消費者需要の拡張経路
——開放体系への試み——

森　井　昭　顕

はじめに

消費者行動の理論は，商品価格の上昇，または，所得の増加に対応して，消費者が如何に反応するかを分析することである。まず第一に，効用函数の性質を考察し，二商品，二価格という単純化モデルから，順次，一般的なモデルへと歩をすすめ，開放体系への試みをなしたいと考へている。しかしながら，その試みは，簡単に，そして，単純なものではありえない。せめても，それへの一つの糸口になることを希望し，稿を重ねたいと考へている。

I　効用函数の性質

二商品 X' と X'' のみを仮定し，消費者の嗜好によって，商品を合理的に順序づけられるとする。いま，消費者が，すくなくとも，X' を X'' と同じほど欲求していると考えれば，X' は X'' と選好関係にあるという。記号では，次のように書くことができる。

$$X'PX'' \qquad \cdots\cdots (\text{I}-1)$$

ここで，Pは選好されることを意味している。さらに，X'' が X' よりも選好され，X''' が X'' よりも選好される場合，X''' は X' よりも選好される。

$$\text{if } X''PX' \text{ and } X'''PX'' \Rightarrow X'''PX' \qquad \cdots\cdots (\text{I}-2)$$

また，X' が X'' よりも選好され，同時に，X'' が X' よりも選好される場合，X' と X'' は無差別関係にあるという。

$$X'PX'' \text{ and } X''PX' \Rightarrow X'IX'' \qquad \cdots\cdots (\text{I}-3)$$

ただし，Ｉは無差別であることを意味している。

消費者の選好もまた，各商品に加えられた消費者の満足の度合を示す指数で表わされる。このような指数を効用函数といい，次のように表わすことができる。

$$u=u(\mathrm{X}) \qquad \because\ \mathrm{X}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \qquad \cdots\cdots(\mathrm{I}-4)$$

ただし，uは序数的効用であり，ベクトルXは各商品の集合である。ベクトル $\mathrm{X}=(x_1,\ x_2)$ とすれば，効用函数は次の式になる。

$$u=u(x_1,\ x_2) \qquad \cdots\cdots(\mathrm{I}-5)$$

消費者は，効用を極大にしようとするから，函数（Ⅰ―5）を微分すれば，

$$u_1dx_1+u_2dx_2=0 \qquad \cdots\cdots(\mathrm{I}-6)$$

$$\therefore\ \frac{u_1}{u_2}=-\frac{dx_2}{dx_1}\equiv s \qquad \cdots\cdots(\mathrm{I}-7)$$

（Ⅰ―7）式は，限界代替率（s）と呼ばれており，同じ無差別曲線上を，x_1 が増加する場合，x_2 が減少する率を意味している。つまり，無差別曲線の接線勾配は負であるということである。そのことは，次のような効用函数のへりつきヘッセ（bordered Hessian）行列が，正であるということである。

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} >0 \qquad \cdots\cdots(\mathrm{I}-8)$$

このことは，次のように証明することができる。（Ⅰ―7）式を微分すれば次の式になる。

$$ds=\frac{u_2du_1-u_1du_2}{u_2{}^2}=\frac{1}{u_2{}^2}[u_2(u_{11}dx_1+u_{12}dx_2)$$
$$-u_1(u_{21}dx_1+u_{22}dx_2)] \qquad \cdots\cdots(\mathrm{I}-9)$$

方程式（Ⅰ―9）に $dx_2=-\dfrac{u_1}{u_2}dx_1$ を代入し，両辺を dx_1 で割れば，

$$\frac{ds}{dx_1}=\frac{u_2{}^2u_{11}-u_1u_2u_{12}-u_1u_2u_{21}+u_1{}^2u_{22}}{u_2{}^3}$$

$$=\frac{u_1{}^2u_{22}+u_2{}^2u_{11}-2u_1u_2u_{12}}{u_2{}^3} \qquad \because\ u_{12}=u_{21} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{I}-10)$$

限界代替率逓減ということは，方程式（Ⅰ―10）の分子が負でなければ

ならない。ただし，$u_2^3>0$ である。つまり，

$$-u_1^2u_{22}-u_2^2u_{11}+2u_1u_2u_{12}>0 \qquad \cdots\cdots (\text{I}-11)$$

ここで，行列式（I－8）を解けば，次の式が得られる。

$$u_1u_2u_{12}+u_1u_2u_{21}-u_1^2u_{22}-u_2^2u_{11}$$

$$=-u_1^2u_{22}-u_2^2u_{11}+2u_1u_2u_{12}>0 \qquad \cdots\cdots (\text{I}-12)$$

従って，不等式（I－11）と（I－12）は，全く等しいのである。要するに，効用函数の性質は，次の如くである。

(1) 二つの無差別曲線は交わらない。

(2) 無差別曲線は原点に凸である。すなわち，限界代替率逓減の法則が妥当するということである。

II　二商品モデル

消費者の購入する商品が，二種類であるという単純なケースを考へよう。その商品の消費量を x_1, x_2 とすれば，序数的効用函数 (u)[1] は，次の如くである。

$$u=f(x_1,\ x_2) \qquad \cdots\cdots (\text{II}-1)$$

消費者の予算制約条件は，次の式で表わされる。

$$y=p_1x_1+p_2x_2 \qquad \cdots\cdots (\text{II}-2)$$

ただし，y は消費者所得であり，p_1 と p_2 は，それぞれの商品価格である。この予算制約条件のもとで，消費者は効用を最大にする商品の組み合わせを考へるであろう。方程式（II－1）と（II－2）から，次のようなラグランジ函数 (Lagrangean function) V を得る。ただし，λ はラグランジの未定乗数である。

$$V=f(x_1,\ x_2)+\lambda[y-(p_1x_1+p_2x_2)] \qquad \cdots\cdots (\text{II}-3)$$

Vは x_1 と x_2 および λ の函数であるから，それらに関するVの偏導函数を求め，ゼロに等しいとする。

---

1) 序数的効用 (ordinal utility) とは，x_1 が x_2 よりも選好され，x_1 と x_2 が無差別であり，順序づけが可能な場合をいう。すなわち，集合記号を用いれば，次の如く書き表わされる。

$$x_1Px_2 \Longleftrightarrow u(x_1)>u(x_2)$$
$$x_1Ix_2 \Longleftrightarrow u(x_1)=u(x_2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=f_1=\lambda p_1-0 \qquad \cdots\cdots（Ⅱ—4）$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2}=f_2-\lambda p_2=0 \qquad \cdots\cdots（Ⅱ—5）$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda}=y-(p_1x_1+p_2x_2)=0 \qquad \cdots\cdots（Ⅱ—6）$$

そこで，合理的な消費者の購入量は，常にこれらの方程式を満足するであろうし，価格と所得が変化するときも，消費者の支出は変化するが，その場合の購入量も，これらの方程式を満足するであろう。

