最適化問題：消費者と生産者への応用

千　葉　昌　夫

1. はしがき

与えられた制約条件の下で目的関数を最大化（あるいは最小化）する解を見い出す問題を最適化問題あるいは計画問題という。制約関数および目的関数が一般の非線形関数であるとき，その問題を非線形計画問題という。

ミクロ経済学の問題は，なんらかの非線形の制約関数の条件の下で非線形の目的関数を最大化（あるいは最小化）する問題として定式化される。それらを解析するためには，第2節で説明する Kuhn-Tucker 定理がきわめて顕著な威力を発揮してくれる。第3節では効用最大化問題，第4節では支出最小化問題をとりあげる。第5節では，双対性を利用して Slutsky 方程式を導出する。第6節では利潤最大化問題を説明する。なお，費用最小化問題は，支出最小化問題と形式的にはまったく同じなのでとりあげない。

2. Kuhn-Tucker 定理

次のような非線形計画問題を考えよう。$x \in M \subset R^n$, $f: M \to R$, g_i : $M \to R$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x))$ として，

$$\begin{aligned} &\text{Max } f(x) \\ &\text{s.t. } g(x) \geqq 0 \qquad\qquad (2.1) \\ &\quad x \in M \subset R^n \end{aligned}$$

で表わされる最大化問題である。

制約条件つき最大化問題に対する Lagrange 関数 $K: M \times R_{+}^{m} \to R$ を(2.2)のように定義する。ただし，$M \times R_{+}^{m} \equiv \{(x, y) \mid x \in M, y \in R_{+}^{m}\}$ である。

$$K(x, y) = f(x) + y \cdot g(x) \tag{2.2}$$

ここで $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ は Kuhn-Tucker 乗数ベクトルである。$y \cdot g(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x)$ である。以下の記法も同様に内積を表わすものとする。

さて，ここで，問題(2.1)が最適解 $\hat{x}$ あるいは最適値 $f(\hat{x})$ をもつ必要十分条件を証明なしで述べておこう。[1]

Kuhn-Tucker 定理 $M = R_{+}^{n}$ で $f(x)$, $g_i(x)$ が R_{+}^{n} で連続な偏導関数をもち，かつ，凹関数であるとする。そして，$g(x)$ が

Slater の制約想定 M 内に $g(x^0) > 0$ となる点 x^0 が少くとも一つ存在する，

を満たすとする。すると問題(2.1)が最適値をもつ必要十分条件は，非負ベクトル $\hat{x}$, $\hat{y}$ が存在して，

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i \frac{\partial g_i(\hat{x})}{\partial x_j} \leqq 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \left(\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i \frac{\partial g_i(\hat{x})}{\partial x_j} \right) = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y_i} = g_i(\hat{x}) \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{2.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i \frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i g_i(\hat{x}) = 0 \tag{2.6}$$

が成立することである。

(2.3)－(2.6)を Kuhn-Tucker 条件とよぶ。Kuhn-Tucker 条件のなかで，等号で表わされている(2.4)，(2.6)から次のことがいえる。

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i \frac{\partial g_i(\hat{x})}{\partial x_j} < 0 \text{ ならば，} \hat{x}_j = 0$$

$$(j = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.7}$$

$$g_i(\hat{x}) > 0 \text{ ならば，} \hat{y}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{2.8}$$

これらの条件は，非線形計画法における相補条件として知られている。(2)

第3節から第6節においては，目的関数と制約関数は微分可能な凹関数であり，制約関数は Slater の制約想定を満たすものと仮定する。

3. 効用最大化問題

消費者は予算の制約の下で効用を最大化する。(3) 消費者の財ベクトルを $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，効用関数を

$$u(x) = u(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{3.1}$$

とする。ただし，u は凹関数とする。価格ベクトルを $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n) > 0$ とし，所得を $I > 0$ とする。すると，この消費者の解くべき問題は

$$\begin{aligned} &\text{Max } u(x) \\ &\text{s.t. } I - p \cdot x \geqq 0 \\ &\qquad x \geqq 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

