最適化問題：
補助定理の証明と二つの制約想定

千　葉　昌　夫

1. はしがき

以前，拙稿〔1〕において，次のような非線形計画問題を考えた。すなわち，$x \in M \subset R^n$, $f: M \to R$, $g_i: M \to R$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x))$ とすると，

$$\begin{aligned} &\text{Max}\, f(x) \\ &\text{s.t. } g(x) \geqq 0 \\ &\qquad x \in M \subset R^n \end{aligned}$$

で表わされる最適化問題である。そのとき，補助定理および Slater の制約想定と Karlin の制約想定との同値性の証明を与えなかった。そこで，この小論の目的は，

(1) 拙稿〔1〕で用いた補助定理の証明を与える，

(2) Slater の制約想定と Karlin の制約想定との同値性の簡単な証明を与える，

ことである。したがって，このノートは，拙稿〔1〕を補完するものである。

2. 補助定理の証明

第2節では，拙稿〔1〕において用いられた補助定理 3.1，補助定理 4.1（分離定理）および補助定理 4.2を証明する[(1)]。ただし，補助定理の番号は拙稿〔1〕の番号と同じものである。

補助定理 3.1　$X \subset R^n$ を開集合かつ凸集合であるとする。f が X 上で定義された微分可能な関数ならば，f が凹関数であることは，任意の $x, \hat{x} \in X, x \neq \hat{x}$ に対して

$$\nabla f(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \geqq f(x) - f(\hat{x})$$

と同値である。

証明　（必要性）f が凹関数ならば，

$$f((1-\alpha)\hat{x} + \alpha x) \geqq (1-\alpha) f(\hat{x}) + \alpha f(x) \quad (0 \leqq \alpha \leqq 1) \quad (3.1.1)$$

すなわち

$$f(\hat{x} + \alpha(x - \hat{x})) - f(\hat{x}) \geqq \alpha(f(x) - f(\hat{x})) \quad (0 \leqq \alpha \leqq 1) \quad (3.1.2)$$

ここで $h \equiv x - \hat{x}$ とおき，(3.1.2)の両辺から $\alpha \nabla f(\hat{x}) \cdot h$ を引き，$\alpha > 0$ で割ると，

$$\frac{f(\hat{x} + \alpha h) - f(\hat{x}) - \alpha f(\hat{x}) \cdot h}{\alpha} \geqq f(x) - f(\hat{x}) - \nabla f(\hat{x}) \cdot h \quad (3.1.3)$$

をうる。$\alpha \to 0$ $(\alpha > 0)$ にすると，

$$\nabla f(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \geqq f(x) - f(\hat{x}) \quad (3.1.4)$$

をうる。

（十分性）(3.1.4)が成立すると仮定する。f が凹関数であることを示そう。x^1, x^2 を X の任意の点とし，$x^1 \neq x^2$ とする。$\hat{x} \equiv (1-\alpha)x^1 + \alpha x^2$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha \in R$ および $h \equiv x^1 - \hat{x}$ とする。すると，$x^2 = \hat{x} - ((1-\alpha)/\alpha)h$ となる。(3.1.4) より

$$f(x^1) - f(\hat{x}) \leqq \nabla f(\hat{x}) \cdot h \quad (3.1.5)$$

$$f(x^2) - f(\hat{x}) \leqq \nabla f(\hat{x}) \cdot \left(-\frac{1-\alpha}{\alpha} h\right) \quad (3.1.6)$$

(3.1.5)と(3.1.6)とから

$$\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} f(x^1) + f(x^2)\right) - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} + 1\right) f(\hat{x}) \leqq 0 \quad (3.1.7)$$

すなわち

$$(1-\alpha) f(x^1) + \alpha f(x^2) \leqq f(\hat{x}) \qquad (0 < t < 1) \quad (3.1.8)$$

$\alpha = 1$ あるいは 0 のとき，厳密な意味での不等号が成立する（証了）。

この補助定理 3.1の意味は，図 1 から明らかであろう。[2]

補助定理 4.1（分離定理）　凸集合 X が R^n_+ の内点をふくまなければ，X と R^n_+ は，原点を通り，非負の係数をもつ超平面によって分離される（図 2）。

証明　X と R^n_+ はともに凸集合であるから，そのベクトル差 $S = R^n_+ - X$ は凸集合である。原点 0 は S の内点ではない。これを背理法で証明する。0 が内点であり，0 の εー近傍 $U(0, \varepsilon)$ が S 内にふくまれると仮定する。$U(0, \varepsilon)$ は R^n_+ の内点 $z > 0$ をふくむ。したがって，また，$-z \in U(0, \varepsilon) \subset S = R^n_+ - X$。ゆえに，$-z = u - x$（$u \in R^n_+, x \in X$）と書くことができる。そうすると，$z = x - u \leqq x$。しかし，$z > 0$ であるから $x > 0$。これは，X が R^n_+ の内点をふくまないという仮定に矛盾する。したがって，原点 0 を通る超平面 $p \cdot x = 0$ が存在し，S はその片側の半空間にふくまれる。すなわち，任意の $u \in R^n_+, x \in X$ に対して，$p \cdot (u - x) \geqq 0$，これはつぎのことにほかならない。

$$p \cdot u \geqq p \cdot x \quad (\text{すべての } u \in R^n_+, x \in X \text{ に対して}) \tag{4.1.1}$$

