

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# LE 7 EQUAZIONI CHE REGOLANO LA STRUTTURA STELLARE

**Relatore:**  
**Prof. Francesco Rosario**  
**Ferraro**

**Presentata da:**  
**Davide Di Vita**

Anno Accademico 2019/2020

## **Abstract**

In questa tesi sono analizzate le 7 equazioni che regolano una struttura stellare: si tratta di 4 equazioni differenziali a coefficienti non costanti e 3 relazioni caratteristiche. La struttura stellare è approssimata a una sfera di gas autogravitante in cui in ogni strato la forza di gravità è in equilibrio idrostatico con la pressione del gas (le forze elettromagnetiche sono di fatto trascurate). La stella è una struttura in quasi equilibrio, ovvero il tempo di rilassamento per deviazioni dallo stato di equilibrio è molto minore rispetto al tempo necessario per produrre variazioni significative.

# Indice

<b>1</b>	<b>Equazione dell'equilibrio idrostatico</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Equazione di continuità della massa</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Equazione di stato</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>L'equazione del bilancio energetico</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>L'equazione generale del trasporto radiativo</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Il criterio di Schwarzschild</b>	<b>12</b>
<b>7</b>	<b>Equazione del flusso convettivo</b>	<b>15</b>
<b>8</b>	<b>Opacità</b>	<b>18</b>
	8.1 Assorbimento legato-legato (BB)	
	8.2 Assorbimento legato-libero (BF)	
	8.3 Assorbimento libero-libero (FF)	
	8.4 Diffusione	
<b>9</b>	<b>Calcolo dell'opacità stellare</b>	<b>20</b>
	9.1 Le leggi di Kramers	
	9.2 Assorbimento legato-libero (BF)	
	9.3 Assorbimento libero-libero (FF)	
	9.4 Scattering	
<b>10</b>	<b>Reazioni Termonucleari</b>	<b>24</b>
<b>11</b>	<b>Calcolo del tasso di produzione di energia (<math>\epsilon</math>)</b>	<b>27</b>
	11.1 Tipologia e nomenclatura dei principali processi nucleari	
<b>12</b>	<b>Reazioni termonucleari di fusione dell'idrogeno</b>	<b>29</b>
<b>13</b>	<b>Processo <math>3\alpha</math></b>	<b>30</b>

# Capitolo 1

## 1 Equazione dell'equilibrio idrostatico

La prima equazione si ottiene facilmente assumendo che in ogni strato della struttura stellare la somma delle forze in gioco sia uguale a zero. In particolare, considerando un cubetto di gas di dimensioni  $dS \times dr$ , posto ad una distanza  $r$  dal centro della stella, consideriamo le forze agenti su di esso e imponiamo la risultante uguale a zero secondo l'equazione:

$$F_{\text{pressione}} + F_{\text{gravità}} = 0 \quad (1.1)$$

dove con  $F_{\text{pressione}}$  indichiamo la forza di pressione agente mentre con  $F_{\text{gravità}}$  quella di gravità.

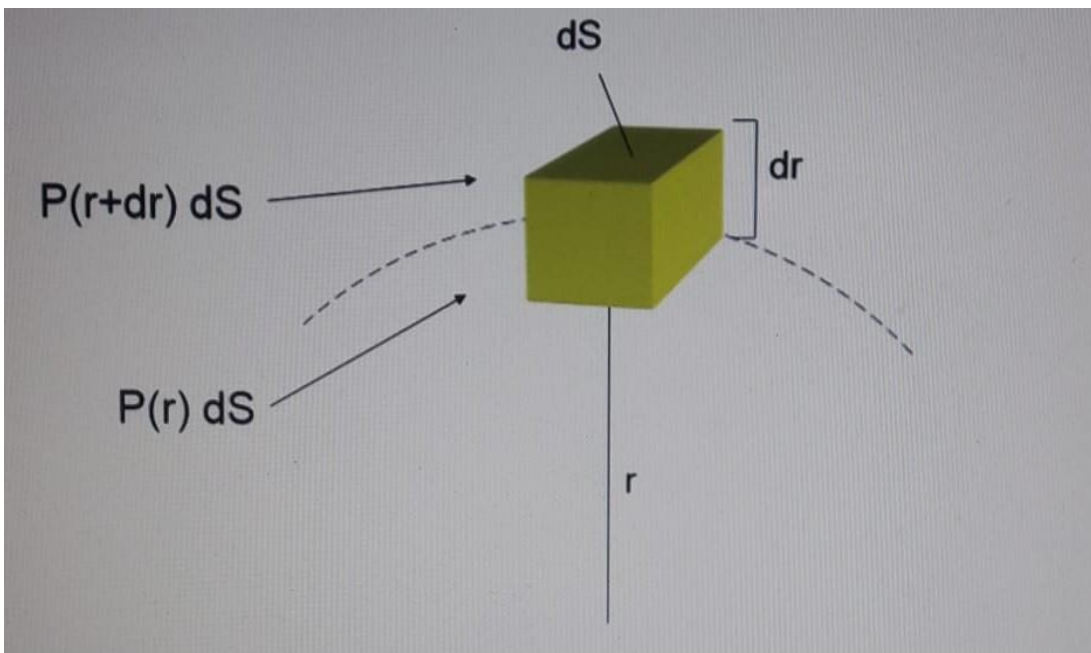


Figura 1: Schematizzazione del cubo di gas considerato negli interni stellari.

Con riferimento alla Figura 1 possiamo calcolare  $F_{\text{pressione}}$  ponendo

$$F_{\text{pressione}} = P(r+dr)dS - P(r)dS \quad (1.2)$$

assumendo che

$$P(r+dr) = P(r) + \frac{dP(r)}{dr} dr \quad (1.3)$$

dove  $dP(r)$  rappresenta la variazione di pressione attraverso l'elemento  $dr$ . Sostituendo la (1.2) nella (1.1) otteniamo

$$F_{\text{pressione}} = P(r)dS + \frac{dP(r)}{dr}drdS - P(r)dS \quad (1.4)$$

da cui ricaviamo

$$F_{\text{pressione}} = \frac{dP(r)}{dr}drdS \quad (1.5)$$

Si può ora calcolare  $F_{\text{gravità}}$  che sarà uguale a

$$F_{\text{gravità}} = \frac{GM(r)}{r^2}\rho(r)drdS \quad (1.6)$$

dove  $F_{\text{gravità}}$  rappresenta la forza di gravità che agisce sul cubetto di gas considerato,  $\frac{GM(r)}{r^2}$  è l'accelerazione di gravità a cui è sottoposto un elemento di materia posto ad una distanza  $r$  dal centro della stella ( $g$ ),  $M(r)$  è la massa contenuta nella sfera di raggio  $r$  e  $\rho(r)drdS$  è l'elemento di massa  $dm$ .

Inserendo la (1.5) e la (1.4) nella (1.1) otteniamo l'equazione

$$\frac{dP(r)}{dr}drdS + \frac{GM(r)}{r^2}\rho(r)drdS = 0 \quad (1.7)$$

da cui, semplificando i differenziali otteniamo l'equazione dell'equilibrio idrostatico

$$\boxed{\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r)}. \quad (1.8)$$

## 2 Equazione di continuità della massa

Con riferimento alla figura 1, la massa dello strato compreso tra  $r$  e  $r+dr$  è uguale a

$$dM(r)=4\pi r^2\rho(r)dr \quad (2.1)$$

da cui, dividendo entrambi i membri per  $dr$ , otteniamo l'equazione di continuità della massa

$$\boxed{\frac{dM(r)}{dr}=4\pi r^2\rho(r)} \quad (2.2)$$

Unendo l'equazione (2.2) e l'equazione (1.8) otteniamo un sistema di 2 equazioni differenziali in funzione di 3 variabili ( $P, M, \rho$ )

$$\begin{cases} \frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) \\ \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2\rho(r) \end{cases} \quad (2.3)$$