と定式化される。ただし $p \cdot x = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$ である。これは，非線形計画問題のひとつである。Kuhn-Tucker 乗数を y で表わして，Lagrange 関数をつくる。

$$K(x, y) = u(x) + y(I - p \cdot x) \tag{3.3}$$

Slater の制約想定が満たされているから，問題(3.2)が最適値をもつ必要十分条件は，$\hat{x} \geqq 0$ と $\hat{y} \geqq 0$ とが存在して，

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x_j} = \frac{\partial u(\hat{x})}{\partial x_j} - \hat{y} p_j \leqq 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \left(\frac{\partial u(\hat{x})}{\partial x_j} - \hat{y} p_j\right) = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y} = I - p \cdot \hat{x} \geqq 0 \tag{3.6}$$

$$\hat{y}\frac{\partial K(\hat{x},\hat{y})}{\partial y}=\hat{y}\,(I-p\cdot\hat{x})=0 \tag{3.7}$$

が成立することである。

この問題の解 $\hat{x}$ と Kuhn-Tucker 乗数 $\hat{y}$ は

$$\hat{x}_j=\hat{x}_j(p,\ I) \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{3.8}$$

$$\hat{y}=\hat{y}(p,\ I) \tag{3.9}$$

で表わされ，$\hat{x}_j(p,\ I)$ は通常の需要関数とよばれる。

すべての消費財の限界効用は正であると仮定する。すると，所得の増加は財の購入量を増加させ，効用を増加させる。したがって，所得の限界効用 $\hat{y}$ は正である。よって，相補条件より

$$I-p\cdot\hat{x}=0 \tag{3.10}$$

が成り立つ。すなわち，所得はすべて支出される。また(3.4)は

$$\frac{\partial u(\hat{x})}{\partial x_j}\leqq\hat{y}\,p_j \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{3.11}$$

となる。これは，所得の限界効用と価格の積が，その財の限界効用の上限であることを示している。相補条件より，x_j が購入されるならば，すなわち，$\hat{x}_j>0$ ならば

$$\frac{\partial u(\hat{x})/\partial x_j}{p_j}=\hat{y} \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{3.12}$$

が成立する。すなわち，実際に購入される財について，価格に対する限界効用の比は，所得の限界効用に等しい。これは，実際に購入される財については，限界代替率は価格比に等しいという周知の条件でもある。もし，(3.11)が強い不等式で成立するならば，相補条件により，その財は購入されない。すなわち $\hat{x}_j=0$ である。

問題(3.2)の解(3.8)を効用関数に代入した$(p,\ I)$の関数

$$v(p,\ I)=\max u(x)=u(\hat{x}_1(p,\ I),\ \hat{x}_2(p,\ I),\ \cdots,\ \hat{x}_n(p,\ I)) \tag{3.13}$$

を間接効用関数と呼ぶ。これは，任意の価格ベクトル $p>0$ と所得 $I>0$ に対して，$(p,\ I)$ の関数として最大効用の値を規定する。

通常の需要関数と間接効用関数との間には，次の重要な関係が成立する。[4]

Roy の恒等式　間接効用関数 $v(p, I)$ と通常の需要関数 $\hat{x}_j(p, I) > 0$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ に対して

$$\hat{x}_j(p, I) = -\frac{\partial v(p, I)/\partial p_j}{\partial v(p, I)/\partial I} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.14}$$

が成り立つ。

証明　間接効用関数(3.13)を p_j, I で偏微分して

$$\frac{\partial v}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\hat{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial p_j} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\hat{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial I} \tag{3.16}$$

を得る。$\hat{x}_j > 0$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ ならば，効用最大化の 1 階の条件は

$$\frac{\partial u(\hat{x})}{\partial x_j} - \hat{y}\, p_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.17}$$

$$I - p \cdot \hat{x} = 0 \tag{3.10}$$

と周知の条件になる。(3.17)と(3.15)，(3.16)とから

$$\frac{\partial v}{\partial p_j} = \hat{y} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial p_j} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \hat{y} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial I} \tag{3.19}$$

を得る。

一方，$\sum_{j=1}^{n} p_j \hat{x}_j = I$ を p_j, I で偏微分して

$$\hat{x}_j + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial p_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial I} = 1 \tag{3.21}$$

を得る。以上の 2 式を(3.18)，(3.19)に代入して

$$\frac{\partial v}{\partial p_j} = -\hat{y}\hat{x}_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \hat{y} \tag{3.23}$$

