# 最 適 化 問 題 序 説

千　葉　昌　夫

## 1. は し が き

自然科学社会科学を問わず，多くの科学の分野において最適化問題がとりあつかわれている。数理科学のチャンピオンである物理学においても，自然は一定の仕事をするために，それに使うコスト，エネルギー，時間などが最小化される方法を選ぶという最小作用の原理が存在する。たとえば，光が水面で屈折するのは２点間を最小の時間で行くためと考えることができる。

一方，経済学では，経済主体は与えられた環境のもとで自己の目的を最大化する行動をとる。その経済主体が家計であれば，予算の制約のもとで効用を最大化し，企業であれば，生産技術の制約のもとで利潤を最大化する。

これらは，与えられた制約条件のもとで与えられた目的関数を最大化する最適化理論によって数学的に分析することができる。すなわち，制約条件つき最適化問題としてとらえることができる。

最適化理論には，いろいろなものが考えられるが，この小論は静学最適化理論（非線形計画法）へのイントロダクションである。すなわち，Lagrange 乗法数（あるいは古典的計画問題）をとりあげ，それをどのように一般化するかを考える。

まず，第２節において，無制約の極値の１次の必要条件，Weierstrass の定理，および，極大値と最大値との関係について述べる。第３節におい

て，陰関数の定理を用いて Lagrange 乗数法に関する定理を証明する。ただし，2次の条件にはたちいらない。[1] そうして，Lagrange 乗法の意味を考える。最後の第4節において次稿の予定を述べておくことにする。

なお，この小論は，ほとんど到るところ，二階堂〔4〕〔5〕，Nikaido〔6〕，西村〔7〕および渡辺・青沼〔11〕に負っている。ここに感謝の意を表わしておきたい。

## 2. 無制約の最適化問題

$X\subset R^n$, $Y\subset R$ に対し関数 $f:X\to Y$ を考えよう。まず，関数 $f$ の極値について述べておこう。[2]

**定義2.1** $X\subset R^n$ で定義された実数値関数 $f(x)$ が，点 $\hat{x}$ のある近傍の任意の点 $x$ に対して $f(\hat{x})\geqq f(x)$ であれば，$f(x)$ は $\hat{x}$ で極大値をとるといい，$\hat{x}$ のことを極大点という。同様に，$\hat{x}$ の $\varepsilon$—近傍の任意の点 $x$ に関して，$f(\hat{x})\leqq f(x)$ であれば，$f(x)$ は $\hat{x}$ で極小値をとるといい，$\hat{x}$ のことを極小点という。極大値と極小値をあわせて極値とよぶ。

関数 $f(x)$ が $\hat{x}$ で極値をとれば，次の定理が成立する。

**定理2.1** 微分可能関数 $f(x)$ が点 $\hat{x}$ で極値をとれば，

$$\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}=0 \qquad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{2.1}$$

が成立する。

**証明** $\hat{x}$ が $f(x)$ の1つの極値，たとえば極大値を与えるとしよう。

$$x=\hat{x}+\Delta x$$

を $\hat{x}$ の $\varepsilon$—近傍の中の任意の点とすると，$\hat{x}$ が極大点であるから，すべての

$$\Delta x=(\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n)$$

に対して

$$f(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_j+\Delta x_j, \hat{x}_{j+1}, \cdots, \hat{x}_n)\leqq f(\hat{x}) \qquad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{2.2}$$

となる。したがって，

$$\Delta x_j>0 \text{ ならば, } \frac{f(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_j+\Delta x_j, \cdots, \hat{x}_n)-f(\hat{x})}{\Delta x_j}\leqq 0 \tag{2.3}$$

$$\Delta x_j<0 \text{ ならば, } \frac{f(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_j+\Delta x_j, \cdots, \hat{x}_n)-f(\hat{x})}{\Delta x_j}\geqq 0 \tag{2.4}$$

ここで $\Delta x_j \to 0$ とすれば，(2.3)，(2.4)から(2.1)がえられる。

同様に，$\hat{x}$ が極小点のときも(2.2)－(2.4)の不等式の向きが逆になるだけで(2.1)が成立する（証了)。

(2.1)をみたす点 $\hat{x}$ を $f(x)$ の停留点という。ここで，注意しなければならないことは，逆に(2.1)が成り立っても，必ずしもその点が極値点とは限らないということである。すなわち，(2.1)は極値の必要条件にすぎないのである。鞍点においても(2.1)が成立しているのである。このことを次の例で確かめよう。

