広島経済大学経済研究論集
第28巻第2号　2005年9月

誤差項にNIG分布を仮定した株価過程の推定*

得　津　康　義**

1　はじめに

数理ファイナンスの分野で，最近注目を浴びつつある派生証券の価格付けモデルとして，株価収益率が正規分布より裾の厚い分布に従っていると仮定する方法がある[(1)]。現実の株価収益率の分布に対して，正規分布より裾の厚い分布の当てはまりがよいことがヨーロッパの研究者を中心に報告されている[(2)]。その分布の一つに，GH分布（Generalized Hyperbolic Distribution）がある。この分布はBandorff-Nielsenによって提案され，1990年代半ばくらいからファイナンスへの応用が試みられ[(3)]，すでに幾つかのオプション価格付けモデルも存在している[(4)]。これらのモデルを用いて，オプション価格付けを行うためには，株価過程を特定化することが必要になる。本稿では，特定化された株価過程に対してその正当性を評価する。

わが国においても，宮崎・中尾（2003）による収益率に正規分布以外の分布を仮定したオプションの価格付けに関する論文が存在する。彼らは実際の業種別インデックスの収益率の下限１％，５％，15.86％が仮定した分布は正規分布より絶対誤差が小さいとした上で分析を行っている。しかし，この分析では収益率の分布に関する仮定に対する正当性は評価されていない。このため，本稿では収益率の分布に関する仮定に対する正当性を検証した。

オプションを価格付けするためには，その基になっている原資産の価格過程を特定化する必要がある。オプションの代表的な価格付けモデルであるBlack-Scholesモデルは，原資産の価格過程を幾何ブラウン運動すなわち対数収益率を正規分布として仮定したうえで，すなわち $\log S_t - \log S_{t-1} = u_t,\ u_t \sim N(0, \sigma^2)$ と仮定したうえで，オプションの価格公式を導き出している。しかし，実際の市場で観察される収益率はBlack-Scholesモデルで仮定されているような正規分布による近似は不適

* 本稿を作成するにあたり前川教授（広島大学），Lee 教授（Souel National University）に有益なコメントを頂いた。ここに記して深く感謝したい。

** 広島経済大学経済学部講師

切で，正規分布よりも裾の厚い分布になっていることは良く知られている。このような背景により，近年数理ファイナンスの分野で注目を浴びている分布が GH 分布である。正規分布では2つのパラメーターで分布の形状が決定されるが，GH 分布では5つのパラメーターにより分布の形状が決まるため，それらのパラメーターにより様々な形状の分布が表現可能である。そこで，本稿は株価収益率に GH 分布を仮定することが可能であるかどうかについて検証する。

検証方法としては，価格の対数値を用いて $\log S_t = \alpha \log S_{t-1} + u_t$ という形の一階の自己回帰を行い，推定されたパラメーター $\hat{\alpha}$ が単位根を示すか，すなわちランダム・ウォークするかどうかで判断する。もし推定されたパラメーターが単位根を示した場合，本稿では収益率は想定した誤差項の分布にしたがっていると解釈する。この分析方法では，単位根検定をすることになるが誤差項に正規分布を仮定した場合についての検定統計量は知られているが，他の分布を仮定した場合，一般に検定統計量の分布特性は明らかになっていないため，モンテカルロ・シミュレーションを用いて導出された経験分布の％点を用いて検定を行う。先に述べたように GH 分布はパラメーターによって様々な形状を表現することが可能であるが，パラメーターの値によっては分布の再生性[5]を有さないものがある。このため本稿の実証分析では誤差項の分布は，GH 分布のクラスの中にあると仮定し，なおかつ分布の再生性を有する NIG 分布（Normal Inverse Gaussian Distribution）を採用し分析を行った。本稿の構成は以下の通りである。第2節において NIG 分布の紹介を行う。第3節では，対数株価モデルの誤差項に NIG 分布を仮定して単位根検定を行う。NIG 分布を仮定した場合の検定統計量は明らかになっていないため，モンテカルロシミュレーションで経験分布の臨界値を計算した。この臨界値を用いて，実証分析では TOPIX の日次収益率を利用し，検定を行った。ここでは，単位根検定によって，株価収益率に NIG 分布を仮定することの正当化を行っている。分析の結果，TOPIX の収益率に NIG 分布を仮定することが可能であることが判明した。しかし，TOPIX の収益率の分布に対しては正規分布でも NIG 分布でも共によく適合することが示された。第4節で，前節の結果の原因はある種の中心極限定理が働いているのではないかと考え，異なる NIG 分布から発生させた500個の乱数の平均を計算した。この平均値に対して Jarque-Bera 検定を行った結果，帰無仮説（正規分布）を棄却できなかった。このシミュレーションと同様の現象が TOPIX においても現れていると考えられる。すなわち TOPIX に含まれる個々の銘柄の収益率の分布は正規分布ではないが，それらの平均としての TOPIX の収益率は正規分布に従うと考えられる。さらに，東証1部上場銘柄について正規性の検定を行い，ほと

んどの銘柄で正規分布という仮説が棄却された。そこで，正規分布が採択された銘柄と棄却された銘柄の収益率についてヒストグラムを描いてその上に正規分布とNIG 分布の確率密度関数を描き NIG 分布が良く当てはまることを視覚的に確認した。

2 NIG 分布の概要

GH 分布（Generalized Hyperbolic Distribution）は，Bandorff-Nielsen（1977）によって提案された単峰型の分布であり，その確率密度関数は両側で指数的に減少する。元々，風で飛ばされた砂の大きさなどの気象データを分析するために提案された分布であるが，近年，金融データへの当てはまりの良さから数理ファイナンスで応用がされるようになった。GH 分布は 5 つのパラメーターによって形状が決まり，パラメーターの値によって分布の非対称性，裾の厚さ，位置，尺度が決定される。(GH 分布に関する解析的な事項は増田（2002）を参照。)

GH 分布に従う確率変数 X の密度関数は以下のようになる。

$$X \sim GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$$

$$f_{GH}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{(\gamma/\delta)^{\lambda}}{\sqrt{2\pi}K_{\lambda}(\delta\gamma)} \cdot \frac{K_{\lambda-1/2}\left(\alpha\sqrt{\delta^2-(x-\mu)^2}\right)}{\left(\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)^{1/2-\lambda}} \exp[\beta(x-\mu)]$$

ここで $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$ であり，K_λ は修正された第 3 種のベッセル関数である。ここで各パラメーターの意味であるが，λ は分布の族，α は固定された β に対して峰付近での尖り具合，β は分布の非対称性，μ は分布の位置，δ は尺度を表わしている。これらのパラメーターにより GH 分布は様々な形状を捕らえることができるが，一般的にこの分布は分布の再生性を有していない。分布に再生性がない場合は将来の分布が分からないため予測が困難になる。そこで，以下では GH 分布のクラスに属し，なおかつ分布の再生性を有している NIG（Normal Inverse Gaussian）分布に焦点を当て分析を行う。

NIG 分布は GH 分布のパラメーター λ を $-\frac{1}{2}$ に固定した場合であり，密度関数は以下のようになる。

$$X \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$$

$$f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\alpha\delta}{\pi} \exp[\delta\gamma] \cdot \frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2-(x-\mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}} \exp[\beta(x-\mu)]$$

このように定義された分布の平均，分散，歪度，尖度はそれぞれ以下のようになる。

$$\mu+\frac{\delta\beta}{\gamma},\frac{\delta\alpha^2}{\gamma^3},\frac{3\beta}{\alpha\sqrt{\delta}\left(\alpha^2-\beta^2\right)^{1/4}},\frac{3\left(\alpha^2+4\beta^2\right)}{\alpha^2\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$$

3　東証株価指数（TOPIX）を使った分析

本節では，対数株価収益率に NIG 分布を仮定することは $\log S_t=\log S_{t-1}+u_t$ と表わすことであるから，NIG 分布を仮定することの妥当性は $\log S_t=\alpha\log S_{t-1}+u_t$ という回帰式の単位根検定を行うことによって評価することができる。そこで以下の株価過程を考える。

$$S_t=S_{t-1}\exp(r_t)$$

この式に対して，両辺を対数を取ると以下の式が得られる。%

$$\log(S_t)=\log(S_{t-1})+r_t$$

もし，収益率が NIG 分布に従うならば，以下の推定モデル

$$\log(S_t)=c0+c1\times\log(S_{t-1})+r_t\quad r_t\sim i.i.d.NIG(\alpha,\beta,\delta,-\beta\delta/\gamma)$$

