

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Equazioni di stato della materia in Astrofisica

Tesi di Laurea

Relatore:
Chiar.mo Prof.
DANIELE DALLACASA

Presentata da:
DOMENICA VERDUCI

Sessione II
Anno Accademico 2019/2020
17 Settembre 2020

Indice

1	Equazioni e Funzioni di stato in Meccanica Statistica	3
1.1	Sistemi non degeneri	5
1.1.1	Distribuzione di Maxwell-Boltzmann	6
1.2	Sistemi degeneri	6
1.2.1	Statistica di Fermi-Dirac e Bose-Einstein	7
2	Equazioni di stato in Astrofisica	8
2.1	Gas perfetti	8
2.2	Gas degeneri	9
2.3	Pressione di radiazione	10
2.4	Diagramma densità-temperatura	10
2.5	Applicazioni astrofisiche	12
2.5.1	Il Sole	12
2.5.2	Le nane bianche	14

Introduzione

Storicamente, la Termodinamica nasce come scienza a sé stante, derivata dall'esigenza di descrivere alcune importanti proprietà dei corpi.

Mentre la Dinamica compiva i suoi passi decisivi verso un certo rigore formale con Galileo Galilei (Pisa,1564 - Arcetri,1642) e Isaac Newton (Woolsthorpe,1642 - Kensington,1727), la Termodinamica procedeva per conto proprio alla faticosa ricerca di un inquadramento logico e matematico, basato sulle evidenze sperimentali. Fu soltanto alla fine del XVIII secolo che si cominciò a liberare dell'empiricità che l'aveva caratterizzata fino ad allora, precisando innanzitutto la nozione di *stato termodinamico*, attraverso una coppia di parametri a scelta fra P, T e V, legati fra loro da una cosiddetta *Equazione di stato* (Eds). A ciò seguì la formulazione dei tre ben noti Principi che regolano le trasformazioni fra diversi stati termodinamici.

L'obiettivo della presente trattazione è quello di illustrare le Equazioni di stato della materia, in particolare inserendole in un contesto astrofisico. Quindi, nella prima sezione, si introducono le principali Equazioni e Funzioni di stato della Meccanica Statistica (1.2 – 1.6), con riferimento al limite del continuo (1.15) ed al limite termodinamico. Successivamente, si presentano le maggiori differenze fra sistemi degeneri e non degeneri e le rispettive statistiche da cui sono governati: Fermi-Dirac e Bose Einstein (1.28 – 1.31) nel primo caso e Maxwell-Boltzmann nel secondo (1.25 – 1.27). Nella successiva sezione, si prosegue addentrandosi nell'ambito più specificatamente astrofisico in cui l'elaborato si inserisce, con preciso riferimento al mondo delle stelle, interpretabili come sistemi in cui la materia si comporta come un gas perfetto (2.1) o degenere (2.11); in quest'ultimo caso è poi fondamentale la distinzione fra il regime relativistico (2.15) e non relativistico (2.13), con una diversa dipendenza della pressione dalla densità. In seguito, viene presentato il contributo apportato dai fotoni alla pressione (2.18) e nel paragrafo successivo viene introdotto il diagramma densità-temperatura, strumento di vasto impiego in ambito astronomico, che raggruppa le stelle appartenenti alla medesima fase evolutiva nella stessa regione del piano (fig.2), permettendo così di comprendere quale tipo di pressione domina nell'oggetto celeste in esame. Per concludere, vengono riportati alcuni esempi di applicazione delle formule presentate nei paragrafi precedenti, facendo riferimento anche ad esercizi di cui si sono sviluppati esplicitamente i calcoli con l'intento giungere ad importanti conclusioni astrofisiche (2.27, 2.42).

1 Equazioni e Funzioni di stato in Meccanica Statistica

Le Equazioni di stato descrivono un sistema fisico attraverso una relazione in cui le Funzioni di stato non dipendono dal tempo, ossia in condizioni di *equilibrio termodinamico*. Tale importante risultato, ottenuto per la prima volta da Boltzmann, ha consentito di collegare la Dinamica microscopica con la Termodinamica macroscopica e di sviluppare in seguito la Termodinamica Statistica.

Dunque, si consideri un sistema *microcanonico*, ossia isolato, suddiviso in N sotto-sistemi *canonici*, vale a dire interagenti tra loro solo tramite scambi di calore, distinguibili ed identici. Come conseguenza di ciò, lo spettro $\{\epsilon_\alpha, g_\alpha\}$ dell'Hamiltoniana è uguale per ogni sotto-sistema canonico. L'idea vincente di Boltzmann è quella di operare un cambio di variabile: invece di descrivere i sistemi con le coordinate nello spazio delle fasi $z_j = (p_j, q_j)$, si introducono le popolazioni $n_\alpha(t)$, che rappresentano il numero di sistemi canonici che, ad un dato istante, occupano il livello ϵ_α , a cui corrisponde una molteplicità di stati g_α .