**例2.1** $f(x_1, x_2)=x_1x_2$ において，$x_1=x_2=0$ で(2.1)は成立するが，(0, 0) は $f$ の極大点でも極小点でもなく，鞍点である。

極値は，関数の局所的な概念である。次に，大域的な概念である最大値，最小値について述べておこう。

**定義2.2** $X\subset R^n$ で定義された実数値関数 $f(x)$ が点 $\hat{x}$ において，任意の点 $x\in X$ に対して，$f(\hat{x})\geqq f(x)$ ならば，$f(\hat{x})$ は $f$ の最大値であり，$\hat{x}$ を最大点という。不等号の向きが反対の場合，$f(\hat{x})$ は $f$ の最小値であり，$\hat{x}$ を最小点という。

最適化問題では，最大値や最小値の存在が基本的な前提となる。これらの存在については，解析学でよく知られている Weierstrass の定理によって保証される[3]。

**定理2.2** (Weierstrass) コンパクトな集合 $X\subset R^n$ の上で定義された連続な実数値関数 $f(x)$ は，最大値および最小値をとる。

**証明** $X$ がコンパクトだから $f(X)$ もコンパクトである。よって $f(X)$ は $R$ の中の有界閉集合である。ゆえに，上限，下限をもつ。上限に収束

する $f(X)$ の元の点列があれば，$f(X)$ は閉集合だから，収束点（上限）も $f(X)$ の点である。したがって，上限が最大値になる。下限が最小値になることも同様である（証了）。

**例2.2**　$f:[a, b]\to R$ が連続関数ならば，最大値および最小値が存在する。

この例において，$[a, b]$ を $(a, b)$ におきかえると，結論はかならずしも正しくはなくなる。たとえば，区間 $(0, 1)$ で定義された１次関数 $f(x)=x$ は，連続ではあるが，この区間内では最大値も最小値ももたない。

凸集合の定義を述べておこう。

**定義2.3**　$X\subset R^n$ は，$x, y\in X$ ならば，$0\leqq\alpha\leqq1$ に対して，$\alpha x+(1-\alpha)y\in X$ をみたすとき，凸集合であるといわれる。

図2.1の(ⅰ)は凸集合，(ⅱ)は凸集合ではない。

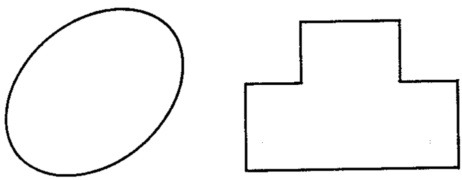

図2.1　(ⅰ)　凸集合　　　　　(ⅱ)　凸集合ではない

**例2.3**　次の(ⅰ)–(ⅴ)はいずれも凸集合の例である。

(ⅰ)　$R^n$

(ⅱ)　$R^n_+=\{x\in R^n\,|\,x_1\geqq0, x_2\geqq0, \cdots, x_n\geqq0\}$

(ⅲ)　$\Omega=\{x\in R^n\,|\,x_1\geqq0, x_2\geqq0, \cdots, x_n\geqq0, x\neq0\}$

(ⅳ)　$\Delta=\left\{x\in\Omega\,\middle|\,\sum_{j=1}^{n}x_j=1\right\}$

(ⅴ)　$S=\left\{x\in\Omega\,\middle|\,\sum_{j=1}^{n}x_j^2=1\right\}$

凹関数の定義を述べておこう。

**定義2.4**　凸集合 $X\subset R^n$ で定義された実数値関数 $f(x)$ が，$0\leqq\alpha\leqq1$，$x$，

$x' \in X$ に対して

$$f(\alpha x+(1-\alpha)x') \geqq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(x')$$