によって推定されたパラメーター $\hat{c}_0$, $\hat{c}_1$ はそれぞれ，0と1になることが期待される。ここでは TOPIX の日次データを用いて推定を行う。推定期間は，2001年1月4日から2002年12月30日（492営業日）とした。推定された各パラメーターは以下の通りである。

$$\log(S_t)=0.02569+0.99620\times\log(S_{t-1})+r_t$$
$$r_t\sim i.i.d.NIG(174.82, 19.089, 0.036052, -0.00359)$$

上記の推定結果は単位根を示しているように思われるが，推定されたパラメーターが有意に期待される値になっているかどうかについては検定を行う必要がある。しかし誤差項が NIG 分布に従うという仮定の下での検定統計量の分布は一般に導かれていない。そこで，次項ではモンテカルロ・シミュレーションによって経験的に棄却点を求める。

3.1　モンテカルロ・シミュレーション

シミュレーションアルゴリズムとして，以下のようなデータ生成プロセスを考え

る。この系列（AR(1)）に対して最尤推定を行い，推定された係数の検定統計量の経験分布を導いた上で棄却点を求める。ここで NIG 分布のパラメーターは先の推定から得られた結果を用いることにする。($t=1$, …1000, 繰り返し回数1000)

DGP（Data Generating Process）：

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim NIG\ (\delta = 0.036052, \gamma = 173.82, \beta = 19.089, \mu = -0.00359)$$

推定すべき式は以下の通りである。

$$\log(x_t) = c0 + c1 \times \log(x_{t-1}) + r_t \tag{1}$$
$$r_t \sim i.i.d.NIG(\alpha, \beta, \delta, -\beta\delta/\gamma)$$

$$E[\varepsilon_t] = 0, V[\varepsilon_t] = \frac{\delta\alpha^2}{\gamma^3}$$

定数項の検定統計量を TA，係数の検定統計量を TB とする。

$$TA = \frac{\hat{c}0}{s^2_{\hat{c}0}}, TB = \frac{\hat{c}1 - 1}{s^2_{\hat{c}1}}$$

ここで

$$s^2_{\hat{c}0} = s^2\left(\frac{1}{T} + \frac{\overline{X}}{\sum_{t=1}^{999}\left(x_t - \overline{X}\right)}\right), s^2_{\hat{c}1} = \frac{s^2}{\sum_{t=1}^{999}\left(x_t - \overline{X}\right)}, \overline{X} = \frac{1}{T}\sum x_t, s^2 = \frac{1}{T-2}\sum \varepsilon_t$$

である。以下の図に帰無仮説（$c0=0$，$c1=1$）の下での TA，TB の経験分布を示す。

これらの経験分布から，上限１%，５%，下限１%，５%点を求めた結果が表１である。

TOPIX の日次対数株価を使い TA，TB を計算すると $TA=0.780371$，$TB=-0.806393$ となり，TOPIX は誤差項に NIG 分布を仮定しても，単位根を示す結果となった。すなわち収益率に NIG 分布を仮定することができる事が判明した。もし誤差項に NIG 分布を仮定した場合の方がデータの当てはまりが良いのであれば，(1)式の残差２乗和ならびに残差の標準偏差は誤差項に正規分布を仮定した場合よりも小さくなるはずである。そこで誤差項に正規分布を仮定した場合（つまり収益率が正規分布に従うと仮定）と NIG 分布を仮定した場合の残差２乗和と残差の標準偏差を計算すると残差２乗和は0.10350，残差の標準偏差は0.01452であり，正

H_0：$c0=0$

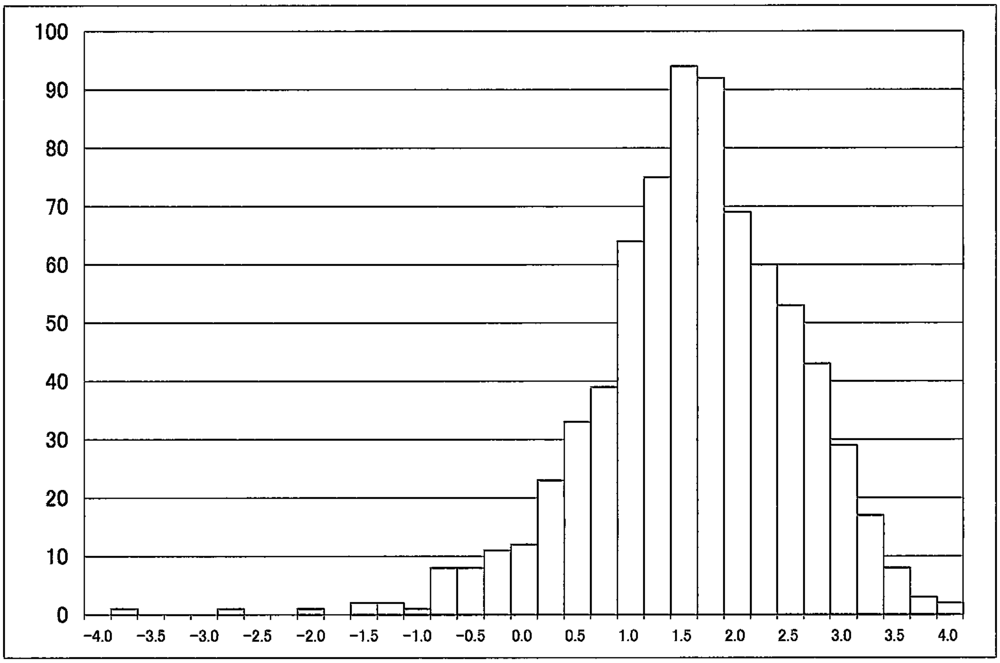

図1　TA のグラフ

H_0：$c1=1$

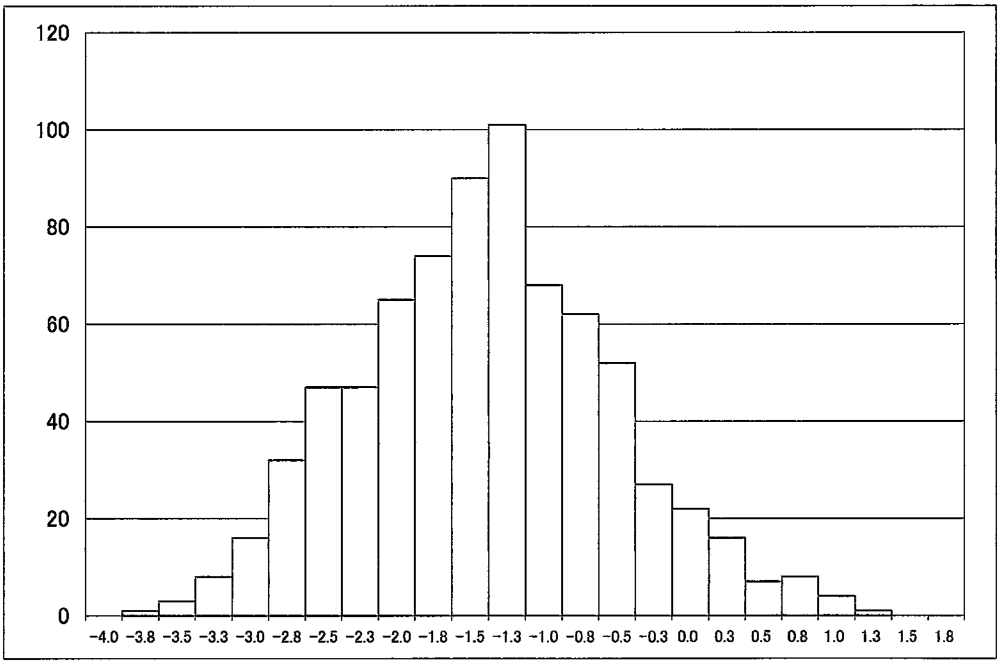

図2　TB のグラフ

表 1

	TA	TB
上限 1 %	3.395	0.696
上限 5 %	2.960	−0.210
下限 1 %	−1.332	−3.415
下限 5 %	−0.215	−2.928