Nel caso in cui le forze agenti sull'unità di massa non siano più in equilibrio, la prima equazione della (2.3) può essere riscritta come

$$\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{GM}{r^2}\rho = \rho\alpha \quad (2.4)$$

dove  $\alpha$  è l'accelerazione (verso l'esterno o verso l'interno a seconda di espansione o contrazione) a cui è sottoposto l'elemento di massa. Un tempo caratteristico interessante può essere derivato facilmente nel caso in cui la pressione non bilanci più la gravità. Questo tempo caratteristico è detto tempo scala di contrazione dinamico e dà il tempo scala del "collasso" di una struttura stellare e sarà uguale a

$$T_d = \sqrt{\frac{2r}{g}} \quad (2.5)$$

### 3 Equazione di stato

Il gas che costituisce una stella è detto plasma ed è costituito da una mistura di atomi, ioni ed elettroni. La temperatura all'interno di una stella è così alta che gli elettroni sono separati dai nuclei (ionizzazione). Questo rende possibile una compressione molto maggiore della materia. Imponendo che la pressione  $P$  sia uguale alla somma di  $P_{\text{gas}}$  (pressione del gas) e di  $P_{\text{radiazione}}$  (pressione di radiazione) otteniamo l'equazione

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{radiazione}} \quad (3.1)$$

Assumendo che il plasma si comporti come un gas perfetto, sotto la condizione che l'interazione coulombiana tra le particelle sia trascurabile rispetto alla loro energia cinetica, dalla termodinamica sappiamo che l'equazione di stato è una relazione del tipo

$$P = P(\rho, T) \quad (3.2)$$

dove abbiamo introdotto una nuova incognita ( $T$ ) che rappresenta la temperatura. La relazione (3.2) esprime il concetto che non si può conoscere l'andamento della pressione e della densità, nel caso di un gas perfetto, senza considerare la temperatura. La pressione del gas si può ricavare dall'equazione di stato dei gas perfetti

$$P_{\text{gas}} V = N_m R T \quad (3.3)$$

dove  $V$  rappresenta il volume,  $N_m$  il numero di moli,  $R$  la costante universale dei gas. Imponendo l'uguaglianza

$$R = N_0 k \quad (3.4)$$

dove  $N_0$  è il numero di Avogadro che vale  $6 \cdot 10^{23} \text{ moli}^{-1}$  mentre  $k$  è la costante di Boltzmann  $1.4 \cdot 10^{-16} \text{ erg} \cdot \text{K}^{-1}$ . Sostituendo la (3.4) nella (3.3) otteniamo l'equazione

$$P_{\text{gas}} V = N_m N_0 k T \quad (3.5)$$

Dove possiamo introdurre  $N$ , il numero di particelle che costituisce il gas

$$N = N_m N_o \quad (3.6)$$

dove  $N_m N_o$  rappresenta il numero totale di particelle (atomi, elettroni, ioni)

e dividendo per  $V$  l'equazione (3.5) otteniamo

$$P_{\text{gas}} = \frac{N}{V} kT \quad (3.7)$$

Moltiplicando numeratore e denominatore della (3.7) per  $\bar{m}$  che rappresenta la massa media della particella di gas otteniamo l'equazione

$$P = \frac{N}{V} kT \frac{\bar{m}}{\bar{m}} \quad (3.8)$$

Ricavando  $N$  dall'equazione

$$M = N\bar{m} \quad (3.9)$$

e sostituendo nell'equazione (3.8) otteniamo l'equazione

$$P_{\text{gas}} = \frac{M}{V} \frac{kT}{\bar{m}} \quad (3.10)$$

Introducendo la densità  $\rho$  otteniamo l'equazione

$$P_{\text{gas}} = \rho \frac{kT}{\bar{m}} \quad (3.11)$$

Considerando le equazioni

$$\bar{m} = \mu H \quad \mu = \frac{\sum_i N_i A_i}{\sum_i N_i} \quad (3.12)$$

dove  $\mu$  è il peso molecolare medio del gas considerato che dipende dalla sua composizione chimica, in particolare viene espresso in funzione dell'abbondanza in massa di ciascun elemento (X, Y, Z) dove con X indichiamo l'abbondanza in massa di H, con Y l'abbondanza in massa di He e con Z l'abbondanza in massa dei "metalli" (elementi più pesanti dell'elio) tale che valga la relazione  $X+Y+Z=1$  e H è la massa del nucleo di idrogeno (protone) e  $\bar{m}$  è la massa media della particella del gas. Nella seconda equazione della (3.12)  $N_i$  rappresenta il numero di atomi dell'elemento i mentre  $A_i$  rappresenta il peso atomico. Sostituendo la prima equazione della (3.12) nella (3.11) otteniamo l'equazione finale per la pressione del gas in termini di densità, temperatura e la composizione chimica dello strato di stella considerato



$$P_{\text{gas}} = \rho \frac{kT}{\mu H} \quad (3.13)$$

Ricordando la (3.1) sappiamo che la  $P_{\text{radiazione}}$  dovuta alla pressione esercitata dai fotoni è uguale a

$$P_{\text{radiazione}} = \frac{4}{3} \sigma \frac{T^4}{c} \quad (3.14)$$

dove  $\sigma$  è la costante di Stefan e vale  $5.6 \cdot 10^{-5} \text{ erg sec}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ } ^\circ\text{k}^{-4}$  e  $c$  è la velocità della luce pari a  $3.0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Ponendo

$$a = \frac{4}{3} \sigma \quad (3.15)$$

e sostituendo nella (3.14) otteniamo l'equazione per la pressione di radiazione

$$P_{\text{radiazione}} = a \frac{T^4}{3} \quad (3.16)$$

Infine sostituendo la (3.16) e la (3.13) nella (3.2) otteniamo l'espressione finale

$$P = \rho \frac{kT}{\mu H} + a \frac{T^4}{3} \quad (3.17)$$

che rappresenta la terza equazione detta anche equazione di stato.

Nel caso degenerare non relativistico la pressione diventa

$$P = k_1 \rho^{5/3} \quad (3.18)$$

dove  $k_1 = 10^{13} \mu_e^{-5/3}$  e notiamo che non c'è dipendenza dalla temperatura ma c'è una maggior dipendenza dalla densità (rispetto al gas perfetto). Nel caso degenerare relativistico la pressione può essere espressa come

$$P = k_2 \rho^{4/3} \quad (3.19)$$

e  $k_2 = 1.2 \cdot 10^{15} \mu_e^{-4/3}$ .

Riassumendo, la terza equazione della struttura stellare può essere riscritta come riportato nella Figura 2.

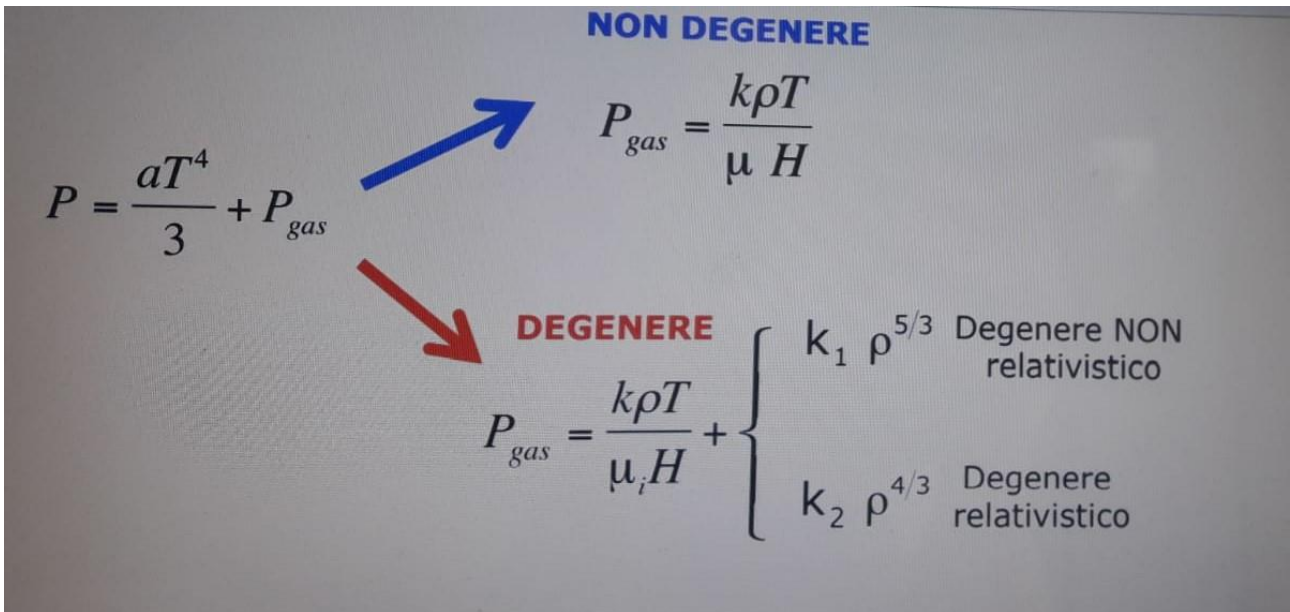


Figura 2: Schematizzazione della terza equazione della struttura stellare.

