最適化問題：
線形計画と２次計画

千　葉　昌　夫

1. はしがき

与えられた制約条件の下で目的関数を最大化（あるいは最小化）する解を見い出す問題を最適化問題あるいは計画問題という。制約関数および目的関数が一般の非線形関数であるとき，その問題を非線形計画問題という。この非線形計画問題をとりあつかうとき，第２節で説明する Kuhn-Tucker 定理がきわめて顕著な威力を発揮してくれる。線形計画問題は，目的関数および制約関数がともに１次関数の特殊なタイプの非線形計画問題である。２次計画問題は，目的関数が２次関数，制約関数が１次関数の特殊なタイプの非線形計画問題である。Kuhn-Tucker 定理を用いて，第３節では線形計画問題を，第４節では２次計画問題を説明する。

2. Kuhn-Tucker 定理

次のような非線形計画問題を考えよう。$x \in M \subset R^n$, $f: M \to R$, $g: M \to R^m$ として，

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max}\ f(x) \\ &\mathrm{s.\,t.}\ \ g(x) \geqq 0 \qquad (2.1) \\ &\qquad x \in M \subset R^n \end{aligned}$$

で表わされる最大化問題である。ゼロ０はベクトルとスカラーの両方に用

いるので，混乱することなく読んでほしい。

制約条件つき最大化問題に対する Lagrange 関数 $K : M \times R^m \to R$ を(2.2)のように定義する。ただし，$M \times R^m \equiv \{(x,\ y) \quad x \in M,\ y \in R^m\}$ である。

$$K(x, y) = f(x) + y\,g(x) \tag{2.2}$$

ここで $y = (y_i)$ は m 次元行ベクトルで Kuhn-Tucker 乗数ベクトルである。$y\,g(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i\,g_i(x)$ である。以下の記法も同様に内積を表わすものとする。

さて，ここで問題(2.1)が最適解 $\hat{x}$ をもつ必要十分条件を，第3節と第4節で使いやすい形にして証明なしで述べておこう。[(1)]

Kuhn-Tucker 定理　$M = R^n_+$ で $f(x), g_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ が R^n_+ で連続な偏導関数をもち，かつ，$f(x)$ が凹関数であり，$g_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ が R^n_+ で線形関数あるいは線形アフィン関数であるとする。すると問題(2.1)が最適解をもつ必要十分条件は，非負ベクトル $\hat{x}, \hat{y}$ が存在して，

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x} = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial g(\hat{x})}{\partial x} \leqq 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x}\hat{x} = \left(\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial g(\hat{x})}{\partial x}\right)\hat{x} = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y} = g(\hat{x}) \geqq 0 \tag{2.5}$$

$$\hat{y}\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y} = \hat{y}\,g(\hat{x}) = 0 \tag{2.6}$$

が成立することである。ここで

$\hat{x} = (\hat{x}_j)$　：n 次元列ベクトル

$\hat{y} = (\hat{y}_i)$：m 次元行ベクトル

$\dfrac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j}\right)$：$n$ 次元列ベクトル

$$\frac{\partial g(\hat{x})}{\partial x} = \left(\frac{\partial g_i(\hat{x})}{\partial x_j}\right) : m \times n \text{ 行列}$$

$$g(\hat{x}) = (g_i(\hat{x})) : m \text{ 次元列ベクトル}$$

とする。

(2.3) − (2.6) を Kuhn-Tucker 条件とよぶ。Kuhn-Tucker 条件のなかで，等号で表わされている (2.4)，(2.6) から次のことがいえる。

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i \frac{\partial g_i(\hat{x})}{\partial x_j} < 0 \text{ ならば，} \hat{x}_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.7}$$

$$g_i(\hat{x}) > 0 \text{ ならば，} \hat{y}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{2.8}$$

これらの条件は，非線形計画法における相補条件として知られている。[(2)]