さて，$0 \in R^n_+$ であるから，(4.1.1)において，$u = 0$ とおけば，

$$0 = p \cdot 0 \geqq p \cdot x \quad (\text{すべての } x \in X \text{ に対して}) \tag{4.1.2}$$

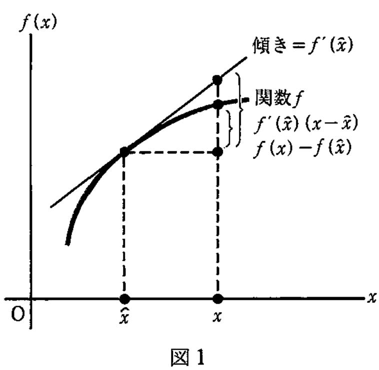


図 1

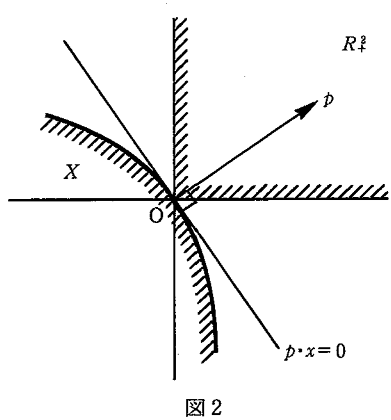


図 2

他方，(4.1.1)によって，$p\cdot u$ は R_+^n 上で下に有界であるから，下界の一つをγとすれば，$p\cdot u \geqq \gamma$。ところが，$\lambda u \in R_+^n$ $(\lambda > 0)$ であるから，$p\cdot \lambda u \geqq \gamma$。これから，$p\cdot u \geqq \gamma/\lambda$ が任意の $\lambda > 0$ に対して成立する。ゆえに，$\lambda \to \infty$ にすると，

$$p\cdot u \geqq 0 \quad (\text{すべての } u \in R_+^n \text{ に対して}) \tag{4.1.3}$$

となる。したがって，R_+^n と X は超平面 $p\cdot x = 0$ によって分離される。最後に，(4.1.3)から，$p \geqq 0$ が導かれ，$p \neq 0$ を考慮すれば，$p \geq 0$ をうる（証了）。

補助定理 4.2　R_+^n 上で定義された実数値関数 $f(x)$ が，連続な偏導関数をもつとする。もしも，$x = \hat{x} \geqq 0$ において，$f(x)$ が最大（最小）値に達すれば，つぎの二条件が成立する。

(i)　$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i} \leqq 0 \quad (\geqq 0) \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{4.2.1}$$

(ii)　$$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i} = 0 \tag{4.2.2}$$

したがって，$\hat{x}_i \geqq 0$ を考慮すれば，(i)，(ii)より，$\hat{x}_i > 0$ ならば $\partial f(\hat{x})/\partial x_i = 0$ である。

証明　任意の $y \geqq 0$ に対して，

$$x(t) = (1-t)\hat{x} + ty \qquad (0 \leqq t \leqq 1) \tag{4.2.3}$$

すなわち，$\hat{x}$ と y を結ぶ線分をつくる。$x(t)$ の成分はすべて非負であるから，$x(t) \geqq 0$。ところが，仮定により，$f(x)$ は $x = \hat{x}$ において最大値に達するから，

$$f(\hat{x}) \geqq f(x(t)) \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

他方，$x(0) = \hat{x}$ であるから，上式より，

$$\frac{1}{t}(f(x(t)) - f(x(0))) \leqq 0 \qquad (0 \leqq t \leqq 1) \tag{4.2.4}$$

仮定から，$f(x(t))$ は微分可能になるから，(4.2.4)において，$t \to \infty$ にすると，

$$\frac{d}{dt}f(x(0)) \leqq 0 \tag{4.2.5}$$

他方，連鎖律によって，

$$\frac{d}{dt}f(x(0)) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{x}_i)\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i} \tag{4.2.6}$$

ゆえに，(4.2.5)，(4.2.6)から

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i} \leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i} \tag{4.2.7}$$

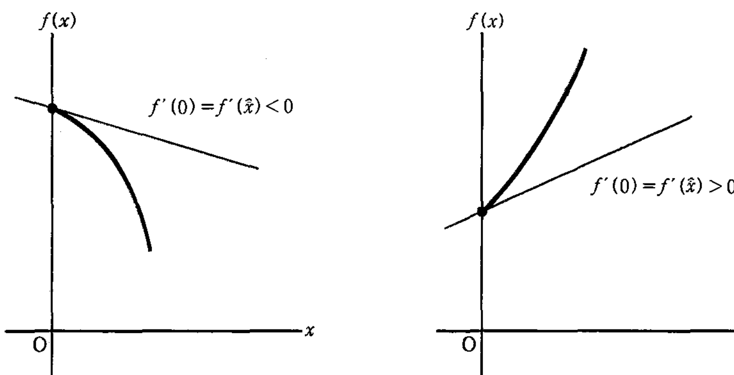
となる。(4.2.7)は，任意の $y \geqq 0$ に対して成立するから，まず，$y_i = \lambda > 0$ とし，y のそのほかの成分を 0 とおき，(4.2.7)の右辺を μ（＝定数）とおけば，

