

Nicht-Markovsche Dynamik, Dekohärenz und Verschränkung in dissipativen Quantensystemen

mit Anwendung in der Quanteninformationstheorie
von Systemen kontinuierlicher Variablen

von der Universität Bayreuth
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

von

CHRISTIAN HÖRHAMMER

geboren in Fürth, Bayern

1. Gutachter: Prof. Dr. Helmut Büttner
2. Gutachter: Prof. Dr. Stephan Kümmel

Tag der Einreichung: 23.07.2007

Tag des Kolloquiums: 26.11.2007

Kurzfassung

Nicht-Markovsche Dynamik, Dekohärenz und Verschränkung in dissipativen Quantensystemen

mit Anwendung in der Quanteninformationstheorie von Systemen kontinuierlicher Variablen

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der nicht-Markovschen Dynamik, Dekohärenz und Verschränkung in dissipativen Quantensystemen und deren Anwendung in der Quanteninformationstheorie von Systemen kontinuierlicher Variablen. Die Grundlage zur Beschreibung der nicht-Markovschen Dynamik bildet die Hu-Paz-Zhang Mastergleichung der quantenmechanischen Brownschen Bewegung. Es werden nicht-Markovsche Effekte auf die Dekohärenz- und Separabilitätszeiten von Ein- und Zwei-Moden-Zuständen untersucht. Dabei kann festgestellt werden, dass moderate nicht-Markovsche Einflüsse einen langsameren Verlust der Interferenzfähigkeit und Quantenkorrelationen bewirken, während die starken nicht-Markovschen Effekte eines Out-of-Resonance Bades die Dekohärenz beschleunigen können, im Vergleich zu den Vorhersagen aus Markovschen Näherungen. Unterschiedliche Szenarien werden untersucht, in denen die Dekohärenzfunktion exponentiell, gaußförmig oder algebraisch abfallen kann. Es wird gezeigt, dass eine partielle periodische Wiederkehr der Kohärenzeigenschaften auftreten kann, wenn die Mastergleichung der zugrundeliegenden Dynamik nicht vom Lindblad Typ ist.

Die zeitliche Entwicklung der Korrelationen von verschränkten Zwei-Moden-Zuständen wird in Ein- und Zwei-Reservoir-Modellen untersucht, die als verrauschte korrelierte bzw. unkorrelierte nicht-Markovsche Quantenkanäle interpretiert werden können. Dazu wird das Modell der quantenmechanischen Brownschen Bewegung entsprechend erweitert. Verschiedene Separabilitätskriterien für Gaußsche und nicht-Gaußsche Systeme kontinuierlicher Variablen werden angewandt. In beiden Reservoir-Modellen führen moderat nicht-Markovsche Einflüsse zu einer Verlängerung der Separabilitätszeiten. Allerdings kann der stationäre Zustand in beiden Modellen unterschiedlich sein. Im Zwei-Reservoir-Modell gehen anfängliche Quantenkorrelationen vollständig verloren und die beiden Moden sind im stationären Zustand unkorreliert. In einem gemeinsamen Reservoir wechselwirken die beiden Moden indirekt über die Kopplung an die gleichen Badfreiheitsgrade miteinander. Dadurch können neue Quantenkorrelationen zwischen den beiden Moden entstehen. Unterhalb einer kritischen Badtemperatur bleibt diese Verschränkung auch im stationären Zustand bestehen. Es wird ein Kriterium für das Vorliegen stationärer Quantenkorrelationen hergeleitet, das die Badtemperatur und die Response-Funktion des offenen Quantensystems als relevante Größen beinhaltet. Das erweiterte Modell der quantenmechanischen Brownschen Bewegung zweier Moden in einem gemeinsamen Reservoir kann als Beispiel für eine durch Quantenrauschen induzierte Verschränkung in Zwei-Moden-Systemen aufgefasst werden.

Abstract

Non-Markovian dynamics, decoherence and entanglement in dissipative quantum systems

with applications to quantum information theory
of continuous variable systems

In this thesis, non-Markovian dynamics, decoherence and entanglement in dissipative quantum systems are studied. In particular, applications to quantum information theory of continuous variable systems are considered. The non-Markovian dynamics are described by the Hu-Paz-Zhang master equation of quantum Brownian motion. In this context the focus is on non-Markovian effects on decoherence and separability time scales of various single-mode and two-mode continuous variable states. It is verified that moderate non-Markovian influences slow down the decay of interference fringes and quantum correlations, while strong non-Markovian effects resulting from an out-of-resonance bath can even accelerate the loss of coherence, compared to predictions of Markovian approximations. Qualitatively different scenarios including exponential, Gaussian or algebraic decay of the decoherence function are analyzed. It is shown that partial recurrence of coherence can occur in case of non-Lindblad-type dynamics.

The time evolution of quantum correlations of entangled two-mode continuous variable states is examined in single-reservoir and two-reservoir models, representing noisy correlated or uncorrelated non-Markovian quantum channels. For this purpose the model of quantum Brownian motion is extended. Various separability criteria for Gaussian and non-Gaussian continuous variable systems are applied. In both types of reservoir models moderate non-Markovian effects prolong the separability time scales. However, in these models the properties of the stationary state may differ. In the two-reservoir model the initial entanglement is completely lost and both modes are finally uncorrelated. In a common reservoir both modes interact indirectly via the coupling to the same bath variables. Therefore, new quantum correlations may emerge between the two modes. Below a critical bath temperature entanglement is preserved even in the steady state. A separability criterion is derived, which depends on the bath temperature and the response function of the open quantum system. Thus, the extended quantum Brownian motion model of a two-mode continuous variable system in a common reservoir provides an example of quantum noise-induced entanglement.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	vi
1 Einleitung	1
2 Grundlagen dissipativer Quantendynamik	7
2.1 Überblick über die Theorie offener Quantensysteme	8
2.2 Quantenoptische Mastergleichungen	8
2.2.1 Born-Markov- und Rotating-Wave-Approximation	8
2.2.1.1 Born-Näherung	9
2.2.1.2 Markov-Näherung	9
2.2.1.3 Rotating-Wave-Approximation (Drehwellen-Näherung)	10
2.2.2 Mastergleichung des Harmonischen Quanten-Oszillators	10
2.2.3 Mastergleichung des Zwei-Niveau-Systems	11
2.3 Lindblad-Theorie und dynamische Halbgruppen	12
2.4 Markovsche und nicht-Markovsche Prozesse	14
3 Quantenmechanische Brownsche Bewegung (QBM)	17
3.1 Caldeira-Leggett Modell	18
3.1.1 Hamilton-Operator des Modells	18
3.1.2 Quantenmechanische Langevin-Gleichung	19
3.1.3 Quantenmechanisches Rauschen und Dissipation	21
3.2 Pfadintegralformalismus im Caldeira-Leggett-Modell	24
3.2.1 Grundlagen des Pfadintegralformalismus	24
3.2.2 Imaginärzeit-Pfadintegrale und Quanten-Statistik	25
3.2.3 Pfadintegrale für dissipative Quantensysteme	27
3.2.3.1 Effektive Wirkung und Einfluss-Funktional	27

3.2.3.2	Realzeit-Pfadintegrale und Phasenkohärenzverlust	29
3.2.3.3	Pfadintegralformalismus und Mastergleichungen	31
3.3	Exakte Mastergleichung für das Caldeira-Leggett-Modell	31
3.3.1	Die Hu-Paz-Zhang-Mastergleichung	31
3.3.1.1	HPZ-Koeffizienten für einen anfänglichen Produktzustand . .	32
3.3.1.2	Thermischer Anfangszustand	34
3.3.1.3	Generalisierte Fokker-Planck Gleichung des QBM-Modells . .	35
3.3.2	Lösung der HPZ-Mastergleichung	36
3.3.3	Grenzfälle der HPZ-Mastergleichung	37
3.3.3.1	Caldeira-Leggett Mastergleichung	37
3.3.3.2	Lindblad-Mastergleichung für das QBM-Modell	38
3.3.3.3	Weak-Coupling Approximation	39
3.3.4	Charakteristische Zeitskalen der Quanten-Brownschen Bewegung . . .	40
3.4	Zusammenfassung von Kapitel 3	41
4	Thermodynamik offener Quantensysteme am Beispiel des QBM-Modells	43
4.1	Zustandssumme und thermodynamische Entropie	44
4.2	Reduzierte Dichtematrix und von Neumann Entropie	45
4.3	Diskussion der thermodynamischen Größen	49
4.3.1	Vergleich von thermodynamischer und statistischer Entropie	49
4.3.2	Thermodynamische Kreisprozesse	51
4.3.3	Wärmefluss und Entropieänderung	52
4.4	Betrachtung im informationstheoretischen Kontext	53
4.5	Zusammenfassung von Kapitel 4	55
5	Systeme kontinuierlicher Variablen (CV-Systeme)	57
5.1	Gaußsche Zustände	58
5.1.1	Charakterisierung von Gaußschen N-Moden-Zuständen	58
5.1.2	Beispiele für Gaußsche Ein- und Zwei-Moden-Zustände	59
5.1.2.1	Kohärente Zustände (Glauber Zustände)	59
5.1.2.2	Gequetschte kohärente Zustände	60
5.1.2.3	Gaußsche Zwei-Moden-Zustände	61
5.1.2.4	Gekoppelte Zwei-Moden-Zustände	63

5.1.3	Dynamik Gaußscher Zustände	64
5.1.3.1	Markovsche Evolution Gaußscher Zustände	64
5.1.3.2	Nicht-Markovsche Evolution Gaußscher Zustände	65
5.1.3.3	Dynamik bei starker System-Bad-Wechselwirkung	67
5.2	Nicht-Gaußsche Zustände	69
5.2.1	Fock-Zustände des harmonischen Oszillators	69
5.2.2	Cat-State-Superpositionen	70
5.2.2.1	Superpositionen von Fockzuständen	70
5.2.2.2	Superpositionen kohärenter Ein-Moden-Zustände	71
5.2.2.3	Superpositionen verschränkter Zwei-Moden-Zustände	73
5.2.3	Dynamik nicht-Gaußscher Zustände	74
5.2.3.1	Markovsche Evolution nicht-Gaußscher Zustände	74
5.2.3.2	Nicht-Markovsche Evolution nicht-Gaußscher Zustände	76
5.2.3.3	Dynamik bei starker System-Bad-Wechselwirkung	76
5.3	Zusammenfassung von Kapitel 5	78
6	Dekohärenz von CV-Systemen im QBM-Modell	79
6.1	Definition von Dekohärenz	80
6.1.1	Dekohärenz versus Dissipation	80
6.1.2	Dekohärenzmaße in unterschiedlichen Basisdarstellungen	81
6.1.2.1	Dekohärenz in der Phasenraumdarstellung	81
6.1.2.2	Dekohärenz in der Orts- und Impulsdarstellung	82
6.1.2.3	Dekohärenz in der Fockraumdarstellung	83
6.1.3	Charakteristische Zeitskalen	84
6.2	Universelle Charakteristika von Dekohärenz	85
6.2.1	Dekohärenzzeitkalen in unterschiedlichen Regimen	85
6.2.2	Einfluss des Bades in Form der spektralen Dichte	86
6.3	Systemspezifische Eigenschaften der Dekohärenzfunktion	87
6.3.1	Dekohärenz makroskopischer Superposition	87
6.3.1.1	Hochtemperatur-Umgebung	89
6.3.1.2	Niedrigtemperatur-Umgebung	89
6.3.1.3	Nicht-Markovsche Einflüsse	90

6.3.1.4	Rekurrenzverhalten im Out-of-Resonance Regime	91
6.3.1.5	Vergleich der unterschiedlichen Dekohärenzmaße	92
6.3.1.6	Dekohärenz ohne Dissipation im QBM-Modell?	95
6.3.2	Dekohärenz mikroskopischer Superpositionen	96
6.3.2.1	Effektives Zwei-Niveau-System versus Qubit-Dekohärenz . .	97
6.3.2.2	Mikroskopischer versus makroskopischer Cat-State	99
6.4	Zusammenfassung von Kapitel 6	101
7	Verschränkung von CV-Systemen im QBM-Modell	103
7.1	Definition von Verschränkung kontinuierlicher Systeme	104
7.1.1	Verschränkung bei Gaußschen Zwei-Moden-Zuständen	104
7.1.1.1	Charakterisierung durch symplektische Invarianten	104
7.1.1.2	PPT-Inseparabilitätskriterium für Gaußsche CV-Systeme . .	105
7.1.1.3	Standardformen der Kovarianzmatrix	106
7.1.1.4	EPR-Separabilitätskriterium	106
7.1.1.5	Separabilitätskriterium auf Basis der Purity	109
7.1.1.6	Verschränkungsmaße für Gaußsche Zustände	109
7.1.2	Verschränkungsmaße für nicht-Gaußsche Zustände	111
7.1.2.1	Concurrence und Tangle für verschränkte kohärente Zustände	111
7.1.2.2	Entanglement of Formation für Quasi-Bell-Zustände	112
7.2	Zwei-Moden-Zustände unter Markovscher Evolution	114
7.2.1	Zeitliche Entwicklung der Verschränkung im Zwei-Reservoir Modell . .	115
7.2.1.1	Markovsche Dynamik des Quasi-EPR-Zustands	115
7.2.1.2	Markovsche Dynamik des Quasi-Bell-Zustands	116
7.2.2	Zeitliche Entwicklung der Verschränkung im Ein-Reservoir Modell . .	117
7.3	Zwei Moden unter nicht-Markovscher Evolution	118
7.3.1	Zeitliche Entwicklung der Verschränkung im Zwei-Reservoir Modell . .	118
7.3.1.1	Nicht-Markovsche Dynamik des Quasi-EPR-Zustands	118
7.3.1.2	Quasi-EPR-Zustand bei starker System-Bad-Wechselwirkung	120
7.3.1.3	Nicht-Markovsche Dynamik des Quasi-Bell-Zustands	121
7.3.2	Zeitliche Entwicklung der Verschränkung im Ein-Reservoir Modell . .	123
7.3.2.1	Das modifizierte Ein-Reservoir Modell	123
7.3.2.2	Nicht-Markovsche Dynamik des Quasi-EPR-Zustands	125
7.3.2.3	Umgebungsinduzierte Verschränkung im Ein-Reservoir Modell	127
7.4	Zusammenfassung von Kapitel 7	129

8 Zusammenfassung	131
A QBM und CV-Systeme im Experiment	135
A.1 Präparation von CV-Systemen	135
A.2 Rekonstruktion von CV-Systemen	136
A.3 Bath-Engineering	136
A.4 Dekohärenz und Verschränkung im Experiment	137
A.5 CV-Systeme in der Quanteninformationstheorie	137
B Details zu Modellen und Berechnungen	139
B.1 Lösung der Hu-Paz-Zhang Mastergleichung	139
B.2 Dynamik im Zwei-Reservoir-Modell	142
B.3 Dynamik im Ein-Reservoir-Modell	142
Literaturverzeichnis	145

Abbildungsverzeichnis

3.1	Autokorrelation des Quantenrauschens für unterschiedliche spektrale Dichten	23
3.2	Gemittelter Phasenfaktor für unterschiedliche spektrale Dichten	30
3.3	Stationäre Werte der HPZ-Koeffizienten	34
3.4	Zeitliche Entwicklung der HPZ-Diffusionskoeffizienten	34
3.5	Zeitabhängigkeit der Koeffizienten der WCL-Mastergleichung	39
4.1	Stationäre Dichtematrixelemente in der Energie-Eigenbasis	46
4.2	Mögliche Varianzen im stationären QBM-Zustand	47
4.3	QBM-Zustand als gequetschter Vakuumzustand	48
4.4	Diagonalelemente im Vergleich zu Eigenwerten der Dichtematrix	49
4.5	Entropien und thermodynamische Potenziale	50
4.6	Wärmemenge und Landauer-Grenze	54
5.1	Dichtematrixelemente unterschiedliche Zustände in der Energie-Eigenbasis . .	61
5.2	Markovsche Dynamik der Purity Gaußscher Zustände	66
5.3	Nicht-Markovsche Dynamik Gaußscher Zustände	67
5.4	Dynamik Gaußscher Zustände unter starker System-Bad-Wechselwirkung . .	68
5.5	Dichtematrix und Wigner-Funktion eines Fock-Zustands	69
5.6	Beispiel für die Superposition zweier Fock-Zustände	71
5.7	Beispiel für die Superposition zweier Fock-Zustände	71
5.8	Beispiele für die Cat-State-Superposition zweier kohärenter Zustände	72
5.9	Wahrscheinlichkeitsdichte für verschränkten Zwei-Moden-Zustand	74
5.10	Markovsche Dynamik der Purity nicht-Gaußscher Zustände	75
5.11	Dynamik nicht-Gaußscher Zustände bei starker System-Bad-Wechselwirkung	77
6.1	Dekohärenzzeitkala in Abhängigkeit der Phasenraum-Separation	86

6.2	Einfluss der spektralen Dichte auf die Dekohärenzzeitkala	87
6.3	Dekohärenzfunktion und Näherungen bei hohen und tiefen Temperaturen . . .	90
6.4	Übergang vom Markovschen zum nicht-Markovschen Regime	91
6.5	Kohärenz-Rekurrenz in einem Out-of-Resonance-Bad	92
6.6	Zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichten	94
6.7	Vergleich unterschiedlicher Dekohärenzmaße	94
6.8	Beispiel für thermischen Anfangszustand einer Cat-State-Superposition	96
6.9	Dynamik der Dichtematrixelemente für mikroskopische Superpositionen	98
6.10	Vergleich einer mikro- und makroskopischen Superposition	99
6.11	Zeitliche Entwicklung von Cat-State-Superpositionen	100
7.1	Separabilitätskriterien und kritische Temperatur	108
7.2	Concurrence und Tangle für verschränkte kohärente Zustände	113
7.3	Darstellung von Ein- und Zwei-Reservoir-Modell	114
7.4	Markovsche und nicht-Markovsche Separabilitätsfunktion im Vergleich	119
7.5	Verschränkung zweier Moden im QBM-Zwei-Reservoir-Modell	121
7.6	Nicht-Markovsche Dynamik der Concurrence	122
7.7	Verschränkung zweier Moden im QBM-Ein-Reservoir-Modell	126
7.8	Separabilitätskriterien für stationären Zustand im QBM-Ein-Reservoir-Modell	128
7.9	Stationäre Verschränkung im QBM-Ein-Reservoir-Modell	128

Kapitel 1

Einleitung

Mit dem Fortschritt der Quantentheorie entwickelte sich ein neues Konzept von Information, verbunden mit innovativen Möglichkeiten der Speicherung, Verarbeitung und Übertragung von Daten. Die Theorie der Quanteninformation erforscht diese neuen Möglichkeiten und sucht nach Anwendungen in Form effizienter Algorithmen und sicherer Kommunikation. Die Basis dieser Überlegungen sind das Superpositionsprinzip und die Existenz verschränkter Zustände. Diese besonderen quantenmechanischen Eigenschaften sind allerdings ständig durch die Wechselwirkung eines Quantensystems mit seiner Umgebung bedroht und können im Prozess der Dekohärenz verloren gehen. Ein tiefgehendes Verständnis der Dynamik offener Quantensysteme ist deshalb notwendig, um die zahlreichen Ideen zur Implementierung von Quanten-Rechnern [1] oder zur Quanten-Teleportation [2, 3] optimal umsetzen zu können. Teilaspekte dieser Themen eingehender zu untersuchen ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, die sich mit der *nicht-Markovschen Dynamik, Dekohärenz und Verschränkung von offenen dissipativen Quantensystemen* befasst und dabei *Anwendung in der Quanteninformationstheorie von Systemen kontinuierlicher Variablen* im Blick hat. Einleitend soll zunächst ein Überblick über den Themenbereich gegeben werden, um daran anschließend den konkreten Aufbau dieser Arbeit darzulegen.

Dissipative Quantensysteme sind offene Quantensysteme, die in Wechselwirkung mit ihrer Umgebung stehen [4, 5, 6, 7]. Diese Kopplung des Systems an die Umgebung hat drei wesentliche Konsequenzen: Dissipation der Systemenergie, Fluktuation der Systemfreiheitsgrade und Dekohärenz anfänglicher Superpositionszustände. Während die ersten beiden Effekte auch in klassischen Systemen auftreten, kommt in offenen Quantensystemen als weiteres Phänomen die Dekohärenz hinzu: Als Konsequenz der Wechselwirkung des offenen Systems mit den vielen, unzugänglichen Freiheitsgraden der Umgebung gehen die speziellen quantenmechanischen Korrelationen und die Interferenzfähigkeit eines präparierten Anfangszustands verloren und es entstehen im Gegenzug nichtlokale Korrelationen zwischen dem System und seiner Umgebung. Die Zeitskala, auf der diese quantenmechanischen Nichtgleichgewichtsprozesse ablaufen, ist in der Regel um ein Vielfaches kürzer als die Relaxationszeit des Systems.

Die Dynamik offener Quantensysteme wird meist mittels Mastergleichungen formuliert. Diese beschreiben die irreversible zeitliche Entwicklung der reduzierten Dichtematrix des offenen Quantensystems und unterscheiden sich von der unitären Dynamik einer von Neumann-Liouville Gleichung durch zusätzliche Dämpfungs- und Diffusionsterme. Diese werden in

der Regel durch eine Integration über alle nicht-relevanten Freiheitsgrade des Hamilton-Operators des Gesamtsystems gewonnen, indem eine Reihe von Approximationen durchgeführt wird. Dazu gehören in erster Linie die Born-Markov-Approximation und die Rotating-Wave-Approximation. Erste vernachlässigt im Wesentlichen die Korrelationen zwischen System und Bad, letztere die schnell oszillierenden Terme im Hamilton-Operator. Markovsche Mastergleichungen sind im Allgemeinen dann eine hinreichende Näherung, wenn die Korrelationszeiten der Umgebung wesentlich kürzer sind als alle anderen charakteristischen Zeitskalen des Systems und finden breite Anwendung in der theoretischen Quantenoptik [8, 9, 10]. Diese Annahme ist mitunter nicht mehr erfüllt, wenn sehr kurze Dekohärenz- und Separabilitätszeitskalen betrachtet werden. In diesem Fall liefern nicht-Markovsche Mastergleichungen ein genaueres Bild der dissipativen Dynamik des offenen Quantensystems auf kurzen Zeitskalen.

Die *quantenmechanische Brownsche Bewegung* dient als Modell zur Beschreibung der nicht-Markovschen Dynamik offener Quantensysteme. Es ist ein Beispiel für die System-plus-Reservoir-Modelle, bei denen der Hamilton-Operator für das Gesamtsystem aus drei Teilen besteht: dem Hamilton-Operator des aus wenigen Freiheitsgraden bestehenden Teilsystems von Interesse, einem Hamilton-Operator des Reservoirs – oft in Form eines thermischen Bades unendlich vieler harmonischer Quantenoszillatoren – sowie einem Hamilton-Operator der die Wechselwirkung zwischen dem Teilsystem und seiner Umgebung beschreibt. Eines der bedeutendsten Beispiele dieser Modelle ist das sogenannte Caldeira-Leggett Modell [11, 12]. Mittels des Feynman-Vernon-Pfadintegralformalismus [13, 14, 15] wurde daraus die sogenannte Hu-Paz-Zhang-Mastergleichung [16] für die reduzierte Dichtematrix hergeleitet. Deren zeitabhängigen Koeffizienten sind für die nicht-Markovschen Eigenschaften der Dynamik verantwortlich. Eine dazu äquivalente Beschreibung der Dynamik der Heisenberg-Operatoren ist über die quantenmechanische Langevin-Gleichung möglich [17, 18]. Da der Hilbert-Raum des quantisierten elektromagnetischen Feldes äquivalent zum Hilbert-Raum des quantisierten harmonischen Oszillators ist, kann das Modell der quantenmechanischen Brownschen Bewegung vielfältig eingesetzt werden – so etwa sowohl zur Beschreibung der Schwerpunktsbewegung von Ionen in Radiofrequenzfallen [19, 20, 21] als auch zur Modellierung der dissipativen Dynamik von elektromagnetischen Feldmoden [22].

Systeme kontinuierlicher Variablen gewannen in den letzten Jahren im Bereich der Quanteninformationstheorie an großer Bedeutung [23, 24, 25]. Darunter sind Systeme mit einem unendlich-dimensionalem Hilbert-Raum zu verstehen, die ein kontinuierliches Eigenwertspektrum der relevanten Operatoren aufweisen. Kontinuierliche Variable sind also beispielsweise die Orts- und Impulsoperatoren harmonischer Oszillatoren bzw. die Quadraturen elektromagnetischer Feldmoden – im Gegensatz zu den begrenzten, diskreten Eigenwertspektren von Systemen mit endlich-dimensionalen Hilbert-Raum (z.B. Spinsysteme oder Polarisation einzelner Photonen). Ein Beispiel ist die Übertragung von Information mittels elektromagnetischer Feldmoden intensiver Laserstrahlen. Die Ausgangszustände von Laserpulsen hoher Intensität sind Moden mit einer großen Anzahl von Photonen (Vielphotonenzustände) und können in guter Näherung als kohärente Zustände modelliert werden. Sie sind somit ein Beispiel für Gaußsche Zustände, d.h. von Systemen kontinuierlicher Variablen, die durch eine gaußförmige Wigner-Funktion im Phasenraum gekennzeichnet sind und einen stärkeren klassischen Charakter aufweisen als nicht-Gaußsche Zustände, deren Wigner-Funktion auch negative Anteile besitzen kann. Gaußsche Zustände von Systemen kontinuierlicher Variablen haben den Vorteil, relativ leicht im Labor hergestellt und kontrolliert werden zu können

und wurden bereits erfolgreich für Protokolle in der Quanten-Kryptographie und Quanten-Teleportation eingesetzt [26, 27, 28]. In dieser Arbeit werden sowohl Beispiele der Dynamik von Gaußschen Zuständen als auch von nicht-Gaußschen Zuständen betrachtet.

Die Theorie der Dekohärenz [29, 30, 31] beschreibt die teilweise oder vollständige Unterdrückung der Kohärenzeigenschaften quantenmechanischer Superpositionszustände durch den Einfluss einer Umgebung. Umgebungsinduzierte Dekohärenz wird als Ursache für das Ausbleiben von quantenmechanischen Überlagerungszuständen bei makroskopischen Objekten gesehen und ist Folge der praktischen Unmöglichkeit, den Zustand aller Umgebungsfreiheitsgrade zu beobachten. Der Begriff ist eng verknüpft mit dem quantenmechanischen Messproblem [32] und steht auch für den Übergang vom quantenmechanischen Regime zum klassischen Bereich [33, 34, 35]. Die Zeit, in der ein quantenmechanischer Superpositionszustand in ein statistisches Gemisch übergeht, ist die so genannte Dekohärenzzeit. Im Markovschen Fall skaliert die Dekohärenzrate quadratisch mit dem Abstand der überlagerten Wellenpakete im Phasenraum [36], was mittlerweile experimentell sowohl für elektromagnetische Feldmoden [22], als auch für materielle Oszillatoren in Form von Ionen in Paul-Fallen [37, 38] nachgewiesen werden konnte. Die Dekohärenzzeit ist einer der limitierenden Faktoren für quanteninformationstheoretische Anwendungen und ist im Allgemeinen wesentlich kürzer als die entsprechende Relaxationszeit, in der das statistische Gemisch in einen thermischen Gleichgewichtszustand übergeht. Im nicht-Markovschen Fall ist sie auch von den spektralen Eigenschaften des Reservoirs abhängig. Liegt die Dekohärenz-Zeitskala in der Größenordnung der Badkorrelationszeit, so liefert die Beschreibung mittels Markovscher Mastergleichungen nur unzureichende Ergebnisse und es bietet sich ebenfalls der Zugang über nicht-Markovsche Mastergleichungen an. Die Abhängigkeit der Dekohärenzzeit von spektralen Eigenschaften des Bades bietet die Möglichkeit, durch gezieltes *Bath-Engineering* [39, 37] die quantenmechanische Interferenzfähigkeit sowie die nichtklassischen Korrelationen verschränkter Zustände länger zu bewahren.

Verschränkung bezeichnet das Vorliegen von quantenmechanischen Korrelationen zwischen mehreren Teilchen, die stärker sind als es klassisch möglich wäre [40]. Dies äußert sich in einer Verletzung der Bellschen Ungleichungen [41] und ist ein Beleg für den nicht-lokalen Charakter der Quantenmechanik. Während die Erforschung niedrig-dimensionaler Systeme in Bezug auf Verschränkungskriterien [42, 43] und Verschränkungsmaße [44, 45] schon weit vorangeschritten ist, haben Systeme kontinuierlicher Zustände erst in den letzten Jahren das Interesse auf sich gezogen. Mittlerweile sind verschiedene Separabilitätskriterien [46] entwickelt worden, insbesondere für Gaußsche Zwei-Moden-Zustände. Deren Verschränkungseigenschaften sind vollständig durch die Kovarianzmatrix der Feldoperatoren der beiden Moden, bzw. Orts- und Impulsoperatoren der Oszillatoren, gegeben. Für einige Nicht-Gaußsche Zustände existieren ebenfalls Verschränkungsmaße [47]. Für Zwei-Moden-Zustände ist die dissipative Dynamik zusätzlich davon abhängig, ob sich die Bewegung der Moden in einem gemeinsamen Reservoir vollzieht, oder ob jede Mode separat an ein Bad gekoppelt ist.

Nicht-Markovsche Effekte im Rahmen der Dynamik offener Quantensysteme stießen in den letzten Jahren auf zunehmendes Forschungsinteresse. Es hat sich gezeigt, dass Markovsche Näherungen beispielsweise in vielen Festkörpersystemen wie Quantenpunkten und anderen Halbleiterstrukturen [48] oder mitunter auch in Resonator-Moden von Atomlasern [49] nicht gerechtfertigt sind. Auch das Interesse an nicht-Markovschen Reservoirs bei quan-

teninformationsverarbeitenden Systemen [50] hat zugenommen und erste nicht-Markovsche Beschreibungen von Quanten-Computern wurden präsentiert [51, 52]. Systeme kontinuierlicher Variablen eignen sich insbesondere zur Quanten-Kommunikation und -Teleportation, wo Laserpulse hoher Intensität ihre Vorteile der geringeren Störungsanfälligkeit und leichteren Detektierbarkeit gegenüber einzelnen verschränkten Photonen ausspielen können. Bisher wurde die Anwendungen verschränkter Moden als Quantenkanäle vor allem unter Markovschen Approximationen untersucht, allerdings sind auch erste Vorschläge für das Verhalten bei nicht-Markovschen Quantenkanälen [53, 54, 55] in der Diskussion. Eine Zusammenstellung wichtiger experimenteller Arbeiten auf dem Gebiet der Dekohärenz und Verschränkung von Systemen kontinuierlicher Variablen findet sich im Anhang.

Der Aufbau der Arbeit soll hier kurz dargestellt werden. Im folgenden Kapitel 2 werden die Grundlagen der Beschreibung dissipativer Quantendynamik durch Markovsche Mastergleichung vom Lindblad Typ komprimiert beschrieben. Die Grenzen bzw. Schwächen der Born-Markovschen Approximation in Bezug auf Systeme mit kurzen Dekohärenz- und Separabilitätszeiten werden dargelegt. Im anschließenden Kapitel 3 wird das Caldeira-Leggett-Modell der quantenmechanischen Brownschen Bewegung vorgestellt, das in dieser Arbeit die Grundlage für die Beschreibung der nicht-Markovschen Dynamik von Systemen kontinuierlicher Variablen bildet. Dabei werden die äquivalenten Ansätze in Form der quantenmechanischen Langevin-Gleichung, des Einfluss-Funktional-Pfadintegralformalismus und der Hu-Paz-Zhang Mastergleichung präsentiert. In Kapitel 4 werden zunächst einige quantenstatistische Besonderheiten des stationären Zustands untersucht und deren Folgen für eine thermodynamische Betrachtungsweise dargelegt. Kapitel 5 bietet eine Zusammenstellung jener Systeme kontinuierlicher Variablen, die in den anschließenden Kapiteln als Anfangszustände der dissipativen Dynamik unterliegen. Ein Vergleich der Relaxation unter Markovschen und nicht-Markovschen Bedingungen, unterschieden nach Gaußschen und nicht-Gaußschen Zuständen, ist ebenfalls in diesem Kapitel enthalten. Diese vorgezogene Diskussion der relevanten Zustände erlaubt es, das Hauptaugenmerk in Kapiteln 6 und 7 direkt auf Dekohärenzprozesse und die Dynamik nichtklassischer Korrelationen zu legen. In Kapitel 6 wird das Dekohärenzverhalten verschiedener Superpositionen unter nicht-Markovschen Bedingungen untersucht. Die sich im nicht-Markovschen Fall ergebende Abhängigkeit der Dekohärenzzeitkala von der spektralen Dichte des Bades und ein variationsreiches qualitatives Verhalten der Dekohärenzfunktion lassen eine Aufteilung nach unterschiedlichen Dekohärenzregimen sinnvoll erscheinen. Kapitel 7 schließlich befasst sich mit der nicht-Markovschen Dynamik verschränkter Zustände von Systemen kontinuierlicher Variablen. Konkret werden zwei-Moden Zustände als prominenteste Vertreter dieser Klasse untersucht. Die zusätzlichen inneren Freiheitsgrade des offenen Quantensystems eröffnen die Frage, ob beide Moden der Wechselwirkung mit dem gleichen Reservoir unterliegen, oder ob jeweils eine separate Kopplung an unkorrelierte Reservoirs vorliegt. Im Hinblick auf die charakteristischen Separabilitätszeiten werden die Unterschiede dieser beiden Modellvarianten herausgearbeitet und es wird gezeigt, dass ein gemeinsames Reservoir zu zusätzlichen nichtklassischen Korrelationen zwischen den beiden Moden führen kann. Jedes Kapitel enthält eine eigenständige Einleitung sowie eine kurze Zusammenfassung, was die Orientierung innerhalb der Arbeit und ein separates Lesen einzelner Kapitel erleichtern soll. Das abschließende Kapitel 8 fasst die wichtigsten Ergebnisse noch einmal zusammen.

Zur Notation: Für viele Begriffe der zum überwiegenden Teil in englischer Sprache verfassten Fachliteratur gibt es keine passende deutsche Übersetzung. Daher werden in dieser Arbeit meist die entsprechenden englischen Fachbegriffe benutzt – sofern eine deutsche Übersetzung gewählt wird, ist der entsprechende englische Ausdruck in Klammern angegeben. Viele der verwendeten Abkürzungen beziehen sich ebenfalls auf die englischen Bezeichnungen - etwa *QBM* für *Quantum Brownian Motion* oder *CV-Systeme* für *Continuous Variable Systems*.

Kapitel 2

Grundlagen dissipativer Quantendynamik

Offene Quantensysteme stehen in Wechselwirkung mit ihrer Umgebung, was drei wesentliche Konsequenzen hat: Dissipation der Systemenergie, Fluktuation der Systemfreiheitsgrade und Dekohärenz anfänglicher Superpositionszustände. Während die ersten beiden Effekte auch in klassischen Systemen auftreten, kommt in offenen Quantensystemen als weiteres Phänomen die Dekohärenz hinzu: Als Konsequenz der Wechselwirkung des offenen Systems mit den Freiheitsgraden der Umgebung gehen die speziellen quantenmechanischen Interferenzeigenschaften verloren und es entstehen nichtlokale Korrelationen zwischen dem System und seiner Umwelt. Im Rahmen der Theorie offener Quantensysteme [4, 5, 7, 6, 56, 57] modelliert man Dissipation und Dekohärenz durch die Wechselwirkung des Systems mit einem Reservoir bzw. Wärmebad. Der Ausgangspunkt für die Beschreibung der Dynamik des offenen Systems ist die mikroskopische Bewegungsgleichung für das Gesamtsystem, welches durch die Kombination des Systems mit seiner Umgebung entsteht. Das Ziel ist die Ableitung einer Bewegungsgleichung für die reduzierte Dichtematrix, die aus der Dichtematrix des Gesamtsystems durch Ausintegration der Umgebungsfreiheitsgrade entsteht. Die Zeitentwicklung des Systems wird durch eine entsprechende Bewegungsgleichung der reduzierten Dichtematrix festgelegt, die als quantenmechanische Mastergleichung bezeichnet wird. Oft werden Dekohärenz und Dissipation im Rahmen der Markovschen Mastergleichungen der Quantenoptik [8, 9, 10] diskutiert. Neben der Markovschen Approximation erfordert der Gebrauch dieser Gleichungen die Annahme einer schwachen System-Bad-Wechselwirkung. In diesem Fall ist die interne Systemdynamik wesentlich langsamer als die Korrelationszeiten der Umgebung und eine Verschränkung zwischen System und Bad kann vernachlässigt werden. Da dies den am weitesten verbreiteten Zugang zur Untersuchung dissipativer Quantendynamik darstellt, werden in diesem Kapitel zunächst die quantenmechanischen Mastergleichungen in Born-Markov-Approximation behandelt. Einen axiomatischen Zugang zur Herleitung Markovscher Mastergleichungen im Rahmen dynamischer Halbgruppen bietet die Lindblad-Theorie [58], die ebenfalls kurz dargestellt wird. Die Grenzen bzw. Schwächen der Born-Markovschen Approximation in Bezug auf Systeme mit kurzen Dekohärenz- und Separabilitätszeiten werden dargelegt. Die hier dargestellten Markovschen Mastergleichungen dienen als Referenzpunkt für die in den darauf folgenden Kapiteln durchgeführte Analyse nicht-Markovscher Quantendynamik und deren Auswirkungen auf Dekohärenz und Verschränkung.

2.1 Überblick über die Theorie offener Quantensysteme

Im Gegensatz zu isolierten quantenmechanischen Systemen kann die Dynamik offener Quantensysteme im Allgemeinen nicht durch eine unitäre Zeitentwicklung beschrieben werden, sondern wird stattdessen durch eine quantenmechanische Mastergleichung für den Dichteoperator dargestellt. Diese wird aus der unitären Dynamik des gesamten Systems,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] = \frac{1}{i\hbar}[H_s + H_b + H_{\text{int}}, \rho], \quad (2.1)$$

das zusammengesetzt ist aus dem Hamilton-Operator des offenen Systems H_s , dem Hamilton-Operator der Umgebung H_b und einer entsprechenden Wechselwirkung, vermittelt durch H_{int} , gewonnen. Dies geschieht durch eine Ausintegration der Umgebungsfreiheitsgrade auf beiden Seiten obiger Liouville-von-Neumann Gleichung (2.1), so dass sich für die reduzierte Dichtematrix $\rho_s = \text{Tr}_b \rho$ die Bewegungsgleichung im Schrödinger-Bild

$$\frac{d\rho_s}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}_b [H, \rho] \quad (2.2)$$

ergibt. Da eine exakte Lösung dieser Gleichung im Allgemeinen nicht möglich ist, existieren verschiedene Approximationsmethoden zur Ableitung von Mastergleichungen. Die bekannteste ist die Born-Markov-Approximation, die zusammen mit der Rotating-Wave-Approximation die quantenoptischen Mastergleichungen ergeben. Diese können im Rahmen der Lindblad-Theorie dynamischer Halbgruppen auf eine allgemeine axiomatische Form Markovscher Mastergleichungen erweitert werden. Einige wichtige Markovsche Mastergleichungen werden im folgenden Abschnitt dargestellt, um als Vergleichsgrundlage bei der Auswertung der nicht-Markovschen Dynamik dienen zu können. Die Darstellung orientiert sich dabei an gängigen Standardwerken zur Theorie offener Quantensysteme [5, 7].

2.2 Quantenoptische Mastergleichungen

Die Quantenoptik befasst sich mit der Quantennatur des Lichts und beschreibt die Wechselwirkung elektromagnetischer Strahlung mit Materie auf atomarer Ebene. Da diese Wechselwirkung in der Regel relativ schwach ist, kommen zur Beschreibung der Dynamik verschiedene Näherungen zum Einsatz. Diese werden zunächst erläutert, bevor anhand der Markovschen Mastergleichung des gedämpften harmonischen Quantenoszillators und der Bloch-Mastergleichung eines Zwei-Niveau-Systems zwei prominente Beispiele dargestellt werden.

2.2.1 Born-Markov- und Rotating-Wave-Approximation

Geht man von der Gleichung (2.1) im Schrödingerbild in die Wechselwirkungsdarstellung über, in der die freie Dynamik von den Operatoren getragen wird, so lautet die Liouville-von-Neumann-Gleichung

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H_{\text{int}}(t), \rho(t)], \quad \text{mit} \quad \rho(t) = U^\dagger(t)\rho U(t), \quad H_{\text{int}}(t) = U^\dagger(t)H_{\text{int}}U(t), \quad (2.3)$$

wobei der unitäre Zeitentwicklungsoperator durch $U(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(H_s + H_b)t\right]$ gegeben ist. Integriert man diese Gleichung formal und setzt das Ergebnis wieder ein, so erhält man eine exakte Integro-Differentialgleichung für die Dynamik des Zustands des Gesamtsystems

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H_{\text{int}}(t), \rho(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [H_{\text{int}}(t), [H_{\text{int}}(t'), \hat{\rho}(t')]], \quad (2.4)$$

und entsprechend für die Dynamik der reduzierten Dichtematrix

$$\frac{d\rho_s(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}_b\{[H_{\text{int}}(t), \rho(0)]\} - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_b[H_{\text{int}}(t), [H_{\text{int}}(t'), \rho(t')]], \quad (2.5)$$

wobei der erste Term für faktorisierende Anfangsbedingungen $\rho(0) = \rho_s(0) \otimes \rho_b$ vernachlässigt werden kann (indem man $\text{Tr}_b[H_{\text{int}}\rho_b]$ in den Hamilton-Operator H_s mit einschließt). Diese Gleichung ist nun Ausgangspunkt für die Born-Markov-Rotating-Wave-Approximation.

2.2.1.1 Born-Näherung

Gleichung (2.5) enthält auf der rechten Seite immer noch den Zustand des Gesamtsystems. Um eine abgeschlossene Bewegungsgleichung zu erhalten, nimmt man an, dass der Zustand des Bades während der zeitlichen Entwicklung nur unwesentlich gestört wird, also

$$\rho(t') \approx \rho_s(t') \otimes \rho_b(0), \quad (2.6)$$

während der Systemzustand natürlich sehr wohl beeinflusst wird. Die Annahme, dass auch für spätere Zeiten keine Korrelationen zwischen Bad und System entstehen, ist nur für schwache Wechselwirkung gerechtfertigt und wird auch als *weak coupling limit* bezeichnet. Man erhält auf diese Weise eine abgeschlossene, aber nicht mehr exakte Integro-Differentialgleichung:

$$\frac{d\rho_s(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_b[H_{\text{int}}(t), [H_{\text{int}}(t'), \rho_s(t') \otimes \rho_b]]. \quad (2.7)$$

2.2.1.2 Markov-Näherung

Die Gleichung (2.7) beinhaltet noch die komplette Vergangenheit des Systems selbst. Nimmt man weiter an, dass nur der aktuelle Systemzustand die Dynamik bestimmt, kann man die Ersetzung $\rho_s(t') \rightarrow \rho_s(t)$ vornehmen und erhält so die zeitlich lokale Differentialgleichung

$$\frac{d\rho_s(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_b[H_{\text{int}}(t), [H_{\text{int}}(t'), \rho_s(t) \otimes \rho_b]]. \quad (2.8)$$

Diese *Markov-Annahme* ist dann gerechtfertigt, wenn die charakteristische Zeitskala τ_b , auf der die Badkorrelationen $\langle b_k^\dagger(t)b_l(s) \rangle$ abfallen, sehr viel kleiner ist als die Zeitskala τ_s , auf der $\rho_s(t)$ variiert, also $\tau_b \ll \tau_s$. Markovsch wird diese Differentialgleichung allerdings erst durch die Substitution $t' \rightarrow (t - t')$ im Integranden und durch Verschieben der oberen Integrationsgrenze ins Unendliche, so dass man die *Born-Markovsche Mastergleichung*

$$\frac{d\rho_s(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' \text{Tr}_b[H_{\text{int}}(t), [H_{\text{int}}(t - t'), \rho_s(t) \otimes \rho_b]] \quad (2.9)$$

erhält. In dieser Gleichung ist jegliche Abhängigkeit von der Vergangenheit des Systems verschwunden, was dazu führt, dass die Dynamik auf einer *grobkörnigen* Zeitskala $\tau_b \ll \tilde{\tau} \ll \tau_s$ beschrieben wird, auf der Zeiten der Größenordnung τ_b nicht aufgelöst werden. Für Anwendungen in der Quantenoptik ist diese Näherung meist hinreichend gut erfüllt.

2.2.1.3 Rotating-Wave-Approximation (Drehwellen-Näherung)

Zur weiteren Vereinfachung wird nun ein konkreter Ansatz für den Wechselwirkungsoperator in der Form

$$H_{\text{int}} = \hbar \sum_k a_k \otimes b_k = \hbar \sum_k a_k^\dagger \otimes b_k^\dagger \quad (2.10)$$

gewählt, wobei die bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren a_k, a_k^\dagger Eigenoperatoren von H_s sein sollen, d.h. $[H_s, a_k] = \omega_k a_k$ mit $\omega_k \neq \omega_l$ für $k \neq l$ und somit $a_k(t) = e^{i\omega_k t} a_k$. Dies in die Born-Markov-Gleichung (2.9) eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_s(t)}{dt} = & - \sum_{k,l} \int_0^\infty dt' [a_k^\dagger a_l \rho_s(t) - a_l \rho_s(t) a_k^\dagger] \langle b_l^\dagger(t') b_l \rangle_b e^{-i\Delta_{kl}t - i\omega_l t'} - \\ & - \sum_{k,l} \int_0^\infty dt' [\rho_s(t) a_l^\dagger a_k - a_k \rho_s(t) a_l^\dagger] \langle b_l^\dagger b_k(t') \rangle_b e^{i\Delta_{kl}t + i\omega_l t'}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

wobei $\Delta_{kl} \equiv \omega_k - \omega_l$ und $\langle O \rangle \equiv \text{Tr}[O\rho_b]$. Bei der *Rotating-Wave-Näherung* werden nun in obiger Gleichung nur Terme mit $k = l$ berücksichtigt, was dann gerechtfertigt ist, wenn für die Zeitskalen $\Delta_{kl}^{-1} \ll \tau_s$ gilt. In diesem Fall erwartet man, dass sich die rasch oszillierenden Terme mit $k \neq l$ herausmitteln. Man erhält auf diese Weise schließlich eine Quanten-Mastergleichung in Lindblad-Form (siehe Abschnitt 2.3):

$$\frac{d\rho_s(t)}{dt} = -i \sum_k \lambda_k [a_k^\dagger a_k, \rho_s(t)] + \sum_k \frac{\gamma_k}{2} \left(2a_k \rho_s(t) a_k^\dagger - a_k^\dagger a_k \rho_s(t) - \rho_s(t) a_k^\dagger a_k \right), \quad (2.12)$$

wobei die reellen Größen γ_k und λ_k durch

$$\int_0^\infty dt' e^{i\omega_k t'} \langle b_k(s) b(k) \rangle_b = \frac{\gamma_k}{2} + i\lambda_k \quad (2.13)$$

definiert sind. Die Größen λ_k sorgen für eine Energieverschiebung (Lamb-Shift), während die γ_k die Relaxationsraten des Systems darstellen.

2.2.2 Mastergleichung des Harmonischen Quanten-Oszillators

Ein wichtiges Beispiel Born-Markovscher Quanten-Mastergleichungen ist die quantenoptische Mastergleichung des linear gedämpften harmonischen Quantenoszillators, die u.a. bei der Beschreibung einzelner Resonatormoden Anwendung findet. Ihre Form lässt sich aus Gleichung (2.12) erschließen und lautet im Schrödingerbild [9, 10]

$$\dot{\rho} = -i\omega_0 [a^\dagger a, \rho] + \frac{\gamma_\downarrow}{2} [2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a] + \frac{\gamma_\uparrow}{2} [2a^\dagger \rho a - a a^\dagger \rho - \rho a a^\dagger]. \quad (2.14)$$

Sie beschreibt kohärentes Pumpen $\rho \mapsto \gamma_\uparrow a^\dagger \rho a$ und Dämpfung $\rho \mapsto \gamma_\downarrow a \rho a^\dagger$. Die Gleichung ist exakt lösbar und ihre Lösung kann in Form der charakteristischen Funktion

$$\chi(z, z^*, t) = \text{Tr} [\rho(t) e^{za - z^* a^\dagger}] = e^{-A(t)} \chi(z_t, z_t^*, 0) \quad (2.15)$$

$$\text{mit } z_t = z e^{-i\omega t - (\gamma_\downarrow - \gamma_\uparrow)t/2} \quad \text{und} \quad A(t) = \frac{|z|^2}{4} \frac{\gamma_\downarrow + \gamma_\uparrow}{\gamma_\downarrow - \gamma_\uparrow} [1 - e^{-(\gamma_\downarrow - \gamma_\uparrow)t}], \quad (2.16)$$

angegeben werden. Für $\gamma_{\downarrow} > \gamma_{\uparrow}$ ist die zeitliche Entwicklung stationär mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho_{\beta} = (1 - e^{-\beta \hbar \omega_0}) e^{-\beta \hbar \omega_0 a^{\dagger} a} \quad \text{und} \quad \ln \frac{\gamma_{\downarrow}}{\gamma_{\uparrow}} = \beta \hbar \omega_0, \quad (2.17)$$

bzw. $\gamma_{\downarrow} = \gamma(\bar{n} + 1)$, $\gamma_{\uparrow} = \gamma\bar{n}$ (also spontane Emissionen mit Rate γ und thermisch induzierte Emissions- und Absorptionsprozesse mit Rate $\gamma\bar{n}$) sowie mit $\bar{n} = 1/(e^{\beta \hbar \omega_0} - 1)$ als mittlerer Besetzung der Mode ω_0 . Diagonal- und Nebendiagonalelemente von $\rho(t)$ entwickeln sich zeitlich unabhängig voneinander, wobei erstere die Bedingung des detaillierten Gleichgewichts der Pauli-Mastergleichung erfüllen. Obige Mastergleichung (2.14) führt zu Dissipation und Dämpfung sowohl der Diagonal- als auch der Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix, was auch als Amplituden-Dämpfung bezeichnet wird. Eine reine Phasendämpfung lässt sich ebenfalls modellieren und wird durch eine Mastergleichung der Form

$$\dot{\rho} = -i\omega_0 [a^{\dagger} a, \rho] + \gamma_{\downarrow} \left[2a^{\dagger} a \rho a^{\dagger} a - (a^{\dagger} a)^2 \rho - \rho (a^{\dagger} a)^2 \right] \quad (2.18)$$

beschrieben [7]. Dies führt auf einen exponentiellen Abfall der Nichtdiagonalelemente mit einer Rate, die proportional zum quadratischen Abstand von der Diagonalen ist. Die Diagonalelemente bleiben unbeeinflusst. Eine kompakte Übersicht über das Verhalten des gedämpften harmonischen Oszillators unter obigen Markovschen Mastergleichungen findet sich etwa in [59]. Der Gleichung (2.14) liegen zahlreiche Studien zur Dynamik und Dekohärenz von Systemen kontinuierlicher Variablen zugrunde, beispielsweise in [60, 61]. Sie wird deshalb in Kapitel 5 und 6 zu Vergleichszwecken herangezogen.

