広島経済大学研究論集
第28巻第4号　2006年3月

インポータンスサンプリングによる株価経路の生成

高　石　哲　弥*

1. は じ め に

オプション価格の公式として1973年に得られたブラック・ショールズ式が知られている。この式はヨーロピアンオプションの価格の値を解析的に与えることができ，その後の研究に影響を与えた。しかし，複雑なペイオフを持つオプションの場合は解析値を与えることができず，数値計算を行なう必要がある。

数値計算を行なう方法はいくつか存在し，例えば以下の方法がある。

- 有限差分法
- ツリー法
- モンテカルロ法

モンテカルロ法では株価の経路（ここでは原資産を株価と仮定する）を乱数を利用して生成する。一般的には株価が幾何ブラウン運動に従うと仮定し，株価経路を時間発展させる。最近，株価の経路を違った見方で生成する方法が提案されている。その方法では，株価の経路の確率分布を考え，株価経路をメトロポリス法[(1)(2)]で生成する[(3)]。メトロポリス法はインポータンスサンプリングを行なう一般的な方法で唯一の方法ではない。本研究ではハイブリッドモンテカルロ法による株価生成を行い，その方法がメトロポリス法よりも有効であることを示す。また，実際に経路依存型のオプション（アジアンオプション）価格を計算し従来の方法と結果が同じになることを確かめる。

2. オ プ シ ョ ン

オプションには様々なタイプが存在する。またそれぞれのタイプには，原資産を購入する権利であるコールオプションと売却する権利であるプットオプションが存在する。以下では3種類のオプションを例として述べる。また主にコールオプショ

* 広島経済大学経済学部助教授

ンを考える。

● ヨーロピアンオプション

権利行使日（満期日）にあらかじめ決められた価格（行使価格 K）で資産 S を購入（売却）する権利。満期日のペイオフはコールオプションの場合 max (S−K, 0) となる。

● アメリカンオプション

満期日の任意の時点であらかじめ決められた価格（行使価格）で資産 S を購入（売却）する権利。

● アジアンオプション

満期日までの資産 S の価格時系列の平均値を m とすると，max（m−K, 0）受け取れる権利。

ヨーロピアンオプションの場合，ペイオフは満期日の資産価格のみによるが，アメリカン，アジアンオプションの場合は満期日以外の資産価格にも依存する。このことがオプション価格の計算を難しくしている。

図 1 は株価経路とペイオフの関係を表している。ヨーロピアンオプションの場合，ペイオフは満期日 T での株価のみに依存するのでペイオフは max（S_n−K, 0）となる。アメリカンオプションでは満期日までの任意の時刻で権利が行使でき，S_t を行使時での株価とするとペイオフは max（S_t−K, 0）になる。アジアンオプションのペイオフは max（m−K, 0）となる。ここで，m は満期日までの各時刻での株価を足し合わせて平均をとった値である。

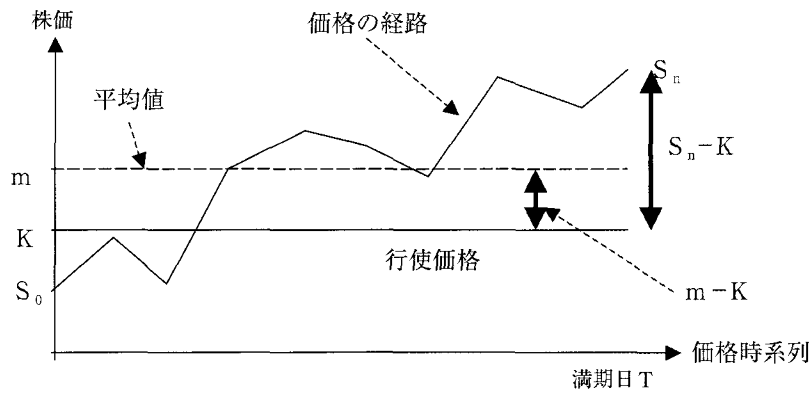

図 1　株価経路とペイオフ（コールオプション）

3．株　価　変　動

株価の変動は幾何ブラウン運動に従うと仮定する。株価を S, 利子率を r, ボラティィリティを σ, W をウィーナー仮定とすると株価の変動は式（1）で表される。

$$dS = rSdt + \sigma SdW \tag{1}$$

$z = \ln S$ と置くと式（1）は

$$\begin{aligned} d(\ln S) &= dz = Adt + \sigma dW \\ &= Adt + \sigma\varepsilon\sqrt{dt} \end{aligned} \tag{2}$$

となる。ここで ε は標準偏差 1，平均ゼロの正規分布に従う確率変数である。また，$A = r - \sigma^2/2$ である。A が r でないのは S が確率変数（従って，lnS も確率変数）であるため単純な微分の法則が適応されず，いわゆる伊藤の確率微分が適応されるからである。