La conservazione dell'energia totale e del numero di sotto-sistemi canonici comporta due condizioni sul vettore popolazione $\vec{n} = (n_0, n_1, \dots)$, che determinano l'insieme:

$$\Gamma = \left\{ \vec{n}; \sum_{\alpha=0}^{\infty} n_\alpha \epsilon_\alpha = E, \sum_{\alpha=0}^{\infty} n_\alpha = N \right\} \quad (1.1)$$

che equivale alla superficie del moto, nello spazio dei vettori-popolazione. Svolgendo i vari conti, si ottengono le seguenti relazioni fondamentali fra le principali funzioni di stato:

$$Z_c = \sum_{\alpha=0}^{\infty} g_\alpha e^{-\beta \epsilon_\alpha} = e^{-\beta \Phi} \quad (1.2)$$

$$E = - \left(\frac{\partial \ln Z_c}{\partial \beta} \right)_V = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \epsilon_\alpha \bar{\rho}_\alpha \quad (1.3)$$

$$S = k \ln Z_c + \frac{E}{T} = k \sum_{\alpha=0}^{\infty} \rho_\alpha \ln \left(\frac{g_\alpha}{\rho_\alpha} \right) \quad (1.4)$$

$$\Phi = E - TS = -kT \ln Z_c \quad (1.5)$$

$$P = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_T = kT \left(\frac{\partial Z_c}{\partial V} \right)_T \quad (1.6)$$

dove:

- Z_c è detta *Funzione di Partizione Canonica* e corrisponde alla somma di tutti i fattori di Boltzmann;
- $\beta = 1/kT$, con k costante di Boltzmann;
- ϵ_α è l'energia media del singolo sotto-sistema;
- E rappresenta l'energia totale del sistema;
- S è l'entropia del sistema;

- $\bar{\rho}_\alpha$ corrisponde alla probabilità che il singolo sistema occupi il livello ϵ_α ;
- Φ è l'*energia libera di Helmholtz* del sistema, utile poichè fornisce l'equazione 1.6 che lega la pressione a T e V.

Per concludere sulle proprietà generali delle funzioni di stato, si rammenta che l'energia termica dei sistemi canonici è una quantità sommabile, indipendentemente dalla distinguibilità. Invece, l'entropia è additiva solo se i sistemi sono distinguibili. Come risultato dell'equazione 1.5, si ottiene dunque che l'energia libera di Helmholtz è a sua volta additiva per sistemi canonici distinguibili:

$$\Phi^{tot} = \sum_i \Phi_i \quad (1.7)$$

$$Z_c^{tot} = \prod_i Z_i \quad (1.8)$$

$$P^{tot} = \sum_i P_i \quad (1.9)$$

Si noti che l'equazione 1.9 corrisponde alla Legge di Dalton, mentre la 1.8 stabilisce la fattorizzabilità della funzione di partizione canonica per sistemi distinguibili.

Limite del continuo Il passaggio dal discreto al continuo avviene nel limite in cui il volume di confinamento V diventa arbitrariamente grande, con le seguenti sostituzioni formali:

$$V \longrightarrow \infty \quad (1.10)$$

$$\epsilon_\alpha \longrightarrow \epsilon \quad (1.11)$$

$$g_\alpha \longrightarrow g(\epsilon)d\epsilon \quad (1.12)$$

$$\bar{\rho}_\alpha \longrightarrow \frac{g(\epsilon)e^{-\beta\epsilon}d\epsilon}{Z_c} \quad (1.13)$$

$$Z_c \longrightarrow \int e^{-\beta\epsilon}g(\epsilon)d\epsilon \quad (1.14)$$

Nel caso in cui lo spettro non tenda ad infinito, con conseguente infittimento dei livelli energetici, la condizione di validità del limite del continuo si può esprimere come:

$$\beta(\epsilon_1 - \epsilon_0) \ll 1 \quad (1.15)$$

ossia con la richiesta che il salto energetico fra il primo livello eccitato ed il livello fondamentale sia molto più piccolo dell'energia termica.

Limite termodinamico Per completezza, si ricorda che finora si è fatta l'ipotesi implicita che il sistema complessivo sia scomponibile in un numero N arbitrariamente grande di sotto-sistemi. L'utilità di questa ipotesi risiede nella possibilità di ignorare le interazioni, in quanto scambi di calore che si limitano a garantire l'ergodicità, ma non entrano nel calcolo delle funzioni termodinamiche. La coesistenza dei due limiti, $V \rightarrow \infty$ e $N \rightarrow \infty$, tale che il rapporto N/V è costante e finito, è denominato *Limite Termodinamico*.

1.1 Sistemi non degeneri

Per sistema non degeneri si intende un sistema in cui le condizioni termiche permettono di trascurare la probabilità a priori di occupazione multipla di uno stato energetico. La condizione di *non degenerazione* può essere tradotta in una relazione che deriva dalle regole del calcolo combinatorio e può essere espressa come segue:

$$\frac{\bar{n}_\alpha}{g_\alpha} \ll 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{N}{Z_c} \ll 1 \quad (1.16)$$

Uno dei più importanti esempi di sistemi non degeneri è rappresentato dai gas perfetti, sistemi costituiti da N particelle puntiformi e massive, senza campi esterni, senza struttura interna (spin o altro), libere di muoversi in una regione spaziale di volume V , che si scambiano energia solo attraverso urti, in condizione di non degenerazione.

Dal momento che ogni particella può essere considerata come un sistema canonico, segue che la funzione di partizione canonica è semplicemente:

$$Z_c^{part} = \frac{1}{h_p^3} \int e^{-\beta h(\vec{z})} d\vec{z} = \frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{h_p^3} \quad (1.17)$$

dove $h(\vec{z}) = \vec{p}^2/2m$ per una particella libera.

A questo punto è possibile definire il *parametro di degenerazione* η :

$$\eta = \frac{Nh_p^3}{V(2\pi mkT)^{3/2}} \quad (1.18)$$

Per essere in condizioni di non degenerazione deve valere $\eta \ll 1$; tale quantità si rivelerà determinante nella trattazione dei gas degeneri.