3. 線形計画問題

線形計画問題を行列とベクトルを用いて書いてみよう。

問題（P） $\underset{x}{\text{Max}}\ cx$

$$\text{s. t.}\quad Ax \leqq b, \quad x \geqq 0 \tag{3.1}$$

ここで

$A = (a_{ij})$ ：$m \times n$ 行列

$b = (b_i)$ ：m 次元列ベクトル

$c = (c_j)$ ：n 次元行ベクトル

$x = (x_j)$ ：n 次元列ベクトル

とする。次に，問題（P）に類似した問題を考える。

問題（D） $\underset{y}{\text{Min}}\ yb$

$$\text{s. t.}\quad yA \geqq c, \quad y \geqq 0 \tag{3.2}$$

ここで

$y = (y_i)$ ：m 次元行ベクトル

とする。問題（P）を原問題，問題（D）をその双対問題と呼ぶ。双対は相互的であって，双対問題の双対を作れば原問題にもどる。このような関係を対合という。[3]

次の定理は，線形計画での理論的基礎をなすものである。[4]

定理 3.1 (1) 問題（P）の任意の実行可能ベクトル x と問題（D）の任意の実行可能ベクトル y に対して，$cx \leqq yb$ である。

(2) 問題(P)が上に有界な値 $c\hat{x}$ を有する解 $\hat{x}$ をもつならば，問題(D)も解 $\hat{y}$ をもち，$c\hat{x} = \hat{y}b$ となる。

証明 (1) (3.1)の制約式 $Ax \leqq b$ の左から $y \geqq 0$ をかけると $yAx \leqq yb$。また，(3.2)の制約式 $yA \leqq c$ の右から $x \geqq 0$ をかけると $yAx \geqq cx$。よって $cx \leqq yAx \leqq yb$ をえる。

(2) Lagrange 関数

$$K(x, y) = cx + y(b - Ax) \tag{3.3}$$

をつくる。問題（P）が最適解をもつ必要十分条件は，非負ベクトル $\hat{x}, \hat{y}$ が存在して，

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x} = c - \hat{y}A \leqq 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x}\hat{x} = (c - \hat{y}A)\hat{x} = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y} = b - A\hat{x} \geqq 0 \tag{3.6}$$

$$\hat{y}\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y} = \hat{y}(b - A\hat{x}) = 0 \tag{3.7}$$

が成立することである。(3.5)と(3.7)とから

$$\hat{y}b = c\hat{x} \tag{3.8}$$

が導かれる。(1)から $\hat{y}$ が解であることがわかる。もし $\hat{y}b > yb$ となる y が存在するならば，$c\hat{x} = \hat{y}b > yb$ となり(1)に矛盾するからである（証了）。

Kuhn-Tucker 条件のなかで，等式で表わされている(3.5)，(3.7)から

次のことがいえる。

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i\right) < 0 \text{ ならば，} \hat{x}_j = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.9}$$

$$\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j\right) > 0 \text{ ならば，} \hat{y}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{3.10}$$

これらは，線形計画法における相補条件と呼ばれている。[5]

ここで，定理 3.1(2)と相補条件の経済的意味を考えてみよう。[6] A を投入係数行列，b を投入物のベクトル，c を生産物の価格ベクトル，x を生産物のベクトル，y を投入物の価格ベクトルとする。そうすると，問題（P）は投入物の制約の下で，総生産物価値を最大化する問題であり，問題（D）は，実現可能な最大利潤はゼロであるという制約の下で，総費用を最小化するという問題であると考えることができる。

まず，定理 3.1(2)の意味を考えてみよう。$c\hat{x} = \hat{y}b$ は，総生産物価値と総費用が等しいという意味になる。この条件は，経済全体としての利潤がゼロという意味ともいえる。あるいは，$c\hat{x} = \hat{y}b$ を国民生産物と国民所得が等しいとみることもできる。

次に，相補条件の意味を考えてみよう。(3.9)は投入物への支払が生産物価値を超過するならば，その赤字の工程が稼動されないことを示す（利潤性の原則）。(3.10)は，過剰に存在する投入物の価格がゼロとなって，自由財になることを示す（自由財の原則）。

線形計画問題では，A, b, c は与件であった。これらの与件が変化したとき，最適解 $\hat{x}, \hat{y}$ や最大値 $c\hat{x}$，最小値 $\hat{y}b$ がどのように変化するかを調べることを感度分析という。[7]

ここでは，b の中の b_i が $b_i + 1$ に増加した場合をとりあげる。

定理 3.2 b_i が $b_i + 1$ に変化したとする。もし問題（D）の最大解 $\hat{y}$ が変化後も解ならば，問題（P）の最大値は $\hat{y}_i$ だけ増加する。