式（2）は dt 時間後に確率変数 z がどう変化するかを表している。この式を確率変数 z が t 時間後に z_0 から z_n に変化する遷移確率 $p(z_n|z_0)$ で表現すると式（3）となる。

$$p(z_n|z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(\frac{-(z_n - (z - At))^2}{2\sigma^2 t}\right) \tag{3}$$

$p(z_n|z_0)$ を Chapman-Kolmogorov の式を利用すると，時間 t を dt の微小時間で区切ることができる（式（4））。

$$p(z_n|z_0) = \int dz_n dz_{n-1} \cdots dz_1 dz_0 p(z_n|z_{n-1}) p(z_{n-1}|z_{n-2}) \cdots p(z_1|z_0) \tag{4}$$

式（4）の各々の $p(z_j|z_{j-1})$ は式（3）で表される dt 時間後の遷移確率であるから，代入して整理すると式（5）が得られる

$$p(z_n|z_0) = \int dz_n dz_{n-1} \cdots dz_1 dz_0 \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2 dt)^n}} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{(z_j - (z_{j-1} - Adt))^2}{2\sigma^2 dt}\right) \tag{5}$$

ここで式（5）の被積分の中を

$$p(z_n, z_{n-1}, \cdots, z_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2 dt)^n}} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{(z_j - (z_{j-1} - Adt))^2}{2\sigma^2 dt}\right) \tag{6}$$

と置くと，$p(z_n, z_{n-1}, \cdots, z_0)$ は確率変数 $z_n, z_{n-1}, \cdots, z_0$ に対する確率分布となっている。また，確率変数 $z_n, z_{n-1}, \cdots, z_0$ は各時刻での株価に対応するものであるから，$p(z_n, z_{n-1}, \cdots, z_0)$ は $z_n, z_{n-1}, \cdots, z_0$ に対応する株価経路が生成される確率となっている。

4．インポータンスサンプリング

ある関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積を x＝a から x＝b まで積分することを考える。$g(x)$ $f(x)$ が良く知られた関数で解析的に積分を実行することが可能であれば積分値を精確に与えることができるが，一般には解析的に積分が実行できるとはかぎらない。解析的に積分が実行できないときは近似的な方法が取られる。近似的な方法の一つは以下のように a から b の積分区間を n 等分して

$$\int_a^b g(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} g(x_i)f(x_i)\Delta x \tag{7}$$

ここで $\Delta x = (b-a)/n, x_i = a + (i-1)\Delta x$ である。

この方法は関数 $g(x)$ $f(x)$ の変化が積分区間に渡って単調であれば有効であるが，ある領域で極端に変化が激しい場合は正確な値を求めるのは難しい。このような場合に有効な方法としてインポータンスサンプリングを行なう方法がある。この方法では $f(x)$ を正値と仮定して，$f(x)$ を確率と見なし，この確率で x をサンプリングする（ここでは $g(x)$ は単調に振舞うとする)。そして，n 個の x_i をサンプリングしたとすると，その n 個を利用して積分値の近似値が式（8）で得られる。

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} g(x_i) \tag{8}$$

以上，$g(x)$ $f(x)$ の積分値をインポータンスサンプリングで求めることについて述べたが，この積分値は確率分布 $f(x)$ に従う x のもとでの $g(x)$ の期待値を求めたことに対応する。

以下では，インポータンスサンプリングを行なう2つの方法について述べる。

4－1 メトロポリス（Metropolis）法

メトロポリス法はインポータンスサンプリングを行なうもっとも一般的な方法である。$f(x)$ を便宜上式（9）で置き換える。

$$f(x) = \exp(-h(x)) \tag{9}$$

この確率分布のもとでの $g(x)$ の期待値は

$$\langle g(x)\rangle = \int g(x)\exp(-h(x))dx \tag{10}$$

となる。式（10）をメトロポリス法で求める方法は以下のとおりである。

● *ステップ1*

x の配位として x_{old} が与えられているとする。x の新しい候補 x_{new} を選択する。普通この x_{new} はランダムに選択される。

● *ステップ2*

$\Delta h = h(x_{new}) - h(x_{old})$ を計算し，$\min(1, \exp(-\Delta h))$ の確率で x_{new} を次の新しい配位とする。x_{new} が選ばれなければ x_{old} を保持する。ここで，$\min(1, \exp(-\Delta h))$ の意味するところは，Δh が正であれば $\exp(-\Delta h)$ の確率で x_{new} を選択し，負であれば x_{new} を常に選択するということである。

以上のステップ1と2を繰り返し，x の配位を複数個生成する。n 個生成したとすると $g(x)$ の期待値は式（8）で近似される。このように新しい配位を次々に生成してゆくことをアップデイトという。

図2は株価経路のアップデイトの様子を表している。図中の実線はアップデイトの前の株価経路である。ある時刻の x に対してメトロポリス法を実行する。新しい経路の候補 x' に対して，$\min(1, \exp(-\Delta h))$ の確率でこの候補を新しい経路として選択する。選択されれば点線が新しい経路となるが，選択されなければもとの経路を保持する。このような変更をすべての時刻に対して実行する。