Grazie alla condizione 1.16, la funzione di partizione del sistema complessivo diventa:

$$Z_c^{gp} = \frac{1}{N!} (Z_c^{part})^N = \left[\frac{V(2\pi mkT)^{3/2} e}{Nh_p^3} \right]^N \quad (1.19)$$

Di conseguenza, le espressioni 1.3 – 1.6 per sistemi distinguibili diventano:

$$E^{gp} = \frac{3}{2} NkT \quad (1.20)$$

$$S^{gp} = Nk \ln \left[\frac{V(2\pi mkT)^{3/2} e^{5/2}}{Nh_p^3} \right] \quad (1.21)$$

$$\Phi^{gp} = -NkT \ln \left[\frac{V(2\pi mkT)^{3/2} e}{Nh_p^3} \right] \quad (1.22)$$

$$P^{gp} = \frac{NkT}{V} \quad (1.23)$$

$$\mu^{gp} = -kT \ln \left[\frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{Nh_p^3} \right] \quad (1.24)$$

La funzione di stato definita nell'ultima equazione è denominata *Potenziale chimico* e rappresenta l'energia che occorre fornire (o sottrarre) al sistema per inserirvi un nuovo sotto-sistema, mantenendo il volume e l'entropia costanti; si osservi che μ è una quantità intensiva.

La relazione 1.23 è nota come Equazione di stato dei gas perfetti, di solito nella forma $PV = nRT$, dove n è il numero di moli di gas, $R = kN_A$ è la costante dei gas e $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ è il Numero di Avogadro.

1.1.1 Distribuzione di Maxwell-Boltzmann

La *distribuzione canonica* per un gas perfetto è:

$$\rho_c(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{e^{-\beta p^2/(2m)}}{V(2\pi mkT)^{3/2}} \quad (1.25)$$

per una particella che si trova all'interno del volume V e nulla al di fuori.

Integrando sulle componenti della posizione si ottiene la distribuzione di probabilità $\rho_c(\vec{p})$ relativa all'impulso della particella. Tramite l'uguaglianza delle probabilità infinitesime $\rho_c(\vec{p})d\vec{p} = \rho_c(\vec{v})d\vec{v}$, si ricava la distribuzione delle velocità:

$$\rho_c(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\beta mv^2/2} \quad (1.26)$$

Si conclude che la distribuzione di una singola componente di velocità, in qualunque direzione spaziale, è gaussiana ed ha valor medio nullo.

Passando alle coordinate polari ed integrando su tutto l'angolo solido, si ricava la distribuzione del modulo di velocità:

$$\rho_c(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\beta mv^2/2} \quad (1.27)$$

Ora la distribuzione non è più gaussiana, come è evidente dalla figura 1, e mostra un massimo in corrispondenza di $\bar{v} = \sqrt{2kT/m}$, che corrisponde quindi al valore più probabile.

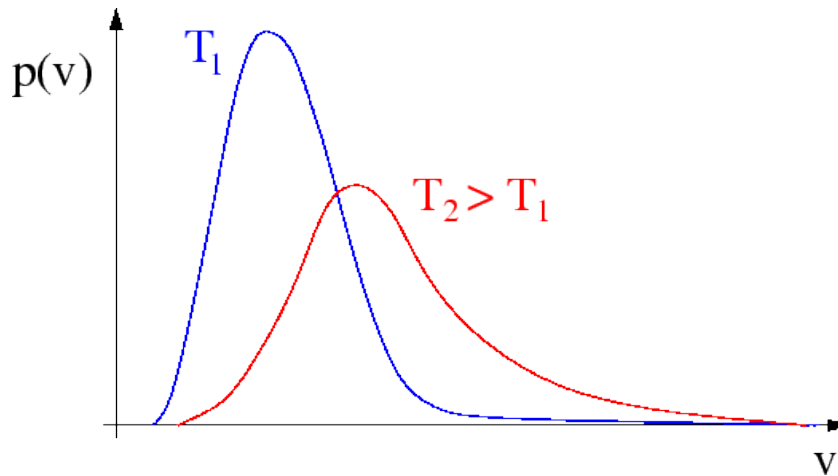


Figura 1: Distribuzione di Maxwell-Boltzmann a diverse temperature. La curva è rapidamente crescente prima del massimo, e decresce più lentamente dopo di esso. All'aumentare della T , il massimo si abbassa e tende a spostarsi verso v maggiori.

1.2 Sistemi degeneri

Un sistema degenere è formato da N particelle indistinguibili, per le quali non vale più la condizione 1.16. In questo caso, l'indistinguibilità non si traduce più in una semplice divisione per $N!$ del numero di stati distinguibili, ma richiede un conteggio; quest'ultimo dipende dalla natura delle particelle quantiche in esame, che possono essere di due tipi:

- i Bosoni hanno spin interno e possono occupare lo stesso stato energetico in numero arbitrario;
- i Fermioni sono caratterizzati da spin semi-intero e sono soggetti al *Principio di Esclusione di Pauli*.

1.2.1 Statistica di Fermi-Dirac e Bose-Einstein

La procedura per il calcolo del numero di stati dell'intero gas è frutto di alcune regole di calcolo combinatorio, che portano alle statistiche di Fermi-Dirac e Bose-Einstein:

$$W_{FD} = \prod_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g_{\alpha}!}{(g_{\alpha} - n_{\alpha})!n_{\alpha}!} \quad (1.28)$$

$$W_{BE} = \prod_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(g_{\alpha} - 1 + n_{\alpha})!}{(g_{\alpha} - 1)!n_{\alpha}!} \quad (1.29)$$

Da ciò si ottiene una nuova formulazione per le popolazioni dei livelli energetici e per l'energia libera di Helmholtz:

$$n_{\alpha}^{\pm} = \frac{g_{\alpha}}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)} \pm 1} \quad (1.30)$$

$$\Phi^{\pm} = \mu N \mp kT \sum_{\alpha=0}^{\infty} g_{\alpha} \ln [1 \pm e^{-\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)}] \quad (1.31)$$

dove si è scelta la convenzione di considerare con il segno superiore la statistica di Fermi-Dirac e con il segno inferiore quella di Bose-Einstein.