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i} \leqq \frac{\mu}{\lambda}$$

上式において，$\lambda \to \infty$ にすると，右辺は 0 に収束して (i) をうる。したがって，(4.2.7)の右辺は，$\hat{x} \geqq 0$ と (i) から非正である。つぎに，(4.2.7)において，$y = 0$ とすると $0 \leqq$ 右辺，ゆえに，(ii) をうる。

なお，最小値についても同様に証明できる（証了)。

この補助定理の意味は，次の図3から明らかであろう。



(i) 境界での最大値　(ii) 境界での最小値

図3

3. Slater の制約想定と Karlin の制約想定

Kuhn-Tucker 乗数ベクトルの存在を保証するために，制約関数 g に課せられる条件は，通常制約想定とよばれる。制約想定は多数存在するが，ここでは，いくつかの制約想定をあげておくことにする。[3]

(1) Kuhn-Tucker の制約想定

(2) $\nabla g_1(\hat{x})$, $\nabla g_2(\hat{x})$, $\cdots$, $\nabla g_m(\hat{x})$ の1次独立性

(3) $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x)$ が線形関数である。

(4) Slater の制約想定

(5) Karlin の制約想定

(6) Arrow-Hurwicz-Uzawa の制約想定

拙稿〔1〕においては，上述の制約想定のなかから(4)，(5)だけをとりあげた。以下では，制約関数 g は，凸集合 $M \subset R^n$ 上の m 次元凹ベクトル値関数であると仮定する。

Slater の制約想定　M 内に $g(x^0) > 0$ となる点 x^0 が存在する。

Karlin の制約想定　任意の $y \geq 0$ に対して，$y \cdot g(x^0) > 0$ を満たす点 x^0 が M 内に存在する。

そうして，次の定理が成立することを述べた。

定理　Slater の制約想定は Karlin の制約想定と同値である。

この定理を証明するために，Fan-Glicksberg-Hoffman〔2〕による一般化された Goldan の定理を用いる。[4]

補助定理（一般化された Goldan の定理）　f を凸集合 $X \subset R^n$ 上の m 次元凸ベクトル値関数とすると，

$$f(x) < 0 \text{ に解が存在する,} \tag{3.1}$$

または

$$p \cdot f(x) \geqq 0 \quad (\text{すべての } x \in X, \text{ ある } p \geq 0, p \in R^m \text{ に対して}) \tag{3.2}$$

のいずれか一方だけが成り立つ。

それでは，この補助定理を用いて，Slater の制約想定と Karlin の制約想定の同値性を証明しよう。[5]

定理の証明　（必要性） Slater の制約想定が成り立つならば，$g(x^0) > 0$。ゆえに，$y \geq 0$ に対して $y \cdot g(x^0) > 0$。すなわち，Karlin の制約想定が成り立つ。

（十分性） Karlin の制約想定が成り立つならば，すべての $x \in M$ に対して $y \cdot g(x) \leqq 0$ となる $y \geq 0$ が存在しない。すると，上述の補助定理（一般化された Goldan の定理）により，(3.2)は成立しないから，(3.1) が成立する。したがって，$g(x) > 0$ に解，たとえば，$x^0 \in M$ が存在する。すなわち，Slater の制約想定は満たされる（証了）。

(1992. 9 . 23)

注

(1) 補助定理 3.1の証明は Takayama〔5〕 pp. 84-85, 補助定理 4.1の証明は二階堂〔3〕 pp. 207-208, および補助定理 4.2の証明は二階堂〔3〕 pp. 180-181 を参照。

(2) Takayama〔5〕 p. 85 を参照。

(3) 制約想定については，たとえば，Takayama〔5〕の Chapter 1 の Section B, Section D および Appendix to Section D を参照せよ。

(4) Fan-Glicksberg-Hoffman〔2〕 p. 618 および p. 620 を参照せよ。

(5) Takayama〔5〕 p. 77 を参照。

参　考　文　献

[1] 千葉昌夫「最適化問題」,『広島経済大学経済研究論集』, 第14巻第4号, 1992.

[2] Fan, K., Glicksberg, I. and A. J. Hoffman, "Systems of Inequalities Involving Convex Functions," *American Mathematical Society Proceedings*, 8, 1957.

[3] 二階堂副包『現代経済学の数学的方法』, 岩波書店, 1960.

[4] Nikaido, H., *Convex Structures and Economic Theory,* Academic Press, 1968.

[5] Takayama, A., *Mathematical Economics,* 2nd ed., Cambridge University Press, 1985.