候補 x' はランダムに選ぶが，株価の上限はない（無限大を取れる）ので，選び方には任意性がある。本研究では式（11）に従って候補を選んだ。

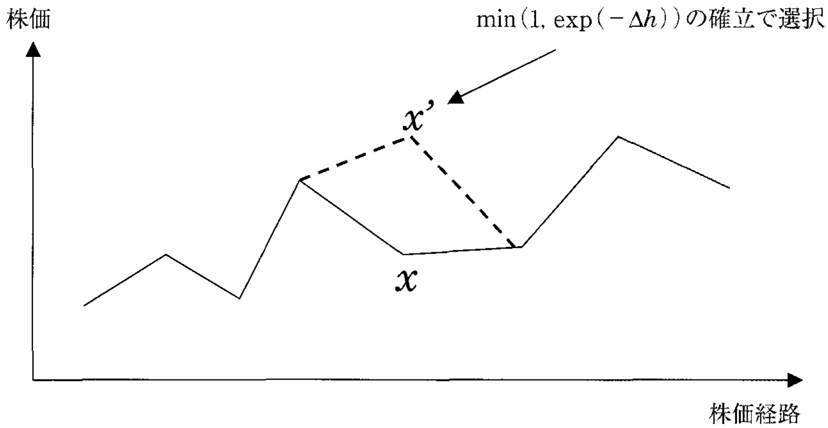

図2　株価経路のアップデイト

$$x' = x + d\sigma(\varepsilon - 0.5) \tag{11}$$

この式で，σ はボラティリティ，ε は［0, 1］の一様乱数，また，d は新しい候補を選ぶアクセプタンスを調節するパラメータである。

4－2　ハイブリッドモンテカルロ（Hybrid Monte Carlo）法

メトロポリス法は一般的な方法で応用性が高く，多変数積分の場合にも容易に適応可能である（株価経路の場合も多変数積分である）。多変数積分の場合，変数は一つずつアップデイトされてゆく。変数が一つずつアップデイトされてゆくことをローカルアップデイトという。原理的には複数の変数を一度にアップデイトすることも可能であるが，複数の変数が一度に変更された場合，Δh の値が大きくなり x_{new} が選択される確率が非常に小さくなってしまい，実際上この方法は破綻する。

積分する関数によっては変数を一度にアップデイト（グローバルアップデイト）したほうが効率が良い場合がある。ここでいう効率が良いとは，アップデイトのための時間が短いこと，及び生成された配位間の相関が短いことさす。配位は独立な配位が望まれるが，実際には何らかの相関があり独立ではない。相関の短い配位を生み出す手法が効率の良い手法ということになる。

グローバルなアップデイトを行なう方法としてハイブリッドモンテカルロ法[(1)]が知られている。ハイブリッドモンテカルロ法は分子動力学法とメトロポリス法を組み合わせた方法である。メトロポリス法では新しい配位の候補を選ぶときにランダムに選ばれるが，ハイブリッドモンテカルロ法では分子動力学法を使って選ぶ。分子動力学法を利用することによってグローバルなアップデイトでも Δh を小さくすることができ，メトロポリス法を実行することが可能となる。

分子動力学法ではハミルトン方程式を解いて新しい配位の候補を生成する。ハミルトン方程式では配位変数 x とそれに共役な運動量 p が現れる。しかし，もともとの積分される関数に運動量は存在しない。そこで，式（12）のように運動量 p が導入される。

$$\int g(x)\exp\left(-\frac{1}{2}p^2 - h(x)\right)dxdp \tag{12}$$

一見するとこの式は式（10）とは違ったものを求めているようであるが，運動量は配位変数とは結合していないので何のダイナミクスもなく，単に定数を与えるだけである。この定数はインポータンスサンプリングの中では寄与しないので，式（12）は式（10）と同じ結果を与える。

ハミルトン方程式は以下で与えられる方程式である。

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p} \tag{13}$$

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{14}$$

ここで $H \equiv H(p, x)$ はハミルトニアンと呼ばれる関数でここでは式（15）で定義される。

$$H(p, x)=\frac{1}{2}p^2+h(x) \tag{15}$$

式（12）はインポータンスサンプリングの観点から見ると p と x の変数を持った関数に対してインポータンスサンプリングを行なうことに対応する。つまり，$\exp(-H(p, x))$ の確率で p, x を生成して $g(x)$ の期待値を求めることになる。

ハミルトン方程式を利用することの利点は，ハミルトン方程式はハミルトニアンを保存することである。つまり，$\Delta H=H_{new}-H_{old}$ が常にゼロとなり，新しい配位を選択する確率 $\min(1, \exp(-\Delta H))$ が常に1となる。しかし，一般にはハミルトン方程式を解析的に解けないので数値的に解くことになり，この場合 ΔH はゼロとはならならず小さな値をとる。ただ，この場合でも ΔH は小さな値であるから新しい配位を選択する確率はグローバルアップデイトをしたメトロポリス法よりもずっと高くなる。本研究ではハミルトン方程式を解くために2次の Leapfrog 法を利用した。