Limite del continuo Rispetto ai gas non degeneri, in questo caso bisogna considerare anche i gradi di libertà interni, identificati da $\vec{\xi}$, da cui possono dipendere i livelli energetici. Ciò conduce alle seguenti sostituzioni:

$$\epsilon_{\alpha} \longrightarrow \epsilon + \epsilon_{\vec{\xi}} \quad (1.32)$$

$$g_{\alpha} \longrightarrow g_{\vec{\xi}} g(\epsilon) d\epsilon \quad (1.33)$$

$$n_{\alpha} \longrightarrow n^{\pm}(\epsilon, \vec{\xi}) d\epsilon \quad (1.34)$$

che permettono di riscrivere le relazioni 1.30 ed 1.31 come segue:

$$n^{\pm}(\epsilon, \vec{\xi}) = g_{\vec{\xi}} \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon + \epsilon_{\vec{\xi}} - \mu)} \pm 1} \quad (1.35)$$

$$\Phi^{\pm} = \mu N \mp kT \sum_{\vec{\xi}} g_{\vec{\xi}} \int g(\epsilon) d\epsilon \ln [1 \pm e^{-\beta(\epsilon + \epsilon_{\vec{\xi}} - \mu)}] \quad (1.36)$$

In alternativa alle equazioni appena presentate, si può osservare che il limite del continuo induce a considerare direttamente $d\vec{p}d\vec{r}/h_p^3$ come numero di stati semi-classici della singola particella, nel volume $d\vec{p}d\vec{r}$ attorno a un qualunque punto dello spazio delle fasi. Ciò permette di riscrivere le relazioni in forma più generale:

$$\epsilon_{\alpha} \longrightarrow \epsilon + \epsilon_{\vec{\xi}} \quad (1.37)$$

Si procede in modo analogo per le equazioni 1.33 – 1.36.

2 Equazioni di stato in Astrofisica

Il gas che compone una stella è un plasma di ioni ed elettroni. Infatti, le alte temperature fanno sì che il gas sia ionizzato e dunque gli elettroni fuoriescano dai nuclei. Andando verso il centro della stella, la temperatura aumenta, come anche la percentuale di gas ionizzato. In generale, il gas può comportarsi come perfetto o degenerare e di conseguenza si avranno Equazioni di stato diverse che verranno analizzate a seguire. In aggiunta alla pressione del gas, bisogna tenere conto anche della pressione di radiazione esercitata dai fotoni, che però risulta trascurabile negli interni stellari, ma non nelle atmosfere.

2.1 Gas perfetti

L'Equazione di stato dei gas perfetti è indicata in una delle sue possibili espressioni nella relazione 1.23. Quest'ultima può essere divisa e moltiplicata per una massa media $\bar{m} = \mu H$, dove μ è il peso molecolare medio ed H è la massa del nucleo di idrogeno. Osservando che $N\bar{m} = M$ è la massa totale del gas ed $M/V = \rho$ è la densità, si ottiene:

$$P = \rho \frac{kT}{\mu H} \quad (2.1)$$

A questo punto, si vuole esprimere il peso molecolare medio μ in termini delle abbondanze chimiche in massa di idrogeno (X), elio (Y) e metalli (Z):

$$\mu H = \frac{\sum_i N_i m_i}{\sum_i N_i} \quad (2.2)$$

in cui con N_i si indica il numero di atomi dell'elemento i -esimo e con m_i la corrispondente massa, che può essere riscritta come $m_i = A_i H$, con A_i peso atomico.

Di conseguenza, nel caso di neutralità totale, cioè se tutti gli elettroni sono legati ai rispettivi nuclei, si ottiene:

$$\mu = \frac{\sum_i N_i A_i}{\sum_i N_i} \quad (2.3)$$

Nel caso opposto, vale a dire di ionizzazione totale, occorre dividere per $1 + Z_i$, dove Z_i è il numero atomico. Infatti, per ogni atomo si avranno Z_i elettroni ed un nucleo, in seguito alla ionizzazione. Ne segue che l'equazione 2.3 diventa ora:

$$\mu = \frac{\sum_i N_i A_i}{\sum_i N_i (1 + Z_i)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 \frac{X_i (1 + Z_i)}{A_i}} \quad (2.4)$$

dove con X_i si denota l'abbondanza in massa dell'elemento i -esimo. Il passo successivo consiste nel calcolare i vari contributi alla sommatoria:

- $i = 1$, idrogeno: $Z = 1, A = 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{\frac{1}{1} + 1} = \frac{1}{2X}$
- $i = 2$, elio: $Z = 2, A = 4 \Rightarrow \mu = \frac{1}{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{\frac{3}{4}Y}$
- $i = 3$, metalli: $Z > 2, A \simeq 2Z \Rightarrow \mu = \frac{1}{\frac{1}{2Z} + Z} \simeq \frac{1}{\frac{1}{2}Z}$

In conclusione, si ricava:

$$\mu_{ioni} = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z} \quad (2.5)$$

2.2 Gas degeneri

Dalla condizione 1.18 è evidente che le particelle più leggere, come gli elettroni, entrano in regime degenero con maggiore facilità rispetto agli ioni, che possono essere considerati con buona approssimazione come un gas perfetto. A ciò si aggiunge il fatto che poiché gli elettroni sono fermioni, obbediscono al Principio di Esclusione di Pauli, perciò, aumentando il numero di particelle, queste andranno ad occupare tutti i livelli energetici fino ad livello massimo E_F , detto energia di Fermi. Dal momento che era la temperatura a definire lo stato più popolato, secondo la relazione $\bar{v} = \sqrt{2kT/m}$, si intuisce che l'ingresso nel regime degenero cancellerà la dipendenza dalla temperatura, come dimostrato successivamente.