をみたすならば，凹関数といわれる。

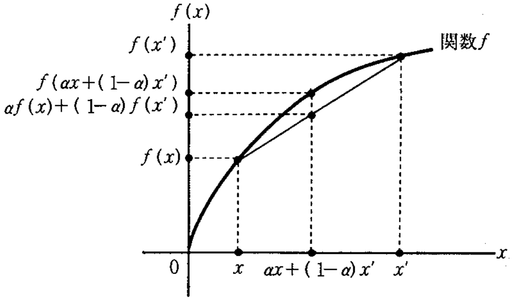


図2.2　凹　関　数

**例2.4**　$f(x)=-x^2:R\to R$ は凹関数である。

**例2.5**　$f(x)=ax+b:R\to R$ は凹関数である。

さて，$f(x)$ が $\hat{x}$ で最大値をとるならば，$\hat{x}$ で極大値をとる。この逆は成立するであろうか。一般的には成立しないが，関数が凹関数である場合には，逆も成立するのである。

**定理2.3**　$f(x)$ が凹関数ならば，$f(x)$ の極大値はつねに $f(x)$ の最大値に一致する。また最大点の集合は凸集合になる。

**証明**　定理の前半を背理法を用いて証明する。$f(x)$ が $\hat{x}$ で極大値をとるならば，$\hat{x}$ で最大値をとることだけを証明すればよい。もし $\hat{x}\neq x^*$ で $f(x^*)>f(\hat{x})$ である $x^*$ が存在するものとする。このとき，$f(x)$ が凹関数であるから，$0\leqq\alpha\leqq1$ であるすべての $\alpha$ に対して

$$f((1-\alpha)x^*+\alpha\hat{x}) \geqq (1-\alpha)f(x^*)+\alpha f(\hat{x}) \tag{2.5}$$

$f(x^*)>f(\hat{x})$ であるから，$\alpha\neq1$ に対して，(2.5)は

$$f((1-\alpha)x^*+\alpha\hat{x}) > f(\hat{x}) \tag{2.6}$$

となる。$\alpha\to1$ とすれば，$(1-\alpha)x^*+\alpha\hat{x}\to\hat{x}$。それにもかかわらず(2.6)が成立するということは，$\hat{x}$ が極大点であることに矛盾する。したがって，

$\hat{x}$ は $f(x)$ の最大値を与える。

次に，定理の後半を証明しよう。$\hat{x}$ の集合を $A$ とする。いま，$\hat{x}, \hat{x}' \in A$ とすると，

$$f(\hat{x})=f(\hat{x}')=\mathrm{Max}\, f(x) \tag{2.7}$$

であるから，

$$\begin{aligned} f(\alpha\hat{x}+(1-\alpha)\hat{x}') &\geqq \alpha f(\hat{x})+(1-\alpha)f(\hat{x}') \\ &=\mathrm{Max}\, f(x) \end{aligned} \tag{2.8}$$

ゆえに，$\alpha\hat{x}+(1-\alpha)\hat{x}' \in A$ であり，$A$ は凸集合である（証了)。

## 3. 等号制約条件つき最適化問題

Samuelson が指摘したように，経済学の問題は，制約付き最大・最小化問題として定式化される。経済学を学ぶ者が最初にマスターしなければならないテクニックのひとつは，Lagrange 乗数法である。これは，制約付きの極値問題を，陰関数定理を用いて無制約の極値問題に変換して処理する方法である。

ミクロ経済学の入門書でまずはじめに出てくる代表的な等号制約つき最適化問題をあげておこう。第1は消費者の効用最大化問題であり，第2は企業の利潤最大化問題である。

**例3.1**（効用最大化問題）　消費者は，所得の制約の下で効用を最大化する。財を $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 価格を $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 所得を $I$ とする。効用関数を $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とすれば，消費者の解くべき問題は次のように定式化される。

$$\mathrm{Max}\ u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = I$$

**例3.2**（利潤最大化問題）　企業は，生産関数の制約の下で利潤を最大化する。投入物および産出物を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とし，価格を $p_1, p_2, \cdots, p_n$ とする。ただし $x_j$ は正ならば産出物を負ならば投入物を示すものとする。生

産関数は $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$, 利潤は $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j$ で表わされる。すると，この企業の解くべき問題は次のように定式化される。

$$\mathrm{Max} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$\text{s.t. } g(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$$

つぎのような一般的な等号制約つき最大化問題を考えよう[4]。

$$\mathrm{Max}\, f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\text{s.t. } g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