2.2.3 Mastergleichung des Zwei-Niveau-Systems

Das einfachste Beispiel für Systeme mit begrenzter Anzahl von Eigenwerten ist das Zwei-Niveau-System (*Qubit*), dessen zeitliche Entwicklung der Dichtematrixelemente durch die *Bloch-Gleichungen* beschrieben wird. Werden mit den Eigenvektoren $|1\rangle$ und $|2\rangle$ die Projektionsoperatoren $P_k = |k\rangle\langle k|$, $k = 1, 2$ und Leiter-Operatoren $\sigma^+ = (\sigma^-)^* = |2\rangle\langle 1|$ sowie $\sigma_3 = P_2 - P_1$ definiert, so können die drei verschiedenen irreversiblen Prozesse der Dämpfung $\rho \mapsto \gamma_{\downarrow} \sigma^- \rho \sigma^+$, des Pumpens $\rho \mapsto \gamma_{\uparrow} \sigma^+ \rho \sigma^-$ und der Phasendämpfung $\rho \mapsto \delta P_1 \rho P_1 + \delta P_2 \rho P_2$ beschrieben werden, wobei letzteres einen Verlust der Phasenkohärenz beschreibt, der nicht mit einer Änderung der Besetzung der Niveaus einhergeht und hier nicht gesondert berücksichtigt werden soll (d.h. $\delta = 0$). Die Bloch-Mastergleichung eines Zwei-Niveau-Systems lautet dann [7]

$$\dot{\rho} = -\frac{i\omega}{2} [\sigma_z, \rho] + \frac{\gamma_{\downarrow}}{2} ([\sigma^-, \rho \sigma^+] + [\sigma^- \rho, \sigma^+]) + \frac{\gamma_{\uparrow}}{2} ([\sigma^+, \rho \sigma^-] + [\sigma^+ \rho, \sigma^-]) \quad (2.19)$$

und besitzt die zeitabhängige Lösung

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \langle \sigma_z(t) \rangle) & \langle \sigma^-(t) \rangle \\ \langle \sigma^+(t) \rangle & \frac{1}{2}(1 - \langle \sigma_z(t) \rangle) \end{pmatrix} = p_t P_1 + (1 - p_t) P_2 + \alpha_t \sigma^+ + \alpha_t^* \sigma^-, \quad (2.20)$$

$$\text{mit } p_t = p(0) e^{-(\gamma_{\uparrow} + \gamma_{\downarrow})t} + \frac{\gamma_{\downarrow}}{\gamma_{\downarrow} + \gamma_{\uparrow}} \left[1 - e^{-(\gamma_{\uparrow} + \gamma_{\downarrow})t} \right], \quad \alpha_t = \alpha_0 e^{-i\omega_0 t - (\gamma_{\uparrow} + \gamma_{\downarrow})t/2}. \quad (2.21)$$

Diagonal- und Nebendiagonalelemente entwickeln sich dabei zeitlich unabhängig voneinander, wobei erstere der Pauli-Mastergleichung gehorchen und auf den stationären Zustand

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho_{\beta} = \frac{1}{2 \cosh(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega_0)} e^{-\frac{1}{2} \beta \hbar \omega_0 \sigma_z} \quad \text{mit} \quad \ln \frac{\gamma_{\downarrow}}{\gamma_{\uparrow}} = \beta \hbar \omega_0 \quad (2.22)$$

zulaufen. Den Ausgangspunkt für die mikroskopische Herleitung obiger Mastergleichung (2.19) bildet der Hamilton-Operator eines nichtrelativistischen Atoms (Masse M , Impuls P), dessen Elektron (Ladung e , Masse m , Impuls p) mit einem elektromagnetischen Feld (Vektorpotenzial A , Coulombpotenzial C) unter zweiter Quantisierung (Hamilton-Operator der Badmoden $H_b = \sum_k \hbar\omega_k b_k^\dagger b_k$) wechselwirkt:

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2m}(p - eA)^2 + eV(x) + H_b. \quad (2.23)$$

Werden Dipol-, Rotating Wave - und Zwei-Niveau Approximation durchgeführt, ergibt sich daraus der Hamilton-Operator des *Jaynes-Cummings Modells* [62]

$$H = \hbar\omega_0 S_z + \hbar \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \hbar \sum_k \left(\lambda_k S_+ b_k + \lambda_k^* S_- b_k^\dagger \right), \quad (2.24)$$

mit den Operatoren $S_z = \frac{1}{2}\sigma_z$ und $S_\pm = \sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$. Aus diesem ergibt sich unter Born-Markovscher Approximation gem. Abschnitt 2.2.1 schließlich die Bloch-Mastergleichung (2.19). Eine weitere Vereinfachung des Modells (2.24) stellt der Hamilton-Operator mit σ_z -Kopplung dar

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \hbar\sigma_z \sum_k \left(\lambda_k b_k + \lambda_k^* b_k^\dagger \right), \quad (2.25)$$

der wie die Mastergleichung (2.18) eine reine Phasendämpfung ohne Dissipation beschreibt (da System- und Wechselwirkungs-Operator vertauschen und deshalb die Diagonalelemente unbeeinflusst bleiben). Der gedämpfte Quantenoszillator in der Fock-Raum-Repräsentation kann als Multilevel Spin-Boson-Modell angesehen werden. Bei sehr tiefen Temperaturen werden die erreichbaren Niveaus stark reduziert und der Oszillator kann als effektives Zwei-Niveau-System [63, 64] angesehen werden. Die exakte Lösung dieses Modells (siehe Kapitel 3) erlaubt das Studium des effektiven Zwei-Niveau-Systems im Nicht-Markovschen Regime und einen Vergleich mit aus Gleichung (2.24) gewonnenen Lösung für die Born-Markov-Approximation des *Qubit-Modells*.

2.3 Lindblad-Theorie und dynamische Halbgruppen

Die Lindblad-Theorie bietet einen axiomatischen Zugang zur Ableitung von quantenmechanischen Markovschen Mastergleichungen im Rahmen der Theorie dynamischer Halbgruppen, wobei für die Dichtematrix strenge Positivität und Spur-Erhaltung gefordert wird. Betrachtet wird ein offenes Quantensystem mit zugehörigem Hilbert-Raum \mathcal{H} , dessen Zeitentwicklung der reduzierten Dichtematrix $\rho(t)$ durch eine Markovsche Mastergleichung der Form

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}\rho(t), \quad t \geq 0 \quad (2.26)$$

bestimmt wird. Damit der verallgemeinerte Liouville-Operator \mathcal{L} als Generator einer dynamischen Halbgruppe fungiert, werden die allgemeinen mathematischen Eigenschaften der Lösungen von Gl. (2.26), die auf dem Banach-Raum $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ von *Spurklasse-Operatoren* auf \mathcal{H} mit Norm $\|\sigma\|_1 = \text{Tr}\sqrt{\sigma\sigma^*}$ definiert sind, axiomatisch vorgegeben: Die formale Lösung von

Gl. (2.26) ist durch die Halbgruppe Λ_t , $t \geq 0$ mit

$$\Lambda_t \sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{L}^n \sigma \quad \text{für begrenzte Operatoren } \mathcal{L}, \quad (2.27)$$

$$\Lambda_t \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - t\mathcal{L})^{-n} \sigma \quad \text{für unbegrenzte Operatoren } \mathcal{L} \quad (2.28)$$

gegeben, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sein müssen [65]:

$$\Lambda_t \Lambda_s = \Lambda_{t+s} \quad \text{Halbgruppen-Eigenschaft} \quad (2.29)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \Lambda_t \sigma = \sigma \quad \text{Kontinuität} \quad (2.30)$$

$$\text{für } \sigma \geq 0 \quad \Lambda_t \sigma \geq 0 \quad \text{Positivität} \quad (2.31)$$

$$\forall \sigma \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) : \quad \text{Tr}(\Lambda_t \sigma) = \text{Tr} \sigma \quad \text{Spur-Erhaltung.} \quad (2.32)$$

Die Bedingung (2.31) muss aufgrund der Existenz verschränkter Zustände zusammengesetzter Quantensysteme, die nicht als konvexe Summe

$$\rho^{(12)} \neq \sum_j p_j \rho_j^{(1)} \otimes \rho_j^{(2)}, \quad \sum_{j=1}^n p_j = 1, \quad p_j > 0 \quad (2.33)$$

von Produktzuständen $\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$ dargestellt werden können, durch die Bedingung der strengen (kompletten) Positivität erweitert werden, da sich in diesem Fall leicht Beispiele finden lassen, bei denen selbst für spurerhaltende Halbgruppensdynamik $\Lambda^{(1)}$ und $\Lambda^{(2)}$, die Dynamik $\Lambda^{(1)} \otimes \Lambda^{(2)} \rho^{(12)}$ nicht positiv definit ist. Für streng positive Halbgruppen auf Operator-Algebren gilt deshalb die sogenannte Kraus-Zerlegung

$$\Lambda \rho = \sum_{\alpha} V_{\alpha} \rho V_{\alpha}^*, \quad (2.34)$$

wobei V_{α} gebundene Operatoren auf \mathcal{H} sind, die die Bedingung $\sum_{\alpha} V_{\alpha}^* V_{\alpha} = 1$ erfüllen. Für einen n -dimensionalen Hilbert-Raum \mathcal{H} können immer Kraus-Zerlegungen mit höchstens n^2 Termen gefunden werden.

Auf der Theorie dynamischer Halbgruppen aufbauend hat Lindblad [58, 66] die allgemeinste Form einer Markovschen Mastergleichung zur Beschreibung der irreversiblen Dynamik eines offenen Quantensystems abgeleitet, deren Standard-Form lautet

$$\dot{\mathcal{L}}\rho = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + \sum_k \frac{\gamma_k}{2} \left(2L_k \rho L_k^{\dagger} - L_k L_k^{\dagger} \rho - \rho L_k^{\dagger} L_k \right), \quad (2.35)$$

wobei L_k die Lindblad-Operatoren bezeichnet. Jede Born-Markovsche Mastergleichung kann in Lindblad-Form geschrieben werden (beispielsweise ergibt sich die Mastergleichung des gedämpften Quantenoszillators mit $H = \hbar\omega_0 a^{\dagger} a$ durch die Wahl $L_1 = a$, $L_2 = a^{\dagger}$, $\gamma_1 = \gamma(N+1)$ und $\gamma_2 = \gamma N$), allerdings existiert nicht zu jeder Lindblad-Gleichung auch ein physikalisches System. Eine allgemeine Lindblad-Gleichung für den gedämpften Oszillator mit Lindblad-Operatoren in Form linearer Polynome in den Oszillatorkoordinaten q und p und dem Hamilton-Operator in der allgemeinsten quadratischen Form $H = H_0 + \frac{\lambda}{2}(qp + pq)$ lautet [67, 68, 69]

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{1}{i\hbar} [H_0, \rho] + \frac{\lambda + \gamma}{2i\hbar} [q, \{p, \rho\}] + \frac{\lambda - \gamma}{2i\hbar} [p, \{q, \rho\}] - \frac{D_{pp}}{\hbar^2} [q, [q, \rho]] - \frac{D_{qq}}{\hbar^2} [p, [p, q]] \\ &\quad + \frac{D_{qp}}{\hbar^2} ([q, [p, \rho]] + [p, [q, \rho]]), \end{aligned} \quad (2.36)$$

wobei die quantenmechanischen Diffusionskoeffizienten D_{pp} , D_{qq} , D_{qp} und die Dämpfungskonstante λ die Restriktionen

$$D_{pp} > 0, \quad D_{qq} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\lambda^2} (D_{pp}D_{qq} - D_{qp}^2) \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad (2.37)$$

erfüllen müssen, um die Positivitätsbedingung zu gewährleisten. Wird asymptotisch der kanonische Gleichgewichtszustand erreicht, so können die Koeffizienten weiter als

$$D_{pp} = \frac{\lambda + \gamma}{2} \hbar m \omega \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right), \quad D_{qq} = \frac{\gamma - \lambda}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right), \quad D_{qp} = 0 \quad (2.38)$$

geschrieben werden. In diesem Fall muss die Bedingung

$$\gamma > \lambda, \quad (\gamma^2 - \lambda^2) \coth^2\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \geq \gamma^2 \quad (2.39)$$

erfüllt sein [67]. Lindblad hat gezeigt [66], dass Markovsche Mastergleichungen des gedämpften Quantenoszillators, die die Positivitätsbedingung erfüllen, nicht gleichzeitig einer Translationsinvarianz und der Bedingung des detaillierten Gleichgewichts (was ein asymptotisches Erreichen der kanonischen Dichtematrix sicherstellt) genügen können. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Translationsinvarianz von Gl. (2.37) ist $\gamma = \lambda$. Für $\gamma \neq \lambda$ ist die Translationsinvarianz verletzt, dafür wird der kanonische Gleichgewichtszustand erreicht. Eine Aufstellung von einigen verwendeten Markovschen Mastergleichungen, die nicht der Positivitätsbedingung genügen, findet sich etwa in [67].

2.4 Markovsche und nicht-Markovsche Prozesse

Der axiomatische Zugang erlaubt es zwar, eine Markovsche Mastergleichung in mathematisch konsistenter Weise niederzuschreiben, dennoch sind zusätzliche phänomenologische Einsichten nötig, die zu einer konkreten Form der Lindblad-Operatoren führen. Zudem ist die Halbgruppensdynamik des Dichteoperators im Falle von Markovschen Mastergleichungen des Lindblad-Typs nur in Born-Markovscher Approximation gültig. Diese Näherung ist ausreichend, wenn die Korrelationszeiten der Umgebung wesentlich kürzer sind als alle anderen charakteristischen Zeitskalen des Systems und finden breite Anwendung in der theoretischen Quantenoptik. Allerdings ist diese Annahme mitunter nicht mehr erfüllt, wenn sehr kurze Dekohärenz- und Separabilitätszeitskalen betrachtet werden. In diesem Fall liefern nicht-Markovsche Mastergleichung ein genaueres Bild der dissipativen Dynamik des offenen Quantensystems auf kurzen Zeitskalen. Mit den nicht-Markovschen Methoden, wie sie in Kapitel 3 vorgestellt werden, ist es zudem möglich, auch quantenmechanische Korrelationen zu berücksichtigen, indem auf die Annahme schwacher Kopplung bzw. Dämpfung verzichtet wird. Die mit der Dekohärenz ursächlich einhergehende Verschränkung zwischen System und Bad, die in Born-Markovscher Approximation vollständig vernachlässigt wird, findet sich dann auch im stationären Zustand wieder. Die daraus erwachsenden Konsequenzen für die thermodynamische Betrachtungsweise werden in Kapitel 4 vorgestellt. Nicht-Markovsche Effekte, die in der Literatur häufig gerade wegen technischer Schwierigkeiten vernachlässigt werden, sind von nicht zu unterschätzender Bedeutung bei der Quantenkommunikation mit Systemen kontinuierlicher Variablen und bei der Implementierung von quanteninformationsverarbeitenden Systemen. So wird sich in Kapitel 6 und 7 zeigen, dass moderate nicht-Markovsche Einflüsse

zu einer Verlängerung von Dekohärenz- und Separabilitätszeiten führen. Diese Zeitskalen sind dann im Gegensatz zu Markovschen Approximationen explizit abhängig von den Eigenschaften des Bades in Form der spektralen Dichte und deren Abschneidefrequenz. Diese Abhängigkeit der Dekohärenzzeit von spektralen Eigenschaften des Bades bietet die Möglichkeit, durch gezieltes *Bath Engineering* den Verlust quantenmechanischer Interferenzfähigkeit und nichtklassischer Korrelationen verschränkter Zustände zu vermindern [37, 39, 70].

Kapitel 3

Quantenmechanische Brownsche Bewegung (QBM)

„Non-Markov is the rule, Markov is the exception.“

N. G. van Kampen [71]

Neben den im vorausgegangenen Kapitel vorgestellten quantenmechanischen Mastergleichungen vom Lindblad-Typ zur Beschreibung der Markovschen Dynamik des gedämpften Quantenoszillators oder des Zwei-Niveau-Systems stellt das Modell der quantenmechanischen Brownschen Bewegung (QBM) einen weiteren theoretischen Rahmen zur Untersuchung von dissipativer Quantendynamik zur Verfügung. Das hier verwendete Caldeira-Leggett Modell [11, 12] betrachtet ein Quantenteilchen, das sich in einem eindimensionalen harmonischen Potenzial bewegt und dabei linear mit einem Bad wechselwirkt, das aus einer großen Anzahl harmonischer Oszillatoren im thermischen Gleichgewichtszustand besteht und durch seine spektrale Dichte charakterisiert ist. Die aus mikroskopischen Überlegungen gewonnene quantenmechanische Langevin-Gleichung [17, 18] für den Systemfreiheitsgrad und die über Pfadintegralmethoden gewonnene exakte Mastergleichung für die Dichtematrix erlauben es, den Gültigkeitsbereich der Born-Markov-Approximationen zu überschreiten und auch durch starke Kopplung und/ oder tiefe Temperaturen gekennzeichnete Systeme zu untersuchen. Damit kann der Einfluss von nicht-Markovschen Effekten, die durch die entstehenden quantenmechanischen Korrelationen zwischen System und Umgebung hervorgerufen werden, studiert werden. In Abschnitt 3.1 wird zunächst das Caldeira-Leggett Modell vorgestellt und die Herleitung der quantenmechanischen Langevin-Gleichung skizziert. Anschließend wird in 3.2 der Pfadintegralformalismus kurz vorgestellt, insbesondere die für offene Quantensysteme entwickelte Einfluss-Funktional-Methode [13, 14, 15]. Die daraus von Hu, Paz und Zhang [16] gewonnene Mastergleichung (HPZ-Mastergleichung) wird anschließend in Abschnitt 3.3. präsentiert. Die Lösung der korrespondierenden verallgemeinerten Fokker-Planck-Gleichung für die Wigner-Funktion bildet die Grundlage für die Untersuchung der dissipativen Dynamik in den folgenden Kapiteln. Die explizite Berücksichtigung von entstehenden Quantenkorrelationen hat zur Folge, dass der stationäre Zustand verschränkt ist. Die daraus erwachsenden Konsequenzen für eine thermodynamische Betrachtung werden schließlich in Abschnitt 3.4 diskutiert.

3.1 Caldeira-Leggett Modell

Im Folgenden wird zunächst der Hamilton-Operator des Caldeira-Leggett-Modells vorgestellt. Aus den daraus gewonnenen Heisenbergschen Bewegungsgleichungen der Orts- und Impulsoperatoren werden die Badfreiheitsgrade eliminiert um schließlich die quantenmechanischen Langevin-Gleichung aufzustellen. Anschließend wird die Lösung dieser Gleichung skizziert und insbesondere auf den durch die spektrale Dichte und Temperatur des Bades bestimmten quantenmechanischen Rauschterm eingegangen.

3.1.1 Hamilton-Operator des Modells

Das Caldeira-Leggett Modell der quantenmechanischen Brownschen Bewegung [11, 72, 12], das in der Literatur auch vielfach als *Independent-Oscillator-Modell* [73, 74] bezeichnet wird, ist ein System-plus-Reservoir Modell mit Gesamt-Hamilton-Operator

$$H_{CL} = H_s + H_b + H_{\text{int}}, \quad (3.1)$$

wobei das Subsystem H_s über den Hamilton-Operator H_{int} mit dem Bad, beschrieben durch H_b , wechselwirkt. Konkret ist das System der QBM durch den Hamilton-Operator

$$H_{CL} = \frac{p^2}{2m} + V(q) + \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{m_i \omega_i^2}{2} \left(x_i - \frac{c_i q}{m_i \omega_i^2} \right)^2 \right] \quad (3.2)$$

beschrieben, wobei q und p die Heisenberg-Operatoren für Koordinate und Impuls des Brownschen Quantenpartikels sind, welches sich in einem harmonischen Potenzial $V(q) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2$ bewegt und an ein Bad aus N voneinander unabhängigen Oszillatoren mit Variablen x_i , p_i sowie Frequenzen $\omega_i = i\Delta$ gekoppelt ist. Das Bad ist charakterisiert über die spektrale Dichte

$$J(\omega) = \pi \sum_{i=1}^N \frac{c_i^2}{2m\omega_i} \delta(\omega - \omega_i). \quad (3.3)$$

Die Kopplung erfolgt bilinear in den Ortskoordinaten des Systems q und des Bades x_i mit Kopplungsparameter c_i . Zusätzlich sorgt der Selbstwechselwirkungsterm $\sim q^2$ im Hamilton-Operator

$$H_{\text{int}} = \sum_i \left[-c_i x_i q + \frac{c_i^2}{2m_i \omega_i^2} q^2 \right] \quad (3.4)$$

für eine Renormalisierung des Oszillatorpotenzials, so dass das Minimum des Hamilton-Operators (3.2) bezüglich der Variablen q durch das Minimum des Teilchenpotenzials $V(q)$ bestimmt wird. Wird die notwendige Bedingung für ein Minimum bezüglich x_i

$$\frac{\partial H_{CL}}{\partial x_i} = m_i \omega_i^2 x_i - c_i q = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i = \frac{c_i}{m_i \omega_i^2} q \quad (3.5)$$

$$\text{in} \quad \frac{\partial H_{CL}}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial q} - \sum_i c_i x_i + q \sum_i \frac{c_i^2}{m_i \omega_i^2} \quad \text{eingesetzt,}$$

$$\text{so folgt} \quad \frac{\partial H_{CL}}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial q}. \quad (3.6)$$

Das Caldeira-Leggett-Modell (3.2) führt damit auf die Differentialgleichungen

$$\ddot{q} = -\omega_0^2 q - \sum_i \frac{c_i^2}{m m_i \omega_i^2} q + \sum_i \frac{c_i}{m} x_i \quad (3.7)$$

$$\ddot{x}_i = -\omega_i^2 x_i + \frac{c_i}{m_i} q. \quad (3.8)$$

Werden die inhomogenen Differentialgleichungen der Badmoden (3.7) gelöst und partiell integriert (wobei $q(t)$ als gegebene Funktion angenommen wird), so lauten diese Lösungen

$$x_i(t) = x_i(0) \cos \omega_i t + \frac{p_i(0)}{m_i \omega_i} \sin \omega_i t + \frac{c_i}{m_i \omega_i^2} (q(t) - q(0) \cos \omega_i t) - \frac{c_i}{m_i \omega_i^2} \int_0^t dt' \cos \omega_i (t - t') \dot{q}(t'). \quad (3.9)$$

Das Einsetzen in (3.7) liefert:

$$\begin{aligned} m \ddot{q} + m \omega_0^2 q &= \sum_i c_i \left(x_i(0) \cos \omega_i t + \frac{p_i(0)}{m_i \omega_i} \sin \omega_i t \right) + \\ &+ q(0) \sum_i \frac{c_i^2}{m_i \omega_i^2} \cos \omega_i t - \int_0^t dt' \sum_i \frac{c_i^2}{m_i \omega_i^2} \cos \omega_i (t - t') \dot{q}(t'). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dies ist letztlich schon die quantenmechanische Langevin-Gleichung, die nach Einführung von Dämpfungs- und Rauschterm im nächsten Abschnitt etwas kompakter geschrieben werden kann.

3.1.2 Quantenmechanische Langevin-Gleichung

Aus dem Hamilton-Operator (3.2) erhält man die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen der Operatoren q und p sowie der Badvariablen x_i , p_i . Durch Elimination der Badfreiheitsgrade lässt sich Gleichung (3.10) auch als sogenannte *quantenmechanische Langevin-Gleichung* [18, 17] eines Quantenoszillators im harmonischen Potenzial $V(q)$ schreiben:

$$m \ddot{q}(t) + \frac{dV(q)}{dq} + \int_0^t dt' \gamma(t - t') \dot{q}(t') = \eta(t) - q(0) \gamma(t), \quad (3.11)$$

mit Dissipationsterm

$$\gamma(t - t') = \sum_i \frac{c_i^2}{m_i \omega_i^2} \cos \omega_i (t - t') = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} \cos \omega (t - t') \quad (3.12)$$

und Rauschterm

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^N c_i \left(x_i(0) \cos \omega_i t + \frac{p_i(0)}{m_i \omega_i} \sin \omega_i t \right), \quad (3.13)$$

der durch die Autokorrelationsfunktion (bei Mittelung über die Bad-Dichtematrix $\rho_b(0)$)

$$K(t - t') = \frac{1}{2} \langle \{\eta(t), \eta(t')\} \rangle = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth\left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega\right) \cos \omega (t - t') \quad (3.14)$$

charakterisiert ist [7] und im nächsten Abschnitt noch ausführlich für unterschiedliche spektrale Dichte $J(\omega)$ behandelt wird. Die stationären Korrelationen $\langle q^2 \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle q^2(t) \rangle$ und $\langle p^2 \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle p^2(t) \rangle$ sind mit der Suszeptibilität

$$\tilde{\chi}(\omega) = [m \omega_0^2 - m \omega^2 - i \omega \tilde{\gamma}(\omega)]^{-1} \quad \text{mit} \quad \tilde{\gamma}(\omega) = \int_0^\infty dt \gamma(t) e^{i \omega t} \quad (3.15)$$

über das quantenmechanische Fluktuations-Dissipations-Theorem [6] verbunden:

$$\langle q^2 \rangle = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \tilde{\chi}''(\omega), \quad (3.16)$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega m^2 \omega^2 \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \tilde{\chi}''(\omega). \quad (3.17)$$

Setzt man den Imaginärteil der Suszeptibilität $\tilde{\chi}''(\omega)$ des nicht-Markovschen gedämpften Oszillators mit den drei charakteristischen Frequenzen λ_1 , λ_2 und λ_3 (bzw. Pole in der komplexen Ebene) ein, so lässt sich für die Gleichungen (3.16) und (3.17) ein analytischer Ausdruck angeben [4]:

$$\langle q^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{(\lambda_i - \Gamma) \psi\left(\frac{\beta\hbar\lambda_i}{2\pi}\right)}{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)(\lambda_{i-1} - \lambda_i)} - T, \quad (3.18)$$

$$\langle p^2 \rangle = m^2 \omega_0^2 \langle q^2 \rangle + \frac{\hbar\gamma\Gamma}{\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_i \psi\left(\frac{\beta\hbar\lambda_i}{2\pi}\right)}{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)(\lambda_{i-1} - \lambda_i)}, \quad (3.19)$$

mit Digamma-Funktion $\psi(x)$ [75] und $\lambda_0 = \lambda_3$, $\lambda_4 = \lambda_1$. Die charakteristischen Frequenzen erfüllen dabei die Vieta-Relationen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \Gamma, \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \omega_0^2 + \frac{\gamma\Gamma}{m}, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \Gamma\omega_0^2. \quad (3.20)$$

Die zeitabhängige Lösung der Langevin-Gleichung (3.11) ist gegeben durch

$$q(t) = q(0)\dot{f}(t) + \frac{1}{m}p(0)f(t) + \frac{1}{m} \int_0^t dt' f(t-t')\eta(t'), \quad (3.21)$$

$$p(t) = mq(0)\ddot{f}(t) + p(0)\dot{f}(t) + \int_0^t dt' \dot{f}(t-t')\eta(t'), \quad (3.22)$$

mit der Green-Funktion

$$f(t) = \frac{m}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega \tilde{\chi}(\omega) e^{-i\omega t} = \sum_{i=1}^3 f_i e^{-\lambda_i t} \quad \text{mit} \quad f_i = \frac{\Gamma - \lambda_i}{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)(\lambda_{i-1} - \lambda_i)}. \quad (3.23)$$

Für einen Ausgangszustand minimaler Unschärfe mit $\langle x^2(0) \rangle = \sigma_0^2$, ist die Zeitentwicklung der zweiten Momente nach Mittelung über die anfängliche Bad-Verteilung $\rho_b(0)$ durch

$$\langle q^2(t) \rangle = \dot{f}^2(t)\sigma_0^2 + f^2(t) \frac{\hbar^2}{4\sigma_0^2 m^2} + K_q(t), \quad (3.24)$$

$$\langle p^2(t) \rangle = m^2 \dot{f}^2(t)\sigma_0^2 + f^2(t) \frac{\hbar^2}{4\sigma_0^2} + K_p(t), \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{2} \langle \{q, p\}(t) \rangle = m \dot{f}(t)\ddot{f}(t)\sigma_0^2 + \frac{\hbar^2}{4m\sigma_0^2} f(t)\dot{f}(t) + K_{qp}(t) \quad (3.26)$$

gegeben, wobei die inhomogenen Anteile der Lösung bestimmt sind durch [5]:

$$K_q(t) = \frac{1}{m^2} \int_0^t \int_0^t dt' dt'' f(t-t') f(t-t'') K(t'-t'') = \quad (3.27)$$

$$= \frac{\hbar}{m^2\pi} \int_0^\infty J(\omega) \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \left| \int_0^t dt' f(t') e^{i\omega t'} \right|^2,$$

$$K_p(t) = \int_0^t \int_0^t dt' dt'' \dot{f}(t-t') \dot{f}(t-t'') K(t'-t''), \quad (3.28)$$

$$K_{qp}(t) = \frac{1}{m} \int_0^t \int_0^t dt' dt'' f(t-t') \dot{f}(t-t'') K(t'-t'') = \frac{m}{2} \dot{K}_q(t). \quad (3.29)$$

Die Funktionen $f(t)$, $\dot{f}(t)$ und $\ddot{f}(t)$ fallen für $t \rightarrow \infty$ auf Null ab, so dass die Information über die anfängliche Preparation verloren geht. Die stationären Korrelationen gewinnt man aus den inhomogenen Lösungsanteilen. Beispielsweise erhält man aus der Funktion $K_q(t)$ im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ wegen

$$\left| \int_0^\infty dt' f(t') e^{i\omega t'} \right|^2 = \tilde{f}(\omega) \tilde{f}^*(\omega) = m^2 \tilde{\chi}(\omega) \tilde{\chi}^*(\omega) = \frac{m^2}{J(\omega)} \tilde{\chi}''(\omega) \quad (3.30)$$

da $\tilde{\chi}(\omega) = \frac{1}{m} \hat{f}(-i\omega) = \frac{1}{m} \tilde{f}(\omega)$, den Ausdruck (3.16) für die stationäre Varianz. Es ist also

$$\langle q^2 \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} K_q(t), \quad \langle p^2 \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} K_p(t), \quad \langle \{q, p\} \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} K_{qp}(t) = 0. \quad (3.31)$$

In die inhomogenen Lösungsanteile $K_{q,p,qp}$ geht jeweils die Autokovarianzfunktion $K(t)$ des Rauschterms $\eta(t)$ ein. Diese wird im nächsten Abschnitt eingehender untersucht.

3.1.3 Quantenmechanisches Rauschen und Dissipation

Der eingeführte Rauschterm (3.13) und Dämpfungsterm (3.12) beschreiben in summarischer Weise die Wechselwirkung des zentralen Oszillators mit der Umgebung. Die stochastischen Eigenschaften des Rauschterms kommen durch die Abhängigkeit von der Verteilung der Anfangswerte zustande. Die Unkenntnis über die Anfangswerte der Badvariablen führt also zum Zufallscharakter der Rauschkraft. Vakuumfluktuationen sorgen dafür, dass der Rauschterm auch für $T \rightarrow 0$ nicht verschwindet. Unter der Annahme einer anfänglichen kanonischen Dichtematrix $\rho_b(0)$ mit Boltzmann-Verteilung für die Besetzungszahlen der untereinander nicht wechselwirkenden, prinzipiell unterscheidbaren Badoszillatoren, sind die Erwartungswerte und Varianzen der Operatoren bei Mittelung über ρ_b gegeben durch:

$$\langle x_i(0)x_k(0) \rangle = \text{Tr}[x_i x_k \rho_b] = \frac{\hbar}{2m_i \omega_i} \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_i\right) \delta_{ik}, \quad \langle x_i(0) \rangle = 0, \quad (3.32)$$

$$\langle p_i(0)p_k(0) \rangle = \frac{\hbar}{2} m_i \omega_i \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_i\right) \delta_{ik}, \quad \langle p_i(0) \rangle = 0,$$

$$\langle x_i(0)p_k(0) \rangle = -\langle p_i(0)x_k(0) \rangle = \frac{i\hbar}{2} \delta_{ik}. \quad (3.33)$$

Der Rauschterm ist also eine Linearkombination von Variablen mit Normalverteilung und damit selbst wieder eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert

$$\langle \eta(t) \rangle = \frac{\text{Tr}[\eta(t) e^{-\beta H_b}]}{\text{Tr}[e^{-\beta H_b}]} = \sum_{i=1}^N c_i \left[\langle x_i(0) \rangle \cos(\omega_i t) + \frac{\langle p_i(0) \rangle}{m_i \omega_i} \sin(\omega_i t) \right] = 0. \quad (3.34)$$

Die Korrelation

$$\begin{aligned} \langle \eta(t)\eta(0) \rangle &= \sum_{i=1}^N c_i c_k \left\langle \left(x_i(0) \cos \omega_i t + \frac{p_i(0)}{m_i \omega_i} \sin \omega_i t \right) x_k(0) \right\rangle_{\rho_b} = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\hbar c_i^2}{2m_i \omega_i} \left[\coth \frac{1}{2} \beta \hbar \omega_i \cos \omega_i t - i \sin \omega_i t \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

ist eine komplexe Größe, da die Operatoren $\eta(t)$ und $\eta(0)$ im Allgemeinen nicht kommutieren:

$$\langle [\eta(t), \eta(0)] \rangle = \sum_i \frac{-i\hbar c_i^2}{2m_i \omega_i} \sin \omega_i t = \frac{-i\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \sin \omega t = \frac{i\hbar}{2} \frac{d}{dt} \gamma(t). \quad (3.36)$$

Als Autokovarianzfunktion $K(t - t')$ wird deshalb die Antikommutator-Relation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \{\eta(t), \eta(t')\} \rangle &= \sum_{i=1}^N c_i^2 \left[\langle x_i^2(0) \rangle \cos(\omega_i t) \cos(\omega_i t') + \frac{\langle p_i^2(0) \rangle}{m_i^2 \omega_i^2} \sin(\omega_i t) \sin(\omega_i t') \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \hbar \frac{c_i^2}{2m_i \omega_i} \coth\left(\frac{1}{2}\beta \hbar \omega_i\right) \cos \omega_i(t - t') \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$= \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth\left(\frac{1}{2}\beta \hbar \omega\right) \cos \omega(t - t') \quad (3.38)$$

verwendet. Die spezifischen Badeigenschaften treten dabei in der spektralen Dichte $J(\omega)$ zutage. Eine sehr häufig Verwendung findende Dichte ist das Drude-Spektrum

$$J(\omega) = \pi \sum_{i=1}^N \frac{c_i^2}{2m_i \omega_i} \delta(\omega - \omega_i) = \gamma \omega \frac{\Gamma^2}{(\omega^2 + \Gamma^2)}, \quad \text{mit} \quad c_i^2 = \frac{2\gamma \Delta m_i \omega_i^2 \Gamma^2}{\pi(\omega_i^2 + \Gamma^2)}, \quad (3.39)$$

das sich durch die Wahl der Drude-Ullersma-Kopplung [76] für die c_i im thermodynamischen Limes mit $\Delta \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ ergibt, wobei $\Gamma = N\Delta$ die Abschneidefrequenz und γ die Kopplungskonstante ist. In diesem Fall nimmt der Dämpfungsterm (3.12) eine exponentiell abfallende Form an:

$$\gamma(t - t') = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} \cos \omega(t - t') = \gamma \Gamma e^{-\Gamma|t-t'|}, \quad (3.40)$$

so dass die Autokorrelationsfunktion (3.14) für hohe Temperaturen die einfache Form

$$K(t - t') = kT \gamma(t - t') = \gamma \Gamma kT e^{-\Gamma|t-t'|}, \quad \text{mit} \quad K(0) = \gamma \Gamma kT \quad (3.41)$$

hat. Für tiefe Badtemperatur $T \rightarrow 0$ ist die Autokorrelationsfunktion (3.14) für Zeiten $t > \Gamma^{-1}$ negativ und damit antikorreliert. Zudem zeigt das zeitliche Verhalten für große Zeiten einen algebraischen Verlauf $K(|t - t'|) \sim -|t - t'|^{-2}$ [7]. Nachteilig an dieser Wahl der spektralen Dichte ist allerdings die logarithmische Divergenz der Rauschkorrelationsfunktion bei tiefen Temperaturen für $t \rightarrow 0$,

$$K(0) = \langle \eta^2(0) \rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\hbar}{\pi} \int_0^s d\omega \frac{\gamma \omega \Gamma^2}{\Gamma^2 + \omega^2} = \frac{\gamma \hbar \Gamma^2}{2\pi} \lim_{s \rightarrow \infty} \ln [1 + (s/\Gamma)^2]. \quad (3.42)$$

Im Ohmschen Grenzfall ist die spektrale Dichte durch $J(\omega) = \gamma \omega \Theta(\Gamma - \omega)$ mit Heaviside-Sprungfunktion θ gegeben. Der Rauschterm (3.14) wird in diesem Fall zu

$$K_{\text{ohm}}(t - t') = \frac{\hbar \gamma}{\pi} \int_0^\Gamma d\omega \omega \coth\left(\frac{1}{2}\beta \hbar \omega\right) \cos \omega(t - t'), \quad (3.43)$$

wobei auch hier die Abschneidefrequenz Γ zur Vermeidung divergierender Integrale nötig ist. Eine direkte Unterscheidung zwischen Ohmschen, sub-Ohmschen und super-Ohmschen Bädern ist durch eine spektrale Dichte der Form

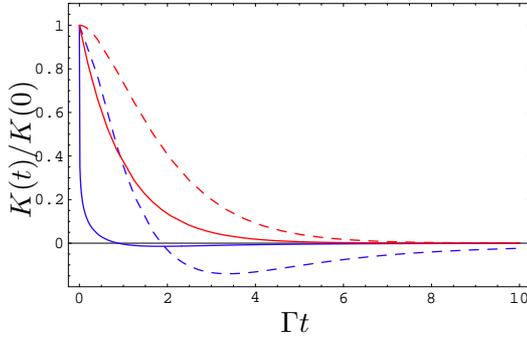
$$J_n(\omega) = \gamma \omega^n \Gamma^{1-n} e^{-\omega/\Gamma} \quad (3.44)$$

möglich (super-Ohmsch für $n > 1$, sub-Ohmsch für $n < 1$). Diese findet in der Literatur ebenfalls häufig Verwendung. Die Tabelle 3.1 stellt einige unterschiedliche spektrale Dichten und die daraus resultierenden Rausch- und Dämpfungsterme einander gegenüber, und

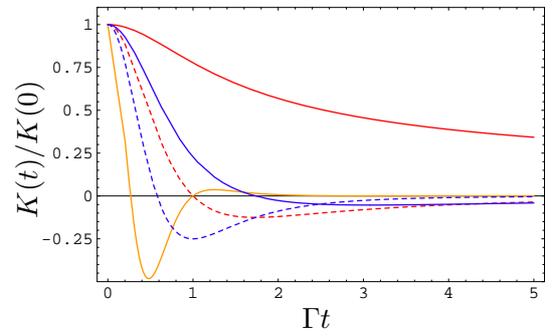
die Abbildung 3.1 visualisiert die Abhängigkeit der Rauschautokorrelationsfunktion von der spektralen Dichte des Bades. Wie Abb. 3.1a verdeutlichen soll, ist das Quantenrauschen für spektrale Dichten mit Cauchy-Lorentz-Funktion bei tiefen Temperaturen und längeren Betrachtungszeiträumen antikorreliert, für hohe Temperaturen jedoch stets positiv korreliert. Das diese Antikorrelation allerdings keine spezielle Eigenschaft des Quantenvakuumrauschens ist, sondern vielmehr auch für hohe Temperaturen im Falle super-Ohmscher Bäder auftritt, ist aus Abb. 3.1b ersichtlich. Zudem wird deutlich, dass im super-Ohmschen Fall auch eine Oszillation der Korrelationsfunktion möglich ist.

$J(\omega)$	$\gamma(t)$	$K_{T \rightarrow 0}(t)$	$K_{T \rightarrow 0}(0)$	$K_{\beta \rightarrow 0}(0)$
$\frac{\gamma\omega\Gamma^2}{\Gamma^2+\omega^2}$	$\gamma\Gamma e^{-\Gamma t}$	$\frac{\gamma\hbar\Gamma^2}{2\sqrt{\pi}}G(0, 0, 1/2, \Gamma^2 t^2/2)$	$\frac{\gamma\hbar\Gamma^2}{\pi} \ln(\infty)$	$\gamma\Gamma kT$
$\frac{\gamma\omega\Gamma^4}{(\Gamma^2+\omega^2)^2}$	$\gamma\Gamma(1+\Gamma t)e^{-\Gamma t}$	$\frac{\gamma\hbar\Gamma^2}{\sqrt{\pi}}G(0, 1, 1/2, \Gamma^2 t^2/2)$	$\frac{\gamma\hbar\Gamma^2}{\pi}$	$\gamma\Gamma kT$
$\gamma\left(\frac{\omega}{\Gamma}\right)\Gamma e^{-\omega/\Gamma}$	$\frac{2\gamma\Gamma}{\pi(1+\Gamma^2 t^2)}$	$\gamma\hbar\Gamma^2 \frac{(1-\Gamma^2 t^2)}{\pi(1+\Gamma^2 t^2)^2}$	$\frac{\gamma\hbar\Gamma^2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}\gamma\Gamma kT$
$\gamma\left(\frac{\omega}{\Gamma}\right)^2 \Gamma e^{-\omega/\Gamma}$	$\frac{2\gamma\Gamma(1-\Gamma^2 t^2)}{\pi(1+\Gamma^2 t^2)^2}$	$\frac{2\gamma\hbar\Gamma^2(1-3\Gamma^2 t^2)}{\pi(1+\Gamma^2 t^2)^2}$	$\frac{2\gamma\hbar\Gamma^2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}\gamma\Gamma kT$
$\gamma\sqrt{\frac{\omega}{\Gamma}}\Gamma e^{-\omega/\Gamma}$	$\frac{2\gamma\Gamma \cos(\frac{1}{2} \arctan \Gamma t)}{\sqrt{\pi}(1+\Gamma^2 t^2)^{1/4}}$	$\frac{\gamma\hbar\Gamma^2 \cos(\frac{3}{2} \arctan \Gamma t)}{2\sqrt{\pi}(1+\Gamma^2 t^2)^{3/4}}$	$\frac{\gamma\hbar\Gamma^2}{2\sqrt{\pi}}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\gamma\Gamma kT$

Tabelle 3.1: Dissipationsterme $\gamma(t)$ und Rausch-Korrelationsfunktionen $K(t)$ für unterschiedliche spektrale Dichten $J(\omega)$ des Bades. Der Rauschterm $K(t)$ und $K(0)$ ist jeweils für $T \rightarrow 0$ angegeben. Für $kT \gg \hbar\Gamma$ ist jeweils $K(t) = kT\gamma(t)$. Die Funktion G steht für die MeijerG-Funktion [77, 75].



(a) Autokorrelationsfunktion $K(t)/K(0)$ für Drude Spektrum (durchgezogene Linien) im Vergleich zur Umgebung mit $J(\omega)$ gem. der 2. Zeile der Tabelle 3.1. (gestrichelt) für hohe und tiefe Temperaturen (rot) und tiefe Temperaturen (blau).



(b) Autokorrelationsfunktion $K(t)/K(0)$ für Spektrum (3.44) mit $n = 1/2$ (durchgezogene Linie), $n = 2$ (gestrichelt) für hohe und tiefe Temperaturen (rot bzw. blau), sowie Nulltemperatur-Verlauf für $n = 5$ (gelbe Linie).

Abbildung 3.1: Autokorrelationsfunktion $K(t - t')/K(t')$ der Rauschfunktion für unterschiedliche spektrale Dichten $J(\omega)$ nach Tabelle 3.1 für hohe und tiefe Temperaturen (Parameter $\gamma = 0.01m\omega$, $\Gamma = 10\omega_0$). Links: Nur für tiefe Temperaturen ist das Quantenrauschen über längere Zeitspannen antikorreliert (negative Werte). Rechts: Antikorrelation kann auch bei hohen Temperaturen auftreten (rot gestrichelt), ist also keine spezielle Eigenschaft des Quantenvakuumrauschens. Für super-Ohmsche Bäder kann die Autokorrelationsfunktion auch oszillieren (gelbe Kurve).

3.2 Pfadintegralformalismus im Caldeira-Leggett-Modell

Neben der quantenmechanischen Langevin-Gleichung, die als Ausgangspunkt die aus dem Hamilton-Operator gewonnenen mikroskopischen Heisenbergschen Bewegungsgleichungen hat, bietet sich als alternativer Zugang zur Behandlung nicht-Markovscher Dynamik der von Feynman entwickelte Pfadintegralformalismus an [78, 79], der auf der Lagrange-Funktion der klassischen Mechanik basiert. Ausgangspunkt ist dabei die klassische Wirkung, die als Phase in die Amplituden der einzelnen quantenmechanischen Pfade eingeht. Die Zeitentwicklung des Systems wird dann durch den Propagator bestimmt, der als Funktional-Integral aus den Amplituden der möglichen Pfade gewonnen wird. Zu unterscheiden ist dabei zwischen dem Pfadintegralformalismus in Realzeit, der die unitäre Dynamik von Quantensystemen beschreibt, dem Pfadintegralformalismus in Imaginärzeit, der die quantenstatistische Betrachtung von Gleichgewichtssystemen erlaubt, und dem Einfluss-Funktional-Integral-Formalismus zur Beschreibung der nicht-unitären Nichtgleichgewichtsdynamik offener Quantensysteme. Letzterer erlaubt die Herleitung einer quantenmechanischen Master-Gleichung deren zeitlich nichtlokale Koeffizienten den nicht-Markovschen Charakter widerspiegeln.

3.2.1 Grundlagen des Pfadintegralformalismus

Der Pfadintegralformalismus in Realzeit ermöglicht die Beschreibung der unitären Dynamik von Quantenzuständen, die äquivalent ist zur Beschreibung mittels der Schrödinger-Gleichung für reine Zustände bzw. der Heisenberg-von-Liouville-Gleichung für gemischte Zustände. Pfadintegrale im Imaginärzeitformalismus hingegen erlauben eine quantenstatistische Gleichgewichtsbetrachtung von Systemen im Kontakt mit einem thermischen Reservoir. Der auf offene Quantensysteme erweiterte Pfadintegralformalismus schließlich verbindet diese beiden Ansätze, indem er die Beschreibung der Nichtgleichgewichtsdynamik im Rahmen thermischer Relaxationsprozesse ermöglicht.

Um die Notation einzuführen, soll zunächst eine kurze Einführung in den Pfadintegralformalismus in Realzeit erfolgen, wie sie etwa in Ref. [80] zu finden ist. Dazu betrachte man die unitäre Zeitentwicklung eines Zustandes $|\psi\rangle$ unter der Schrödinger-Gleichung,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\psi(0)\rangle. \quad (3.45)$$

Die Lösung im Ortsraum kann durch die Übergangs- bzw. Wahrscheinlichkeitsamplitude $\langle q | \exp(-iHt/\hbar) | q' \rangle$ des Zeitentwicklungsoperators angegeben werden:

$$\psi(q, t) = \int dq' \mathcal{K}(q, t | q', 0) \psi(q', 0) \quad \text{mit} \quad \mathcal{K}(q, t | q', 0) = \langle q | \exp(-iHt/\hbar) | q' \rangle. \quad (3.46)$$

Der Propagator $\mathcal{K}(q, t | q', 0)$ wird zum zentralen Objekt im Feynmanschen Pfadintegralformalismus, indem er als Produkt von Übergangswahrscheinlichkeiten für infinitesimale Zeitintervalle ausgedrückt wird:

$$K(q_N, t_N | q_0, t_0) = \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dq_n \right] \prod_{n=1}^N \langle q_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t_n - t_{n-1})} | q_{n-1} \rangle \quad (3.47)$$

$$\approx \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dq_n \right] \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} S^N \right] \quad (3.48)$$

wobei $S^N = \sum_{n=1}^N [p_n(q_n - q_{n-1}) - (t_n - t_{n-1})H(p_n, q_n, t_n)]$ im Kontinuumlimes $N \rightarrow \infty$ in die klassische Wirkung übergeht,

$$S[q, p, t] = \lim_{N \rightarrow \infty} S^N = \int_{t_0}^{t_N} dt [p(t)\dot{q}(t) - H(q(t), p(t), t)]. \quad (3.49)$$

Das Produkt unendlich vieler Integrale

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dq_n \right] \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right] \equiv \int_{(q_0, t_0)}^{(q_N, t_N)} \mathcal{D}'q \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \quad (3.50)$$

wird als Pfadintegral bezeichnet. Per Definition ist in diesem Produkt immer eine Integration über p_n mehr enthalten als über q_n . Während q_0 und q_N festgehalten werden und die q_n -Integration für $n = 1, \dots, N-1$ ausgeführt wird, wird jedes Paar (q_n, q_{n-1}) von einer p_n -Integration für $n = 1, \dots, N$ begleitet. Dies wird durch die Notation $\mathcal{D}'q$ ausgedrückt. Diese Asymmetrie dreht sich um, wenn nicht die Start- und Endwerte von q sondern von p fixiert werden. Der Propagator bzw. die Übergangsamplitude kann nun als Pfadintegral in der Form

$$\mathcal{K}(q_f, t_f | q_i, t_i) = \int_{(q_i, t_i)}^{(q_f, t_f)} \mathcal{D}'q \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S[q, p] \right], \quad (3.51)$$

geschrieben werden. Anstelle dieser Phasenraumdarstellung wird häufig – wie auch in Feynmans Originalarbeit [78] – die Darstellung im Konfigurationsraum verwendet,

$$\mathcal{K}(q_f, t_f | q_i, t_i) = \int_{(q_i, t_i)}^{(q_f, t_f)} \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} S[q(t)] \right] \quad \text{mit} \quad S[q(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (3.52)$$

wobei die Wirkung $S[q]$ aus der klassischen Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q, t)$ gewonnen wird. Die Integration – ausgedrückt durch $\mathcal{D}[q(t)]$ – erfolgt dabei über alle Pfade $q(t)$, die die Randbedingungen $q(t_i) = q_i$, $q(t_f) = q_f$ erfüllen. Die möglichen Pfade sind dabei gleichgewichtet und unterscheiden sich nur in dem jeweiligen Phasenfaktor $e^{iS[q, p]/\hbar}$, der als quantenmechanisches Analogon zum Boltzmann-Faktor $e^{-\beta H(q, p)}$ der statistischen Mechanik aufgefasst werden kann. Diese Analogie erlaubt auch die Herleitung quantenstatistischer Größen wie der Zustandssumme, indem die Integration analytisch auf imaginäre Zeit erweitert wird. Dies soll im nächsten Abschnitt behandelt werden.