5．オプション価格

ここではオプション価格をペイオフの期待値として求める。株価が t 時間後に S_0 から S_n に変化するとする。また，ペイオフ関数を $O(S)$ とする。ペイオフが満期日の株価のみに依存するとすると，ペイオフの期待値は式（16）で与えられる。ここでは株価を3章同様 $z=\ln S$ の関数として扱っている。

$$\left\langle Oe^{-rt}\right\rangle=\int dz_n O(z)p(z_n|z_0)e^{-rt} \tag{16}$$

ペイオフが株価の経路に依存するとペイオフの期待値は式（17）となる。

$$\left\langle Oe^{-rt}\right\rangle=\int dz_n dz_{n-1}\cdots dz_1 dz_0 O(z_n, z_{n-1}, \cdots, z_1, z_0)p(z_n, z_{n-1}, \cdots, z_1, z_0)e^{-rt} \tag{17}$$

ここで，$p(z_n, z_{n-1}, \cdots, z_1, z_0)$ は式（6）で与えられる株価経路の確率である。インポータンスサンプリングで式（17）の期待値を求めるには，$p(z_n, z_{n-1}, \cdots, z_1, z_0)$

の確率で株価経路を生成し，その経路でのペイオフの平均値を求めればよい。

6．株価経路の生成

6－1　メトロポリス法とハイブリッドモンテカルロ法による株価経路

以下ではメトロポリス法とハイブリッドモンテカルロ法によって生成した株価経路を示す。株価経路の生成に用いたパラメータは次である。利子率 $r=0.05$, ボラティリティ $\sigma=0.01$, 満期日までの時刻 $T=1$（1year），$dt=T/100=1/100$, 初期株価 $S_0=100$ である。

図3はメトロポリス法によって生成していった株価経路の満期日における値をプロットしたものである。式（11）においては $d=0.4$ としている。この場合，新しい経路の候補を選ぶ確率は約50パーセントになっている。経路が独立に生成されていれば満期日における値はランダムになっているはずであるが，図3はランダムにはなっておらず，大きな相関があることを示している。

図4はメトロポロリス法によって生成した株価の経路を1000アップデイト毎にプロットしたものである。経路は1000アップデイト離れているにもかかわらず，すべて似たような経路をとっており，この結果も大きな相関があることを示している。