を得る。(3.22), (3.23)から (3.14)が得られる（証了）。

消費者行動理論において，Roy の恒等式は，通常の需要関数を求めるために用いられる。また，需要の計量経済学的研究においては，間接効用関数と Roy の恒等式はきわめて強力な分析用具とされている。

4.　支出最小化問題

消費者は，効用を少くともある一定水準 u に保たれるという制約条件の下で，支出 $p \cdot x$ を最小化するという問題を考えよう。[5] すなわち，この最小化問題は

$$\begin{aligned} &\text{Min } p \cdot x \\ &\text{s.t. } u(x) \geqq u \\ &\qquad x \geqq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

と定式化される。これも，非線形計画問題のひとつである。

$p \cdot x$ を最小化することは，$-p \cdot x$ を最大化することであるから，問題は

$$\begin{aligned} &\text{Max } -p \cdot x \\ &\text{s.t. } u(x) - u \geqq 0 \\ &\qquad x \geqq 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

と書きかえることができる。

y を Kuhn-Tucker 乗数として，Lagrange 関数をつくる。

$$K(x, y) = -p \cdot x + y(u(x) - u) \tag{4.3}$$

Slater の制約想定が満たされているから，問題(4.2)が最適値をもつ必要十分条件は，$x^* \geqq 0$ と $y^* \geqq 0$ とが存在して，

$$\frac{\partial K(x^*, y^*)}{\partial x_j} = -p_j + y^* \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} \leqq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \frac{\partial K(x^*, y^*)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(-p_j + y^* \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j}\right) = 0 \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial K(x^*, y^*)}{\partial y} = u(x^*) - u \geqq 0 \tag{4.6}$$

$$y^* \frac{\partial K(x^*, y^*)}{\partial y} = y^*(u(x^*) - u) = 0 \tag{4.7}$$

が成立することである。

問題の解 x^* と Kuhn-Tucker 乗数 y^* は

$$x_j^* = x_j^*(p, u) \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.8}$$

$$y^* = y^*(p, u) \tag{4.9}$$

で表わされ，$x_j^*(p, u)$ は補償需要関数とよばれる。$x^*(p, u)$ が補償需要関数とよばれるのは次のような理由による。[6] 価格が上昇したときには購買力が低下し，効用が低下するが，この新しい価格の下でも，価格変化前と同水準の効用を生むように所得補助をしたときの需要が，支出最小化問題の解だからである。

また，最小支出関数あるいは，簡単に支出関数は

$$M(p, u) = \min p \cdot x = p \cdot x^*(p, u) \tag{4.10}$$

で表わされる。

(4.4)は

$$y^* \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} \leqq p_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.11}$$

となる。これは，Kuhn-Tucker 乗数とある財の限界効用の積の上限がその財の価格であることを示している。ここで，内点解 $x_j^* > 0$ と $y^* > 0$ とを仮定するならば，相補条件より

$$-p_j + y^* \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.12}$$

$$u(x^*) - u = 0 \tag{4.13}$$

が成立する。(4.12)より

$$\frac{\partial u(x^*)/\partial x_i}{\partial u(x^*)/\partial x_j}=\frac{p_j}{p_i} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{4.14}$$

が成立する。これは，点 x^* において限界代替率が価格比に等しいことを示す。

支出関数(4.10)について Shephard の補題が成立する。[7] これは，Slutsky 方程式を導出する場合，非常に重要な役割を果たすものである。

Shephard の補題　$x_j^*(p,\ u)>0$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を補償需要関数とする。支出関数が $(p,\ u)$ で微分可能かつ $p_j>0$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ ならば

$$x_j^*(p,\ u)=\frac{\partial M(p,\ u)}{\partial p_j} \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{4.15}$$

が成立する。

証明　価格 p^* のとき効用 u を達成するために必要な支出を最小化する財ベクトルを x^* としよう。関数 $G(p)$ を

$$G(p)=M(p,\ u)-p\cdot x^* \tag{4.16}$$

と定義する。$M(p,\ u)$ の定義により $G(p)\leqq 0$ である。したがって $p=p^*$ のとき $G(p^*)=0$ である。すると，$p=p^*$ のとき $G(p)$ が最大値をとるから

$$\frac{\partial G(p^*)}{\partial p_j}=\frac{\partial M(p^*,\ u)}{\partial p_j}-x_j^*=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{4.17}$$