3.2.2 Imaginärzeit-Pfadintegrale und Quanten-Statistik

Die statistische Beschreibung des Gleichgewichtszustands eines Quantensystems in einer thermischen Umgebung mit inverser Temperatur β erfolgt über dessen Zustandssumme $Z_\beta = \text{Tr}[e^{-\beta\hat{H}}]$ und Dichtematrix $\rho_\beta = Z_\beta^{-1}e^{-\beta\hat{H}}$, die in Ortsdarstellung durch

$$\rho_\beta(q, q') = \frac{1}{Z_\beta} \langle q | e^{-\beta\hat{H}} | q' \rangle \quad \text{mit} \quad Z_\beta = \int_{-\infty}^{\infty} dq \langle q | e^{-\beta\hat{H}} | q \rangle \quad (3.53)$$

gegeben sind. Im Gegensatz dazu erhält man aus obigen Pfadintegralformalismus die quantenmechanische Zustandssumme

$$Z_{\text{qm}}(t_f, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \langle q | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)/\hbar} | q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \mathcal{K}(q, t_f | q, t_i) = \quad (3.54)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{(q, t_i)}^{(q, t_f)} \mathcal{D}'q \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S[q, p] \right] \quad (3.55)$$

und entsprechend den Dichteoperator

$$\rho(q_f, q_i) = \frac{1}{Z_{\text{qm}}} \mathcal{K}(q_f, t_f | q_i, t_i) = \frac{1}{Z_{\text{qm}}} \int_{(q_i, t_i)}^{(q_f, t_f)} \mathcal{D}'q \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S[q, p] \right]. \quad (3.56)$$

die beide Ausdruck der unitären Entwicklung eines isolierten Quantensystems sind. Ein Vergleich der Zustandssummen Z_β und Z_{qm} legt nahe, dass durch eine Transformation auf imaginäre Zeit $(t_f - t_i) \rightarrow -i\hbar\beta$ eine Darstellung der quantenstatistischen Zustandssumme Z_β durch Pfadintegrale möglich ist:

$$Z_\beta = \int_{-\infty}^{\infty} dq \mathcal{K}(q, \hbar\beta | q, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{(q,0)}^{(q,\hbar\beta)} \mathcal{D}q \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \exp \left[-\frac{1}{\hbar} S^E[q, p] \right], \quad \text{wobei} \quad (3.57)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{(q,0)}^{(q,\hbar\beta)} \mathcal{D}q \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_n dp_n}{2\pi\hbar} \equiv \oint \mathcal{D}q \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar}. \quad (3.58)$$

Die Dichtematrix für den thermischen Gleichgewichtszustand lautet demzufolge

$$\rho_\beta(q, q') = \frac{1}{Z_\beta} \mathcal{K}(q, \hbar\beta | q', 0) = \frac{1}{Z_\beta} \int_{(q',0)}^{(q,\hbar\beta)} \mathcal{D}q \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \exp \left[-\frac{1}{\hbar} S^E[q, p] \right], \quad (3.59)$$

wobei $S^E[q, p]$ in beiden Fällen die Euklidische Wirkung bezeichnet und durch

$$S^E[q, p] = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left[H(q, p, \tau) - p \left(\frac{dq}{d\tau} \right) \right] \quad (3.60)$$

gegeben ist, mit Differentiation von q nach der imaginären Zeit τ . $S^E[q]$ ist entsprechend durch einen Wechsel des Vorzeichens im Potenzialterm der Lagrange-Funktion gekennzeichnet:

$$S^E[q] = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q, \tau) \right]. \quad (3.61)$$

Im Konfigurationsraum lautet die Darstellung der Dichtematrix folglich

$$\rho_\beta(q, q') = \frac{1}{Z_\beta} \int_{(q',0)}^{(q,\hbar\beta)} \mathcal{D}q e^{-S^E[q(t)]/\hbar} \quad \text{mit} \quad Z_\beta = \int dq \int_{(q,0)}^{(q,\hbar\beta)} \mathcal{D}q e^{-S^E[q(t)]/\hbar}. \quad (3.62)$$

Die Dichtematrix und Zustandssumme enthalten jeweils die vollständige thermodynamische Information über ein Quantensystem. Daraus lassen sich dann alle weiteren thermodynamischen Potentiale bestimmen. Der Pfadintegralformalismus in Realzeit erlaubt die Beschreibung der unitären Zeitentwicklung isolierter Quantensysteme. Der Imaginärzeit-Formalismus erlaubt es, quantenstatistische Größen für Quantensysteme im thermischen Gleichgewicht abzuleiten. Für die Beschreibung von Relaxationsprozessen im Rahmen dissipativer Quantendynamik stehen ebenfalls Pfadintegralmethoden zur Verfügung, die im Folgenden dargestellt werden.

3.2.3 Pfadintegrale für dissipative Quantensysteme

Für die Modellierung dissipativer Quantendynamik durch System-plus-Reservoir-Modelle stehen Pfadintegraltechniken ebenfalls zur Verfügung. Die Darstellung der Übergangsamplitude als Pfadintegral erfolgt in analoger Weise durch

$$\mathcal{K} = \oint \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_{\text{eff}}[q(t)] \right] \quad \text{mit} \quad S_{\text{eff}}[q(t)] = \int dt \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) + \text{Diss. Terme} \right] \quad (3.63)$$

wobei der Einfluss der Umgebung in Form einer effektiven Wirkung S_{eff} zum Ausdruck gebracht wird, die zusätzliche dissipative Terme enthält. Eine explizite Anwendung dieser von Feynman und Vernon entwickelten Methode [13, 79, 81] wird nun im Folgenden anhand des Caldeira-Leggett Modells dargestellt, wobei der Imaginärzeit-Formalismus wieder zur Bestimmung der quantenstatistischen Größen herangezogen wird, während die Pfadintegrale in Realzeit auch den Relaxationsprozess beschreiben können.

3.2.3.1 Effektive Wirkung und Einfluss-Funktional

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Skizzierung der Herleitung von Dichtematrix und Zustandssumme des Brownschen Quantenoszillators mit Hilfe des Pfadintegralformalismus in Imaginärzeit. Ausgangspunkt ist dabei die Dichtematrix des Gesamtsystems

$$\rho_{\text{tot}}(q, x_i, q', x'_i) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{tot}}} \int \mathcal{D}q \left(\prod_{i=1}^N \mathcal{D}x_i \right) \exp \left[-\frac{1}{\hbar} S_{\text{tot}}^E[q, x_i] \right], \quad (3.64)$$

welches durch die Euklidische Wirkung $S_{\text{tot}}^E = S_s^E + S_b^E + S_{sb}^E$ gekennzeichnet ist. Dem Caldeira-Leggett-Hamilton-Operator (3.2) entsprechend lautet diese Euklidische Wirkung

$$S_{\text{tot}}^E = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left[\frac{m}{2} (\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2) + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \omega_i^2 x_i^2) - q \sum_{i=1}^N c_i x_i + \sum_{i=1}^N \frac{c_i^2}{2m_i \omega_i} q^2 \right]. \quad (3.65)$$

Durch Integration über die Badvariablen x_i erhält man die reduzierte Dichtematrix des Brownschen Oszillators

$$\rho_s(q, q') = \text{Tr}_b[\rho_{\text{tot}}] = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{(q',0)}^{(q,\hbar\beta)} \mathcal{D}q(t) \exp \left[-S_s^E[q(t)]/\hbar \right] \mathcal{F}[q(t)], \quad (3.66)$$

wobei die Zustandssumme $\mathcal{Z}_{\text{tot}} = \mathcal{Z}_b \mathcal{Z}$ zerlegt wird in das Produkt der Zustandssumme des ungestörten Bades $\mathcal{Z}_b = \prod_{i=1}^N Z_i$, mit $Z_i^{-1} = 2 \sinh(\beta \hbar \omega_i / 2)$ und des Oszillators \mathcal{Z} . Der zusätzliche Faktor $\mathcal{F}[q, q']$ fasst den Einfluss des Bades zusammen und wird deshalb auch als Einfluss-Funktional bezeichnet,

$$\mathcal{F}[q] = \prod_{i=1}^N \frac{1}{Z_i} \int dx_i \oint \mathcal{D}x_i \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \frac{m_i}{2} \left[x_i^2 + \omega_i^2 \left(x_i - \frac{c_i^2}{m_i \omega_i^2} q \right)^2 \right] \right\}. \quad (3.67)$$

Die Integration über die Wirkung der Badoszillatoren S_b gibt jeweils die Zustandssumme Z_i , die sich mit dem Vorfaktor Z_i^{-1} weghebt. Nach weiteren Umformungen [4] erhält man schließlich für das Einfluss-Funktional

$$\mathcal{F}[q] = \exp \left[-\frac{1}{2\hbar} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int_0^{\hbar\beta} d\tau' k(\tau - \tau') q(\tau) q(\tau') \right] \quad (3.68)$$

$$\text{mit } k(\tau) = \frac{m\gamma}{\hbar\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\nu_n|\Gamma}{\Gamma + |\nu_n|} e^{i\nu_n\tau}. \quad (3.69)$$

Wird die reduzierte Dichtematrix in der Form

$$\rho_s(q, q') = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{(q',0)}^{(q,\hbar\beta)} \mathcal{D}[q(t)] e^{-S_{\text{eff}}^E[q(t)]/\hbar} \quad (3.70)$$

geschrieben, wobei die Zustandssumme des offenen Quantensystems

$$\mathcal{Z} = \int dq \int_{(q,0)}^{(q,\hbar\beta)} \mathcal{D}[q(t)] e^{-S_{\text{eff}}^E[q(t)]/\hbar} = \oint \mathcal{D}[q(t)] e^{-S_{\text{eff}}^E[q(t)]/\hbar}. \quad (3.71)$$

lautet, so ist die effektive Wirkung $S_{\text{eff}}[q]$ für den Quantenoszillator folglich durch

$$S_{\text{eff}}^E = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \frac{m}{2} [\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2] + \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int_0^{\tau} d\tau' k(\tau - \tau') q(\tau) q(\tau') \quad (3.72)$$

bestimmt. Im semiklassischen Limit $S/\hbar \rightarrow 0$ wird die Summe über alle möglichen Pfade durch die Umgebung nahe Extremwerte der Wirkung dominiert. Die Variation der Wirkung $\delta S[\bar{q}(\tau)] = 0$ verschwindet für den extremalen Pfad $\bar{q}(\tau)$. Für diesen gilt folglich

$$\ddot{\bar{q}}(\tau) - \omega_0^2 \bar{q} - \frac{1}{m} \int_0^{\hbar\beta} d\tau' k(\tau - \tau') \bar{q}(\tau') = 0. \quad (3.73)$$

Damit lässt sich zeigen [4], dass sich die Euklidische effektive Wirkung durch die stationären Varianzen (3.16) und (3.17) ausdrücken lässt:

$$S_{\text{eff}}^E[q]/\hbar = \frac{(q + q')^2}{8\langle q^2 \rangle_\beta} + \frac{\langle p^2 \rangle_\beta}{2\hbar^2} (q - q')^2. \quad (3.74)$$

Für die Zustandssumme ergibt sich daraus $\mathcal{Z} \sim \exp[-S_{\text{eff}}^E[\bar{q}]/\hbar]$. Gleiches gilt demnach für die Dichtematrix, so dass sich mit entsprechender Normierung letztlich für den stationären Zustand des Brownschen Oszillators [4, 82] ergibt

$$\rho_s(q, q') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle q^2 \rangle_\beta}} \exp \left[-\frac{(q + q')^2}{8\langle q^2 \rangle_\beta} - \frac{(q - q')^2}{2\hbar^2/\langle p^2 \rangle_\beta} \right]. \quad (3.75)$$

Dieses aus dem Imaginärzeitformalismus erhaltene Ergebnis für die quantenstatistische Dichtematrix ergibt sich auch aus dem asymptotischen Verhalten der Dichtematrix $\rho_s(q, q', t)$ im Realzeitformalismus. Für ergodische Systeme gilt demnach

$$\rho_s(q, q') = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_s(q, q', t) \quad (3.76)$$

Die Nichtgleichgewichtsdynamik von $\rho_s(t)$ im Rahmen des Pfadintegralformalismus wird im nächsten Abschnitt behandelt.

3.2.3.2 Realzeit-Pfadintegrale und Phasenkohärenzverlust

Der Pfadintegralformalismus für dissipative Quantensysteme erlaubt auch die Beschreibung der Relaxation ins Gleichgewicht. Sei das Gesamtsystem aus zentralem Oszillator und Reservoir durch den Hamilton-Operator (3.2) bestimmt. Dann erhält man, ausgehend von der unitären Zeitentwicklung des Gesamtsystems

$$\rho_{\text{tot}}(q_f, q'_f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_i dq'_i \mathcal{J}(q_f, q'_f, t | q_i, q'_i, 0) \rho(q_i, q'_i, 0) \quad (3.77)$$

mit dem Propagator

$$\mathcal{J}(q_f, q'_f, t_f | q_i, q'_i, t_i) = K(q_f, t_f, q_i, t_i) \cdot K^*(q'_f, t_f, q'_i, t_i) \quad (3.78)$$

$$= \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}[q(t)] e^{iS[q(t)]/\hbar} \int_{q'_i}^{q'_f} \mathcal{D}[q'(t)] e^{-iS[q'(t)]/\hbar} \quad (3.79)$$

unter der Annahme eines anfänglichen Produktzustands $\rho(0) = \rho_s(0) \otimes \rho_b(0)$, nach der Integration über die Reservoirfreiheitsgrade den Ausdruck

$$\rho_s(q, q', t) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 dq'_0 \mathcal{J}_s(q, q', t | q_0, q'_0, 0) \rho_s(q_0, q'_0, 0) \quad (3.80)$$

für die nicht-unitäre Zeitentwicklung der reduzierten Dichtematrix. Der Propagator

$$\mathcal{J}(q, q', t | q_0, q'_0, 0) = \int_{q_0}^q \int_{q'_0}^{q'} Dq Dq' e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{S}_s[q] - \mathcal{S}_s[q'])} \mathcal{F}[q, q'] \quad (3.81)$$

enthält in diesem Fall das zeitabhängige Einfluss-Funktional

$$\mathcal{F}[q, q'] = \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' dx_0 dx'_0 \rho_e(x_0, x'_0, 0) \int_{x_0}^x \int_{x'_0}^{x'} Dx Dx' e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{S}_b[x] - \mathcal{S}_b[x'] + \mathcal{S}_{sb}[q, x] - \mathcal{S}_{sb}[q', x'])} \quad (3.82)$$

das aufgrund der lediglich quadratisch in die Wirkung eingehenden Ortskoordinaten explizit berechnet werden kann, und sich zu

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[q, q'] &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar\pi} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 ([q(s_1) - q'(s_1)] \dot{\gamma}(s_1 - s_2) [q(s_2) + q'(s_2)]) \right\} \times \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{\hbar^2\pi} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 [q(s_1) - q'(s_1)] K(s_1 - s_2) [q(s_2) - q'(s_2)] \right\} \quad (3.83) \end{aligned}$$

ergibt, mit der zeitlichen Ableitung $\dot{\gamma}(t)$ des Dämpfungsterms (3.12) und der Korrelationsfunktion $K(t)$ gem. Gl. (3.14). Dieses Feynman-Vernon-Einfluss-Funktional kann nach Einführung der beiden Koordinaten $r(t) = \frac{1}{2}[q(t) + q'(t)]$ und $y(t) = q(t) - q'(t)$ auch in der Form

$$\mathcal{F}[q, q'] = e^{-\Phi^N[y] - i\Phi^F[r, y]} \quad \text{mit} \quad (3.84)$$

$$\Phi^N[y] = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' y(t') K(t' - t'') y(t'') \quad (3.85)$$

$$\Phi^F[y] = \frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' y(t') \gamma(t' - t'') \dot{r}(t'') + \frac{r(0)}{\hbar} \int_0^t dt' \gamma(t') y(t') \quad (3.86)$$

geschrieben werden, um zwischen dem Einfluss der Umgebung in Form von Dissipation und Dekohärenz unterscheiden zu können. Der Verlust an Kohärenz zweier Pfade $q(t)$ und $q'(t')$

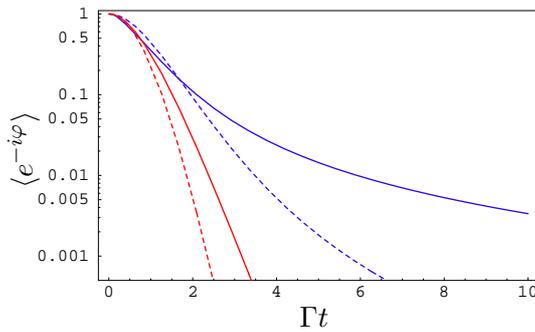
wird durch $\Phi^N[y]$ hervorgerufen, denn die Kopplung an ein Reservoir führt zu einer fluktuierenden Phase φ zwischen zwei Pfaden, so dass die statistische Mittelung über die Phasenfaktoren $\langle e^{-i\varphi} \rangle = e^{-\Phi^N[y]}$ als Dekohärenz-Funktional bezeichnet werden kann [4]. Für zwei lokalisierte Zustände mit fester räumlicher Separation $q_0 = \frac{1}{2}|q - q'|$ ergibt sich daraus unter Ausnutzung der Stationarität des Gaußschen Prozesses

$$\begin{aligned} \langle e^{-i\varphi} \rangle &= \exp \left[\frac{4q_0^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \cos\omega(t' - t'') \right] \\ &= \exp \left[-\frac{4q_0^2}{\pi\hbar} \int_0^t dt'(t - t') \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \cos(\omega t') \right] \\ &= \exp \left[-\frac{4q_0^2}{\pi\hbar} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.87)$$

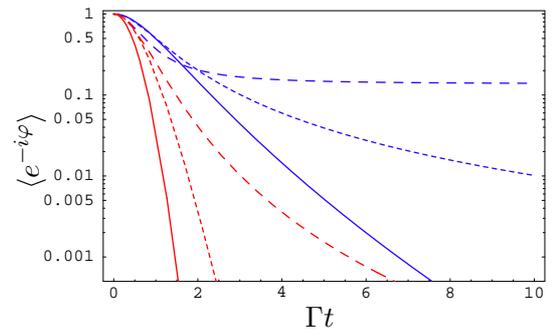
Im Ohmschen Hochtemperatur-Limes mit $J(\omega) = \gamma\omega$ und $K(t) = \gamma kT\delta(t)$ erhält man somit den exponentiell abfallenden Phasenfaktor

$$\langle e^{-i\varphi} \rangle = e^{-(4\gamma kT q_0^2/\hbar^2)t}. \quad (3.88)$$

Die Abhängigkeit des gemittelten Phasenfaktors (3.87) von der spektralen Dichte des Bades ist in Abbildung 3.2 für Grenzfälle dargestellt. Dazu ist zunächst festzustellen, dass der zeitliche Verlauf sowohl exponentiell, gaußförmig oder sogar algebraisch sein kann – in Abhängigkeit der Bad-Charakteristika Temperatur und spektrale Dichte. Bei hohen Temperaturen erfolgt der zeitliche Abfall für ein Ohmsches Bad exponentiell (vgl. Gl. (3.88)), gaußförmig für Bäder mit Cauchy-Lorentz-artigen Spektren und im super-Ohmschen Fall sowie algebraisch für sub-Ohmsche Bäder. Für Tief-Temperatur-Umgebungen (blaue Linien) ist das Langzeitverhalten der Funktion (3.87) meist durch ein Potenzgesetz gekennzeichnet. Eine ausführliche Diskussion dieses Verhaltens findet in Kapitel 6 über Dekohärenz statt.



(a) Gemittelter Phasenfaktor $\langle e^{-i\varphi} \rangle$ für Drude Spektrum (durchgezogene Linien) im Vergleich zur Umgebungen mit $J(\omega)$ gem. der 2. Zeile der Tabelle 3.1. (gestrichelt) für hohe Temperaturen (rot) und Nulltemperatur-Umgebung (blau).



(b) Gemittelter Phasenfaktor $\langle e^{-i\varphi} \rangle$ für Spektrum (3.44) mit $n = 1/2$ (durchgezogene Linie), $n = 1$ (eng gestrichelt) und $n = 2$ (weit gestrichelt) für hohe und tiefe Temperaturen (rot bzw. blau).

Abbildung 3.2: Gemittelter Phasenfaktor $\langle e^{-i\varphi} \rangle$ nach Gleichung (3.87) für unterschiedliche spektrale Dichten $J(\omega)$ für hohe und tiefe Temperaturen. Der Verlauf kann sowohl exponentiell, gaußförmig oder algebraisch sein. In einem sub-Ohmschen Bad werden Kohärenzen im Allgemeinen schneller unterdrückt als in einer super-Ohmschen Umgebung. Parameter $\gamma = 0.01m\omega_0$, $\Gamma = 10\omega_0$.

3.2.3.3 Pfadintegralformalismus und Mastergleichungen

Der Einfluss-Funktional-Pfadintegralformalismus in Realzeit erlaubt prinzipiell die Bestimmung der zeitlichen Entwicklung der Dichtematrix eines offenen Quantensystems. Allerdings erschwert dies einen direkten Vergleich mit der aus Markovschen Mastergleichungen gewonnenen Dynamik. Deshalb macht die Herleitung einer Mastergleichung aus dem Pfadintegralformalismus Sinn. Die zeitliche Ableitung der Dichtematrix kann dabei direkt aus der zeitlichen Ableitung des Propagators $\mathcal{J}(t, 0)$ gewonnen werden. Die Grundidee dazu ist die Entwicklung des Propagators $\mathcal{J}(t+dt)$ nach dt und Subtraktion von $\mathcal{J}(t, 0)$. Voraussetzung für dieses Vorgehen ist das Vorliegen eines anfänglichen Produktzustandes, was $\mathcal{J}(t, 0)$ unabhängig vom Systemzustand zur Zeit $t = 0$ macht. Caldeira und Leggett haben als erste eine solche Mastergleichung aus dem Propagator (3.81) abgeleitet [12, 15] – allerdings nur für den Grenzfall hoher Temperaturen, wo die nichtlokalen Eigenschaften des Propagators in den Hintergrund treten. Eine allgemeinere Herleitung unter Berücksichtigung der nichtlokalen Eigenschaften wurde von Hu, Paz, und Zhang gefunden [16] und wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

3.3 Exakte Mastergleichung für das Caldeira-Leggett-Modell

Mittels des Einfluss-Funktional-Pfadintegralformalismus kann eine nicht-Markovsche Mastergleichung für die reduzierte Dichtematrix hergeleitet werden, die zwar zeitlich lokal ist (bzw. keine Integro-Differentialgleichung darstellt), deren zeitabhängigen Koeffizienten allerdings für die nicht-Markovschen Eigenschaften der Dynamik verantwortlich sind. Auf Basis dieser Mastergleichung werden in den nächsten Kapiteln Dekohärenz und Verschränkungs-dynamik in Systemen kontinuierlicher Variablen untersucht. Im folgenden Abschnitt wird diese Mastergleichung deshalb vorgestellt, die Zeitabhängigkeit ihrer Dämpfungs- und Diffusionskoeffizienten diskutiert, exakte Lösungsmethoden für beliebige Anfangszustände eingeführt sowie einige Grenzfälle besprochen.

3.3.1 Die Hu-Paz-Zhang-Mastergleichung

Die Zeitentwicklung der reduzierten Dichtematrix $\rho_s(q, q', t)$ kann mit Hilfe eines zeitabhängigen Liouville-Superoperators $\mathcal{L}(t)$ durch eine Mastergleichung der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_s(q, q', t) = \mathcal{L}(q, q', \dot{q}, \dot{q}', t) \rho_s(q, q', t) \quad (3.89)$$

beschrieben werden. Dabei zeigt sich, dass der Liouville-Operator im Allgemeinen von der anfänglichen Präparation $\rho_s(q, q', 0)$ abhängig ist [83]. Eine mögliche Herleitung einer solchen Mastergleichung führt über den im vorausgegangenen Kapitel besprochenen Pfadintegralformalismus. Die von Hu, Paz und Zhang auf diesem Weg gewonnene Mastergleichung [16] für einen mit einem linearen Wärmebad wechselwirkenden Quantenoszillator liefert für beliebige Temperaturen und Kopplungsstärken die exakte Zeitentwicklung der Dichtematrix und gilt allgemein unter der Voraussetzung eines anfänglichen Produktzustandes von Oszillator und Bad.

Die *Hu-Paz-Zhang-Mastergleichung* (HPZ-Mastergleichung) für die reduzierte Dichtematrix (im Folgenden nur noch mit ρ anstatt ρ_s bezeichnet) lautet

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \gamma_q(t) q^2, \rho \right] + \frac{\gamma_p(t)}{2i\hbar} [q, \{p, \rho\}] + \frac{D_{qp}(t)}{\hbar^2} [q, [p, \rho]] - \frac{D_p(t)}{\hbar^2} [q, [q, \rho]], \quad (3.90)$$

wobei die zeitabhängigen Koeffizienten $\gamma_q(t)$, $\gamma_p(t)$, $D_q(t)$ and $D_p(t)$ davon abhängen, ob der Zustand von System und Bad zu Beginn faktorisiert oder ob ein thermischer Zustand vorliegt. Häufig wird die Mastergleichung (3.90) auch in der Form

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [H_s, \rho] + \frac{m\delta\Omega^2(t)}{2i\hbar} [q^2, \rho] + \frac{\gamma_p(t)}{2i\hbar} [q, \{p, \rho\}] + \frac{D_{qp}(t)}{\hbar^2} [q, [p, \rho]] - \frac{D_p(t)}{\hbar^2} [q, [q, \rho]], \quad (3.91)$$

angegeben, wobei $\delta\Omega^2(t) = \gamma_q(t) - \omega_0^2$ die zeitabhängige Renormierung der ursprünglichen Oszillatorfrequenz ω_0 darstellt. Eine Herleitung von (3.90) direkt aus der mikroskopischen Dynamik ist ebenfalls möglich [84]. Eine stationäre Lösung der Gleichung (3.90) ist durch (3.75) gegeben. Gleichung (3.90) kann nicht auf Lindblad-Form gebracht werden, dennoch ist die Positivität für die exakte Lösung garantiert, im Gegensatz zu verschiedenen anderen Ansätzen zur Beschreibung der nicht-Markovschen Dynamik des gedämpften Oszillators [85]. Neben der ursprünglichen Herleitung aus dem Pfadintegralformalismus für dissipative Quantensysteme kann die Mastergleichung (3.90) auch mit Hilfe der *Time-Convolutionless Projection Operator*-Technik [5, 86] gewonnen werden.

3.3.1.1 HPZ-Koeffizienten für einen anfänglichen Produktzustand

Liegt zu Beginn ein Produktzustand von System und Bad vor, so sind die zeitabhängigen Koeffizienten über die Funktionen (3.23) und (3.27) gegeben durch [83]:

$$\gamma_q(t) = g(t) \left[\dot{f}^2(t) - \dot{f}(t)\ddot{f}(t) \right] \quad \text{mit} \quad g(t) = \left[\dot{f}^2(t) - f(t)\ddot{f}(t) \right]^{-1}, \quad (3.92)$$

$$\gamma_p(t) = g(t) \left[f(t)\ddot{f}(t) - \dot{f}(t)\dot{f}(t) \right], \quad (3.93)$$

$$D_{qp}(t) = \frac{m}{2} \ddot{K}_q(t) - \frac{1}{m} K_p(t) + m\gamma_q(t)K_q(t) + \frac{m}{2}\gamma_p(t)\dot{K}_q(t), \quad (3.94)$$

$$D_p(t) = \ddot{K}_p(t) + \gamma_p(t)K_p(t) + \frac{m^2\gamma_q(t)}{2}\dot{K}_q(t). \quad (3.95)$$

Der nicht-Markovsche Charakter des Systems kommt dabei durch die Zeitabhängigkeit dieser Koeffizienten zustande, die alle Information über die System-Bad-Korrelationen auf kurzen Zeitskalen enthalten. $D_{qp}(t)$ und $D_p(t)$ sind Diffusionskoeffizienten, wobei im Allgemeinen der Koeffizient $D_p(t)$ für die Impuls-Diffusion im Phasenraum wesentlich stärker ins Gewicht fällt als $D_{qp}(t)$. Der Term proportional zu $\gamma_p(t)$ beschreibt Dissipation, und die Funktion $\gamma_q(t)$ entspricht einer Renormalisierung des Potentials, was als physikalisch observierbare Frequenz gedeutet werden kann. Die Koeffizienten (3.106) sind nur in Ausnahmefällen in geschlossener analytischer Form angebar, und müssen sonst numerisch integriert werden. Eine einfachere Darstellung erhält man durch eine Störungsrechnung erster Ordnung in der Kopplungsstärke γ . In dieser Näherung ergibt sich für den Dämpfungsterm

$$\begin{aligned} \gamma_p(t) &\approx \frac{2i}{\hbar m \omega_0} \int_0^t dt' \langle [\eta(t'), \eta(0)] \rangle \sin \omega_0 t' \stackrel{(3.36)}{=} \frac{\gamma \Gamma^2}{m \omega_0} \int_0^t e^{-\Gamma t'} \sin \omega_0 t' \\ &= \frac{\gamma}{m} \frac{\Gamma^2}{\omega_0^2 + \Gamma^2} \left(1 - e^{-\Gamma t} \cos \omega_0 t - \frac{\Gamma}{\omega_0} e^{-\Gamma t} \sin \omega_0 t \right) \stackrel{t \gg \Gamma^{-1}}{\longrightarrow} \frac{\gamma}{m} \frac{\Gamma^2}{\omega_0^2 + \Gamma^2} \end{aligned} \quad (3.96)$$

und für den renormalisierten Potenzialterm

$$\gamma_q(t) = \omega_0^2 + \delta\Omega^2(t) \quad \text{mit} \quad \delta\Omega^2(0) = \sum_i \frac{c_i^2}{mm_i\omega_i^2} = \frac{\gamma\Gamma}{m} \quad \text{und} \quad (3.97)$$

$$\delta\Omega^2(t) = \frac{\gamma\Gamma}{m} - \frac{2i}{\hbar m} \int_0^t dt' \langle [\eta(t'), \eta(0)] \rangle \cos \omega_0 t' \stackrel{(3.36)}{=} \frac{\gamma\Gamma}{m} \left(1 - \Gamma \int_0^t e^{-\Gamma t'} \cos \omega_0 t' \right) \quad (3.98)$$

so dass sich ergibt

$$\gamma_q(t) \approx \omega_0^2 + \frac{\gamma\Gamma}{m} \left[1 - \frac{\Gamma^2}{\omega_0^2 + \Gamma^2} \left(1 - e^{-\Gamma t} \cos \omega_0 t + \frac{\omega_0}{\Gamma} e^{-\Gamma t} \sin \omega_0 t \right) \right] \quad (3.99)$$

$$\xrightarrow{t \gg \Gamma^{-1}} \omega_0^2 + \frac{\gamma\Gamma}{m} \left(1 - \frac{\Gamma^2}{\omega_0^2 + \Gamma^2} \right) = \omega_0^2 \left(1 + \frac{\gamma\Gamma/m}{\omega_0^2 + \Gamma^2} \right) \quad (3.100)$$

Dabei wird nochmals die Bedeutung des Selbstwechselwirkungs-Anteils im Hamilton-Operator (3.4) deutlich, der dafür sorgt, dass in einem Ohmschen Bad mit $\Gamma \rightarrow \infty$ die messbare Frequenz des Oszillators im stationären Zustand gegen ω_0 tendiert, da sich die letzten beiden Terme in (3.99) kompensieren. Für die Diffusionskoeffizienten gilt in Störungsrechnung bis zur zweiten Ordnung der Kopplungsstärke

$$D_{qp}(t) \approx \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t dt' K(t') \sin \omega_0 t' \xrightarrow{t \gg \Gamma^{-1}} m\gamma_q(\infty) \langle q^2 \rangle - \frac{\langle p^2 \rangle}{m} \quad (3.101)$$

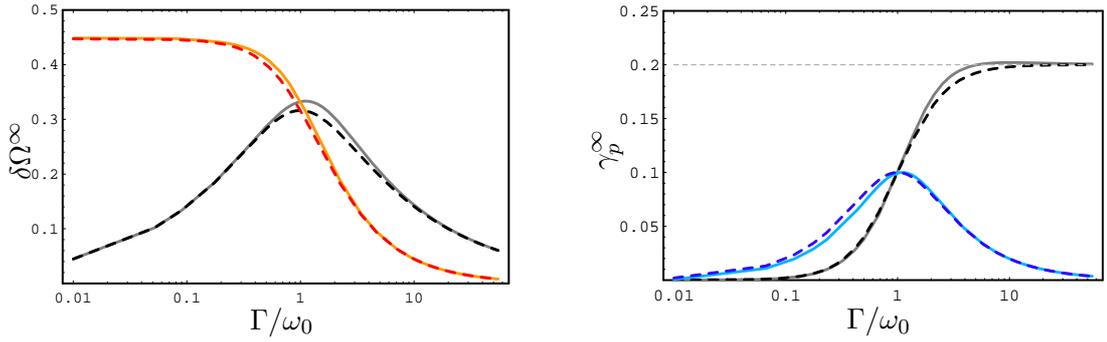
$$D_p(t) \approx \int_0^t dt' K(t') \cos \omega_0 t' \xrightarrow{t \gg \Gamma^{-1}} \langle p^2 \rangle \gamma_p(\infty). \quad (3.102)$$

Während die Terme $\gamma_q(t)$ und $\gamma_p(t)$ temperaturunabhängig sind und in der Näherung schwacher Kopplung immer auf obige Form gebracht werden können, lässt sich für die Diffusionskoeffizienten auch in zweiter Ordnung Störungsrechnung nur für hohe Temperaturen ein geschlossener, analytischer Ausdruck ableiten. Für $kT \gg \hbar\Gamma$ ergibt sich wegen $K(t) = kT\gamma(t)$

$$D_{qp}(t) \approx \frac{\gamma kT}{m\Gamma} \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \omega_0^2} \left(1 - e^{-\Gamma t} \cos \omega_0 t - \frac{\Gamma}{\omega_0} e^{-\Gamma t} \sin \omega_0 t \right), \quad (3.103)$$

$$D_p(t) \approx \gamma kT \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \omega_0^2} \left(1 - e^{-\Gamma t} \cos \omega_0 t + \frac{\omega_0}{\Gamma} e^{-\Gamma t} \sin \omega_0 t \right). \quad (3.104)$$

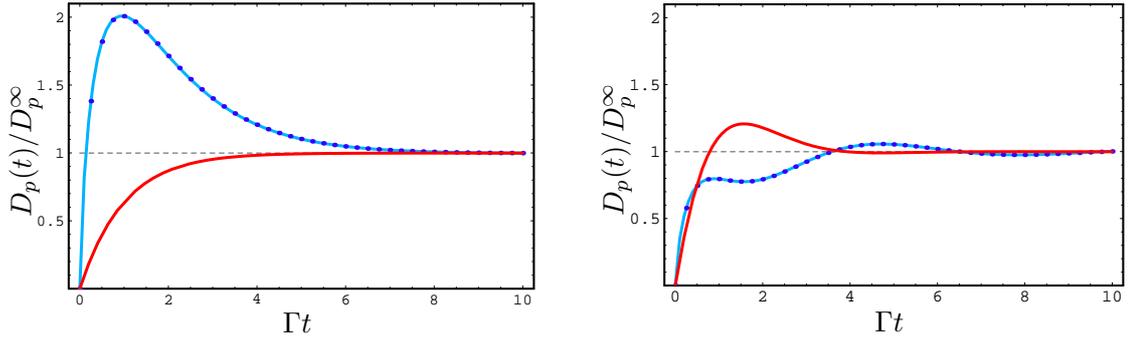
Die obige explizite Darstellung der Koeffizienten $\gamma_q(t)$, $\gamma_p(t)$, $D_{qp}(t)$ und $D_p(t)$ verdeutlicht die Rolle der inversen Abschneidefrequenz Γ^{-1} als Zeitskala, auf der die Koeffizienten ihre stationären Werte annehmen und die nicht-Markovschen Eigenschaften der HPZ-Mastergleichung eine Rolle spielen. Allerdings beeinflusst die Wahl von Γ nicht nur die transiente Phase, sondern auch die stationären Werte der Koeffizienten, wie Abb. 3.3 deutlich macht. Dies ist insbesondere bei der zeitlichen Betrachtung und dem Vergleich von Markovschen und nicht-Markovschen Effekten in späteren Kapiteln von Bedeutung. Beispielsweise beeinflusst die Wahl von Γ in Relation zur Oszillatorfrequenz ω_0 nicht nur die Badkorrelationszeiten, sondern etwa auch die Relaxationszeit des Brownschen Oszillators, die durch den stationären Wert γ_p^∞ des Dämpfungskoeffizienten $\gamma_p(t)$ bestimmt wird. So ist für $\gamma \ll \omega_0$ auch $\gamma_p \ll \frac{\gamma}{m}$. Für Vergleiche zwischen nicht-Markovscher und Markovscher Dynamik muss folglich auch der Dämpfungsterm entsprechend angepasst werden. Gleiches gilt für die Wahl der Diffusionsterme, deren transientes Verhalten zusätzlich noch Temperatureinflüssen unterliegt. Wie Abb. 3.4 verdeutlicht, kann der Diffusionsterm D_p Oszillationen mit einem anfänglichen Überspringen über den stationären Wert zeigen, wobei dieses für große Abschneidefrequenzen bei für tiefen Temperaturen auftritt (Abb. 3.4a), während es im Falle kleiner Abschneidefrequenzen für hohe Temperaturen geschehen kann (Abb. 3.4b).



(a) Renormierung $\delta\Omega$ der Oszillatorfrequenz ω_0 ist bei vorgegebener Kopplung γ maximal für $\Gamma \approx \omega_0$ (schwarz/grau). Für konstantes Produkt $\gamma\Gamma = \text{const.}$ (gelb/rot) ist die Renormierung für $\Gamma \ll \omega_0$ am stärksten.

(b) Der stationäre Wert der Dämpfung γ_p geht bei vorgegebener Kopplung γ für $\Gamma \gg \omega_0$ gegen γ/m . Für $\gamma\Gamma = \text{const.}$ ist γ_p maximal für $\Gamma \approx \omega_0$, es gilt jedoch stets $\gamma_p \leq \frac{\gamma}{2m}$.

Abbildung 3.3: Stationäre Werte der HPZ-Koeffizienten $\delta\Omega$ und γ_p in Abhängigkeit der Abschneidefrequenz Γ und der Kopplungsstärke γ . Gestrichelte Kurven beziehen sich auf die Näherungslösungen für schwache Kopplung, die durchgezogenen Kurven geben die exakten Werte an. Für schwarz-graue Kurven ist $\gamma = 0.2m\omega_0$, bei farbigen Kurven ist $\gamma\Gamma = \text{const.} = 0.2m\omega_0^2$ (γ wird also bei Variation von Γ ebenfalls verändert).



(a) Große Abschneidefrequenz $\Gamma \gg \omega_0$ mit stationärem Diffusionskoeffizientem $D_p^\infty \approx \frac{\gamma}{m}\langle p^2 \rangle$.

(b) Kleine Abschneidefrequenz $\Gamma \approx \omega_0$ mit stationärem Diffusionskoeffizientem $D_p^\infty \approx \frac{\gamma}{2m}\langle p^2 \rangle$.

Abbildung 3.4: Transiente zeitliche Entwicklung des Diffusionskoeffizienten $D_p(t)$ (normiert auf den stationären Wert D_p^∞) für hohe Temperaturen $T = 10\hbar\omega_0/k$ (rot) aus Gl. (3.104) und für tiefe Temperaturen $T = 10^{-2}\hbar\omega_0/k$ (blau) numerisch aus Gl. (3.102). Während für große Abschneidefrequenzen ein Überschwingen des Diffusionsterms $D_p(t)$ bei tiefen Temperaturen auftritt, kann dies im Falle kleiner Abschneidefrequenzen ebenso für hohe Temperaturen geschehen. Der Kopplungsparameter γ geht in der WCL-Approximation nur in den stationären Wert ein und beeinflusst die Dynamik nicht.

3.3.1.2 Thermischer Anfangszustand

Sofern an Stelle eines anfänglichen Produktzustandes ein thermischer Anfangszustand angenommen wird, der in der Regel über eine sogenannte Präparationsfunktion aus dem Zustand des Gesamtsystems gewonnen wird [14, 83], behält die HPZ-Mastergleichung ihre Form, allerdings besitzen ihre Koeffizienten dann eine andere Zeitabhängigkeit. Mit Hilfe der sich aus dem quantenmechanischen Fluktuations-Dissipations-Theorem ergebenden symmetrisierten

Autokorrelationsfunktion [4]

$$S(t) = \frac{1}{2} \langle \{q(t), q(0)\} \rangle_\beta - \langle q(0) \rangle_\beta^2 = \frac{\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \tilde{\chi}''(\omega) \cos(\omega t), \quad (3.105)$$

lauten die HPZ-Koeffizienten für einen thermischen Anfangszustand [84, 83]:

$$\gamma_q^\beta(t) = h(t) \left[\dot{f}(t)\ddot{S}(t) - \ddot{f}(t)\dot{S}(t) \right] \quad \text{mit} \quad h(t) = \left[\dot{f}(t)S(t) - f(t)\dot{S}(t) \right]^{-1} \quad (3.106)$$

$$\gamma_p^\beta(t) = h(t) \left[f(t)\ddot{S}(t) - \ddot{f}(t)S(t) \right], \quad (3.107)$$

$$D_{qp}^\beta(t) = m\gamma_q(t)\langle q^2 \rangle - \frac{\langle p^2 \rangle}{m}, \quad (3.108)$$

$$D_p^\beta(t) = \langle p^2 \rangle \gamma_p(t). \quad (3.109)$$

Die Annahme eines thermischen Anfangszustands ist näher an den tatsächlichen experimentellen Gegebenheiten, die die Präparation eines Produktzustands nur selten erlauben. Dennoch ist diese Annahme insbesondere beim Studium von Dekohärenzprozessen problematisch, da eine nicht perfekte Präparation der anfänglichen Superposition schon zu einer Abschwächung der Nichtdiagonalelemente bzw. quantenmechanischen Interferenzterme führt, bevor der dynamischer Prozess eingesetzt hat. Eine detaillierte Diskussion dieses Sachverhalts wird in Abschnitt 6.3.1.6 vorgenommen. Für die im Verlauf der Arbeit vorgenommenen Berechnungen wird ein anfänglicher Produktzustand unterstellt und die HPZ-Koeffizienten gem. den Gleichungen (3.92)-(3.95) gewählt.

3.3.1.3 Generalisierte Fokker-Planck Gleichung des QBM-Modells

Alternativ zu (3.90) kann die zeitliche Entwicklung im Phasenraum durch eine generalisierte Fokker-Planck Gleichung für die reduzierte Wigner-Funktion [87, 88]

$$W(q, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\nu \langle q - \nu/2 | \rho(t) | q + \nu/2 \rangle e^{i\nu p/\hbar} \quad (3.110)$$

beschrieben werden. Mit den Transformationen $[q, \cdot] \rightarrow -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p}$, $[p, \cdot] \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}$, $\{q, \cdot\} \rightarrow 2p$ und $\{p, \cdot\} \rightarrow 2q$ wird aus (3.90) die generalisierte Fokker-Planck Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{m} p \frac{\partial W}{\partial q} + m\gamma_q(t) q \frac{\partial W}{\partial p} + \gamma_p(t) \frac{\partial(pW)}{\partial p} + D_{qp}(t) \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial p} + D_p(t) \frac{\partial^2 W}{\partial p^2}, \quad (3.111)$$

bzw. mit $\gamma_q(t) = \omega_0^2 + \delta\Omega^2(t)$ und der Poissonklammer $\{H, W\} = -\frac{\partial W}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial W}{\partial p}$:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \{H_s, W\} + m\delta\Omega^2(t) q \frac{\partial W}{\partial p} + \gamma_p(t) \frac{\partial(pW)}{\partial p} + D_{qp}(t) \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial p} + D_p(t) \frac{\partial^2 W}{\partial p^2}, \quad (3.112)$$

wobei die Poissonklammer als erster Term der rechten Seite der Liouville-Gleichung der klassischen Phasenraumdichte entspricht. Neben der Zeitabhängigkeit der Diffusionskonstante D_p unterscheidet sich obige generalisierte Fokker-Planck-Gleichung von der Fokker-Planck-Gleichung der klassischen Brownschen Bewegung durch die drei zusätzlichen Terme $\delta\Omega$, γ_q und D_{qp} . Diese zusätzlichen Dämpfungs- und Diffusionsterme erschweren auch das Auffinden einer Lösung der Gleichung, die im folgenden Abschnitt behandelt wird.

3.3.2 Lösung der HPZ-Mastergleichung

Die zeitabhängige Wigner-Funktion $W(q, p, t)$ als Lösung der generalisierten Fokker-Planck-Gleichung (3.111) bildet die Grundlage für die Berechnung der *Purity* (Reinheit), der Dekohärenzfunktion und der zeitlichen Entwicklung der Besetzungszahlen in späteren Kapiteln. Für die Lösung von Gleichung (3.111) existieren unterschiedliche Ansätze. Diese werden an dieser Stelle im Überblick dargestellt und in den relevanten Passagen der späteren Kapiteln wieder aufgegriffen.

- Zum einen kann Gleichung (3.111) formal in gleicher Weise wie die Kramers-Gleichung der klassischen Brownschen Bewegung gewonnen werden [89]. Die Wigner-Funktion kann direkt über den auf die anfängliche Präparation $W(q, p, 0)$ wirkenden Propagator $\mathcal{P}(q, p; t|q_0, p_0; 0)$ bestimmt werden, mit

$$W(q, p, t) = \int dq_0 dp_0 \mathcal{P}(q, p; t|q_0, p_0; 0) W(q_0, p_0, 0), \quad (3.113)$$

$$\text{und } \mathcal{P}(q, p; t|q_0, p_0; 0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{R}^T \Sigma^{-1} \mathbf{R} \right], \quad (3.114)$$

wobei $\mathcal{P}(q, p; t|q_0, p_0; 0)$ durch die Funktionen (3.21) und (3.27) über

$$\Sigma(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} K_q(t) & K_{qp}(t) \\ K_{qp}(t) & K_p(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} q - \langle q(t) \rangle \\ p - \langle p(t) \rangle \end{pmatrix} \quad (3.115)$$

gegeben ist [90]. Dabei beziehen sich die Mittelungen $\langle q(t) \rangle$ und $\langle p(t) \rangle$ auf die Lösungen (3.21) der Langevin-Gleichung mit Anfangswerten q_0 und p_0 . Der Unterschied zur klassischen Lösung liegt also nur in verschiedenen Green-Funktionen und Korrelationsfunktionen. Die Abweichung in den Green-Funktionen (3.23) kommt dabei durch den zusätzlichen Term $\gamma(t)q(0)$ in der Quanten-Langevin-Gleichung (3.11) zustande. Dieser Zusatzterm bedingt, dass selbst bei freier Brownscher Bewegung ein anfänglicher Impuls vorhanden ist, der in Richtung des Koordinaten-Ursprungs weist. Dieser resultiert aus der Annahme eines anfänglichen Produktzustandes und des instantanen *Einschaltens* der Kopplung zwischen Oszillator und Bad.

- Einen anderen Lösungsansatz für Gleichung (3.111) bietet die sogenannte quantenstatistische charakteristische Funktion χ , die über eine Fourier-Transformation

$$W(q, p, 0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \chi(\eta, \nu, 0) \exp [i(\eta q + \nu p)/\hbar], \quad (3.116)$$

mit der Wigner-Funktion verbunden ist [88]. Hierbei ergeben sich wiederum zwei Lösungswege. Zum einen kann, ausgehend von einem beliebigen Anfangszustand $\chi(\eta, \nu, 0)$, die Zeitabhängigkeit der charakteristischen Funktion direkt aus

$$\chi(\eta, \nu, t) = \zeta(\eta, \nu, t) \exp \left[\int_0^t dt' \gamma_p(t') \right] \cdot \exp \left[-(\alpha_t \eta^2 + 2\beta_t \eta \nu + \gamma_t \nu^2)/\hbar^2 \right], \quad (3.117)$$

$$\text{mit } \zeta(\eta, \nu, t) = \int d\eta_0 \int d\nu_0 \chi_0(\eta_0, \nu_0) \delta(\eta - \eta_t) \delta(\nu - \nu_t), \quad (3.118)$$

bestimmt werden [91], wobei die zeitabhängigen Koeffizienten α_t , β_t , γ_t , η_t und ν_t durch die Lösungen zweier linearer Differentialgleichungssysteme gegeben sind:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_t \\ \dot{\beta}_t \\ \dot{\gamma}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2/m & 0 \\ m\gamma_q(t) & -\gamma_p(t) & -1/m \\ 0 & 2m\gamma_q(t) & -2\gamma_p(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -D_{qp}(t) \\ 2D_p(t) \end{pmatrix} \quad (3.119)$$

$$\text{sowie} \quad \begin{pmatrix} \dot{\eta}_t \\ \dot{\nu}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -m\gamma_q(t) \\ 1/m & \gamma_p(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \nu_t \end{pmatrix}. \quad (3.120)$$

Eine weitere Lösungsmöglichkeit besteht in der direkten Bestimmung der zeitabhängigen Wigner-Funktion über das Integral [90]

$$W(q, p, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \tilde{\chi}(\eta_t, \nu_t, 0) \exp[i(\eta p + \nu q)/\hbar], \quad (3.121)$$

mit der Funktion $\tilde{\chi}$, die sich aus der anfänglichen charakteristischen Funktion mit substituierten Variablen $\eta_t = \dot{f}(t)\eta + \frac{1}{m}f(t)\nu$ und $\nu_t = m\ddot{f}(t)\nu + \dot{f}(t)\eta$ und multipliziertem Gaußschen Faktor in der Form

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(\eta_t, \nu_t, 0) &= \chi\left(\dot{f}(t)\eta + \frac{1}{m}f(t)\nu, m\ddot{f}(t)\eta + \dot{f}(t)\nu; 0\right) \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{1}{2\hbar^2}(K_p(t)\eta^2 + 2K_{qp}(t)\eta\nu + K_q(t)\nu^2)\right] \end{aligned} \quad (3.122)$$

ergibt, wobei die Koeffizienten $K_{p,q}(t)$ und $K_{qp}(t)$ über die Gleichungen (3.27)-(3.29) bestimmt sind. Die erst- und letztgenannte Lösungsmöglichkeit kommen im weiteren Verlauf der Arbeit zum Einsatz.