Da considerazioni geometriche, si ottiene la seguente relazione:

$$P = \frac{1}{3}m \int_0^\infty N(v)v^2 dv \quad (2.6)$$

Applicando poi la semplice uguaglianza:

$$\int_0^\infty N(v)dv = \int_0^\infty N(p)dp \quad (2.7)$$

si può riscrivere la 2.6 in funzione della quantità di moto come segue:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty N(p)pvd p \quad (2.8)$$

Il numero di elettroni con impulso compreso fra p e $p + dp$ in un dato volume V è pari a:

$$n(p)dp = \frac{2}{h_p^3} dp_x dp_y dp_z = \frac{8}{h_p^3} \pi p^2 dp \quad (2.9)$$

Per ottenere il numero totale di particelle basta integrare sull'impulso da 0 all'impulso massimo p_F :

$$N_e = \int_0^{p_F} \frac{8\pi}{h_p^3} p^2 dp = \frac{8\pi}{3h_p^3} p_F^3 \quad (2.10)$$

Ma il numero di elettroni per unità di volume è anche dato da $N_e = \rho_e/(\mu_e H)$, ripetendo considerazioni analoghe a quelle fatte per il peso molecolare medio degli ioni e sostituendo nella 2.10, si ricava il momento di Fermi:

$$p_F = \sqrt[3]{\frac{3h_p^3}{8\pi\mu_e H} \rho}^{1/3} \quad (2.11)$$

Caso degenero non relativistico

In questo caso $p = mv$ e, sostituendo la 2.9 nella 2.8, si ricava:

$$P = \frac{8\pi}{3h_p^3 m} \int_0^{p_F} p^4 dp = \frac{8\pi}{3h_p^3 m} \frac{p_F^5}{5} \quad (2.12)$$

Inoltre, ricordando l'espressione dell'impulso di Fermi 2.11, si ottiene:

$$P = K_1 \rho^{5/3} \quad \text{dove} \quad K_1 = 10^{13} \mu_e^{-5/3} \quad (2.13)$$

Caso degenerare relativistico

In regime relativistico, bisogna considerare che il momento è ora dato da $p = \gamma mv$; omettendo i calcoli espliciti, il risultato finale è:

$$P = \frac{2\pi c}{3h_p^3} p_F^4 \quad (2.14)$$

Infine, sostituendo nuovamente l'impulso di Fermi, si arriva alla seguente conclusione:

$$P = K_2 \rho^{4/3} \quad \text{dove} \quad K_2 = 1.2 \times 10^{15} \mu_e^{-4/3} \quad (2.15)$$

Osservazioni

Come previsto all'inizio del paragrafo 2.2, in regime degenerare la pressione non dipende più dalla temperatura, bensì solo dalla densità. Inoltre, a parità di densità, un gas degenerare esercita una pressione notevolmente maggiore di un gas perfetto.

2.3 Pressione di radiazione

Come già accennato, occorre considerare anche il contributo dei fotoni, ovvero bosoni senza massa. In virtù dell'equazione 1.36 e sfruttando l'equivalenza fra un sistema di oscillatori armonici (distinguibili e quantizzati) ed un gas di bosoni senza massa, l'energia libera di Helmholtz per un sistema di fotoni è data da:

$$\Phi = kT \int_0^\infty g_{osc}(\nu) d\nu \ln(1 - e^{-\beta h\nu}) \quad (2.16)$$

in cui $g_{osc}(\nu)$ rappresenta il numero di oscillatori armonici di frequenza compresa fra ν e $\nu + d\nu$; tale risultato si ottiene considerando il numero di onde stazionarie risonanti in una cavità di volume V . Di conseguenza:

$$\Phi = \frac{8\pi V kT}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 d\nu \ln(1 - e^{-\beta h\nu}) = -\frac{8\pi^5 (kT)^4 V}{45c^3 h_p^3} \quad (2.17)$$

Ricordando ora la relazione 1.6, si ricava la pressione di radiazione:

$$P = \frac{8\pi^5 (kT)^4}{45c^3 h_p^3} = \frac{a}{3} T^4 \quad \text{con} \quad a = 7.6 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4} \quad (2.18)$$

Risulta evidente che si tratta di una pressione fortemente dipendente dalla temperatura, che diventa dominante a basse densità ed alte temperature.

2.4 Diagramma densità-temperatura

Il diagramma $\log \rho - \log T$ mostrato in figura 2 permette, dato un valore di densità e temperatura, di comprendere in quale stato si trova il gas e che tipo di pressione esso esercita.

Nel piano si distinguono due macro-regioni, separate dalla retta nera, in cui dominano

rispettivamente la pressione del gas e quella di radiazione. La prima porzione è poi suddivisa in tre sotto-regioni, a seconda che il regime sia non degenere, degenere relativistico e infine degenere non relativistico.

