列的に一定ではなく、また分布の形状は正規分布より裾野が広く分布の先端が正規分布より尖っていることが指摘されている。そのことを受けて多くの研究者によって、BSモデルから計算される理論的オプション

価格と、正規性の仮定が満たされないより現実的な仮定に基づいて計算されるオプション価格との乖離に関する、理論的、実証的比較研究が行われてきた。本論文も正規性の仮定の妥当性について、東証1部上場企業の株価データを用いて実証的に論じた。本研究では、まず日本の株式市場において、分布の適合度検定を通して、日次収益率分布を表す分布としては、正規分布よりも、裾の広いNIG分布とGH分布が、現実をよく捉える分布として選択された。特にNIG分布とGH分布が正規分布と比べて、下側1%、2%と5%点以下の適合度が優れていることがわかった。このことはリスク管理上重要な点であると考えられる。GH分布とその特殊形であるNIG分布との優劣に関しては、分布の適合度検定などの結果により、どちらかが絶対的に優位とはいえないことが示された。

デリバティブの評価に関して、日経平均株価指数の日次収益率分布を表現する適切な分布として、NIG分布とGH分布を選び、ヨーロッパン・コール・オプションの価格評価を行い、BSモデルの理論価格を比較した。その際、現実の市場は非完備であると考え、リスク中立確率測度を一意に求める方法の一つであるエッシャー変換を使うことによって、オプション価格を求めた。そして与えられたマネーネスと残存期間に対してBS理論価格とNIG分布およびGH分布の下で求められたオプション価格との差を求めた結果、アット・ザ・マネーのところその差が最大になり、その点から隔たるほど、また残存期間が大きいほどその差が縮小することが示された。

今後に残された課題として次の点を挙げてこの稿を終わりたい。すなわち、本稿では扱わなかった非対称な収益率分布の妥当性を検証し、収益率分布としてより現実に近い非対称な非正規分布を仮定したとき、これまでの先行研究の結果にどのような変更が加えられるべきかを明らかにすることが今後の課題である。

注

- (1) h^* の一意性については、Gerber and Shiu(1994,p104)を参照。
- (2) 特殊なGH分布のみ、例えばNIG分布($\lambda = -1/2$)の場合、合成積は依然NIG分布である。

- (3) NIG分布の場合、 $gh^{*t}(x; -1/2, \alpha, \beta, \delta, \mu; h^*) = \frac{e^{h^*x}}{M^t(h^*)} nigt(x; \alpha, \beta, t\delta, t\mu)$

参考文献

Black, F., and M. Scholes, (1973) The pricing of options and corporate liabilities,

Journal of Political Economy 81, 637-659

Gerber, H. U. and E. S. W. Shiu (1994) Option pricing by Esscher-transforms.

Transactions of the Society of Actuaries 46, 99-101. With discussion

Keller, U. (1997) Realistic model of financial derivatives. Dissertation, University of Freiburg.

増田弘毅 GIG 分布と GH 分布に関する解析 統計数理 No. 50(2) 2002年

Prause, Karsten (1999) The generalized hyperbolic model: estimation, financial derivatives, and risk measures. Dissertation, University of Freiburg.