Die auf diese Weise erhaltene zeitabhängige Wigner-Funktion und ihre charakteristische Funktion dienen zur Berechnung abgeleiteter Größen wie der *Purity*

$$\mu(t) = \text{Tr}\rho^2(t) = (2\pi\hbar)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp W^2(q, p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\nu |\chi(\eta, \nu, t)|^2, \quad (3.123)$$

die in den nächsten Kapiteln die Basis für die Diskussion von Relaxations- und Dekohärenzprozessen bilden wird.

3.3.3 Grenzfälle der HPZ-Mastergleichung

3.3.3.1 Caldeira-Leggett Mastergleichung

Für Grenzfälle wie Ohmsche Dämpfung oder schwache Kopplung vereinfachen sich die Koeffizienten (3.106) der HPZ-Mastergleichung z.T. erheblich. Im Hochtemperatur-Limes eines Ohmschen Bades haben Caldeira und Leggett mit Hilfe von Pfadintegralmethoden eine Mastergleichung bestimmt [12, 15] die sich ebenfalls aus der HPZ-Gleichung herleiten lässt. Für $kT \gg \hbar\omega_0$ und $\Gamma \rightarrow \infty$ (wobei zuerst der Hochtemperatur-Limes durchgeführt werden muss um logarithmische Divergenzen zu verhindern) erhält man aus (3.106) die klassischen Koeffizienten

$$\gamma_q = \omega_0^2, \quad \gamma_p = \gamma/m, \quad D_{qp} \rightarrow 0, \quad D_p = \gamma kT, \quad (3.124)$$

so dass sich die Caldeira-Leggett Mastergleichung ergibt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(q, q', t) = \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2, \rho \right] + \frac{\gamma}{2im\hbar} [q, [p, \rho]] - \frac{\gamma kT}{\hbar^2} [q, [q, \rho]]. \quad (3.125)$$

Der erste Kommutator $[H, \rho]$ entspricht dabei dem Term der gewöhnlichen Liouville-Gleichung des isolierten Quantenoszillators. Der zweite Kommutator mit dem Kopplungsparameter γ als Vorfaktor beschreibt Dissipation. Der letzte Term schließlich liefert nur für $q \neq q'$ einen Beitrag, beeinflusst also nur die Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix und beschreibt somit das Phänomen der Dekohärenz, das in Kapitel 6 ausführlich diskutiert wird. Unter Vernachlässigung der Dissipation erhält man aus Gleichung (3.125) das einfache Modell

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] - \frac{D_p}{\hbar^2} [q, [q, \rho]], \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \{H, W\} + D_p \frac{\partial^2 W}{\partial p^2} \quad (3.126)$$

für die Dynamik des offenen Quantensystems. Die Dämpfung der Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix in Ortsdarstellung entspricht somit einer Impuls-Diffusion der Wigner-Funktion im Phasenraum. Wird auch der unitäre Anteil vernachlässigt und schreibt man

$$\dot{\rho}(q, q', t) = -\frac{D_p}{\hbar^2} [q, [q, \rho]] = -\frac{\gamma kT}{\hbar^2} (q - q')^2 \rho(q, q', t), \quad (3.127)$$

so ergibt sich als Lösung folglich

$$\rho(q, q', t) \approx \rho(q, q', 0) \exp\left[-\frac{\gamma kT}{\hbar^2} (q - q')^2 t\right]. \quad (3.128)$$

Dies zeigt, dass die Nichtdiagonalterme mit einem Faktor $\exp[-2\gamma kT q_0^2 t / \hbar^2]$ gedämpft werden, wobei $|q - q'| = \sqrt{2}q_0$ in diesem Fall die Distanz zur Diagonalen angibt. Bis auf einen Faktor 2 im Exponenten entspricht dieses Resultat dem im Ohmschen Hochtemperatur-Limes gewonnenen gemittelten Phasenfaktor (3.88) des Feynmanschen Einfluss-Funktional. Beide Dekohärenzfaktoren werden in Kapitel 6 noch ausführlicher diskutiert.

3.3.3.2 Lindblad-Mastergleichung für das QBM-Modell

Zu beachten ist, dass der zu obiger Caldeira-Leggett Mastergleichung sowie zu ähnlichen Approximationslösungen der HPZ-Mastergleichung gehörende Liouville-Operator kein Operator vom Lindblad-Typ ist und die Positivitätsbedingung der Dichtematrix für Zeiten $t < \Gamma^{-1}$ verletzt [83]. Wird in der Standardform der Lindblad-Gleichung (2.35) als Hamilton-Operator des Systems $H = \frac{p^2}{2m} + V(q) + \gamma(qp + pq)$ und als Lindblad-Operator $L = \frac{p_{th}}{\hbar\sqrt{m}}q + \frac{i\sqrt{m}}{p_{th}}p$ mit thermischen Impuls $p_{th} = \sqrt{mkT}$ gewählt, so ergibt sich

$$\partial_t \rho = \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{p^2}{2m} + V(q), \rho \right] + \frac{\gamma}{2im\hbar} [q, \{p, \rho\}] - \frac{\gamma p_{th}^2}{\hbar^2 m} [q, [q, \rho]] - \frac{\gamma}{mp_{th}^2} [p, [p, \rho]], \quad (3.129)$$

was bis auf den zusätzlichen letzten, die Impuls-Lokalisation beschreibenden Term $\frac{\gamma}{mp_{th}^2} [p, [p, \rho]]$, mit der Caldeira-Leggett Gleichung übereinstimmt. Mastergleichungen dieses Typs finden sich ebenfalls häufig bei der Diskussion von Dekohärenz [92, 93] und werden in Kapitel 5 bei einem Vergleich der Markovschen Ansätze herangezogen.

3.3.3.3 Weak-Coupling Approximation

Die Weak Coupling Approximation der HPZ-Mastergleichung (3.90) ist eine sekundäre Approximation, bei der eine Born-Approximation, aber keine Markov-Approximation durchgeführt wird und die Rotating-Wave-Approximation erst nach der Integration über die Badfreiheitsgrade durchgeführt wird [94, 86, 95, 70]. Letztere entspricht zwar wie die herkömmliche Rotating-Wave-Approximation einer Mittelung über die schnell oszillierenden Terme, vernachlässigt allerdings nicht die für virtuelle Austauschprozesse zuständigen Terme im mikroskopischen Wechselwirkungs-Operator. Die resultierende Mastergleichung wird im Folgenden als WCL-Mastergleichung (*weak-coupling-limit*) bezeichnet und lautet

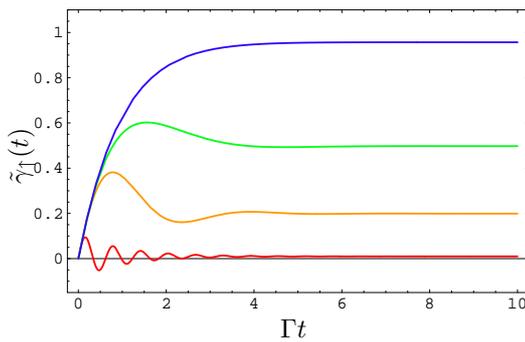
$$\dot{\rho} = -i\omega_0[a^\dagger a, \rho] + \frac{\tilde{\gamma}_\downarrow(t)}{2} [2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a] + \frac{\tilde{\gamma}_\uparrow(t)}{2} [2a^\dagger \rho a - a a^\dagger \rho - \rho a a^\dagger]. \quad (3.130)$$

Sie ist in ihrer Form der quantenoptischen Mastergleichung des gedämpften Oszillators (2.14) ähnlich, mit dem Unterschied das die Koeffizienten $\tilde{\gamma}_{\downarrow,\uparrow}$ zeitabhängig sind. Sie sind über

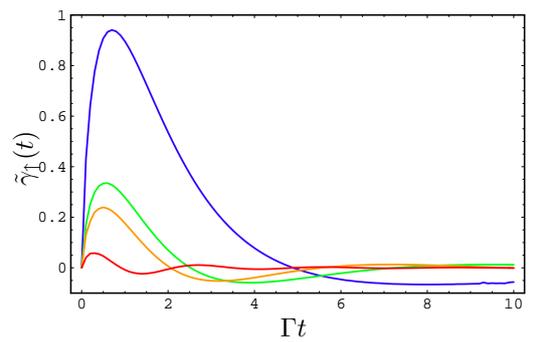
$$\tilde{\gamma}_\downarrow(t) = \left(\frac{D_p(t)}{\hbar m \omega_0} + \frac{\gamma_p(t)}{2} \right) \xrightarrow{t \gg \Gamma^{-1}} \frac{\gamma}{m \omega_0^2 + \Gamma^2} (\bar{n} + 1), \quad (3.131)$$

$$\tilde{\gamma}_\uparrow(t) = \left(\frac{D_p(t)}{\hbar m \omega_0} - \frac{\gamma_p(t)}{2} \right) \xrightarrow{t \gg \Gamma^{-1}} \frac{\gamma}{m \omega_0^2 + \Gamma^2} \bar{n} \quad (3.132)$$

mit den HPZ-Koeffizienten in Schwachkopplungs-Näherung (3.96) und (3.102) verbunden und gehen im Limit $t \gg \Gamma^{-1}$ in die um den Faktor $\Gamma^2/(\Gamma^2 + \omega_0^2) \approx 1$ korrigierten Markovschen Werte über. Obige Mastergleichung (3.130) erfasst die nicht-Markovsche Dynamik auf kurzen Zeitskalen in der sekundären Rotating-Wave Approximation ohne Markov-Approximation. Sofern die Koeffizienten $\tilde{\gamma}_{\downarrow,\uparrow}$ für alle Zeiten positiv sind, ist die Gleichung (3.130) vom Lindblad-Typ. Allerdings müssen Mastergleichungen vom Lindblad-Typ nicht wie Mastergleichungen in Lindblad-Form die Halbgruppen-Eigenschaft erfüllen [86]. Ferner



(a) Hohe Temperatur $kT = 100\hbar\omega_0$. Nur für $\Gamma \gg \omega_0$ (blau) wächst die Funktion monoton an, andernfalls treten Oszillationen auf. Für Out-of-Resonance-Bänder mit $\Gamma \ll \omega_0$ ist der Koeffizient $\tilde{\gamma}_\uparrow(t)$ partiell negativ (rot).



(b) Tiefe Temperatur $T \rightarrow 0$. Der Koeffizient $\tilde{\gamma}_\uparrow(t)$ (Skala in 10^{-2}) oszilliert zwischen positiven und negativen Werten und geht erst für $t \gg \Gamma^{-1}$ gegen Null (im Gegensatz zum Markovschen Fall, wo immer gilt $\gamma_\uparrow = 0$ für $T \rightarrow 0$).

Abbildung 3.5: Zeitabhängigkeit des Koeffizienten $\tilde{\gamma}_\uparrow(t)$ der Mastergleichung (3.130) für unterschiedliche Relationen $r = \Gamma/\omega_0$ bei hohen Temperaturen (links) und für tiefe Badtemperaturen (rechts). Die Relationen sind dabei jeweils $r = 5$ (blau), $r = 1$ (grün), $r = 0.5$ (gelb), $r = 0.1$ (rot). Der Kopplungsparameter (hier $\gamma = 0.01m\omega_0$) geht nur in den stationären Wert ein.

ist zu beachten, dass im Allgemeinen ein Unterschied darin besteht, ob die Rotating-Wave-Approximation ausgeführt wird bevor die Badfreiheitsgrade ausintegriert werden, oder erst danach. Die Durchführung der Rotating-Wave-Approximation vor der Ausintegration der Umgebungsvariablen resultiert in der Vernachlässigung der Terme $\hat{a}^\dagger \hat{b}_k^\dagger$ und $\hat{a} \hat{b}_k$ im mikroskopischen Wechselwirkungs-Hamilton-Operator $H_{\text{int}} \sim \hat{a}^\dagger \hat{b}_k^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger + \hat{a} \hat{b}_k$. Die Rotating-Wave-Approximation nach dem Ausspuren ist eine sekundäre Approximation, die in einer Mittelung über die schnell oszillierende Terme besteht, nicht jedoch den Effekt der virtuellen Prozesse vernachlässigt [96]. Die Abb. 3.5 zeigt den Koeffizienten $\tilde{\gamma}_\uparrow(t)$ für unterschiedliche Verhältnisse von Γ zu ω_0 für hohe Badtemperaturen (3.5a) sowie Temperatur $T \rightarrow 0$. Man sieht, dass der Koeffizient $\tilde{\gamma}_\uparrow(t)$ in *Out-of-Resonance*-Bädern mit $\Gamma \ll \omega_0$ selbst für hohe Temperaturen partiell negativ werden kann. Die Mastergleichung (3.130) ist dann nicht mehr vom Lindblad-Typ und es dominieren virtuelle Photonenaustauschprozesse. In der Literatur wird dieses Regime auch als nicht-Lindblad-artige Dynamik bezeichnet [94]. Bei tiefen Temperaturen, wo für den gedämpften Markovschen Quantenoszillator $\gamma_\uparrow = 0$ gilt, sollte in diesem Fall dennoch der Koeffizient $\tilde{\gamma}_\uparrow(t)$ berücksichtigt werden, da dieser erst für $t \gg \Gamma^{-1}$ gegen Null geht.

3.3.4 Charakteristische Zeitskalen der Quanten-Brownschen Bewegung

Die Besonderheiten im zeitlichen Verhalten hängen ab von den charakteristischen Zeitskalen des Gesamtsystems. Im Einzelnen sind dies die charakteristische Zeitskala der internen Systemdynamik τ_s , die Relaxationszeit τ_γ und die kürzeste Badkorrelationszeit τ_b . Diese können aus den Koeffizienten der HPZ-Mastergleichung (3.90) abgeschätzt werden und ergeben sich zu:

$$\tau_s \approx \gamma_q^{-1/2} = \left[\omega_0^2 + \frac{\gamma\Gamma}{m} \left(1 - \frac{\Gamma^2}{\omega_0^2 + \Gamma^2} \right) \right]^{-1/2} \sim \omega_0^{-1}, \quad (3.133)$$

$$\tau_\gamma \approx \gamma_p^{-1} = \frac{m}{\gamma} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} \right) \sim \gamma^{-1}, \quad (3.134)$$

$$\tau_b \approx \min \{ \Gamma^{-1}, \beta\hbar \} \sim \Gamma^{-1}. \quad (3.135)$$

In Abhängigkeit des gegenseitigen Verhältnisses dieser drei Zeitskalen zueinander, können im Wesentlichen die vier Regime

$$\tau_b \ll \tau_s \ll \tau_\gamma \quad (\text{Markovsches Weak-Coupling-Regime}), \quad (3.136)$$

$$\tau_b \approx \tau_s \ll \tau_\gamma \quad (\text{Nicht-Markovsches Regime}), \quad (3.137)$$

$$\tau_b \ll \tau_s \approx \tau_\gamma \quad (\text{Strong-Coupling-Regime}), \quad (3.138)$$

$$\tau_s < \tau_b \ll \tau_\gamma \quad (\text{Out-of-Resonance-Regime}) \quad (3.139)$$

unterschieden werden. Bei der Behandlung von Dekohärenzprozessen in Kapitel 6 kommt als weitere charakteristische Zeitskala die Zeitspanne, auf der anfängliche quantenmechanische Interferenzen gedämpft werden, hinzu.

3.4 Zusammenfassung von Kapitel 3

In diesem Kapitel wurde das Modell der quantenmechanischen Brownschen Bewegung zusammen mit einigen Grenzfällen vorgestellt. In den weiteren Kapiteln wird das Modell als Grundlage zur Beschreibung von nicht-Markovscher Dynamik in Systemen kontinuierlicher Variablen dienen. Ausgangspunkt war der Caldeira-Leggett Hamilton-Operator, von dem aus die quantenmechanische Langevin-Gleichung direkt abgeleitet werden kann. Der Pfadintegralformalismus für dissipative Quantensysteme wurde eingeführt. Der Imaginärzeit-Formalismus erlaubt die Herleitung der quantenstatistischen Zustandssumme und der reduzierten stationären Dichtematrix des Systems. Der Realzeit-Formalismus ermöglicht die Beschreibung der Zeitentwicklung der Dichtematrix und die Herleitung einer exakten Mastergleichung für die quantenmechanische Brownsche Bewegung. Diese HPZ-Mastergleichung besitzt zeitabhängige Koeffizienten, die für die nicht-Markovschen Eigenschaften der Dynamik verantwortlich sind. Die HPZ-Mastergleichung wird in späteren Kapiteln für unterschiedliche Anfangszustände gelöst, wobei im Allgemeinen die exakten Werte der Koeffizienten nur durch numerische Integration gewonnen werden können. Im vorgestellten Grenzfall der sekundären WCL-Approximation, die zwar eine Born-Approximation enthält, jedoch keine Markovsche Approximation, vereinfacht sich die Lösung in vielen Fällen. Im sich anschließenden Kapitel 4 werden zunächst die quantenstatistischen Eigenschaften des stationären Zustands untersucht. In den darauf folgenden Kapiteln steht dann die Nichtgleichgewichtsdynamik des dissipativen Quantensystems im Vordergrund, insbesondere die nicht-Markovsche Beschreibung von Dekohärenzprozessen und der Korrelationsdynamik in Systemen kontinuierlicher Variablen.

Kapitel 4

Thermodynamik offener Quantensysteme am Beispiel des QBM-Modells

„Nobody knows, what entropy really is.“
John von Neumann zitiert in [97].

Ausgehend von der im vorausgegangenen Kapitel hergeleiteten Zustandssumme und der reduzierten Dichtematrix des Brownschen Oszillators, kann nach dessen thermodynamischen Eigenschaften gefragt werden. Die Zustandssumme erlaubt die Definition von freier Energie und thermodynamischer Entropie. Aus der reduzierten Dichtematrix kann die von Neumann Entropie bestimmt werden. In diesem Abschnitt sollen diese beiden Entropien miteinander verglichen werden und es wird dargelegt, dass diese beiden Größen für den stationären QBM-Zustand nicht zwangsläufig übereinstimmen müssen. Erstere kommt bei der Diskussion von thermodynamischen Kreisprozessen im Rahmen des QBM-Modells zum Einsatz und beweist die Unmöglichkeit eines mikroskopischen Perpetuum mobile zweiter Art [98, 99, 100]. Letztere ist die statistische Entropie, die den Informationsgewinn durch Messungen am QBM-Zustand beschreibt [101], und findet oft im quanteninformatiostheoretischen Kontext Anwendung, insbesondere bei der Beschreibung von Nichtgleichgewichtsvorgängen, wie dem Verlust von Dekohärenz und Verschränkung in einer dissipativen Umgebung. Solange die Anwendbarkeit der von Neumann Entropie auf den informationstheoretischen Kontext beschränkt bleibt und die thermodynamische Entropie dann zum Einsatz kommt, wenn die Gültigkeit der thermodynamischen Gesetze untersucht wird, treten keine Interpretationsprobleme auf. Anders verhält es sich in Situationen, wo Aussagen über den Informationsgehalt eines Quantensystems mit thermodynamischen Eigenschaften verbunden werden, wie im Folgenden gezeigt wird. Das Verhalten offener Quantensysteme hat dabei in den letzten Jahren Fragen bezüglich der Anwendbarkeit der Thermodynamischen Hauptsätze aufgeworfen [102, 103, 104, 105] und war in kürzlich erschienenen Arbeiten erneut Gegenstand der Diskussion [98, 106, 107, 108]. Im Kontext dieser Kontroverse ist auch das folgende Kapitel zu betrachten.

4.1 Zustandssumme und thermodynamische Entropie

Den Ausgangspunkt für die Bestimmung thermodynamischer Potentiale bildet die Zustandssumme. Für den stationären Zustand des QBM-Modells wurde sie über den in Abschnitt 3.2.2 dargestellten Einfluss-Funktional-Formalismus gewonnen [14, 109] und ist in Gleichung (3.71) als Pfadintegral über die effektive Euklidische Wirkung dargestellt. Dieser Ausdruck kann weiter ausgewertet werden [4] und führt auf die Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = \oint \mathcal{D}[q(t)] e^{-S_{\text{eff}}^E[q(t)]/\hbar} = \frac{1}{\beta\hbar\omega_0} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n^2}{\omega_0^2 + \nu_n^2 + \nu_n \hat{\gamma}(\nu_n)}, \quad (4.1)$$

mit der Laplacetransformierten Funktion $\hat{\gamma}(z)$ des Dämpfungsterms (3.12) und den sogenannten Matsubara Frequenzen $\nu_n = 2\pi n/\hbar\beta$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Für das Drude-Spektrum (3.39) kann die Zustandssumme in die Form

$$\mathcal{Z} = \frac{\beta\hbar\omega_0}{4\pi^2} \frac{\Gamma_e(\lambda_1/\nu)\Gamma_e(\lambda_2/\nu)\Gamma_e(\lambda_3/\nu)}{\Gamma_e(\Gamma/\nu)} \quad (4.2)$$

umgeschrieben werden, mit der Euler-Gamma-Funktion $\Gamma_e(x)$ und $\nu = |\nu_1|$. Die freie Energie ergibt sich aus der Zustandssumme durch

$$F = -kT \ln \mathcal{Z} = kT \left[\ln \frac{\Gamma_e(\Gamma/\nu)}{\omega_0/(2\pi\nu)} - \sum_{i=1}^3 \ln \Gamma_e(\lambda_i/\nu) \right] \quad (4.3)$$

und kann auch in einer dazu äquivalenten Form aus mikroskopischen Überlegungen [74, 98] gewonnen werden:

$$F(T) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega f(\omega, T) \text{Im} \left\{ \frac{d \ln \tilde{\chi}(\omega)}{d\omega} \right\}, \quad (4.4)$$

wobei $f(\omega, T) = kT \ln [2 \sinh(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega)]$ die freie Energie des ungekoppelten Oszillators im kanonischen Wärmebad ist. Die thermodynamische Entropie sei dann durch

$$S(T) = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega s(\omega, T) \text{Im} \left\{ \frac{d \ln \tilde{\chi}(\omega)}{d\omega} \right\}, \quad (4.5)$$

mit $s(\omega, T) = \frac{\beta\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} - \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega})$ definiert. Die innere Energie

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z} = F + TS = \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \omega \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \text{Im} \left\{ \frac{d \ln \tilde{\chi}(\omega)}{d\omega} \right\} \quad (4.6)$$

und die spezifische Wärme $C = T \frac{\partial S}{\partial T}$ können dann ebenfalls leicht bestimmt werden. Für ein beliebiges Wärmebad verschwindet die Entropie (4.5) für $T \rightarrow 0$:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = 0 \quad (4.7)$$

wie es vom dritten Hauptsatz der Thermodynamik gefordert wird [106, 107]. Im Falle eines Ohmschen Bades geht $S(T)$ linear in T gegen Null. F , U und S beschreiben die Änderung der entsprechenden thermodynamischen Größen des Gesamtsystems wenn dem zunächst ungestörten Bad im kanonischen Gleichgewicht bei Temperatur T der Brownsche Oszillator hinzugefügt bzw. entnommen wird.

4.2 Reduzierte Dichtematrix und von Neumann Entropie

Trotz der Tatsache, dass die Entropie (4.5) für $T \rightarrow 0$ verschwindet, fluktuiert die Energie des offenen Systems für sehr tiefe Temperaturen. Werden mit Bezug auf den Hamilton-Operator H_s als Observable Projektionsmessungen durchgeführt, so findet man das System auch für Temperatur Null mit endlicher Wahrscheinlichkeit in höheren angeregten Energie-Eigenzuständen [110, 111]. Dies ist dann der Fall, wenn System und Umgebung verschränkt sind und deshalb der Grundzustand nicht in einen Produktzustand von Wellenfunktion des Oszillators und Wellenfunktion des Bades zerfällt. Formal ist dies die Konsequenz aus der Tatsache, dass der Hamilton-Operator H_s nicht mit dem Hamilton-Operator des Gesamtsystems H vertauscht. Der Operator-Mittelwert bzw. die mittlere Energie des mit dem Wärmebad wechselwirkenden Systems sind durch

$$\langle H_s \rangle = \text{Tr}[\rho_s H_s] = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle q^2 \rangle = \frac{m\hbar}{2\pi} \int_0^\infty d\omega (\omega_0^2 + \omega^2) \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \tilde{\chi}''(\omega) \quad (4.8)$$

gegeben. Demnach sind mittlere Energie $\langle H_s \rangle$ und die innere Energie U , wie aus dem Vergleich der Ausdrücke (4.6) und (4.8) hervorgeht, verschieden. Für $T \rightarrow 0$ ist die mittlere Energie im Allgemeinen größer als die Grundzustandsenergie des Oszillators

$$\langle H_s \rangle_{T=0} = \frac{m\hbar}{2\pi} \int_0^\infty d\omega (\omega_0^2 + \omega^2) \chi''(\omega) > \frac{1}{2} \hbar \omega_0. \quad (4.9)$$

Bezogen auf die mittlere Besetzungszahl $\langle n \rangle = \text{Tr}[\rho_s n] = \langle a^\dagger a \rangle$ bedeutet dies, dass auch $\langle n \rangle_{T=0} > 0$ ist, wobei gilt

$$\langle n \rangle = \frac{m}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \left(\frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\omega_0^2} \right) \tilde{\chi}''(\omega) \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) - \frac{1}{2}. \quad (4.10)$$

Auch die Varianz der Besetzungszahl, die durch

$$(\Delta n)^2 = \frac{\langle\langle H_s^2 \rangle\rangle}{\hbar^2 \omega^2} = \frac{2\langle H_s \rangle^2}{\hbar^2 \omega_0^2} - \frac{\langle q^2 \rangle \langle p^2 \rangle}{\hbar^2} - \frac{1}{4} \quad (4.11)$$

gegeben ist, wobei die Energiefluktuationen $\langle\langle H_s^n \rangle\rangle = (-1)^n \frac{d^n}{dk^n} \ln \chi_E(k)|_{k=0}$ über die charakteristische Funktion der Energie $\chi_E(k) = \langle e^{-kH_s} \rangle$ gewonnen werden [110], kann für $T \rightarrow 0$ Werte größer Null annehmen. Die mittlere Besetzungszahl entspricht der Mittelung $\langle n \rangle = \sum_{n=0}^\infty n \rho_{nn}$ über die Diagonalelemente ρ_{nn} der Dichtematrix ρ_s in der Energie-Eigenbasis

$$\rho_{nm} = \langle n | \rho_s | m \rangle = \int dq dq' \langle n | q \rangle \langle q | \rho_s | q' \rangle \langle q' | m \rangle, \quad (4.12)$$

wobei

$$\langle q | n \rangle = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-1/2} \sqrt{b} H_n(bq) e^{-b^2 q^2 / 2} \quad (4.13)$$

die Energie-Eigenfunktionen des ungestörten Harmonischen Oszillators sind, und H_n mit $b = \sqrt{m\omega_0/\hbar}$ die Hermite Polynome bezeichnen. Die Diagonalelemente lauten dann explizit

$$\rho_{nn} = \sqrt{\frac{4}{D}} (d^2 - a^2)^{n/2} P_n \left[\frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}} \right], \quad (4.14)$$

wobei P_n ein Legendre-Polynom der Ordnung n bezeichnet und die dimensionslosen Variablen $x = 2b^2 \langle q^2 \rangle$, $y = 2\langle p^2 \rangle / (\hbar^2 b^2)$, $D = 1 + x + y + xy$, $a = (y - x)/D$ und $d = (xy - 1)/D$

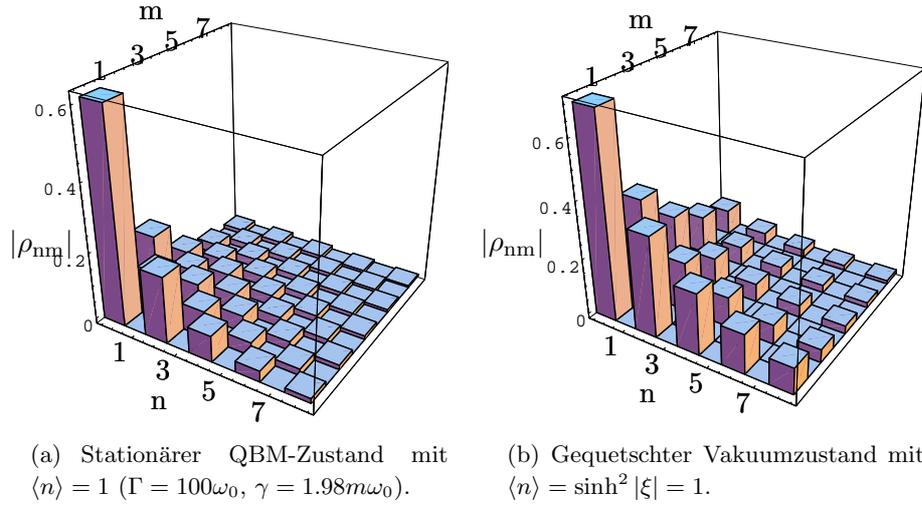


Abbildung 4.1: Amplitude der Dichtematrixelemente $|\rho_{nm}|$ nach Gl. (6.11) des stationären QBM-Zustands in einem Bad der Temperatur Null (links) im Vergleich zu einem gequetschten Vakuumzustand $|\xi\rangle = \sqrt{\text{sech}|\xi|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!} \tanh^n(|\xi|) |2n\rangle$ mit gleicher mittlerer Besetzung $\langle n \rangle$ (rechts). Im Falle des QBM-Zustands handelt es sich um einen gemischten Zustand, der gequetschte Vakuumzustand mit Quetschparameter ξ ist ein reiner Zustand (und wird in Abschnitt 5.1.2.2 nochmals eingehender behandelt).

eingeführt wurden [110]. Wie sich aus Abb. 4.1a entnehmen lässt, ist die Dichtematrix ρ_{nm} in dieser Basis nicht strikt diagonal, da die Wellenfunktionen des ungestörten Oszillators nicht mehr die Eigenfunktionen von ρ_s sind. Vielmehr werden die Eigenwerte p_n von $\rho_s(q, q')$ und die entsprechenden Eigenfunktionen

$$f_n = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-1/2} \sqrt{c} H_n(cq) e^{-c^2 q^2/2} \quad \text{mit} \quad c = [\langle p^2 \rangle / (\hbar^2 \langle q^2 \rangle)]^{1/4} \quad (4.15)$$

durch die Lösung des Eigenwertproblems

$$\int dq' \rho(q, q') f_n(q') = p_n f_n(q) \quad (4.16)$$

bestimmt [104]. Mit Hilfe des Ausdrucks

$$\mu = \text{Tr} \rho_s^2 = \int dq dq' \langle q | \rho_s | q' \rangle \langle q' | \rho_s | q \rangle = \frac{\hbar/2}{\sqrt{\langle q^2 \rangle \langle p^2 \rangle}} \quad (4.17)$$

für die stationäre Purity lassen sich die Eigenwerte durch

$$p_n = 2\mu / (1 + \mu) [(1 - \mu) / (1 + \mu)]^n \quad (4.18)$$

ausdrücken. Die Verteilung der Dichtematrixelemente des stationären QBM-Zustand lässt sich durch die Überlagerung zweier Effekte anschaulich verstehen. Die Wechselwirkung mit dem Bad führt zum einen zum Entstehen von Quantenkorrelationen und damit zu einem gemischten reduzierten Zustand, zum anderen wird durch die spezielle Art des Wechselwirkungs-Hamilton-Operators die Varianz der Ortsvariablen gequetscht und die des Impulses vergrößert. Das legt die Analogie zu einem gequetschten Vakuumzustand (*squeezed state*) nahe,

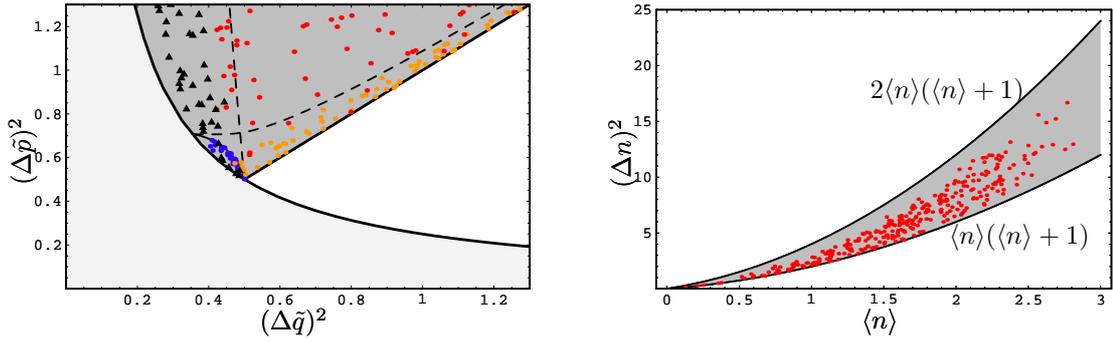
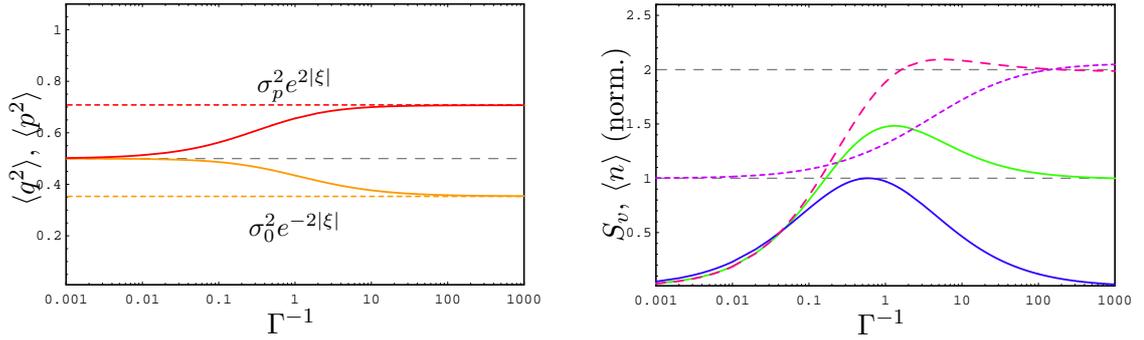


Abbildung 4.2: Mögliche und erlaubte Wertepaare der normierten Varianzen $(\Delta\tilde{q})^2 = (\Delta q)^2/\sigma_0$ und $(\Delta\tilde{p})^2 = (\Delta p)^2 \frac{4\sigma_0^2}{\hbar^2}$ (rechts) sowie mögliche Kombinationen \bar{n} und $(\Delta n)^2$ (links). **Rechts:** Physikalisch erlaubte Zustände liegen oberhalb der Hyperbel, die die Menge der gequetschten Vakuumzustände mit minimaler Unschärfe beschreibt. Thermische Zustände mit Boltzmann-Verteilung liegen auf der die graue Fläche rechtsseitig begrenzenden Geraden. Rote Datenpunkte geben Zustände mit zufällig gewählten Kombinationen von (γ, Γ, T) an. Schwarze Dreiecke unterliegen der Einschränkung $T = 0$, blaue Punkte zusätzlich der Einschränkung $\gamma\Gamma \leq m\omega_0^2$. Die durch die gestrichelte Linie begrenzte Menge der gelben und blauen Punkten ist durch die auch in der WCL-Approximation gültige Kombination $(\gamma, \Gamma \leq \frac{m\omega_0^2}{\gamma}, T)$ gekennzeichnet. Die nahezu senkrecht verlaufende gestrichelte Linie ist die Markovsche Grenze mit $\Gamma \rightarrow \infty$ für Wertepaare bei $T = 0$. **Links:** Die im QBM-Modell möglichen Kombinationen aus mittlerer Besetzungszahl $\langle n \rangle$ und deren Varianz $(\Delta n)^2$ werden durch diejenigen eines thermischen Zustands, $\bar{n}(\bar{n} + 1)$ und eines gequetschten Vakuumzustands $2\bar{n}(\bar{n} + 1)$ begrenzt.

die in Abb. 4.1b deutlich wird (eine ausführliche Behandlung gequetschter Zustände findet noch in Abschnitt 5.1.2 statt). Im Unterschied zu letzterem ist das Unschärfe-Produkt $\Delta q \Delta p$ im stationären QBM-Zustand nicht mehr minimal und der Zustand nicht mehr rein. So weichen die Werte für die Purity μ selbst bei gleicher mittlerer Besetzungszahl $\langle n \rangle$ im Allgemeinen voneinander ab: als reiner Zustand hat der gequetschte Vakuumzustand eine Purity von $\mu = 1$, für den QBM-Zustand dagegen ist $\mu < 1$ für $\gamma > 0$. Abb. 4.2a stellt die möglichen und erlaubten Kombination der Varianzen von p und q graphisch dar. Auf der Hyperbel liegen alle gequetschten Vakuumzustände. Physikalisch erlaubt sind nur Wertepaare auf oder oberhalb der Hyperbel. Alle thermischen Zustände mit Boltzmann-Verteilung der Diagonalelemente liegen auf der Winkelhalbierenden. Die eingeschlossene grau schraffierte Fläche gibt die für beliebige Kombination der Parameter (γ, Γ, T) möglichen Wertepaare der skalierten Varianzen $(\Delta\tilde{q})^2$ und $(\Delta\tilde{p})^2$ an. Der obere Hyperbelabschnitt mit großen Werten für $(\Delta\tilde{p})^2$ und kleinen Werten für $(\Delta\tilde{q})^2$ ist somit für bestimmte Parameterkombinationen erreichbar. Der stationäre QBM-Zustand wird in diesen Fällen nahezu zu einem gequetschten Vakuumzustand mit minimaler Unschärfe und verschwindender von Neumann Entropie, aber der mittleren Besetzungszahl und Besetzungszahl-Varianz, die einem gequetschten Zustand entspricht. Die im QBM-Modell für beliebige Werte von γ , Γ und T möglichen Kombinationen aus mittlerer Besetzungszahl $\langle n \rangle$ und deren Varianz $(\Delta n)^2$ werden durch diejenigen eines thermischen Zustands, $\bar{n}(\bar{n} + 1)$ und eines gequetschten Vakuumzustands $2\bar{n}(\bar{n} + 1)$ begrenzt, wie Abb. 4.2b schematisch darstellt. Die Abb. 4.3 zeigt einen Fall, für den bei konstantem Produkt $\gamma\Gamma$ durch Vergrößerung von γ und Verkleinerung von Γ ein annähernd gequetschter Vakuumzustand entsteht. Die quantenstatistischen Eigenschaften des stationären QBM-Zustand sind also eine Überlagerung von Effekten des thermischen Rauschens, des *umgebungsindu-*



(a) Varianzen $\langle q^2 \rangle$ (gelb) und $\langle p^2 \rangle$ (rot) nähern sich den Werten $\sigma_0^2 e^{-2|\xi|}$ bzw. $\frac{\hbar^2}{4\sigma_0^2} e^{2|\xi|}$ (farbig gestrichelt) eines gequetschten Vakuumzustands an.

(b) Entropie (blau), mittlere Besetzungszahl (grün) und deren Varianz (rosa). S_v ist normiert auf den maximalen Wert, $\langle n \rangle$ und $(\Delta n)^2$ auf den Grenzwert $\Gamma^{-1} \rightarrow \infty$.

Abbildung 4.3: QBM-Zustand bei Temperatur Null und $\gamma\Gamma = m\omega_0^2 = 1$ geht für kleine Γ (bzw. große γ) annähernd in einen gequetschten Vakuumzustand über. Die Varianzen (links) nähern sich den Varianzen eines gequetschten Vakuumzustandes $\sim e^{\pm 2|\xi|}$ an. Entsprechend wird das Unschärfeprodukt minimal und der QBM-Zustand annähernd zu einem reinen Zustand mit $S_v(\rho_s) \rightarrow 0$ für $\Gamma^{-1} \rightarrow \infty$ (blaue Kurve rechts). Die mittlere Besetzungszahl (grüne Kurve rechts) nähert sich dem entsprechenden Wert des gequetschten Zustandes mit $\langle n \rangle = \sinh^2 |\xi|$ und $(\Delta n)^2 = 2\langle n \rangle(\langle n \rangle + 1)$. Das Verhältnis $(\Delta n)^2 / \langle n \rangle$ ist violett gestrichelt. (siehe auch Abschnitt 5.1.2). Parameter: $m\omega_0^2 = 1$, $\xi \approx 0.174$.

zierten Squeezings, und der Quantenkorrelationen zwischen System und Bad. Die Verteilung der Diagonalelemente der Dichtematrix in der Energie-Eigenbasis entspricht deshalb keiner Boltzmann-Verteilung. Abb. 4.4 verdeutlicht den Unterschied zwischen den Ergebnissen der Eigenwerte p_n der Dichtematrix und deren Diagonalelementen ρ_{nn} . Für letztere gilt zwar nach wie vor $\sum_n \rho_{nn} = 1$, allerdings weicht die Verteilung von der exponentiellen Form der Boltzmann-Verteilung ab, wobei höhere Niveaus zugunsten der niedrigeren stärker besetzt sind. Da die Wahrscheinlichkeit, das System in einem angeregten Zustand zu finden, selbst für $T \rightarrow 0$ nicht verschwindet, reduziert sich der Dichteoperator ρ_s nicht auf eine Projektion auf den nicht-entarteten Grundzustand des Systems H_s und beschreibt folglich keinen reinen Zustand mit verschwindender statistischer Entropie. Die Ungewissheit über das Messergebnis zeigt sich in der von Neumann Entropie $S_v(\rho_s)$ der reduzierten Dichtematrix. Diese lautet für Gaußsche Zustände allgemein [112, 113, 104, 61]:

$$S_v(\rho_s) = -k \text{Tr}[\rho_s \ln \rho_s] = -k \sum_n p_n \ln p_n = k \frac{1-\mu}{2\mu} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - k \ln \frac{2\mu}{1+\mu}. \quad (4.19)$$

Mit Hilfe effektiver Größen lässt sich die von Neumann Entropie auch in einer zur kanonischen Form äquivalenter Weise schreiben. Nach Einführung der effektiven Masse und Frequenz

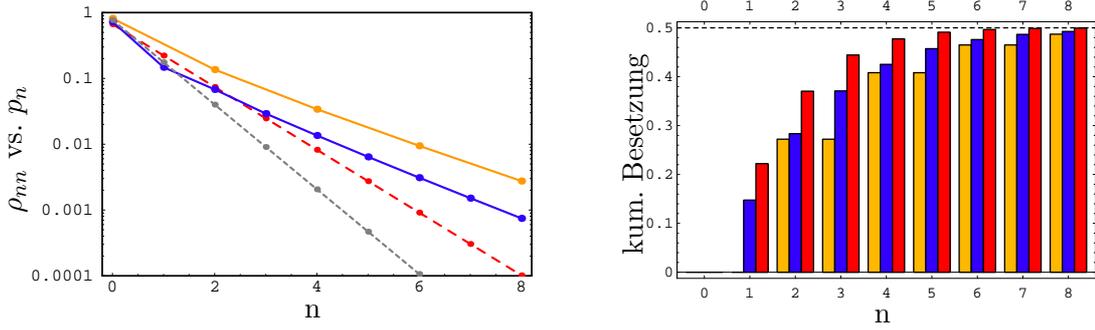
$$\omega_{\text{eff}} = \frac{2}{\hbar\beta} \text{arcoth}(\mu), \quad m_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{\langle p^2 \rangle / \langle q^2 \rangle}}{\omega_{\text{eff}}}, \quad \text{so dass} \quad H_{\text{eff}} = \frac{p^2}{2m_{\text{eff}}} + \frac{1}{2} m_{\text{eff}} \omega_{\text{eff}}^2 q^2, \quad (4.20)$$

kann die Dichtematrix (3.75) mit der effektiver Zustandssumme $Z_{\text{eff}} \neq \mathcal{Z}$ auch in der Form

$$\rho_s = Z_{\text{eff}}^{-1} \exp(-\beta H_{\text{eff}}), \quad \text{mit} \quad Z_{\text{eff}}^{-1} = 2 \sinh(\omega_{\text{eff}} \hbar \beta / 2) \quad (4.21)$$

geschrieben werden [4]. Die von Neumann-Entropie und die Eigenwerte p_n lauten dann:

$$S_v(\rho_s) = \frac{\beta \hbar \omega_{\text{eff}}}{e^{\beta \hbar \omega_{\text{eff}}} - 1} - \ln \left(1 - e^{-\beta \hbar \omega_{\text{eff}}} \right), \quad p_n = Z_{\text{eff}}^{-1} e^{-\beta E_n}, \quad E_n = \hbar \omega_{\text{eff}} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (4.22)$$



(a) Verteilung der Diagonalelemente ρ_{nn} des stationären QBM-Zustands (blau) mit $\langle n \rangle = 1/2$ im Vergleich zu einem gequetschten Vakuumzustand (gelb) und einem thermischen Zustand (rot) mit jeweils gleichem $\langle n \rangle$. Grau gestrichelt ist die Verteilung der p_n dargestellt.

(b) Kumulierte Besetzung $\sum_{k=0}^n k\rho_{kk}$ für den QBM-Zustand (blau), den gequetschten Vakuumzustand (gelb) und den thermischen Zustand (rot). Für große n ergibt sich die mittlere Besetzung $\langle n \rangle = 1/2$.

Abbildung 4.4: Verteilung der Diagonalelemente ρ_{nn} der Dichtematrix ρ_s des stationären QBM-Zustands im Vergleich zu der Verteilung der Eigenwerte p_n und zu den entsprechenden Verteilungen für einen gequetschten Vakuumzustand und einen thermischen Zustand mit jeweils der gleichen mittleren Besetzungszahl. Parameter $\Gamma = 100\omega_0$, $\gamma = 0.93m\omega_0$.

Da $\omega_{\text{eff}} \rightarrow 0$ für $T \rightarrow 0$ verringert sich der Abstand der effektiven Energieniveaus E_n immer weiter, was auf den gemischten Zustand bei Temperatur Null hinweist. Aus informationstheoretischer Sicht gibt $S_v(\rho_s)$ die minimale Menge klassischer Information an, die durch Messungen am Quantenzustand ρ_s zugänglich ist [1] und ist deshalb kleiner als die Shannon-Entropie $\sum_n \rho_{nn} \log \rho_{nn}$ mit Matrixelementen ρ_{nn} in der Basis der Energie-Eigenfunktionen des ungestörten Oszillators.

4.3 Diskussion der thermodynamischen Größen

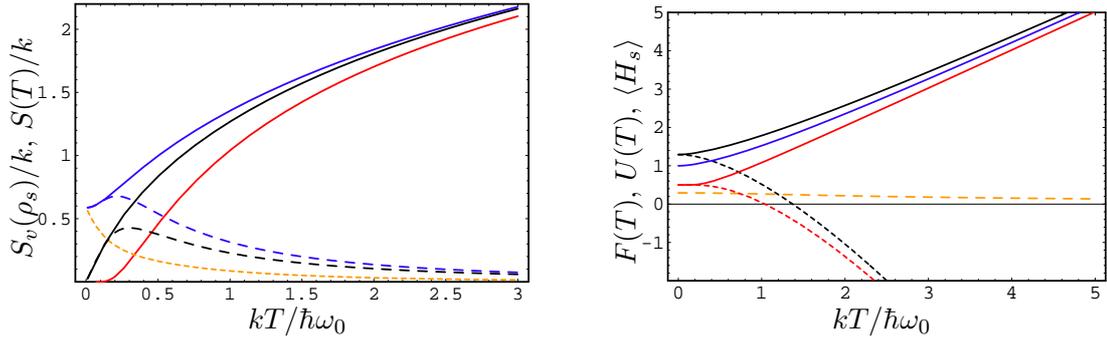
4.3.1 Vergleich von thermodynamischer und statistischer Entropie

Die von Neumann Entropie S_v des Subsystems ρ_s und die thermodynamische Entropie $S(T)$ des Brownschen Oszillators weichen im Allgemeinen voneinander ab. Die Abbildung 4.5 soll verdeutlichen, dass die von Neumann Entropie des Oszillators zu gegebener Temperatur größer ist als die entsprechende thermodynamische Entropie

$$S_v(\rho_s) \geq S(T) \quad \text{für} \quad \gamma > 0. \quad (4.23)$$

Selbst für $T \rightarrow 0$ ist die von Neumann Entropie S_v größer Null während die thermodynamische Entropie näherungsweise linear mit T verschwindet. Der Grund für $\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = 0$ ergibt sich aus der Annahme $Z_{\text{tot}} = \mathcal{Z} \cdot Z_b$, die der Herleitung der Zustandssumme (4.1) in Kapitel 3 zugrundeliegt. Z_b bezeichnet dabei die kanonische Zustandssumme des ungestörten Bades mit Dichtematrix $\rho_b(0)$. Daraus folgt, dass

$$S_v(\rho_{\text{tot}}) = S(T) + S_v(\rho_b(0)), \quad (4.24)$$



(a) $S_v(\rho_s)$ ist größer als $S(T)$ und verschwindet nicht für $T \rightarrow 0$. Die Differenz der Entropien (gelb gestrichelt) geht für hohe Temperaturen gegen Null, ebenso die jeweilige Abweichung (blau und schwarz gestrichelt) von der Entropie des Oszillators im kanonischen Wärmebad (rot).

(b) $\langle H_s \rangle$ (blau) ist kleiner als $U(T)$ (schwarz) und bei $T \rightarrow 0$ auch kleiner als $F(T)$ (schwarz gestrichelt). Alle Werte des Brownschen Oszillators liegen jeweils über den entsprechenden Werten des Oszillators im kanonischen Wärmebad (rot) bei gleicher Temperatur. (In Einheiten von $\hbar\omega_0$).