## 4 L'equazione del bilancio energetico

Il fenomeno più importante, nel caso di una stella, è l'irraggiamento, ovvero il trasferimento di energia tra due corpi per mezzo di onde elettromagnetiche. Le fonti di energia sono essenzialmente 3 :

- Termica
- Gravitazionale
- Nucleare

A queste si aggiunge la relazione che tiene conto del bilanciamento energetico (conservazione dell'energia) ovvero la perdita di energia in superficie è bilanciata dalla produzione di energia al centro. In generale possiamo ricavare una relazione che esprima l'energia che attraversa uno strato ad una distanza  $r$  dal centro della stella  $L(r)$  in funzione di quella prodotta  $\epsilon$ . Sia

$$\epsilon = \epsilon(\rho, T, X, Y) \quad (4.1)$$

dove con  $X$  indichiamo l'abbondanza di H e con  $Y$  l'abbondanza di He. Sia allora  $L(r)$  la quantità totale di energia liberata in un secondo dalla massa posta ad una distanza  $r$  dal centro della stella. Con riferimento alla Figura 3, consideriamo uno strato (guscio) sferico di spessore  $dr$  e sia:  $L(r)$  l'energia totale che entra ogni secondo attraverso la superficie sferica di raggio  $r$  e  $L(r+dr)$  quella uscente dalla superficie sferica di raggio  $r+dr$ , allora:

$$L(r+dr) - L(r) = dL(r) = 4\pi r^2 dr \epsilon \quad (4.2)$$

dove  $4\pi r^2$  è l'elemento di massa mentre  $\epsilon$  è l'energia prodotta per unità di tempo e di massa. Dividendo entrambi i membri dell'equazione (4.2) per  $dr$  otteniamo la 4° relazione sul bilancio energetico.

$$\boxed{\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon} \quad (4.3)$$

Questa equazione va ad aggiungersi alle tre equazioni della (3.18) ottenendo così un sistema di quattro equazioni in sei incognite ( $P, \rho, M, T, L, \epsilon$ ).

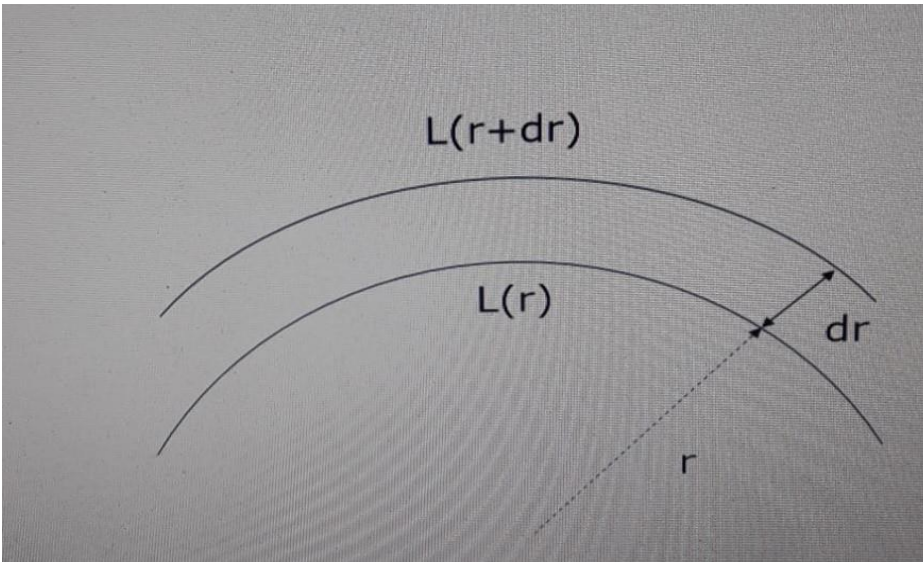


Figura 3: Schematizzazione di un guscio sferico di spessore  $dr$ .

## 5. L'equazione generale del trasporto radiativo

Riconsiderando l'equazione (3.16) e derivando rispetto a  $r$  otteniamo la nuova relazione

$$\frac{dP_{\text{radiativo}}}{dr} = \frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr} \quad (5.1)$$

Il gradiente di pressione però si può anche esprimere come

$$\frac{dP_{\text{radiativo}}}{dr} = -\frac{k\rho}{dr} F_{\text{radiativo}} \quad (5.2)$$

dove  $k$  rappresenta l'opacità mentre  $F_{\text{radiativo}}$  è il flusso di radiazione.

Uguagliando le due relazioni avremo

$$\frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr} = -\frac{k\rho}{dr} F_{\text{radiativo}} \quad (5.3)$$

Ricordando la relazione

$$F_{\text{radiativo}} = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (5.4)$$

e inserendola nella (5.3) diventa

$$\frac{dT}{dr} \Big|_{\text{rad}} = - \frac{3}{4ac} \frac{k\rho}{T^3} \frac{L}{4\pi r^2} \quad (5.5)$$

Così facendo abbiamo ottenuto un sistema di 5 equazioni in 7 incognite

$(P, \rho, M, T, L, k, \epsilon)$ .

## 6 Il criterio di Schwarzschild

Il criterio di Schwarzschild serve per stabilire se una data regione di una stella sia stabile o meno rispetto alla convezione. Esso afferma che, preso un elemento di materia ad una certa distanza  $r$  dal centro, se gli facciamo subire uno spostamento radiale verso la superficie della stella in modo adiabatico, questo si espande finché la pressione dell'elemento non si equilibra con quella esterna. Se l'elemento continua a salire ci sarà un equilibrio instabile (convezione), se l'elemento scende ci sarà un equilibrio stabile (nessuna convezione).

L'elemento viene trasportato in modo adiabatico, dunque vale la relazione

$$P\rho^{-\gamma} = \text{const} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (6.1)$$

dove  $c_p$  rappresenta il calore specifico a pressione costante,  $c_v$  è il calore specifico a volume costante,  $P$  è la pressione e  $\rho$  è la densità.

Con riferimento alla Figura 4, considerando un elemento a distanza  $r$  dal centro della

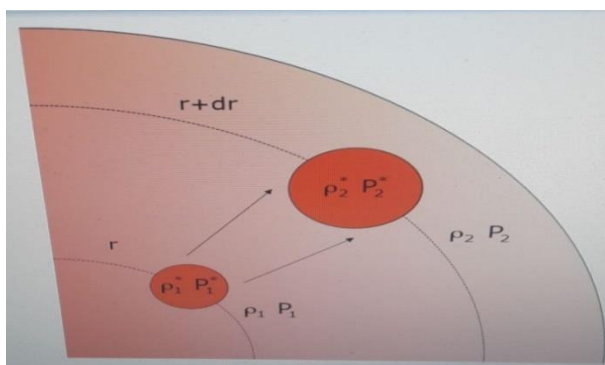


Figura 4: Schematizzazione del trasporto adiabatico di una cella di gas all'interno di una stella.