ただし，$n>m$ である。以下でこの最適化問題に最適解が存在すると仮定する。制約式の前に $y_i$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ をかけて，目的関数にたし合わせて，

$$K(x, y)=f(x)+\sum_{i=1}^{m} g_i(x) y_i \tag{3.1}$$

という関数をつくる。ここで, $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ であり, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ は Lagrange 乗数ベクトル，$K(x, y)$ は Lagrange 関数と呼ばれる。

**定理3.1**　最大化問題の解 $\hat{x}$ において制約式の勾配ベクトル

$$\nabla g_1(\hat{x}), \nabla g_2(\hat{x}), \cdots, \nabla g_m(\hat{x})$$

が1次独立ならば

$$\left[\frac{\partial K(x, \hat{y})}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}=\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}+\sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i\left[\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}=0$$

$$(j=1, 2, \cdots, n) \tag{3.2}$$

$$\left[\frac{\partial K(\hat{x}, y)}{\partial x_j}\right]_{y=\hat{y}}=g_i(\hat{x})=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{3.3}$$

を満たす $\hat{y}$ が一意的に定まる。

定理3.1の証明に入る前に，証明過程で必要な陰関数定理について述べておこう。陰関数定理は解析学における基本的な定理の1つである。この定理を証明なしに述べておこう[5]。

**補助定理3.1**（陰関数定理）　$n$ 変数に関する $m(<n)$ 個の関係式

$$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0, \qquad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{3.4}$$

があるとき，$m$ 個の変数（たとえば，$x_1, x_2, \cdots, x_m$）を残りの（$n-m$）個の変数（この場合には $x_{m+1}, \cdots, x_n$）の関数で表現したいとしよう。

このとき，$\hat{x}$ が(3.4)をみたす点であるとし，

(1) 関数 $g_i$（$i=1, 2, \cdots, m$）

が $\hat{x}$ のまわりで連続微分可能である，

(2) $\hat{x}$ における $m$ 個のベクトル

$$\nabla g_1(\hat{x}), \nabla g_2(\hat{x}), \cdots, \nabla g_m(\hat{x}) \tag{3.5}$$

が1次独立である。

ならば，$\hat{x}$ のまわりで

$$x_k=\phi_k(x_{m+1}, \cdots, x_n) \qquad (k=1, 2, \cdots, m) \tag{3.6}$$

となる次の性質をみたす一価関数 $\phi_k$（$k=1, 2, \cdots, m$）が一意的に定まる。

(1) $\hat{x}_k=\phi_k(\hat{x}_{m+1}, \cdots, \hat{x}_n)$（$k=1, 2, \cdots, m$）で，しかも $\hat{x}$ のまわりでは，(3.6)をみたす $x$ は(3.4)をみたす。

(2) $\hat{x}$ のまわりで $\phi_k$ は連続微分可能である。

(3) $\partial\phi_k/\partial x_j$（$j=m+1, \cdots, n$）は連立1次方程式

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial x_j}=-\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \qquad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{3.7}$$

の解として一意的に求まる。

(3.5)で表わされるベクトルを行とする $m$ 次の正方行列

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

を変数（$x_1, x_2, \cdots, x_m$）に関するヤコビアンとよぶ。(3.5)の仮定は，このヤコビアンが正則行列（階数$=m$）でなければならないことである。

なお，陰関数定理の意味は，条件(2)の下に，方程式 $g_i(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1},$

$\cdots, x_n)=0$ を $(i=1, 2, \cdots, m)$ を $x_1, x_2, \cdots, x_m$ について解くことができることを主張している。

**定理3.1の証明** 陰関数定理から $\hat{x}$ のまわりで，(3.4)の関係をもつ関数 $\phi_k$ が存在する。(3.4)の関数を $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に代入し，

$$f(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)=h(x_{m+1}, \cdots, x_n) \tag{3.8}$$

とおけば，最大化問題から等式条件が消去され，$(n-m)$ 変数の関数 $h(x_{m+1}, \cdots, x_n)$ の極値問題になる。したがって，

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(\hat{x}_{m+1}, \cdots, \hat{x}_n)=0 \qquad (j=m+1, \cdots, n) \tag{3.9}$$

が成立しなければならない。(3.8)の関係から，
(3.9)は

$$\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}+\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}=0 \qquad (j=m+1, \cdots, n) \tag{3.10}$$