Abbildung 4.5: Vergleich der Temperaturabhängigkeit der von Neumann-Entropie $S_v(\rho_s)$ und der thermodynamischen Entropie $S(T)$ (links), sowie der entsprechenden thermodynamischen Potenziale $F(T)$, $U(T)$ und der mittleren Energie $\langle H_s \rangle$ (rechts). Parameter: $m\omega_0^2 = 1$, $\Gamma = 10\omega_0$, und $\gamma \approx 2.43m\omega_0$, so dass $\langle H_s \rangle_{T=0} = \hbar\omega_0$.

somit drückt $S(T)$ die Änderung $S_v(\rho_{\text{tot}}) - S_v(\rho_b(0))$ der von Neumann Entropie des Gesamtsystems aus, die durch die Anwesenheit des Brownschen Oszillators hervorgerufen wird. Sie weicht damit von der von Neumann Entropie $S_v(\rho_s)$ der reduzierten Dichtematrix des Brownschen Oszillators ab, sofern zwischen Subsystem und Bad Korrelationen entstehen. Auch die Tatsache, dass $S_v(\rho_s)$ größer ist als $S(T)$ legt die Vermutung nahe, dass Korrelationen entstanden sind. Dies verhindert auch das Erreichen eines reinen Zustandes des Subsystems für $T = 0$ und somit $\lim_{T \rightarrow 0} S_v(\rho_s) > 0$. Die Verschränkung von Bad und Subsystem bei tiefen Temperaturen wurde bereits in Referenz [104] diskutiert. Lediglich im Grenzfall schwacher Kopplung $\gamma \rightarrow 0$ werden die von Neumann Entropie (4.19) und die thermodynamische Entropie (4.5) identisch und entsprechen dem Ergebnis der Born-Markovschen Approximation mit Entropie $s(\omega_0, T)$ des harmonischen Oszillators und entsprechender Boltzmann-Verteilung. Der formale Grund für die Unterschiede zwischen den beiden Entropien kann in der Tatsache gesehen werden, dass ρ_s nur für die oben definierten effektiven Größen Z_{eff} und H_{eff} in der üblichen Form

$$\rho_s = Z_{\text{eff}}^{-1} \exp(-\beta H_{\text{eff}}) \neq Z^{-1} \exp(-\beta H_s) \quad (4.25)$$

geschrieben werden kann. Die statistische Entropie kann nur dann mit der thermodynamischen Entropie identifiziert werden, wenn die Dichtematrix ρ_s der kanonischen Dichtematrix $\rho = Z^{-1} \exp(-\beta H_s)$ mit $Z = \text{Tr} \exp(-\beta H_s)$ entspricht, denn es ist (mit $k = 1$):

$$S_v(\rho) = -\text{Tr}[\rho \ln \rho] = \beta \text{Tr}[\rho H_s] + \text{Tr}[\rho \ln Z] = \beta \langle H_s \rangle + \ln Z = \beta(U - F) = S(T). \quad (4.26)$$

Genauso kann die Wärmemenge δQ , die über die Clausius (Un-)Gleichung $\delta Q = T dS$ (für quasistatische Prozesse) mit der thermodynamischen Entropie verbunden ist, nur dann mit dem Anteil von dU , der eine statistische Umverteilung im Phasenraum $\text{Tr}[d\rho_s H_s]$ beschreibt, assoziiert werden, wenn ρ_s in kanonischer Form vorliegt:

$$dS_v = -k \text{Tr}[d\rho \ln \rho] = \text{Tr}[d\rho \ln Z] + \beta \text{Tr}[d\rho H_s] = \beta \text{Tr}[d\rho H_s] = \beta \delta Q = dS(T). \quad (4.27)$$

Während die Bestimmung der Entropie gemäß (4.5) bedingt, dass die thermodynamische Entropie des Brownschen Oszillators $S(T)$ und des ungestörten Bades $S_v(\rho_b)$ additiv sind – da alle Korrelationen zwischen Bad und Oszillator in die Definition der Entropie des Untersystems mit eingeflossen sind – sind die von Neumann Entropie (4.19) des Systems und des Bades nicht additiv. Letzteres wird zum Ausdruck gebracht durch eine nichtverschwindende wechselseitige Entropie bzw. Information

$$I_{sb} = S_v(\rho_s(\infty)) + S_v(\rho_b(\infty)) - S_v(\rho_{\text{tot}}) \stackrel{(4.24)}{=} \quad (4.28)$$

$$= S_v(\rho_s(\infty)) + [S_v(\rho_b(\infty)) - S_v(\rho_b(0))] - S(T) \quad (4.29)$$

welche angibt, um wie viel die tatsächliche Entropie des Gesamtsystems kleiner ist, als es die Gesamtentropie wäre, wenn die Teilsysteme völlig unabhängig wären [101]. Sie beinhaltet sowohl die klassischen als auch die quantenmechanischen Korrelationen (Verschränkung) zwischen den Teilsystemen S und B des Gesamtsystems $\rho_{\text{tot}} \neq \rho_s \otimes \rho_b$. Sie entspricht der durch die Spurbildung verloren gegangenen Information, bzw. dem Informationsverlust durch jeweils getrennte Beobachtung der Teilsysteme. Allerdings ist zu beachten, dass die klassisch gültige Relation $I_{sb} = S_v(\rho_s) - S(S|B)$ mit bedingter Entropie $S(S|B)$ – die die verbleibende Ungewissheit über den Zustand S angibt, falls der Zustand von B bekannt ist – nicht ohne weiteres auf den quantenmechanischen Fall übertragen werden kann, da lokale Messungen am System B zunächst genau spezifiziert werden müssen. Sie können auch den Zustand von S beeinflussen, sofern nichtlokale Korrelationen vorhanden sind [114]. Andererseits erwächst daraus gerade die Möglichkeit die Menge der in I_{sb} enthaltenen Quantenkorrelationen in Form des *Quantum Discord* zu bestimmen [115]. Maximal wird die durch (4.28) gemessene Korrelation, wenn sich das Gesamtsystem für $T \rightarrow 0$ in einem reinen Zustand befindet. Dann ist $S_v(\rho_{\text{tot}}) = 0$ so dass aus der Dreiecks- bzw. Araki-Lieb Ungleichung [116] und der Subadditivität der von Neumann Entropie

$$|S_v(\rho_s) - S_v(\rho_b)| \leq S_v(\rho_{\text{tot}}) \leq S_v(\rho_s) + S_v(\rho_b) \quad (4.30)$$

folgt, dass $S_v(\rho_s(\infty)) = S_v(\rho_b(\infty))$. Ist der Gesamtzustand aus Bad und System ein reiner Zustand, dann sind die beiden Entropien der Teilsysteme gleich [117]. Da auch $\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = 0$ gilt, folgt aus Gleichung (4.24), dass $S(\rho_b(0)) = 0$ und somit aus (4.28) als maximal möglicher Wert der wechselseitigen Information $I_{sb}^{\text{max}} = 2S_v(\rho_s(\infty))$. Dies ist auch ein Maß dafür, wie viel mehr Information im Gesamtsystem steckt als in den Teilsystemen.

4.3.2 Thermodynamische Kreisprozesse

Das theoretische Ergebnis, dass die mittleren Energie des Brownschen Oszillators auch für $T \rightarrow 0$ seine Grundzustandsenergie übersteigt, hat in der Literatur die Frage aufgeworfen, ob dies nicht einen Widerspruch zum zweiten Hauptsatz darstellt. Würde man das Teilchen dem Bad wieder entnehmen und anschließend in den Grundzustand relaxieren lassen, könnte die freiwerdende Energie zur Verrichtung von Arbeit genutzt werden, so die Argumentation. Damit würde ein Kreisprozess entstehen, der die zur Arbeitsverrichtung nötige Energie aus nur einem Bad gewinnt – also ein Perpetuum mobile zweiter Art. Dass dem nicht so sein kann, wurde kürzlich von Ford und O’Connell [98] für QBM mit Drude-Spektrum der Badmoden und von Kim und Mahler [108] für beliebige Spektren gezeigt. Das Kernargument basiert

dabei auf dem Prinzip minimaler Arbeit, welches besagt, dass die minimale Arbeit, die nötig ist, um ein System von einem thermodynamischen Zustand zu einem anderen gleicher Temperatur zu bringen, gleich der Differenz der Freien Energien dieser beiden Zustände ist [118]. Wird dem Bad ein Brownscher Oszillator hinzugefügt oder entnommen, so ist diese Differenz gleich $F(T)$ gemäß Gl. (4.4). Die mittlere Energie hingegen ist durch (4.8) gegeben. Um die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes bei $T \rightarrow 0$ zu bewahren, muss nun die aufzuwendende Arbeit jeweils größer als die gewonnene Energie sein, was wegen

$$F(0) - \langle H \rangle_{T=0} = \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \left[\omega \operatorname{Im} \left\{ \frac{d \ln \tilde{\chi}(\omega)}{d\omega} \right\} - m(\omega_0^2 + \omega^2) \operatorname{Im} \{ \tilde{\chi}(\omega) \} \right] \geq 0 \quad (4.31)$$

auch der Fall ist [98, 108]. Da für $T \rightarrow 0$ die von außen verrichtete Arbeit vollständig zu einer Erhöhung der inneren Energie $U(0)$ des Gesamtsystems führt, kann obige Differenz als im Gesamtsystem vorhandene Wechselwirkungsenergie U_{int} ($\neq \langle H_{\text{int}} \rangle$!) interpretiert werden. Wegen der unendlichen Anzahl an Badmoden führt die Zunahme der inneren Energie nicht zu einer Erhöhung der Temperatur. Die Wechselwirkungsenergie entspricht der Ableitung der freien Energie (4.3) nach der Abschneidefrequenz Γ [104]

$$U_{\text{int}} = U - \langle H_s \rangle = \Gamma \frac{\partial F}{\partial \Gamma}, \quad (4.32)$$

und ist im Allgemeinen von einer nicht zu vernachlässigenden Größenordnung. Beispielsweise ist für die Parameterkombination $\gamma\Gamma = 0.1m\omega_0^2$, was bereits einer relativ schwachen Kopplung entspricht, das Verhältnis $U_{\text{int}} : U$ immerhin noch etwa 1 : 50. Mit obigen Ausführungen wird auch das Verhalten der thermodynamischen Entropie für $T \rightarrow 0$ verständlich. Die in Form von $F(0)$ verrichtete Arbeit wird vollständig in innere Energie $U(0)$ umgewandelt, aufgeteilt in $\langle H_s \rangle$ und U_{int} . Ein Wärmefluss bzw. eine Entropieänderung ist damit nicht verbunden, also $S(0) = 0$ bzw. $S(\rho_{\text{tot}}) = S(\rho_b(0))$. Der Anstieg der statistischen Entropien der Einzelsysteme wird kompensiert durch die mit der Korrelation verbundene wechselseitige Information.

4.3.3 Wärmefluss und Entropieänderung

Der Wärmefluss, der mit der Entropieänderung $dS(T)$ bezüglich Variationen von Systemparametern $d\omega_0$ und dm verbunden ist, kann durch den Vergleich von

$$dU = d\langle H_s \rangle + dU_{\text{int}} = \operatorname{Tr}[\rho_s dH_s] + \operatorname{Tr}[H_s d\rho_s] + dU_{\text{int}} = \delta W_s + \delta Q_s + dU_{\text{int}} \quad (4.33)$$

mit dem totalen Differential in Gleichung (4.6) gewonnen werden. Es ist

$$dF = \delta W_s := \operatorname{Tr}[\rho_s dH_s] \quad \text{und} \quad \delta Q := TdS(T) = \delta Q_s + dU_{\text{int}} \quad (4.34)$$

Wird der gesamte Wärmefluss δQ der mit einer Änderung der thermodynamischen Entropie $S(T)$ einhergeht, über die Clausius (Un-)Gleichung $\delta Q = TdS(T)$ verbunden, wird deutlich, dass eine Variation der thermodynamischen Entropie des Brownschen Oszillators nicht nur zu einer, durch die statistische Umverteilung im Phasenraum des Subsystems bedingten Wärmemengenänderung $\operatorname{Tr}[H_s d\rho_s] =: \delta Q_s$ führt, sondern ebenfalls zu einem Wärmefluss zu den umgebenden Badmoden, für den im Falle von $T \rightarrow 0$ gilt $\delta Q_s = -dU_{\text{int}}$.

4.4 Betrachtung im informationstheoretischen Kontext

Vom informationstheoretischen Standpunkt werden obige Betrachtungen dann wichtig, wenn Aussagen über den Informationsgehalt eines offenen Quantensystems mit dessen thermodynamischen Eigenschaften in Beziehung gesetzt werden. Als Beispiel soll hier das Landauer Prinzip herangezogen werden [119, 120, 121]. Dieses Prinzip basiert auf der Clausius Ungleichung und besagt, dass irreversible logische Operationen wie das Löschen von Information mit der Dissipation von Energie einhergehen müssen. Danach ist das Entfernen von einem Bit an (klassischer) Information aus dem Speicher eines Systems mit einer Wärmeabgabe von mindestens $kT \ln 2$ Joule verbunden:

$$\left| \frac{\delta Q}{dS_v/(k \ln 2)} \right| \geq kT \ln 2. \quad (4.35)$$

Übertragen auf die vorliegende Problemstellung geht es also um die Frage nach der Gültigkeit des Landauer-Prinzips im Hinblick auf die in offenen Quantensystemen enthaltene klassische Information. Der optimale Löschungsvorgang, also derjenige mit der kleinsten Menge an produzierter Wärme, liegt dann vor, wenn die Messungen in der Eigenbasis von ρ_s durchgeführt werden. Die relevante Entropie ist deshalb die von Neumann Entropie $S_v(\rho_s)$ des Systems. Da das Löschen von Information mit einer Entropiereduktion verbunden ist, die nicht in einem isolierten System durchgeführt werden kann, muss das informationstragende System an die Umgebung gekoppelt sein. Für niedrige Temperaturen mag die Wechselwirkung im Vergleich zur thermischen Energie an Bedeutung gewinnen, so dass zwischen System und Umgebung signifikante Korrelationen entstehen. Natürlich findet das Landauer-Prinzip üblicherweise nur in Situationen Anwendung, in denen das informationstragende System und die Umgebung sowohl im anfänglichen Zustand als auch im Endzustand unkorreliert sind. Landauers Prinzip basiert auf dem 2. Hauptsatz und ist deshalb dann gültig, wenn dieser in der betreffenden Situation angewandt werden kann. Sofern zwischen System und Umwelt Korrelationen bestehen, sind beide Prinzipien nicht anwendbar, da die grundlegende Voraussetzung der Additivität der Entropien der Teilsysteme nicht erfüllt ist.

Warum sollte also in diesem Kontext das Landauer Prinzip herangezogen werden?

- Wie im vorangegangenen Abschnitt dargelegt wurde, ist die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes bei der Betrachtung von Kreisprozessen uneingeschränkt gegeben. Wie hier gezeigt werden soll, folgt daraus nicht zwangsläufig die Anwendbarkeit des Landauerschen Prinzips, sofern eine Verknüpfung von informationstheoretischen und thermodynamischen Begriffen problematisch ist. Dies hat zu scheinbar widersprüchlichen Standpunkten in der Literatur geführt. Während zum einen kürzlich erschienene Arbeiten die Gültigkeit des zweiten und dritten Hauptsatzes der Thermodynamik im Rahmen des QBM-Modells zeigten [98, 106, 107], wiesen andere Arbeiten auf eine Verletzung des Landauer Prinzips im quantenmechanischen Regime hin [122] und folgerten daraus auch eine Verletzung des zweiten Hauptsatzes.
- Das Landauer Prinzip erlaubt es die Abweichungen vom Idealfall der vernachlässigbaren Korrelationen zwischen System und Bad zu quantifizieren. Damit ist es schließlich möglich, zu spezifizieren, auf welche Weise eine Abweichung vom Landauer-Prinzip auftritt, wenn die Annahme einer schwachen Kopplung graduell aufgehoben wird.

Zur Illustration des oben erläuterten Sachverhalts im Rahmen des QBM-Modells ist in Abbildung 4.6 die Temperaturabhängigkeit des Wärmeaustausches δQ dividiert durch die Änderung dS_v , der von Neumann Entropie (in Bits). Die Wärmemengenänderung ist definiert durch $\delta Q = TdS(T)$ für quasistatische Variationen der Oszillatorfrequenz $d\omega_0$. Da δQ_s und dU_{int} unterschiedliche Vorzeichen besitzen können (wie im vorangegangenen Kapitel dargelegt), ist der Wärmefluss δQ im Vergleich zum Term δQ_s verringert. Für quasistatische Parametervariationen ist deshalb

$$\delta Q = TdS(T) \quad \text{aber} \quad \delta Q \neq TdS_v. \quad (4.36)$$

Wie man aus der Abbildung (4.6) klar erkennen kann, führt dies dazu, dass das Verhältnis für tiefe Temperaturen *unter* der Landauer-Grenze von $kT \ln 2$ liegt. Für hohe Abschneidefrequenzen beginnt diese Funktion für tiefe Temperaturen quadratisch in T und nicht linear. Das Landauer Prinzip ist in diesem Fall lediglich eine *obere* Grenze für die beim Löschen von Information an die Umgebung abgegebene Wärmemenge, sofern die von Neumann Entropie der reduzierten Dichtematrix als relevante Größe für den klassischen Informationsgehalt eines Quantensystems betrachtet wird. Der Grund hierfür kann darin gesehen werden, dass die von Neumann Entropie und die thermodynamische Entropie voneinander abweichen, sobald ein mesoskopisches Quantensystem mit seiner Umgebung verschränkt ist. Da die von Neumann Entropie als statistische Größe einerseits und die über die thermodynamische Entropie bestimmte Wärmemenge andererseits, unabhängig voneinander definiert sind, müssen diese Größen auch nicht zwangsläufig die Clausius (Un-)Gleichung erfüllen [122, 123].

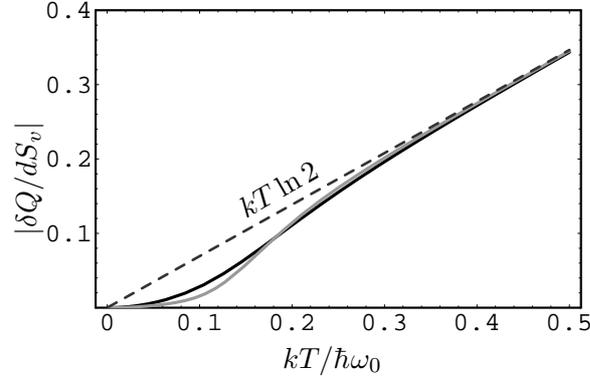


Abbildung 4.6: Temperaturabhängigkeit des Verhältnisses $|\delta Q/dS_v|$ (in bit) mit der Wärmemenge $\delta Q = TdS(T)$ für quasistatische Variationen der Oszillatorfrequenz $d\omega_0$. Bei niedrigen Temperaturen wird die Landauer Grenze unterschritten. Die Wärmemenge ist über die Änderung der thermodynamischen Entropie definiert. Die thermodynamische Entropie in diesem Fall allerdings kein direktes Maß für den Informationsgehalt des dissipativen Quantensystems. Dieser wird durch die von Neumann Entropie der reduzierten Dichtematrix bestimmt. Durch Parametervariationen hervorgerufene Änderungen dieser Größe stehen nicht in unmittelbarem Zusammenhang zur Änderungen der Wärmemenge. Eine Verknüpfung der beiden Größen zeigt, dass diese nicht dem Landauerschen Prinzip unterliegen. Eine Verknüpfung der beiden Größen zeigt, dass diese nicht dem Landauerschen Prinzip unterliegen. Kopplungsparameter $\gamma = m\omega_0^2/\Gamma = 0.1$ (schwarze Linie) und $\gamma = m\omega_0^2/\Gamma = 0.5$ (graue Linie).

4.5 Zusammenfassung von Kapitel 4

In diesem Kapitel wurden die quantenstatistischen und thermodynamischen Eigenschaften des stationären QBM-Zustands untersucht. Ausgehend von der im Kapitel 3 im Rahmen des Pfadintegralformalismus dissipativer Quantensysteme abgeleiteten Zustandssumme wurden die freie und innere Energie sowie die thermodynamische Entropie eingeführt. Diese Größen beschreiben die Beeinflussung des ungestörten Bades durch das Hinzufügen des Brownschen Oszillators. Ausgehend von der reduzierten Dichtematrix wurde die Verteilung der Matrixelemente in der Energie-Eigenbasis bestimmt, sowie die mittlere Energie und die von Neumann Entropie bestimmt. Letztere ist die statistische Entropie, die den Informationsgewinn durch Messungen am QBM-Zustand beschreibt bzw. die Änderung des Informationsgehalts durch Variation von Systemparametern. Es hat sich gezeigt, dass der stationäre QBM-Zustand auch bei einer Badtemperatur von Null in der Regel ein gemischter Zustand ist, mit positiver von Neumann Entropie und einer Verteilung der Diagonalelemente, die von der Boltzmann-Verteilung abweicht. Zudem zeigt der Zustand Charakteristika, die an einen gequetschten Vakuumzustand erinnern. Es wurde dargelegt, dass die thermodynamische Entropie und die von Neumann Entropie für den stationären QBM-Zustand in der Regel nicht identisch sind. Erstere kommt bei der Diskussion von thermodynamischen Kreisprozessen im Rahmen des QBM-Modells zum Einsatz und beweist die Unmöglichkeit eines mikroskopischen Perpetuum mobile zweiter Art [98, 99, 100]. Die von Neumann Entropie hingegen findet oft im quanteninformatiostheoretischen Kontext Anwendung, insbesondere bei der Beschreibung von Nichtgleichgewichtsvorgängen wie dem Verlust von Dekohärenz und Verschränkung in einer dissipativen Umgebung. Der formale Grund für die Abweichung der beiden Entropien voneinander liegt in der Ungleichheit von $\mathcal{Z} \neq \text{Tr}[e^{-\beta H_s}]$, da die effektive Wirkung zur Berechnung von \mathcal{Z} zusätzliche dissipative Anteile enthält (vgl. Einfluss-Funktional-Formalismus in Kapitel 3). Die Folgen sind zum einen begrifflicher Natur – die Definition der Entropie eines Quanten-Brownschen Oszillators muss im jeweiligen Kontext genau spezifiziert werden – zum anderen aber auch fundamentaler Natur, wenn thermodynamische und statistische Größen in Beziehung gesetzt werden. Dies wurde im letzten Unterkapitel anhand des Landauer Prinzips dargelegt. So behält zwar der zweite Hauptsatz in Form der Verbindung von Wärmemenge und thermodynamischer Entropie über die Clausius (Un-)Gleichung seine Gültigkeit, allerdings ist die thermodynamische Entropie in diesem Fall kein direktes Maß für den Informationsgehalt des dissipativen Quantensystems. Der Informationsgewinn durch Messungen und die (nichtlokalen) Korrelationseigenschaften werden durch die von Neumann Entropie der reduzierten Dichtematrix beschrieben. Durch Parametervariationen hervorgerufene Änderungen dieser Größe stehen nicht in unmittelbarem Zusammenhang zur Änderungen der Wärmemenge. Durch eine Verknüpfung der beiden Größen wurde gezeigt, dass diese nicht dem Landauerschen Prinzip unterliegen. Eine Verknüpfung von thermodynamischen und informationstheoretischen Größen ist im quantenmechanischen Tieftemperatur-Regime des QBM-Modells (thermische Fluktuationen sind klein und Korrelationen können nicht vernachlässigt werden) deshalb mit Vorsicht zu betrachten.

Kapitel 5

Systeme kontinuierlicher Variablen (CV-Systeme)

Systeme kontinuierlicher Variablen gewannen in den letzten Jahren im Bereich der Quanteninformationstheorie an großer Bedeutung [23, 24, 25, 124]. Darunter sind Systeme mit einem unendlich-dimensionalem Hilbert-Raum zu verstehen, die ein kontinuierliches Eigenwertspektrum der relevanten Operatoren aufweisen. Kontinuierliche Variable sind also beispielsweise die Orts- und Impulsoperatoren harmonischer Oszillatoren bzw. die Quadraturen elektromagnetischer Feldmoden – im Gegensatz zu den begrenzten, diskreten Eigenwertspektren von Systemen mit endlich-dimensionalen Hilbert-Raum (z.B. Spinsysteme oder Polarisation einzelner Photonen). Ein Beispiel ist die Übertragung von Information mittels elektromagnetischer Feldmoden von Laserpulsen hoher Intensität. Diese Ausgangszustände sind Moden mit einer großen Anzahl von Photonen und können in guter Näherung als kohärente Zustände modelliert werden. Sie sind somit ein Beispiel für Gaußsche Zustände, d.h. von Systemen kontinuierlicher Variablen, die durch eine gaußförmige Wigner-Funktion im Phasenraum gekennzeichnet sind und einen stärkeren klassischen Charakter aufweisen als nicht-Gaußsche Zustände, deren Wigner-Funktion auch negative Anteile besitzen kann. Gaußsche Zustände von Systemen kontinuierlicher Variablen haben den Vorteil, relativ leicht im Labor hergestellt und kontrolliert werden zu können und wurden bereits erfolgreich für Protokolle in der Quanten-Kryptographie und Quanten-Teleportation eingesetzt. In diesem Kapitel werden verschiedene Anfangszustände betrachtet, die dann Ausgangspunkt für die Untersuchung von Dekohärenz und Verschränkung in offenen Quantensystemen darstellen. Dazu soll zunächst ein kleiner Abriss über kontinuierliche Zustände und die spezielle Klasse der Gaußschen Zustände gegeben werden. Die Beschreibung der offenen Quantensystemen erfolgt dabei über die charakteristische Funktion, die Wigner-Funktion sowie die Dichtematrix bzw. Purity. Die zeitliche Entwicklung von Gaußschen Zuständen ist dabei auf einfache Weise durch Kovarianzelemente der gaußförmigen Wigner-Funktion bestimmt. Diese können direkt als Lösung der Langevin-Gleichung bestimmt werden. Die Evolution der Wigner-Funktion von nicht-Gaußschen Zuständen ist komplizierter, kann aber – sofern es sich um einen anfänglichen Produktzustand handelt – aus der HPZ-Mastergleichung (bzw. dem korrespondierendem Fokker-Planck-Gleichungstyp) gewonnen werden.

5.1 Gaußsche Zustände

Gaußsche Zustände sind – wie der Name schon nahelegt – durch eine gaußförmige charakteristische Funktion gekennzeichnet. Ihre durch die Wigner-Funktion beschriebene semi-klassische Phasenraumdichte ist deshalb durchgehend positiv und damit der klassischen Phasenraumdichte sehr ähnlich. Im Folgenden werden zunächst allgemeine Gaußsche Zustände beliebiger Modenanzahl definiert, bevor im Anschluss auf das prominente Beispiel Gaußscher Ein-Moden-Zustände in Form (gequetschter) kohärenter Oszillatorzustände eingegangen wird und das Gaußsche Zwei-Moden-System als Basis für die in Kapitel 6 erfolgende Diskussion von Verschränkung vorgestellt wird.

5.1.1 Charakterisierung von Gaußschen N-Moden-Zuständen

Gaußsche Zustände spielen eine wichtige Rolle in der Quanteninformationstheorie kontinuierlicher Systeme [124]. Dekohärenz und Verschränkung in solchen Systemen im Rahmen des QBM-Modells werden in den Kapitel 6 und 7 untersucht. Die zeitliche Entwicklung eines CV-Systems kann über die Dichtematrix, die Wigner-Funktion, die quantenstatistische charakteristische Funktion oder abgeleitete Größen wie die Purity erfolgen. In Kapitel 3.3.2 wurde die Lösung der HPZ-Mastergleichung für diese Größen dargestellt.

Die Wigner-Funktion ist eine Darstellung der Dichtematrix im quasi-klassischen Phasenraum der konjugierten Größen q und p , darf allerdings nicht als Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Phasenraum verstanden werden, da die Observablen \hat{q} und \hat{p} natürlich nicht miteinander kommutieren und daher nicht gleichzeitig scharf messbar sind. Die Bezeichnung Phasenraum ist im Folgenden daher stets als Parameterraum der Wigner-Funktion zu verstehen. Die Wigner-Funktion ist zwar reell, kann jedoch unter Umständen auch negative Werte annehmen, was eine Interpretation als Wahrscheinlichkeitsverteilung ohnehin verhindert.

Gaußsche n -Moden Zustände mit Koordinatenvektor $\mathbf{X} = (q_1, p_1, \dots, q_n, p_n)$ sind durch eine Wigner-Funktion der Form

$$W(\mathbf{X}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{X}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}^T\right]}{4\pi^n\sqrt{\det\mathbf{V}}} \quad \text{mit} \quad V_{ij} = \langle X_i X_j + X_j X_i \rangle / 2 - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle \quad (5.1)$$

gekennzeichnet. Die Elemente der Kovarianzmatrix \mathbf{V} bestimmen den Zustand vollständig. Wie der Name schon sagt, besitzen Gaußsche Zustände eine gaußförmige und damit stets positive Wigner-Funktion und haben daher einen stärkeren *klassischen* Charakter als die nicht-Gaußsche Zustände, welche im Kapitel 5.2 behandelt werden. Eine wichtige Größe zur Beschreibung der Dynamik eines Quantensystems ist die Purity $\mu(t) = \text{Tr}\rho^2(t)$, die in der Literatur vielfach insbesondere bei der Untersuchung von Dekohärenz und Relaxationsprozessen zum Einsatz kommt und leicht aus der Wigner-Funktion (5.1), bzw. der charakteristischen Funktion bestimmt werden kann:

$$\mu(t) = (2\pi\hbar)^n \int d\mathbf{X} W^2(\mathbf{X}, t) = \frac{\hbar}{2^n \sqrt{\det\mathbf{V}(t)}}. \quad (5.2)$$

Für einen anfänglichen, reinen Zustand hat die Purity den Wert $\mu(0) = 1$ und erreicht in einer thermischen Umgebung asymptotisch den stationären Wert $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \prod_{i=1}^n \tanh(\beta\hbar\omega_i)$. Für die Diskussion von Dekohärenz und Verschränkung in CV-Systemen sind insbesondere Superpositionen von Gaußschen Ein-Moden-Zuständen und verschränkte Zwei-Moden-Zustände von Interesse, so dass sich die folgende Darstellung auf diese Zustände konzentriert.

5.1.2 Beispiele für Gaußsche Ein- und Zwei-Moden-Zustände

5.1.2.1 Kohärente Zustände (Glauber Zustände)

Die einfachsten und bekanntesten Beispiele für einen Gaußschen Zustand sind die kohärente Oszillatorzustände (*Glauber-Zustände*), die die Eigenfunktion $|\alpha\rangle$ des Vernichtungsoperators \hat{a} darstellen und über die Eigenwertgleichung

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha_0|\alpha\rangle \quad \text{mit} \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{q_0}{\sigma_0} + i \frac{p_0}{\sigma_p} \right) \quad \text{und} \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}, \quad \sigma_p = \frac{\hbar}{2\sigma_0} \quad (5.3)$$

mit komplexen Eigenwert α (\hat{a} ist nicht hermitesch) definiert sind [125]. Bei einem materiellen harmonischen Oszillator sind Real- und Imaginärteil des komplexen Parameters α durch die Orts- und Impulserwartungswerte dieses Zustands bestimmt. Beschreibt der Oszillator die Dynamik einer Feldmode des elektromagnetischen Feldes, so bestimmen Real- und Imaginärteil die Erwartungswerte der elektrischen und magnetischen Feldstärke (Quadraturen des Feldes). Kohärente Zustände sind verschobene Vakuumzustände des harmonischen Oszillators und können mit dem Verschiebungsoperator $\hat{D}(\alpha)$ aus dem Grundzustand $|0\rangle$ gewonnen werden:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*a}|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*a}|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (5.4)$$

Ein kohärenter Zustand ist ein Gaußsches Wellenpaket mit minimaler Unschärfe $\Delta q \Delta p = \hbar/2$ und lautet in der Ortsdarstellung

$$\psi_\alpha(q) = \langle q|\alpha\rangle = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{m\omega_0}{2\hbar} (q - q_0)^2 + i \frac{p_0 q}{\hbar} \right]. \quad (5.5)$$

Kohärente Zustände haben keine fest vorgegebene Anzahl von Bosonen (Photonen im Falle von Lichtmoden, Phononen bei Schwingungsanregungen der Schwerpunktsbewegung von Ionen). Die Wahrscheinlichkeit, den Oszillator zur Zeit $t = 0$ in einem angeregtem Zustand mit einer bestimmten Anzahl Bosonen vorzufinden ist durch eine Poisson-Verteilung gegeben:

$$P_n(\alpha) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle} \quad \text{wobei} \quad |\alpha|^2 = \langle n \rangle = \frac{1}{4} \left(\frac{q_0^2}{\sigma_0^2} + \frac{p_0^2}{\sigma_p^2} \right). \quad (5.6)$$

Die Abbildungen 5.1a und b zeigen die Dichtematrixelemente $\rho = \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle\langle m|$ eines kohärenten Zustands in Besetzungszahldarstellung mit mittlerer Besetzung $\langle n \rangle = |\alpha|^2 = 3$ bzw. $\langle n \rangle = 10$. Für große mittlere Teilchenzahlen $\langle n \rangle$ nähert sich die Poisson-Verteilung der Teilchenzahlstatistik der Gaußschen Normalverteilung an und man erhält den semiklassischen Grenzfall mit relativ scharfer Verteilung $\Delta n / \langle n \rangle \rightarrow 1/\sqrt{\langle n \rangle}$. Im Verlaufe der Relaxation in einer thermischen Umgebung mit inverser Temperatur β geht diese Poisson-Verteilung in eine Boltzmann-Verteilung über mit einer Niveau-Besetzungswahrscheinlichkeit gemäß

$$P_n(\beta) = \frac{\bar{n}}{(\bar{n} + 1)^{n+1}} \quad \text{mit} \quad \bar{n} = 1/(e^{\beta\hbar\omega} - 1) \quad \text{und} \quad (\Delta n)^2 = \bar{n}(\bar{n} + 1). \quad (5.7)$$

Die Dichtematrix ist diagonal

$$\rho_{\text{th}} = \frac{1}{\bar{n} + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}^n}{\bar{n} + 1} \right)^n |n\rangle\langle n|, \quad (5.8)$$

wobei das Verschwinden aller Nebendiagonalelemente mit einer Maximierung der Entropie einhergeht.

5.1.2.2 Gequetschte kohärente Zustände

Gequetschte Zustände (*Squeezed States*) sind kohärente Oszillatorzustände, also Wellenpakete minimaler Unschärfe, deren Varianz Δq verringert und Δp vergrößert ist, oder umgekehrt. Die Ellipse der Unschärfen erscheint daher in der Phasenraumdarstellung *gequetscht*. Das *Squeezing* spielt eine wichtige Rolle bei der Herstellung von verschränkten kontinuierlichen Zuständen (Kapitel 5) und wird deshalb im Folgenden näher betrachtet.

Durch die Anwendung des sogenannten Quetschoperators $\hat{S}(\xi) = e^{\xi^* \hat{a}^2 / 2 - \xi (\hat{a}^\dagger)^2 / 2}$ mit dem komplexen Quetschparameter $\xi = r e^{i\theta}$ und anschließende Verschiebung mit $\hat{D}(\alpha)$ wird aus dem Vakuumzustand $|0\rangle$ der kohärente gequetschte Zustand

$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{D}(\alpha) \hat{S}(\xi) |0\rangle = \hat{D}(\alpha) \sqrt{\operatorname{sech}|\xi|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \left[-\frac{1}{2} e^{i\theta} \tanh|\xi| \right]^n |2n\rangle. \quad (5.9)$$

Man sieht, dass ein reines Squeezing $|\xi\rangle = \hat{S}(\xi)|0\rangle$ eine Superposition erzeugt, die nur aus Fockzuständen gerader Besetzungszahl besteht. Für diesen gequetschten Vakuumzustand lautet die Verteilung der Besetzungszahlen [8]

$$P_n(|\xi\rangle) = \begin{cases} \operatorname{sech}|\xi| \frac{n!}{(n/2)! 2^n} \tanh^n |\xi| & n \text{ gerade,} \\ 0 & n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (5.10)$$

Allerdings hebt die anschließende Verschiebung diese Eigenschaft wieder auf. Die mittlere Besetzungszahl des kohärenten gequetschten Zustands (5.9) ist

$$\langle n \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 |\xi| \quad \text{und} \quad (\Delta n)^2 = 2\langle n \rangle (\langle n \rangle + 1). \quad (5.11)$$

Die Wellenfunktion des Zustands (5.9) im Ortsraum lautet für $\theta = 0$ entsprechend

$$\langle q|\alpha, \xi\rangle = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{|\xi|/2} \exp \left[-\frac{m\omega_0}{2\hbar} e^{2|\xi|} (q - q_0)^2 + \frac{i}{\hbar} p_0 (q - q_0) \right], \quad (5.12)$$

mit den Unschärfen $\Delta q = \sigma_0 e^{-|\xi|}$ und $\Delta p = \frac{\hbar}{2\sigma_0} e^{|\xi|}$, wobei $\sigma_0^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$. Die Wigner-Funktion $W_{\alpha, \xi}(q, p, 0)$ ist dann gegeben durch:

$$W_{\alpha, \xi}(q, p, 0) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_0^2} e^{2|\xi|} (q - q_0)^2 - \frac{2\sigma_0^2}{\hbar^2} e^{-2|\xi|} (p - p_0)^2 \right]. \quad (5.13)$$

Wird zusätzlich eine anfängliche Korrelation zwischen q und p hergestellt, entsteht ein *korrelierter gequetschter kohärenter Zustand*, so dass mit dem Korrelationskoeffizient r gilt

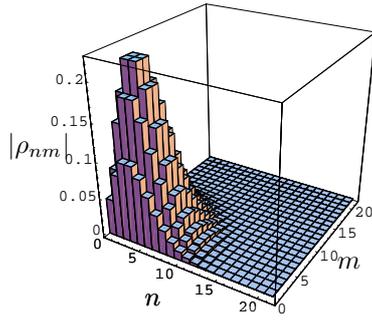
$$\sigma_q^2(0) = \frac{\hbar}{2m\omega_0} e^{-2|\xi|}, \quad \sigma_p^2(0) = \frac{\hbar m\omega_0}{2(1-r)} e^{2|\xi|}, \quad \sigma_{qp}(0) = \frac{\hbar r}{2\sqrt{1-r^2}}, \quad (5.14)$$

dann lautet die Wellenfunktion in Ortsdarstellung und die Wigner-Funktion

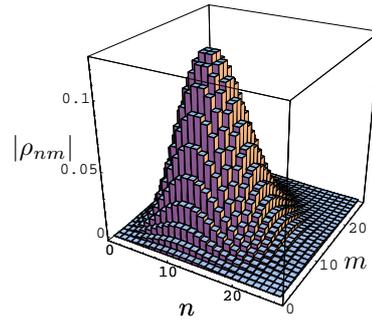
$$\langle q|\alpha, \xi, r\rangle = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right)^{1/2} e^{|\xi|/2} \exp \left[-\frac{m\omega_0}{2\hbar} e^{2|\xi|} \left(1 - \frac{2i}{\hbar} \sigma_{qp}(0) \right) (q - q_0)^2 + \frac{i}{\hbar} p_0 q \right], \quad (5.15)$$

$$W_{\alpha, \xi}(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp \left[-\frac{e^{2|\xi|} (q - q_0)^2}{2\sigma_0^2 \hbar (1-r)} - \frac{e^{-2|\xi|} (p - p_0)^2}{\hbar m\omega_0} + \frac{2r(q - q_0)(p - p_0)}{\hbar \sqrt{1-r^2}} \right]. \quad (5.16)$$

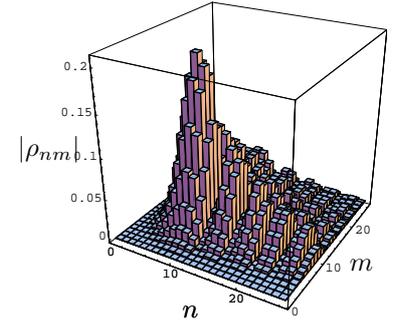
Zu beachten ist, dass Verschiebungsoperator $\hat{D}(\alpha)$ und Quetschoperator $\hat{S}(\xi)$ nicht kommutieren, so dass die Anwendung des Quetschoperators auf den kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ i.A. einen anderen Zustand liefert: $\hat{S}(\xi)|\alpha\rangle = \hat{S}(\xi)\hat{D}(\alpha)|0\rangle \neq |\alpha, \xi\rangle$. Der Zustand (5.9) zeigt einige Besonderheiten, z.B. eine Oszillation der Wahrscheinlichkeitsverteilung im Falle großer Quetschparameter ξ , wie Abbildung 5.1d veranschaulicht. Dies lässt auf ein Interferenzmuster im Phasenraum schließen [9].



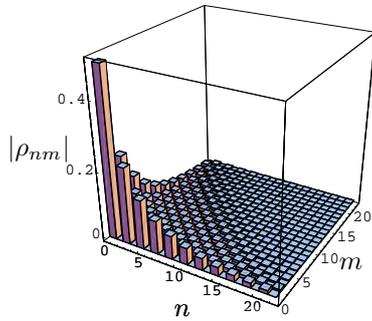
(a) Kohärenter Zustand $\hat{D}(\alpha)|0\rangle$ mit $\langle n \rangle = |\alpha|^2 = 3$ und Poisson-Verteilung (5.6) der Diagonalelemente.



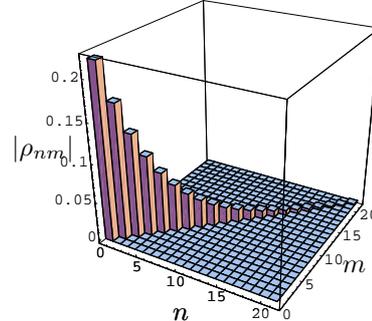
(b) Kohärenter Zustand $\hat{D}(\alpha)|0\rangle$ mit $\langle n \rangle = |\alpha|^2 = 10$ und annähernder Gauß-Verteilung.



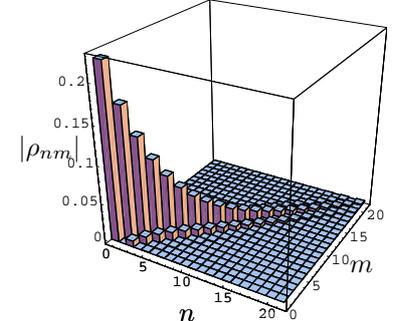
(c) Kohärenter gequetschter Zustand $\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|0\rangle$ mit $\langle n \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 |\xi| = 10$ zeigt Oszillationen (Vgl. [9]).



(d) Gequetschter Zustand $\hat{S}(\xi)|0\rangle$ mit $\langle n \rangle = \sinh^2 |\xi| = 3$ und Verteilung (5.10) der Diagonalelemente.



(e) Thermischer Zustand mit $\langle n \rangle = 3$ und Boltzmann-Verteilung (5.7) der Diagonalelemente.



(f) Stationärer QBM-Zustand mit $\langle n \rangle = 3$ und Verteilung (4.14) der Diagonalelemente.

Abbildung 5.1: Besetzungszahldarstellung von Amplituden der Dichtematrixelemente ρ_{nm} einiger Beispiele für kohärente und gequetschte (kohärente) Zustände sowie eines thermischen Zustands und des stationären QBM-Zustands. Die Parameter α , ξ , und Temperature T wurden jeweils so gewählt, dass die mittlere Besetzungszahl $\langle n \rangle$ in den Abb. a,d-f sowie den Abb. b,c vergleichbar ist.

5.1.2.3 Gaußsche Zwei-Moden-Zustände

Gaußsche Zwei-Moden-Zustände sind der Prototyp für Quantensysteme kontinuierlicher Variablen. Sie werden charakterisiert durch 4×4 - Kovarianz Matrix, die alle notwendigen Informationen enthält und in der Form

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

geschrieben werden kann, wobei die Kovarianzmatrizen der beiden Einzelmoden durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \langle q_1^2 \rangle - \langle q_1 \rangle^2 & \langle q_1 p_1 + p_1 q_1 \rangle / 2 - \langle q_1 \rangle \langle p_1 \rangle \\ \langle q_1 p_1 + p_1 q_1 \rangle / 2 - \langle q_1 \rangle \langle p_1 \rangle & \langle p_1^2 \rangle - \langle p_1 \rangle^2 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \langle q_2^2 \rangle - \langle q_2 \rangle^2 & \langle q_2 p_2 + p_2 q_2 \rangle / 2 - \langle q_2 \rangle \langle p_2 \rangle \\ \langle q_2 p_2 + p_2 q_2 \rangle / 2 - \langle q_2 \rangle \langle p_2 \rangle & \langle p_2^2 \rangle - \langle p_2 \rangle^2 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

gegeben sind, sowie die Korrelationen zwischen den beiden Moden durch

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \langle q_1 q_2 + q_2 q_1 \rangle / 2 - \langle q_1 \rangle \langle q_2 \rangle & \langle q_1 p_2 + p_2 q_1 \rangle / 2 - \langle q_1 \rangle \langle p_2 \rangle \\ \langle p_1 q_2 + q_2 p_1 \rangle / 2 - \langle p_1 \rangle \langle q_2 \rangle & \langle p_1 p_2 + p_2 p_1 \rangle / 2 - \langle p_1 \rangle \langle p_2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Prominentes Beispiel sind die *gequetschten Zwei-Moden-Vakuumpzustände*, die aus dem Vakuumzustand $|00\rangle$ durch Anwendung des Zwei-Moden-Quetschoperators $\hat{S}(\xi) = e^{\xi^* \hat{a}_1 \hat{a}_2 - \xi \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger}$ entstehen:

$$|\psi_\xi\rangle = \hat{S}(\xi)|00\rangle = \sqrt{1 - \tanh^2 |\xi|} \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh |\xi|)^n |n\rangle|n\rangle. \quad (5.21)$$

Dieser gequetschte Zwei-Moden-Vakuumpzustand weist sowohl in der Photonenzahl wie der Phase Quantenkorrelationen auf. Die Wellenfunktion in der Ortsdarstellung lautet

$$\psi_\xi(q_1, q_2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left[-e^{-2|\xi|} (q_1 + q_2)^2 / 2 - e^{2|\xi|} (q_1 - q_2)^2 / 2 \right]. \quad (5.22)$$

Entsprechend ergibt sich für die Kovarianzmatrix (mit $\hbar, m, \omega_0 = 1$):

$$V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cosh 2|\xi| & 0 & \sinh 2|\xi| & 0 \\ 0 & \cosh 2|\xi| & 0 & -\sinh 2|\xi| \\ \sinh 2|\xi| & 0 & \cosh 2|\xi| & 0 \\ 0 & -\sinh 2|\xi| & 0 & \cosh 2|\xi| \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

so dass sich für die Wigner-Funktion des Zwei-Moden-Systems

$$W_\xi = \frac{4}{\pi^2} \exp \left[-e^{-2|\xi|} [(q_1 + q_2)^2 + (p_1 - p_2)^2] - e^{2|\xi|} [(q_1 - q_2)^2 + (p_1 + p_2)^2] \right] \quad (5.24)$$

findet. Wird eine Mode ausgespart, so gleicht die reduzierte Wigner-Funktion

$$W_1(q_1, p_1) = \frac{2}{\pi(1 + 2\langle n \rangle)} \exp \left[-\frac{2(q_1^2 + p_1^2)}{1 + 2\langle n \rangle} \right] \quad (5.25)$$

einem thermischen Zustand mit mittlerer Photonenzahl $\langle n \rangle = \sinh^2 |\xi|$. Im Gegensatz zum gequetschten Ein-Moden-Zustand besitzen die zwei einzelnen Moden des gequetschten Zwei-Moden-Zustands nicht mehr minimale Unschärfe, sondern es ist

$$\langle q_1^2 \rangle \langle p_1^2 \rangle = \langle q_2^2 \rangle \langle p_2^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \cosh^2(2|\xi|) \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad \text{für } \xi > 0. \quad (5.26)$$

Ebenso ist die von Neumann Entropie der reduzierten Dichtematrizen der beiden Moden

$$S(\rho_{1,2}) = \text{Tr}_{2,1}[\rho_\xi \ln \rho_\xi] = \cosh^2 |\xi| \ln(\cosh^2 |\xi|) - \sinh^2 |\xi| \ln(\sinh^2 |\xi|) \quad (5.27)$$

größer Null für $|\xi| > 0$ und zeigt damit eine Verschränkung an. Im Grenzfall $|\xi| \rightarrow \infty$ wird aus dem Zustand (5.22) ein bezüglich Ort und Impuls maximal (anti-) korrelierter Zustand

$$\psi(q_1, q_2) \rightarrow \delta(q_1 - q_2) \quad \text{und} \quad \psi(p_1, p_2) \rightarrow \delta(p_1 + p_2), \quad (5.28)$$

der bereits in der Originalarbeit von Einstein, Podolsky und Rosen [126] zur Diskussion des nichtlokalen Charakters der Quantenmechanik herangezogen wurde. Gequetschte Zwei-Moden-Zustände sind somit ein Beispiel für verschränkte CV-Systeme, mit vielfältigen Anwendungen in der Quanteninformationstheorie. Eine eingehende Untersuchung der nicht-klassischen Korrelationen von Gaußschen Zwei-Moden-Zuständen erfolgt im Kapitel 7.

5.1.2.4 Gekoppelte Zwei-Moden-Zustände

Im vorausgegangenen Abschnitt wurden zwei Moden betrachtet, die zu Beginn verschränkt wurden aber anschließend nicht mehr direkt miteinander wechselwirken. Im Folgenden sei der ähnliche Fall zweier harmonischer Oszillatoren mit Koordinaten q_1, q_2 und Impulsen p_1, p_2 betrachtet, die über eine Kopplung bilinear miteinander wechselwirken. In Normalkoordinaten $R = (q_1 + q_2)/2$ und $x = (q_1 - q_2)$ mit Normalfrequenzen Ω_r, Ω_x ist der Zustand des Gesamtsystems durch das Produkt

$$\psi(R, x) \sim \exp\left[-\frac{M\Omega_r}{2\hbar}R^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{\mu\Omega_x}{2\hbar}x^2\right] \quad (5.29)$$

gegeben. In den ursprünglichen Koordinaten ist dieser Zustand bei nichtverschwindender Kopplung zwischen den Oszillatoren allerdings kein Produktzustand mehr und demzufolge verschränkt. Betrachtet man nicht den reinen Zustand, sondern einen thermischen Zustand der beiden Oszillatoren in einem gemeinsamen Bad in WCL-Näherung, so ist die Existenz der Verschränkung entscheidend abhängig von der Temperatur. Die Wigner-Funktion erhält man aus

$$W(R, P_R, x, p_x) = \frac{\exp\left[-\frac{R^2}{2\langle R^2 \rangle} - \frac{P_R^2}{2\langle P_R^2 \rangle}\right]}{2\pi\sqrt{\langle R^2 \rangle \langle P_R^2 \rangle}} \cdot \frac{\exp\left[-\frac{x^2}{2\langle x^2 \rangle} - \frac{p_x^2}{2\langle p_x^2 \rangle}\right]}{2\pi\sqrt{\langle x^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle}} \quad \text{mit} \quad (5.30)$$

$$\langle R^2 \rangle = \frac{\hbar}{2M\Omega_r}c_r, \quad \langle P_R^2 \rangle = \frac{\hbar}{2}M\Omega_r c_r, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m_x\Omega_x}c_x, \quad \langle p_x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2}m_x\Omega_x c_x \quad (5.31)$$

$$\text{wobei } c_r = \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\Omega_r\right), \quad c_x = \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\Omega_x\right), \quad M = 2m, \quad m_x = \frac{m}{2}. \quad (5.32)$$

Damit lässt sich die Wigner-Funktion in ursprünglichen Koordinaten $W(q_1, p_1, q_2, p_2)$ in Form von (5.1) schreiben mit Kovarianzmatrix

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{4m} \left(\frac{c_r}{\Omega_r} + \frac{c_x}{\Omega_x} \right) & 0 & \frac{\hbar}{4m} \left(\frac{c_r}{\Omega_r} - \frac{c_x}{\Omega_x} \right) & 0 \\ 0 & \frac{\hbar m}{4} (c_r\Omega_r + c_x\Omega_x) & 0 & \frac{\hbar m}{4} (c_r\Omega_r - c_x\Omega_x) \\ \frac{\hbar}{4m} \left(\frac{c_r}{\Omega_r} - \frac{c_x}{\Omega_x} \right) & 0 & \frac{\hbar}{4m} \left(\frac{c_r}{\Omega_r} + \frac{c_x}{\Omega_x} \right) & 0 \\ 0 & \frac{\hbar m}{4} (c_r\Omega_r - c_x\Omega_x) & 0 & \frac{\hbar m}{4} (c_r\Omega_r + c_x\Omega_x) \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

welche in ihrer Form der Kovarianzmatrix eines gequetschten Zwei-Moden-Zustands (5.23) entspricht. Die Temperaturabhängigkeit der Verschränkung dieses Zustandes wird in Kapitel 7 behandelt. Dort wird ebenfalls gezeigt, dass die Dynamik zweier nicht direkt gekoppelter Moden in einem gemeinsamen Reservoir zum Entstehen nicht-klassischer Korrelationen zwischen den beiden Moden führen kann.