証明 b が変化しても，問題（P）の実行可能ベクトルの集合は不変である。$\hat{y}$ が b の変化後も（D）の解ならば，その最小値は $\hat{y}_i$ だけ増える。

双対定理により，（P）の最大値は（D）の最小値に等しいから，（P）の最大値が $\hat{y}_i$ だけ増加する（証了)。

この定理 3.2から，b_i が1単位増加したとき，総生産物価値が $\hat{y}_i$ だけ増加することがわかる。したがって，市場で b_i の価格が $\hat{y}_i$ 以下で売られているなら，これを1単位だけ購入して生産量を増やしたほうが有利である。また，$\hat{y}_i$ 以上であれば，購入しないほうが有利である。このように $\hat{y}_i$ は投入物 b_i の限界価値を表わしているとみることができる。この意味で，双対問題の最適解 $\hat{y}_i$ は，潜在価格，あるいは影の価格もしくは帰属価格などと呼ばれている。[8]

4. 2次計画問題

2次計画問題を行列とベクトルを用いて書いてみよう。

$$
\begin{aligned}
&\max_{x} \ cx + \frac{1}{2}x'Qx \\
&\text{s.t.} \quad Ax \leqq b \\
&\qquad\quad\ \ x \geqq 0
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

ここで

$c=(c_j)$ ：n 次元行ベクトル

$Q=(q_{ij})$ ：$n \times n$ の半負値定符号の対称行列

$A=(a_{ij})$ ：$m \times n$ 行列

$b=(b_i)$ ：m 次元列ベクトル

$x=(x_j)$ ：n 次元列ベクトル

$x'=(x_j)'$ ：x の転置ベクトル

とする。

Q が半負値定符号であるから，目的関数 $cx+\frac{1}{2}x'Qx$ は凹関数であり，線形変換 Ax は凸である。さらに制約想定は満たされている。故に，2次計画問題は凹計画問題のひとつであるから，Kuhn-Tucker 定理を適用できる。[9]

y を Kuhn-Tucker 乗数ベクトルとして Lagrange 関数をつくる。ただし $y = (y_i)$ を m 次元行ベクトルとする。

$$K(x, y) = cx + \frac{1}{2}x'Qx + y(b - Ax) \tag{4.2}$$

問題(4.1)が最適解をもつ必要十分条件は，非負ベクトル $\hat{x}, \hat{y}$ が存在して，

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x} = c + \hat{x}'Q - \hat{y}A \leqq 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x}\hat{x} = (c + \hat{x}'Q - \hat{y}A)\hat{x} = 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y} = b - A\hat{x} \geqq 0 \tag{4.5}$$

$$\hat{y}\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y} = \hat{y}(b - A\hat{x}) = 0 \tag{4.6}$$

が成立することである。

次の例は2次計画問題の代表的な例である。[10]

例（資産選択問題）　資金 I を n 種の投資項目（$j = 1, 2, \cdots, n$）に分けて投資するとする。第 j 投資項目から得られる単位投資額当たりからの収益が，確率変数 R_j で表わされる。R_j については，期待値 $E(R_j) = \mu_j$, 共分散 $\mathrm{Cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij}$ がわかっている。この投資から得られる総収益 P は

$$P = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j \tag{4.7}$$

と表わされるから，確率変数となる。P の期待値は

$$E(P) = E\left(\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} E(R_j)x_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \tag{4.8}$$

一般に投資の危険度は，P の分散で測定されるであろう。そこで，P の分散を求めると，

$$E\{P-E(P)\}^2 = E\left\{\sum_{j=1}^{n}(R_j-\mu_j)\,x_j\right\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E\{(R_i-\mu_i)(R_j-\mu_j)\}\,x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\,x_i x_j \qquad (4.9)$$

したがって，投資の危険度を考慮した上で，期待値を最大化する投資配分 x_j を求める問題は，次の2次計画問題として定式化される。

$$\mathrm{Max}\ \sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j - \rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\,x_i x_j$$

$$\mathrm{s.\,t.}\ \sum_{j=1}^{n} x_j \leqq I \qquad (4.10)$$

$$x_j \geqq 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

ここで $\rho>0$ は期待収益の中に取り入れる危険度（分散）の程度を表わす重みづけの係数である。この最適投資配分問題は，資産選択問題とよばれている。なお，問題(4.10)の目的関数は $\rho>0$ に対して凹関数である。(11)

y を Kuhn-Tucker 乗数として，Lagrange 関数をつくる。

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j - \rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\,x_i x_j + y\left(I-\sum_{j=1}^{n}x_j\right) \qquad (4.11)$$