stella, indichiamo con un asterisco le quantità fisiche che caratterizzano l'interno della cella e senza asterisco le stesse quantità nell'ambiente stellare. Sappiamo che  $\rho_1^* = \rho_1$ ,  $P_1^* = P_1$ ,  $T_1^* = T_1$  mentre a distanza  $r+dr$   $P_2^* = P_2$ . Dove con  $\rho^*$  e con  $P^*$  indichiamo la densità e la pressione all'interno di materia considerato mentre con  $\rho$  e  $P$  indichiamo la densità e la pressione dell'ambiente, se la trasformazione è adiabatica possiamo scrivere l'equazione

$$\rho_1^{*-\gamma} P_1^* = \rho_2^{*- \gamma} P_2^* \quad (6.2)$$

da cui si ricava

$$\rho_2^* = \left(\frac{P_2^*}{P_1^*}\right)^{1/\gamma} \rho_1^* \quad (6.3)$$

Imponendo la condizione di stabilità rispetto al trasporto convettivo

$$\rho_2^* > \rho_2 \quad (6.4)$$

e ricordando che  $\rho_1^* = \rho_1$ ,  $P_1^* = P_1$ ,  $T_1^* = T_1$  possiamo scrivere la formula

$$\rho_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma} > \rho_2 \quad (6.5)$$

Considerando che

$$P_2 = P_1 + \frac{dP}{dr} dr \quad \rho_2 = \rho_1 + \frac{d\rho}{dr} dr \quad (6.6)$$

e sostituendo nella (6.5) otteniamo la relazione

$$\rho_1 \left(\frac{P_1 + \frac{dP}{dr}}{P_1}\right)^{1/\gamma} > \rho_1 + \frac{d\rho}{dr} dr \quad (6.7)$$

$$\rho_1 \left(1 + \frac{1}{P_1} \frac{dP}{dr} dr\right)^{1/\gamma} > \rho_1 + \frac{d\rho}{dr} dr \quad (6.8)$$

da cui sviluppando in serie di Taylor il termine  $\frac{dP}{dr} dr$  otteniamo la relazione

$$\rho_1 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_1}{P_1} \frac{dP}{dr} dr\right) > \rho_1 + \frac{d\rho}{dr} dr \quad (6.9)$$

da cui semplificando e rinominando le variabili otteniamo la disuguaglianza finale

$$\boxed{-\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr}} \quad (6.10)$$

che è la forma esatta e generale della condizione di stabilità “contro” i moti convettivi.

Supponiamo adesso che valga l’equazione dei gas perfetti

$$P = \frac{k\rho T}{m} \quad (6.11)$$

Scrivendo la (6.11) in forma logaritmica otteniamo

$$\text{Log}P = \text{Log}p + \text{Log}T + \text{Log} \text{cost} \quad (6.12)$$

e differenziando

$$\frac{1dP}{Pdr} = \frac{1d\rho}{\rho dr} + \frac{1dT}{Tdr} \quad (6.13)$$

e dunque la condizione (6.10) può essere riscritta come

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < -\frac{1dP}{Pdr} + \frac{1dT}{Tdr} \quad (6.14)$$

da cui raccogliendo i termini simili

$$\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} > -\frac{1dT}{Tdr} \quad (6.15)$$

e moltiplicando per -1 entrambi i termini otterremo

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < \frac{1dT}{Tdr} \quad (6.16)$$

da cui deduciamo che sia la pressione sia la temperatura diminuiscono all’aumentare di r. Prendiamo allora il valore assoluto della relazione (6.16) che diventa

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{P} \left|\frac{dP}{dr}\right| > \frac{1}{T} \left|\frac{dT}{dr}\right| \quad (6.17)$$

da cui semplificando dr otteniamo la disuguaglianza

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) > \frac{P}{T} \left|\frac{dT}{dP}\right| \quad (6.18)$$

ovvero

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) > \frac{d \text{Log}T}{d \text{Log}P} \quad (6.19)$$

Il membro destro della (6.19) rappresenta il gradiente logaritmico della temperatura in funzione della pressione e viene indicato con il simbolo  $\nabla$  mentre il termine sinistro della disuguaglianza viene indicato con il simbolo  $\nabla_{\text{adiabatico}}$ .

$$\nabla_{\text{adiabatico}} > \nabla \quad (6.20)$$

che è una condizione che i gradienti verificano quando non c'è convezione.

## 7 Equazione del flusso convettivo

Attualmente non esiste una trattazione esatta del moto turbolento a cui sono soggette le "celle" convettive. Per questo motivo non siamo in grado di fornire relazioni "esatte" sul trasporto convettivo e dobbiamo necessariamente introdurre approssimazioni e parametrizzazioni del libero cammino medio delle celle convettive. L'approssimazione più utilizzata per la parametrizzazione del libero cammino medio si chiama Mixing length theory (teoria della lunghezza di rimescolamento). Il moto degli elementi convettivi è parametrizzato da una lunghezza di rimescolamento "l" che è una sorta di distanza media che l'elemento percorre all'interno della regione convettiva prima di dissolversi nell'ambiente circostante. "l" viene in generale definito come  $\alpha$  volte l'altezza di scala della pressione  $H_p$  che parametrizza la distanza in corrispondenza della quale la pressione si riduce di un e-esimo.  $\alpha$  è un parametro libero che viene fissato in modo che le strutture convettive calcolate riproducano le osservazioni.

$$l = \alpha H_p \quad (7.1)$$

Possiamo scrivere l'equazione del flusso convettivo come

$$F_{\text{convettivo}} = \frac{1}{2} c_p \Delta T \rho v \quad (7.2)$$

dove il termine  $\frac{1}{2}$  è dovuto al fatto che metà delle celle si muove in una direzione e metà nell'altra,  $c_p$  è il calore specifico a pressione costante,  $\Delta T$  è la variazione di temperatura,  $\rho v$  è il flusso di massa che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo. La relazione (7.2) può essere scritta meglio, in particolare cerchiamo una relazione che descriva la velocità  $v$  degli elementi convettivi. Se una cella convettiva sta salendo sarà meno densa dell'ambiente circostante dunque sarà a temperatura maggiore per garantire l'equilibrio di pressione

$$P \sim \rho T \quad (7.3)$$



La cella sta quindi trasportando energia termica in superficie. Sia  $\Delta T$  il suo “eccesso” di temperatura rispetto all’ambiente, dunque la carenza di densità sarà

$$\Delta\rho \sim -\frac{\rho}{T}\Delta T \quad (7.4)$$

Ciascuna cella convettiva sarà sottoposta ad una forza

$$f = -g\Delta\rho V \quad (7.5)$$

Dunque il lavoro sarà

$$L = g\frac{\rho}{T}\Delta T l \quad (7.6)$$

Uguagliando il lavoro all’energia cinetica otteniamo

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = g\frac{\rho}{T}\Delta T l \quad (7.7)$$

Da cui ricaviamo un’espressione per la velocità

$$v = \sqrt{2\frac{g\Delta T l}{T}} \quad (7.8)$$

Inserendo la (7.8) nella (7.2) otteniamo l’equazione

$$F_{\text{convettivo}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sqrt{\frac{gl}{T}}c_p\Delta T^{3/2} \quad (7.9)$$

Possiamo scrivere  $\Delta T$  in funzione del gradiente superadiabatico

$$\Delta T = \frac{d\Delta T}{dT}\Delta r \quad (7.10)$$

$$\Delta T = \frac{d\Delta T}{dT}l \quad (7.11)$$

ottenendo l’equazione

$$F_{\text{convettivo}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sqrt{\frac{g}{T}}c_p\left(\frac{d\Delta T}{dr}\right)^{3/2}l^2 \quad (7.12)$$

Considerando che  $L = 4\pi r^2 F_{\text{convettivo}}$  otteniamo l’equazione finale che lega il gradiente super-adiabatico alle quantità definite negli interni stellari

$$F_{\text{convettivo}} = 4\pi r^2 \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sqrt{\frac{g}{T}}c_p\left(\frac{d\Delta T}{dr}\right)^{3/2}l^2 \quad (7.13)$$

Ritornando all'equazione (7.1) abbiamo introdotto  $H_p$  che rappresenta la distanza caratteristica entro la quale la pressione si riduce di un  $e$ -esimo. Dunque se  $l \ll H_p$  la convezione non è efficiente mentre se  $l \gg H_p$  l'elemento convettivo perde di significato quindi di solito si considera  $l \sim H_p$ .