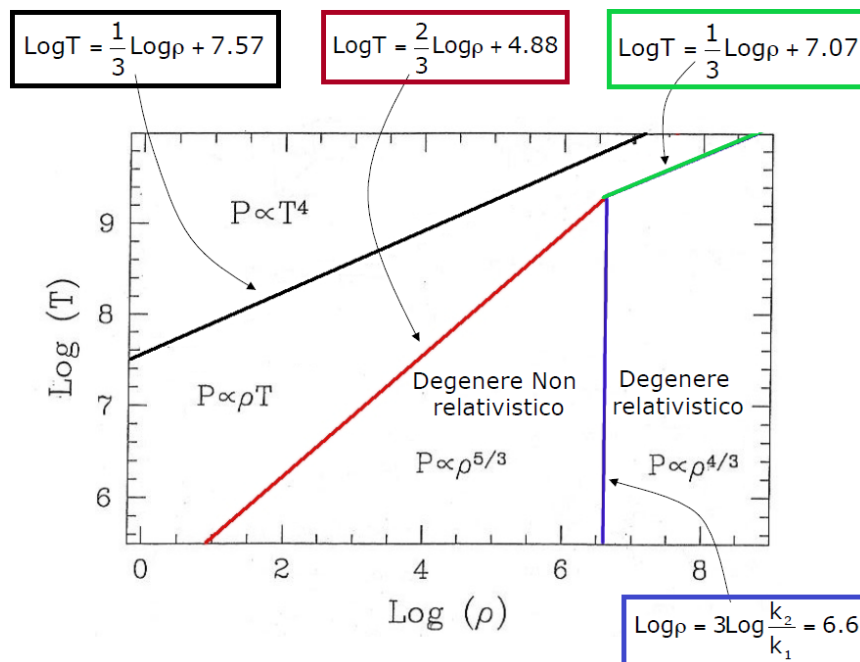


Figura 2: Diagramma densità-temperatura.

Le stelle di sequenza principale (MS) si collocano nello stretto corridoio dei gas perfetti (valori di T e ρ bassi); per esempio il Sole si colloca nel punto (2,7) del piano ed è dunque dominato dalla pressione di gas perfetto, come verificato di seguito. I nuclei delle giganti rosse si posizionano a cavallo della condizione di degenerazione: quelle con massa maggiore nella regione di gas perfetto, quelle con massa inferiore nella zona di degenerazione; infine le nane bianche nell'angolo in basso a destra (densità elevata e temperature basse), tra il regime degenere e degenere relativistico.

Conclusioni

Riassumendo, in forma generale, la pressione può essere scritta come:

$$P = P_{rad} + P_{ioni} + P_{el} \quad (2.19)$$

dove:

- P_{rad} è la pressione esercitata dai fotoni;
- P_{ioni} è la pressione degli ioni, che si comportano sempre come un gas perfetto;
- P_{el} è la pressione esercitata dagli elettroni, che possono comportarsi come un gas perfetto o degenere, relativistico o non.

$$P = \frac{aT^4}{3} + \frac{k\rho T}{\mu_{ioni}H} + \begin{cases} \frac{k\rho T}{\mu_{el}H} & \text{Gas non degenere} \\ K_1\rho^{5/3} & \text{Gas degenere non relativistico} \\ K_2\rho^{4/3} & \text{Gas degenere relativistico} \end{cases}$$

2.5 Applicazioni astrofisiche

In quest'ultimo paragrafo si riassumono alcuni esempi di applicazione delle formule finora presentate; in particolare, si prendono in esame due casi: in rappresentanza dei sistemi non degeneri il Sole, stella da sempre più studiata ed osservata dall'uomo, e le nane bianche, come oggetti degeneri per antonomasia. In riferimento a ciò, vengono presentati di seguito alcuni semplici calcoli, con l'intento di confermare quanto visto nella teoria precedente.

2.5.1 Il Sole

La condizione di equilibrio idrostatico, secondo la quale la risultante di tutte le forze agenti su un elemento di materia è nulla, può essere scritta come segue:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) \quad (2.20)$$

Quest'ultima condizione può essere sfruttata per calcolare una stima della pressione ad un raggio ad $R_\odot/2$:

$$\int_{P_{R/2}}^{P_R} dP = -G \int_{R/2}^R \frac{M(r)}{r^2} dr \quad (2.21)$$

Assumendo che la pressione sulla superficie sia nulla, sostituendo l'espressione esplicita per la massa M e considerando la densità come costante, si conclude che:

$$P_{R/2} = \frac{1}{2}\pi G\bar{\rho}R^2 \quad (2.22)$$

Il calcolo della densità media del Sole è dato da:

$$\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \simeq 1.4 \text{ g cm}^{-3} \quad (2.23)$$

Di conseguenza, sostituendo il risultato appena ottenuto nella 2.20, si ricava che:

$$P_{R/2} \simeq 10^{15} \text{ dyne cm}^{-2} = 10^9 \text{ atm} \quad (2.24)$$

Ricordando ora la relazione 2.1 ed inserendo i valori ricavati, si può fare una stima della temperatura del Sole a metà del raggio:

$$T_{R/2} = \frac{\mu H P_{R/2}}{k\bar{\rho}} \simeq 5 \times 10^6 \text{ K} \quad (2.25)$$

dove il peso molecolare medio del Sole risulta $\mu = 0.6$. Da ciò si può osservare che il risultato ottenuto corrisponde alle temperature tipiche degli interni stellari, dell'ordine di decine di milioni di gradi Kelvin e che a questa temperatura quasi tutti gli elettroni sono ionizzati.