となる。一方，制約式の両辺を $x_j$ で偏微分すれば，同様に

$$\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}+\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}=0 \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \cdots, m; \\ j=m+1, \cdots, n \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

定理の仮定から $m$ 個のベクトル

$$\nabla g_1(\hat{x}), \nabla g_2(\hat{x}), \cdots, \nabla g_m(\hat{x})$$

は互いに1次独立であるから，ベクトル $\nabla f(\hat{x})$ は，これらの1次結合として表わされる。すなわち，1次結合の定数を $-y_i$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ とすれば，ベクトルの第 $k$ 成分の間には

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_k}\right]_{x=\hat{x}}=-\left[\sum_{i=1}^{m} y_i\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\right]_{x=\hat{x}} \qquad (k=1, 2, \cdots, m) \tag{3.12}$$

となる関係がある。このような $-y_i$ は一意的に求まるから，それを

$$-\hat{y}=(-\hat{y}_1, -\hat{y}_2, \cdots, -\hat{y}_m)$$

とし，(3.11)の両辺にかけて，$i=1$ から $m$ までの式を加えれば

$$\left[\sum_{k=1}^{m}\left(-\sum_{i=1}^{m}\hat{y}_i\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\right)\frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}+\left[-\Sigma\hat{y}_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}=0$$

$$(j=m+1,\ \cdots,\ n) \qquad (3.13)$$

(3.10)から(3.12)を引けば

$$\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{m}\hat{y}_i\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\right)\frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}+\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}+\left[\sum_{i=1}^{m}\hat{y}_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}=0$$

$$(j=m+1,\ \cdots,\ n)$$

(3.12)からこの第1項は0である。したがって

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}+\left[\sum_{i=1}^{m}\hat{y}_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}=0 \qquad (j=m+1,\ \cdots,\ n)$$

となり，(3.12)と一緒にして

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}+\left[\sum_{i=1}^{m}\hat{y}_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (3.14)$$

が成立する。

$$\frac{\partial K}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}y_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$$

に注意すれば，(3.14)は(3.2)が成立することを示す。また

$$\frac{\partial K}{\partial y_i}=g_i(x)$$

であることから，$\hat{x}$ が(3.3)をみたすことは明らかである（証了）。

Lagrange 乗法数の具体的な手続きは(3.2)，(3.3)で表わされる $n+m$ 個の連立方程式を $n+m$ 個の変数 $x, y$ について解くことである。このことは，また，Lagrange 関数 $K(x, y)$ の停留点を求めることに対応する。

最小化問題については，$f(x)$ が最小化すべき目的関数ならば，最小化問題を

$$\mathrm{Max}[-f(x)]$$

と最大化問題に変換できるので，Lagrange 乗法数を用いてまったく同じように分析できる。

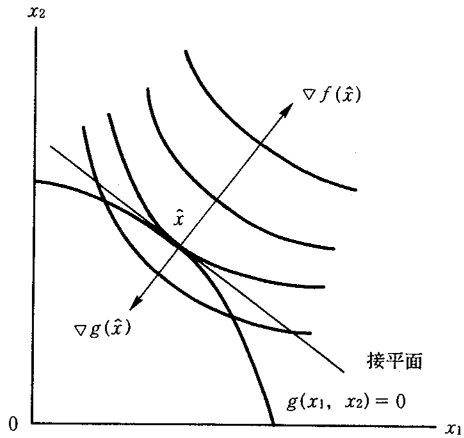


図3. 1

さて，Lagrange 乗数法を直観的に理解しよう。[(6)] 図3. 1に描かれている $(x_1,\ x_2)$ 平面上の等高線を見よう。原点に対して凸である等高線をもち，原点から遠ざかるほどその値が上昇する関数 $f$ が最大値をとる点 $\hat{x}=(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2)$ では，$f$ と $g$ が接している。したがって勾配ベクトル $\nabla f(\hat{x})=(\partial f/\partial x_1,\ \partial f/\partial x_2)_{x=\hat{x}}$ および $\nabla g(\hat{x})=(\partial g/\partial x_1,\ \partial g/\partial x_2)_{x=\hat{x}}$ は，同じ方向あるいは逆方向を指していて，1 次従属になっている。そこで

$$\nabla f(\hat{x})=\lambda\nabla g(\hat{x})$$

とおくと

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}=\lambda\left[\frac{\partial g}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}\qquad (j=1,\ 2)$$