Riscriviamo il flusso convettivo in funzione del gradiente  $\nabla$ . Inserendo la (7.11) nella (7.2) otteniamo l'equazione

$$F_{\text{convettivo}} = \frac{1}{2} c_p \rho v \left( \frac{dT}{dr} \Big|_{\text{ad.}} - \frac{dT}{dr} \right) l \quad (7.14)$$

che riscritta in funzione della pressione e della temperatura diventa

$$F_{\text{convettivo}} = \frac{1}{2} c_p \rho v l \left( \frac{dT}{dP} \Big|_{\text{adiabatico}} - \frac{dT}{dP} \right) \frac{dP}{dT} \frac{T}{P} \quad (7.15)$$

Riscriviamo ora la (7.15) con l'ausilio del secondo membro della (6.18) e della (6.19)

$$F_{\text{convettivo}} = \frac{1}{2} c_p \rho v l \left( \nabla_{\text{adiabatico}} - \nabla \right) \frac{dP}{dr} \frac{T}{P} \quad (7.16)$$

Considerando che

$$\frac{1}{H_p} = - \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \quad (7.17)$$

e ricordando la (7.1) otteniamo l'equazione finale

$$F_{\text{convettivo}} = \frac{1}{2} c_p \rho v \alpha \left( \nabla_{\square} - \nabla_{\text{adiabatico}} \right) \frac{dP}{dr} \frac{T}{P} \quad (7.18)$$

Riscriviamo adesso il flusso radiativo in funzione del gradiente. Riconsiderando la (5.5) e la (5.4) ricaviamo la relazione

$$F_{\text{radiativo}} = - \frac{4ac}{3k\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (7.19)$$

che moltiplicata e divisa per un termine  $\frac{dP}{dT} \frac{T}{P}$  ci dà

$$F_{\text{radiativo}} = - \frac{4ac}{3k\rho} T^3 \frac{dT}{dP} \frac{dP}{dr} \frac{T}{P} \quad (7.20)$$

Tenendo conto del secondo membro della (6.18), della (6.19) e della (7.17) otteniamo l'equazione finale

$$F_{\text{radiativo}} = - \frac{4ac}{3k\rho} T^4 \frac{\nabla}{H_p} \quad (7.21)$$

La (7.21) insieme alla (7.18) e alla (6.20) costituisce la quinta equazione.

## 8 Opacità

L'opacità della materia stellare è una misura della resistenza offerta dalla materia al passaggio della radiazione. Si definisce perciò un coefficiente monocromatico di assorbimento per unità di massa ed unità di area  $k_\nu$  mediante una relazione che parametrizza la diminuzione del flusso specifico per unità di area lungo un percorso  $dx$ . L'opacità è causata da una molteplicità di processi atomici che in maniera schematica possono essere così riassunti:

- Assorbimento vero: il fotone viene assorbito e perde la sua identità (non riappare più alla frequenza  $\nu$  che aveva quando è stato assorbito).
- Diffusione: si ha una diminuzione di flusso nella direzione osservata perché si produce una deviazione del fotone.

In maggior dettaglio i processi si distinguono in:

	<b>Descrizione</b>	<b>Processo inverso</b>
Assorbimento Legato-Legato (Bound-Bound)	Fotoeccitazione	Emissione
Assorbimento Legato-Libero (Bound-Free)	Fotoionizzazione	Ricombinazione
Assorbimento Libero-Libero (Free-Free)		Bremstrahlung Radiazione di frenamento
Diffusione (Scattering)	Effetto Compton	

Figura 5: Schematizzazione dei processi atomici che causano l'opacità.

## 8.1 Assorbimento legato-legato (BB)

Sia dato un elettrone in uno stato di energia  $E_1$  che assorbe un fotone e si porta in uno stato di energia  $E_2$ . Il fotone, per produrre questa transizione, deve avere una frequenza  $\nu_{BB}$  secondo la formula

$$h\nu_{BB} = E_2 - E_1 \quad (8.1)$$

Questo è un tipo di processo di assorbimento selettivo, visto che la transizione di un elettrone da un dato livello ad uno superiore richiede sempre un fotone di una data frequenza. Questo processo è responsabile delle righe spettrali nelle atmosfere ma negli interni stellari è poco importante visto che gran parte degli atomi sono ionizzati (pochi elettroni sono ancora legati ai nuclei atomici).

## 8.2 Assorbimento legato-libero (BF)

Un elettrone, posto in uno stato legato di energia  $E_1$ , assorbe un fotone e può posizionarsi su un'orbita libera (di energia  $E_3$ ). Questo processo è detto "fotoionizzazione".

$$h\nu_{BF} = E_3 - E_1 > \chi_{ion} \quad (8.2)$$

L'elettrone potrà poi perdere parte della sua energia cinetica a causa della collisione con le particelle circostanti e potrà essere ricatturato da un altro atomo (ricombinazione) emettendo un fotone di energia minore. Questo processo degrada l'energia.

## 8.3 Assorbimento libero-libero (FF)

Un elettrone libero con energia  $E_3$  assorbe un fotone di energia  $h\nu_{FF}$  e si porta su un altro stato libero di energia  $E_4$ .

$$h\nu_{FF} = E_4 - E_3 \quad (8.3)$$

## 8.4 Diffusione

Dal punto di vista classico, il processo è rappresentabile con una collisione tra due particelle (fotone-elettrone).

Se l'energia del fotone di frequenza  $\nu_s$  è tale che

$$h\nu_s \ll mc^2 \quad (8.4)$$

dove  $m$  è la massa della particella con cui il fotone urta, deduciamo che la particella è praticamente ferma. Questo vale quasi sempre negli interni stellari tranne nelle zone ad altissima temperatura. L'effetto di questo processo è di ritardare l'uscita del fotone dalla stella perché ne viene continuamente cambiata la direzione. Da ciò ne consegue che diminuisce l'intensità del fascio di radiazione nella direzione di propagazione.

## 9 Calcolo dell'opacità stellare

Il calcolo del coefficiente di assorbimento si basa sulla sezione di assorbimento di un fotone di data frequenza per ciascun atomo. Alla base del calcolo dei coefficienti di assorbimento per atomo c'è la definizione di sezione d'urto. Possiamo scrivere il coefficiente di assorbimento totale come

$$k_\nu = k_{BF} + k_{FF} + k_E \quad (9.1)$$

Per esempio, negli interni stellari ad alte temperature, H e He sono tutti ionizzati, tuttavia sono importanti perché forniscono gli elettroni liberi dai quali dipende l'assorbimento FF e lo scattering e perché contribuiscono poco all'assorbimento BF.

### 9.1 Le leggi di Kramers

Nelle prossime pagine descriveremo i processi fisici alla base dell'opacità negli interni stellari. Come vedremo, la descrizione formale della totalità di questi processi richiede una caratterizzazione piuttosto complessa e quindi, dopo aver impostato le equazioni, cercheremo delle relazioni approssimate che siano più importanti dal punto di vista astrofisico. Le cosiddette leggi di Kramers, che esprimono la dipendenza del contributo dei vari processi (dall'opacità, dalla densità e dalla temperatura dello strato considerato) saranno le relazioni da inserire nel nostro sistema di equazioni.