Si può poi procedere con il calcolo del contributo della pressione di radiazione a $r = R_\odot/2$, sulla base dell'equazione 2.17:

$$P_{rad} = \frac{aT^4}{3} \simeq 1.6 \times 10^{12} \text{ dyne cm}^{-2} \quad (2.26)$$

Di conseguenza all'interno del Sole la pressione esercitata dai fotoni ha un effetto trascurabile:

$$\left| \frac{P_{rad}}{P_{gas}} \right| = \frac{1.6 \times 10^{12}}{10^{15}} = 10^{-3} \quad (2.27)$$

Un altro esercizio molto utile ed istruttivo riguarda l'evoluzione del Sole, che viene mostrata schematicamente in figura 3. Al momento della sua formazione, l'astro aveva un'abbondanza in massa pari a: $X = 0.70$, $Y = 0.28$ e $Z = 0.02$; di conseguenza, $\mu = 0.62$. Assumendo che il nucleo avesse una temperatura di $10^7 K$ ed una densità pari a $160 g (cm)^{-3}$, si calcolano di seguito i contributi della pressione di radiazione e del gas:

$$P_{rad} = \frac{aT^4}{3} \simeq 2.5 \times 10^{13} \text{ dyne cm}^{-2} \quad \text{e} \quad P_{gas} = \frac{k\rho T}{\mu H} \simeq 2.13 \times 10^{17} \text{ dyne cm}^{-2} \quad (2.28)$$

Risulta evidente che anche in passato il contributo della pressione del gas fosse dominante. Per via del bruciamento nucleare in corso, al tempo attuale $X = 0.40$, $Y = 0.58$. Il nuovo valore di μ è chiaramente aumentato e vale ora 0.8. Siccome la temperatura non è cambiata in maniera significativa, la pressione di radiazione è rimasta inalterata, mentre la nuova pressione del gas è pari a $2.13 \times 10^{17} \text{ dyne cm}^{-2}$.

Infine, al termine della sua evoluzione il Sole diventerà una nana bianca di carbonio ed ossigeno, con raggio dell'ordine di $6.5 \times 10^8 \text{ cm}$. A questo punto, ci si interroga per l'ultima volta su quale sarà il contributo di pressione maggiore. Anzitutto si deve calcolare il nuovo valore di densità: $\bar{\rho} \simeq 1.74 \times 10^6 \text{ g cm}^{-3}$. Per valutare il tipo di pressione dominante, si fa riferimento al grafico $\log \rho - \log T$ ed in particolare alla condizione di degenerazione, evidenziata nella retta rossa della figura 2. In questo caso si ottiene:

$$\log 10^7 < \frac{2}{3} \log (1.74 \times 10^6) + 4.88 \quad (2.29)$$

Di conseguenza, si conclude che il Sole sarà rappresentato nel piano da un puntino collocato al di sotto della linea di degenerazione e pertanto il gas sarà ancora degenerare non relativistico.

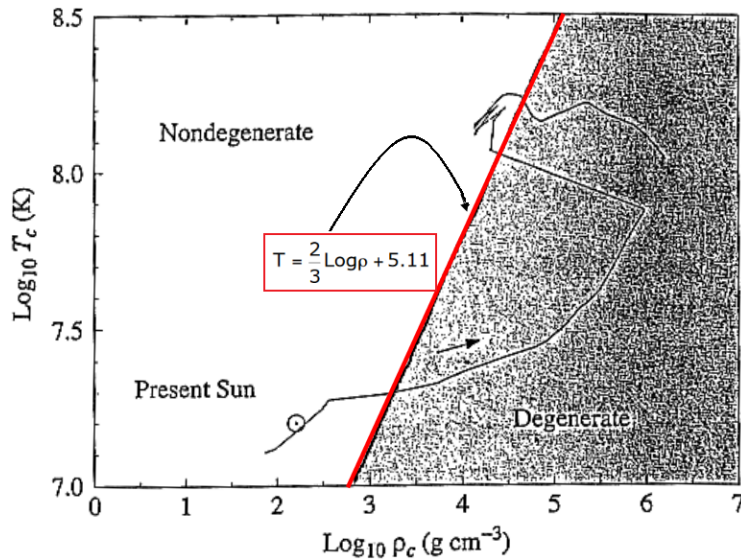


Figura 3: Diagramma densità-temperatura per il Sole.

2.5.2 Le nane bianche

Si tratta di una classe di stelle piuttosto particolari perchè caratterizzate da una massa simile a quella del Sole e dimensioni dell'ordine del pianeta Terra. Le nane bianche possono essere considerate a tutti gli effetti come dei sistemi completamente degeneri, anche se presentano degli strati superficiali in condizioni non degeneri, che però hanno dimensioni trascurabili rispetto al volume totale. Nelle nane bianche è possibile distinguere due contributi dominanti per la pressione interna, quella gravitazionale (negativa) e quella elettronica (positiva). La condizione di equilibrio si verifica per $P_{gr} + P_{el} = 0$.

Pressione elettronica

Il numero di elettroni in un volume V può essere calcolato come:

$$N_{el} = \frac{2}{h_p^3} \int_{|\vec{p}| < p_F} d\vec{p} d\vec{r} = \frac{8\pi V p_F^3}{3h_p^3} \quad (2.30)$$

da cui si ricava l'espressione dell'impulso di Fermi:

$$p_F = h_p \left(\frac{3N_{el}}{8\pi V} \right)^{1/3} \quad (2.31)$$

Il livello di Fermi $\epsilon(p_F) = \sqrt{m^2 c^4 + p_F^2 c^2} - mc^2$ può essere riscritto in due casi limite:

- regime ultra relativistico: $p_F \gg mc \Rightarrow \epsilon(p_F) = p_F c$;
- regime non relativistico: $p_F \ll mc \Rightarrow \epsilon(p_F) = \frac{p_F^2}{2m}$.