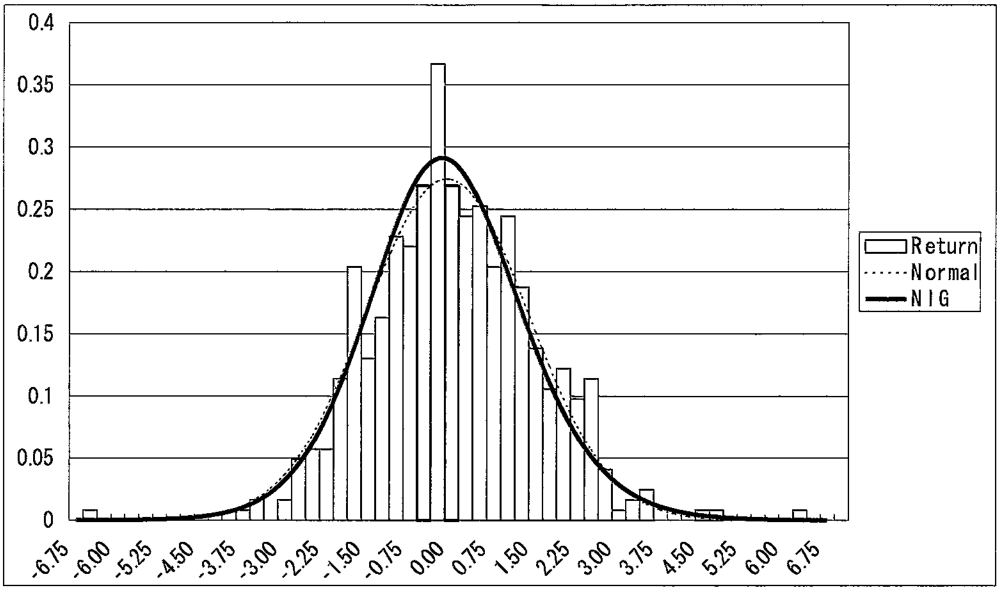

図 3　TOPIX の日次収益率

規分布を仮定した場合とほぼ同じ結果となった。図 3 は TOPIX の収益率のヒストグラムに正規分布と NIG の確率密度関数を重ね合わせたグラフである。

このような結果が生じる原因の一つとして，TOPIX は東証 1 部上場銘柄全ての加重平均であり，ある種の中心極限定理が働いていることが考えられる。これを見るために，シミュレーションを次節で行う。

3.2　リンデバーグ・フェラー中心極限定理

本節では，TOPIX のような平均化されたインデックスの収益率は正規分布に従う理由を中心極限定理を用いて説明を行う。本節で用いる中心極限定理はリンデバーグ・フェラーの中心極限定理であり，それは以下の通りである。

$\{x_i\}$，$i=1$，…，n を平均 μ_i，分散 σ_i の確率変数の集合とし，

$$\bar{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i \qquad \bar{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i$$

とする。$\dfrac{\max_{1\le i\le n}\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}$ が $n\to\infty$ のとき，0に近づくならば，Lindberg Condition が満たされ以下が成り立つ。

$$\sqrt{n}\left(\bar{x}_n-\bar{\mu}_n\right)\xrightarrow{d}N\left[0,\bar{\sigma}^2\right]$$

以下では各証券の収益率は異なる NIG 分布に従うが，それらを平均すると正規分布に近づくと想定しモンテカルロ・シミュレーションを行う。下の図4から図7は，系列の長さは1000に固定し，系列数を $cn=10, 100, 250, 500$ と変化させ，NIG 分布のパラメーター（$\delta=0.4$，$\gamma=0.7$，$\beta=0.3$，$\mu=0.2$）を μ に関して少しずつ変化させたときのクロスセクションでの標本平均のグラフである。さらに表2にそれぞれの場合について Jarque-Bera 検定統計量を示す。

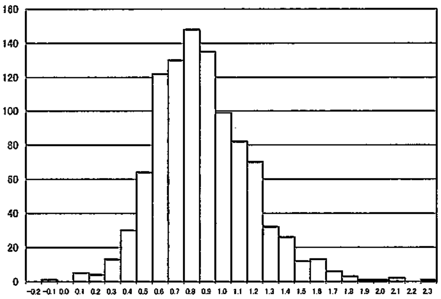

図4　$cn=10$

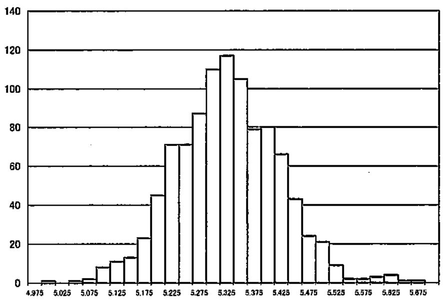

図5　$cn=100$

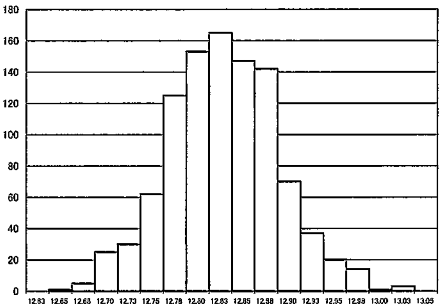

図6　$cn=250$

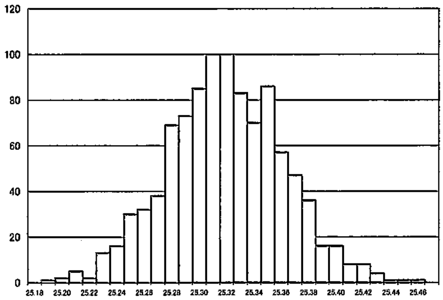

図7　$cn=500$

表2

	$cn=10$	$cn=100$	$cn=250$	$cn=500$
Jarque-Bera	125.975	8.845	2.772	0.410
P-値	0.00	0.01	0.25	0.82

図４から図７および表２より，系列数が10の場合は Jarque-Bera 検定の P-値は０であり，正規分布を棄却するが，系列数が増加するごとに P-値は大きくなり，系列数が500では0.82と帰無仮説を棄却するために必要な有意水準は82%となる。以上の結果から，TOPIX などのインデックスに NIG 分布を仮定しても，正規分布を仮定しても同じような結果になる可能性がある。

次節において，個別証券について正規性の検定を行い，NIG 分布を仮定した場合と正規分布を仮定した場合についてどのような違いがあるかを見ることにする。

4　個別証券における分析

本節では，東京証券取引所１部上場銘柄の日次データを用いて，正規性の検定を行い，NIG 分布と正規分布では，どちらの分布が実際の収益率によく当てはまっているかを図を用いて比較する。実際の収益率から NIG 分布と正規分布のパラメーターを推定し，それぞれの確率密度関数を収益率のヒストグラムに重ねて描く。

4.1　Ljung-Box テスト

確率変数に自己相関がある場合の正規性の検定には，Kolmogorov-Smironov 検定を利用することができないため，はじめに東証１部上場銘柄について Ljung-Box テストを行う。期間は2001年１月４日から2002年12月30日（492営業日）とし，この期間に１部上場を維持していた銘柄数は1356であったため，これら全ての銘柄について Ljung-Box テストを行った。１次の自己相関検定を行った結果，630銘柄（約46%）で自己相関が検出された。一方 TOPIX の日次収益率では帰無仮説が棄却されず，自己相関は生じていないとの結果を得た。このように個別銘柄では自己相関が検出されたため，通常の正規性の検定方法を利用することができず新たな検定方法で検定を行う必要がある。