となっている。したがって，$\lambda=-\hat{y}$ とおくと

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}+\hat{y}\left[\frac{\partial g}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}=0\qquad (j=1,\ 2)$$

と $K$ を偏微分したものが左辺に得られる。

Lagrange 乗数は，昔の微分積分の教科書ではたんなる未定乗数として扱われていたが，じつはそれ以上の深い意味をもっている。[(7)] いま，

Lagrange 乗数の値の意味を調べるために，制約式を

$$g_i(x)=b_i-h_i(x) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

とおく。すると最適解の1次の条件(3.2)は

$$\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}-\sum_{i=1}^{m}\hat{y}_i\left[\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}=0$$

となる。

次の定理が成り立つ。

**定理3.2** Lagrange 乗数 $\hat{y}_i$ は第 $i$ 番目の制約式の値 $b_i$ が変化したときの最大値 $f(\hat{x})$ の変化率になっている。

**証明** いま，最大値を与える点 $x=\hat{x}$ での $f$ の変化を考えると

$$\begin{aligned} df(\hat{x}) &= \left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}dx_j\right]_{x=\hat{x}} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\hat{y}_i\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j}dx_j\right]_{x=\hat{x}} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\hat{y}_i\,dh_i(\hat{x}) \end{aligned}$$

となる。ここで，$h_i(x)=b_i$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$）であることから

$$\left[\frac{\partial f(x)}{\partial b_i}\right]_{x=\hat{x}}=\hat{y}_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

が成立する（証了)。

同様の結果は不等式の制約条件式 $g_i(x)\geqq 0$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$）の場合にも拡張でき，この形で線形計画法へも応用できる。

**例3.3** 例3.1の問題の解である通常の需要関数を効用関数に代入すると

$$\begin{aligned} &V(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ I) \\ &\quad =u(\hat{x}_1(p_1,p_2,\cdots,p_n,I),\hat{x}_2(p_1,p_2,\cdots,p_n,I),\cdots,\hat{x}_n(p_1,p_2,\cdots,p_n,I)) \end{aligned}$$

と表わされる。この $V$ を間接効用関数とよぶ。これに対して通常の効用関数 $u(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ を直接効用関数という。

定理3.2により Lagrange 乗数 $\mathfrak{Y}$ は，所得の限界効用，すなわち，

$$\frac{\partial V}{\partial I}=\mathfrak{Y}$$

であることは容易にわかる。

Lagrange 乗法数の欠点として次のものが考えられる。[8]

(1) 微分可能性を仮定している。

(2) 変数の非負性を考慮していない。

(3) 等号制約式のみを仮定している。

## 4. 結びに代えて

経済学の問題では，等号制約よりも不等号制約式によるほうが適切なので，不等号制約下の最大化問題を取り扱うことが多い。これを非線形計画問題と呼ぶ。なお，等号制約ケースの制約式 $g_i(x)=0$ は，2つの不等号制約式 $g_i(x)\geqq 0$, $-g_i(x)\geqq 0$ を用いて表現できる。したがって，Lagrange 乗数法は，非線形計画問題の特殊ケースと考えられる。非線形計画問題は，等号制約つき最大化問題のほかに，線形計画問題と2次計画問題を特殊ケースとして含む。

さて，次に考える問題をとり上げて結びに代えることにしよう。2つの問題（最大化問題と鞍点問題）および1つの条件（Kuhn-Tucker 条件）を考えよう。

最大化問題を二階堂〔4〕のように書こう。[9]

$$\mathrm{Max}\, f(x)$$

$$\mathrm{s.\,t.}\; g_i(x)\geqq 0 \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

