国際貿易の一般均衡

——完全競争のもとで——

森井昭顕

〔I〕 はしがき

国際貿易に関する理論は複雑であり、分析に際しては，豊富な知識を必要とする。リカードの比較生産費説に始まり，種々なる理論分析がなされている。本稿においては，最とも単純な分析に終始するかもしれないが，貿易の一般均衡論に関する私自身の糸口になることを信じ，本学論集第八号の消費者行動と対比させる意図をもっている。

まず，企業行動の簡単なモデルを分析し，次に，結合生産のケースを取り上げる。次に，このような簡単化されたモデルを，一般化されたｍｎ変数のケースに拡大する。最後に，消費者行動と企業者行動とを組合わせ，為替相場が変動しないものと仮定して，国際貿易の均衡について分析をすすめるつもりである。けれども，浅学の私であり，ほんのわずかな糸口で分析を終える結果になるかもしれない。しかし，諸先生方の御指導により，前進できることを希望している。なお，本文上の誤謬については，すべて私自身の浅学の責任である。

〔II〕 単純化モデル

企業家は一種類以上の投入物（input）を使用し，産出物（output）を生産する。いま，二種類の投入物（x_1, x_2）を使用し，単一の産出物（q）を生産するとしよう。その場合の生産関数（production function）は，次のような式で示される。

$$q=f(x_1, x_2) \qquad (\text{II}-1)$$

ここで，fは投入の組合わせを示す生産の技術係数である。企業家はある行動仮設によって，生産を行なう。すなわち，その行動仮設とは，産出物極大（output maximization），費用極小（cost minimization），および利潤極大（profit maximization）であり，これらの仮設にもとづいて，企業家は行動をとるのである。

この産出物qを生産するに要する費用Cは，次の方程式になる。

$$C=p_1x_1+p_2x_2+b \qquad (\text{II}-2)$$

ここで，p_iは各投入物の価格，つまり生産要素価格であり，bは固定費（fixed cost）である。

さて，この二つの方程式によって，各々の行動仮設による条件を求めよう。

まず第一に，企業家が費用一定のもとで産出物を極大にしようとするケースを取り上げよう。この場合，次のようなラグランジアン（Lagrangian equation）をつくることによって，解くことができる。

$$V=f(x_1,\ x_2)+\mu(\overline{C}-p_1x_1-p_2x_2-b) \qquad (\text{II}-3)$$

ただし，$\overline{C}$は一定量の費用であり，μはラグランジの未定乗数（Lagrange multiplier）である。（II－3）式によって，未知数はx_1, x_2, およびμであるから，一階条件を求めれば，それぞれ次のようになる。ただし，$f_i \equiv \partial f/\partial x_i$を示すものとする。

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_1}&=f_1-\mu p_1=0\\ \frac{\partial V}{\partial x_2}&=f_2-\mu p_2=0 \qquad (\text{II}-4)\\ \frac{\partial V}{\partial \mu}&=\overline{C}-p_1x_1-p_2x_2-b=0\end{aligned}$$

最初の二つの方程式を変形させて解けば，次のような一階の条件が得られる。

$$\mu=\frac{f_1}{f_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad (\text{II}-5)$$

すなわち，各投入物に対する限界生産力の比は，その投入物価格の比に等しいということを表わしている。（Ⅱ－5）式は，技術的代替率[1)]（rate of technical substitution）と呼ばれている。（Ⅱ－4）式における最後の式は，費用一定という制約条件そのものである。

二階条件は，（Ⅰ－4）式をそれぞれ全微分することによって得られ，縁付きヘッセ行列式が正でなければならない。

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}=f_{11}dx_1+f_{12}dx_2-p_1d\mu-\mu dp_1=0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}=f_{21}dx_1+f_{22}dx_2-p_2d\mu-\mu dp_2=0 \qquad (\text{Ⅱ}-6)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2}=-p_1dx_1-p_2dx_2-x_1dp_1-x_2dp_2=0$$

クラメールの公式を使用すれば，次のようになる。

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}>0 \qquad (\text{Ⅱ}-7)$$

あるいは，$-f_{22}p_1^2+2f_{12}p_1p_2-f_{11}p_2^2>0$

すなわち，等量曲線が，原点に凸であることを意味している。

これらのことをグラフに示せば，Fig. 1 のように描くことができる。x_i は投入量を表わしており，曲線 q は投入平面における等量曲線であり，その接線は，制約条件である費用一定を示す制約曲線である。このような条件を代数式で示したものが，（Ⅱ－4）式と（Ⅱ－6）式である。しかも，その接線勾配が右下がりであるということ，（Ⅱ－5）式からわかるように，収穫逓減の法則が作用しているということも知るであろう[2)]。

1）技術的代替率は次のように得られる。方程式（Ⅱ－1）を全微分すれば

$$f_1dx_1+f_2dx_2=0 \qquad \text{それ故に}\frac{f_1}{f_2}=-\frac{dx_2}{dx_1}$$

すなわち、投入平面において，等量曲線（isoquant）の接線勾配が右下りであることを意味している。このことは無差別曲線の接線勾配と同一であることを知るであろう。

2）このことは，効用関数の性質と同一である，拙稿，本学研究論集第八号を参照されたい。

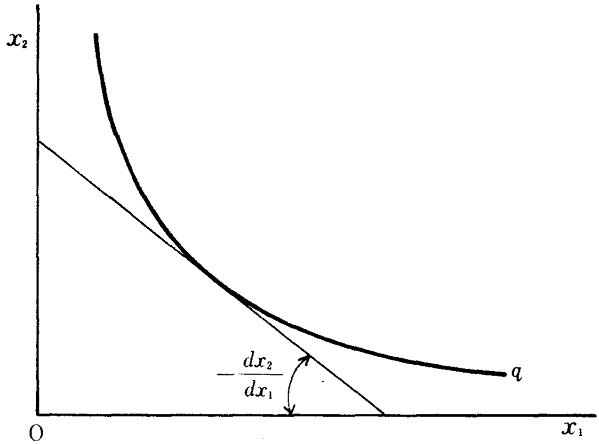

Fig. 1

次に，企業家が産出物一定のもとで，費用を極小にするような行動をとるものとすれば，ラグランジアン方程式は，次のように示される。

$$Z=p_1x_1+p_2x_2+b+\lambda[\bar{q}-f(x_1,\ x_2)] \qquad (\text{II}-8)$$

ここで，$\bar{q}$ は一定の生産量であり，λ はラグランジの未定乗数である。

（II－8）式の一階条件は，次のような式になる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial x_1}&=p_1-\lambda f_1=0\\ \frac{\partial Z}{\partial x_2}&=p_2-\lambda f_2=0\\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda}&=\bar{q}-f(x_1,\ x_2)=0\end{aligned} \qquad (\text{II}-9)$$