4.2　系列相関がある場合の正規性の検定

前項で個別銘柄の収益率の系列に自己相関が検出されたため，ここでは Lee and Na（2002）によって提案された検定方法に従って正規性の検定を行う。この検定では，帰無仮説にいかなる分布をも仮定することができ，さらに自己相関の有無に関わらず検定を行うことができる。

$$H_0 : f = f_0 \qquad vs. \qquad H_1 : f \neq f_0$$

ここで f_0 は帰無仮説の下での確率密度関数であり，検定を行うために以下に定

義する $\hat{T}_n$ を用いる。

$$\hat{T}_n = nh^{1/2}\int\left|\hat{f}_n - (K_h * f_0)(x)\right|^2 dx$$

*はコンボリューションオペレーターであり，$(K_h * f_0)(x)$ は以下のように定義する。

$$(K_h * f_0)(x) = \int \frac{1}{h} K\left(\frac{x-u}{h}\right) f_0(u) du$$

さらに $f_n(x)$ は以下のように定義される。

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(x - r_i) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - r_i}{h}\right)$$

$$\tau^2 = 2\int f_0^2(x)dx \int\left(\int K(t)K(t+s)dt\right)^2 ds$$

このとき検定統計量

$$T_n - h^{-1/2}\int K^2(t)dt \xrightarrow{d} N(0, \tau^2)$$

となり，帰無仮説を標準正規分布とした場合の有意水準5％の臨界値は0.69368であることが彼らの論文で示されている。

2001年1月4日から2002年12月30日（492営業日）まで継続して東証1部上場銘柄1356銘柄ならびにそれらのクロスセクションでの収益率と同期間の TOPIX の日次収益率を以下のように定義し，標準化された日次収益率が標準正規分布に従うか否かの検定を行った。その結果が以下の表3に示されている。

$$r_{i,t} = \ln P_{it} - \ln P_{i,t-1}$$
$$r_{TOPIX,t} = \ln P_{TOPIX,t} - \ln P_{TOPIX,t-1}$$
$$\bar{r}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{it}$$

ここで $P_{i,t}$ は証券 i の t 日の終値であり，$P_{TOPIX,t}$ は TOPIX の t 日の終値である。

表3

Reject H_0	Not Reject H_0	Total
1176（86.8%）	179（13.2%）	1356

このように分析期間内では東証1部上場銘柄の約90%の銘柄が帰無仮説（正規性）を棄却することになる。一方 TOPIX の収益率の正規性検定統計量の値は0.06092であり，帰無仮説を棄却できない。以上の分析からも各証券は正規分布には従わない

が，それらの加重平均である TOPIX の収益率ではある種の中心極限定理が働くことがわかる。付表において1356の銘柄の平均，標準偏差，歪度，尖度を掲載している。

次に，1356の個別証券の単純平均と時価総額で加重を行った平均について検定を行う。図 8 から図10は加重平均された対数値と TOPIX の対数値とそれぞれの収益

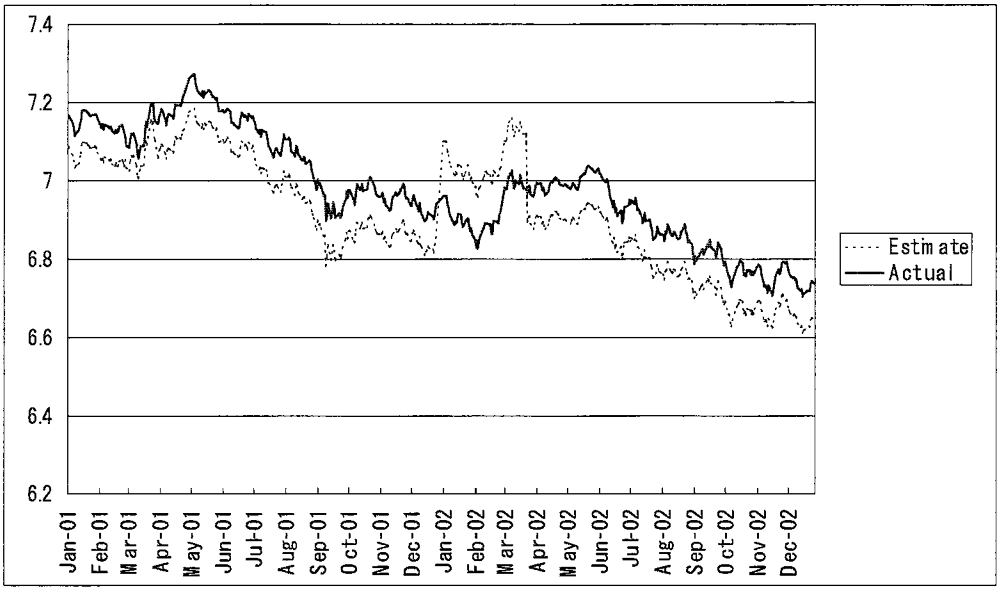

図 8　加重平均と TOPIX の対数値

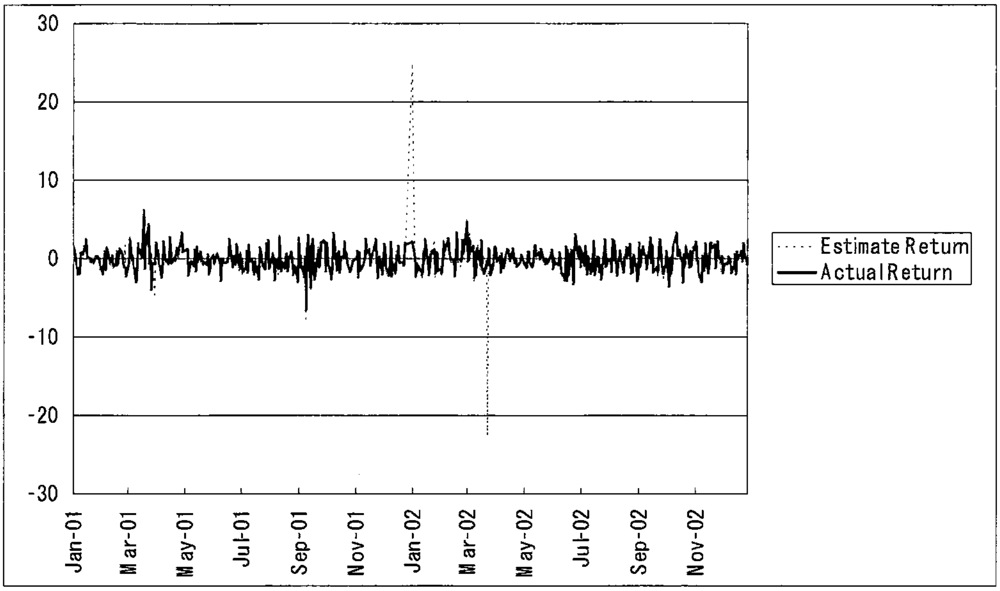

図 9　加重平均と TOPIX の収益率

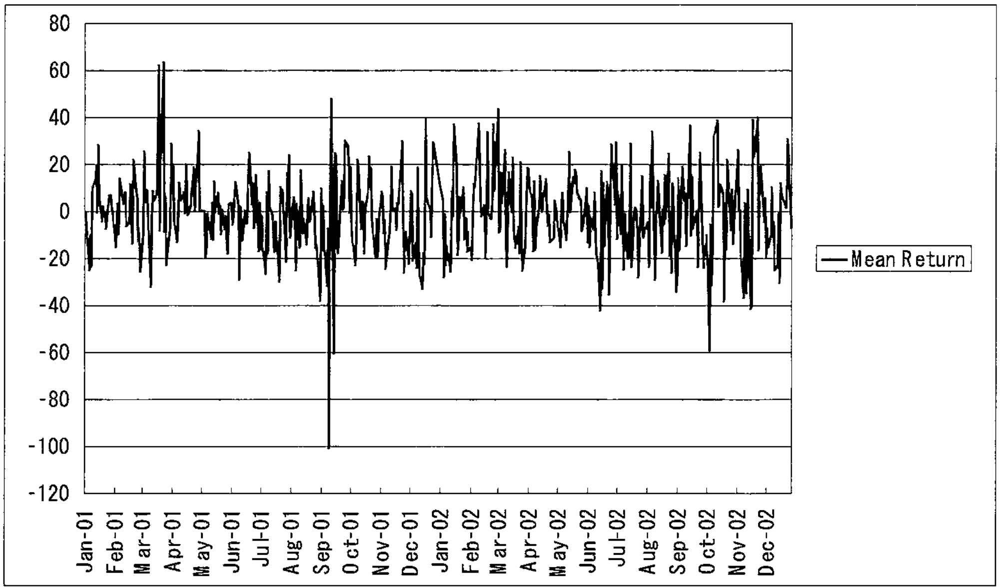

図10　単純平均の収益率

率ならびに単純平均の収益率をプロットしたのもである。

加重平均と TOPIX ならびに単純平均の収益率について正規性の検定を行った結果，$\hat{T}_n$ は，それぞれ－0.812，0.061，－0.812といずれの場合についても正規分布を棄却できない結果を得た。