5.1.3 Dynamik Gaußscher Zustände

Im folgenden Abschnitt soll die Dynamik Gaußscher Zustände unter Born-Markovscher Näherung mit der nicht-Markovschen Dynamik unter WCL-Näherung (vgl. Kapitel 3.3.3) verglichen werden. Anschließend wird die exakte Dynamik unter Aufhebung der WCL-Näherung betrachtet.

5.1.3.1 Markovsche Evolution Gaußscher Zustände

Der Ausgangspunkt für die Betrachtung der Dynamik Gaußscher Zustände unter Born-Markovscher Approximation ist die quantenoptische Mastergleichung des gedämpften Oszillators (2.14). Die entsprechenden Darstellungen in Wigner-Repräsentation bzw. für die charakteristische Funktion lauten dann [60]:

$$\frac{\partial W_t}{\partial t} = -\frac{\gamma}{2} \left[\frac{\partial}{\partial q_j} q_j + \frac{\partial}{\partial p_j} p_j \right] W_t(q, p) + \left(\bar{n} + \frac{1}{2} \right) \frac{\gamma}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial q_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_j^2} \right] W_t(q, p), \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \chi_t}{\partial t} = -\frac{\gamma}{2} \left[q \frac{\partial}{\partial q} + p \frac{\partial}{\partial p} \right] \chi_t(q, p) + \left(\bar{n} + \frac{1}{2} \right) \frac{\gamma}{2} [q^2 + p^2] \chi_t(q, p). \quad (5.35)$$

In Abhängigkeit des anfänglichen Zustandes χ_0 ergibt sich dann als Lösung der Gleichung (5.35) für die zeitabhängige charakteristische Funktion

$$\chi(\alpha, \alpha^*, t) = \exp \left[-\Delta(t) \frac{|\alpha|^2}{4} \right] \chi_0 \left(\alpha e^{-\gamma/2t + i\omega t}, \alpha^* e^{-\gamma/2t - i\omega t} \right), \quad \text{bzw.} \quad (5.36)$$

$$\chi(q, p, t) = \exp \left[-\frac{\Delta(t)}{16} \left(\frac{q^2}{\sigma_0^2} + \frac{p^2}{\sigma_p^2} \right) \right] \chi_0 \left(\tilde{q} e^{-\gamma/2t}, \tilde{p} e^{-\gamma/2t} \right), \quad (5.37)$$

wobei die Funktion $\Delta(t)$ die Relaxation zu einer thermischen Verteilung mit mittlerer Besetzungszahl $\bar{n} = 1/(e^{\beta\hbar\omega_0} - 1)$ beschreibt,

$$\Delta(t) = (2\bar{n} + 1) (1 - e^{-\gamma t}), \quad (5.38)$$

$$\tilde{q} = q \cos(\omega t) + \frac{\sigma_0}{\sigma_p} p \sin(\omega t), \quad \tilde{p} = -\frac{\sigma_p}{\sigma_0} q \sin(\omega t) + p \cos(\omega t). \quad (5.39)$$

Die höheren Momente der Observablen von Interesse können dann wiederum auf einfache Weise aus der charakteristischen Funktion durch

$$\langle (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n(t) \rangle = \left(\frac{d}{d\alpha} \right)^m \left(-\frac{d}{d\alpha^*} \right)^n e^{|\alpha|^2/2} \chi_t(\alpha, \alpha^*)|_{\alpha=0} \quad \text{bzw.} \quad (5.40)$$

$$\langle Q^n(t) \rangle = (-i)^n \left(\frac{\partial^n}{\partial p^n} \chi_t(q, p) \right)_{q,p=0} \quad \text{und} \quad \langle P^n(t) \rangle = i^n \left(\frac{\partial^n}{\partial q^n} \chi_t(q, p) \right)_{q,p=0} \quad (5.41)$$

gewonnen werden [8, 9]. Von Interesse ist nun die zeitliche Entwicklung eines kohärenten Zustandes χ_{α_0} , eines kohärenten gequetschten Zustands $\chi_{\alpha, \xi}$ und eines gequetschten Zwei-Moden-Zustands χ_ξ . Im Falle eines kohärenten Zustandes mit Eigenwert α_0 lautet die charakteristische Funktion beispielsweise

$$\chi_{\alpha_0} = e^{\alpha \alpha_0^* - \alpha^* \alpha_0} e^{-|\alpha|^2/2} \quad \text{u. für} \quad \alpha_0 = \frac{q_0}{2\sigma_0} : \quad \chi_{\alpha_0} = \exp \left[-\frac{i q_0 p}{\hbar} - \frac{1}{8} \left(\frac{q^2}{\sigma_0^2} + \frac{p^2}{\sigma_p^2} \right) \right]. \quad (5.42)$$

Die Purity des kohärenten Zustandes ergibt sich dann leicht aus Gl. (5.2) und ist auf einfache Weise mit der zeitabhängigen Kovarianzmatrix $V(t)$ der zugehörigen Wigner-Funktion $W_\alpha(q, p, t)$ verbunden durch

$$\mu_\alpha(t) = \frac{\hbar}{2\sqrt{\det \mathbf{V}(t)}} = \frac{\hbar}{2\sqrt{(\Delta q)^2(\Delta p)^2 - \sigma_{qp}^2}} \quad (5.43)$$

$$\text{mit } (\Delta q)^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2, \quad (\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2, \quad \sigma_{qp} = \langle qp + pq \rangle / 2 - \langle q \rangle \langle p \rangle. \quad (5.44)$$

Aus der Bedingung $\text{Tr} \rho^2(t) \leq 1$ für einen physikalischen Zustand sieht man gleich die geltende verallgemeinerte Unschärferelation, $(\Delta q)^2(\Delta p)^2 - \sigma_{qp}^2 \geq \hbar^2/4$ die sich natürlich ebenfalls aus der generalisierten Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation zweier hermitescher Operatoren \hat{A} und \hat{B} , $\sigma_{AA}\sigma_{BB} - \sigma_{AB}^2 \geq \frac{1}{4}|\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2$, herleiten lässt. Explizit ergibt sich für die Purity eines kohärenten Zustandes unter Markovscher Evolution

$$\mu_\alpha(t) = \left[e^{-\gamma t} + \frac{1}{\mu_\infty} (1 - e^{-\gamma t}) \right]^{-1} \quad \text{mit } \mu_\infty = (2\bar{n} + 1)^{-1} = \tanh\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right). \quad (5.45)$$

Die Purity ist unabhängig von dem Parameter $|\alpha|$ und entspricht der zeitlichen Entwicklung der Purity $\mu_0(t)$ aus dem Grundzustand $|0\rangle$. Für einen kohärenten gequetschten Zustand mit Quetschparameter ξ erhält man als zeitabhängige Purity den Ausdruck

$$\mu_\xi(t) = \left[\frac{1}{\mu_\infty^2} (1 - e^{-\gamma t})^2 + \frac{2}{\mu_\infty} e^{-\gamma t} (1 - e^{-\gamma t}) \cosh(2\xi) + e^{-2\gamma t} \right]^{-1/2}. \quad (5.46)$$

Wird statt der quantenoptischen Mastergleichung (2.14) der verallgemeinerte Fall der Markovschen Mastergleichung vom Lindblad Typ gem. (2.37) betrachtet, so ergibt sich für die Purity eines gequetschten Zustands die zeitliche Entwicklung [93]:

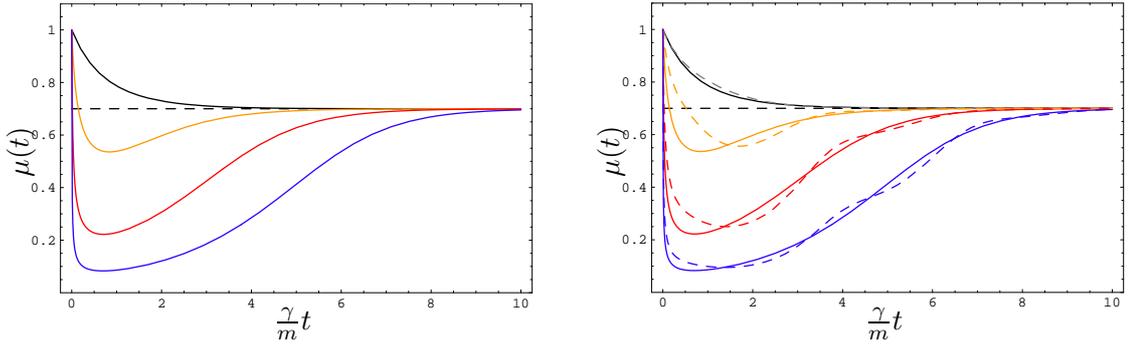
$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_\xi(t) = & \left\{ \frac{e^{-2\gamma t}}{\mu_\infty^2} (\mu_\infty^2 - \mu_\infty 2 \cosh(2\xi) + 1) + \frac{e^{-\gamma t}}{\mu_\infty} \left[2 \sinh(2\xi) \frac{\lambda \sin(2\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t)}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left[2 \cosh(2\xi) - \frac{2}{\mu_\infty} \right] \frac{\omega^2 - \lambda^2 \cos(2\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t)}{\omega^2 - \lambda^2} \right] + \mu_\infty^{-2} \right\}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Die Abbildung 5.2 macht deutlich, dass für relativ stark gequetschte Zustände ein anfänglicher starker Abfall der Purity weit unterhalb des späteren stationären Wertes zu verzeichnen ist. Dies ist insbesondere für die in Kapitel 6 erfolgende Diskussion der Dekohärenz anfänglicher Superpositionszustände von Bedeutung.

5.1.3.2 Nicht-Markovsche Evolution Gaußscher Zustände

Die exakte Dynamik der reduzierten Dichtematrix eines Brownschen Oszillators wird durch die HPZ-Mastergleichung (3.90) beschrieben, deren Lösung für die Purity (3.123) allerdings numerisch integriert werden muss. Um allein die nicht-Markovschen Effekte zu untersuchen, bietet sich auch die Mastergleichung (3.130) an, die zwar eine WCL-Approximation enthält, aber keine Markovsche Näherung benötigt. Zusätzlich hat diese Gleichung den Vorteil, die Lösung zum quantenoptischen Fall analoger Weise darstellen zu können. Die Lösung der Gleichung (3.130) in Form der charakteristischen Funktion lautet

$$\chi(\alpha, \alpha^*, t) = \exp \left[-\Delta_p(t) \frac{|\alpha|^2}{4} \right] \chi_0 \left(\alpha e^{-\Gamma_p(t)/2 + i\omega t}, \alpha^* e^{-\Gamma_p(t)/2 - i\omega t} \right), \quad (5.48)$$



(a) Purity $\mu_\xi(t)$ gem. Gl. (5.46) der gequetschten Zustände mit dem reellen Quetschparameter $\xi = 0, 1, 2, 3$ (von oben).

(b) Purities $\mu_\xi(t)$ wie in Abb.(a) und zusätzlich die verallgemeinerte Purity $\tilde{\mu}_\xi(t)$ gem. Gl. (5.47) mit zusätzlichem Parameter $\lambda = 0.5\gamma$.

Abbildung 5.2: Zeitliche Entwicklung der Purity von kohärenten und gequetschten Zuständen unter Markovschen Bedingungen in einer thermischen Umgebung mit $\mu_\infty = 0.7$.

mit zeitabhängigen Koeffizienten $\Delta_p(t)$ und $\Gamma_p(t)$ die sich aus den ursprünglichen Koeffizienten $D_p(t)$ und $\gamma_p(t)$ der Mastergleichung (3.130) durch

$$\Gamma_p(t) = \int_0^t ds \gamma_p(s) \quad \text{und} \quad \Delta_p(t) = \frac{2e^{-\Gamma_p(t)}}{\hbar m \omega_0} \int_0^t ds e^{\Gamma_p(s)} D_p(s) \quad (5.49)$$

ergeben [86]. Die explizite Form von $\gamma_p(t)$ ist in Gl. (3.96) angegeben, der Hochtemperatur-Grenzfall von $D_p(t)$ in Gl. (3.102). Die Purity eines kohärenten Zustands lautet somit

$$\mu_\alpha(t) = \left[\Delta_p(t) + e^{-\Gamma_p(t)} \right]^{-1}. \quad (5.50)$$

Neben der Purity liefern noch zwei weitere Größen Aufschluss über die spezifischen Elemente nicht-Markovschen Verhaltens. Dies ist zum einen die zeitliche Entwicklung der mittleren Besetzungszahl $\langle n(t) \rangle$, die sich aus Gl. (5.40) und (5.41) zu

$$\langle n(t) \rangle = e^{-\Gamma_p(t)} \langle n(0) \rangle + \frac{1}{2} \left(e^{-\Gamma_p(t)} + \Delta_p(t) \right) - \frac{1}{2} \quad (5.51)$$

ergibt und auch als *heating function* bezeichnet wird [95, 70]. Für Zeiten, die kurz im Vergleich zur Relaxationszeit τ_γ sind, erhält man aus Gl. (5.51) die Abschätzung $\langle n(t) \rangle \simeq \int_0^t [\Delta_p(s) - \gamma_p(s)] ds$. Daraus wird ersichtlich, dass die *heating function* monoton wächst sofern $\Delta_p(t) > \gamma_p(t)$ für alle Zeiten $t \ll \tau_\gamma$, während sie für $\Delta_p(t) < \gamma_p(t)$ fällt und deshalb eventuell oszilliert [94]. Dabei sollte in Erinnerung gerufen werden, dass die Mastergleichung (3.130) für $\Delta_p(t) > \gamma_p(t)$ vom Lindblad-Typ ist, im umgekehrten Fall $\Delta_p(t) < \gamma_p(t)$ jedoch nicht (wobei dennoch die Positivität der Dichtematrix gewahrt ist!). Als zweite aufschlussreiche Größe soll der sogenannte Mandel-Parameter $Q = (\Delta n)^2 / \langle n \rangle - 1$ betrachtet werden [127], für den sich mit Hilfe von Gl. (5.40) und (5.41) der Ausdruck

$$Q(t) = \frac{\langle n^2(t) \rangle - \langle n(t) \rangle^2}{\langle n(t) \rangle} - 1 = \frac{\langle n(t) \rangle^2 + e^{-2\Gamma_p(t)} \langle n(0) \rangle [Q(0) - \langle n(0) \rangle]}{\langle n(t) \rangle} \quad (5.52)$$

ergibt [94]. Er ist ein Maß dafür, inwieweit die Verteilung der Diagonalelemente einer Poisson-Verteilung entspricht. Den Wert $Q = 0$ erhält man für die Poisson-Verteilung eines kohärenten

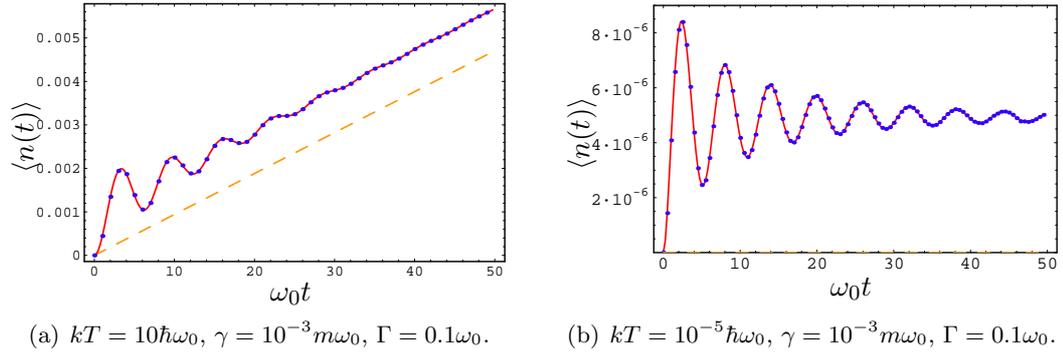


Abbildung 5.3: Zeitliche Entwicklung der mittleren Besetzungszahl $\langle n(t) \rangle$ in einem Out-of-Resonance Bad mit $\tau_b > \tau_s$ für Zeiten $t \ll \tau_\gamma$ bei hohen Badtemperaturen (links) und für tiefe Temperaturen (rechts). Gezeigt ist jeweils die mittlere Besetzungszahl in WCL-Approximation gem. Gl. (5.51) (rot) im Vergleich zur exakten Ergebnis der HPZ-Mastergleichung (blau gepunktet). Gelb gestrichelt ist das entsprechende Markovsche Resultat, das keine Oszillationen zeigt.

Zustands, Werte $Q > 0$ weisen auf eine supra-Poissonsche Statistik hin, während eine sub-Poissonsche Verteilung durch Werte $Q < 0$ gekennzeichnet ist, mit $Q = -1$ für einen Fock-Zustand, somit

$$Q = \begin{cases} -1 & \text{für } (\Delta n)^2 = 0 & \text{(Fockzustand),} \\ 0 & \text{für } (\Delta n)^2 = \langle n \rangle & \text{(kohärenter Zustand),} \\ \langle n \rangle + 1 & \text{für } (\Delta n)^2 = \langle n \rangle (\langle n \rangle + 1) & \text{(thermischer Zustand),} \\ 2(\langle n \rangle + 1) & \text{für } (\Delta n)^2 = 2\langle n \rangle (\langle n \rangle + 1) & \text{(gequetschter Vakuumzustand).} \end{cases} \quad (5.53)$$

Da $\Gamma_p(t) > 0$ und $\langle n(t) \rangle \geq \langle n(0) \rangle$, ist für $Q(0) \geq 0$ auch $Q(t) \geq 0$ für alle Zeiten t , d.h. die Wechselwirkung mit der Umgebung erzeugt im Rahmen der WCL-Näherung aus einer anfänglichen Poisson- oder supra-Poissonschen Statistik niemals eine sub-Poissonsche Verteilung [94]. In der Abb. 5.3 gezeigt ist jeweils die Heating Funktion in WCL-Approximation gem. Gl. (5.51) im Vergleich zur exakten Ergebnis der HPZ-Mastergleichung und dem Markovschen Resultat. Die Oszillationen sind auf den virtuellen Austausch zwischen System und Reservoir zurückzuführen, wobei Anstiege mit dem darauf folgenden Abfallen auf Emission und Absorption des gleichen Quantums an Energie hindeuten. Dies ist in einem Out-of-Resonance Bad möglich, da die Badkorrelationszeit $\tau_b \sim \Gamma^{-1}$ wesentlich kürzer ist als die charakteristische Zeitskala $\tau_s \sim \omega_0^{-1}$ der internen Systemdynamik.

5.1.3.3 Dynamik bei starker System-Bad-Wechselwirkung

Bei starker System-Bad-Wechselwirkung, vermittelt über den Kopplungsparameter γ , verkürzt sich entsprechend die Relaxationszeit $\tau_\gamma \sim \gamma^{-1}$. Sind die charakteristische Systemzeit τ_s und die Relaxationszeit von vergleichbarer Größenordnung $\tau_s \approx \tau_\gamma$ so wird dies in der Folge als Regime starker Kopplung bezeichnet (*strong coupling regime*). In diesem Fall ist zu beachten, dass die zeitabhängige Frequenzverschiebung bzw. Potenzialrenormierung nicht mehr vernachlässigt werden kann. Diese wird durch den HPZ-Koeffizienten $\delta\Omega(t)$ bzw. $\gamma_q(t)$ in Gleichung (3.99) beschrieben. Dabei ist für $\tau_s \gg \tau_b$ die Renormierung $\delta\Omega(0) \sim \gamma\Gamma$ zu Beginn groß und für $t \gg \tau_b$, mit $\delta\Omega(\infty) \rightarrow 0$ zu vernachlässigen. Für $\tau_s \ll \tau_b$ ist die Beeinflussung der

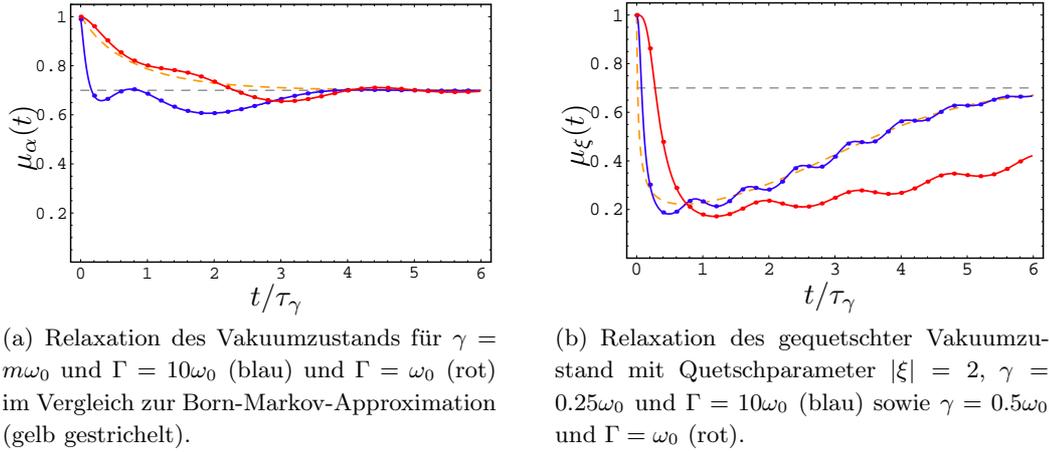


Abbildung 5.4: Zeitliche Entwicklung der Purity $\mu(t)$ für einen Vakuumzustand $|0\rangle$ (links) und einen gequetschten Zustand $|\xi\rangle$ (rechts) unter der HPZ-Mastergleichung bei starker System-Bad-Wechselwirkung im Vergleich zur Entwicklung unter der quantenoptischen Mastergleichung. Stationärer Wert in allen Fällen $\mu_\infty(\gamma, \Gamma, T) = 0.7$ (Temperatur je nach Kombination von (y, Γ) unterschiedlich!). Wie in (b) zu erkennen ist, führt die zeitabhängige Frequenzverschiebung bei starker Kopplung zu voneinander abweichenden Oszillationslängen.

Dynamik durch die zeitabhängige Frequenzverschiebung wiederum mit $\delta\Omega(0) \approx \delta\Omega(\infty) \ll \omega_0$ gering. Generell ist im Falle starker Dämpfung zu beachten, dass ein einfacher Zusammenhang zwischen der Zeitentwicklung der Purity $\mu(t)$ und der mittleren Besetzungszahl $\langle n(t) \rangle$, wie er im vorausgegangenen Abschnitt zur Bestimmung der *Heating Funktion* ausgenutzt wurde, nicht mehr gegeben ist. Denn wie bereits im Kapitel 4 für den stationären Zustand dargelegt hat die Dichtematrix in der Energie-Eigenbasis keine Diagonalgestalt und es ist

$$\mu(t) \neq \frac{1}{2\langle n(t) \rangle + 1}, \quad \text{da} \quad \langle n(t) \rangle = \sum_n n \rho_{nn}(t) \neq \sum_n n p_n = \frac{1 - \mu(t)}{2\mu(t)}. \quad (5.54)$$

Da es sich in diesem Abschnitt um Gaußsche Zustände handeln soll, ist die Purity jeweils nach Gleichung (5.2) durch die zeitabhängige Kovarianzmatrix bestimmt. Die Parameter γ und Γ beeinflussen nicht nur die zeitliche Entwicklung der Purity sondern bestimmen zusammen mit der Badtemperatur den stationären Wert der Purity. Die Verteilung der Eigenwerte p_n der stationären Dichtematrix entspricht dann der Boltzmann-Verteilung eines thermischen Zustandes gleicher Purity. Dieser Referenzzustand besitzt dann aber im Allgemeinen eine andere Temperatur! Dies äußert sich u.a. auch darin, dass die mittleren Besetzungszahlen nicht übereinstimmen, $\langle n \rangle \neq \bar{n}_{\text{th}}$ obwohl die Purities den gleichen Wert haben. Die Abbildung 5.4 gibt Beispiele für die Relaxation bei starker Dämpfung. Für unterschiedliche Kombinationen (γ, Γ) ist die Badtemperatur des QBM-Modells jeweils so gewählt, dass die stationäre Purity für die HPZ-Mastergleichung und die quantenoptische Mastergleichung übereinstimmen. Die Temperaturen der Bäder, in denen sich der Quantenoszillator dabei bewegt weichen also voneinander ab, und zwar umso stärker je größer die Kopplungsstärke γ gewählt wird. Eine zusätzliche Variation der Abschneidefrequenz bestimmt die Ausprägung des nicht-Markovschen Charakters (und zusätzlich wie oben erwähnt die Potenzialrenormierung). Je größer dabei die Badkorrelationszeit Γ^{-1} im Vergleich zu τ_s gewählt wird, desto länger auch die Relaxationszeit.

5.2 Nicht-Gaußsche Zustände

Nicht-Gaußsche Zustände weisen oftmals negative Anteile der Wigner-Funktion auf, was ihnen einen stärkeren nicht-klassischen Charakter verleiht. Da sie nicht allein durch ihre Kovarianzmatrix bestimmt sind, ist die Beschreibung der zeitlichen Entwicklung in der Regel schwieriger. Beispiele sind einzelne Fock-Zustände sowie viele Superpositionszustände.

5.2.1 Fock-Zustände des harmonischen Oszillators

Fockzustände sind Besetzungszustände, d.h. Zustände mit einer scharf vorgegebenen Anzahl von Bosonen (z.B. Photonen in einer Lichtmode, Phononen in einer Schwingungsmode). Im Gegensatz zu kohärenten Zuständen weisen sie keine Schwankungen der Besetzungszahl auf. Formal sind sie Eigenzustände $|n\rangle$ des Teilchenzahl-Operators \hat{n} , d.h.

$$\hat{n}|n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \quad \text{mit} \quad |n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \quad (5.55)$$

mit einer exakt definierten Anzahl von Bosonen in einer Mode, also $\langle n|n\rangle = 1$, $\Delta n = 0$. Die charakteristische Funktion $\chi_n(\alpha, 0)$ und die Wigner-Funktion $W(q, p)$ eines Besetzungszustandes zur Zeit $t = 0$ sind gegeben durch

$$\chi_n(\alpha, 0) = \langle n|\hat{D}(\alpha)|n\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} L_n(|\alpha|^2) \quad \text{mit} \quad L_n(\alpha) = \sum_{m=0}^n \frac{(-\alpha)^m}{m!} \binom{n}{m}, \quad (5.56)$$

$$W(q, p) = \frac{(-1)^n}{\pi} e^{-2H_s/\omega_0} L_n(4H_s/\omega_0), \quad (5.57)$$

wobei L_n die Laguerre-Polynome der Ordnung n sind und H_s die Hamilton-Funktion des Harmonischen Oszillators bezeichnet [8]. In der Abbildung 5.5 wird der nicht-Gaußsche Charakter von Fock-Zuständen anhand der Dichtematrix und die Wigner-Funktion für den Fock-Zustand $|n = 4\rangle$ verdeutlicht.

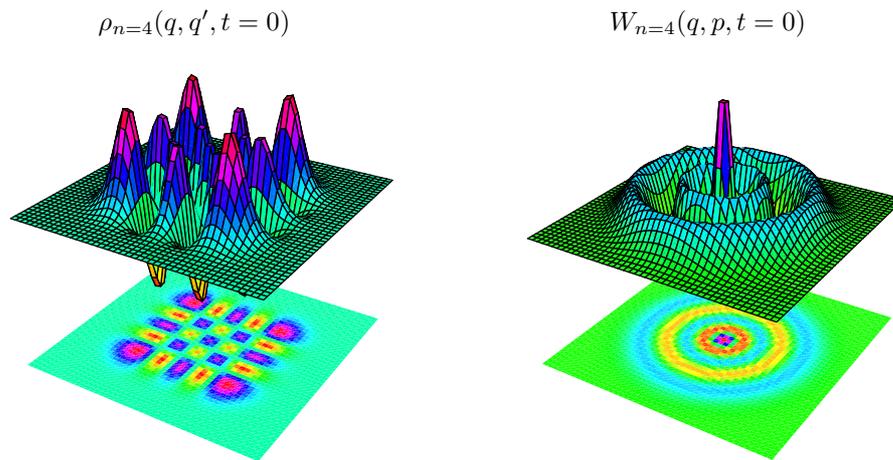


Abbildung 5.5: Beispiel für einen Energie-Eigenzustand $|n = 4\rangle$ des Quanten-Oszillators in Form der Dichtematrix $\rho_n(q, q', 0) = \langle q|n\rangle\langle n|q'\rangle$ im Ortsraum (links) und der Wigner-Funktion $W_n(q, p, 0)$ im Phasenraum (rechts). Der nicht-Gaußsche Charakter von Fock-Zuständen mit negativen Anteilen der Wigner-Funktion (insbesondere rot und gelb gefärbte Bereiche der Projektion) ist offensichtlich.

5.2.2 Cat-State-Superpositionen

Der Ausdruck *Cat-State* (im Folgenden wird die englische Bezeichnung an Stelle einer entsprechenden deutschen Übersetzung beibehalten) geht zurück auf ein bekanntes Gedankenexperiment von Schrödinger [128], in dem er beschreibt wie sich eine Superposition eines mikroskopischen Quantenzustands (Zustand eines radioaktiven Isotops „zerfallen oder nicht zerfallen“) im Prinzip auf einen makroskopischen Zustand (Katze tot oder lebendig) mit Hilfe eines „diabolischen Mechanismus“ [128] übertragen lässt.

Seien $|\alpha_+\rangle$ und $|\alpha_-\rangle$ zwei makroskopische Zustände und die mikroskopischen Zustände durch $|+\rangle$ und $|-\rangle$ bezeichnet, so ist der Zustand von Katze und Atom durch die Wellenfunktion

$$\psi \sim |\alpha_+\rangle|+\rangle + |\alpha_-\rangle|-\rangle \quad (5.58)$$

gegeben. Im Laufe der Zeit hat sich der Ausdruck vor allem für die Superposition zweier kohärenter Zustände mit großer Phasenraumseparation im Sinne eines „makroskopischen“ Zustands etabliert, wird aber auch zur Bezeichnung der Superposition „mikroskopischer“ Fock-Zustände verwendet. So auch im folgenden Abschnitt, der die Dynamik mikroskopischer und makroskopischer Superpositionen vergleicht. Die Unterscheidung in makro- bzw. mikroskopisch kann dabei im Prinzip auch anhand der mittleren Teilchenzahl $\langle n \rangle$ getroffen werden.

5.2.2.1 Superpositionen von Fockzuständen

Mikroskopische Cat-State Superpositionen sind Überlagerungen von Fock-Zuständen $\sim |n\rangle + e^{i\theta}|m\rangle$ mit in der Regel relativ kleinen Besetzungszahlen n und m . Die charakteristische Funktion $\chi_n(\alpha, 0)$ zur Zeit $t = 0$ für eine Superposition von Energieeigenzuständen des harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\chi(\alpha, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{nm} \langle m | \hat{D}(\alpha) | n \rangle, \quad (5.59)$$

mit den Relationen für symmetrische Ordnung

$$\langle m | \hat{D}(\alpha) | n \rangle = \begin{cases} \left(\frac{n!}{m!}\right)^{1/2} e^{-|\alpha|^2/2} (-\alpha)^{m-n} L_m^{(m-n)}(|\alpha|^2) & \text{für } m > n, \\ \left(\frac{m!}{n!}\right)^{1/2} e^{-|\alpha|^2/2} (\alpha^*)^{n-m} L_n^{(n-m)}(|\alpha|^2) & \text{für } m < n, \end{cases} \quad (5.60)$$

wobei L_n wieder die Laguerre Polynome bezeichnen. Für die Beispiele einer anfänglichen Superposition von Grundzustand und ersten angeregten Zustand $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ (c_0, c_1 reell) und der Überlagerung von Grundzustand und zweiten angeregten Zustand $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_2|2\rangle$ lauten die charakteristischen Funktionen folglich

$$\chi_{01}(\alpha, 0) = e^{-|\alpha|^2/2} [1 - c_1^2|\alpha|^2 - c_0c_1(\alpha^* - \alpha)], \quad (5.61)$$

$$\chi_{02}(\alpha, 0) = e^{-|\alpha|^2/2} \left[c_0^2 + \sqrt{2}c_0c_2(\alpha^2 + \alpha^{*2}) + \frac{1}{2}c_2^2(2 - 4|\alpha|^2 + |\alpha|^4) \right], \quad (5.62)$$

wobei für die anfänglichen Dichtematrixelemente $\rho_{nm} = c_n c_m$ für $n, m = 0, 1, 2$ gilt. Die Beispiele sind in den Abbildungen 5.6 und 5.7 in Form der Dichtematrix in der Ortsdarstellung und der Wigner-Funktion der Phasenraumdarstellung illustriert. Im Vergleich dazu ist in Abb. 5.8 die Superposition zweier kohärenter Zustände dargestellt, die im nächsten Abschnitt näher erläutert wird.

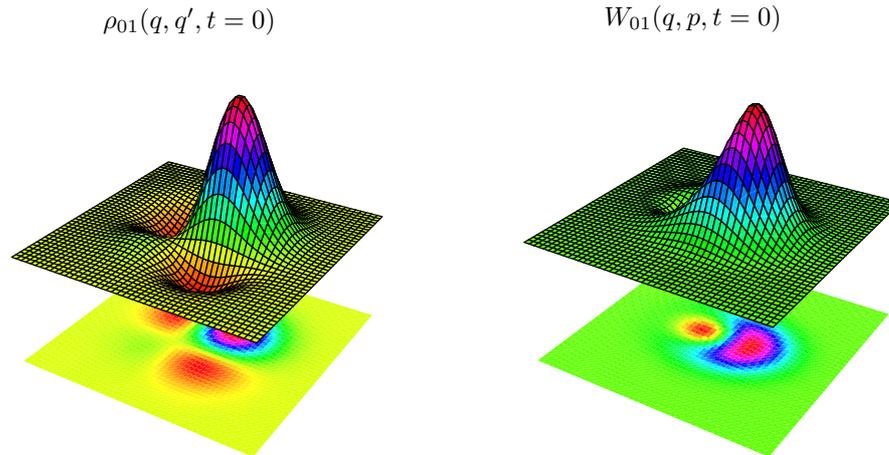


Abbildung 5.6: Beispiel für die Superposition $|\psi_{01}\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ zweier Fock-Zustände repräsentiert durch die Dichtematrix im Ortsraum (linke Seite) und die Wigner-Funktion im Phasenraum (rechte Seite). Negative Anteile der Wigner-Funktion sind gelb-rote Bereiche der entsprechenden Projektion.

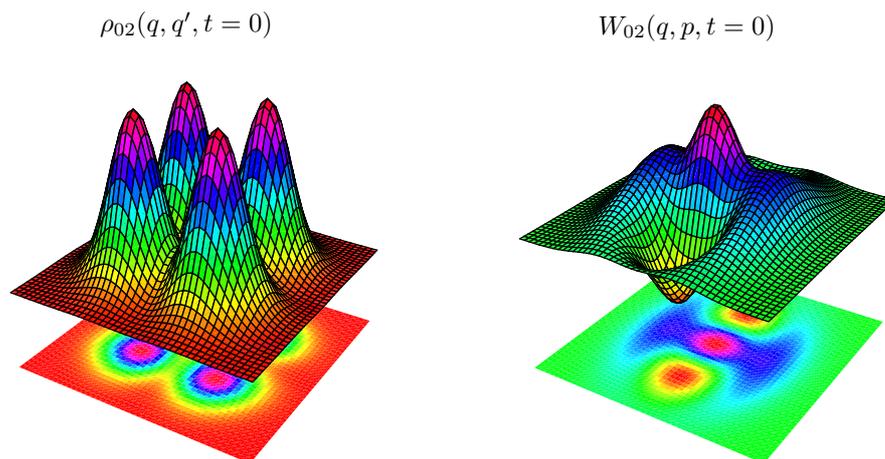


Abbildung 5.7: Beispiel für die Superposition $|\psi_{02}\rangle = (|0\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$ zweier Fock-Zustände repräsentiert durch die Dichtematrix im Ortsraum (linke Seite) und die Wigner-Funktion im Phasenraum (rechte Seite). Negative Anteile der Wigner-Funktion sind gelb-rote Bereiche der entsprechenden Projektion.

5.2.2.2 Superpositionen kohärenter Ein-Moden-Zustände

In diesem Abschnitt wird die Superposition zweier kohärenter Zustände – jeder für sich ja eine kohärente Superposition der unendlich vielen Besetzungszustände des harmonischen Oszillators – betrachtet. Eine solche Präparation von im Ortsraum unterscheidbaren Wellenpaketen soll im Folgenden als *makroskopisch* bezeichnet werden, im Unterschied zu den nur auf *mikroskopischer* Ebene der Energieniveaubesetzung unterscheidbaren Superpositionen von Besetzungszahl-Zuständen. Während ein einzelner kohärenter Zustand klassischen Charakter hat – im Sinne einer gaußförmigen Wigner-Funktion im Phasenraum und einer Poisson-Statistik der Besetzungszahlen – weisen Superpositionen kohärenter Zustände nicht-klassische Eigenschaften auf, in Form von negativen Werten der Wigner-Funktion, Interferenz-

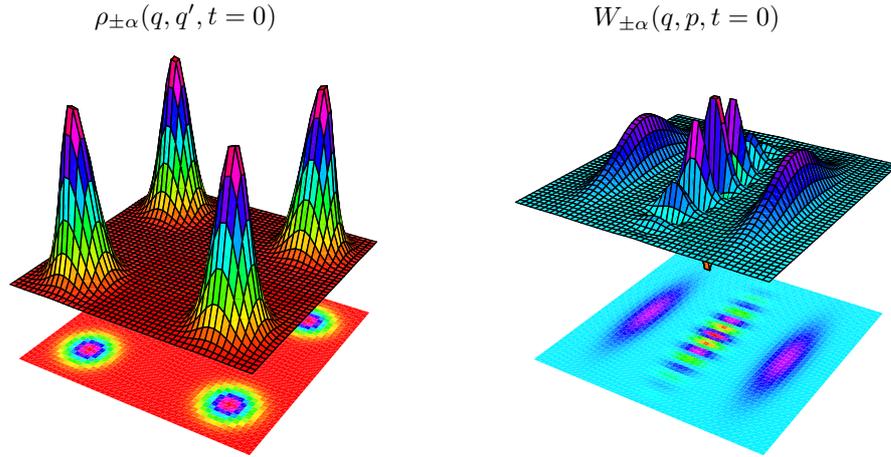


Abbildung 5.8: Beispiel für eine Cat-State-Superposition zweier kohärenter Zustände $|\psi_\alpha\rangle$ repräsentiert durch die Dichtematrix im Ortsraum (linke Seite) und die Wigner-Funktion im Phasenraum (rechte Seite). Die Superposition zweier Gaußscher Zustände (jeder einzelne mit positiver Wigner-Funktion) ergibt einen nicht-klassischen Zustand mit negativen Anteilen der Wigner-Funktion.

muster der Orts- und Impulsverteilung und unter Umständen sub- oder supra-Poissonsche, oszillierende Verteilungen der Besetzungszahlen in der Fockraum-Basis [129, 130].

Die anfängliche Superposition zweier kohärenter Zustände sei bezeichnet mit

$$|\psi_\alpha\rangle = \frac{|\alpha_+\rangle + e^{i\theta}|\alpha_-\rangle}{\sqrt{2 + 2\cos\theta e^{-2|\alpha_0|^2}}} \quad \text{mit} \quad |\alpha_\pm\rangle = \hat{D}(\pm\alpha_0)|0\rangle, \quad |\alpha_0|^2 = \frac{q_0^2}{4\sigma_0^2} + \frac{\sigma_0^2 p_0^2}{\hbar^2}, \quad (5.63)$$

so dass die charakteristische Funktion folglich lautet

$$\chi_{\pm\alpha_0} = \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{(1 + \cos\theta e^{-2|\alpha_0|^2})} \left[\cosh(\alpha_0^* \alpha - \alpha_0 \alpha^*) + e^{-2|\alpha_0|^2} \cosh(\alpha_0^* \alpha + \alpha_0 \alpha^* + i\theta) \right]. \quad (5.64)$$

Für die noch folgende Untersuchung der nicht-Markovschen Dynamik und Dekohärenz wird aus Vereinfachungsgründen die Wahl von $\alpha_0 = \sqrt{m\omega_0/2\hbar}q_0$ und $\theta = 0$ getroffen, was aber zu keinen prinzipiellen Änderungen der Ergebnisse führt. In Ortsdarstellung wird damit aus (5.63) die Wellenfunktion

$$\psi_{\pm q_0} = \langle q|\psi\rangle = \frac{\exp[-(q - q_0)^2/4\sigma_0^2] + \exp[-(q + q_0)^2/4\sigma_0^2]}{(8\pi\sigma_0^2)^{1/4} \sqrt{1 + e^{-q_0^2/2\sigma_0^2}}}, \quad (5.65)$$

und die charakteristische Funktion sowie die Wigner-Funktion im Phasenraum lauten

$$\chi_{\pm q_0}(q, p, 0) = \frac{e^{-q^2/8\sigma_0^2 - p^2\sigma_0^2/2\hbar^2}}{1 + e^{-q_0^2/2\sigma_0^2}} \left(\cos \frac{q_0 p}{\hbar} + e^{-q_0^2/2\sigma_0^2} \cosh \frac{q_0 q}{2\sigma_0^2} \right), \quad (5.66)$$

$$W_{\pm q_0}(q, p, 0) = \frac{e^{-q^2/2\sigma_0^2 - 2p^2\sigma_0^2/\hbar^2}}{\pi\hbar (1 + e^{q_0^2/2\sigma_0^2})} \left(e^{q_0^2/2\sigma_0^2} \cos \frac{2q_0 p}{\hbar} + \cosh \frac{q_0 q}{\sigma_0^2} \right). \quad (5.67)$$

Für die in Kapitel 6 folgenden Berechnungen ist es hilfreich die charakteristische Funktion (5.66) in ihre vier Anteile $\chi(\eta, \nu) = N(\chi_{11} + \chi_{22} + \chi_{12} + \chi_{21})$ aufzuteilen:

$$\chi_{11} = \exp \left[-\frac{\nu^2}{8\sigma_0^2} - \frac{\sigma_0^2}{2\hbar^2} \eta^2 - i \frac{q_0 \eta}{\hbar} \right], \quad \chi_{22} = \exp \left[-\frac{\nu^2}{8\sigma_0^2} - \frac{\sigma_0^2}{2\hbar^2} \eta^2 + i \frac{q_0 \eta}{\hbar} \right], \quad (5.68)$$

$$\chi_{12} = \exp \left[-\frac{(\nu - 2q_0)^2}{8\sigma_0^2} - \frac{\sigma_0^2}{2\hbar^2} \eta^2 \right], \quad \chi_{21} = \exp \left[-\frac{(\nu + 2q_0)^2}{8\sigma_0^2} - \frac{\sigma_0^2}{2\hbar^2} \eta^2 \right], \quad (5.69)$$

mit $N = (2 + 2e^{-q_0^2/2\sigma_0^2})^{-1}$ als Normierungskonstante. Die Abbildung 5.8 illustriert die Form der Dichtematrix und Wigner-Funktion einer solchen Cat State- Superposition. Der Interferenzterm ρ_I der Dichtematrix

$$\rho(0) = \underbrace{\frac{|\alpha_+\rangle\langle\alpha_+| + |\alpha_-\rangle\langle\alpha_-|}{2(1 + e^{-2|\alpha_0|^2})}}_{\rho_c(0)} + \underbrace{\frac{|\alpha_-\rangle\langle\alpha_+| + |\alpha_+\rangle\langle\alpha_-|}{2(1 + e^{-2|\alpha_0|^2})}}_{\rho_I(0)} \quad (5.70)$$

wird durch die zwei zusätzlichen *Peaks* auf der Nichtdiagonalen $q = -q'$ dargestellt. Die Wigner-Funktion im semiklassischen Phasenraum (q, p) zeigt ein oszillierendes Muster, dass bei einer klassischen Phasenraumverteilung nicht vorhanden wäre. Dekohärenz zerstört diese Interferenzfähigkeit. Bei der Analyse der Dekohärenz unter nicht-Markovschen Mastergleichungen in Kapitel 6 bildet dieser Zustand die Basis der Diskussion. Die optische Ähnlichkeit zu Abb. 5.7 einer Superposition aus Grundzustand und zweiten angeregten Zustand legt nahe, dass eine Superposition $(|0\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$ besonders gut zum Vergleich der Dynamik von mikroskopischen und makroskopischen Superpositionen geeignet ist. Ein solcher Vergleich der Dekohärenzeigenschaften wird im Abschnitt 6.3.2 vorgenommen. Dort ist auch die Dichtematrix in der Fock-Basis abgebildet, aus der ersichtlich wird, dass für eine geeignete Verschiebung q_0 die Amplitude der Matrixelemente ρ_{00} , ρ_{02} , ρ_{20} und ρ_{22} des Zustands $\psi_{\pm q_0}$ gleich ist und sich Matrixelemente mit ungeraden n, m aufheben. Die optische Ähnlichkeit zum Zustand ψ_{02} ist dann auch in der Fockraumdarstellung gegeben.

5.2.2.3 Superpositionen verschränkter Zwei-Moden-Zustände

Im vorausgegangenen Abschnitt wurden Superpositionen kohärenter Zustände einer Mode betrachtet. Nun soll eine Verallgemeinerung auf die Superposition kohärenter Zustände mehrerer Moden vorgenommen werden und die Klasse der verschränkten kohärenten Zustände (ECS-Zustände, [131, 132]) behandelt werden. Im Falle zweier Moden 1 und 2 sei der Produktzustand aus Cat-State-Superpositionen nach Art von (5.63) gegeben durch

$$|\psi\rangle_{12} = |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 = c_1|\alpha_+\rangle_1|\alpha_+\rangle_2 + c_2|\alpha_+\rangle_1|\alpha_-\rangle_2 + c_3|\alpha_-\rangle_1|\alpha_+\rangle_2 + c_4|\alpha_-\rangle_1|\alpha_-\rangle_2, \quad (5.71)$$

mit Koeffizienten $c_i \in \mathbb{C}$. Da aus einem Produktzustand hervorgegangen, ist diese allgemeine Form der Superposition zweier Cat-State-Zustände separabel. Teile davon können allerdings verschränkt sein, beispielsweise die ECS-Zustände

$$|\Phi_{\pm}\rangle = N_{\pm} (|\alpha_+\rangle_1|\alpha_+\rangle_2 \pm |\alpha_-\rangle_1|\alpha_-\rangle_2), \quad (5.72)$$

$$|\Psi_{\pm}\rangle = N_{\pm} (|\alpha_+\rangle_1|\alpha_-\rangle_2 \pm |\alpha_-\rangle_1|\alpha_+\rangle_2), \quad (5.73)$$

mit $N_{\pm}^{-1} = \sqrt{2(1 + e^{-4|\alpha|^2})}$, die auch als *Quasi-Bell-Zustände* bezeichnet werden [133, 134, 135]. Neben der Verletzung der Bell-Ungleichungen [136] zeigen diese Zustände verschiedene weitere nichtklassische Eigenschaften, etwa sub-Poissonsche Statistik, *Squeezing* oder eine Verletzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung [137]. Im Gegensatz zu verschränkten Fock-Zuständen [138] in der Form $\sim |n\rangle_1|m\rangle_2 + e^{i\theta}|m\rangle_1|n\rangle_2$ oder gequetschten Zwei-Moden-Zuständen handelt es sich bei den ECS-Zuständen um Beispiele für Superpositionen von nicht-orthogonalen Zuständen [139], die einige besondere Eigenschaften aufweisen [140, 141, 142]. Eine dynamische Analyse des Dekohärenzprozesses und der Verschränkungseigenschaften erfolgt ebenfalls in Kapitel 7.

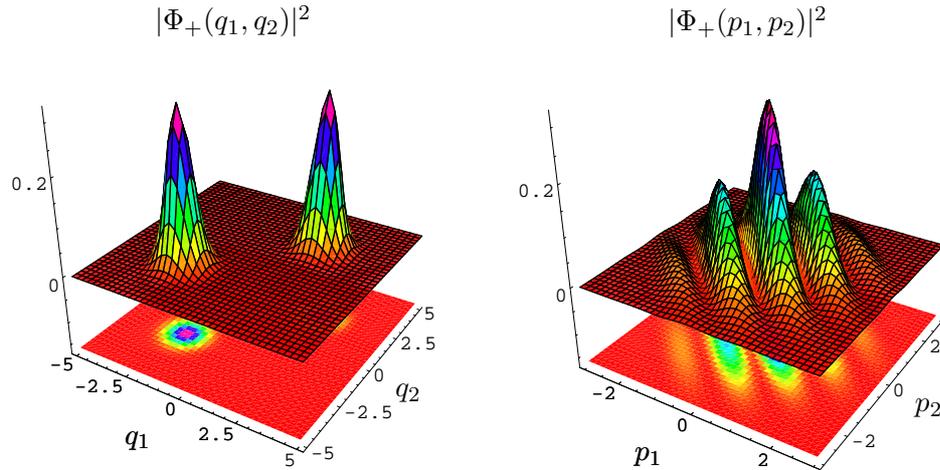


Abbildung 5.9: Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte im Orts- und Impulsraum des verschränkten kohärenten Zwei-Modenzustands $|\Phi_+\rangle$ mit $|\alpha_\pm| = \pm \frac{q_0}{2\sigma_0}$ und. Das durch die Superposition entstandene Interferenzmuster zeigt sich in diesem Fall nur im Impulsraum.