最初の二つの式を変形すれば，次の式が得られる。

$$\lambda=\frac{p_1}{p_2}=\frac{f_1}{f_2} \qquad (\text{II}-10)$$

この式は，（II－5）式と同じである。つまり，産出量一定のもとでの費用極小の一階条件は，費用一定のもとでの産出物極大のそれと同じであ

る。

二階の条件は，（Ⅱ—9）式の二次微分を求められればよいのであるから，それは，次のように示される。

$$\begin{vmatrix} -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -f_1 \\ -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ d\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (\text{Ⅱ—11})$$

費用極小の二階条件は，縁付きヘッセ行列式が，負であることを意味しているから，次の式で表わされる。

$$\begin{vmatrix} -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -f_1 \\ -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix} < 0 \qquad (\text{Ⅱ—12})$$

$-f_i = -p_i/\lambda$ $(i=1,\ 2)$ を代入すれば，

$$\begin{vmatrix} -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -\dfrac{p_1}{\lambda} \\ -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -\dfrac{p_2}{\lambda} \\ -\dfrac{p_1}{\lambda} & -\dfrac{p_2}{\lambda} & 0 \end{vmatrix} < 0 \qquad (\text{Ⅱ—13})$$

（Ⅱ—13）式の第一列と第二列に $-1/\lambda$ を掛けると

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -\dfrac{p_1}{\lambda} \\ f_{21} & f_{22} & -\dfrac{p_2}{\lambda} \\ -\dfrac{p_1}{\lambda} & -\dfrac{p_2}{\lambda} & 0 \end{vmatrix} < 0 \qquad (\text{Ⅱ—14})$$

第三行に λ を，第三列に $-\lambda^2$ を掛けて整理すれば，

$$-\frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} < 0 \qquad (\text{Ⅱ—15})$$

ラグランジの未定乗数λは正であるから

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (\text{II}-16)$$

すなわち，産出物一定のもとでの費用極小という企業行動の場合と費用一定のもとでの産生物極大における条件とは，全く同一であることが知られる。

このことは，グラフで示せば，Fig. 2 のようになることを示している。

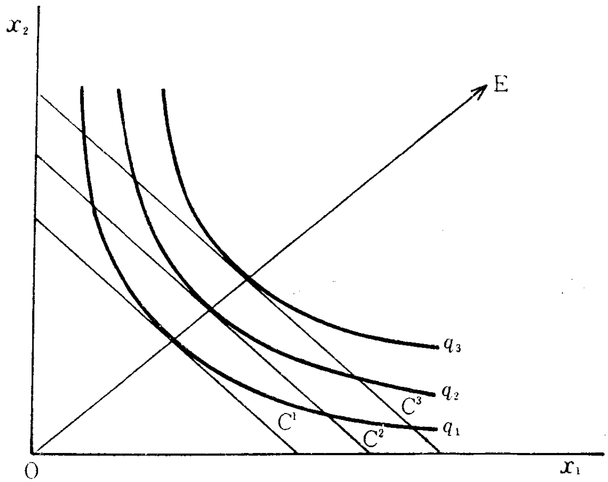

Fig. 2

つまり，費用を一定にして，産出物を極大にしようとする場合，すなわち，c^1 を一定とする場合，産出物曲線は曲線 c^1 に接する曲線 q_1 となる。従って，c^1 を c^2 に増加すれば，q_1 は q_2 に増加する。また，逆に，q_1 を一定にして，費用を極小にするケースにおいて，費用は q_1 に接する曲線 c^1 になる。つまり，q_1 を増加しようとすれば，c^1 も増加せねばならないことを意味している。これら対応した接点を結めば，曲線Eで示されるように，企業の拡張経路（expansion path of firm）が描かれるの

である。

最後に，企業が利潤の極大を目的にしているケースを考へる。いま，利潤（profit）をπで示せば，利潤は総収入から総費用を減じたものに等しいから，次のような式で示される。

$$\pi=hq-c=hf(x_1,\ x_2)-p_1x_1-p_2x_2-b \qquad (\text{II}-17)$$

ここで，hは生産物価格である。一階の条件は，x_1 と x_2 の偏微分がゼロに等しいとおくことによって得られるのであるから，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\pi}{\partial x_1}&=hf_1-p_1=0\\ \frac{\partial\pi}{\partial x_2}&=hf_2-p_2=0\end{aligned} \qquad (\text{II}-18)$$

従って，一階条件は次のようになる。

$$hf_1=p_1,\ hf_2=p_2 \qquad (\text{II}-19)$$

すなわち，生産要素の価値限界生産力（hf_i）は，その要素価格（p_i）に等しいことを意味している。二階条件は，（II—18）式を微分すればよいのであるから，次のような式になる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\pi}{\partial {x_1}^2}&=hf_{11}dx_1+hf_{12}dx_2+f_1dh=dp_1\\ \frac{\partial^2\pi}{\partial {x_2}^2}&=hf_{21}dx_1+hf_{22}dx_2+f_2dh=dp_2\end{aligned} \qquad (\text{II}-20)$$

二階の条件は，次のように表わされる。

$$hf_{11}<0,\ hf_{22}<0 \qquad (\text{II}-21)$$

また，

$$h\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}>0 \qquad (\text{II}-22)$$

ただし，$h>0$ である。

すなわち，（Ⅱ—21）式は，x_1 か x_2 いづれか一方のみの使用量を増加する場合に，利潤は減少することを示している。また，（Ⅱ—22）式は，x_1 と x_2 双方の使用量を増加する場合に，利潤は減少することを意味している。