4.3　ヒストグラムによる比較

本項では，個別銘柄の日次収益率から正規分布ならびに NIG 分布のパラメーターを推定し，それぞれの確率密度関数をヒストグラムに重ねて描き比較を行う。本稿では，前項の検定で正規分布を棄却出来なかった6社と正規分布が棄却された6社について比較を行った。それぞれの銘柄の銘柄名，$\hat{T}_n$，平均，標準偏差，歪度，尖度，最大値，最小値は以下の通りである。

表4　正規分布を棄却出来ない銘柄

Code	銘柄名	$\hat{T}_n$	平均	標準偏差	歪度	尖度	最大値	最小値
1963	日揮	－0.755	－0.032	2.773	－0.059	4.233	10.372	－12.208
4203	住友ベーク	－0.469	－0.155	2.658	－0.086	4.464	8.160	－13.264
4676	フジテレビ	－0.511	－0.104	2.896	0.044	3.647	10.002	－9.495
6706	電気興業	－0.486	－0.200	2.601	0.093	4.206	9.872	－11.602
6752	松下電産	－0.473	－0.172	2.220	0.147	3.331	6.860	－7.691
7741	ＨＯＹＡ	－0.498	－0.002	2.612	0.320	3.934	11.035	－7.088

表 5　正規分布が棄却された銘柄

Code	銘柄名	$\hat{T}_n$	平均	標準偏差	歪度	尖度	最大値	最小値
5541	大平洋金属	14.111	−0.169	4.963	0.351	11.847	31.178	−33.213
7246	プレス工業	14.185	−0.021	4.893	1.571	14.109	39.465	−18.721
8153	モスフード	8.056	−0.010	1.302	−0.337	7.437	5.322	− 7.110
8563	大東銀行	55.978	−0.015	1.340	−1.983	39.458	8.855	−15.097
9006	京急電鉄	5.880	0.035	1.348	0.098	5.882	5.816	− 6.137
9503	関西電力	2.001	−0.016	1.302	−0.191	5.403	5.393	− 5.488