さて，すべての変数を同時に変化させるために，三つの方程式（Ⅱ—4）～（Ⅱ—6）を全微分すれば，次の如くになる。

$$f_{11}dx_1+f_{12}dx_2-p_1d\lambda=\lambda dp_1 \qquad \cdots\cdots（Ⅱ—7）$$

$$f_{21}dx_1+f_{22}dx_2-p_2d\lambda=\lambda dp_2 \qquad \cdots\cdots（Ⅱ—8）$$

$$-p_1dx_1-p_2dx_2 \qquad =-dy+x_1dp_1+x_2dp_2 \qquad \cdots\cdots（Ⅱ—9）$$

方程式は三つで，未知数は dx_1，dx_2，$d\lambda$ の三ケである。ただし，右辺は定数と考へることができるから，この連立方程式を解くことができる。それぞれの未知数の行列式をDとおけば，

$$D\equiv\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots（Ⅱ—10）$$

その第一行第一列の余因子（cofactor）を D_{11} とし，第一行第二列の余因子を D_{12} etc. とおく。

$$D_{11}\equiv\begin{vmatrix} f_{22} & -p_2 \\ -p_2 & 0 \end{vmatrix} \qquad D_{12}\begin{vmatrix} f_{12} & -p_1 \\ -p_2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{etc.} \qquad \cdots\cdots（Ⅱ—11）$$

方程式（Ⅱ—7）～（Ⅱ—9）を解くために、クラメールの公式（Cramer's formula）を使用すればよい。

$$dx_1=\frac{\lambda D_{11}dp_1+\lambda D_{21}dp_2+D_{31}(-dy+x_1dp_1+x_2dp_2)}{D} \qquad \cdots\cdots（Ⅱ—12）$$

$$dx_2=\frac{\lambda D_{12}dp_1+\lambda D_{22}dp_2+D_{32}(-dy+x_1dp_1+x_2dp_2)}{D} \qquad \cdots\cdots（Ⅱ—13）$$

いま，p_1 のみが変化し，p_2 も y も変化しないと仮定すれば，（Ⅱ—12）

式は次の如くになる。

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}=\frac{\lambda D_{11}}{D}+x_1\frac{D_{31}}{D} \qquad \cdots\cdots (\text{II}-14)$$

この式は，p_1 の変化に対する消費量 x_1 の変化率である。y の変化に対する x_1 の変化率は，次の式になる。

$$\frac{\partial x_1}{\partial y}=-\frac{D_{31}}{D} \qquad \because (p_1,\ p_2=\text{const.}) \qquad \cdots\cdots (\text{II}-15)$$

ここで，価格の変化と所得の変化が同時に起り，価格の変化が所得の変化によって，丁度，相殺され，同じ無差別曲線上にあるものとすれば

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{u=\text{const.}}=\lambda\frac{D_{11}}{D} \qquad \cdots\cdots (\text{II}-16)$$

そこで，方程式（II—14）は，次のように書き換えることができる。

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}=\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{u=\text{const.}}-\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)_{p=\text{const.}} \qquad \cdots\cdots (\text{II}-17)$$

この方程式（II—17）は，p_1 が変化する場合の全部効果（代替効果＋所得効果）[2]であり，スルツキー方程式（Slutsky equation）と呼ばれている。

さて，この二つの効果，すなわち，代替効果と所得効果は，如何なる符号をもっているであろうか。周知の如く，代替効果の符号は，常に負である。方程式（II－4）と（II－5）から，次の式が得られる。

$$\lambda=\frac{f_1}{p_1}=\frac{f_2}{p_2} \qquad \cdots\cdots (\text{II}-18)$$

この式は，価格に対する限界効用均等を意味しており，この式から，効用極大点においては，限界効用の比率は，それに対応する価格比率に等しくなければならないという均衡条件式が導かれる。

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad \cdots\cdots (\text{II}-19)$$

2）代替効果（substitution effect）とは，方程式（II—17）の右辺第一項であり，p_1 が変化した場合，消費者が他商品を x_1 によって代替される同一無差別曲線上の動きをいう。また，所得効果（income effect）とは，価格一定にして，所得のみが変化する場合の x_1 に対する需要量の変化をいう。

従って，λは正であり，限界代替率逓減の法則が妥当するためには，行列式（Ⅱ—11）の D_{11} が負であるから，行列式（Ⅱ—10）は正でなければならない。このことは，次のようにして証明することができる。行列式（Ⅱ—10）を展開すれば，

$$D=-f_{11}p_2^2+2f_{12}p_1p_2-f_{22}p_1^2$$
$$=-(f_{11}p_2^2-2f_{12}p_1p_2+f_{22}p_1^2) \qquad \cdots\cdots（Ⅱ—20）$$

方程式（Ⅱ—20）のカッコは負であるから，$D>0$ である。また，行列式（Ⅱ—11）のD_{11} を解けば，$D_{11}=-p_2^2$ となり，明らかに負である。従って，方程式（Ⅱ—17）の第一項は負である。しかし，第二項の符号については，何とも云えない。つまり，限界代替率逓減の法則が作用している場合，$(\partial x_1/\partial y)\gtreqless 0$ であるならば，上級財，普通財，または下級財となり得るからである。

次に，ある商品価格が，他の商品需要に及ぼす効果，すなわち交差効果 (cross effect) を考察しよう。方程式（Ⅱ—12）と（Ⅱ—13）から，次の式が求められる。

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}=\frac{\lambda D_{21}}{D}+x_2\frac{D_{31}}{D} \qquad \cdots\cdots（Ⅱ—21）$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_1}=\frac{\lambda D_{12}}{D}+x_1\frac{D_{32}}{D} \qquad（Ⅱ—22）$$

Dは対称行列であるから，$D_{12}=D_{21}$ とおくことができる。方程式（Ⅱ—21）と（Ⅱ—22）の第一項は，代替効果を表わしているが，この場合の代替項の符号は不定である。

いま，方程式（Ⅱ—14）に p_1 を，方程式（Ⅱ—15）にyを，方程式（Ⅱ—21）に p_2 を乗じて，それを加へれば，次の式を得る。

$$\frac{\lambda D_{11}}{D}p_1+x_1\frac{D_{31}}{D}p_1+\frac{\lambda D_{21}}{D}p_2+x_2\frac{D_{31}}{D}p_2-\frac{D_{31}}{D}y$$

$$=\frac{1}{D}[D_{11}\lambda p_1+D_{21}\lambda p_2-D_{31}(y-p_1x_1-p_2x_2)] \qquad \cdots\cdots（Ⅱ—23）$$

$y-p_1x_1-p_2x_2$ は，予算制約式からゼロであり，行列式の性質から，（Ⅱ—23）式はゼロに等しいとおくことができる。

$$\therefore\ \frac{1}{D}[D_{11}\lambda p_1+D_{21}\lambda p_2-D_{31}(0)]=0 \qquad \cdots\cdots (\text{II}-24)$$

代替項を S_{ij} で表わすと，（II—24）式は，次の如く置き換えられる。

$$S_{11}p_1+S_{12}p_2=0 \qquad \because\ S_{12}=S_{21} \qquad \cdots\cdots (\text{II}-25)$$

S_{11} は負であるから，代替財の場合には，S_{12} は正でなければならない。補完財の場合には，$S_{12}<0$ であり，$S_{12}=0$ であるならば，独立財であるということを意味している。