Dal momento che il gas di elettroni è molto degenere, è possibile semplificare i calcoli, immaginando di essere a $0 K$. Ne segue che:

$$\Phi_{el}(0) = E_{el}(0) = \frac{2}{h_p^3} \int_{|\vec{p}| < p_F} \epsilon(p) d\vec{p} d\vec{r} \quad (2.32)$$

Infine, in virtù della 1.6, la pressione elettronica diventa:

$$P_{el} = - \left(\frac{\partial \Phi_{el}}{\partial V} \right) = - \left(\frac{\partial E_{el}(0)}{\partial V} \right) \quad (2.33)$$

Si analizza dapprima il regime non relativistico, per il quale la 2.28 diviene:

$$E_{el}^{n.r.} = \frac{2}{h_p^3} \int_{|\vec{p}| < p_F} \epsilon(p) d\vec{p} d\vec{r} = \frac{8\pi V}{h_p^3} \int_{|\vec{p}| < p_F} \frac{p^4}{2m} dp = \frac{4\pi V p_F^5}{5m h_p^3} \quad (2.34)$$

Sostituendo il valore appena ottenuto nella 2.29, si conclude che:

$$P_{el}^{n.r.} = \frac{8\pi p_F^5}{15m h_p^3} \propto \rho^{5/3} \propto \frac{1}{R^5} \quad (2.35)$$

Si ripetono poi gli stessi calcoli per il regime ultra relativistico, ricavando:

$$E_{el}^{u.r.} = \frac{8\pi cV}{h_p^3} \int_0^{p_F} p^3 dp = \frac{2\pi cV p_F^4}{h_p^3} \quad (2.36)$$

$$P_{el}^{u.r.} = \frac{2\pi c p_F^4}{3h_p^3} \propto \rho^{4/3} \propto \frac{1}{R^4} \quad (2.37)$$

Pressione gravitazionale

Si consideri una nana bianca di raggio R , massa M_{tot} e densità ρ_M . Come prima cosa, si calcola l'energia potenziale esercitata da una sfera di raggio r su un guscio sferico di spessore dr :

$$dU = -\frac{M(r)dmG}{r} = -\frac{3GM_{tot}^2 r^4 dr}{R^6} \quad (2.38)$$

dove:

$$\begin{cases} M(r) = M_{tot} \frac{r^3}{R^3} \\ dm = 4\pi r^2 dr \rho_M \\ \rho_M = \frac{M_{tot}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \end{cases}$$

Integrando su tutta la sfera da 0 ad R , si ottiene:

$$U(R) = -\frac{3GM_{tot}^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = -\frac{3GM_{tot}^2}{5R} \quad (2.39)$$

Di conseguenza la forza esercitata sul guscio esterno è data da:

$$F_{gr} = -\frac{dU}{dR} = -\frac{3GM_{tot}^2}{5R^2} \quad (2.40)$$

Infine, la pressione gravitazionale si ricava semplicemente dividendo per la superficie:

$$P_{gr} = \frac{F_{gr}}{4\pi R^2} = -\frac{3GM_{tot}^2}{20\pi R^4} \quad (2.41)$$

Confronto

L'ultimo passo consiste nel confronto tra i due valori di pressione ottenuti:

$$\left| \frac{P_{el}}{P_{gr}} \right| > 1 \Rightarrow \text{espansione}; \quad \left| \frac{P_{el}}{P_{gr}} \right| < 1 \Rightarrow \text{collasso} \quad (2.42)$$

Uno degli aspetti più interessanti legati alle nane bianche è l'esistenza di una massa limite, detta di Chandrasekhar, dal nome del fisico indiano che a soli 21 anni ne annunciò la scoperta. Nel caso non relativistico, la pressione elettronica e la pressione gravitazionale dipendono da potenze diverse del raggio (rispettivamente R^{-5} ed R^{-4}), mentre nel regime relativistico le due pressioni dipendono allo stesso modo dal raggio (R^{-4}). In questo contesto, la massa di Chandrasekhar rappresenta il valore della massa per cui le due pressioni sono esattamente all'equilibrio. Per masse superiori alla massa limite, la pressione gravitazionale vincerà sempre sulla pressione elettronica e dunque la stella non si troverà mai all'equilibrio, a meno che non perda massa. Invece, se la massa è inferiore al limite, la stella si espanderà, diminuendo progressivamente la propria densità, passando dal caso relativistico a quello non relativistico. A questo punto, la pressione elettronica diminuisce più velocemente di quella gravitazionale e si può raggiungere una condizione di equilibrio per la stella.

Riferimenti bibliografici

- M. Balboni. Equazioni di stato della materia in astrofisica. Corso di Laurea in Astronomia. Università di Bologna. 2019.
- C. Chiosi. Struttura ed evoluzione delle stelle. Dispense. Università di Padova.
- L. Ferrari. Elementi di termodinamica statistica. Dispense. Università di Bologna. 2019.
- F. R. Ferraro. Astrofisica stellare. Dispense. Università di Bologna. 2018.
- G. Nazareno. Nane bianche e limite di Chandrasekhar. Corso di Laurea in Fisica. Università di Bologna. 2020.