問題(4.10)が最適解をもつ必要十分条件は，非負のベクトル $\hat{x}$ と非負の実数 $\hat{y}$ が存在して，

$$\frac{\partial K(\hat{x},\hat{y})}{\partial x_j} = \mu_j - 2\rho\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}\hat{x}_i - \hat{y} \leqq 0 \qquad (4.12)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_j\frac{\partial K(\hat{x},\hat{y})}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n}\hat{x}_j\left(\mu_j - 2\rho\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}\hat{x}_i - \hat{y}\right) = 0 \qquad (4.13)$$

$$\frac{\partial K(\hat{x},\hat{y})}{\partial y} = I - \sum_{j=1}^{n}\hat{x}_j \geqq 0 \qquad (4.14)$$

$$\hat{y}\frac{\partial K(\hat{x},\hat{y})}{\partial y}=\hat{y}\left(I-\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_j\right)=0 \tag{4.15}$$

が成立することである。

相補条件は，

$$\mu_j-2\rho\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}\hat{x}_i-\hat{y}<0 \text{ ならば，} \hat{x}_j=0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4.16}$$

$$I-\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_j>0 \text{ ならば，} \hat{y}=0 \tag{4.17}$$

である。(4.16)により，内点の解 $\hat{x}_j>0$ が存在するならば，

$$\mu_j-2\rho\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}\hat{x}_i-\hat{y}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4.18}$$

が成立する。これより

$$\mu_j-2\rho\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}\hat{x}_i=\mu_k-2\rho\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ik}\hat{x}_i \quad (j,k=1,2,\cdots,n) \tag{4.19}$$

が成立する。これは，危険度を考慮した上での限界期待値が，すべての投資項目について等しいことを意味する。

(1993. 9 . 26)

注

(1) Takayama〔6〕pp. 98-99 および時子山〔7〕pp. 718-719 を参照。

(2) Intriligator〔1〕pp. 67-68 を参照。

(3) Intriligator〔1〕p. 73 および時子山〔7〕p. 718 を参照。

(4) Intriligator〔1〕pp. 74-75, 二階堂〔2〕p. 137, Nikaido〔3〕p. 133, 奥口他〔5〕pp. 139-140, Takayama〔6〕p. 156 および時子山〔7〕p. 719 を参照。

(5) Intriligator〔1〕p. 75 を参照。

(6) Intriligator〔1〕pp. 88-89, 二階堂〔2〕p. 141, Nikaido〔3〕p. 133, 西村〔4〕pp. 216-218 および奥口他〔5〕p. 141 を参照。

(7) 奥口他〔5〕pp. 141-142 を参照。

(8) 西村〔4〕pp. 217-218 および時子山〔7〕p. 719 を参照。

(9) Intriligator〔1〕p. 72 および Takayama〔6〕p. 125 を参照。

(10) 渡辺・青沼〔8〕p. 211 および pp. 214-215 を参照。

(11) 渡辺・青沼〔8〕p. 214 を参照。

参 考 文 献

［1］ Intriligator, M. D., "Mathematical Programming with Apprications to Economics", in Arrow, K. J. and M. D. Intriligator eds., *Handbook of Mathematical Economics,* vol. 1, North-Holland, 1981.

［2］ 二階堂副包『経済のための線型数学』，培風館，1961.

［3］ Nikaido, H., *Convex Structures and Economic Theory,* Academic Press, 1968.

［4］ 西村和雄『経済数学早わかり』，日本評論社，1982.

［5］ 奥口孝二・西村和雄・藤本喬雄・丸山　徹『経済数学入門』，有斐閣，1980.

［6］ Takayama, A., *Mathematical Economics,* 2nd ed., Cambridge University Press, 1985.

［7］ 時子山和彦「数理計画法」，篠原・熊谷編『経済学大辞典』Ⅲ，東洋経済新報社，1980.

［8］ 渡辺　浩・青沼龍雄『数理計画法』，筑摩書房，1974.