III　三商品モデル

前節のモデルに，一商品と一財価格を附加し，効用函数を示せば，次の式が得られる。ただし，記号は前節と同じ意味を示しているものとする。

$$u=u(x_1,\ x_2,\ x_3) \qquad \cdots\cdots (\text{III}-1)$$

次の予算制約式を条件として，u を極大にする。

$$y=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3 \qquad \cdots\cdots (\text{III}-2)$$

そこで，ラグランジ式を求めれば，次の式になる。

$$L=u(x_1,\ x_2,\ x_3)+\lambda(y_1-p_1x_1-p_2x_2-p_3x_3) \qquad \cdots\cdots (\text{III}-3)$$

一階の必要条件は，次の如くである。

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=u_1-\lambda p_1=0 \qquad \cdots\cdots (\text{III}-4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=u_2-\lambda p_2=0 \qquad \cdots\cdots (\text{III}-5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3}=u_3-\lambda p_3=0 \qquad \cdots\cdots (\text{III}-6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=y-p_1x_1-p_2x_2-p_3x_3=0 \qquad \cdots\cdots (\text{III}-7)$$

方程式（III—4）～（III—7）を微分すれば，次のようになる。

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & -p_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & -p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ d\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda dp_1 \\ \lambda dp_2 \\ \lambda dp_3 \\ x_1dp_1+x_2dp_2+x_3dp_3-dy \end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots (\text{III}-8)$$

クラメール（Cramer）の法則によって，dx_i（$i=1, 2, 3$）を求めること

ができる。

$$dx_1=\frac{1}{\Delta}[\lambda dp_1\Delta_{11}+\lambda dp_2\Delta_{21}+\lambda dp_3\Delta_{31}$$
$$+(x_1dp_1+x_2dp_2+x_3dp_3-dy)\Delta_{41}] \quad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}-9)$$

ここで，Δは係数行列の行列式であり，Δ_{ij}は行列 (i, j) 要素の余因子である。

dp_i の偏導函数を求めれば，次の如くになる。

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}=\frac{\lambda\Delta_{11}}{\Delta}+\frac{x_1\Delta_{41}}{\Delta} \quad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}-10)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}=\frac{\lambda\Delta_{21}}{\Delta}+\frac{x_2\Delta_{41}}{\Delta} \quad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}-11)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_3}=\frac{\lambda\Delta_{31}}{\Delta}+\frac{x_3\Delta_{41}}{\Delta} \quad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}-12)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial y}=-\frac{\Delta_{41}}{\Delta} \quad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}-13)$$

方程式（Ⅲ—10)～(Ⅲ—12）は，いわゆる価格効果であり，方程式（Ⅲ—13）は所得効果と呼ばれているものである。そこでで，方程式（Ⅲ—10）～(Ⅲ—12）に方程式（Ⅲ—13）を使用すれば，次の如く書き換えられる。

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}=\frac{\lambda\Delta_{11}}{\Delta}-x_1\frac{\partial x_1}{\partial y} \quad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}-14)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}=\frac{\lambda\Delta_{21}}{\Delta}-x_2\frac{\partial x_1}{\partial y} \quad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}-15)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_3}=\frac{\lambda\Delta_{31}}{\Delta}-x_3\frac{\partial x_1}{\partial y} \quad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}-16)$$

方程式（Ⅲ—14)～(Ⅲ—16）のそれぞれ右辺第一項は，代替項であり，第二項は所得項と呼ばれている。また，これらを総称して，総効果とも呼ばれている。

さて，いま，p_1 と p_3 が一定であるとおき，p_2 の増加が，所得の補整的同時増加を生ずるものとすれば，予算制約式から次のことが云える。

$$dy=x_2dp_2 \quad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}-17)$$

x_1 の需要は，それぞれの価格と所得の函数であるから，すなわち，

$$x_1=x_1(p_1, p_2, p_3, y) \quad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}-18)$$

函数（Ⅲ—18）を微分すれば，次の式が得られる。ただし，p_1, p_3 は一定である。

$$dx_1=\frac{\partial x_1}{\partial p_2}dp_2+\frac{\partial x_1}{\partial y}dy \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}—19)$$

方程式（Ⅲ—19）に（Ⅲ—17）を代入すれば

$$dx_1=\frac{\partial x_1}{\partial p_2}dp_2+x_2\frac{\partial x_1}{\partial y}dp_2 \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}—20)$$

補整的所得の変化による需要の変化は，次のようになる。

$$\frac{dx_1}{dp_2}=\frac{\partial x_1}{\partial p_2}+x_2\frac{\partial x_1}{\partial y} \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}—21)$$

この方程式（Ⅲ—21）を（Ⅲ—15）式に代入すれば

$$\frac{dx_1}{dp_2}=\frac{\lambda\Delta_{21}}{\Delta} \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}—22)$$

方程式（Ⅲ—22）は価格変化による補整された所得変化を示しており，代替効果と呼ばれているものである[3)]。この代替項の符号は，λ は正であり，Δ は無差別曲線の性質を充たしている限り，正でなければならない。

効用を一定とおけば，（Ⅲ—22）式は次のように書き換えられる。

$$\frac{dx_1}{dp_2}=\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\Big|_{u=\text{const.}} \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}—23)$$

それ故，方程式（Ⅲ—15）は次のようになる。

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}=\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\Big|_{u=\text{const.}}-x_2\frac{\partial x_1}{\partial y}\Big|_{p=\text{const.}} \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅲ}—24)$$

この方程式（Ⅲ—24）は，周知のスルツキー (Slutsky) 方程式である。

ここで，代替項は，補整された所得変化によって，p_2 に関する x_1 の変化率を示しているから，いま，$(dx_1/dp_2)>0$ であるならば，x_1 財を純代替，また，$(dx_1/dp_2)<0$ の場合には純補完という。また，$(\partial x_1/\partial y)<0$，すなわち，所得増加が需要の下落を生ずる場合，その財，ここでは x_1 は劣級財であり，逆に，$(\partial x_1/\partial y)>0$ の場合には，劣級財ではない。すなわ

3）厳密には Δ_{ij} は交差代替項であるが，係数マトリックスが対称行列であるから，$\Delta_{ij}=\Delta_{ji}$ とおける。すなわち，$\frac{dx_1}{dp_2}=\frac{\lambda\Delta_{21}}{\Delta}$ と $\frac{dx_2}{dp_1}=\frac{\lambda\Delta_{12}}{\Delta}$ であるから，代替項は $\frac{dx_1}{dp_2}=\frac{dx_2}{dp_1}$ と書き換えられる。それ故に，$u_{ij}=u_{ji}$ $(i\neq j)$ である。

ち，$(\partial x_1/\partial y)=0$ ならば，中立財であり，$(\partial x_1/\partial y)>0$ ならば，上級財であると云える。また，$(\partial x_1/\partial y)\geqq 0$ であり，$(dx_1/dp_2)<0$ であるならば，$(\partial x_1/\partial p_2)$ は負である。逆に，$(\partial x_1/\partial y)<0$ であり，$(dx_1/dp_2)>0$ であるならば，$(\partial x_1/\partial p_2)>0$ である。

Ⅳ　一般的な多数財モデル

商品の消費量を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とし，それらの商品価格を $p_1, p_2, \cdots, p_n$ とすれば，消費者の総所得 y に対する総支出額は，次の式になる。

$$y=\sum_{r=1}^{n} p_r x_r \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅳ}-1)$$