図11から図22は，これら12社についてのヒストグラムである。

正規分布が棄却できなかった銘柄

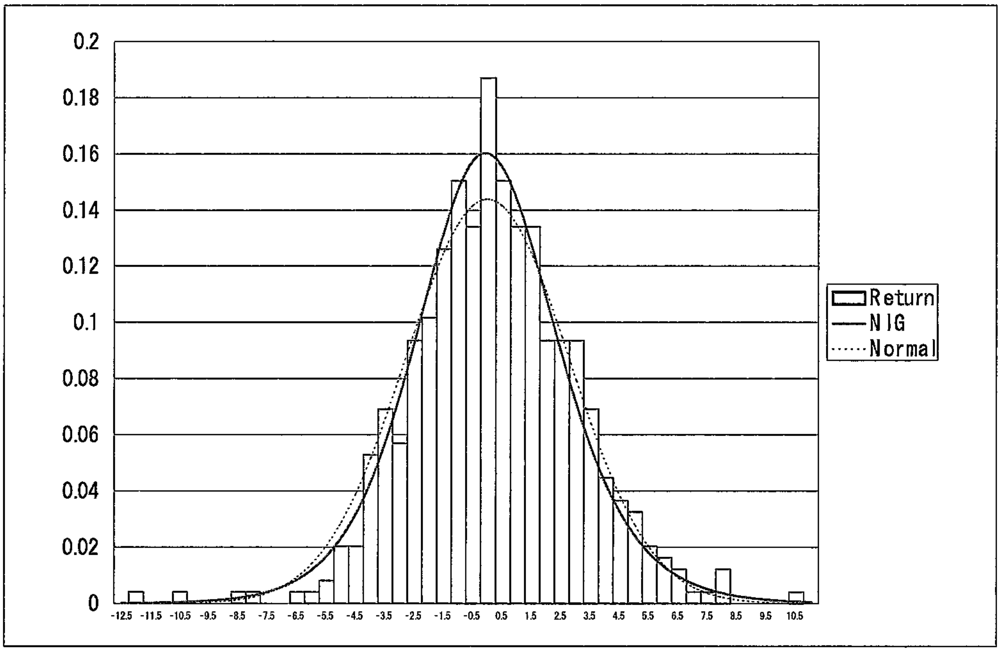

図11　日揮（1963）

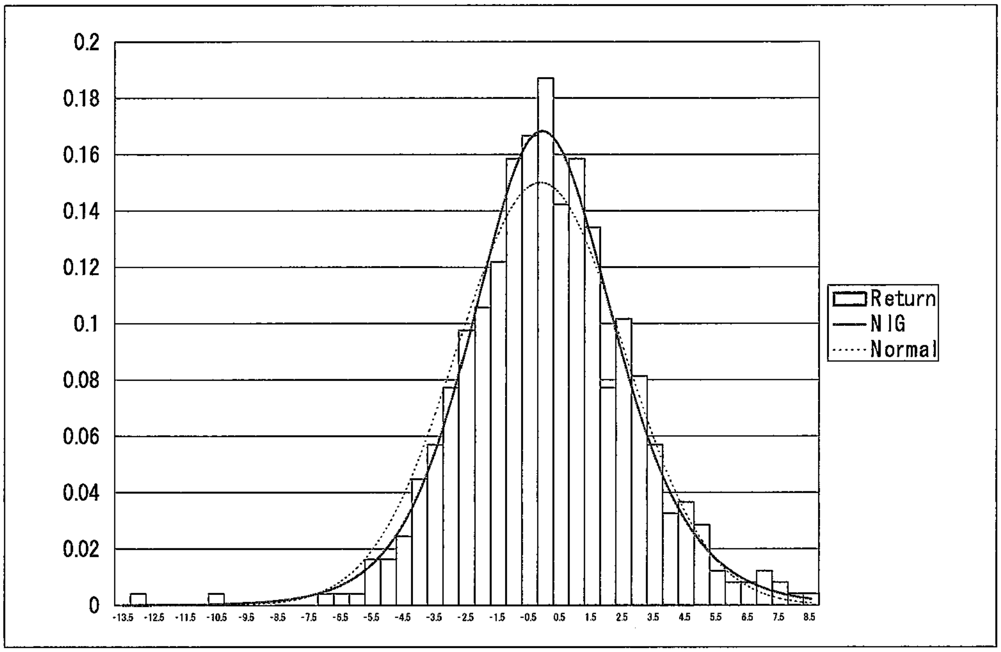

図12 住友ベーク（4203）

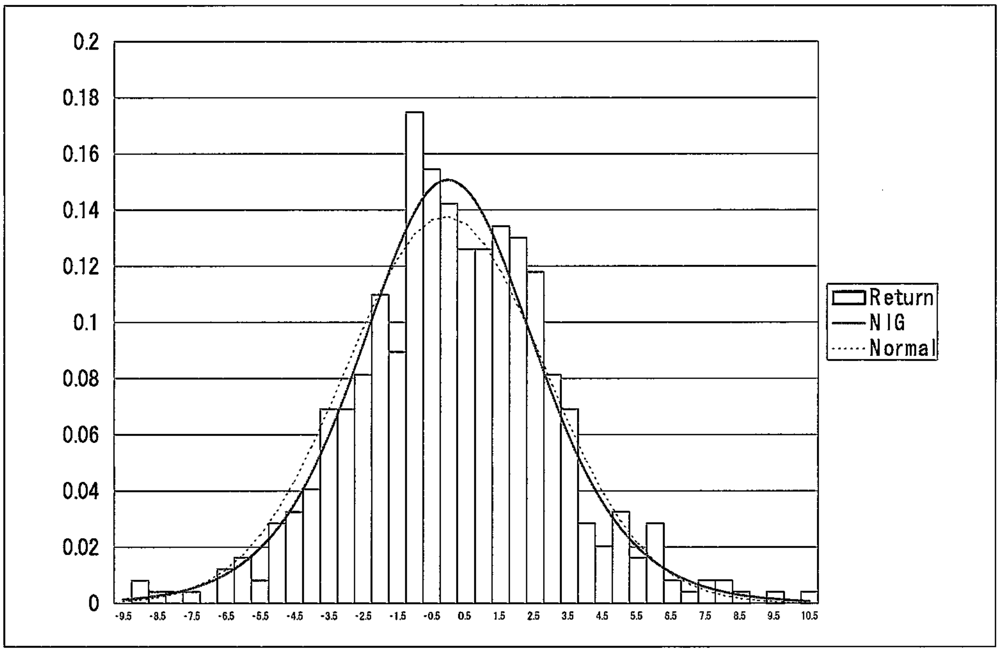

図13 フジテレビ（4676）

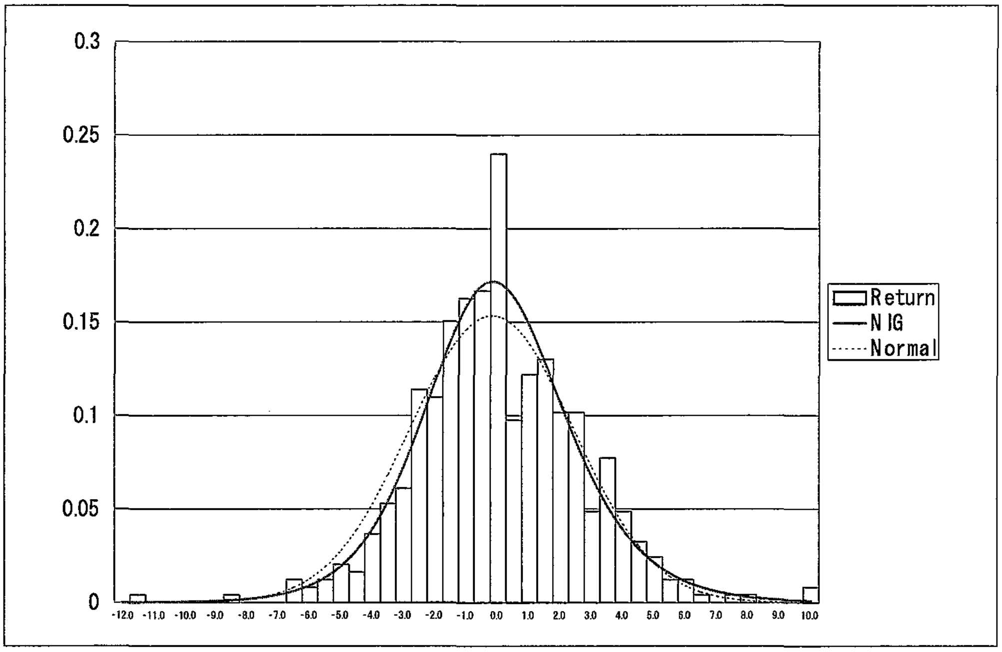

図14　電気興業（6706）

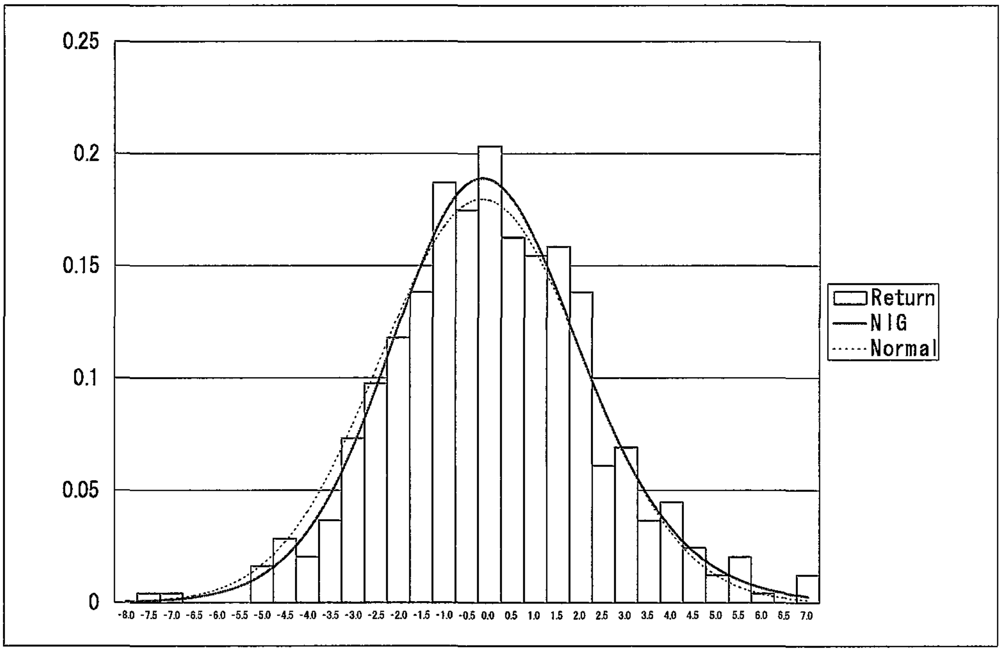

図15　松下電産（6752）

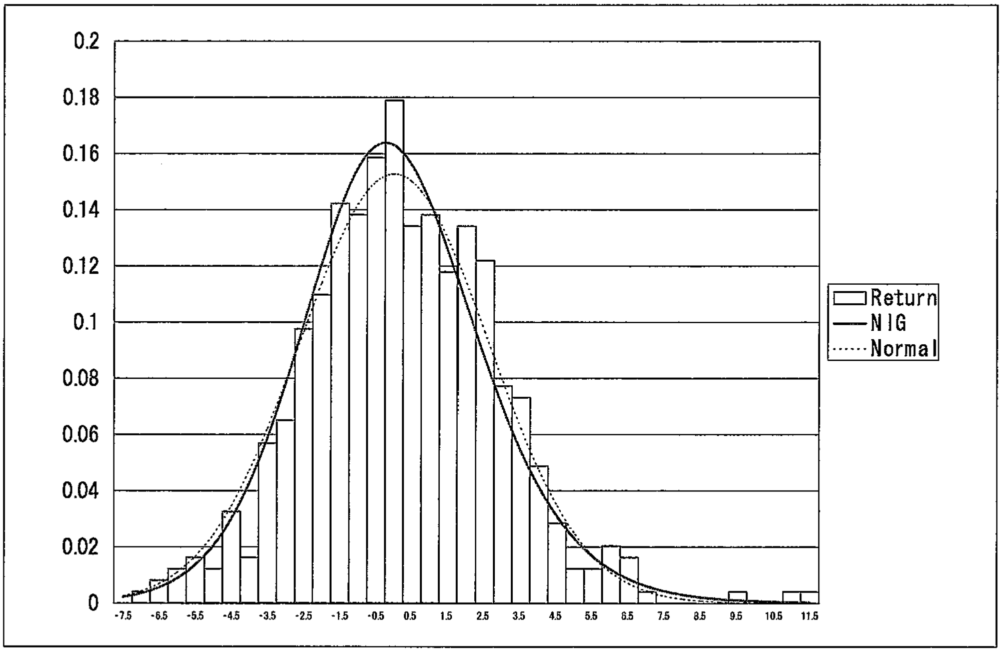

図16　ＨＯＹＡ（7741）

正規分布が棄却された銘柄

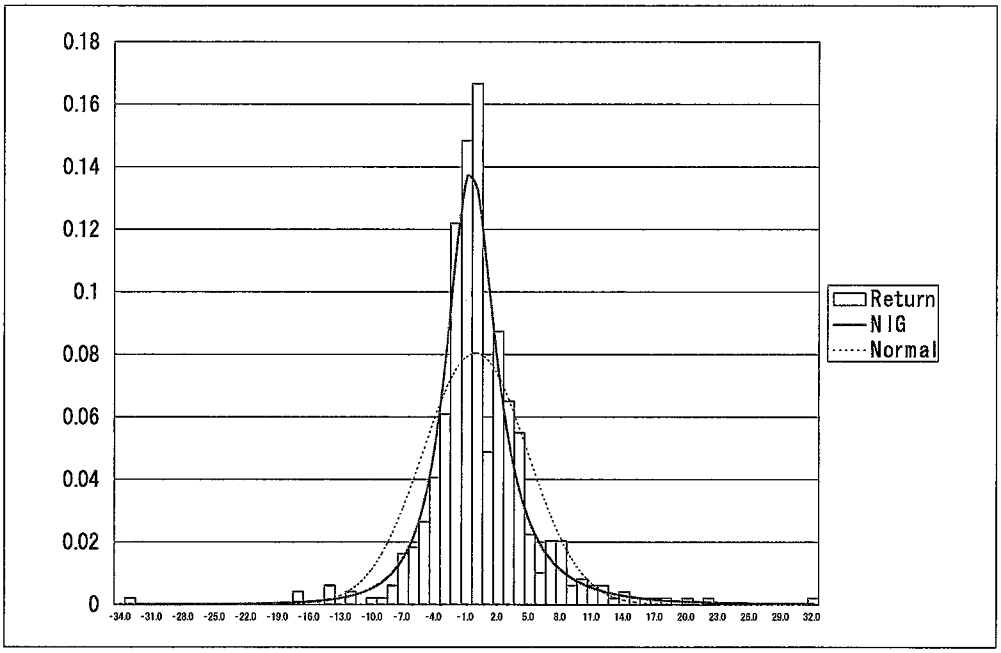

図17　太平洋金属（5541）

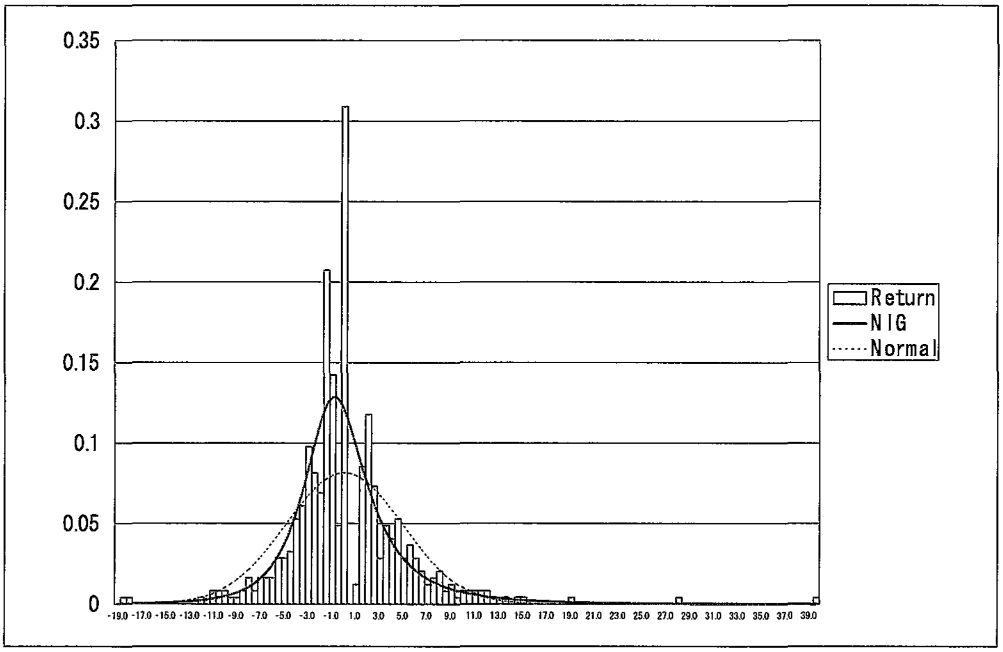

図18　プレス工業（7246）

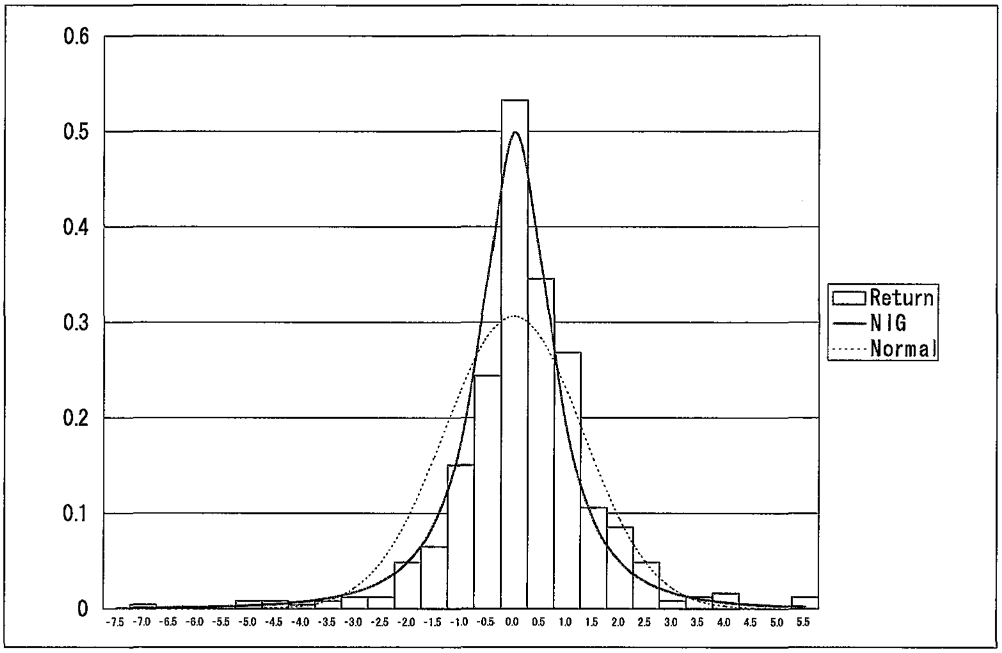

図19　モスフード（8153）

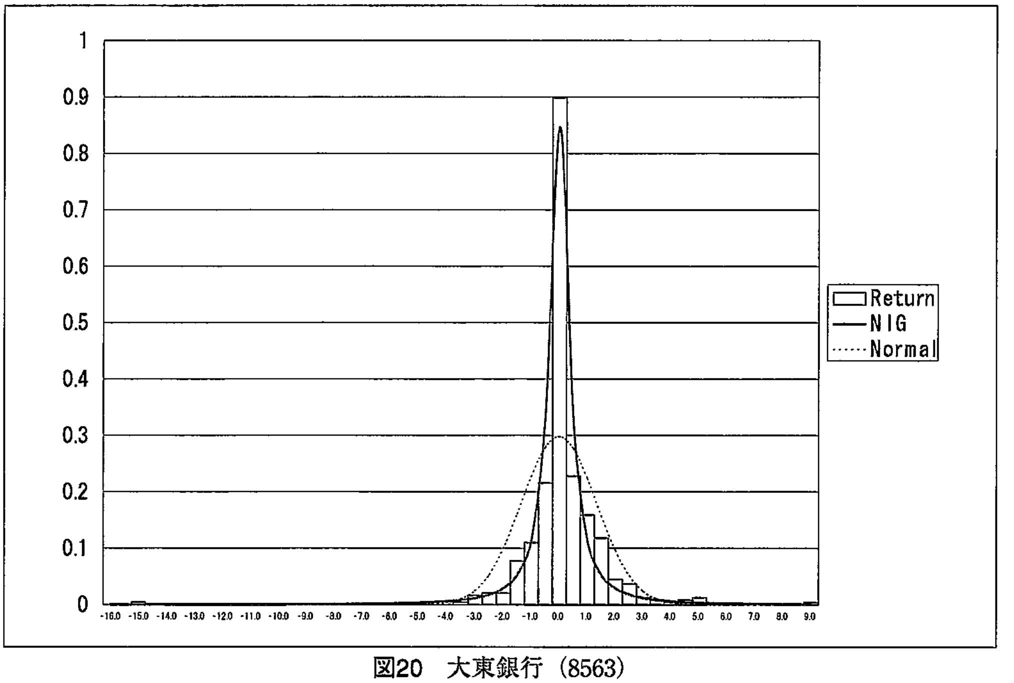

図20　大東銀行（8563）

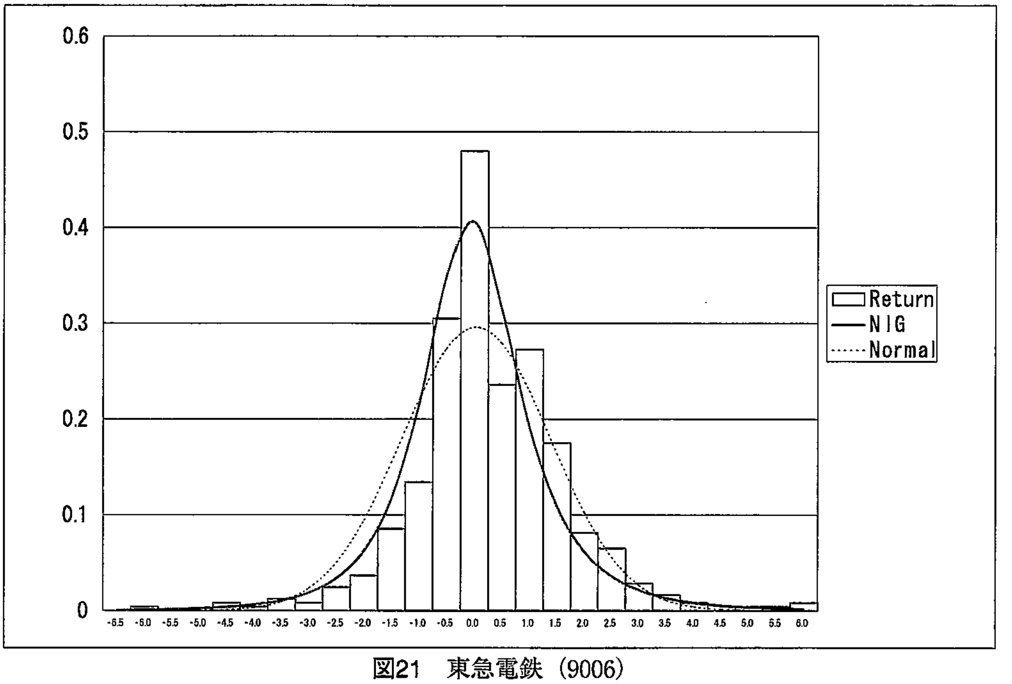

図21　東急電鉄（9006）

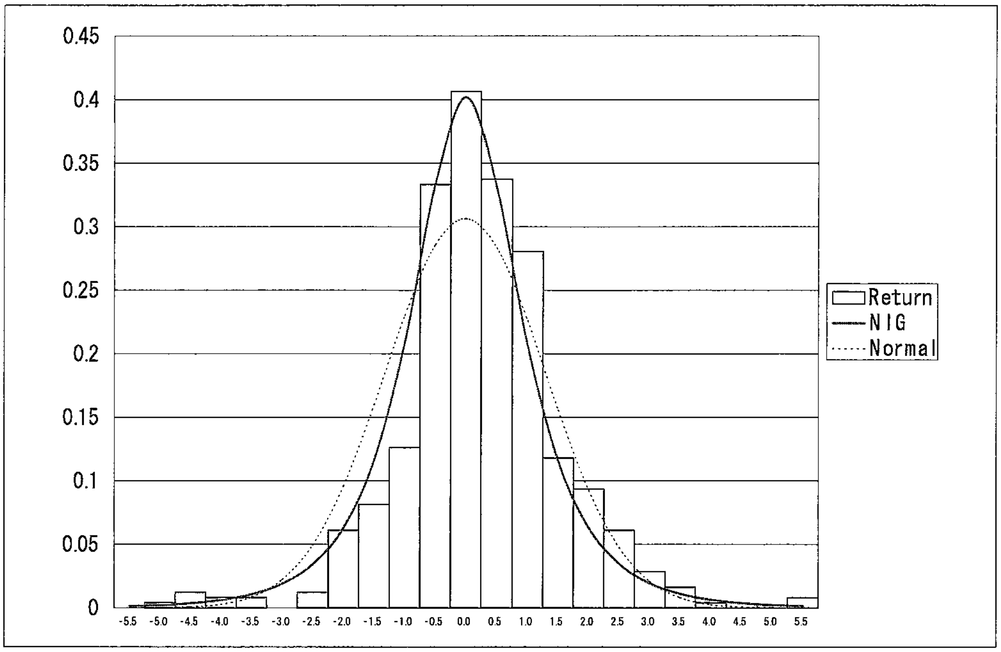

図22　関西電力（9503）