このことは，次のようなことを表している。Fig. 3 において，直線 hq

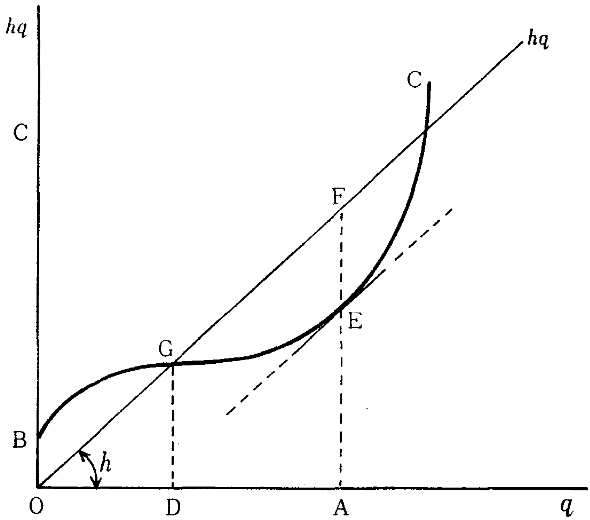

Fig. 3

は企業の総収入を示し，曲線ＢＣは総費用曲線が描かれている。ＯＢは固定費用であり，点Ｇは産出物ＯＤに対応した総費用と総収入が等しい点である。利潤極大の一階条件は，生産要素価格が，その価値限界生産力に等しいのであるから，総収入直線の勾配と総費用曲線の勾配が等しい場合に，利潤は最大となることを意味している。それ故に，点Ｅにおいて，利潤は最大となる。つまり，産出物ＯＡにおいて，費用はＡＥであり，利潤はＥＦである。従って，投入量を増減させることによって，産出量は増減する。しかしながら，利潤は産出量ＯＡを境界として減少するが，投入量の増減によって，利潤を増大することができることを示唆している。言い換えれば，Fig. 4 によっても表わされる。利潤極大は HFEJ の面積で示

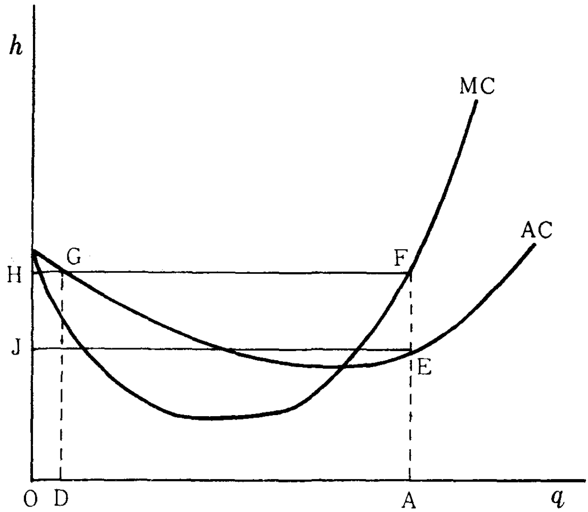

Fig. 4

される。すなわち，平均費用（AC）と限界費用（MC）との交点は，利潤がゼロであることを意味している。つまり，Fig. 3 における点Gに対応している。従って，生産物価格が平均費用よりも大であることが，利潤極大の必要条件である[3)]。

〔Ⅲ〕 結合生産物のケース

企業家が，二種類の産出物生産(q_1, q_2)に対して，一種類の投入物(x)を使う場合を考へる。この場合の生産関数を陰関数 (implicit function)

3）（Ⅱ—17） $\pi=hq-c$

q 式からで微分すれば $\frac{\partial\pi}{\partial q}=h-\frac{\partial c}{\partial q}=0$ $\quad\therefore\ h=\frac{\partial c}{\partial q}$

すなわち，産出物価格が限界費用に等しい場合に，利潤極大をもたらすということである。

$$\pi=hq-c=q\left(h-\frac{c}{q}\right) \qquad \text{従って} \quad h=\frac{c}{q}$$

つまり，産出物価格が平均費用に均等であるならば，利潤はゼロであり，$h>\frac{c}{q}$ の場合に利潤はプラスになる。

で示せば，次のようになる。

$$g(q_1, q_2, x)=0 \qquad (\text{III}-1)$$

結合生産物（joint products）とは，二種類あるいはそれ以上の産出物量が，技術的に相互依存である場合[4]，すなわち，ある生産過程で二種類以上の産出物が生産される場合である。

投入 x による生産費は，二種類の産出物（q_1, q_2）の関数であるから，次のような式になる。

$$x=g(q_1, q_2) \qquad (\text{III}-2)$$

いま，投入量が一定である場合，つまり $\bar{x}$ であるとすれば，

$$\bar{x}=g(q_1, q_2) \qquad (\text{III}-3)$$

（Ⅲ—３）式は， Fig. 5 のように描くことができる。曲線ＡＢは，生

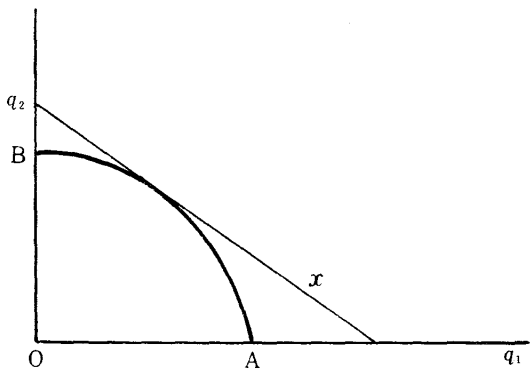

Fig. 5

産物変換曲線（product transformation curve）と称されている。すなわ

4）例えば，羊飼いは羊毛と羊肉を単一の生産過程から種々な割合で生産することができる。このような例は，結合生産の特色を現わしている古典的な例とされている。Henderson & Quandt;〔２〕を参照。

ち，ある一定の投入量によって生ずる産出物の組合わせの軌跡のことである。

（Ⅲ－2）式を微分すれば，

$$dx=g_1dq_1+g_2dq_2 \qquad (\text{Ⅲ}-4)$$

従って，$\dfrac{g_1}{g_2}=-\dfrac{dq_2}{dq_1}$　（Ⅲ－5）

それ故に，生産物の変換曲線の接線勾配は，右下がりであり，（Ⅲ－5）式を生産物変換率（rate of product transformation）という。（Ⅲ－5）式を微分することによって，生産物変換率の符号を知ることができる。

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2}=\frac{g_2dq_1-g_1dq_2}{g_2^2}=\frac{1}{g_2^2}(g_2g_{11}dq_1+g_2g_{12}dq_2-g_1g_{21}dq_1-g_1g_{22}dq_2)$$