## 9.2 Assorbimento Legato-Libero (BF)

Poiché H e He sono completamente ionizzati negli interni stellari, i processi BF sono rilevanti solo per gli elementi pesanti (alti numeri atomici) che sono tuttavia quasi totalmente ionizzati quindi possono essere trattati come atomi con un solo elettrone. Se un atomo è in uno stato “legato” attorno ad un nucleo, assorbendo un fotone di frequenza  $\nu > \nu_n$ , essendo  $h\nu_n = \chi_n$  l’energia di ionizzazione, viene strappato via verso il continuo con energia cinetica  $h(\nu - \nu_n)$ . Il coefficiente di assorbimento di un elettrone  $a_{BF}(\nu, Z, n)$  dove  $n$  è il numero quantico dell’elettrone e  $Z$  è il numero atomico  $a_{BF}$  è essenzialmente la sezione d’urto di una transizione BF. Adesso possiamo moltiplicare la relazione  $a_{BF}$  per  $N_e(Z, n)$  che rappresenta il numero di elettroni ancora legati nel livello energetico caratterizzato dal numero quantico principale  $n$  per ciascuna specie atomica  $Z$ . Questa quantità è ovviamente funzione sensibile della temperatura e deve essere determinata attraverso l’uso combinato delle leggi di Saha e Boltzmann che regolano rispettivamente il livello di ionizzazione ed eccitazione delle specie atomiche al variare della temperatura. Per riferire la quantità all’unità di massa, dividiamo per  $A m_H$ : otterremo il coefficiente di assorbimento atomico per grammo, relativo al numero atomico  $Z$  e peso atomico  $A$ . Questo è il coefficiente

$$k_{BF} = a_{BF}(\nu, Z, n) \frac{N_e(Z, n)}{A m_H} \quad (9.2)$$

Il parametro ottenuto con la relazione (9.2) deve essere calcolato per tutti i livelli energetici di tutte le specie atomiche pesate per la relativa abbondanza  $(X, Y, Z)$  nel plasma stellare. A valle di questo processo si ottiene che il  $k_{BF}$  è  $10^{25}(1+X)Z\rho T^{-3.5}$  dove  $X$  e  $Z$  sono elementi più pesanti dell’elio.

$$k_{BF} \propto (1+X)Z\rho T^{-3.5} \quad (9.3)$$

## 9.3 Assorbimento Libero-Libero (FF)

Consideriamo un elettrone che si muova in un’orbita iperbolica nel campo elettrico di un dato ione. Assorbendo un fotone l’elettrone può passare su un’orbita a più alta

energia. Le orbite iperboliche non sono quantizzate quindi l'elettrone può assorbire un fotone di  $\nu$  qualunque.

Considerando un fascio di radiazione di frequenza  $\nu$  che attraversa un volume di  $1 \text{ cm}^3$  in cui ci sono uno ione e un elettrone, l'energia assorbita nell'unità di tempo dell'elettrone si può parametrizzare nel "coefficiente di assorbimento" che per un elettrone è:

$$a_{\text{FF}}(\nu, V, Z) = \frac{4\pi Z^2 e^6}{3\sqrt{3} h c m_e} \overline{g_{\text{FF}}} \frac{1}{\nu^3 V} \quad (9.4)$$

dove  $\overline{g_{\text{FF}}}$  è il fattore di Gaunt medio e vale circa 1,  $\nu$  è la frequenza della radiazione e  $V$  è la velocità dell'elettrone.

La (9.4) va moltiplicata per il numero di elettroni per unità di volume aventi velocità compresa tra  $V$  e  $V+dV$  e poi diviso per  $A m_{\text{H}}$ . Assumendo una distribuzione delle velocità di Maxwell

$$N_e(V)dV = 4\pi N_e \left( \frac{m_e}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mV^2}{2kT}} V^2 dV \quad (9.5)$$

Integrando su tutte le possibili velocità e inserendo le variabili

$$u = \frac{h\nu}{kT} \quad (9.6)$$

$$k_{\text{FF}} = \frac{1}{u^3} D_{\text{FF}}(z) \quad (9.7)$$

otteniamo l'equazione

$$D_{\text{FF}}(z) = \frac{16\pi^2 Z^2}{3\sqrt{3} A m_{\text{H}}} \overline{g} \frac{h^2 e^6}{c (2\pi m_e)^{3/2}} \frac{N_e}{(kT)^{3.5}} \quad (9.8)$$

che può essere riscritta come

$$D_{\text{FF}}(z) = D'_{\text{FF}}(z) \frac{N_e}{(kT)^{3.5}} \quad (9.9)$$

Adesso considerando che

$$N_e = \frac{\rho}{m_{\text{H}} \mu_e} \quad (9.10)$$

La (9.7) può essere riscritta come

$$k_{FF} = \frac{1}{u^3} D'_{FF}(Z) \frac{\rho}{(kT)^{3.5} m_H \mu_e} \quad (9.11)$$

Considerando tutti gli ioni presenti con le relative abbondanze avremo

$$k_{FF} = \frac{1}{u^3} \sum_Z \frac{D'_{FF}(Z) X(Z)}{m_H \mu_e} \frac{\rho}{(kT)^{3.5}} \quad (9.12)$$

Possiamo approssimare alcuni di questi termini tenendo conto che

$$\left(\frac{1}{v}\right) = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} \quad (9.13)$$

$$N_e \propto \frac{X+1}{2} \frac{\rho}{m_H} \quad (9.14)$$

$$X_Z = X + Y \quad (9.15)$$

Sviluppando si ha :

$$k_{FF} = 3.7 \times 10^{22} \overline{g_{FF}} (X+Y)(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (9.16)$$

## 9.4 Scattering

I due casi trattati finora sono processi di vero e proprio assorbimento. Il fotone incidente viene sottratto alla radiazione incidente per aumentare l'energia di un elettrone. Nel caso di un elettrone "libero", questo processo può avvenire solo in presenza del campo elettrostatico di un qualche ione. Se consideriamo invece un elettrone libero non soggetto a forze esterne, esso può contribuire alla diminuzione dell'energia incidente solo attraverso la diffusione. In questo caso la sezione d'urto di Thomson è il parametro determinante. Il coefficiente di assorbimento per Scattering è

$$k_E = \sigma_E \frac{N_E}{\rho} \quad (9.17)$$

dove  $\frac{N_E}{\rho}$  è il numero di elettroni per unità di massa mentre

$$\sigma_E = \frac{8}{3} \pi \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \quad (9.18)$$



Ritornando all'espressione (9.17)  $N_E$  può essere riscritto come

$$N_E = \frac{\rho}{m_H \mu_e} \quad (9.19)$$

e riscrivendo  $\frac{1}{\mu_e}$  come

$$\frac{1}{\mu_e} = \frac{(X+1)}{2} \quad (9.20)$$

da cui sostituendo la (9.20) nella (9.19) e la (9.19) nella (9.17) otteniamo la relazione

$$k_E = \sigma_E \frac{(X+1)}{2m_H} \quad (9.21)$$

che tenendo conto delle costanti possiamo scrivere come

$$k_E = 0.2(1+X) \quad (9.22)$$

La (9.22) insieme alla (9.16) e alla (9.3) costituisce la sesta equazione del sistema iniziale.

## 10 Reazioni termonucleari

Le reazioni termonucleari che avvengono negli interni stellari sono reazioni di fusione nucleare indotte dal moto termico degli ioni. Il nucleo atomico è composto da nucleoni: cioè da  $Z$  protoni e  $N$  neutroni dunque possiamo scrivere  $A$  (numero di massa atomico) come la somma di  $Z$  e  $N$  secondo la formula

$$A = Z + N \quad (10.1)$$

Il nucleo è tenuto insieme da un'interazione di tipo forte che agisce su distanze estremamente piccole ( $10^{-12/-13}$  cm). Per un nucleo composto da  $Z$  protoni e  $N$  neutroni l'energia di legame sarà:

$$E(Z,N) = \{ Zm_p + Nm_n - m(Z,n) \} c^2 \quad (10.2)$$

dove  $m_p$  è la massa del protone,  $m_n$  è la massa del neutrone e  $m$  è la massa del nucleo.  $E(Z,n)$  rappresenta l'energia che bisogna fornire ad un nucleo per spaccarlo nelle singole particelle che lo costituiscono.

Le forze in gioco che favoriscono o si oppongono alle reazioni termonucleari sono l'interazione forte e la repulsione elettrostatica.