効用函数（u）は，$u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で表わされるから，ラグランジ（Lagrange）の未定乗数 λ を導入し，前節で導いたと同じように操作すれば，次の式を得る。

$$u+\lambda\left(y-\sum_{r=1}^{n} p_r x_r\right)=0 \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅳ}-2)$$

$$u_r=\lambda p_r \quad (r=1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅳ}-3)$$

（Ⅳ－2）式は，予算制約条件のもとでの効用極大ための条件式であり，（Ⅳ－3）式は，消費者の均衡条件式である。効用が極大であるためには，$du=0$ と $d^2u<0$ でなければならない。

$$du=\sum_{r=1}^{n} u_r dx_r=0 \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅳ}-4)$$

$$d^2u=\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} u_{rs} dx_r dx_s<0 \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅳ}-5)$$

（Ⅳ－4）式は，限界効用極大のための必要条件であり，（Ⅳ－5）式は，そのための十分条件である。$dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$ の行列式は，次の如くになる。

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_{22} \\ u_1 & u_{11} & u_1 \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix},\ \cdots,\ \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots (\text{Ⅳ}-6)$$

安定であるためには，この行列式が，それぞれ交互に，正，負でなけれ

ばならない[4]。このことは，無差別曲線が原点に凸（convex）であるということを意味している。

さて，所得増加による需要効果を求めるために，方程式（Ⅳ－1）と（Ⅳ－3）を y について微分すれば，次の式を得る。

$$\left.\begin{aligned} p_1\frac{\partial x_1}{\partial y}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial y}+\cdots\cdots+p_n\frac{\partial x_n}{\partial y}&=1\\ -p_1\frac{\partial \lambda}{\partial y}+u_{11}\frac{\partial x_1}{\partial y}+u_{12}\frac{\partial x_2}{\partial y}+\cdots\cdots+u_{1n}\frac{\partial x_n}{\partial y}&=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ -p_n\frac{\partial \lambda}{\partial y}+u_{n1}\frac{\partial x_1}{\partial y}+u_{n2}\frac{\partial x_2}{\partial y}+\cdots\cdots+u_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial y}&=0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (\text{Ⅳ}-7)$$

そこで，我々は（Ⅳ－3）式から，$p_r=u_r/\lambda$ を得ることができるから，これを（Ⅳ－7）式に代入すれば，次のように書き換えられる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_1}{\lambda}\frac{\partial x_1}{\partial y}+\frac{u_2}{\lambda}\frac{\partial x_2}{\partial y}+\cdots\cdots+\frac{u_n}{\lambda}\frac{\partial x_n}{\partial y}&=1\\ -\frac{u_1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y}+u_{11}\frac{\partial x_1}{\partial y}+u_{12}\frac{\partial x^2}{\partial y}+\cdots\cdots+u_{1n}\frac{\partial x_n}{\partial y}&=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ -\frac{u_n}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y}+u_{n1}\frac{\partial x_1}{\partial y}+u_{n2}\frac{\partial x_2}{\partial y}+\cdots\cdots+u_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial y}&=0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (\text{Ⅳ}-8)$$

この式におけるそれぞれの未知数の行列式は，次の如くである。

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{u_1}{\lambda} & \frac{u_2}{\lambda} & \cdots\cdots\frac{u_n}{\lambda}\\ -\frac{u_1}{\lambda} & u_{11} & u_{12}\cdots\cdots & u_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\quad\ddots & \vdots\\ -\frac{u_n}{\lambda} & u_{n1} & u_{n2}\cdots\cdots & u_{nn} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\lambda^2}\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2\cdots\cdots & u_n\\ u_1 & u_{11} & u_{12}\cdots\cdots & u_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\quad\ddots & \vdots\\ u_n & u_{n1} & u_{n2}\cdots\cdots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{\lambda^2}\mathrm{U} \quad \cdots\cdots (\text{Ⅳ}-9)$$

ただし，$\mathrm{U}\equiv\begin{vmatrix} 0 & u_1\cdots\cdots & u_n\\ u_1 & u_{11}\cdots\cdots & u_{1n}\\ \vdots & \vdots\quad\ddots & \vdots\\ u_n & u_{n1}\cdots\cdots & u_{nn} \end{vmatrix}>0$ であり，

4）R. G. D. Allen: Mathematical Analysis for Economists, 1967. を参照。

$$U_0 \equiv \begin{vmatrix} 1 & \frac{u_1}{\lambda} & \cdots\cdots & \frac{u_n}{\lambda} \\ 0 & u_{11} & \cdots\cdots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & u_{n1} & \cdots\cdots & u_{nn} \end{vmatrix}$$ とすれば，

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = -\frac{\lambda^2 U_0}{U} \qquad \cdots\cdots (\text{IV}-10)$$

$$\frac{\partial x_r}{\partial y} = \left(-\frac{\lambda^2}{U}\right)\left(-\frac{U_r}{\lambda}\right) = \frac{\lambda U_r}{U} \qquad \cdots\cdots (\text{IV}-11)$$

前節におけると同じように，λ は正であるが，所得効果の符号は何ら解らない。

次に，所得一定のもとでの価格変化の効果を求めよう。方程式（IV－1）と（IV－3）を p_r について微分する。

$$\left.\begin{aligned} p_1\frac{\partial x_1}{\partial p_r} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial p_r} + \cdots\cdots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial p_r} &= -x_r \\ -p_1\frac{\partial\lambda}{\partial p_r} + u_{11}\frac{\partial x_1}{\partial p_r} + u_{12}\frac{\partial x_2}{\partial p_r} + \cdots\cdots + u_{1n}\frac{\partial x_n}{\partial p_r} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -p_r\frac{\partial\lambda}{\partial p_r} + u_{r1}\frac{\partial x_1}{\partial p_r} + u_{r2}\frac{\partial x_2}{\partial p_r} + \cdots\cdots + u_{rn}\frac{\partial x_n}{\partial p_r} &= \lambda \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -p_n\frac{\partial\lambda}{\partial p_r} + u_{n1}\frac{\partial x_1}{\partial p_r} + u_{n2}\frac{\partial x_2}{\partial p_r} + \cdots\cdots + u_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial p_r} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (\text{IV}-12)$$

$p_r = u_r/\lambda$ を代入すれば，未知数の行列式は，（IV－9）式になるから，次のように求めることができる。

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_r} = \left(-\frac{\lambda^2}{U}\right)(-x_r U_0 + U_s) = \frac{-\lambda^2(-x_r U_0 + U_s)}{U} \qquad \cdots\cdots (\text{IV}-13)$$

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r} = \left(-\frac{\lambda^2}{U}\right)\left(\frac{x_r}{\lambda}U_s - \frac{1}{\lambda}U_{rs}\right) = \frac{\lambda(-x_r U_s + U_{rs})}{U} \qquad \cdots\cdots (\text{IV}-14)$$