が成立する。よって(4.15)が証明された（証了)。

5.　Slutsky 方程式

第3節の効用最大化問題と第4節の支出最小化問題とから，つぎのことがいえる。任意の価格ベクトル p, 任意の効用水準 u, および任意の所得 I に対して，

$$M(p,\ u)=I \tag{5.1}$$

$$x_j^*(p,\ u)=\hat{x}_j(p,\ I) \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{5.2}$$

が成立する。[8] ここで，$x_j^*(p, u) = \hat{x}_j(p, I)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を p_i で偏微分すると，

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial p_i} + \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial I}\frac{\partial M}{\partial p_i} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.3}$$

を得る。Shepard の補題(4.15)と $x_i^* = \hat{x}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とから，(5.3)は

$$\frac{\partial \hat{x}_j}{\partial p_i} = \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} - \hat{x}_i\frac{\partial \hat{x}_j}{\partial I} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.4}$$

となる。これが Slutsky 方程式であり，右辺の第1項が代替効果であり，第2項が所得効果である。[9] 代替効果は，効用水準を一定に維持する場合の価格の変化が需要に与える影響である。所得効果は，価格低下（増加）を通じての実質的な購買力の増加（減少）の財の需要への影響である。所得効果にマイナスの符号がついているのは，p_i が上昇すればあたかも所得 I が減少するかのように需要に影響するからである。また $\hat{x}_i$ が乗ぜられているのは，p_i の1単位の減少（増加）は，$1\times\hat{x}_i$ 貨幣単位分の費用減少（増加）となり，あたかも名目所得が $\hat{x}_i$ だけ増加（減少）したかのような効果を与えるからである。(5.4)は，名目所得を一定とするときに，価格の変化による需要の変化は代替効果と所得効果の和になっていることを表わしている。[10]

6. 利潤最大化問題

企業は，生産関数の制約の下で利潤を最大化する。[11] 企業は n 種類の投入物を用いて1種類の生産物を生産するものとする。投入物のベクトルを $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とし，生産物を q とする。生産関数を

$$q = f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{6.1}$$

とする。投入物の価格ベクトルを $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ とし，生産物の価格を p とする。この企業の解くべき問題は次のように定式化される。

$$\text{Max } \Pi(q, x) = pq - w\cdot x$$

$$\text{s.t. } q = f(x) \tag{6.2}$$
$$x \geqq 0$$

ただし $w \cdot x = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$ である。企業は，収入 pq と費用 $w \cdot x$ の差である利潤 $\Pi(q, x)$ を最大化する投入量と産出量を決定する。

問題(6.2)は次のように書きかえることができる。

$$\text{Max } \Pi(x) = pf(x) - w \cdot x \tag{6.3}$$
$$\text{s.t. } x \geqq 0$$

Slater の制約想定が満たされているから，問題(6.3)が最適値をもつ必要十分条件は，$\hat{x} \geqq 0$ が存在して，

$$\frac{\partial \Pi(\hat{x})}{\partial x_j} = p\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j} - w_j \leqq 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \frac{\partial \Pi(\hat{x})}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \left(p\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j} - w_j\right) = 0 \tag{6.5}$$

が成立することである。

問題(6.3)の解は

$$\hat{x}_j = \hat{x}_j(p, w) \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.6}$$

である。したがって

$$\hat{q} = \hat{q}(p, w) = f(\hat{x}_1(p, w), \hat{x}_2(p, w), \cdots, \hat{x}_n(p, w)) \tag{6.7}$$

である。

(6.4)から

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j} \leqq \frac{w_j}{p} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.8}$$

が導かれる。これは，限界生産物の上限が生産物の価格に対する投入物の価格の比であることを示している。相補条件から，x_j が購入されるならば，すなわち $\hat{x}_j > 0$ ならば，(6.8)は等号で成立する。したがって，投入物 x_j が購入されるならば

$$\frac{\partial f(\hat{x})/\partial x_j}{w_j} = \frac{1}{p} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.9}$$

が成立する。すなわち，ある投入物が購入されるならば，その投入物の価格に対する限界生産物の比は，すべての投入物について同一であり，生産物の価格の逆数に等しい。(6.9)を書きかえると

$$p\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j} = w_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.10}$$