Consideriamo ora una generica reazione:



Vogliamo stimarne il tasso  $\frac{dN}{dt}$  (numero di reazioni per unità di volume e di tempo). I parametri in gioco sono  $\sigma$  che è la sezione d'urto della reazione (il numero di reazioni per target A, per unità di tempo e per flusso di particelle incidenti B), il flusso (numero di particelle incidenti per unità di area e di tempo), la velocità relativa  $v$  tra le particelle A e B e la densità numerica delle particelle A e B  $N_A$  e  $N_B$ . Allora possiamo scrivere

$$\frac{dN}{dt} = \text{rate} = v \sigma(v) N_A N_B \quad (10.4)$$

Considerando un gas con una certa distribuzione di velocità la formula precedente diventa

$$\text{rate} = N_A N_B \int_0^\infty v \sigma(v) n(v) dv \quad (10.5)$$

In termini di distribuzione di energia la relazione (10.5) diventa

$$\frac{dN}{dt} = N_A N_B \int_0^\infty \Pi(E) \sigma(E) v dE \quad (10.6)$$

dove il nuovo termine  $\Pi(E)dE$  rappresenta la probabilità che le due particelle abbiano energia compresa tra  $E$  e  $E+dE$ . Se la distribuzione delle velocità è di tipo Maxwelliano allora

$$\Pi(E)dE = 2\pi \left(\frac{1}{\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{E}{kT}} E^{1/2} dE \quad (10.7)$$

$$v = \sqrt{\frac{2m}{E}} \quad (10.8)$$

Sostituendo la (10.7) e la (10.8) nella (10.6) otteniamo la relazione

$$\frac{dN}{dt} \propto N_A N_B \int_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}} E \sigma(E) dE \quad (10.9)$$

La sezione d'urto  $\sigma(E)$  dipende da 3 fattori

$$\sigma(E) \propto \sigma'(E) \Pi'(E) \Pi'' \quad (10.10)$$

dove  $\sigma'(E)$  è la sezione d'urto di un incontro ravvicinato,  $\Pi'(E)$  è la probabilità che questo incontro porti alla penetrazione della barriera,  $\Pi''$  è la probabilità che la reazione porti alla formazione di un nucleo stabile. Per calcolare il primo fattore  $\sigma'(E)$  assumeremo che la sezione d'urto della particella sia dell'ordine della lunghezza d'onda di de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (10.11)$$

da cui ricordando la (10.8) si ricava

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2ME}} \quad (10.12)$$

quindi

$$\sigma'(E) = \pi \lambda^2 = \frac{\pi h^2}{2ME} \quad (10.13)$$

Il secondo fattore della (10.10)  $\Pi'(E)$  rappresenta la probabilità di penetrazione della barriera Coulombiana (fattore di Gamow) e serve per tener conto che esiste la possibilità che una particella con energia minore del potenziale elettrostatico ( $E_c$ ) perfori la barriera di potenziale ("effetto tunnel").

Si tratta di risolvere il seguente integrale

$$\Pi' = e^{-\frac{4\pi}{h}(2M)^{1/2} \int_{r_0}^{r_1} (E(R) - E_c)^{1/2} dr} \quad (10.14)$$

dove  $M$  è la massa ridotta del sistema  $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $r_1$  è la distanza in cui la particella 2 incontra la barriera di potenziale della particella 1 e  $r_0$  è il raggio d'azione della forza forte. Si può dimostrare che

$$\Pi' = e^{-\left(\frac{E_0}{E}\right)^{1/2}} \quad (10.15)$$

$$E_0 = 1.6 \cdot 10^{-6} \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} Z_1^2 Z_2^2 \quad (10.16)$$

Il terzo fattore  $\Pi''$  parametrizza la probabilità che, una volta entrati in contatto, i nucleoni formino effettivamente un nucleo stabile.  $\Pi''$  si può calcolare attraverso il rapporto di due quantità:  $\tau$  (tempo durante il quale il nucleo rimane in uno stato eccitato) e  $t$  (tempo impiegato dal nucleo prodotto per emettere la radiazione di eccitazione)

$$\Pi'' \propto \frac{\tau}{t} \quad (10.17)$$

In conclusione considerando tutti i fattori ed integrando avremo:

$$\frac{dN}{dt} = c x_1 x_2 \rho^2 T^{-2/3} e^{-1.89 \left(\frac{E_0}{kT}\right)^{1/3}} \quad (10.18)$$

dove

$$c = \frac{4h^2}{k^{2/3} m_H^{7/2}} \frac{(A_1 + A_2)^{3/2}}{(A_1 A_2)^{5/2}} E_0^{1/6} \Pi'' \quad (10.19)$$

## 11 Calcolo del tasso di produzione di energia ( $\epsilon$ )

Il calcolo del tasso di produzione energetica ( $\epsilon$  = energia prodotta per grammo e per secondo) è molto complesso, perché dipende da molti fattori, in particolar modo dalle sezioni d'urto, che variano notevolmente da un tipo di reazione ad un altro. Il coefficiente  $\epsilon$  è dato dalla sommatoria delle energie prodotte dai processi che intervengono in un dato ciclo di reazioni

$$\epsilon = \sum \frac{\text{energia prodotta}}{\text{reazione}} \frac{N \text{ reazioni}}{\text{cm}^3 \text{ s}} \frac{\text{cm}^3}{\text{g}} \quad (11.1)$$

Il primo termine prodotto della (11.1) va stimato facendo il bilancio energetico per ciascun tipo di reazione, il secondo termine corrisponde alla (10.18), il terzo termine rappresenta l'inverso della densità. Dunque avremo

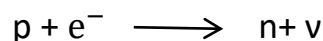
$$\epsilon = E c x_1 x_2 \rho T^{-2/3} e^{-1.89 \left(\frac{E_0}{kT}\right)^{1/3}} \quad (11.2)$$

Il coefficiente "E" va calcolato per ogni tipo di reazione che andremo a considerare.

## 11.1 Tipologia e nomenclatura dei principali processi nucleari

I principali processi nucleari sono:

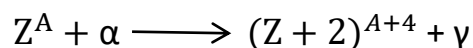
- Decadimento  $\beta^-$  ( $\beta^-$ ): un neutrone decade generando un protone, un elettrone e un anti-neutrino. Tale reazione è esoenergetica e avviene quindi spontaneamente, liberando energia sotto forma di anti-neutrino.
- Decadimento  $\beta^+$ : un protone decade generando un neutrone, un positrone e un neutrino. A causa della differenza di massa tra neutrone e protone questo decadimento non può avvenire spontaneamente, è una reazione endoenergetica.
- Decadimento  $\beta^-$  inverso (cattura elettronica): in determinate condizioni ambientali un protone può catturare l'elettrone che gli orbita attorno per produrre un neutrone e liberare un neutrino.



- Cattura protonica - processo (p,  $\gamma$ ): quando un protone interagisce con un nucleo di numero atomico Z e numero di massa A, genera un nuovo elemento di numero atomico Z+1 e numero di massa A+1 e libera energia.

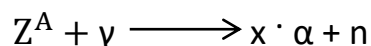


- Processo ( $\alpha$ ,  $\gamma$ ) o cattura  $\alpha$ : un nucleo  $Z^A$  interagisce con una particella  $\alpha$ ,

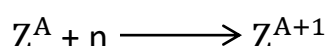


dove con "particella  $\alpha$ " s'intende in generale un nucleo di  $He^4$  (cioè un nucleo costituito da 2 protoni e 2 neutroni), formando un elemento più pesante.

- Processo ( $\gamma$ ,  $\alpha$ )- fotodisintegrazione: un fotone  $\gamma$  "spacca" un nucleo  $Z^A$  in x particelle  $\alpha$  più un certo numero di neutroni (n).



- Processo (n,  $\gamma$ ) o cattura neutronica: si verifica quando un atomo con A nucleoni interagisce con un neutrone formando un isotopo dell'elemento iniziale.

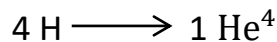


- Processo ( $\gamma$ , n) o fotodisintegrazione: fotoni energetici possono spaccare i nuclei e generare neutroni.

## 12 Reazioni termonucleari di fusione dell'idrogeno

Le principali reazioni termonucleari di fusione dell'idrogeno sono 3 tutte denominate PP e trasformano 4 nuclei di idrogeno in un nucleo di elio.

- La prima catena di bruciamento dell'idrogeno (catena PPI) è



Questo primo processo fu ipotizzato da Hans Albrecht Bethe ed è un processo nucleare che trasforma i nuclei di idrogeno in nuclei di elio. Esso è la principale sorgente di energia per le stelle dell'universo. Il ramo PPI è dominante a temperatura tra 10 e 14 MK.