$dq_2=-\dfrac{g_1}{g_2}dq_1$ を代入し，dq_1 で両辺を割れば，次の式が得られる。

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2}=\frac{1}{g_2^3}(g_{11}g_2^2-2g_{12}g_1g_2+g_{22}g_1^2) \qquad (\text{Ⅲ}-6)$$

すなわち，正常な場合，$g_1, g_2>0$ であるから，生産物変換曲線の勾配は負であるが，生産物変換率は正である。

$$g_{11}g_2^2-2g_{12}g_1g_2+g_{22}g_1^2>0$$

企業家がある一定の価格で産出物を販売する場合に，収入(R)は次のような式になる。

$$R=p_1q_1+p_2q_2 \qquad (\text{Ⅲ}-7)$$

ここで，p_1 と p_2 は，それぞれ q_1 と q_2 の価格である。

いま，企業家が一定の投入量でもって，収入を極大にしようと行動するものとすれば，（Ⅲ－7）式と（Ⅲ－3）式から，次のようなラグランジ

アン方程式によって解を求めることができる。

$$H=p_1q_1+p_2q_2+\eta[\bar{x}-g(q_1,\ q_2)] \qquad (\text{Ⅲ}—8)$$

η はラグランジの未定乗数であり，一階条件を求めれば，次のようになる。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H}{\partial q_1}=p_1-\eta g_1=0\\&\frac{\partial H}{\partial q_2}=p_2-\eta g_2=0\\&\frac{\partial H}{\partial \eta}=\bar{x}-g(q_1,\ q_2)=0\end{aligned} \qquad (\text{Ⅲ}—9)$$

（Ⅲ—9）式の最初の二つの式から

$$\eta=\frac{p_1}{g_1}=\frac{p_2}{g_2} \qquad (\text{Ⅲ}—10)$$

それ故に，

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{g_1}{g_2} \qquad (\text{Ⅲ}—11)$$

（Ⅲ—11）式は，生産物変換率がそれら二種類の生産物価格比に等しいことを意味している。

二階条件を求めるのは，（Ⅲ—9）式を微分すればよい。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 H}{\partial {q_1}^2}=-\eta g_{11}dq_1-\eta g_{12}dq_2-g_1d\eta=-dp_1\\&\frac{\partial^2 H}{\partial {q_2}^2}=-\eta g_{21}dq_1-\eta g_{22}dq_2-g_2\,d\eta=-dp_2\\&\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2}=-g_1dq_1-g_2dq_2=0\end{aligned} \qquad (\text{Ⅲ}—12)$$

二階条件は，縁付きヘッセ行列式が正でなければならない。

$$\begin{vmatrix}-\eta g_{11} & -\eta g_{12} & -g_1\\ -\eta g_{21} & -\eta g_{22} & -g_2\\ -g_1 & -g_2 & 0\end{vmatrix}>0 \qquad (\text{Ⅲ}—13)$$

（Ⅲ—13）式を展開すれば，

$$\eta g_{11}g_2{}^2-2\eta g_{12}g_1g_2+\eta g_{22}g_1{}^2=\eta(g_{11}g_2{}^2-2g_{12}g_1g_2+g_{22}g_1{}^2)>0 \qquad (\text{Ⅲ}—14)$$

η は正であるから

$$(g_{11}g_2{}^2-2g_{12}g_1g_2+g_{22}g_1{}^2)>0 \qquad (\text{Ⅲ}—15)$$

すなわち，企業家はある一定の投入量で収入を最大にしようとする場合，生産物変換曲線が下方に凹であるときは，収入線と生産物変換曲線との接点は，制限付き収入極大化の解である。また，このことは投入量極小化の解でもある。

次に，企業家が利潤極大化を目的として行動するものとすれば，次のような式で表わされる。

$$\pi=p_1q_1+p_2q_2-rg(q_1,\ q_2) \qquad (\text{Ⅲ}—16)$$

ここで，r は投入物価格である。（Ⅲ—16）式を微分すれば，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\pi}{\partial q_1}&=p_1-rg_1=0\\ \frac{\partial\pi}{\partial q_2}&=p_2-rg_2=0\end{aligned}\right\} \qquad (\text{Ⅲ}—17)$$

従って，一階条件は次の式になる。

$$r=\frac{p_1}{g_1}=\frac{p_2}{g_2} \qquad (\text{Ⅲ}—18)$$

このことは，投入価格が x の限界生産力の価値に等しいことを意味している。

二階条件は，（Ⅲ—17）式を微分することによって得られる。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\pi}{\partial q_1{}^2}&=-rg_{11}dq_1-rg_{12}dq_2=-dp_1\\ \frac{\partial^2\pi}{\partial q_2{}^2}&=-rg_{21}dq_1-rg_{22}dq_2=-dp_2\end{aligned}\right\} \qquad (\text{Ⅲ}—19)$$

従って，利潤極大の二階条件は，

$$-rg_{11}<0,\ \begin{vmatrix} -rg_{11} & -rg_{12} \\ -rg_{21} & -rg_{22} \end{vmatrix}>0 \qquad (\text{III}-20)$$

二番目の行列式を展開すれば

$$r^2[g_{11}g_{22}-(g_{12})^2]>0 \qquad (\text{III}-21)$$

$r>0$ であるから，二階条件は次のように書き表わされる。

$$g_{11}>0,\ g_{11}g_{22}-(g_{12})^2>0 \qquad (\text{III}-22)$$

それ故に，$g_{22}>0$ であり，x による限界費用は増加しなければならないことを示している。

〔VI〕 *mn* 変数による一般化

企業理論の一般化は，単純化モデルによって，容易に導くことができる。いま，企業家がmケの産出物を生産するのに，nケの投入を使用するものとすれば，生産関数は次のような陰関数の形で示すことができる。

$$F(q_1,\ q_2,\cdots,\ q_m;\ x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)=0 \qquad (\text{IV}-1)$$

企業家は利潤極大化の行動をすると仮定すれば，利潤(π)は総収入と要素費用との差であるから，次の式で表わされる。

$$\pi=\sum_{i=1}^{m}h_iq_i-\sum_{j=1}^{n}p_jx_j \qquad (\text{IV}-2)$$

ラグランジアン方程式を利用し，一階条件を求めれば次のようになる。

$$J=\sum_{i=1}^{m}h_iq_i-\sum_{j=1}^{n}p_jx_l+\beta F(q_1,\cdots,\ q_m;\ x_1,\cdots,\ x_n) \qquad (\text{IV}-3)$$