ただし，

$$\begin{vmatrix} -x_r & u_1\lambda & \cdots\cdots\dfrac{u_n}{\lambda} \\ 0 & u_{11} & \cdots\cdots u_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda & u_{r1} & \cdots\cdots u_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & u_{n1} & \cdots\cdots u_{nn} \end{vmatrix} = -x_r \mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_s$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{u_1}{\lambda}\cdots\cdots & -x_r\cdots\cdots\dfrac{u_n}{\lambda} \\ -\dfrac{u_1}{\lambda} & u_{11}\cdots\cdots & 0\cdots\cdots u_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\dfrac{u_r}{\lambda} & u_{r1}\cdots\cdots & \lambda\cdots\cdots u_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\dfrac{u_n}{\lambda} & u_{n1}\cdots\cdots & 0\cdots\cdots u_{nn} \end{vmatrix} = \frac{x_r}{\lambda}\mathrm{U}_s - \frac{\lambda}{\lambda^2}\mathrm{U}_{rs} = \frac{x_r\mathrm{U}_s - \mathrm{U}_{rs}}{\lambda}$$

方程式 (Ⅳ—14) に (Ⅳ—11) を適用すれば，次の式に書き換えられる。

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r} = -x_r\frac{\partial x_r}{\partial y_s'} + \lambda\frac{\mathrm{U}_{rs}}{\mathrm{U}} \quad \cdots\cdots \text{(Ⅳ—15)}$$

この方程式 (Ⅳ—15) は，ヒックス (Hicks) の価値基本方程式と呼ばれているものである。この代替項を x_{rs} とおけば[5)]，次の式に置き換えられる。

---

5) 代替項の諸性質については，下記の Mosak あるいは Hicks を参照されたい。ここでは，その若干の性質のみをあげる。

(1) $x_{rs}=x_{sr}$ (2) $x_{rr}<0$ (3) $\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1} p_r p_s x_{rs}<0$

(4) $\sum_{r=1}^{n} p_r x_{rs}=0$ (5) $\sum_{r\neq s} p_r x_{rs}>0$ (6) $\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=m+1}^{n} p_r p_s x_{rs}>0$ $(m<n)$

J. L. Mosak; General Equilibrium Theory in International Trade, 1944, pp. 22-26.

J. R. Hicks; Value and Cpital. 2nd. ed. pp. 309-311.

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=x_{rs}-x_r\frac{\partial x_s}{\partial y} \qquad \cdots\cdots (\text{IV}-16)$$

$$\frac{\partial x_r}{\partial p_r}=x_{rr}-x_r\frac{\partial x_r}{\partial y} \qquad \cdots\cdots (\text{IV}-17)$$

方程式（IV—17）は，r と s が等しいと置くことによって得られ，スルツキー（Slutsky）方程式と呼ばれるものである。この方程式の代替項は x_{rr} は，安定条件から負でなければならない。もし，代替項 x_{rs} が正であるならば，代替財であり，x_{rs} が負であるならば，補完財である。x_{rs} がゼロであるならば，独立財である。

V 交換の均衡

第IV節における如く，消費者が商品 r を消費する量を x とし，総需要量をXとすれば，

$$X_r=\sum_{r=1}^{n}x_r \qquad \cdots\cdots (\text{V}-1)$$

また，総供給量を$\overline{X}$とし，商品 $\overline{r}$ の初期量，つまり，供給量を $\bar{x}$ とすれば，

$$\overline{X}_r=\sum_{r=1}^{n}\bar{x}_r \qquad \cdots\cdots (\text{V}-2)$$

もし，この体系が均衡している場合には，あらゆる商品の需要は，その供給に等しくなければならない。

$$X_r=\overline{X}_r \qquad \cdots\cdots (\text{V}-3)$$

そこで，X_r を決定するのに，（V—1）式を想起すれば，次の式に書き換えられる。ただし，p は商品価格を表わす。

$$\sum_{r=1}^{n}p_rx_r=\sum_{r=1}^{n}p_r\bar{x}_r \qquad \cdots\cdots (\text{V}-4)$$

すべての個人を合計すれば，次の式になる。

$$\sum_{r=1}^{n}p_rX_r=\sum_{r=1}^{n}p_r\overline{X}_r \qquad \cdots\cdots (\text{V}-5)$$

方程式（V—3）が保たれるかどうかに関係なく，（V—5）式は必ず保たれねばならない。それ故に，n ケの価格，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ を決定するのに，$n-1$ ケの方程式しかもっていない。実際，各商品に対する需要は，

ニュメレール (numéraire)[6] による $n-1$ ケの価格比の函数になる。すなわち，

$$X_r = X_r(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}) \qquad \cdots\cdots (\text{V}-6)$$

ここで，$y_t=(p_r/p_n)$ $(t=1,2,\cdots,n-1)$ である。従って，$n-1$ ケの方程式を決定するのに，$n-1$ ケの価格比をもつことになる。それ故に，(V－3) は，次の式に書き換えられる。

$$X_r(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}) = \overline{X}_r \qquad \cdots\cdots (\text{V}-7)$$

$\overline{X}_r$ は一定とみなされるから，安定条件は dX_r/dy_r の符号を考へればよい。ヒックス (Hicks) の交換の均衡安定条件は[7]，次の如くである。

1. y の減少は，次の条件のもとで，Xに対する超過需要の増加をもたらす場合には，完全安定である。
   - a) 他のすべての価格比が一定である。
   - b) その商品市場において，均衡が維持されるように，一つの価格比のみが調整される場合，ただし，他のすべての価格比は一定である。
   - c) 二つの価格比が同じように調整される場合。
2. y の減少は，市場において均衡が維持されるように，他のすべての価格比が調整される場合にのみ，Xに対する超載需要の増加をもたらすならば，不完全安定である。

これらの事柄を数式に書き直すならば，次の式になるであろう。

$$\frac{d(X_1-\overline{X}_1)}{dy_1} = \frac{dX_1}{dy_1} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial X_1}{\partial y_s}\frac{dy_s}{dy_1} < 0 \qquad \cdots\cdots (\text{V}-8)$$

$$\frac{d(X_r-\overline{X}_r)}{dy_1} = \frac{dX_r}{dy_1} = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\partial X_r}{\partial y_s}\frac{dy_s}{dy_1} = 0 \qquad \cdots\cdots (\text{V}-9)$$

方程式 (V－8) は完全安定の条件であり，方程式 (V－9) は不完全安定の条件である。これら二つの方程式から，次のような y_1 の変化に関する式が得られる。

---

6) ニュメレール (numéraire) は，価値標準，あるいは，価値尺度，および価値尺度財などと訳されている。

7) J. R. Hicks; Value and Capital: 2nd. p. 315.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial X_1}{\partial y_1}+\dfrac{\partial X_1}{\partial y_2}\dfrac{dy_2}{dy_1}+\cdots\cdots+\dfrac{\partial X_1}{\partial y_{n-1}}\dfrac{dy_{n-1}}{dy_1}=\dfrac{dX_1}{dy_1}\\ \dfrac{\partial X_2}{\partial y_1}+\dfrac{\partial X_2}{\partial y_2}\dfrac{dy_2}{dy_1}+\cdots\cdots+\dfrac{\partial X_2}{\partial y_{n-1}}\dfrac{dy_{n-1}}{dy_1}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial X_{n-1}}{\partial y_1}+\dfrac{\partial X_{n-1}}{\partial y_2}\dfrac{dy_2}{dy_1}+\cdots\cdots+\dfrac{\partial X_{n-1}}{\partial y_{n-1}}\dfrac{dy_{n-1}}{dy_1}=0\end{array}\right| \quad\cdots\cdots\ (\text{V}-10)$$