どの程度相関があるかを調べるために，ln（S_{100}）についての自動相関関数を計

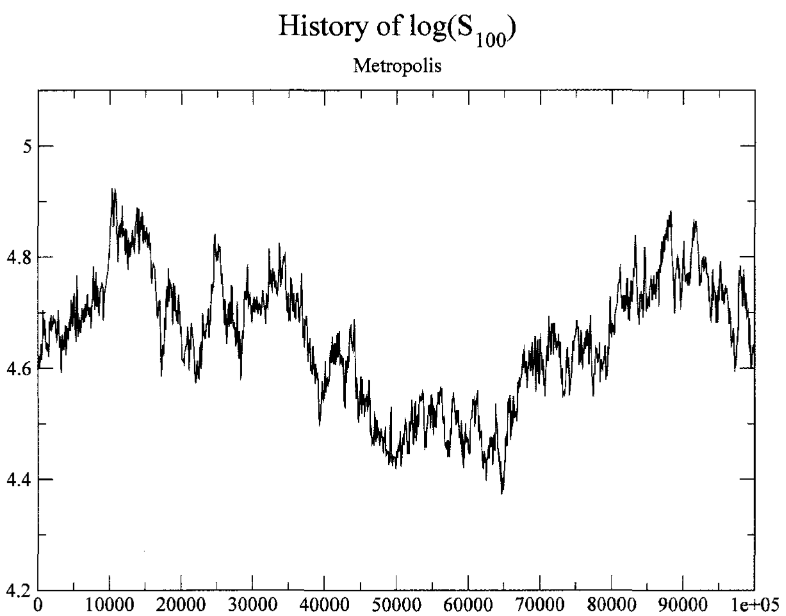

図3　メトロポリス法による ln（S_{100}）のヒストリー

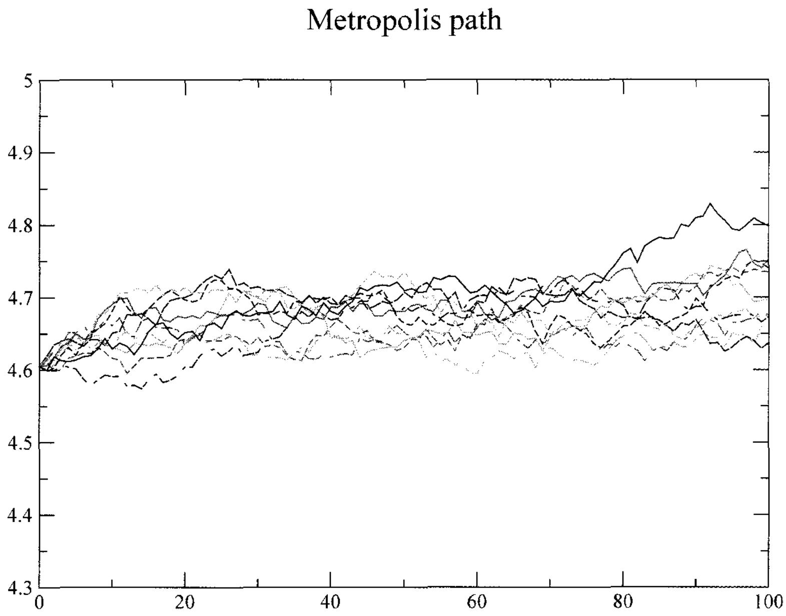

図4　メトロポリス法による株価経路の例

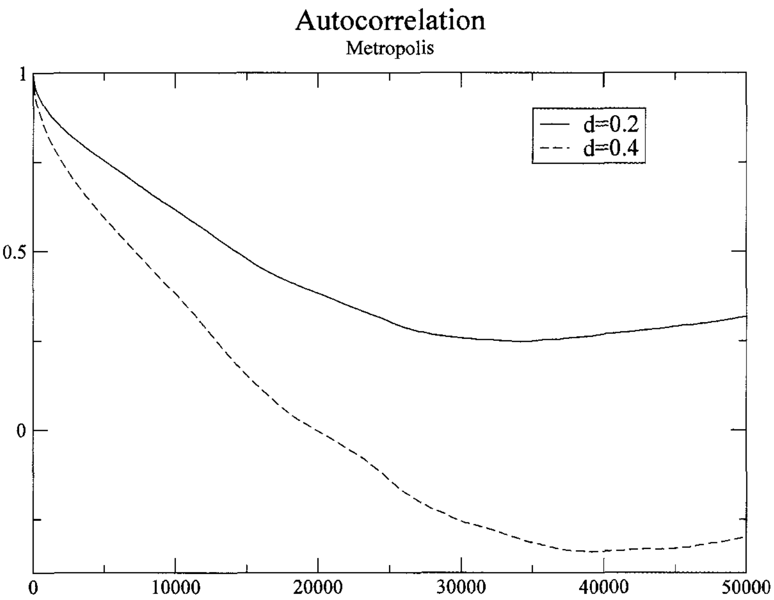

図5　メトロポリス法での ln (S_{100}) の自動相関関数

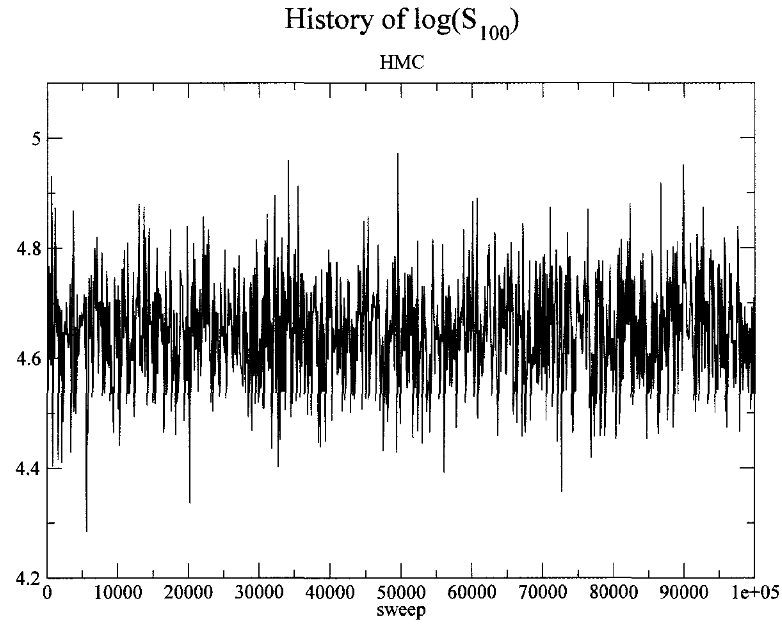

図6　ハイブリッドモンテカルロ法による ln（S_{100}）のヒストリー

算した。結果は図5にプロットしている。図中の d は経路の候補を選ぶ際に利用した式（11）で使用した値である。d の値に対して自動相関関数は多少違ってくるが，どちらの場合も株価経路間の相関は数万アップデイトある。これは非常に長い相関があることを示している。

図6はハイブリッドモンテカルロ法によって生成した ln（S_{100}）のヒストリーである。図3と比較して分かるように，図6では ln（S_{100}）がかなりランダムに近く生成されていることがわかる。

図7はハイブリッドモンテカルロ法によって生成した株価経路を100アップデイト毎にプロットした例である。図4と比較して，株価経路がかなりばらついており，ランダムな経路に近いことがわかる。