となる。それゆえ，実際に購入されるすべての投入物に対して，その投入物の価格は限界生産物価値に等しいという周知の条件が成立する。

生産物の価格を p, 投入物の価格ベクトルを $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ とし，投入物 x_j の需要関数を $\hat{x}_j(p, w)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, 生産物の供給関数を $\hat{q}(p, w)$ とする。このとき，利潤関数 $\pi(p, w)$ は

$$\begin{aligned}\pi(p, w) &= \max(pf(x) - w\cdot x)\\ &= pf(\hat{x}(p, w)) - w\cdot\hat{x}(p, w)\end{aligned} \tag{6.11}$$

と定義される。利潤関数については，次の性質が知られている。[12]

Hotelling の補題　投入物の需要関数と生産物の供給関数が内点解，すなわち，$\hat{x}_j(p, w) > 0$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, $\hat{q}(p, w) > 0$ であるとする。このとき，利潤関数 $\pi(p, w)$ について，次の関係が成立する。

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = \hat{q}(p, w) \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial w_j} = -\hat{x}_j(p, w) \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.13}$$

証明　(6.10)より(6.12)と(6.13)が成立する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial p} &= \hat{q}(p, w) + \sum_{j=1}^{n}\left(p\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j} - w_j\right)\frac{\partial \hat{x}_j}{\partial p}\\ &= \hat{q}(p, w)\end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial w_j} &= -\hat{x}_j(p, w) + \sum_{i=1}^{n}\left(p\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i} - w_i\right)\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial w_j}\\ &= -\hat{x}_j(p, w) \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)\end{aligned} \tag{6.15}$$

（証了）。

(6.12)は生産物の価格が変化するとき，利潤の変化率は生産物の供給量に等しいことを示す。(6.13)は投入物の価格が変化するとき，利潤の変化率は投入物の需要量の値に負の符号をつけたものに等しいことを示す。

(1993. 3.30)

注

(1) Kuhn-Tucker〔3〕p. 486, Takayama〔7〕p. 92 および時子山〔8〕p. 721 を参照。
(2) Intriligator〔2〕pp. 67-68 を参照。
(3) Intriligator〔2〕pp. 79-81 を参照。
(4) 西村〔6〕pp. 56-58 および Varian〔9〕pp. 106-108 を参照。
(5) Takayama〔7〕pp. 142-143 を参照。
(6) 西村〔6〕p. 34 を参照。
(7) Varian〔9〕p. 74 を参照。
(8) Takayama〔7〕p. 115 および Varian〔9〕p. 113 を参照。
(9) Cook〔1〕, 西村〔5〕p. 193, p. 222, 西村〔6〕p. 59, Takayama〔7〕p. 143 および Varian〔9〕p. 120 を参照。
(10) 西村〔5〕p. 190, p. 194 および西村〔6〕pp. 60-61 を参照。
(11) Intriligator〔2〕pp. 84-86 を参照。
(12) 西村〔6〕pp. 152-153, Takayama〔7〕p. 142 および Varian〔9〕pp. 43-45 を参照。

参考文献

[1] Cook, P., "A One Line Proof of the Slutsky Equation," *American Economic Review,* 42, 1972.
[2] Intriligator, M. D., "Mathematical Programming with Applications to Economics", in Arrow, K. J. and M. D. Intriligator eds., *Handbook of Mathematical Economics,* vol. 1, North-Holland, 1981.
[3] Kuhn, H. W. and A. W. Tucker, "Nonlinear Programming" in Newman, P. ed., *Readings in Mathematical Economics,* vol. 1, Johns Hopkins Press, 1968.
[4] 二階堂副包『現代経済学の数学的方法』，岩波書店，1960.
[5] 西村和雄『経済数学早わかり』，日本評論社，1982.
[6] ――――『ミクロ経済学』，東洋経済新報社，1990.

［7］ Takayama, A., *Mathematical Economics,* 2nd ed., Cambridge University Press, 1985.

［8］ 時子山和彦「数理計画法」，篠原・熊谷編『経済学大辞典』Ⅲ，東洋経済新報社，1980.

［9］ Varian, H., *Microeconomic Analysis,* 3rd ed., Norton, 1992.