5.2.3 Dynamik nicht-Gaußscher Zustände

Im folgenden Abschnitt soll – ebenso wie im Abschnitt 5.1.3 für Gaußsche Zustände – die Dynamik nicht-Gaußscher Zustände unter Born-Markovscher Näherung mit der nicht-Markovschen Dynamik unter WCL-Näherung verglichen werden. Anschließend wird wiederum die exakte Dynamik unter Aufhebung der WCL-Näherung betrachtet.

5.2.3.1 Markovsche Evolution nicht-Gaußscher Zustände

Der Ausgangspunkt für die Betrachtung der Dynamik nicht-Gaußscher Zustände unter Born-Markovscher Approximation ist die quantenoptische Mastergleichung des gedämpften Oszillators (2.14). Die entsprechende Lösung für die charakteristische Funktion in Abhängigkeit des Anfangszustands χ_0 ist in Abschnitt 3.1.3.1 bereits angegeben worden. Von Interesse ist insbesondere der zeitliche Verlauf der Purity.

Für einzelne Fock-Zustände $|n\rangle$ ist die zeitabhängige Purity durch

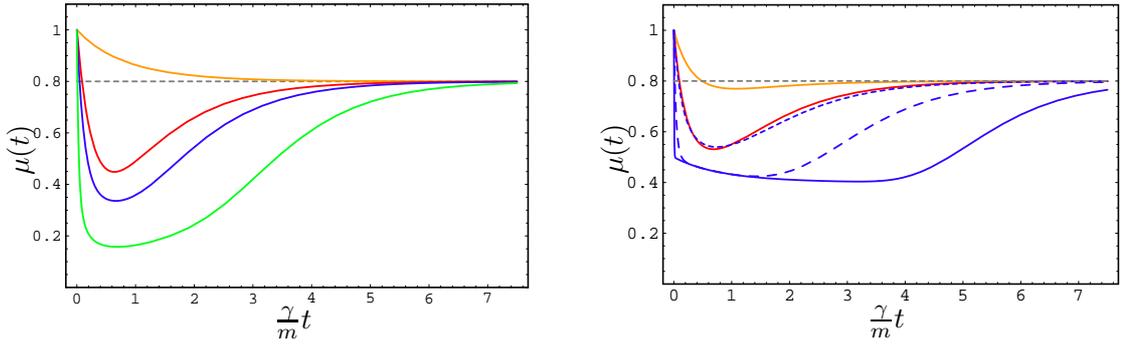
$$\mu_n(t) = e^{\gamma t} \frac{(x-2)^n}{x^{n+1}} P_n \left(1 + \frac{2}{x^2 - 2x} \right), \quad \text{mit } x = e^{\gamma t} (2\bar{n} + 1) - 2\bar{n} \quad (5.74)$$

gegeben [143, 144], wobei P_n die Legendre-Polynome der n -ten Ordnung bezeichnen. Für die Purity des Grundzustands $\mu_0(t)$ ergibt sich dabei derselbe Ausdruck wie für die in Gleichung (5.50) angegebene Purity $\mu_\alpha(t)$ eines kohärenten Zustands, unabhängig von dessen Parameter α_0 . Die zeitabhängigen charakteristischen Funktionen für die im vorangegangenen Abschnitt dargestellten Superpositionen lauten

$$\chi_{01}(t) = \left[1 - \frac{1}{4}(q^2 + p^2)^2 e^{-\gamma t} + \frac{ip}{\sqrt{2}} e^{-\gamma t/2} \right] \exp \left[-\frac{q^2 + p^2}{4\mu_0(t)} \right], \quad (5.75)$$

$$\chi_{02}(t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{q^2 - p^2}{\sqrt{2}} e^{-\gamma t} + \frac{1}{8} [4 + (q^2 + p^2)e^{-\gamma t}]^2 \right\} \exp \left[-\frac{q^2 + p^2}{4\mu_0(t)} \right], \quad (5.76)$$

$$\chi_{\pm q_0}(t) = 2N \exp \left[-\frac{q^2 + p^2}{4\mu_0(t)} \right] \left\{ \cos(pq_0 e^{-\gamma t/2}) + e^{-q_0^2} \cosh(qq_0 e^{-\gamma t/2}) \right\}. \quad (5.77)$$



(a) Purity μ_n verschiedener Besetzungszahl-Zustände $|n\rangle$ für $n = 0, 1, 2, 10$ (von oben).

(b) Purities μ_{01} (gelb) und μ_{02} (rot) im Vergleich zur Purity $\mu_{\pm\alpha_0}$ für drei Werte von $|\alpha|$ (blau).

Abbildung 5.10: Zeitliche Entwicklung der Purity $\mu_n(t)$ gem. Gl. (5.74) von einzelnen Fock-Zuständen (links) und Vergleich der Purities von Superpositions-Zuständen $\mu_{01}(t)$, $\mu_{02}(t)$ und $\mu_{\pm\alpha_0}(t)$ gem. Gl. (5.78)-(5.80) in Abb.(b) mit $|\alpha_0| = 2^{3/4}$ (kurz gestrichelt), $|\alpha_1| = 2|\alpha_0|$ (lang gestrichelt), $|\alpha_2| = 6|\alpha_0|$ (durchgezogene Linie). Je größer die anfängliche Separation $|\alpha|$ desto schneller erfolgt der zeitliche Abfall der Purity $\mu_{\pm\alpha_0}(t)$ auf den Wert $\approx \frac{1}{2}$ zu Beginn, aber desto langsamer verläuft die anschließende Relaxation auf den stationären Wert der Purity (hier $\mu_\infty = 0.8$).

Daraus ergibt sich unter der quantenoptischen Mastergleichung folgende zeitabhängige Funktion für die Purities der Superpositionen von Fock-Zuständen:

$$\mu_{01}(t) = \frac{\mu_0(t)}{2} (2 + \mu_0^2(t)e^{-2\gamma t} - \mu_0(t)e^{-\gamma t}) + \frac{\mu_0^2(t)}{2} e^{-\gamma t}, \quad (5.78)$$

$$\mu_{02}(t) = \mu_0(t) + \frac{3}{2}\mu_0^5(t)e^{-4\gamma t} - 3\mu_0^4(t)e^{-3\gamma t} + \frac{7}{2}\mu_0^3(t)e^{-2\gamma t} - 2\mu_0^2(t)e^{-\gamma t}. \quad (5.79)$$

Für die Superposition zweier kohärenter Zustände mit Parameter $|\alpha_0|^2 = \frac{q_0^2}{4\sigma_0}$ lässt sich die zeitabhängige Purity in drei Teile $\mu_{\pm q_0}(t) = \mu_c(t) + \mu_i(t) + \mu_{ci}(t)$ aufteilen, mit

$$\mu_i(t) = \frac{\mu_0(t) \left(1 + e^{-4\mu_0(t)e^{-\gamma t}|\alpha_0|^2} \right)}{2(1 + e^{-2|\alpha_0|^2})^2}, \quad (5.80)$$

$$\mu_i(t) = \frac{\mu_0(t) \left(1 + e^{4\mu_0(t)e^{-\gamma t}|\alpha_0|^2} \right)}{2(1 + e^{2|\alpha_0|^2})^2}, \quad (5.81)$$

$$\mu_{ci}(t) = \frac{\mu_0(t)}{1 + \cosh 2|\alpha_0|^2}, \quad (5.82)$$

wobei $\mu_0(t)$ die zeitabhängige Purity des Grundzustands bzw. eines kohärenten Zustands bezeichnet. Die Abbildung 5.10 zeigt den zeitlichen Verlauf der in diesem Abschnitt behandelten Purities. Der Verlauf der Purity einzelner Fock-Zustände, wie er in Abb. 5.10a dargestellt ist, macht deutlich, dass der anfängliche Abnahme der Purity um so stärker ausfällt, je größer die Besetzungszahl des Fock-Zustands ist. Dies wird verständlich wenn man bedenkt, dass die niedrige Besetzung unterer Niveaus zu Beginn der Relaxation einer Gleichgewichtsbesetzung sehr hoher Temperatur ähnlich ist, die eine entsprechend kleine Purity bedingt. So kann ein starker Abfall der Purity zu Beginn der Relaxation in erster Linie auch ein Zeichen für eine große Gleichgewichtsferne der Verteilung der Diagonalelemente sein – und muss nicht zwangsläufig mit einem Verlust an Kohärenz bzw. dem Verschwinden der Diagonalelemente in Verbindung stehen.

5.2.3.2 Nicht-Markovsche Evolution nicht-Gaußscher Zustände

Nicht-Markovschen Eigenschaften bekommen gerade dann eine Bedeutung, wenn sich Systemprozesse auf der Zeitskala der Badkorrelationszeit abspielen. Dies ist bei makroskopischen Superpositionen der Fall bei denen der quantenmechanische Interferenzteil mitunter sehr schnell gedämpft wird, wenn die Separation groß gewählt wird. Die Lösung der HPZ-Mastergleichung für den nicht-Markovschen Schwachkopplungs-Grenzfall wurde bereits in den Gleichungen (5.48) und (5.49) in Form der charakteristischen Funktion angegeben. Für eine Cat State Superposition kohärenter Zustände (5.63) ergibt sich analog zum Markovschen Fall für die Purity $\mu_{\pm q_0}(t) = \mu_c(t) + \mu_I(t) + \mu_{cI}(t)$, mit

$$\mu_c(t) = \frac{2N_0^2}{\Delta_p(t) + e^{-\Gamma_p(t)}} \left(1 + \exp \left[-\frac{q_0^2}{(1 + \Delta_p(t)e^{\Gamma_p(t)})\sigma_0^2} \right] \right), \quad (5.83)$$

$$\mu_I(t) = \frac{2N_0^2 e^{-q_0^2/\sigma_0^2}}{\Delta_p(t) + e^{-\Gamma_p(t)}} \left(1 + \exp \left[+\frac{q_0^2}{(1 + \Delta_p(t)e^{\Gamma_p(t)})\sigma_0^2} \right] \right), \quad (5.84)$$

$$\mu_{cI}(t) = \frac{\mu_\alpha(t)}{1 + \cosh \frac{q_0}{2\sigma_0^2}}, \quad (5.85)$$

wobei die zeitabhängigen Koeffizienten $\Delta_p(t)$ und $\Gamma_p(t)$ in (5.49) definiert wurden. Wird der Ausdruck (5.50) für die Purity eines kohärenten Zustands unter nicht-Markovscher Evolution eingesetzt, erhält man

$$\mu_c(t) = N_c \mu_\alpha(t) \left(1 + e^{-\mu_\alpha(t)e^{-\Gamma_p(t)}q_0^2/\sigma_0^2} \right) \quad \text{mit} \quad N_c = 2(1 + e^{-q_0^2/2/\sigma_0^2})^{-2}, \quad (5.86)$$

$$\mu_I(t) = N_I \mu_\alpha(t) \left(1 + e^{+\mu_\alpha(t)e^{-\Gamma_p(t)}q_0^2/\sigma_0^2} \right) \quad \text{mit} \quad N_I = 2(1 + e^{+q_0^2/2/\sigma_0^2})^{-2}. \quad (5.87)$$

Dabei kann die Purity jeweils aufgeteilt werden in einen Anteil $\mu_c(t)$, der die Entwicklung des Diagonalanteils der Dichtematrix im Ortsraum beschreibt, und einen Interferenz-Anteil $\mu_I(t)$, der die Entwicklung der Nichtdiagonalelemente (in Ortsdarstellung) zusammenfasst. Im Falle der Superposition zweier kohärenter Zustände gibt es wegen deren nicht-Orthogonalität noch einen zusätzlichen Term $\mu_{cI} \sim (1 + \cosh 2|\alpha_0|^2)^{-1}$, der für große Separation $|\alpha_0|^2$ allerdings nur einen unwesentlichen Beitrag zur gesamten Purity liefert. Für die spätere Diskussion der Dekohärenz ist diese Aufteilung in $\mu_c(t)$ und $\mu_I(t)$ entscheidend, da letzteres ein gutes Maß für die Dekohärenz darstellt, während die Dynamik von $\mu_c(t)$ wesentlich langsamer verläuft und die thermische Relaxation beschreibt. Eine ausführliche Diskussion der Dekohärenz-Szenarien für eine makroskopische Cat-State Superposition unter nicht-Markovschen Bedingungen findet in Kapitel 6 statt. Dort wird ebenfalls die exakte Lösung der HPZ-Mastergleichung für diesen Zustand präsentiert.

5.2.3.3 Dynamik bei starker System-Bad-Wechselwirkung

Die exakte Lösung der HPZ-Mastergleichung mit numerischer Integration der Koeffizienten erlaubt die Beschreibung für beliebige Stärke der Dämpfung. Die daraus resultierenden Effekte, wie die zeitabhängige Frequenzverschiebung, wurden bereits im entsprechenden Abschnitt über Gaußsche Zustände diskutiert. Bei nicht-Gaußschen Zuständen, insbesondere Superpositionen, stellt sich die zusätzliche Frage, ob die Auswirkungen einer starken System-Bad-Wechselwirkung auf Interferenzterme und Diagonalanteile unterschiedlich ausfallen, und

ob mikroskopische und makroskopische Superpositionen unterschiedlich betroffen sind. Zur Beantwortung der letzteren Frage ist in Abbildung 5.11 die zeitliche Entwicklung der Purity zweier vergleichbarer Superpositionen aufgetragen. Die bereits in den Abbildungen 5.7 und 5.8 herausgestellte optische Ähnlichkeit der Superposition $|0\rangle + |2\rangle$ und $\sim |\alpha_+\rangle + |\alpha_-\rangle$ findet sich auch in der Fock-Basis wieder. Für geeignet (klein) gewählten Parameter $|\alpha_0|$ haben die Matrixelemente ρ_{00} , ρ_{02} , ρ_{20} und ρ_{22} der Dichtematrix $\rho_{\pm\alpha}$ gleiche Amplitude. Die Matrixelemente mit ungeraden n , m heben sich auf. Ein Vergleich des Relaxationsprozesses liefert in diesem Fall keinen prinzipiellen Unterschied zwischen mikroskopischer und makroskopischer Superposition – weder im quantenoptischen Fall noch im Regime starker System-Bad-Wechselwirkung. Der hier generell für Überlagerung kohärenter Zustände gewählte Begriff der makroskopischen Superposition ist deshalb tatsächlich nur für große Separationen $|\alpha|$ mit entsprechend geringem Überlapp der Wellenpakete ein Unterscheidungsmerkmal zu Überlagerungen von Fockzuständen. Ob auch der Dekohärenzprozess der Superpositionen $\psi_{\pm q_0}$ und ψ_{02} die dargestellte Ähnlichkeit aufweist wird im Abschnitt 6.3.2 untersucht.

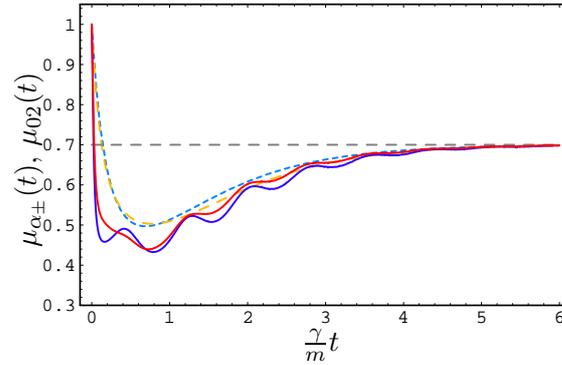


Abbildung 5.11: Zeitentwicklung der Purities $\mu_{\alpha_{\pm}}(t)$ (blau) und $\mu_{02}(t)$ (rot) einer Superposition kohärenter Zustände $\sim |\alpha_+\rangle + |\alpha_-\rangle$ und einer Superposition von Fockzuständen $\sim |0\rangle + |2\rangle$. Der Parameter $|\alpha_0|^2$ wurde dabei so gewählt, dass die beiden Superpositionen vergleichbar werden, d.h. die Matrixelemente der anfänglichen Dichtematrix $\langle n|\rho_{\pm\alpha}|m\rangle$ sind $\rho_{00} = \rho_{22} = \rho_{02} = \rho_{20} \gg \rho_{nm}$, $n, m > 2$ und $\rho_{11} = \rho_{01} = \rho_{10} = 0$. Sowohl im Markovschen Fall (hellblau bzw. gelb gestrichelt) als auch im Fall starker System-Bad-Wechselwirkung ist der Verlauf der Purities der unterschiedlichen Superpositionen sehr ähnlich. Ein prinzipieller Unterschied zwischen mikroskopischen und makroskopischen Superpositionen besteht somit nicht, sofern die anfängliche Verteilung der Dichtematrixelemente ähnlich ist. Parameter: $\mu_{\infty} = 0.7$, $\gamma = 0.25m\omega_0$ und $\Gamma = 10\omega_0$.

5.3 Zusammenfassung von Kapitel 5

Dieser Abschnitt hat die wichtigsten Beispiele von quantenmechanischen Zuständen, die im Rahmen von Dekohärenz- und Verschränkungseigenschaften in CV-Systemen untersucht werden, zusammengestellt. Es wurden jeweils die analytischen Lösungen der Mastergleichungen für die Born-Markov-Approximation sowie die HPZ-Mastergleichung in nicht-Markovscher Schwachkopplungs-Näherung angegeben und mit der numerischen Lösung der exakten HPZ-Mastergleichung verglichen. Bisher wurden vornehmlich Relaxationsprozesse in Form der zeitlichen Entwicklung der Purity betrachtet. Dabei ist deutlich geworden, dass sich entscheidende Unterschiede vor allem auf kurzen Zeitskalen ergeben. Im nicht-Markovschen Schwachkopplungs-Regime fanden sich etwa Oszillationen in Größen wie der Purity oder der mittleren Besetzungszahl. Im Bereich starker Dämpfung und kurzen Badkorrelationszeiten fielen insbesondere die durch die in diesem Fall große Frequenzverschiebung bzw. Potenzialrenormierung hervorgerufenen Effekte zu Beginn des Relaxationsprozesses ins Gewicht. Da die Dynamik insbesondere auf kurzen Zeitskalen beeinflusst wird, spielt die Betrachtung von nicht-Markovschen Effekten bei Relaxationsprozessen nur eine untergeordnete Rolle – eine viel größere Bedeutung kommt ihnen bei quantenmechanischen Nichtgleichgewichtseffekten zu, die sich ebenfalls auf kleinen Zeitskalen abspielen. Dies sind die in den nächsten beiden Kapiteln behandelten Phänomene der Dekohärenz und Verschränkung.

Kapitel 6

Dekohärenz von CV-Systemen im QBM-Modell

„Decoherence is the irreversible, uncontrollable and persistent formation of quantum correlations of the system with the environment.“ R. Alicki [145]

Dekohärenz bezeichnet die Unterdrückung der Kohärenzeigenschaften von quantenmechanischen Superpositionszuständen durch den Einfluss einer Umgebung. Umgebungsinduzierte Dekohärenz wird als Ursache für das Ausbleiben von quantenmechanischen Überlagerungszuständen bei makroskopischen Objekten gesehen und ist Folge der praktischen Unmöglichkeit, den Zustand aller Umgebungsfreiheitsgrade zu beobachten [29, 30, 31]. Der Begriff ist eng verknüpft mit dem quantenmechanischen Messproblem [32] und steht auch für den Übergang vom quantenmechanischen Regime zum klassischen Bereich [33, 34, 35, 146, 147]. Im Mittelpunkt des theoretischen Forschungsinteresses stehen die Zeitskalen auf denen dieser Prozess abläuft und Strategien zur Vermeidung bzw. Reduzierung der Dekohärenz. Die Modellergebnisse sind dabei abhängig von der Art der zugrundegelegten Mastergleichung für die dissipative Quantendynamik sowie des verwendeten Dekohärenzmaßes. Daraus erwächst die in diesem Kapitel behandelte Problemstellung. Da zum einen in der Literatur unterschiedliche und nicht immer äquivalente Dekohärenzmaße verwendet werden, fehlt zunächst ein vergleichender Überblick. Zum anderen werden bei der Dynamik fast ausschließlich Mastergleichungen in der Born-Markovschen Approximation zugrundegelegt, so auch im Bereich der CV-Systeme [61]. Nötig ist hierfür, dass alle relevanten Zeitskalen groß sind gegenüber den Korrelationszeiten in der Umgebung. Die Dekohärenzzeit wird allerdings für makroskopische Superposition sehr klein und kann im Bereich der Badkorrelationszeiten liegen. Eine Markovsche Näherung ist in diesen Fällen nicht mehr gerechtfertigt, so dass Markovsche Mastergleichungen gerade für die Beschreibung des Übergangs vom quantenmechanischen zum klassischen Verhalten bei makroskopischen Superpositionen ungeeignet sind. Ein weiteres Problem ergibt sich aus der zugrundeliegenden Annahme schwacher Kopplung: Die Verschränkung als eigentliche Ursache der Dekohärenz wird in diesem Formalismus gar nicht sichtbar, der stationäre Zustand weist also keine Quantenkorrelationen mehr auf. Die aufgezählten Probleme lassen sich durch die Verwendung der HPZ-Mastergleichung umgehen, die zu einer expliziten Abhängigkeit der Dekohärenzzeit von der spektralen Dichte des Bades führt.

6.1 Definition von Dekohärenz

Zur Bestimmung von Dekohärenzzeitkalen ist die Definition der Dekohärenz über ein quantitatives Maß nötig. Solche Maße existieren in unterschiedlichen Basisdarstellungen, was zunächst die Selektion einer geeigneten Dekohärenzfunktion erforderlich macht. Zuvor sollte die Dekohärenz noch von anderen Effekten abgegrenzt werden, die ebenfalls zu einer Beeinflussung des Interferenzkontrasts führen können.

6.1.1 Dekohärenz versus Dissipation

Dekohärenz bezeichnet im ursprünglichen Sinn einen umgebungsinduzierten Quanteneffekt auf makroskopisch unterscheidbare Quantenzustände im Sinne einer Unterdrückung der charakteristischen quantenmechanischen Interferenzfähigkeit. Heute wird der Begriff auch vielfach für meso- und mikroskopische Zustände angewandt. Der Begriff der Dekohärenz muss dabei von anderen Effekten abgegrenzt werden, die ebenfalls zu einer Beeinflussung des Interferenzmusters führen, und u.U. zeitlich mit dem eigentlichen Dekohärenzprozess zusammenfallen. Dazu gehören Dissipation, Phasendämpfung und Dispersion:

- *Dissipation* ist der Energieaustausch mit der Umgebung der zur Thermalisierung führt. Da die Wechselwirkung letztlich Ursache für Dissipation und Dekohärenz ist, treten diese beiden Phänomene im Allgemeinen auch gemeinsam auf. Eine Ausnahme hiervon ist die reine Dekohärenz bzw. die Phasendämpfung. Die Dekohärenzzeit ist für makroskopische Superpositionen wesentlich kleiner als die Zeitskala der Relaxation, für mikroskopische Superpositionen hingegen sind die beiden Zeitskalen vergleichbar.
- *Phasendämpfung* im engeren Sinn bezeichnet das Phänomen, das Kohärenzen (Neben-Diagonal-Elemente) in einer bestimmten Basis (z.B. der Energie-Eigenbasis) des Systems reduziert werden, ohne das die Diagonalelemente beeinflusst werden. Dieser Effekt kann reversibel sein, wenn er nicht von Dekohärenz begleitet wird. Im weiteren Sinn bezeichnet der Begriff Phasendämpfung den Prozess *reiner Dekohärenz*, also Dekohärenz ohne Dissipation. Dieser Fall tritt dann ein, wenn der System-Hamilton-Operator H_s und der Wechselwirkungsoperator H_{int} vertauschen, also für $[H_s, H_{\text{int}}] = 0$. Zumindest näherungsweise ist dieser Fall auch dann gegeben, wenn die Systemdynamik des anfänglichen Zustandes sehr langsam erfolgt, im Vergleich zur Dekohärenzzeitkala. Allgemein verläuft die Dekohärenz für jene Superpositionszustände besonders schnell, die aufgrund ihrer Wechselwirkung mit der Umgebung von dieser unterschieden werden können.
- *Dispersion* schließlich bezeichnet die unitäre Verbreiterung bzw. das Zerfließen eines Wellenpakets. Unter Umständen wirkt dabei die Dispersion der Dekohärenz entgegen – und zwar dann, wenn der Überlapp einer anfänglichen Superposition von Wellenpaketen durch das Zerfließen signifikant vergrößert wird. Dadurch kann auch das Interferenzmuster verstärkt werden, und somit die durch die Dekohärenz hervorgerufene Abschwächung des Interferenzkontrasts vermindert werden.

Eine exakte Definition von Dekohärenz und die Diskussion von Dekohärenzzeitkalen kann nur über ein quantitatives Maß erfolgen. Dieses hängt wiederum nicht nur von speziellen System sondern auch von der gewählten Darstellung des Zustandes ab.

6.1.2 Dekohärenzmaße in unterschiedlichen Basisdarstellungen

Dekohärenzmaße existieren in unterschiedlichen Basisdarstellungen. Maße im Phasenraum und Orts- bzw. Impulsraum finden insbesondere bei der Betrachtung von CV-Systemen Anwendung. Maße im Fock-Raum bzw. der Energie-Eigenbasis sind besonders für Systeme mit einer beschränkten Anzahl von Eigenwerten (z.B. Spinsysteme) geeignet. Zu beachten ist jedoch, dass diese Maße unter Umständen nicht äquivalent sind und unterschiedliche Ergebnisse bezüglich des Verlaufs der Dekohärenz und der charakteristischen Zeitskalen liefern können. Eine kritische Betrachtung ist deshalb zunächst angeraten.

6.1.2.1 Dekohärenz in der Phasenraumdarstellung

Als wichtigste und am häufigsten zum Einsatz kommende Phasenraum-Dekohärenzmaße für CV-Systeme sind die *Purity*, die als Phasenraumvolumen des negativen Anteils der Wigner-Funktion definierte *Quantumness*, sowie die sogenannte *Interferenzkontrastfunktion* zu nennen. Diese Maße sollen deshalb im Folgenden kurz eingeführt werden.

- Die Purity $\mu(t) = \text{Tr}[\rho^2(t)]$ ist ein Maß für den Mischungsgrad eines Quantenzustands und hat den Vorteil leicht aus der Wigner-Funktion oder der charakteristischen Funktion über

$$\mu(t) = (2\pi\hbar)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp W^2(q, p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\nu |\chi(\eta, \nu, t)|^2 \quad (6.1)$$

bestimmt werden zu können. Für reine (Anfangs-)Zustände nimmt sie den Wert $\mu(0) = 1$ an, und erreicht unter der Entwicklung gemäß der HPZ-Mastergleichung den stationären Wert $\frac{\hbar}{2} / \sqrt{\langle p^2 \rangle \langle q^2 \rangle}$ mit den Korrelationen $\langle p^2 \rangle$ und $\langle q^2 \rangle$ wie sie durch die Gleichungen (3.18) und (3.19) gegeben sind. Die Zeitentwicklung der Purity kann aus der Lösung der generalisierten Fokker-Planck Gleichung für die Wigner-Funktion (6.27) gewonnen werden bzw. direkt aus Formel (3.123). Die Purity der reduzierten Dichtematrix eines offenen Quantensystems wird zwar in der Literatur häufig als Dekohärenzmaß herangezogen, allerdings werden hierbei reine Dekohärenz- und Relaxationseffekte vermischt. Eine saubere Trennung kann erfolgen indem nur der Anteil der Dichtematrix in die Berechnung eingeht, der dem Interferenzterm ρ_I der Superposition zuzurechnen ist [91]. Damit ergibt sich als Dekohärenzfunktion die *Norm des Interferenzterms*:

$$\mu_I(t) = (2\pi\hbar)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp W_I^2(q, p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\nu |\chi_I(\eta, \nu, t)|^2. \quad (6.2)$$

Der verbleibende Anteil in Form des kohärenten Terms W_c und eines (sehr kleinen) Mischterms W_{cI} (im Falle nicht-orthogonaler Zustände) bestimmen hingegen das Relaxationsverhalten.

- Anstatt des Quadrats der Wigner-Funktion kann auch direkt der Betrag der Wigner-Funktion als Indikator des nicht-klassischen Charakters eines Quantenzustands verwendet werden. Die sogenannte *Quantumness* misst den negativen Anteil der Wigner-Funktion und ist definiert als

$$\Xi(t) = \Xi_0^{-1} \left(\int dq dp |W(q, p, t)| - 1 \right), \quad \text{mit} \quad \Xi_0 = \int dq dp |W(q, p, 0)| - 1. \quad (6.3)$$

Sie entspricht damit dem dem doppelten Phasenraumvolumen des negativen Anteils der Wigner-Funktion normiert auf eins zur Zeit $t = 0$.

- Als drittes Phasenraummaß der Dekohärenz findet die sogenannte Interferenzkontrastfunktion (*fringe visibility function* [148, 149]) Verwendung, die die jeweiligen Maximalwerte der Wigner-Funktion des Interferenzterms und der kohärenten Terme ins Verhältnis setzt

$$\Lambda(t) = \frac{W_{\text{int}}(q, p, t)|_{\text{max}}}{2\sqrt{W_1(q, p, t)|_{\text{max}}W_2(q, p, t)|_{\text{max}}}} \quad (6.4)$$

und mit der Streifenkontrastfunktion der experimentellen Interferometrie vergleichbar ist (letztere setzt die Differenz und Summe von Intensitätsmaxima und -minima am Schirm ins Verhältnis und ist allerdings nur bedingt zur zeitlichen Betrachtung von Dekohärenzprozessen geeignet).

- Ein weiteres, indirektes Maß für die Dekohärenz ist das Loschmidt Echo

$$M(t) = \text{Tr}[\rho_s(t)\rho_0(t)], \quad (6.5)$$

dass den quadrierten Überlapp zwischen der ungestörten, unitären Entwicklung $\rho_0(t)$ des Systems von Interesse und dessen tatsächlicher, dissipativer Entwicklung als offenes Systems $\rho_s(t)$ misst [150]. Unter bestimmten Voraussetzungen erlaubt das Loschmidt Echo auch eine Verbindung zwischen den Nichtdiagonalelementen (Kohärenzen) der reduzierten Dichtematrix ρ_s und dem Verlust an *Fidelity* des Bades herzustellen [151].

Gemeinsam ist diesen Phasenraummaßen, dass die Dekohärenzfunktion direkt mit der quantenmechanischen Natur des jeweiligen Zustandes, der sich in den oszillierenden, negativen Anteilen der Wigner-Funktion zeigt, in Verbindung gesetzt wird. Während die beiden erstgenannten Phasenraummaße jedoch für beliebige Superpositionen anwendbar sind, ist die Interferenzkontrastfunktion speziell auf die Behandlung der Dekohärenz von Superpositionen kohärenter Zustände zugeschnitten.

6.1.2.2 Dekohärenz in der Orts- und Impulsdarstellung

Neben den Dekohärenzmaßen im Phasenraum kann auch die Wahrscheinlichkeitsdichte im Ortsraum $P(q, t)$ oder im Impulsraum $P(p, t)$ als Grundlage eines Dekohärenzmaßes dienen [152, 153]. Die Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte ergibt sich auf einfache Weise aus der Lösung der HPZ-Mastergleichung für die Wigner-Funktion (6.27) – oder direkt über die anfängliche charakteristische Funktion $\chi(q, p, 0)$ – durch die folgenden Beziehungen [90]:

$$P(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp W(q, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} ds \tilde{\chi} \left(\frac{s}{m} \dot{f}(t), s \dot{f}(t), 0 \right) \exp \left[-\frac{K_q(t)s^2}{2\hbar^2} + \frac{iqs}{\hbar} \right], \quad (6.6)$$

$$P(p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dq W(q, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} ds \tilde{\chi} \left(r \dot{f}(t), mr \dot{f}(t), 0 \right) \exp \left[-\frac{K_p(t)r^2}{2\hbar^2} + \frac{ipr}{\hbar} \right]. \quad (6.7)$$

Durch die Aufteilung in einen klassischen Anteil P_{cl} und einen quantenmechanischen Interferenzterm P_{int} und anschließendes in Bezug setzen dieser beiden Ausdrücke können entsprechende Dekohärenzmaße im Orts- und Impulsraum definiert werden. Das meistzitierte Beispiel ist die Superposition zweier Gaußscher Wellenpakete, deren Wahrscheinlichkeitsdichte sich wie folgt aufteilen lässt:

$$P(q, t) = P_{\text{cl}}(q, t) + P_{\text{int}}(q, t) = P_1(q, t) + P_2(q, t) + P_I(q, t) \cos \theta(q, t), \quad (6.8)$$

wobei $P_{\text{cl}}(q, t)$ der Summe $P_1 + P_2$ der klassischen Wahrscheinlichkeitsdichten entspricht und P_{int} das räumliche Interferenzmuster beschreibt. Als Dekohärenzmaß wird nun der Interferenzterm zum kohärenten Anteil ins Verhältnis gesetzt. Der Dekohärenzfaktor $\Delta(t)$ ist definiert als Verhältnis des Koeffizienten P_I des Kosinus-Terms in (6.35) zum zweifachen geometrischen Mittel der Terme P_1 and P_2 :

$$\Delta(t) = \frac{P_I(q, t)}{2\sqrt{P_1(q, t)P_2(q, t)}} = \frac{P_I(q=0, t)}{P_{\text{coh}}(q=0, t)}. \quad (6.9)$$

Dieser Faktor misst folglich die Amplitude P_I im Koordinatenursprung in Einheiten des klassischen Anteils P_{cl} . Eventuelle Nachteile dieser Definition seien an dieser Stelle kurz aufgezählt:

- Das aus der Wahrscheinlichkeitsdichte gewonnene Dekohärenzmaß kann nur für spezielle Superpositionen angewandt werden (insbesondere Superpositionen kohärenter Zustände). Dekohärenzmaße wie die Purity sind demgegenüber allgemeiner und können auch bei mikroskopischen Superpositionen Anwendung finden.
- Die Dekohärenzzeitkala im Ortsraum kann von der im Impulsraum abweichen – im Extremfall zeigt sich nur in einer der beiden Darstellungen Dekohärenz [154]. Beide Maße können deshalb auch andere Ergebnisse liefern als bei der Betrachtung der Dekohärenz über Phasenraummaße.
- Wird P_{int} zu P_{cl} in Beziehung gesetzt (z.B. durch Bildung des Quotienten), so überlagert die zeitliche Entwicklung des klassischen Anteils (z.B. das Zerfließen der Wellenpakete) die des Interferenzterms. Der zeitliche Verlauf der so definierten Dekohärenzfunktion spiegelt dann unter Umständen nicht die tatsächliche Abnahme der Interferenzfähigkeit wider.

Eine eingehende Diskussion dieser Nachteile und ein Vergleich mit den übrigen Dekohärenzmaßen erfolgt in Kapitel 6.3.1.4. Ebenso wie Dekohärenzmaße im Orts-/Impulsraum von den Dekohärenzmaßen im Phasenraum abweichen können, liefert die Betrachtung der zeitlichen Entwicklung der Dichtematrixelemente in der Fockraumdarstellung, die im Folgenden beschrieben wird, mitunter andere Ergebnisse.

6.1.2.3 Dekohärenz in der Fockraumdarstellung

Während die im vorausgegangenen Abschnitt vorgestellten Dekohärenzmaße insbesondere im QBM-Modell und allgemeiner für CV-Systeme Verwendung finden, wird die Dekohärenz in Systemen mit begrenzter Anzahl von Eigenwerten wie etwa dem Zwei-Niveau-System anhand

des expliziten zeitlichen Verlaufs der Nebendiagonalelemente der Dichtematrix untersucht. Die reduzierte Dichtematrix in der Fockraum-Repräsentation lautet

$$\hat{\rho}_s(t) = \int \frac{d^2\xi}{2\pi} \chi(\xi, t) \hat{D}(\xi), \quad \text{und} \quad \hat{\rho}_{nm}(t) = \int \frac{d^2\xi}{2\pi} \chi(\xi, t) \langle n | \hat{D}(\xi) | m \rangle, \quad (6.10)$$

wobei die charakteristische Funktion $\chi(\xi, t)$ in dieser Darstellung durch

$$\chi(\xi, t) = \int d^2\alpha W(\alpha, \alpha^*, t) e^{|\xi|^2/2} e^{-\xi\alpha^*} e^{\xi^*\alpha}, \quad \text{wobei} \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} q + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega_0}} p, \quad (6.11)$$

mit der Wigner-Funktion verknüpft ist. Eine Darstellung der QBM-Dynamik im Fock-Raum ist ebenfalls möglich. Dies ist insbesondere bei tiefen Temperaturen von Relevanz, wo das Modell als effektives Zwei-Niveau-System aufgefasst werden kann. Ein Vergleich mit der Quantenoptischen Mastergleichung des Zwei-Niveau-Systems wird weiter unten gegeben. Zudem bietet sich bei einem Vergleich der Dekohärenz von *mikroskopischen* Superpositionen von Energieeigenzuständen mit *makroskopischen* Superposition kohärenter Zustände eine Betrachtung in der Fock-Basis ebenfalls an.

6.1.3 Charakteristische Zeitskalen

Beim Studium der Dekohärenz ist insbesondere die Zeitskala auf der dieser Prozess abläuft im Verhältnis zu weiteren charakteristischen Zeiten des Systems, wie Korrelations- und Relaxationszeiten, von Interesse. Im Einzelnen sind dies die charakteristische Zeitskala der internen Systemdynamik τ_s , die Relaxationszeit τ_γ und die kürzeste Badkorrelationszeit τ_b . Diese können aus den Koeffizienten der HPZ-Mastergleichung (3.90) abgeschätzt werden und ergeben sich zu:

$$\tau_s \approx \gamma_q^{-1/2} = \left[\omega_0^2 + \frac{\gamma\Gamma}{m} \left(1 - \frac{\Gamma^2}{\omega_0^2 + \Gamma^2} \right) \right]^{-1/2} \sim \omega_0^{-1}, \quad (6.12)$$

$$\tau_\gamma \approx \gamma_p^{-1} = \frac{m}{\gamma} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} \right) \sim \gamma^{-1}, \quad (6.13)$$

$$\tau_b \approx \min \{ \Gamma^{-1}, \beta\hbar \} \sim \Gamma^{-1}. \quad (6.14)$$

Der genaue Verlauf des Dekohärenzprozesses wird nun zum einen von dem Verhältnis dieser drei Zeitskalen zueinander abhängen, wobei im Wesentlichen die vier Regime

$$\tau_b \ll \tau_s \ll \tau_\gamma \quad (\text{Markovsches Weak-Coupling-Regime}), \quad (6.15)$$

$$\tau_b \approx \tau_s \ll \tau_\gamma \quad (\text{Nicht-Markovsches Regime}), \quad (6.16)$$

$$\tau_b \ll \tau_s \approx \tau_\gamma \quad (\text{Strong-Coupling-Regime}), \quad (6.17)$$

$$\tau_s < \tau_b \ll \tau_\gamma \quad (\text{Out-of-Resonance-Regime}). \quad (6.18)$$

unterschieden werden können, und zum anderen von der Relation zwischen Dekohärenzzeit τ_d und diesen drei charakteristischen Zeiten. Da die Dekohärenzzeit für makroskopisch unterscheidbare (kohärente) Zustände maßgeblich von der Separation q_0 bzw. p_0 im Phasenraum abhängt, bestimmt die anfängliche Separation ob die Dekohärenzzeit in der Größenordnung von τ_s liegt und damit systemspezifische Eigenschaften zum Tragen kommen, oder ob τ_d wesentlich kleiner (für verhältnismäßig große Separation) oder wesentlich größer (für relativ kleine Separation) als τ_s ist. In letzteren beiden Fällen weist der Dekohärenzprozess universelle Eigenschaften auf, die im nächsten Abschnitt behandelt werden.

6.2 Universelle Charakteristika von Dekohärenz

6.2.1 Dekohärenzzeitkalen in unterschiedlichen Regimen

Für fest vorgegebene System- und Umweltparameter wird die Dekohärenzzeitkala maßgeblich durch das Ausmaß der anfänglichen Separation $|q - q'|$ bestimmt. Der Parameter $q_0 = \frac{1}{2}|q - q'|$ erlaubt daher, das Verhältnis zwischen Systemdynamik τ_s und Dekohärenzzeit τ_d zu bestimmen. In den Grenzfällen $\tau_d \gg \tau_s$ und $\tau_d \ll \tau_s$ ist es möglich, systemunabhängige Ausdrücke für die Dekohärenzzeit herzuleiten, indem nur die jeweils dominanten Terme in der HPZ-Mastergleichung (3.90) berücksichtigt werden.

Im Grenzfall $\tau_s \ll \tau_d \ll \tau_\gamma$ spielt sich der Dekohärenzprozess also auf Zeitskalen $t \gg \omega_0^{-1}$ ab, verläuft jedoch dennoch wesentlich schneller als die Relaxation. In diesem Fall ist der Diffusionsterm mit Koeffizient $D_p(t)$ prägend und führt auf die (Markovsche) Näherung

$$\mu_{\tau_d > \tau_s}(t) = \left(\exp \left[-2 \frac{q_0^2}{\hbar^2} D_p(\infty) t \right] \right)^2 = \exp \left[-\frac{4q_0^2}{\hbar^2} \left(\int_0^\infty dt' K(t') \cos \omega_0 t' \right) t \right], \quad (6.19)$$

wobei der stationäre Wert $D_p(\infty) = \gamma_p(\infty) \langle p^2(\infty) \rangle$ mit $\langle p^2(\infty) \rangle$ aus Gleichung (3.19) für Zeiten $t \approx \Gamma^{-1} \ll \tau_d$ erreicht wird. Für $\gamma \ll m\omega_0$ und $\Gamma \gg \omega_0$ ist $D_p(\infty) = \frac{\gamma \hbar \omega_0}{2} \coth(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega_0)$, so dass sich für $kT \gg \hbar \omega_0$ der bereits aus der Caldeira-Leggett Mastergleichung gewonnene Ausdruck

$$\mu_{\tau_d > \tau_s}(t) \stackrel{\gamma \ll \omega_0}{\approx} \exp \left[-\frac{4\gamma \omega_0 q_0^2}{2\hbar} \coth\left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega_0\right) t \right] \stackrel{kT \gg \hbar \omega_0}{\longrightarrow} \exp \left[-\frac{4\gamma kT q_0^2}{\hbar^2} t \right] \quad (6.20)$$

für den Dekohärenzfaktor ergibt. Der Dekohärenzverlauf ist dabei exponentiell abfallend mit charakteristischer Zeitskala

$$\mu_{\tau_d > \tau_s}(t) \sim \exp[-t/\tau_d] \quad \text{mit} \quad \tau_d = \frac{\hbar^2}{4\gamma kT} q_0^{-2} \quad (6.21)$$

und wird insbesondere durch thermische Fluktuationen hervorgerufen. Die Dekohärenzrate skaliert in diesem Fall quadratisch mit dem Abstand q_0 [36].

Anders verhält es sich im zweiten Grenzfall $\tau_d \ll \tau_s \ll \tau_\gamma$, wo sich der Dekohärenzprozess also auf Zeitskalen $t \ll \omega_0^{-1}$ abspielt. Hier ist die Dekohärenz in erster Linie durch das quantenmechanische Rauschen bedingt und wird von der System-Umwelt-Wechselwirkung dominiert. In diesem Fall ist der Dekohärenzverlauf durch den im Rahmen des Pfadintegralformalismus hergeleiteten Dekohärenzfaktor (3.87) des Einfluss-Funktional gegeben, also

$$\begin{aligned} \mu_{\tau_d < \tau_s}(t) &= \left(\exp \left[-\frac{4q_0^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' K(t' - t'') \right] \right)^2 = \exp \left[-\frac{8q_0^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' (t - t') K(t') \right] = \\ &= \exp \left[-\frac{8q_0^2}{\pi \hbar} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth\left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega\right) \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Der Dekohärenzverlauf wird dabei für kleine Zeiten zunehmend (mit steigendem q_0) nicht-exponentiell und geht im Extremfall $\tau_d \ll \tau_b \ll \tau_s \ll \tau_\gamma$ über in einen gaußförmigen Abfall der Form

$$\mu_{\tau_d < \tau_s}(t) \sim \exp[-(t/\tau_d)^2] \quad \text{mit} \quad \tau_d = \frac{\hbar}{2\sqrt{K(0)}} q_0^{-1} \stackrel{kT \gg \hbar \omega_0}{\longrightarrow} \frac{\hbar}{2\sqrt{\gamma \Gamma kT}} q_0^{-1}, \quad (6.23)$$

wobei das Fluktuations-Dissipations-Theorem $K(t) = kT\gamma(t) = kT\gamma\Gamma e^{-\Gamma t}$ für den Hochtemperaturlimes verwendet wurde. Die Dekohärenzzeit ist in diesem Fall nicht mehr invers quadratisch von der anfänglichen Separation q_0 abhängig, sondern nur noch linear. Als zusätzlicher Parameter taucht explizit die Abschneidefrequenz der spektralen Dichte auf. Die Bestimmung der Dekohärenzzeit durch alleinige Betrachtung des Diffusionsterms (erste Näherung) führt deshalb für große Separationen zu einer Überschätzung der Dekohärenzrate. Für mesoskopische ($\tau_s \ll \tau_d \ll \tau_\gamma$) und makroskopische Präparationen ($\tau_d \ll \tau_s$) unterscheiden sich folglich die Dekohärenzszenerien [91, 155].

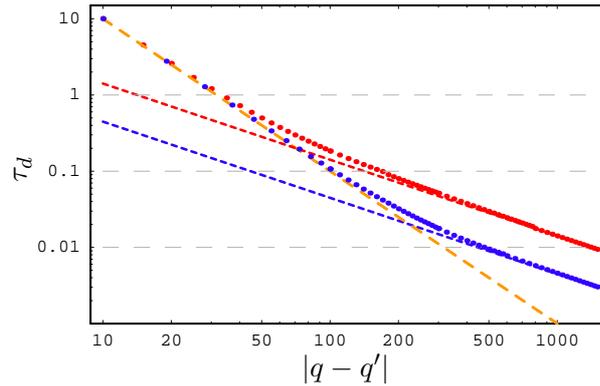


Abbildung 6.1: Dekohärenzzeitenskala τ_d im Regime $\tau_d \ll \tau_s$ in Abhängigkeit der räumlichen Separation $|q - q'|$. Für relativ kleine Werte von $|q - q'| = 2q_0$ und damit $\tau_d > \tau_b \approx \Gamma^{-1}$ fällt τ_d im Hochtemperaturlimes gemäß $\hbar^2/(2\gamma kT)|q - q'|^{-2}$ ab (gelb gestrichelt). Wird die Dekohärenzzeit sehr klein, $\tau_d \ll \tau_b$, so ist τ_d indirekt proportional zur Separation gemäß $\hbar/(\sqrt{\gamma\Gamma kT})|q - q'|^{-1}$. Hier: $\Gamma = 10\omega_0$ (rot), $\Gamma = 100\omega_0$ (blau). Übrige Parameter: $\gamma = 10^{-5}m\omega_0$, $kT = 50\hbar\omega_0$.

6.2.2 Einfluss des Bades in Form der spektralen Dichte

Die obigen Charakteristika der Dekohärenz sind universell im Sinne einer Unabhängigkeit von den Parametern des offenen Quantensystems. Der Einfluss der Umwelt wird durch das Wechselspiel zweier sich überlagernder Effekte bedingt: Einem statistischen Einfluss – zum Ausdruck gebracht durch die Badtemperatur T – und einem rein quantenmechanischen Effekt, in Form eines auch für $T \rightarrow 0$ nicht verschwindenden quantenmechanischen Rauschterms, der auch in einer Nulltemperatur-Umgebung Dekohärenz hervorrufen kann [149, 156]. Dessen Eigenschaften werden durch die spektrale Dichte des Bades bestimmt. An dieser Stelle soll deshalb kurz auf unterschiedliche Badspektren eingegangen werden. Dabei zeigt sich, dass der Effekt des Bades in Form der spektralen Dichte $J(\omega)$ sich nur durch einen quantitativen Unterschied der τ_d -Grenzwerte bemerkbar macht, nicht jedoch bei dem qualitativen Verlauf. In Abbildung 6.2 sind die Dekohärenzzeitenskalen für ein sub-Ohmsches und ein super-Ohmsches Bad mit spektraler Dichte gem. (3.44) dargestellt. Im Vergleich mit der in Abb. 6.1 dargestellten Dekohärenzzeit des Drude-Spektrum (3.39) fällt auf, dass in allen drei Fällen die Abhängigkeit der Dekohärenzzeit für große Separationen $|q - q'|$ indirekt proportional zu q_0 ist, und zwar gemäß

$$\text{für } \tau_d \ll \tau_b : \quad \tau_{d,n} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}\hbar}{2\sqrt{2\gamma\Gamma kT}} q_0^{-1} & \text{für super-Ohmsches Bad mit } n = 2, \\ \frac{\pi^{1/4}\hbar}{2\sqrt{2\gamma\Gamma kT}} q_0^{-1} & \text{für sub-Ohmsches Bad mit } n = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (6.24)$$

Allerdings ist auch der quantitative Unterschied zu beachten. So wird anhand dieser Abbildung deutlich, dass der Dekohärenzprozess in einem sub-Ohmschen Bad um Größenordnungen schneller ablaufen kann, als in einem super-Ohmschen Bad [16].

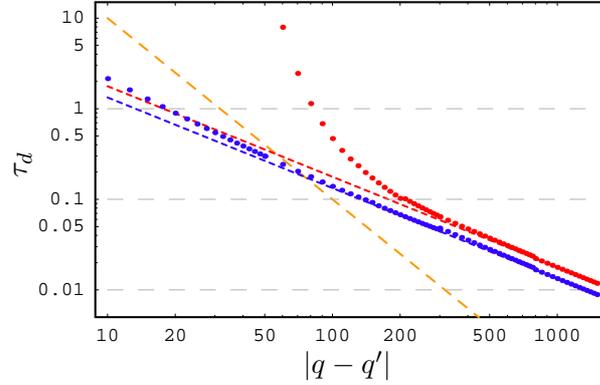


Abbildung 6.2: Dekohärenzzeitenskala in Abhängigkeit der räumlichen Separation $|q - q'| = 2q_0$ in Bädern mit spektraler Dichte $J_n(\omega) = \gamma\omega^n\Gamma^{1-n}e^{-\omega/\Gamma}$ für $n = 2$ (super-Ohmsches Bad) und $n = 1/2$ (sub-Ohmsches Bad). Sowohl im sub-Ohmschen Bad (blau) als auch im super-Ohmschen Bad (rot) zeigt sich wie für das Drude-Spektrum in Abb. 6.1 für große Werte von $|q - q'|$ ein Verlauf $\tau_d \sim |q - q'|^{-1}$. Parameter: $\gamma = 10^{-5}m\omega_0$, $\Gamma = 10\omega_0$, $kT = 50\hbar\omega_0$.