自動相関関数は図8に示してある。この図からわかるように，相関は数アップデイトでほぼ消滅している。従って，ハイブリッドモンテカルロ法の方が早く独立な株価経路を生成していることがわかる。

メトロポリス法とハイブリッドモンテカルロ法では生成される経路間の相関がかなり違い，相関の短いハイブリッドモンテカルロ法の方が有効であることがわかったが，両方法とも理論上は正しい方法なので，経路のデータ数が多い場合は同じ結果を導く。

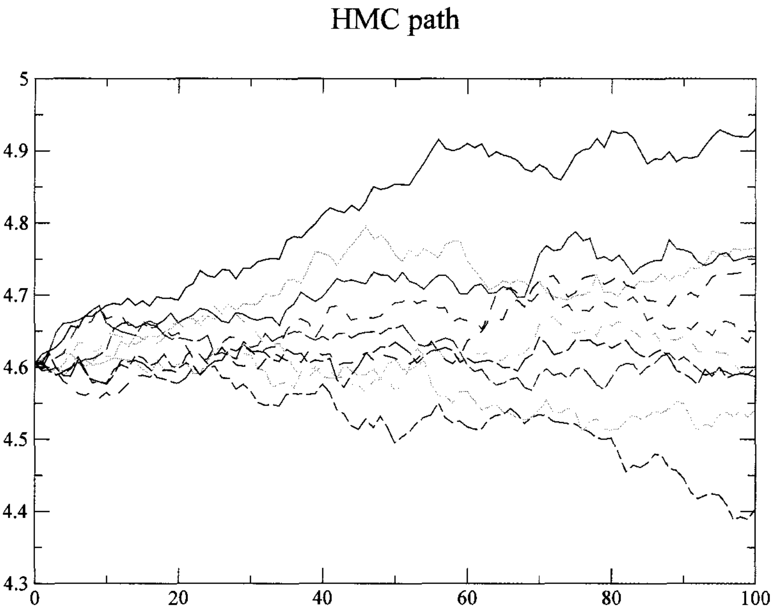

図７　ハイブリッドモンテカルロ法による株価経路の例

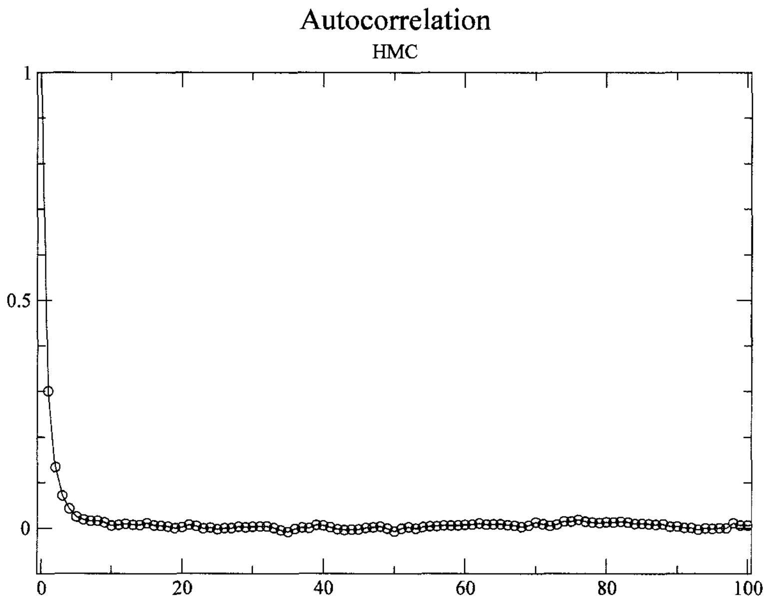

図８　ハイブリッドモンテカルロ法での ln（S_{100}）の自動相関関数

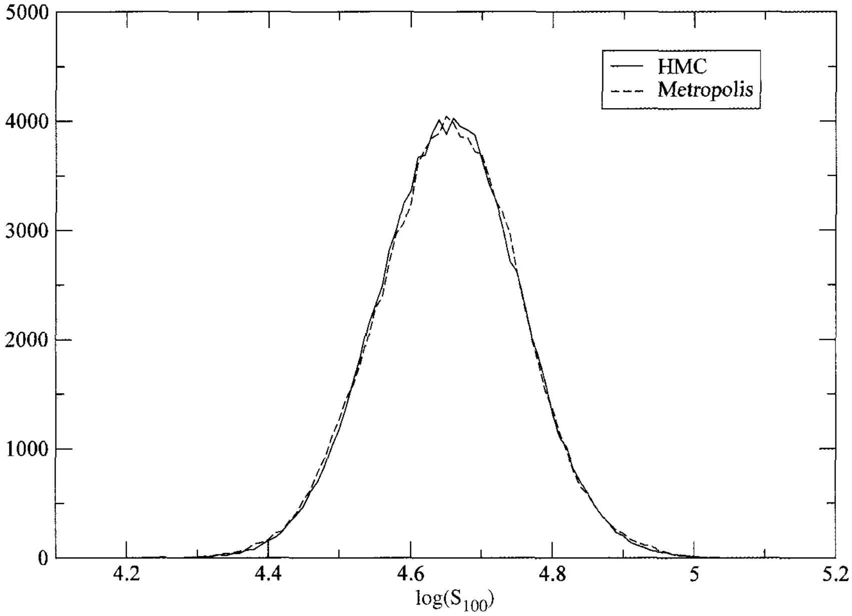

図9　ln（S_{100}）の分布関数

図9は100アップデイト毎に記録した10万データからなる ln（S_{100}）の分布を表している。メトロポリス法，ハイブリッドモンテカルロ法ともほぼ同じ分布となっており，両手法が同じ結果を出していることがわかる。