これらのグラフから，$\hat{T}_n$ により正規分布が棄却出来ない銘柄は，収益率に NIG 分布，正規分布のどちらを仮定しても差異は生じない。逆に正規分布が棄却された銘柄では，プレス工業を除くと NIG 分布の密度関数がよく当てはまることが判明する。プレス工業（図18）に関しては１%付近での確率が極端に低いため，両分布ともに上手く捕らえることが出来ないと考えられる。

5　お　わ　り　に

本稿では，株価収益率に正規分布以外の分布を仮定することが出来るかどうかについて検討を加えた。第２節で GH ならびに NIG 分布を紹介し，第３節では TOPIX の日次対数株価過程の誤差項に NIG 分布を仮定して１階の自己回帰分析を行い，１次のラグ項の係数が１に近いという結果を得た。この結果は単位根検定を行った結果ではない。そのため単位根検定を行わなければならないが，誤差項が NIG 分布に従う場合では検定統計量の分布特性が明らかにされていないため，モンテカルロ・シミュレーションにより棄却点を求め，これを利用し検定を行った。その結果単位根が検出された。この結果より，本稿では TOPIX の日次収益率に NIG 分布を仮定することについての正当化を評価した。

しかしながら，TOPIX の場合には誤差項に NIG 分布，正規分布のどちらの分布

を当てはめてもあまり差異がないことも判明した。この原因を探るために NIG 分布に従う確率変数の和の分布をシミュレーションで生成したり，利用できるデータから TOPIX を模したインデックスを作成して分析を行った結果，ある種の中心極限定理が働いているという結論に至った。個別銘柄の分析では，グラフによる視覚的な比較によって NIG 分布が良く当てはまることが示された。

今後の研究の方向性として，1. 収益率に NIG 分布を仮定した株券オプションや日経平均オプションの価格付けモデルへの応用，2. ボラティリティ変動モデルへの応用が考えられる。

注

(1) 以前から株価収益率に正規分布以外の分布を仮定することは考えられている（例えば Student-t など)。

(2) Prause（1997)

(3) Eberlein and Keller（1995)

(4) わが国においては宮崎・中尾（2003）がある。

(5) 再生性とは，互いに独立な分布からの確率変数の和はやはり同じ分布となることを言う

参考文献

Eberlein, E. and U. Keller.（1995）"Hyperbolic Distribution in Finance," *Bernoulli*, 1, 281-299.

Lee, S. and Na, S.（2001）"On the Bickel-Rosenblatt test for first-order autoregressive models," *Statics & Probability Letters*, 56, 23–35.

Prause, Karsten（1999）*The generalized hyperbolic model: estimation, financial derivatives, and risk measures*. Dissertation, University of Freiburg.

Sebastian Raible（2000）*Lévy Processes in Finance: Theory, Numerics, and Empirical Facts*. Dissertation, University of Freiburg.

増田弘毅（2002)「GIG 分布と GH 分布に関する解析」，統計数理，第50巻第2号，165–199.

宮崎浩一・中尾　司（2003)「"正規分布と NIG 分布"，"日次と週次" 日本株式市場におけるリスク管理とオプション評価」，『金融工学と資本市場の計量分析（ジャフィー・ジャーナル 2003)』東洋経済新報社，149–183.