ここで，βはラグランジの未定乗数である。変数は q_i, x_i, β であるから，（III－3）式を偏微分すれば，次の式で示される。

$$\frac{\partial J}{\partial q_i}=h_i+\beta F_i=0 \qquad (i=1,\ 2, \cdots,\ m)$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_j}=-p_j+\beta F_j=0 \quad (j=1,\ 2, \cdots,\ n) \qquad (\text{IV}-4)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta}=F(q_1,\ \cdots,\ q_m;\ x_1,\ \cdots,\ x_n)=0$$

最初の二式から，それぞれ次の式が得られる[5)]。

$$\frac{h_i}{h_k}=\frac{F_i}{F_k}=-\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

$$\frac{p_j}{p_s}=\frac{F_j}{F_s}=-\frac{\partial x_s}{\partial x_j} \qquad (j,\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (\text{IV}-5)$$

それ故に，（Ⅳ－４）式の最初の二式から次の式が求められる。

$$\beta=\frac{p_j}{h_i}=-\frac{F_i}{F_j}=\frac{\partial q_i}{\partial x_j} \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \end{pmatrix} \qquad (\text{IV}-6)$$

つまり，限界生産物の比は，その価格比に等しいことを意味している。また，（Ⅳ－６）式から，$p_i=h_i\partial q_i/\partial x_j$ が得られる。このことは，限界生産物の価値が，投入価格に等しいことを示している。これが，利潤極大に関する一階条件である。

次に，二階条件は，（Ⅳ－４）式をさらに微分することによって求められる。

$$\frac{\partial^2 J}{\partial q_i{}^2}=\sum_{i=1}^{m}dh_i+\beta\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\theta}F_{ik}dq_i+\beta\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{\theta}F_{js}dx_j+\sum_{i=1}^{\theta}F_i d\beta=0$$

$$(i\neq k,\ j\neq s)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_j{}^2}=-\sum_{j=1}^{n}dp_j+\beta\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\theta}F_{ik}dq_i+\beta\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{\theta}F_{js}dx_j+\sum_{i=1}^{\theta}F_i d\beta={}_i0$$

5）（Ⅵ－５）式は，次のようにすれば容易に求められるであろう。

$$\frac{F_1}{h_1}=\frac{F_2}{h_2}=\cdots=\frac{F_m}{h_m}$$

それ故に，$\dfrac{h_1}{h_2}=\dfrac{F_1}{F_2}=\cdots=\dfrac{F_i}{F_k}$

$$(i \neq k,\ j \neq s) \qquad (\text{Ⅲ}-7)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2} = \sum_{i=1}^{m} F_j dq_i + \sum_{j=1}^{n} F_j dx_j = 0$$

ここで，θは $m+n$ である。縁付きヘッセ行列式を示せば，次のようになる。

$$\begin{vmatrix} \beta F_{11} & \beta F_{12} & F_1 \\ \beta F_{21} & \beta F_{22} & F_2 \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \beta F_{11} & \beta F_{12} & \beta F_{13} & F_1 \\ \beta F_{21} & \beta F_{22} & \beta F_{23} & F_2 \\ \beta F_{31} & \beta F_{32} & \beta F_{33} & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix} < 0,$$

$$\cdots, (-1)^m \begin{vmatrix} \beta F_{11} & \beta F_{12} & \cdots & \beta F_{1\theta} & F_1 \\ \beta F_{21} & \beta F_{22} & \cdots & \beta F_{2\theta} & F_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta F_{\theta 1} & \beta F_{\theta 2} & \cdots & \beta F_{\theta\theta} & F_\theta \\ F_1 & F_2 & \cdots & F_\theta & 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (\text{Ⅳ}-8)$$

（Ⅳ―8）式の行に $1/\beta$ を掛け，その列にβを乗ずれば，

$$\beta \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_2 \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \cdots, (-1)^\theta \beta^{\theta-1}$$

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1\theta} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2\theta} & F_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_{\theta 1} & F_{\theta 2} & \cdots & F_{\theta\theta} & F_\theta \\ F_1 & F_2 & \cdots & F_\theta & 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (\text{Ⅳ}-9)$$

$\beta < 0$ であるから，二階条件は次の式であることを知るだろう。

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_2 \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} < 0, \cdots, \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1\theta} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2\theta} & F_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_{\theta 1} & F_{\theta 2} & \cdots & F_{\theta\theta} & F_\theta \\ F_1 & F_2 & \cdots & F_\theta & 0 \end{vmatrix} < 0 \qquad (\text{Ⅳ}-10)$$

（Ⅳ―7）式を展開すれば，次のような式が得られる。

$$
\begin{array}{l}
\beta F_{11}dq_1+\beta F_{12}dq_2+\quad\cdots+\beta F_{1\theta}dx_n\quad+F_1d\beta=-dh_1\\
\beta F_{21}dq_1+\beta F_{22}dq_2+\quad\cdots+\beta F_{2\theta}dx_n\quad+F_2d\beta=-dh_2\\
\vdots\\
\beta F_{m1}dq_1+\beta F_{n2}dq_2+\quad\cdots+\beta F_{m\theta}dx_n\quad+F_md\beta=-dh_m\\
\beta F_{m,\ m+1}dq_1+\beta F_{m,\ m+2}dq_2+\cdots+\beta E_{m+1,\ m+\theta}dx_n+F_{m+1}d\beta=dp_1\\
\vdots\\
\beta F_{\theta,\ m+1}dq_1+\beta F_{\theta,\ m+2}dq_2+\cdots+\beta F_{m+\theta,\ m+\theta}dx_n+F_\theta d\beta=dp_n\\
F_1dq_1\quad+F_2dq_2\quad+\cdots+F_\theta dx_n\qquad\qquad=0
\end{array}
$$

(Ⅳ—11)

（Ⅳ—11）式は，方程式は $\theta+1$ ケであり，未知数は dq_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$, $dx_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ と $d\beta$ の $\theta+1$ ケであるから，一意的に解くことができる。