6－2．アジアンオプション価格の計算

以下では，メトロポリス法及びハイブリッドモンテカルロ法により生成した株価経路を利用してアジアンオプションの価格を計算する。アジアンオプションではペイオフが株価経路に依存し，一般に解析値は求められないのでモンテカルロ法等の手法に頼ることになる。

アジアンオプションのペイオフは式（18）で与えられる。

$$
\begin{aligned}
O(z_n,\cdots,z_0) &= \max\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k - K, 0\right) \\
&= \max\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \exp(z_k) - K, 0\right)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

生成した経路ごとに式（18）を計算し，その平均を求めることによってアジアンオプションの価格を見積もることができる。

以下の計算では次のパラメータ値を利用した。利子率 r＝0.095，ボラティリティ

$\sigma=0.2$, 満期日までの時刻 $T=1$（1year），$dt=T/100=1/100$, 初期株価 $S_0=100$ である。

表１に３つの行使価格に対するアジアンオプションの価格を計算した結果をまとめてある。ここで使用した株価経路のデータ数は，メトロポリス法では40万（100アップデイト毎），ハイブリッドモンテカルロ法は40万（10アップデイト毎），モンテカルロランダムウォークは20万である。

モンテカルロランダムウォーク（MCRW）は式（２）を利用してデータを生成する方法で，株価経路の生成に利用される一般的な方法である。表１の MCRW の結果は参考文献[(4)]による結果である。

図10から12は表１の結果を行使価格別にプロットしたものである。ハイブリッドモンテカルロ法とモンテカルロランダムウォークの結果はほぼ等しい結果を与えていることが分かる。一方，メトロポリス法の結果は，K＝100 においてはかなりず

表１

行使価格	K＝60	K＝100	K＝150
メトロポリス（Metropolis）法	40.923（18）	7.147（14）	0.0051（3）
ハイブリッドモンテカルロ（HMC）法	40.86（2）	6.923（13）	0.0063（4）
モンテカルロランダムウォーク（MCRW）	40.830（25）	6.899（19）	0.0054（5）