ここで，$a_{rs}=\dfrac{\partial X_r}{\partial y_s}=p_n\dfrac{dX_r}{dp_s}$ とおき，これらの行列式を求めれば，次の式になる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots a_{1,\,n-1}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots a_{2,\,n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots\ \ \vdots\\ a_{n-1} & a_{n-1,\,2} & \cdots a_{n-1,\,n-1}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\\ \dfrac{dy_2}{dy_1}\\ \vdots\\ \dfrac{dy_{n-1}}{dy_1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}p_n\dfrac{dX_1}{dp_1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{vmatrix} \quad\cdots\cdots\ (\text{V}-11)$$

これら未知数のもつ行列をJとし，Jの a_{rs} の余因子を J_{rs} とすれば，（V－8）式から次のことが云える。

$$p_n\frac{dX_1}{dp_1}=\frac{J}{J_{11}}<0 \quad\cdots\cdots\ (\text{V}-12)$$

すなわち，その市場において，完全に安定であるための条件は，dX_1/dp_1 が負でなければならないことを意味している。斯様な体系をすべて解くならば，次の行列が得られる。

$$a_{11},\ \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\ \cdots\cdots,\ \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots a_{1,\,n-1}\\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots\cdots a_{2,\,n-1}\\ \vdots & \vdots\ \ \ddots\ \ \vdots\\ a_{n-1,\,1} & a_{n-1,\,2}\cdots\cdots a_{n-1,\,n-1}\end{vmatrix} \quad\cdots\cdots\ (\text{V}-13)$$

マトリックス (matrix)（V－13）が安定であるためには，それぞれ，交互に負，正でなければならない。

さて，いま価値尺度財 X_n によって X_r に対する需要増加があったと仮定すれば，安定条件から，y_r が上昇せねばならない。他の価格 y_s の

効果は，方程式（V—9）から得ることがでる。

$$\frac{\partial X_s}{\partial y_r}+\frac{\partial X_s}{\partial y_s}\frac{dy_s}{dy_r}=0 \qquad \cdots\cdots (\text{V}—14)$$

$$\therefore \quad \frac{dy_s}{dy_r}=-\frac{\dfrac{\partial X_s}{\partial y_r}}{\dfrac{\partial X_s}{\partial y_s}}=-\frac{X_{rs}}{X_{ss}} \qquad \because\ a_{ij}=\frac{\partial X_j}{\partial y_i} \qquad \cdots\cdots (\text{V}—15)$$

我々は，X_{ss} が安定条件から負であることを知っている。そこで，所得効果を無視するならば，X_{rs} は，X_r と X_s が代替財，あるいは補完財であるかに従って，正または負になる。X_r と X_s が代替であるならば，X_s の価格は上昇し，それが補完であるならば，下落する。

要約すれば，次のように書き表わされる。

case 1)　代替財 $X_{rs}>0 \Rightarrow \dfrac{dy_s}{dy_r}>0$

case 2)　補完財 $X_{rs}<0 \Rightarrow \dfrac{dy_s}{dy_r}<0$

VI　開放体系における市場の均衡

前節までは，封鎖経済体系のもとでの考察であっが，ここでは，開放経済体系のもとでのそれを考察する。まず，すべての国の商品数を n ケとし，商品 r の総需要量を X，その総供給量を $\bar{X}$ とすれば，各国における需要供給の均等式は，次のようになる。ただし，上肩添字は，それぞれの国を示す。

$$X_r{}^1+X_r{}^2+\cdots+X_r{}^v=\bar{X}_r{}^1+\bar{X}_r{}^2+\cdots+\bar{X}_r{}^v$$
$$(r=1,2,\cdots,n-1) \qquad \cdots\cdots (\text{VI}—1)$$

いま，$I_r=X_r-\bar{X}_r$ とおけば，I_r が正である場合には，輸入需要を，I_r が負である場合には，輸出供給を表わすものとすれば，方程式（VI—1）は，次の式に書き換えられる。

$$I_r{}^1+I_r{}^2+\cdots\cdots+I_r{}^v=0 \qquad (r=1,2,\cdots,n-1) \qquad \cdots\cdots (\text{VI}—2)$$

このことは，すべての国に対する各商品の純輸入が，ゼロでなければならないことを意味している。

国際経済における交換の均衡に対する安定条件は[8]，封鎖経済において与えられた条件と類似している。

1．国際経済における完定安定は，任意の一商品価格比の増加が，次の条件のもとで，その商品に対する国際的超過需要の減少を生じなければならないことを要する。

a）他のすべての価格比が一定である場合。

b）その商品の国際市場において，均衡が維持されるように，一つの価格比のみが調整される場合。

c）二つの価格比が同じように調整される場合。

2．不完全安定の場合は，他のすべての価格比が調整される場合，国際的超過需要の減少が生じなければならない。

それ故に，次のように書き表わすことができる。

$$\frac{d(\mathrm{I}_1{}^1+\mathrm{I}_1{}^2+\cdots+\mathrm{I}_1{}^v)}{dy_1}=\frac{d\mathrm{X}_1{}^i}{dy_1}=\sum_{i=1}^{v}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial \mathrm{X}_1{}^i}{\partial y_s}\frac{dy_s}{dy_1}<0 \quad \cdots\cdots (\text{Ⅵ}-3)$$

$$\frac{d(\mathrm{I}_r{}^1+\mathrm{I}_r{}^2+\cdots+\mathrm{I}_r{}^v)}{dy_1}=\frac{d\mathrm{X}_r{}^i}{dy_1}=\sum_{i=1}^{v}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial \mathrm{X}_r{}^i}{\partial y_s}\frac{dy_s}{dy_1}=0$$

$$(r=2,3,\cdots,n-1) \quad \cdots\cdots (\text{Ⅵ}-4)$$

方程式（Ⅵ－3）は，完全安定のための条件であり，方程式（Ⅵ－4）は，不完全安定のためのそれである。これらの方程式から，y_1 の変動式を得ることができる。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathrm{X}_1{}^1}{\partial y_1}+\frac{\partial \mathrm{X}_1{}^2}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dy_1}+\cdots\cdots+\frac{\partial \mathrm{X}_1{}^v}{\partial y_{n-1}}\frac{dy_{n-1}}{dy_1}=\frac{d\mathrm{X}_1}{dy_1}\\
&\frac{\partial \mathrm{X}_2{}^1}{\partial y_1}+\frac{\partial \mathrm{X}_2{}^2}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dy_1}+\cdots\cdots+\frac{\partial \mathrm{X}_2{}^v}{\partial y_{n-1}}\frac{dy_{n-1}}{dy_1}=0 \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅵ}-5)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial \mathrm{X}^1{}_{n-1}}{\partial y_1}+\frac{\partial \mathrm{X}^2{}_{n-1}}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dy_1}+\cdots\cdots+\frac{\partial \mathrm{X}^v{}_{n-1}}{\partial y_{n-1}}\frac{dy_{n-1}}{dy_1}=0
\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{A}_{rs}{}^i=\dfrac{\partial \mathrm{X}_r{}^i}{\partial y_s}$ とおき，この行列式を求めれば，次の式になる。