（Ⅳ—11）式における各係数の行列式をDとすれば

$$
D\equiv\begin{vmatrix}
\beta F_{11} & \beta F_{12} & \cdots & \beta F_{1\theta} & F_1\\
\beta F_{21} & \beta F_{22} & \cdots & \beta F_{2\theta} & F_2\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
\beta F_{\theta 1} & \beta F_{\theta 2} & \cdots & \beta F_{\theta\theta} & F_\theta\\
F_1 & F_2 & \cdots & F_\theta & 0
\end{vmatrix}
\qquad (Ⅳ—12)
$$

i 行 j 列の余因子（co-factor）を D_{ij} とすれば，産出物と投入物に対する価格変化を求めることができる。

$$
dq_i=\frac{1}{D}[-D_{1i}dh_1-D_{2i}dh_2-\cdots+D_{\theta i}dp_n]\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)
$$

(Ⅳ—13)

$$
dx_j=\frac{1}{D}[-D_{1,\ m+j}dh_1-D_{2,\ m+j}dh_2-\cdots+D_{\theta,\ m+j}dp_n]
$$

$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

（Ⅳ—13）式の両辺を価格変化 dh および dp で割れば，

$$
\frac{\partial q_i}{\partial h_k}=-\frac{D_{ki}}{D}\qquad (i,\ h=1,\ 2,\ \cdots,\ m)
$$

$$
\frac{\partial x_j}{\partial p_s}=\frac{D_{s,\ m+j}}{D}\qquad (j,\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)
$$

(Ⅳ—14)

（Ⅳ—14）式の最初の式は，産出物価格による産出物量の変化率であり，最初の式は，投入価格に関する投入量の変化率を示している。すなわち，（Ⅳ—14）式は価格効果を意味しているけれども，いわゆる所得効果に対応するものは存在しない。企業家は生産価格が増加すれば，生産物を増加させようとする行動を行なうのであるから，企業家の生産物供給曲線は，正の勾配をもつのである。また，企業家は，生産要価素価格が増加する場合には，生産要素を増加させるのではなく，それを減少させ，利潤を得ようとする行動を行なうだろう。それ故に，企業家の生産要素の需要曲線は，負の勾配をもつのである。このことは，次のことを表わしている。

$$\frac{\partial q_i}{\partial h_i}>0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$
$$\frac{\partial x_j}{\partial p_j}<0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (\text{Ⅳ—15})$$

さらに，（Ⅳ—11）式から次のような式を得ることができる。

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j}=\frac{\mathrm{D}_{j,\ m+i}}{\mathrm{D}}$$
$$\frac{\partial x_j}{\partial h_i}=-\frac{\mathrm{D}_{i,\ j}}{\mathrm{D}} \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \end{pmatrix} \qquad (\text{Ⅳ—16})$$

（Ⅳ—16）式において，$\frac{\partial q_i}{\partial_j}>0$ であるということは，生産要素価格が上昇した場合に，生産物が増加することを示している。通常，企業家は，より多くの利潤を得るために，要素価格が上昇する場合には，より多くの産出物を生産し，利益を得ようとするだろう。正常なケースにおいて，$\frac{\partial q_i}{\partial p_j}<0$ であることはない。また，$\frac{\partial x_j}{\partial h_i}>0$ であるならば，正常な場合において，企業家は生産要素を増加させて，より多くの利益を得ようとするだろう。しかし，このような企業家の行動は，利潤が極大に到達するところまでであり，それを越えるならば，費用が増大し，利潤は減少する。その結果，生産要素を減少せざるを得なくなるのである。

〔V〕 Hicks & Mosak の理論

前節において，mn 変数からなる一般的体系について述べた。本節の Hicks と Mosak の理論も，本質的に変っているのではない。結果として同じことではあるが，Hicks と Mosak の理論[6]にそって思考の眼をすすめる。

生産物を x とし，生産要素は $-x$ とすれば，次のような生産変換関数で表わされる。

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=0 \qquad (\text{V}-1)$$

（V－1）式には，負の生産物が含まれている。生産物の集合は $x_i=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)$ であり，生産要素の集合は $x_j=-(x_{m+1},\ x_{m+2},\ \cdots,\ x_n)$ である。従って，$x_n=x_i+x_j$ と定義されている。

生産物価格を p とすれば

$$\text{V}=\sum_{s=1}^{n}p_s x_s \qquad (\text{V}-2)$$

企業家は，利潤極大の行動をとるのであるから，（V－1）式を条件として，（V－2）式を極大にすればよいのである。利潤極大の条件は，一階の均衡条件がゼロに等しく，二階条件が負であることである[7]。

ラグランジアン方程式は，次のような式になる。ただし，μはラグランジの未定乗数である。

$$\text{V}=\sum_{s=1}^{n}p_s x_s-\mu[f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)] \qquad (\text{V}-3)$$

一階の条件を得れば，

6）Hicks, J.R; 〔1〕と Mosak, J.L; 〔3〕を参照

7）利潤極大条件は，次のように示される。

一階条件は $d(v-\mu f)=0$

二階条件は $d^2(v-\mu f)<0$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_s}&=p_s-\mu f_s=0\\ \frac{\partial V}{\partial \mu}&=-f(x_s)=0\end{aligned}\right.\qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\qquad (\text{V}-4)$$

それ故に，（V—4）式の最初の式から，次の式が得られる。

$$\mu f_s=p_s \text{ あるいは } \mu=\frac{p_s}{f_s}\qquad (\text{V}-5)$$

二階条件を得るためには，（V—4）式の最初の式を微分すればよいのであるから，次のような式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial {x_1}^2}&=p_1-f_1 d\mu-\mu f_{11}-\mu f_{12}-\cdots-\mu f_{1n}=0\\ \frac{\partial^2 V}{\partial {x_2}^2}&=p_2-f_2 d\mu-\mu f_{21}-\mu f_{22}-\cdots-\mu f_{2n}=0\\ &\ \vdots\\ \frac{\partial^2 V}{\partial {x_n}^2}&=p_n-f_n d\mu-\mu f_{n1}-\mu f_{n2}-\cdots-\mu f_{nn}=0\end{aligned}\qquad (\text{V}-6)$$

従って，次のような行列式が得られる。

$$\begin{vmatrix}0&f_1&f_2\\ f_1&f_{11}&f_{12}\\ f_2&f_{21}&f_{22}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}0&f_1&f_2&f_3\\ f_1&f_{11}&f_{12}&f_{13}\\ f_2&f_{21}&f_{22}&f_{23}\\ f_3&f_{31}&f_{32}&f_{33}\end{vmatrix},\quad \cdots\quad \begin{vmatrix}0&f_1&f_2&\cdots&f_n\\ f_1&f_{11}&f_{12}&\cdots&f_{1n}\\ f_2&f_{21}&f_{22}&\cdots&f_{2n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ f_n&f_{n1}&f_{n2}&\cdots&f_{nn}\end{vmatrix}\qquad (\text{V}-7)$$