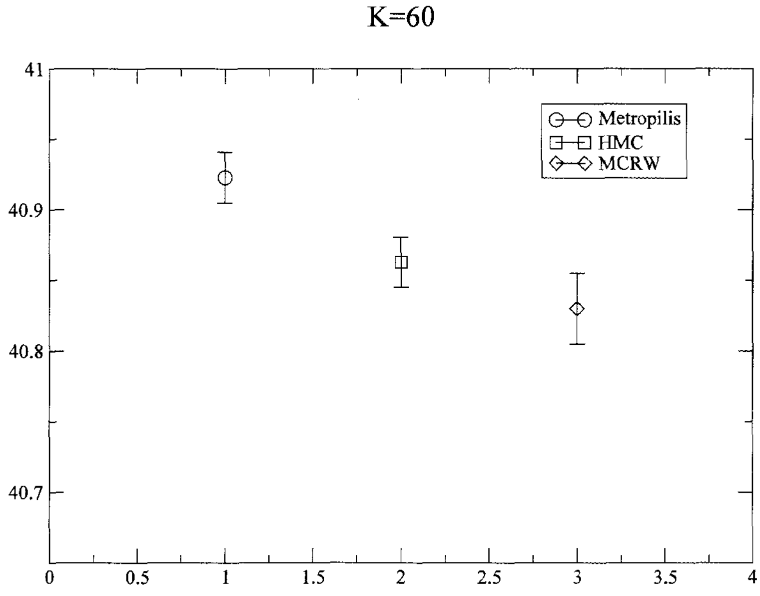

図10　行使価格 K＝60

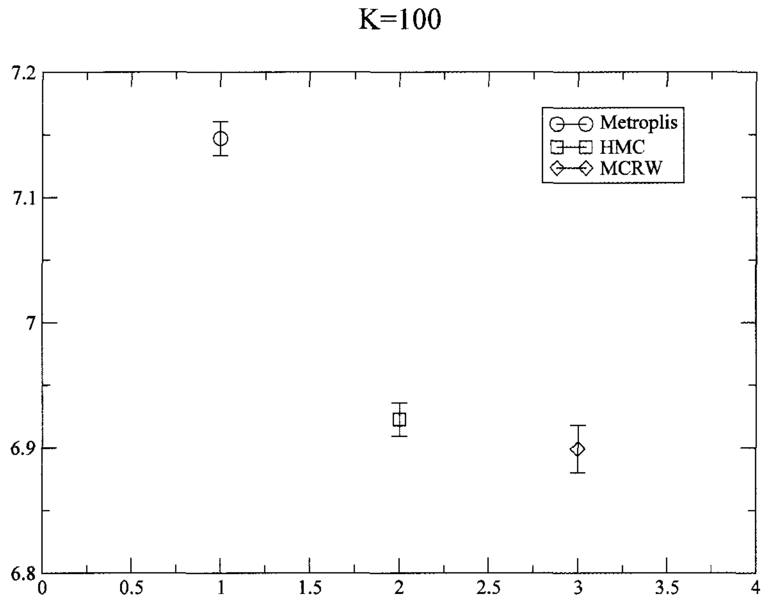

図11 行使価格 K＝100

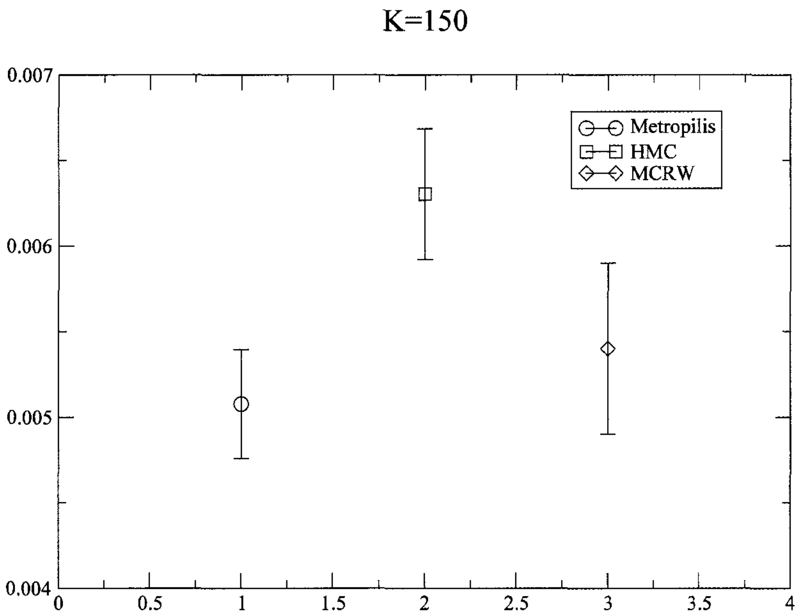

図12 行使価格 K＝150

れた結果を与えている。これは，メトロポリス法のデータは相関が高いので，ここでの40万のデータからは正確な値を求めるのは不十分であったことを示していると思われる。しかし，データ数を増やせばメトロポリス法の結果も他の結果と一致すると思われる。

7. ま と め

本研究ではインポータンスサンプリングによる株価経路の生成法を研究した。メトロポリス法とハイブリッドモンテカルロ法による生成では，ハイブリッドモンテカルロ法がより早く独立な株価を生成しており有効であることが判明した。

アジアンオプションの計算ではハイブリッドモンテカルロ法とランダムウォークの結果とが一致することが示された。

インポータンスサンプリングは株価経路を与える手法の１つであると言えるが，従来の手法（ランダムウォーク）に勝っているわけではない。特に，生成される株価経路間に相関があるのがボトルネックである。インポータンスサンプリングが有効となる事例が存在するかどうかは現段階でははっきりしない。将来，そのような事例が発見できればインポータンスサンプリングの利用価値が出てくるであろう。

参 考 文 献

(1) S. Duane, A. D. Kennedy B. J. Pendleton and D. Roweth (1987) Hybrid Monte Carlo, Physics Letters B 195, Pages 216–222

(2) S. Gottlieb, W. Liu D. Toussaint, R. L. Renken, R. L. Sugar (1987) Hybird-molecular-dynamics algorithms for the numerical simulation of quantum chromodynamics, Physical Review D 35, Pages 2531–2542

(3) Belal E. Baaquie, Claudio Coriano, Marakani Srikant (2004) Hamiltonian and Potentials in Derivative Pricing Models: Exact Results and Lattice Simulations, Physica A334, Pages 531–557

(4) G. Bormetti, G. Montagna, N. Moreni O. Nicrosini (2004) Pricing Exotic Options in a Path Integral Approach, arXiv. cond-mat/0407321

(5) T. Takaishi (2000) Choice of Integrator in the Hybrid Monte Carlo Algorithm, Computer Physics Communications 133, Pages 6–17

(6) 湯前祥二，鈴木輝好（2000）モンテカルロ法の金融工学への応用　朝倉書店

(7) 森平爽一郎，小島　裕（1997）コンピュテーショナルファイナンス　朝倉書店

(8) S. N. ネフツィ（1999）ファイナンスへの数学　朝倉書店