8）J. R. Mosak; General Equilibrium Theory in International Trade, 1944, p. 53.

$$\begin{vmatrix} A^1{}_{11} & A^2{}_{12} \cdots\cdots\cdots & A^v{}_{1,\,n-1} \\ A^1{}_{21} & A^2{}_{22} \cdots\cdots\cdots & A^v{}_{2,\,n-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A^1{}_{n-1,\,1} & A^2{}_{n-1,\,2} \cdots\cdots & A^v{}_{n-1,\,n-1} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{dy_2}{dy_1} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dy_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n \dfrac{dX_1}{dp_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots (\text{VI}-6)$$

この行列式をHとおき，Hの $A_{rs}{}^i$ の余因子を H_{rs} とすれば，

$$p_n \frac{dX_1}{dp_1} = \frac{H}{H_{11}} < 0 \qquad \cdots\cdots (\text{VI}-7)$$

ここでは $I_s{}^i$ が一定であるとおいているのであるから，完全安定の条件は，dX_1/dp_1 が負でなければならないことを示している。

$$A^1{}_{11},\ \begin{vmatrix} A^1{}_{11} & A^2{}_{12} \\ A^1{}_{21} & A^2{}_{22} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} A^1{}_{11} & A^2{}_{12} & A^3{}_{13} \\ A^1{}_{21} & A^2{}_{22} & A^3{}_{23} \\ A^1{}_{31} & A^2{}_{32} & A^3{}_{33} \end{vmatrix},\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots \qquad (\text{VI}-8)$$

マトリックス(VI—8)が安定であるためには，交互に，それぞれ，負，正でなければならないことを意味している。

VII 貨幣需要を導入したモデル[9)]

二商品に加えて，貨幣量を加えた単純化モデルを仮定すれば，一国の効用函数は，次の如く示される。

$$u = u(D_1,\ D_2,\ M_r) \qquad \cdots\cdots (\text{VII}-1)$$

ここで，u は効用水準であり，$D_i (i=1,2)$ は二商品の購入量，M_r は実質現金残高である。つまり，函数（VII—1）は，効用水準が，二商品の購入量と実質貨幣保有量に依存していることを意味している。また，M_r は，名目貨幣ストックMを，物価指数 $f(p_1,\ p_2)$ でデフレイトしたものである。

$$M_r = \frac{M}{f(p_1,\ p_2)} \qquad \cdots\cdots (\text{VII}-2)$$

f は貨幣の実質価値を表わす函数であり，$f_i = (\partial f/\partial p_i) > 0\ (i=1,2)$ で

9) R. Komiya; Monetary Assumptions, Currency Depreciation and the Balance of Trade, 季刊理論経済学, Dec. 1966. を参照。

あると仮定し，一次同次函数である。

$$f=f_1p_1+f_2p_2 \cdots\cdots \qquad (\text{Ⅶ}-3)$$

また，国民所得Yは，国民生産物と定義されるから，

$$Y=p_1X_1+p_2X_2 \qquad \cdots\cdots(\text{Ⅶ}-4)$$

ここで，$X_i(i=1,2)$ は，二商品の国内生産物である。初期貨幣ストックを M_0 とすれば，予算制約式は，次の如く書き換えられる。

$$Y+M_0=p_1D_1+p_2D_2+M \qquad \cdots\cdots(\text{Ⅶ}-5)$$

これまでと同じように，ラグランジ方程式を求めれば，次のようになる。

$$V=u(D_1,D_2,M_r)+\lambda[Y+M_0-(p_1D_1+p_2D_2+M)] \cdots\cdots(\text{Ⅶ}-6)$$

ただし，λ はラグランジの未定乗数である。方程式（Ⅶ－6）から，一階の均衡条件は，次の如くである。

$$\frac{\partial V}{\partial D_1}=u_1-\lambda p_1=0 \qquad \cdots\cdots(\text{Ⅶ}-7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial D_2}=u_2-\lambda p_2=0 \qquad \cdots\cdots(\text{Ⅶ}-8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial M_r}=u_3-\lambda f=0 \qquad \cdots\cdots(\text{Ⅶ}-9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda}=Y+M_0-(p_1D_1+p_2D_2+M) \qquad \cdots\cdots(\text{Ⅶ}-10)$$

方程式（Ⅶ－7(～)Ⅶ－10）を全微分すれば，次の式を得る。ただし，ここで，$\frac{\partial^2 u}{\partial D_i \partial D_j}\equiv u_{ij}, \frac{\partial^2 u}{\partial D_i \partial M_r}\equiv u_{i3}$, $(i,j=1,2,3)$ とする。

$$u_{11}dD_1+u_{12}dD_2+u_{13}dM_r-p_1d\lambda=\lambda dp_1 \qquad \cdots\cdots(\text{Ⅶ}-11)$$

$$u_{21}dD_1+u_{22}dD_2+u_{23}dM_r-p_2d\lambda=\lambda dp_2 \qquad \cdots\cdots(\text{Ⅶ}-12)$$

$$u_{31}dD_1+u_{32}dD_2+u_{33}dM_r-f=\lambda df \qquad \cdots\cdots(\text{Ⅶ}-13)$$

$$\begin{aligned}-p_1dD_1-p_2dD_2-fdM_r &= -\{dY+dM_0-(D_1+M_rf_1)dp_1 \\ &\quad -(D_2+M_rf_2)dp_2\} \cdots\cdots(\text{Ⅶ}-14)\end{aligned}$$

それぞれの係数マトリックスを求めれば，次の式に書き表わされる。

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & -p_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & -f \\ -p_1 & -p_2 & -f & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dD_1 \\ dD_2 \\ dM_r \\ d\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda dp_1 \\ \lambda dp_2 \\ \lambda(f_1dp_1+f_2dp_2) \\ -\{dY+dM_0-(D_1+M_rf_1)dp_1 \\ \qquad -(D_2+M_rf_2)dp_2\} \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots \text{(VII—15)}$$

へりつき行列を次のようにAで示し，マトリックスAの余因子を A_{ij} と定義する。

$$A \equiv \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & -p_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & -f \\ -p_1 & -p_2 & -f & 0 \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots \text{(VII—16)}$$

いま，商品の消費需要に対する効果を求めよう。

$$dD_1 = \frac{\lambda}{A}\{A_{11}dp_1 + A_{21}dp_2 + (f_1dp_1+f_2dp_2)A_{31}$$

$$-\frac{A_{41}}{A}\{dY+dM_0-(D_1+M_rf_1)dp_1-(D_2+M_rf_2)dp_2\} \cdots\cdots \text{(VII—17)}$$

方程式（VII—17）を p_1 で偏微分すれば，次の式が得られる。

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = \frac{\lambda}{A}(A_{11}+f_1A_{31}) + \frac{A_{41}}{A}(D_1+M_rf_1) \quad \cdots\cdots \text{(VII—18)}$$