いま，すべての係数による行列式をFとし，F_{11} を f_{11} の余因子（co-factor）とすれば，

$$\frac{F_{11}}{F},\quad \frac{F_{11}F_{22}}{F},\ \cdots,\ \frac{F_{11}F_{22}\cdots F_{n-1,\ n-1}}{F}\qquad (\text{V}-8)$$

それ故に，二階の条件は，（V—8）がすべて正でなければならないことを意味している。

さて，任意の価格 p_r が変化し，他の価格は変化しないものとすれば，（V—1）式と（V—5）式から，次の式が得られる。

$$
\begin{array}{l}
f_1\dfrac{\partial x_1}{\partial p_r}+\quad f_2\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r}+\cdots+\quad f_n\dfrac{\partial x_n}{\partial p_r}=0\\
f_1\dfrac{\partial \mu}{\partial p_r}+\mu f_{11}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_r}+\mu f_{12}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r}+\cdots+\mu f_{1n}\dfrac{\partial x_n}{\partial p_r}=0\\
\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\
f_r\dfrac{\partial \mu}{\partial p_r}+\mu f_{r1}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_r}+\mu f_{r2}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r}+\cdots+\mu f_{rn}\dfrac{\partial x_n}{\partial p_r}=1\\
\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\
f_n\dfrac{\partial \mu}{\partial p_r}+\mu f_{n1}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_r}+\mu f_{n2}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r}+\cdots+\mu f_{nn}\dfrac{\partial x_n}{\partial p_r}=0
\end{array}
\qquad (\text{V}-9)
$$

（Ｖ－９）式を解けば，次の式になる。

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=\frac{1}{\mu}\,\frac{F_{sr}}{F}\qquad (r,\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\qquad (\text{V}-10)$$

消費者需要理論の代替項と同じ規則に従って[8]次のようにおく。

$$x_{sr}=-\frac{1}{\mu}\,\frac{F_{sr}}{F}\qquad (\text{V}-11)$$

それ故に，（Ｖ－10）式は次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=-x_{sr}\qquad (\text{V}-12)$$

企業家は，生産物価格が上昇すれば，生産物を増加させる行動をとるのであるから，生産物の供給曲線は正の勾配をもつことになる。従って，（Ｖ－12）式は次のようになる。

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=-x_{sr}>0\qquad (\text{V}-13)$$

また，生産要素すなわち x_j に対しては，次のような結果が得られる。

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_r}=x_{jr}<0\qquad (\text{V}-14)$$

つまり，任意の生産要素に対する需要曲線は，その価格に関して負の勾配をもつということである。すなわち，企業家は，生産要素価格が上昇す

8）拙稿：本学研究論集第八号を参照されたい。

れば，生産要素量を減少させるような行動をとるということを意味している。

〔VI〕 貿 易 の 均 衡

封鎖経済における均衡は，需要と供給が等しいという条件である。換言すれば，生産可能曲線と無差別曲線が接する点であるということができる。Fig. 6 において，財 (X_1, X_2) 平面の曲線 PP′ は生産可能曲線であ

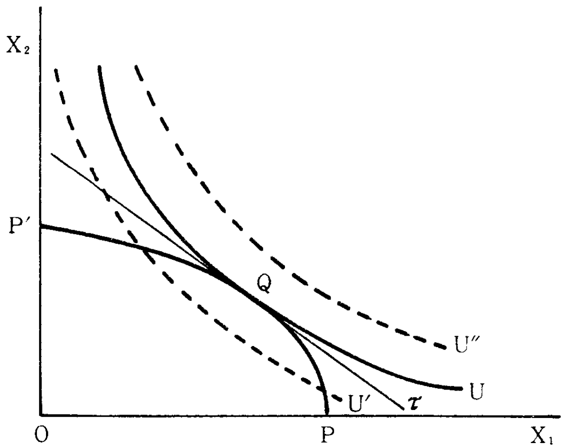

Fig. 6

り，曲線uは効用無差別曲線である。それら曲線の接線 τ は，価格線である。点Qは，両曲線の均衡点である。すなわち，点Qにおいては，財の需要量と生産量とが相等しい点であり，生産物市場の均衡条件をみたしているのである。例えば，無差別曲線が u′ のように，生産可能曲線の領域内にある場合には，生産物超過の状態であり， u″ のようなケースは，超過需要の状態を示していることは，作図から判明されるであろう。

さて，開放経済のケースを考へてみよう。いま，輸送費が無視されるほど小さく，貿易障壁もないものとする。 Fig. 7 において，横軸に第一財

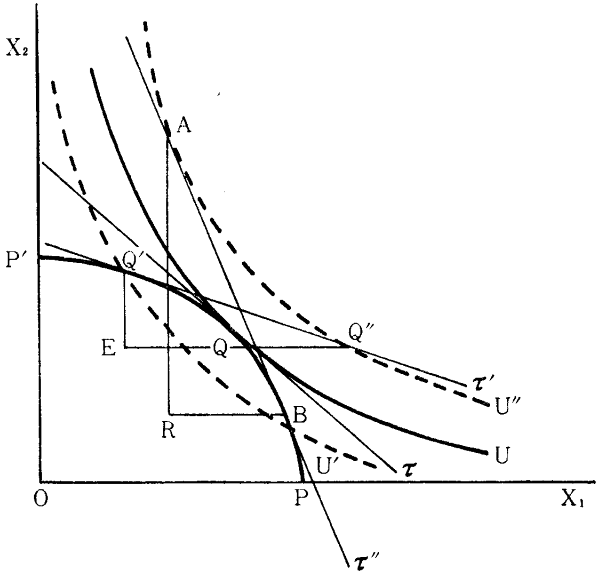

Fig. 7

の輸出量をはかり，縦軸に第二財の輸入量をはかれば，価格線τは交易条件を示している。いま，何らかの事情で，交易条件が τ' のように変化したとすれば，この国は，EQ' だけ X_2 財を輸出し，EQ'' だけ X_1 財を輸入することを示している。Fig. 7 の価格線が τ'' に変動したとすれば，RBだけ X_1 財を輸出し，RAだけ X_2 財が輸入される。つまり，RBだけの超過供給であり，RAだけの超過需要である。