- La seconda catena di bruciamento dell'idrogeno (catena PPII) genera il Berillio tramite l'interazione tra  $\text{He}^3$  e  $\text{He}^4$  già esistente. La catena PPII è dominante a temperature tra 14 e 23 MK.
- La terza catena di bruciamento dell'idrogeno (catena PPIII) si differenzia dalla PPII perché il  $\text{Be}^7$  interagisce con  $\text{H}^1$  anziché con un  $e^-$ . Il ramo PPIII è dominante a temperature maggiori di 23 MK.

La combustione dell'idrogeno in elio può avvenire anche attraverso un altro ciclo detto CNO, che, come dice il nome, prevede la presenza nel plasma nucleare di elementi pesanti come il carbonio, l'azoto e l'ossigeno.

Si tratta quindi di un fenomeno tipico delle stelle giovani, di popolazione I, ricche di metalli. Questi elementi non vengono consumati, ma agiscono da catalizzatori attivi e vengono processati e riprodotti all'interno del ciclo.

Torniamo alla caratterizzazione del parametro  $\epsilon$ . Nel caso della catena di reazione protone-protone avremo

$$\epsilon_{\text{PP}} = 2.36 \cdot 10^6 X_{\text{H}}^2 \rho T_6^{-2/3} e^{-33.81/T_6^{1/3}} \quad (12.1)$$

dove  $T_6$  è la temperatura espressa in milioni di gradi ed è una grandezza adimensionale. Nella trattazione precedente abbiamo trascurato il fatto che i nuclei siano circondati da una nube di elettroni molto densa che introduce un potenziale perturbatore il cui effetto è quello di ridurre la barriera di potenziale aumentando così la penetrabilità. Dunque possiamo riscrivere la (12.1) come

$$\epsilon_{PP} = 2.36 \cdot 10^6 X_H^2 \rho T_6^{-2/3} e^{-33.81/T_6^{1/3}} \phi(T) \quad (12.2)$$

Analogamente per il ciclo CNO potremo scrivere

$$\epsilon_{CNO} = 7.21 \cdot 10^{27} X_H \rho Z_{CN} T_6^{-2/3} e^{-153.31/T_6^{1/3}} \phi(T) \quad (12.3)$$

## 13 Processo 3 $\alpha$

Il processo 3 $\alpha$  consiste nella combustione dell'He<sup>4</sup> in C<sup>12</sup>. Analogamente, per quanto scritto per le reazioni di fusione dell'idrogeno, possiamo scrivere

$$\epsilon_{3\alpha} = 3.5 \cdot 10^{35} Y^3 \rho^2 e^{-4.32 \cdot 10^9/T} \phi(T) \frac{1}{T^3} \quad (13.1)$$

che può essere riscritta in funzione di  $T_6$  sostituendo a  $T = T_6 \cdot 10^6$

$$\epsilon_{3\alpha} = 3.5 \cdot 10^{17} Y^3 \rho^2 e^{-4320/T_6} \phi(T) \frac{1}{T_6^3} \quad (13.2)$$

La relazione per  $\epsilon$  che vorremmo ricavare per inserirla nel sistema di equazioni sarebbe una semplice legge di potenza

$$\epsilon = \epsilon_0 \rho T^\alpha \quad \text{con } \alpha = \text{cost} \quad (13.3)$$

Tuttavia, la complessità della dipendenza dalla temperatura nelle relazioni che abbiamo ottenuto, ci permetterà al massimo di avere relazioni di questo tipo

$$\epsilon = \epsilon_0 \rho T^v \quad \text{dove } v = \left( \frac{d \ln \epsilon}{d \ln T} \right)_\rho \quad (13.4)$$

Partiamo dalla relazione

$$\epsilon \propto \rho T^{-2/3} e^{-1.89 \left( \frac{E_0}{kT} \right)^{1/3}} \quad (13.5)$$

Passiamo ai logaritmi

$$\ln \epsilon \propto \ln \rho - \frac{2}{3} \ln T - 1.89 \left( \frac{E_0}{kT} \right)^{1/3} \quad (13.6)$$

Deriviamo

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon} = \frac{d\rho}{\rho} - \frac{2dT}{3T} + 1.89 \left(\frac{E_0}{k}\right)^{1/3} \frac{1}{3} T^{-4/3} dT \quad (13.7)$$

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon} = \frac{d\rho}{\rho} - \frac{2dT}{3T} + 1.89 \left(\frac{E_0}{k}\right)^{1/3} \frac{1}{3} \frac{1}{T^{1/3}} dT \quad (13.8)$$

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon} = \frac{dT}{T} \left[ \frac{1.89}{3} \left(\frac{E_0}{kT}\right)^{1/3} - \frac{2}{3} \right] + \frac{d\rho}{\rho} \quad (13.9)$$

Concludendo possiamo scrivere la (13.9) come

$$\left(\frac{d\epsilon}{\epsilon} / \frac{dT}{T}\right) = 0.63 \left(\frac{E_0}{kT}\right)^{1/3} - 0.67 = v \quad (13.10)$$

Adesso calcolando v per i cicli PP e CNO si ottiene

$$v_{PP} = 11.25 T_6^{-1/3} - 0.67 \quad (13.11)$$

$$v_{CN} = 50.67 T_6^{-1/3} - 0.67 \quad (13.12)$$

Dunque possiamo scrivere le formule che parametrizzano il parametro  $\epsilon$  come:

$\epsilon_{PP} = \epsilon_1 \rho X^2 T_6^{v_{PP}} \quad \text{con } v_{PP} = [3.5-6]$	
$\epsilon_{CN} = \epsilon_2 \rho X X_{CN} T_6^{v_{CN}} \quad \text{con } v_{CN} = [13-20]$	
$\epsilon_{3\alpha} = \epsilon_2 \rho^2 Y^3 X_{CN} T_6^{v_{3\alpha}} \quad \text{con } v_{3\alpha} = [20-30]$	(13.13)

Queste relazioni mostrano l'altissima dipendenza del rate di produzione di energia dalla temperatura: anche piccole variazioni di temperatura possono alterare moltissimo la produzione di energia termonucleare. Una conseguenza di ciò è che reazioni termonucleari stabili possono avvenire solo in un ambiente di plasma "termoregolato" come il gas perfetto.

Le relazioni della (13.13) rappresentano la settima equazione che conclude il nostro sistema che riportiamo qui sotto.

$$1. \frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r)$$

$$2. \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

$$3. P = \rho \frac{kT}{\mu H} + a \frac{T^4}{3}$$



$$4. \frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon$$

$$5. \begin{cases} \frac{dT}{dr} \Big|_{\text{rad}} = - \frac{3}{4ac} \frac{k\rho}{T^3} \frac{L}{4\pi r^2} \\ F_{\text{conv}} = \frac{1}{2} \rho v c_P \alpha (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) T \\ \nabla > \nabla_{\text{ad}} \end{cases}$$

$$6. k = k(\rho, T) \begin{cases} k_{BF} \propto 10^{25} Z (1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \\ k_{FF} \propto 10^{22} (1 + X) (Y + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \\ k_E \propto 0.2 (1 + X) \end{cases}$$

$$7. \epsilon = \epsilon(X, \rho, T) \begin{cases} \epsilon_{PP} = \epsilon_1 \rho X^2 T_6^{v_{PP}} & \text{con } v_{PP} = [3.5 - 6] \\ \epsilon_{CN} = \epsilon_2 \rho X X_{CN} T_6^{v_{CN}} & \text{con } v_{CN} = [13 - 20] \\ \epsilon_{3\alpha} = \epsilon_2 \rho^2 Y^3 X_{CN} T_6^{v_{3\alpha}} & \text{con } v_{3\alpha} = [20 - 30] \end{cases}$$

## Bibliografia

- [1] V. Castellani. *Astrofisica stellare*, Ed. Zanichelli.
- [2] B. Cester. *Corso di astrofisica*, Ed. Hoepli.
- [3] B. W. Carroll, D. A. Ostlie. *An Introduction to Modern Astrophysics*, Ed. Pearson.
- [4] M. Salaris, S. Cassisi. *Evolution of Stars and Stellar Populations*, Ed. John Wiley & sons.
- [5] R. L. Bowers, T. Deeming. *Astrophysics I:stars*, Jones & Bartlett Pub.
- [6] F. R. Ferraro. *Astrofisica Stellare*, Appunti e slide del corso.