ただし，$f(x)$, $g_i(x)$ は $M\subset R^n_+$ で定義された実数値関数である。

制約つき最大化問題に対する Lagrange 関数 $K\colon M\times R^m_+\to R$ を次のように定義する。

$$K(x, y)=f(x)+\sum_{i=1}^{m} g_i(x)y_i \tag{4.1}$$

ただし，$M\times R_+^m \equiv \{(x, y)\,|\,x\in M, y\in R_+^m\}$ である。

$M\times R_+^m$ 上のある点 $(\hat{x}, \hat{y})$ が $x\in M$ および $y\in R_+^m$ に対して

$$K(x, \hat{y}) \leqq K(\hat{x}, \hat{y}) \leqq K(\hat{x}, y) \tag{4.2}$$

をみたせば，組 $(\hat{x}, \hat{y})$ を関数 $K(x, y)$ の鞍点という。

鞍点問題とは関数 $K(x, y)$ の鞍点 $(\hat{x}, \hat{y})$ を求めよという問題である。

最後に，Kuhn-Tucker 条件とは次の(4.3)－(4.6)のことである。

$$\left[\frac{\partial K(x, \hat{y})}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}=\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}+\sum_{i=1}^{m}\hat{y}_i\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}\leqq 0$$

$$(j=1, 2, \cdots, n) \tag{4.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_j\left[\frac{\partial K(x, \hat{y})}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}=\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_j\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}+\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{m}\hat{x}_j\,\hat{y}_i\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]_{x=\hat{x}}=0 \tag{4.4}$$

$$\left[\frac{\partial K(\hat{x}, y)}{\partial y_i}\right]_{y=\hat{y}}=g_i(\hat{x})\geqq 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{4.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\hat{y}_i\left[\frac{\partial K(\hat{x}, y)}{\partial y_i}\right]_{y=\hat{y}}=\sum_{i=1}^{m}g_i(\hat{x})\hat{y}_i=0 \tag{4.6}$$

次稿でとり上げる主題は，最大化問題，鞍点問題および Kuhn-Tucker 条件の関係を，Kuhn-Tucker〔3〕，二階堂〔4〕，Nikaido〔6〕および Uzawa〔9〕を用いて検討することである。

（1991．3．25）

注

(1)　2次の条件については，Intriligator〔2〕 pp. 63-64，西村〔7〕 pp. 174-183，Takayama〔8〕 pp. 121-131 および Varian〔10〕 pp. 324-326 を参照。

(2)　第1節は主として渡辺・青沼〔11〕に負う。

(3)　定理2.2の証明は，本間・岡部〔1〕 p. 36, Nikaido〔6〕 p. 8 および Takayama〔8〕 pp. 33-34 を参照。

(4)　以下の議論は Intriligator〔2〕，西村〔7〕および渡辺・青沼〔11〕に負う。

(5) 陰関数定理の証明は Nikaido〔6〕pp. 85-86 を参照せよ。なお，補助定理2. 1および定理2. 2の証明は渡辺・青沼〔11〕pp. 182-184 を参照。

(6) 西村〔7〕p. 156 を参照。

(7) 西村〔7〕pp. 157-158 を参照。

(8) 西村〔7〕pp. 199-200 を参照。

(9) 二階堂〔4〕p. 255 を参照。

## 参 考 文 献


〔1〕 本間龍雄・岡部恒治『微分幾何とトポロジー入門』，新曜社，1979.

〔2〕 Intriligator, M. D., "Mathematical Programming with Applications to Economics", in Arrow, K. J. and M. D. Intriligator eds., *Handbook of Mathematical Economics,* vol. 1, North-Holland, 1981.

〔3〕 Kuhn, H. W. and A. W. Tucker, "Nonlinear Programming", in Newman, P. ed., *Readings in Mathematical Economics,* vol. 1, Johns Hopkins Press, 1968.

〔4〕 二階堂副包『現代経済学の数学的方法』，岩波書店，1960.

〔5〕 ――――『経済のための線型数学』，培風館，1961.

〔6〕 Nikaido, H., *Convex Structures and Economic Theory,* Academic Press, 1968.

〔7〕 西村和雄『経済数学早わかり』，日本評論社，1982.

〔8〕 Takayama, A., *Mathematical Economics,* 2nd ed., Cambridge University Press, 1985.

〔9〕 Uzawa, H., "The Kuhn-Tucker Theorem in Concave Programming," in Arrow, K. J., Hurwicz, L. and H. Uzawa eds., *Studies in Linear and Non-Linear Programming,* Stanford University Press, 1958.

〔10〕 Varian, H., *Microeconomic Analysis,* 2nd ed., Norton, 1984.

〔11〕 渡辺 浩・青沼龍雄『数理計画法』，筑摩書房，1974.