それ故に，交易条件に対応して，ある国の輸出量と輸入量が決定される。すなわち，輸出入量は，交易条件の関数であるといえる。従って，価格線がτのとき，生産と消費が均衡している点Qでは，輸出も輸入も生じない状態である。

このように，交易条件に対応して得られる点 S, S′ (Fig 8) の軌跡を，オフアー・カーブ (offer curve) という[9]。このようなオフアー・カーブ

9）Prof, J. E, Meade は，これを貿易無差別曲線（trade indifference curve）と呼んでいる。

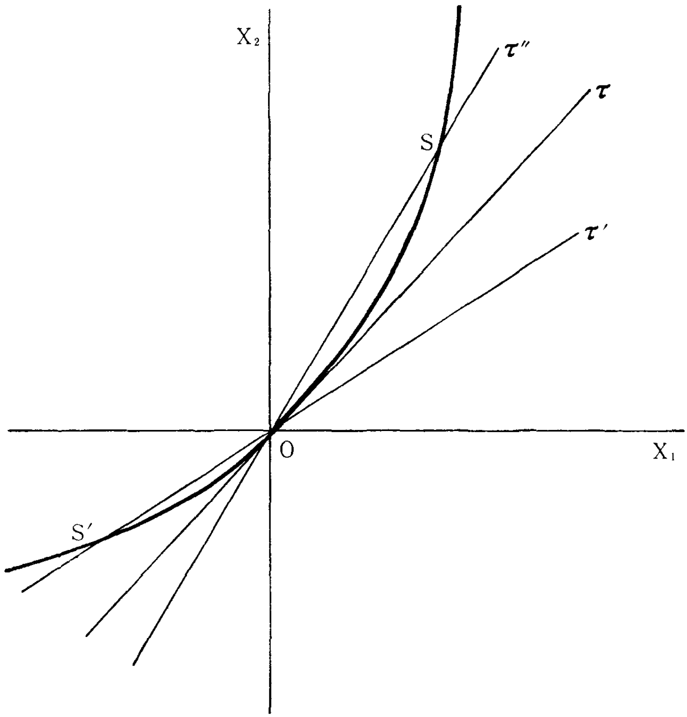

Fig. 8

は，相手国においても同様に描くことができる。

Fig. 9 は Fig. 7 と同じように，横軸に輸出量，縦軸に輸入量がはかられている。それぞれの軸において，負の符号をもつ場合には，逆に，輸入量および輸出量を意味する。つまり，例えば，日本の輸出量が，米国の輸入量であると定義されているごとくである。

Fig. 9 において，A B 両国のオファー・カーブが交わる点Qは，両国の輸出量と輸入量が均衡していることを示している。その場合の交易条件は直線 τ である。

いま，交易条件が τ' のようにシフトしたとする。その場合，C D だけの超過供給が生じ，E F だけの超過需要が生じている状態である。このような状態において，財 X_1 の価格は下落し，財 X_2 の価格は上昇する。

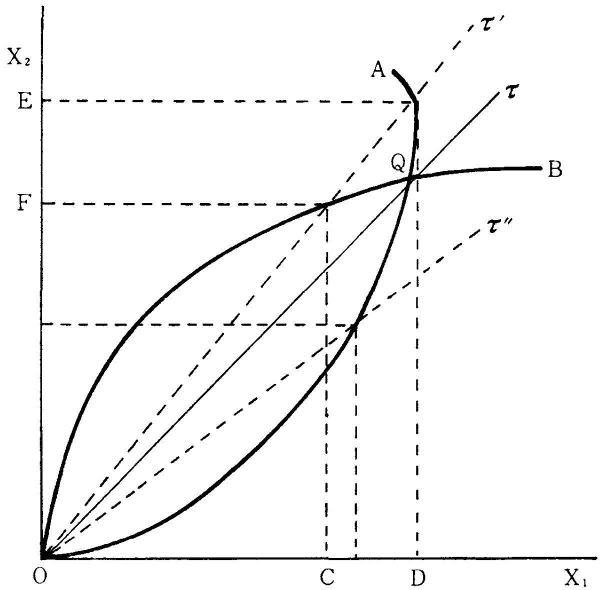

Fig. 9

従って価格変化を通じて，均衡が回復される。また，交易条件が τ'' に変化したとする場合も，同様にして，需給の均衡は，価格の作用によって，点Qに復帰する。従って，国際貿易は，均衡すると考へられるのである。

〔Ⅶ〕 あ　と　が　き

完全競争の仮定のもとで，企業者行動の理論を主に，貿易均衡への過程を眺望してきた。企業家は，費用極小にして，利潤を最大にしようとするであろう。

費用極小の条件は，生産要素に対する限界生産性の比が，その要素価格の比に等しく，等量曲線（isoquant）は，原点に凸であることが必要である。また，利潤極大の条件は，生産要素の価値限界生産性が，その要素価格に等しいことを示している。結合生産のケースにおいては，生産物変換率が，生産物価格の比に等しく，生産物変換曲線が下方に凹であることが

条件である。これらは，二財モデルという単純化仮定のもとでの分析であり，一般的な多変数財による分析が必要である。従って，一般的モデルに拡大し，Hicks と Mosak モデルをもあわせて分析した。

以上の分析は，封鎖経済体系における理論分析であり，開放体系へそれらを適応しなければならない。その適用の糸口として，生産可能曲線と効用差別曲線を使用して，貿易が均衡していく状態を述べた。しかし，これらは，すべてその糸口にしかほかならない。充分な考察と分析が必要であるけれども，単純明解なものではなく，簡単に結果を導くことができない。最後に，本学の第八号で分析した消費者需要の理論と本稿とをつきあわせて，参考にしていただければ幸いと存じている次第である。

September 30. 1975.

参　考　文　献

〔1〕Hicks, J.R; Value and Capital, 2ed. 1957.

〔2〕Henderson, J.M., Quand T.R.E; Microeconomic Theory; A Mathematical Approach. 2ed, 1971.

〔3〕Mosak, J.L; General Equilibrium Theory in International Trade. 1944

〔4〕ヘンダースン＆クオント著、小宮隆太郎訳；現代経済学，1971.

〔5〕小宮隆太郎，天野明弘著；国際経済学　1972.

〔6〕小山満男著，国際経済理論　1964.