また，方程式（VII—17）をYで微分すれば，

$$\frac{\partial D_1}{\partial Y} = -\frac{A_{41}}{A} \quad \cdots\cdots \text{(VII—19)}$$

方程式（VII—18）に（VII—19）式を代入すれば，周知のスルツキー（Slutsky）の方程式が得られる。

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = \frac{\lambda}{A}(A_{11}+f_1A_{31}) - (D_1+M_rf_1)\frac{\partial D_1}{\partial Y} \quad \cdots\cdots \text{(VII—20)}$$

方程式（VII—20）の右辺第一項は，価格効果であり，第二項は所得効果である。さらに，この体系における交差効果（cross effect）をも考慮した形にすれば，方程式（VII—20）は，次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_i} = \frac{\lambda}{A}(A_{ij}+f_iA_{3j}) + \frac{A_{4j}}{A}(D_i+M_rf_i) \quad (i, j=1, 2) \quad \cdots\cdots \text{(VII—21)}$$

方程式（Ⅶ—21）の右辺の第二項は，後に見るように，貨幣に対する需要を表わしている。しかし，方程式（Ⅶ—21）において，λは正であり，Aは，無差別曲線が原点に凸であるという性質から，正でなければならない。従って，$(dD_j/dp_i) \gtreqless 0$ によって，代替であるか補完であるかが決定される。

さて，次に，貨幣需要に対するスルツキー（Slutsky）方程式を求めれば，次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_r}{\partial p_i} &= \lambda\frac{A_{i3}}{A} + \lambda f_i \frac{A_{33}}{A} - \frac{A_{43}}{A}\{-(D_i + M_r f_i)\} \\ &= \left(\lambda\frac{A_{i3}}{A} - hD_i\right) + f_i\left(\lambda\frac{A_{33}}{A} - hM_r\right) \\ &= \frac{\lambda}{A}(A_{i3} + f_i A_{33}) - h(D_i + f_i M_r) \ (i=1,2) \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅶ—22})\end{aligned}$$

ただし，貨幣の限界保蔵性向 $h = \frac{\partial M_r}{\partial M_0} = \frac{\partial M_r}{\partial I} = -\frac{A_{43}}{A}$ であり，$0 < h < 1$ である。方程式（Ⅶ—22）の右辺第一項は代替効果であり，第二項は所得効果である。小宮教授によれば，方程式（Ⅶ—22）の代替項が，ゼロであるという仮定を置いている。すなわち，

$$A_{i3} + f_i A_{33} = 0 \qquad (i=1,2) \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅶ—23})$$

$$\therefore \ \frac{\partial M_r}{\partial p_i} = -h(D_i + f_i M_r) \ (i=1,2) \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅶ—24})$$

この方程式（Ⅶ—24）は，二商品の初期消費価格が上昇する場合，実質貨幣ストックの価値が減少することを意味している。

いま，$A_{13} \equiv A_{23} \equiv A_{33} = 0$ とすれば，マトリックスAは，次のようになる。

$$A = u_{13}A_{13} + u_{23}A_{23} + u_{33}A_{33} - fA_{43} = -fA_{43} \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅶ—25})$$

$$\therefore \ h = -\frac{A_{43}}{A} = \frac{1}{f} \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅶ—26})$$

$$\therefore \ hf = f\frac{\partial M}{\partial I} = 1 \qquad \cdots\cdots (\text{Ⅶ—27})$$

すなわち，実質貨幣の限界保蔵価値は，変化しないことを示し，限界消費性向がゼロであることを意味している。

また，小宮教授の第二の仮定は，商品価格のうちの一つが変化する場合に，貨幣需要は同じ方向に変化するということである。貨幣に対する需要は，二商品価格と所得水準と初期貨幣ストックに依存するから，

$$M=M(p_1,\ p_2,\ Y,\ M_0) \qquad \cdots\cdots\ (\text{Ⅶ—28})$$

Mは，p_1, p_2, Y および M_0 の一次同次函数であるから，次の式が得られる。

$$p_1\frac{\partial M}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial M}{\partial p_2}=M \mid h(Y+M_0)=M-Me_M=M(1-e_M) \qquad \cdots\cdots\ (\text{Ⅶ—29})$$

ここで，貨幣需要の所得弾力性 $e_M=\dfrac{Y+M_0}{M}\dfrac{\partial M}{\partial(Y+M_0)}$ である。この仮定のもとでは，他の価格が変化する場合も同じ方向に変化するのであるから，$\partial M/\partial p_1$ と $\partial M/\partial p_2$ は同じ符号をもつことになる。すなわち，

$e_M \lesseqgtr 1$ に従って $\dfrac{\partial M}{\partial p_i} \gtreqless 0$ になる。

つまり，価格が上昇すれば，実質所得は減少する。しかし，$e_M<1$，すなわち，貨幣に対する需要の所得弾力性が，1よりも小であるならば，貨幣需要は増加する。$e_M>1$ である場合には，貨幣需要は減少することを意味している。

あ と が き

消費者需要の理論は，ある商品の価格が変化した場合に，その商品の需要量が如何に変化するかを分析することである。この場合，効用水準は一定であるとおかれねばならない。また，所得変化による需要量の変化をも考察し，価格効果が所得効果によって，丁度，相殺されるかどうかをも観察することでもあった。この理論を開放体系に拡張することも，近年試みられ始めている。いわゆる，総需要を国内生産物と輸入品とすれば，例えば，輸入価格の上昇は，輸入品消費を減じるはずである。しかし，輸入インフレが継続している限りでは，減少よりもむしろ増加している。同時に，国内生産物価格をも上昇させ，実質現金残高は下落している。また，現金残高保有を国内通貨と外貨準備高とに区分し，分析する試みもなされ

つつある。いわゆるポートホリオ接近法（portfolio approach）と呼ばれているものである。国際収支に関する接近法には，古典的といわれている弾力性接近法と，近代経済的と称されている貨幣的接近法，それに，新しく資産選択接近法が加わろうとしている。斯かる方向への足がかりとして，本稿をまとめた次第である。私自身，いまだ未熟さの故に，誤った個所も多いだろうと思われる。斯様なものに対する叱責が与えられることにより，目的の彼岸に到達できることを念願している。

(1973. 9.29)

文　献

〔1〕Allen, R. G, D,; Mathematical Analysis for Economist, 1967.

〔2〕Hicks, J. R.; Value and Capital. 2ed. 1957.

〔3〕Komiya, R.; Monetary Assumptions, Currency Depreciation and the Balance of Trade, 季刊理論経済学, Dec. 1966.

〔4〕Kogiku, K. C.; Microeconomic Models, 1971.

〔5〕Mosak, J. L.; General Equilibrium Theory in International Trade, 1944.

〔6〕Sato, K.; Separability of Goods and Money in the Analysis of Currency Depreciation, 季刊理論経済学, Dec. 1972.

〔7〕クオント&ヘンダースン・小宮隆太郎訳：現代経済学，1961.

〔8〕今井・宇沢・小宮・根岸・村村著：価格理論Ⅰ，1971.

〔9〕田村泰夫編：経済学の基礎，1970.

〔10〕カーク&サポスニック・田村・櫟本共訳：一般均衡理論と厚生経済学，1971.