6.3 Systemspezifische Eigenschaften der Dekohärenzfunktion

Bisher wurde das Verhalten der Dekohärenzfunktion für die Grenzfälle $\tau_d \gg \tau_s$ und $\tau_d \ll \tau_s$ betrachtet – für die Bereiche also, wo die Dekohärenz auf wesentlich größeren oder wesentlich kleineren Zeitskalen τ_d abließ, als die interne Systemdynamik, charakterisiert durch τ_s . Nun wird es um den intermediären Bereich $\tau_d \approx \tau_s$ gehen, in dem systemspezifische Eigenschaften eine Rolle spielen. Zunächst soll die Dekohärenz einer makroskopischen Superposition zweier kohärenter Zustände untersucht werden. Dazu wird die Lösung der HPZ-Mastergleichung in Form der zeitabhängigen Wigner-Funktion für diesen Zustand explizit bestimmt und die Norm des Interferenzterms berechnet. Damit lässt sich der exakte Dekohärenzprozess im Vergleich zu obigen Näherungen bei hohen und tiefen Temperaturen untersuchen. Anschließend werden die speziellen nicht-Markovschen Effekte herausgearbeitet. Ein Vergleich dieser Dekohärenzfunktion mit Maßen im Orts- bzw. Impulsraum ergänzt dieses Unterkapitel.

6.3.1 Dekohärenz makroskopischer Superposition

In diesem Abschnitt wird die Lösung der HPZ-Mastergleichung für die Superposition zweier kohärenter Zustände bestimmt. Wie bereits in Abschnitt 4.2.3 erläutert, wird eine solche Präparation von im Ortsraum unterscheidbaren Wellenpaketen (bei hinreichend großer Separation) als *makroskopisch* bezeichnet, im Unterschied zu den, nur auf *mikroskopischer* Ebene der Energieniveaubesetzung unterscheidbaren, Superpositionen von Fock-Zuständen.

Zur Analyse des Dekohärenzprozesses wird nur der Interferenzanteil ρ_I der anfänglichen Dichtematrix

$$\rho(0) = \underbrace{\frac{|\alpha_+\rangle\langle\alpha_+| + |\alpha_-\rangle\langle\alpha_-|}{2(1 + e^{-2|\alpha_0|^2})}}_{\rho_c(0)} + \underbrace{\frac{|\alpha_-\rangle\langle\alpha_+| + |\alpha_+\rangle\langle\alpha_-|}{2(1 + e^{-2|\alpha_0|^2})}}_{\rho_I(0)} \quad (6.25)$$

herangezogen und dessen zeitliche Entwicklung betrachtet. Die zugehörige charakteristische Funktion für die Wahl des Parameters $|\alpha_0|^2 = q_0^2/4\sigma_0^2$ lautet dann folglich

$$\begin{aligned} \chi_I(\nu, \eta, 0) &= \frac{1}{1 + e^{-q_0^2/2\sigma_0^2}} e^{-\frac{\nu^2}{8\sigma_0^2} - \frac{\sigma_0^2\eta^2}{2\hbar^2} - \frac{q_0^2}{2\sigma_0^2}} \cosh \frac{\nu q_0}{2\sigma_0^2} = \\ &= \frac{1}{2(1 + e^{-q_0^2/2\sigma_0^2})} \left[e^{-\frac{1}{8\sigma_0^2}(\nu^2 - 2q_0)^2 - \frac{\sigma_0^2\eta^2}{2\hbar^2}} + e^{-\frac{1}{8\sigma_0^2}(\nu^2 + 2q_0)^2 - \frac{\sigma_0^2\eta^2}{2\hbar^2}} \right]. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Aus der charakteristischen Funktion $\chi_I(\nu, \eta, 0)$ einer anfänglichen Präparation kann mit Formel (6.27) die zeitabhängige Wigner-Funktion $W_I(q, p, t)$ bestimmt werden [90]:

$$W_I(q, p, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \tilde{\chi}(\eta_t, \nu_t, 0) \exp[i(\eta p + \nu q)/\hbar], \quad (6.27)$$

wobei sich die Funktion $\tilde{\chi}$ aus der anfänglichen charakteristischen Funktion mit substituierten Variablen $\eta_t = \dot{f}(t)\eta + \frac{1}{m}f(t)\nu$ und $\nu_t = m\dot{f}(t)\nu + f(t)\eta$ und multipliziertem Gaußschen Faktor in der Form

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_I(\eta_t, \nu_t, 0) &= \chi_I \left(\dot{f}(t)\eta + \frac{1}{m}f(t)\nu, m\dot{f}(t)\eta + f(t)\nu; 0 \right) \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2\hbar^2} (K_p(t)\eta^2 + 2K_{qp}(t)\eta\nu + K_q(t)\nu^2) \right] \end{aligned} \quad (6.28)$$

ergibt und die Koeffizienten $K_{p,q}(t)$ und $K_{qp}(t)$ über die Gleichungen (3.27)-(3.29) bestimmt sind. Zur Vereinfachung der Integration kann (6.26) aufgeteilt werden in

$$|\chi_I|^2 = |\chi_{12}|^2 + |\chi_{21}|^2 + \chi_{12}\chi_{21}^* + \chi_{12}^*\chi_{21}, \quad (6.29)$$

so dass beispielsweise die Wigner-Funktion der ersten Komponente durch

$$W_{12}(q, p, t) = \frac{N_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{-\frac{\langle p^2(t) \rangle}{2\hbar^2}\eta^2 - \frac{\langle q^2(t) \rangle}{2\hbar^2}\nu^2 - \frac{\langle \{q, p\} \rangle}{2\hbar^2}\eta\nu + a\eta + b\nu + i(\eta p + \nu q)/\hbar} \quad (6.30)$$

gegeben ist, mit $a = \frac{q_0}{2\sigma_0^2}\dot{f}(t)$ und $b = \frac{q_0}{2m\sigma_0^2}\dot{f}(t)$ und $N_0 = (2 + 2e^{q_0^2/2\sigma_0^2})^{-1}$. Die zeitabhängigen Korrelationen $\langle q^2(t) \rangle$, $\langle p^2(t) \rangle$ und $\langle \{q, p\}(t) \rangle$ können als Lösungen (3.24) der quantenmechanischen Langevin-Gleichung (3.11) erhalten werden. Der Term W_{21} der Wigner-Funktion ergibt sich analog. Durch Quadrieren $W_I^2 = W_{12}^2 + W_{21}^2 + 2W_{12}W_{21}$ und Integration über die Koordinaten p und q erhält man schließlich die Norm $\text{Tr}[\rho_I^2]$ des Interferenzterms

$$\tilde{\mu}_I(t) = 2\mu_0(t)N_0^2 \left\{ 1 + \exp \left[\frac{4\mu_0^2(t)}{\hbar^2} (a^2\langle q^2(t) \rangle - ab\langle \{q, p\}(t) \rangle + b^2\langle p^2(t) \rangle) \right] \right\} \quad (6.31)$$

die noch mit dem anfänglichen Wert $\tilde{\mu}_I(0) = \frac{1 - e^{q_0^2/\sigma_0^2}}{2(1 + e^{q_0^2/2\sigma_0^2})^2}$ auf Eins normiert werden kann. Daraus resultiert schließlich die Dekohärenzfunktion

$$\mu_I(t) = \mu_0(t)\tilde{N}_0 \left\{ 1 + \exp \left[\frac{\mu_0^2(t)q_0^2}{\hbar^2 m^2 \sigma_0^4} \left(m^2 \dot{f}_t^2 \langle q^2(t) \rangle - m f_t \dot{f}_t \langle \{q, p\} \rangle + \dot{f}_t^2 \langle p^2(t) \rangle \right) \right] \right\}, \quad (6.32)$$

wobei $\tilde{N}_0 = (1 + e^{q_0^2/\sigma_0^2})^{-1}$ und f_t die zeitabhängige Green-Funktion (3.23) der Lösung der quantenmechanischen Langevin-Gleichung bezeichnet. Das Verhalten dieser Funktion für unterschiedliche Dekohärenzscenario wird im Folgenden untersucht, und ein Vergleich mit den in Abschnitt 5.2 ermittelten Grenzfällen gegeben. Die Diskussion konzentriert sich dabei auf den Fall $\tau_d \approx \tau_s$, für den die systemspezifischen Eigenschaften des Quantensystems zum Tragen kommen.

6.3.1.1 Hochtemperatur-Umgebung

In diesem Abschnitt wird die Dekohärenz der makroskopischen Superposition für den Standardfall $\tau_b \ll \tau_s \ll \tau_\gamma$ für hohe Temperaturen untersucht, wobei die Dekohärenzzeit τ_d in der Größenordnung der Zeitskala der internen Systemdynamik τ_s liegen soll. Für $kT \gg \hbar\omega_0$ gehen die Funktionen (6.19) und (6.22) in

$$\mu_{\tau_d > \tau_s}(t) = e^{-(4\gamma kT q_0^2/\hbar^2)t} \quad \text{und} \quad \mu_{\tau_d < \tau_s}(t) = e^{-(8\gamma kT q_0^2/\hbar^2)t} \quad (6.33)$$

über. Der Verlauf der beiden Näherungslösungen ist jeweils exponentiell, wobei sich der Exponent lediglich um einen Faktor zwei unterscheidet. Aus Abbildung 6.3a geht hervor, dass die Dekohärenzfunktion (6.32) für kurze Zeiten $t < \tau_s$ der Funktion $\mu_{\tau_d < \tau_s}(t)$ folgt, um dann für große Zeiten $t \gg \tau_s$ um die Näherungslösung $\mu_{\tau_d > \tau_s}(t)$ zu oszillieren. Die Oszillationen im Verlauf der Dekohärenzfunktion sind bedingt durch die Rotation der Wigner-Funktion im Phasenraum (mit Frequenz $\omega_0 \sim \tau_s^{-1}$), die mit einem periodischen Wechsel zwischen Superpositionen im Orts- und Impulsraum verbunden ist. Als überlagernder Effekt kommt eine periodische Variation der Breite (*Breathing*) der beiden *Peaks* der Wigner-Funktion (vgl. Abb. (5.8)) hinzu, was den Überlapp und damit das Interferenzmuster verstärken kann und der Dekohärenz entgegenwirkt.

6.3.1.2 Niedrigtemperatur-Umgebung

In diesem Abschnitt wird die Dekohärenz der makroskopischen Superposition für den Standardfall $\tau_b \ll \tau_s \ll \tau_\gamma$ für tiefe Temperaturen untersucht, wobei die Dekohärenzzeit τ_d in der Größenordnung der Zeitskala der internen Systemdynamik τ_s liegen soll. Für $kT \ll \hbar\omega_0$ gehen die Funktionen (6.19) und (6.22) über in

$$\mu_{\tau_d > \tau_s}(t) = e^{-(2\gamma\omega_0 q_0^2/\hbar)t} \quad \text{und} \quad \mu_{\tau_d < \tau_s}(t) \sim \begin{cases} e^{-\frac{8\gamma\Gamma^2 q_0^2}{\pi\hbar}t^2} & \text{für } t \ll \tau_s, \\ t^{-\frac{8\gamma q_0^2}{\hbar\pi}} & \text{für } t \gg \tau_s. \end{cases} \quad (6.34)$$

Aus Abbildung 6.3b geht hervor, dass die Dekohärenzfunktion (6.32) für kurze Zeiten $t < \tau_s$ schnell gem. der Funktion $\mu_{\tau_d < \tau_s}(t)$ abfällt, um sich dann für große Zeiten $t \gg \tau_s$ wieder der Approximationslösung $\mu_{\tau_d > \tau_s}(t)$ anzunähern. Das Langzeitverhalten der Funktion $\mu_{\tau_d < \tau_s}(t)$ lässt sich durch ein Potenzgesetz der Form $\sim t^{-\gamma q_0^2}$ charakterisieren. Dieses Resultat lässt sich für ein freies Teilchen mit verschwindender anfänglicher Breite $\sigma_0^2 \rightarrow 0$ auch aus der Schwachkopplungsnaheung der HPZ-Mastergleichung gewinnen [157]. Eine charakteristische Dekohärenzzeit lässt sich dann nicht mehr angeben. Im Falle eines Oszillators folgt die Dekohärenzfunktion für mittlere Zeiten einem algebraischen Verlauf und geht erst für große Zeiten in einen exponentiellen Abfall über.

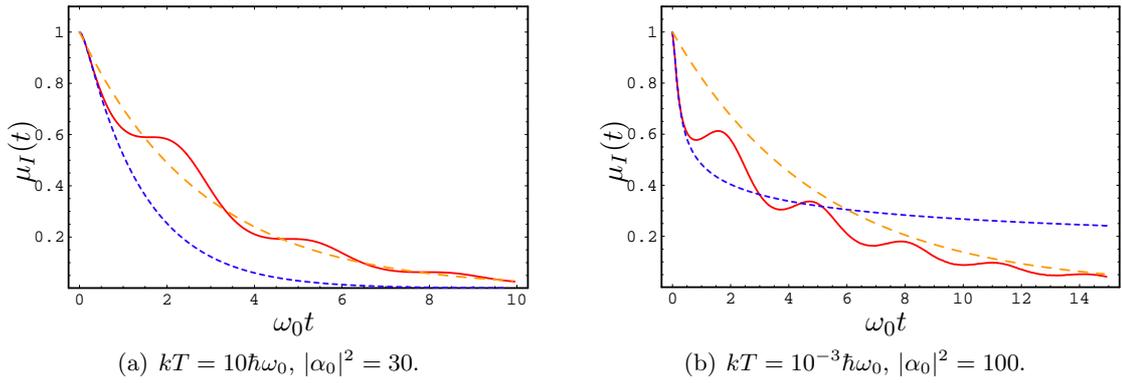


Abbildung 6.3: Zeitlicher Verlauf der normierten Purity $\mu_I(t)$ des Interferenzterms (6.32) (rote Linie) im Vergleich zu den Näherungslösungen des Wechselwirkungs-Regimes (blau gestrichelt) und des Regimes für $\tau_d \gg \tau_s$ (gelb gestrichelt). Die Oszillationen im Verlauf der Dekohärenzfunktion sind bedingt durch die Rotation der Wigner-Funktion im Phasenraum (mit Frequenz $\omega_0 \sim \tau_s^{-1}$), die verbunden ist mit einem periodischen Wechsel zwischen Superpositionen im Orts- und Impulsraum. Übrige Parameter: $\gamma = 10^{-5}m\omega_0$, $\Gamma = 10\omega_0$.

6.3.1.3 Nicht-Markovsche Einflüsse

Die Betrachtung von Dekohärenzprozessen im Rahmen von Born-Markovschen Mastergleichungen ist so lange gerechtfertigt, wie die Zeitskala der Badkorrelationen τ_b die bei weitem kleinste Zeitskala ist. Da sich die Dekohärenzzeit τ_d indirekt proportional zur Temperatur T und zur quadratischen Separation q_0^2 verhält, läuft der Dekohärenzprozess für hohe Temperaturen und makroskopische Separationen unter Umständen auf der Größenordnung der Badkorrelationen ab. In diesem Fall sind nicht-Markovsche Einflüsse von Relevanz.

Der graduelle Übergang vom Markovschen Regime zum nicht-Markovschen Regime kann durch die Variation des Verhältnisses von Dekohärenzzeit zu Badkorrelationszeit in Form der inversen Abschneidefrequenz Γ^{-1} untersucht werden. Dabei kann also zum einen die Dekohärenzzeit durch die Variation insbesondere des Parameters q_0 bzw. $|\alpha_0| = q_0/2\sigma_0$ angepasst werden, oder zum anderen die Abschneidefrequenz Γ variiert werden.

Ein solcher Wechsel vom Markovschen ($\tau_d \gg \tau_b$) zum nicht-Markovschen Regime ($\tau_d \ll \tau_b$) ist in Abbildung 6.4 anhand des zeitlichen Verlaufs von $\mu_I(t)$, $\mu_{\tau_d > \tau_s}(t)$ und $\mu_{\tau_d < \tau_s}(t)$ dargestellt. Zunächst kann allein anhand der Betrachtung der Zeitachse von Abbildungen 6.4(a)-(c) festgestellt werden, dass eine Verringerung von Γ bei sonst gleichen Parametern zu einer Verlangsamung der Dekohärenz führt. Beispielsweise ist in Abb.(c) für $\Gamma = 2\omega_0$, wo ein Großteil der Badmoden in der Nähe der Oszillatorfrequenz liegt, die Dekohärenzzeit etwa fünfmal größer als in Abb.(a) für $\Gamma = 100\omega_0$. Noch entscheidender sind allerdings die qualitativen Änderungen im Verlauf der drei Dekohärenzmaße $\mu_I(t)$, $\mu_{\tau_d > \tau_s}(t)$ und $\mu_{\tau_d < \tau_s}(t)$. In den Abbildungen (a) bis (d) folgt die Norm des Interferenzterms $\mu_I(t)$ dabei jeweils $\mu_{\tau_d < \tau_s}(t)$, da die Dekohärenzzeit unterhalb der charakteristischen Systemzeit $\tau_s \sim \omega_0^{-1}$ liegt. Einen Vergleich zum Fall $\tau_d \gg \tau_s$ liefert Abbildung (d), wo $\mu_I(t)$ entsprechend dem Verlauf von $\mu_{\tau_d > \tau_s}(t)$ folgt.

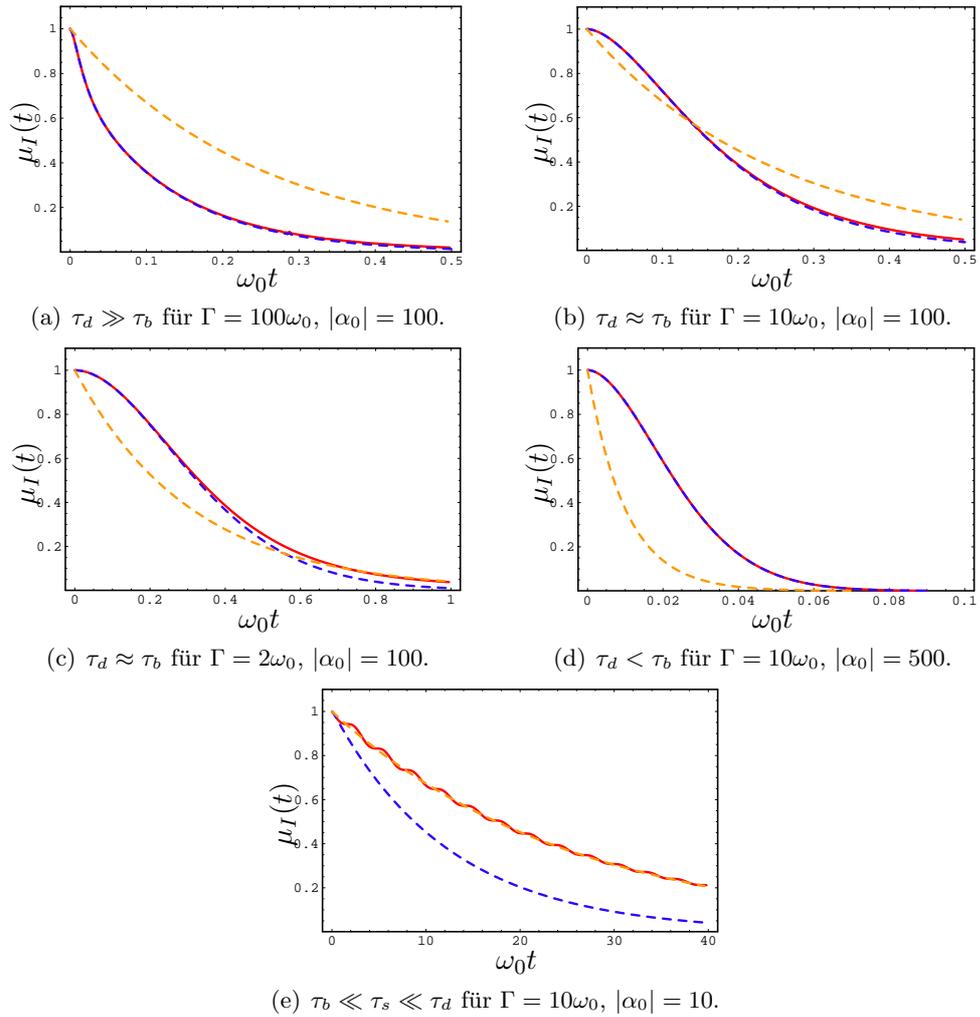


Abbildung 6.4: Zeitlicher Verlauf von $\mu_I(t)$ (rot), $\mu_{\tau_d > \tau_s}(t)$ (gelb) und $\mu_{\tau_d < \tau_s}(t)$ (blau). Die Abbildungen (a) bis (d) zeigen den Wechsel vom Markovschen ($\tau_d \gg \tau_b$) zum nicht-Markovschen Regime ($\tau_d \ll \tau_b$), bezogen auf das Verhältnis der Dekohärenzzeit τ_d zur Badkorrelationszeit $\tau_b \approx \Gamma^{-1}$. Die Dekohärenzfunktion $\mu_I(t)$ folgt dabei jeweils $\mu_{\tau_d < \tau_s}(t)$, da die Dekohärenzzeit unterhalb der charakteristischen Systemzeit $\tau_s \sim \omega_0^{-1}$ liegt. Einen Vergleich zum Fall $\tau_d \gg \tau_s$ liefert Abbildung (d), wo $\mu_I(t)$ entsprechend dem Verlauf von $\mu_{\tau_d > \tau_s}(t)$ folgt. Parameter: $\gamma = 10^{-5}m\omega_0$, $kT = 10\hbar\omega_0$.

6.3.1.4 Rekurrenzverhalten im Out-of-Resonance Regime

Die bisherige Betrachtung nicht-Markovscher Einflüsse erfolgte über die Annäherung von τ_d und τ_b , wobei die Grenzfälle $\tau_d \gg \tau_s$ und $\tau_d \ll \tau_s$ unterschieden wurden. Eine weitere Besonderheit ergibt sich, wenn zusätzlich die Bedingung $\tau_b \gg \tau_s$ erfüllt ist, was dann der Fall ist, wenn die Oszillatorfrequenz wesentlich größer ist als die Abschneidefrequenz des Bades. In diesem Fall ist von *Out-of-Resonance*-Bädern die Rede. Die Relaxationszeit $\tau_\gamma \sim \gamma\omega_0^2/\Gamma^2$ hängt ebenfalls von der Abschneidefrequenz ab und ist in diesem Fall nach wie vor die größte Zeitskala, so dass der Anteil μ_c einer Superposition kohärenter Zustände für Zeiten $t \ll \tau_\gamma$ nahezu unverändert bleibt. Der Interferenzanteil zeigt hingegen ein besonderes Verhalten, das nur unzureichend durch die beiden bisherigen Grenzfälle für $\tau_d \gg \tau_s$ und $\tau_d \ll \tau_s$ beschrieben werden kann. Die Abbildung 6.5 zeigt ein Beispiel. Zunächst erfolgt ein schneller Abfall

der Norm $\mu_I(t)$ auf sehr kleine Werte, was nach wie vor gut durch den Grenzfall $\mu_{\tau_d < \tau_s}$ beschrieben wird. Allerdings ergibt sich nach etwa einer halben Systemperiode $\omega_0 t \approx \pi/2$ ein erneuter starker Anstieg der Dekohärenzfunktion (*Rekurrenz*) auf einen Maximalwert, der durch den Wert der Funktion $\mu_{\tau_d > \tau_s}$ zu diesem Zeitpunkt bestimmt wird. Obwohl die beiden Zeitskalen der Grenzfälle in diesem Fall sehr weit auseinanderliegen, geben nur beide zusammen ein akkurates Bild über den Dekohärenzprozess in diesem Regime. Die zugehörige WCL-Mastergleichung (3.130) ist in diesem Fall nicht vom Lindblad-Typ und weist teilweise negative Werte der Koeffizienten $\tilde{\gamma}_\uparrow(t)$ und $\tilde{\gamma}_\downarrow(t)$ auf.

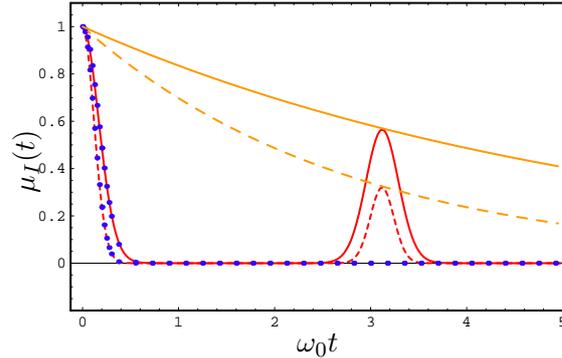


Abbildung 6.5: Dekohärenzprozess in einem Out-of-Resonance-Bad mit $\Gamma = 0.01\omega_0$ zeigt partielle periodische Wiederkehr (Rekurrenz) der Kohärenz. Der Verlauf der Purity $\mu_I(t)$ (rot) wird nur für kurze Zeiten mit der Näherung $\mu_{\tau_d > \tau_s}(t)$ (blau gepunktet) gut beschrieben. Der erneute Anstieg der Dekohärenzfunktion ist durch den Wert der Funktion $\mu_{\tau_d > \tau_s}$ zu diesem Zeitpunkt begrenzt. Parameter $\gamma = 0.1m\omega_0$ (gestrichelte Linien), $\gamma = 0.05m\omega_0$ (durchgezogene Linien) und $T = 10\hbar\omega_0/k$, $q_0 = 30\sigma_0$.

6.3.1.5 Vergleich der unterschiedlichen Dekohärenzmaße

Bisher wurde in diesem Kapitel Dekohärenz anhand der Norm $\mu_I = \text{Tr}[\rho_I^2(t)]$ des Interferenzterms $\rho_I(t)$ untersucht. Dabei handelt es sich um ein Dekohärenzmaß im Phasenraum, das die Dynamik im Orts- und Impulsraum gleichermaßen erfasst. In der Literatur finden sich häufig auch andere Maße, die allein die Wahrscheinlichkeitsdichte im Orts- oder Impulsraum in Betracht ziehen. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass diese Maße nur im Grenzfall $\tau_s \ll \tau_d \ll \tau_\gamma$ die gleichen Ergebnisse wie das oben verwendete Phasenraummaß liefern bzw. nur das Langzeitverhalten richtig beschreiben. Die Dekohärenzzeitkala kann mitunter wesentlich über- bzw. auch unterschätzt werden, je nachdem ob sich das Interferenzmuster, zunächst im Ortsraum oder im Impulsraum manifestiert. Einige Ergebnisse in der Literatur [153, 158, 159, 160] sind deshalb kritisch zu betrachten. Zunächst sollen die Dekohärenzmaße für den Orts- und Impulsraum eingeführt werden. Im Falle einer Superposition von kohärenten Zuständen mit entsprechender charakteristischer Funktion (5.66) ergibt sich aus den Gleichungen (6.6) und (6.7) die in einen klassischen Anteil und einen Interferenzterm aufgeteilte Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P_q(q, t) = P_{\text{coh}}(q, t) + P_{\text{int}}(q, t) = P_1(q, t) + P_2(q, t) + P_I(q, t) \cos \theta(q, t). \quad (6.35)$$

Dabei entspricht $P_{\text{coh}}(q, t)$ der Wahrscheinlichkeitsdichte eines gleichgewichteten statistischen Gemisches zweier kohärenter Zustände

$$P_{\text{coh}}(q, t) = \frac{1}{N\sqrt{2\pi\langle q^2(t) \rangle}} \left\{ \exp \left[-\frac{(q - \langle q(t) \rangle)^2}{2\langle q^2(t) \rangle} \right] + \exp \left[-\frac{(q + \langle q(t) \rangle)^2}{2\langle q^2(t) \rangle} \right] \right\} \quad (6.36)$$

mit Normierung $N = 2(1 + e^{-q_0^2/2\sigma_0^2})$ und Mittelwert $\langle q(t) \rangle = q_0 \dot{f}(t)$. Das quantenmechanische Interferenzmuster im Ortsraum wird durch

$$\begin{aligned} P_{\text{int}}(q, t) &= \frac{1}{\tilde{N}\sqrt{2\pi\langle q^2(t) \rangle}} \exp \left[-\frac{q^2 + \hbar^2 b^2(t)}{2\langle q^2(t) \rangle} \right] \cos \left(\frac{\hbar b(t)}{\langle q^2(t) \rangle} q \right) = \\ &= 2\sqrt{P_1(q, t)P_2(q, t)} \exp \left[-\frac{K_q(t)}{\langle q^2(t) \rangle} \frac{q_0^2}{2\sigma_0^2} \right] \cos \left(\frac{\hbar b(t)}{\langle q^2(t) \rangle} q \right) \end{aligned} \quad (6.37)$$

mit $\tilde{N} = e^{q_0^2/2\sigma_0^2} N/2$ und $b(t) = \frac{q_0}{2m\sigma_0^2} \dot{f}(t)$ beschrieben. Als Dekohärenzmaß wird nun der Interferenzterm zum kohärenten Anteil ins Verhältnis gesetzt. Der Dekohärenzfaktor $\Delta_q(t)$ ist definiert als Verhältnis des Koeffizienten P_I des Kosinus-Terms in (6.35) zum zweifachen geometrischen Mittel der Terme P_1 and P_2 , also

$$\Delta_q(t) = \frac{P_I(q, t)}{2\sqrt{P_1(q, t)P_2(q, t)}} = \frac{P_I(q=0, t)}{P_{\text{coh}}(q=0, t)} = \exp \left[-\frac{K_q(t)}{\langle q^2(t) \rangle} \frac{q_0^2}{2\sigma_0^2} \right]. \quad (6.38)$$

Der Dekohärenzfaktor misst folglich die Amplitude P_I in Einheiten des kohärenten Anteils P_{coh} . Aufgrund der für alle Zeiten gültigen Normierung $\int dq P(q, t) = 1$ verschwindet der Anteil P_{int} während der Dekohärenz natürlich nicht, sondern *zerfließt* lediglich im Ortsraum. Die Anteile $\int dq P_{\text{coh}}(q, t) = (1 + e^{-q_0^2/2\sigma_0^2})^{-1}$ und $\int dq P_{\text{int}}(q, t) = (1 + e^{q_0^2/2\sigma_0^2})^{-1}$ nähern sich aber mit zunehmender Separation q_0 den Werten 1 bzw. 0 an. Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsdichten im Impulsraum verläuft analog, so dass sich die Anteile von $P_p(p, t) = P_{\text{coh}}(p, t) + P_{\text{int}}(p, t)$ ergeben zu:

$$P_{\text{cl}}(p, t) = \frac{\exp \left[-\frac{(p - \langle p(t) \rangle)^2}{2\langle p^2(t) \rangle} \right] + \exp \left[-\frac{(p + \langle p(t) \rangle)^2}{2\langle p^2(t) \rangle} \right]}{N\sqrt{2\pi\langle p^2(t) \rangle}} \quad \text{mit} \quad \langle p(t) \rangle = mq_0 \dot{f}(t), \quad (6.39)$$

$$P_{\text{int}}(p, t) = \frac{\exp \left[-\frac{p^2 + \hbar^2 a^2(t)}{2\langle p^2(t) \rangle} \right]}{\tilde{N}\sqrt{2\pi\langle p^2(t) \rangle}} \cos \left(\frac{\hbar a(t)}{\langle p^2(t) \rangle} p \right) \quad \text{mit} \quad a = \frac{q_0}{2\sigma_0^2} \dot{f}(t). \quad (6.40)$$

Werden die beiden Anteile wiederum nach obigen Muster in Beziehung gesetzt so ergibt sich als Dekohärenzfaktor im Impulsraum

$$\Delta_p(t) = \exp \left[-\frac{K_p(t)}{\langle p^2(t) \rangle} \frac{q_0^2}{2\sigma_0^2} \right]. \quad (6.41)$$

Beide Dekohärenzmaße stimmen im Regime $\tau_s \ll \tau_d \ll \tau_\gamma$ überein. In anderen Regimen können sich aber mitunter Abweichungen um einige Größenordnungen ergeben. Dies soll im Folgenden kurz diskutiert werden. Die Aussagekraft der insbesondere in den Arbeiten von Ford, Lewis and O'Connell [153, 158, 159] verwendeten Dekohärenzfaktors (6.38) wurde bereits in kürzlich erschienene Arbeiten durch Ambegaokar und Gobert [161, 162] bezweifelt. Letztere argumentierten, dass der Ausdruck (6.38) durch die Quotientenbildung nicht nur die Abnahme des Interferenzmusters, sondern auch die drastische anfängliche Zunahme von

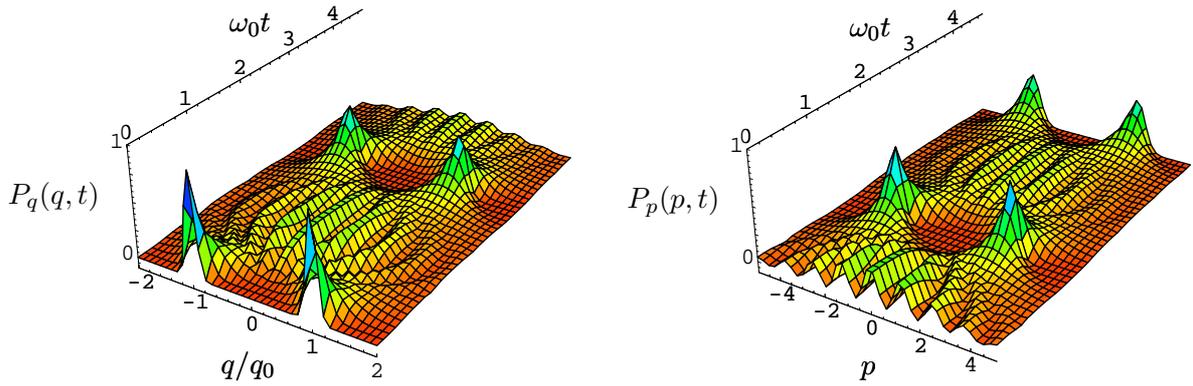
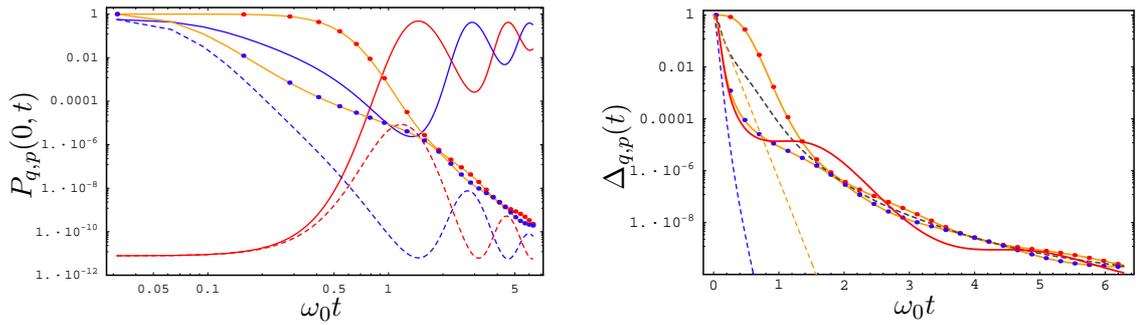


Abbildung 6.6: Evolution der Wahrscheinlichkeitsdichten im Orts- und Impulsraum einer anfänglichen Cat-State-Superposition mit Parameter $|\alpha| = \frac{q_0}{2\sigma_0}$. Das Interferenzmuster ist zunächst nur im Impulsraum sichtbar und baut sich dann erst im Zuge der Rotation im Phasenraum auch im Ortsraum auf. Die Dekohärenz findet also mitunter schon im Impulsraum statt – ein Dekohärenzmaß im Ortsraum unterschätzt deshalb in diesen Fällen die Dekohärenz.



(a) Zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichten $P_q(q=0, t)$ (rot) und $P_p(p=0, t)$ (blau) jeweils getrennt nach den Anteilen P_{coh} (durchgezogene Linien) und P_{inf} (gestrichelte Linien).

(b) Dekohärenzfunktionen $\Delta_q(t)$ und $\Delta_p(t)$ im Orts- bzw. Impulsraum (gelbe Linien mit roten bzw. blauen Punkten) im Vergleich zur Norm $\sqrt{\mu_i(t)}$ des Interferenzterms (rote Linie).

Abbildung 6.7: Vergleich unterschiedlicher Dekohärenzmaße. Die zeitliche Entwicklung der Interferenzanteile P_{inf} der Wahrscheinlichkeitsdichten $P_{q,p}(0, t)$ am Ursprung spiegelt sich nicht in dem Verhalten der Dekohärenzfunktion $\Delta_q(t)$ im Ortsraum wieder. Da bei der gewählten Superposition das Interferenzmuster zunächst im Impulsraum erscheint, ist die Funktion $\Delta_p(t)$ für $\omega_0 t \leq \pi/4$ das bessere Dekohärenzmaß und stimmt gut mit der Norm $\sqrt{\mu_i(t)}$ überein. Der nahezu waagrechte Verlauf der Purity um $\omega_0 t \approx \pi/4$ in Abb. (b) ist Ausdruck der geringen Änderung in P_{inf} (Minima bzw. Maxima) während dieser Zeitspanne. Parameter: $q_0 = 5\sigma_0$, $T = \hbar\omega_0/k$, $\gamma = 0.25m\omega_0^2$, $\Gamma = 10\omega_0$.

P_{coh} am Koordinatenursprung $q = 0$ beschreibt, die im Falle eines freien Teilchens von einem Zerfließen der Wellenpakete herrührt und im Falle des gedämpften Oszillators durch die Bewegung der kohärenten Zustände zum Zentrum. Eine Vergrößerung des Überlapps der Wellenpakete verstärkt auch das Interferenzmuster und wirkt der Dekohärenz entgegen. In der Abbildung 6.7a ist zu erkennen, dass der Interferenzterm P_{int} im Ortsraum (bei $q = 0$) ein Maximum nach der Zeit $t \approx \tau_s$ erreicht, obwohl die Dekohärenzfunktion $\Delta_q(t)$ zu diesem Zeitpunkt schon auf einen Wert unter 10^{-4} abgefallen ist. Die Funktion $\Delta_q(t)$

überschätzt somit die Abschwächung des Dekohärenzmusters im Ortsraum, da der zur gleichen Zeit stattfindende Anstieg des Anteils P_{coh} im Nenner des Ausdrucks (6.38) zu einer Verringerung des Quotienten beiträgt. Da das anfängliche Interferenzmuster zunächst im Impulsraum vorhanden ist, wie aus Abb. 6.6 zu erkennen ist, ist die Dekohärenz zunächst auch dort „wirksam“. Die durch die Funktion $\Delta_p(t)$ geschätzte Dekohärenzzeitkala in Abb. 6.7a ist deshalb sogar noch einmal um einiges kürzer als die sich durch $\Delta_q(t)$ ergebende. Außerhalb des Schwachkopplungslimes ist die Verwendung der obigen Dekohärenzmaße deshalb mit Vorsicht zu genießen, da die jeweilige Zeitskala des Dekohärenzprozesses von der Art der anfänglichen Superposition abhängig ist. Die Verwendung geeigneter Phasenraummaße wie der Norm $\mu_I = \text{Tr}[\rho_I^2(t)] \sim \int dqdp W_I^2(q, p, t)$ vermeidet dieses Problem, indem sowohl durch die Quotientenbildung hervorgerufene Überlagerung der Effekte vermieden wird als auch die anfängliche Superposition korrekt erfasst wird.

6.3.1.6 Dekohärenz ohne Dissipation im QBM-Modell?

Neben dem eben beschriebenen Problem der Definition von Dekohärenzmaßen in unterschiedlichen Basisdarstellungen, die außerhalb des Regimes $\tau_s \ll \tau_d \ll \tau_\gamma$ für Abweichungen der Dekohärenzzeitkala um einige Größenordnungen führen kann, ergibt sich ein weiteres Problem durch die Wahl der Präparation des Anfangszustands. Bisher wurden reine Anfangszustände betrachtet. Ford, Lewis und O’Connell [153, 158] leiteten nun unter der Annahme eines anfänglichen thermischen Zustands (mit Maxwell-Boltzmann-Verteilung der anfänglichen Impulse) im Rahmen des QBM-Modells ab, dass Dekohärenz auch ohne gleichzeitige Dissipation auftreten könnte. Die resultierende Dekohärenzzeit sei demnach unabhängig vom Kopplungsparameter γ und Dekohärenz trete auch für $\gamma \rightarrow 0$ auf und mitunter zeige sich Dekohärenz nur im Ortsraum, nicht jedoch im Impuls- oder Phasenraum [154]. Da dieses Ergebnis im scheinbaren Widerspruch zu den im Kapitel 6.2 abgeleiteten Zeitskalen steht, wird im Folgenden kurz kritisch auf die Argumentation obiger Autoren eingegangen. Bisher wurden als Anfangszustände reine Zustände mit Purity $\mu(0) = 1$ gewählt. Da reine Zustände eine idealisierende Annahme darstellen die experimentell nur schwierig zu realisieren ist, wurde von obigen Autoren ein Anfangszustand mit thermischer Verteilung der in den zeitabhängigen Anteil der Wellenfunktion $\psi_p(q) = \psi_{\pm q_0}(q)e^{ipq}$ eingehenden Impulse verwendet. Zum Zeitpunkt $t = 0$ liegt somit ein gemischter Zustand mit einer Impuls-Unschärfe in der Größenordnung von $\lambda_{\text{th}}^{-1} = \sqrt{mkT}$ vor, dessen Dichtematrix durch

$$\rho^{\text{th}}(q, q', 0) = \frac{\lambda_{\text{th}}}{\sqrt{2\pi}} \int dp e^{-\frac{p^2 \lambda_{\text{th}}}{2} + ip(q-q')} |\psi_p\rangle \langle \psi_p| = e^{-\frac{(q-q')^2}{2\lambda_{\text{th}}^2}} \rho_{\pm q_0}(q, q', 0) \quad (6.42)$$

gegeben ist, wobei $\rho_{\pm q_0}(q, q', 0)$ die Dichtematrix des bisher verwendeten reinen Anfangszustands darstellt. Die von den Autoren daraus abgeleitete Dekohärenzzeit von $\tau_d^* = \sqrt{\frac{m}{kT}} \frac{\sigma_0^2}{q_0}$ ist offensichtlich unabhängig von γ . Allerdings ist aus dem Ausdruck (6.42) ersichtlich, dass diese Abschwächung der Nichtdiagonalelemente kein dynamischer Prozess ist, sondern vielmehr schon durch die Wahl eines thermischen Anfangszustand vorgegeben wurde. In Abbildung 6.8 ist ein Beispiel für Zustand (6.42) dargestellt. Wie bereits in einem Kommentar von Gobert et al. [161] klargestellt, sollte durch eine nicht-perfekte Präparation hervorgerufene Abschwächung des Interferenzterms der anfänglichen Superposition nicht mit dem Dekohärenzprozess verwechselt werden. Letzterer ist ein dynamischer Prozess, der im Falle der

durch die HPZ-Mastergleichung beschriebenen Quanten-Brownschen Bewegung nur für $\gamma > 0$ auftritt. Für $\gamma = 0$ ist die zeitliche Entwicklung unitär und es findet keine Dekohärenz statt. Unabhängig davon, ob es sich bei dem anfänglichen Zustand um einen kohärenten Zustand, einen Besetzungszustand oder eine sonstige beliebige Superposition handelt – Dekohärenz ist im QBM-Modell immer mit Dissipation verbunden.

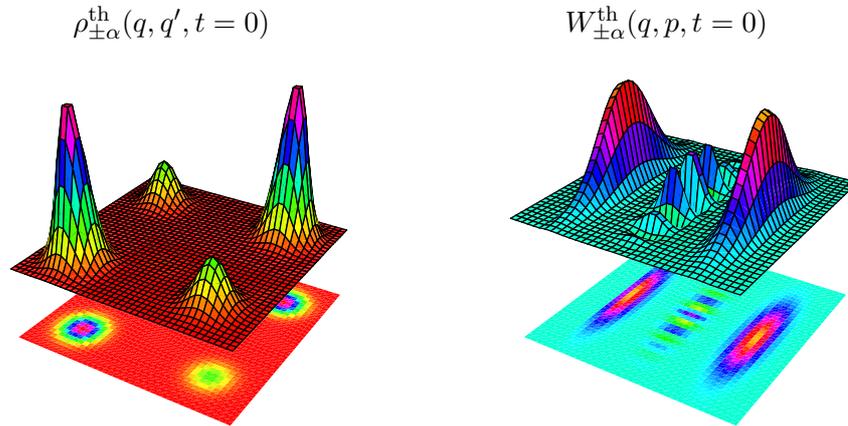


Abbildung 6.8: *Beispiel für einen thermischen Anfangszustand (6.42) einer Cat-State-Superposition zweier kohärenter Zustände $|\psi_{\alpha}\rangle$. Die Nicht-Diagonalelemente der Dichtematrix im Ortsraum (linke Seite) und das oszillierende Interferenzmuster der Wigner-Funktion im Phasenraum (rechte Seite) sind bereits im Anfangszustand abgeschwächt.*

6.3.2 Dekohärenz mikroskopischer Superpositionen

Im Folgenden soll die Dekohärenz mikroskopischer Superpositionen anhand der zeitliche Entwicklung einzelner Dichtematrixelemente in der Fockraumdarstellung untersucht werden. Mikroskopische Superpositionen in Form der Überlagerungen von Grundzustand und ersten bzw. zweiten angeregten Zustand wurden bereits in Kapitel 6 eingeführt. Die zeitliche Entwicklung der Superposition $|0\rangle + |1\rangle$ kann für tiefe Temperaturen als effektives zwei Niveau-Systems aufgefasst werden. Ein Vergleich mit der Bloch-Mastergleichung eines Zweiniveau-Systems stellt deshalb eine einfache Möglichkeit dar, nicht-Markovsche Effekte in einem Qubit-System zu untersuchen. Anschließend wird die Dynamik einer mikroskopischen Superposition in Form von $|0\rangle + |2\rangle$ mit der makroskopischen Superposition $|\alpha_{+}\rangle + |\alpha_{-}\rangle$ zweier kohärenter Zustände verglichen, die für geeignet gewählten Parameter $|\alpha_0|$ eine große augenscheinliche Ähnlichkeit im Fock- und im Phasenraum aufweisen. Dabei soll die Frage geklärt werden, ob sich die Dekohärenz der Nichtdiagonalelemente in der Orts- bzw. Phasenraumdarstellung in der entsprechenden Dynamik der Nichtdiagonalelemente in Fockraumdarstellung widerspiegelt.

6.3.2.1 Effektives Zwei-Niveau-System versus Qubit-Dekohärenz

Bisher wurde der Dekohärenzprozess anhand der Norm (Purity) des Interferenzterms untersucht. Im Falle einer Superposition von Grundzustand und einem beliebigen angeregten Zustand $|0\rangle + |n\rangle$ ergibt sich diese mit $\alpha_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)e^{-\gamma t/2}$ zu

$$\mu_{I_{0n}}(t) = \frac{1}{4\pi} \int dpdq \left[\langle 0|\hat{D}(\alpha_t)|n\rangle + \langle n|\hat{D}(\alpha_t)|0\rangle \right]^2 = \mu_0^{n+1}(t)e^{-n\gamma t}. \quad (6.43)$$

Für $T \rightarrow 0$ bzw. $\mu_0 \approx \mu_\infty \approx 1$ ist folglich $\mu_{i_{0n}}(t) \approx \frac{1}{2}e^{-n\gamma t}$ und damit $\tau_d = (n\gamma)^{-1}$ ein Maß für die Zeitskala auf der Purity der Nichtdiagonalelemente verschwindet [163, 143]. Je höher einer der überlagerten Zustände angeregt ist, desto schneller verläuft folglich die Dekohärenz. Die Dynamik einzelner Dichtematrixelemente erhält man aus der zeitabhängigen charakteristischen Funktion $\chi(\alpha, t)$ über

$$\hat{\rho}_{nm}(t) = \int \frac{d^2\alpha}{2\alpha} \chi(\alpha, t) \langle n|\hat{D}(\alpha)|m\rangle, \quad (6.44)$$

wobei für $\langle n|\hat{D}(\alpha)|m\rangle$ durch die Relationen (5.60) für symmetrische Ordnung gelten. Beispielsweise hat die zeitabhängige charakteristische Funktion für die Relaxation aus dem anfänglichen Grundzustand $\hat{\rho}(0) = |0\rangle\langle 0|$ die Form

$$\chi(\alpha, t) = \exp \left[|\alpha|^2/2 - \frac{\langle a^2(t) \rangle}{2} \alpha^2 - \frac{\langle a^{\dagger 2}(t) \rangle}{2} \alpha^{*2} - \langle a(t)a^\dagger(t) \rangle |\alpha|^2 \right], \quad (6.45)$$

aus der sich dann die Zeitabhängigkeit der ersten beiden Niveaus $\rho_{00}(t)$ und $\rho_{11}(t)$ auf einfache Weise zu

$$\rho_{00}(t) = \left[\langle aa^\dagger \rangle^2 - \langle a^2 \rangle \langle a^{\dagger 2} \rangle \right]^{-1/2}, \quad (6.46)$$

$$\rho_{11}(t) = \rho_{00}(t) - \langle aa^\dagger \rangle \left[\langle aa^\dagger \rangle^2 - \langle a^2 \rangle \langle a^{\dagger 2} \rangle \right]^{-3/2} \quad (6.47)$$

ergibt, wobei die Momente der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren über

$$\langle aa^\dagger(t) \rangle = \frac{m\omega_0}{2\hbar} \langle x^2(t) \rangle + \frac{\langle p^2(t) \rangle}{2m\hbar\omega_0} + \frac{1}{2}, \quad (6.48)$$

$$\langle a^2(t) \rangle \langle a^{\dagger 2}(t) \rangle = \left(\frac{m\omega_0}{2\hbar} \langle x^2(t) \rangle - \frac{\langle p^2(t) \rangle}{2m\hbar\omega_0} \right)^2 + \left(\frac{m}{2\hbar} \frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle \right)^2 \quad (6.49)$$

mit den Lösungen der quantenmechanischen Langevin-Gleichung (3.24) zusammenhängen. Der für $T > 0$ auftretende Verlust an höhere Niveaus, $\rho_{\text{leak}} = 1 - \rho_{00}(t) - \rho_{11}(t)$, wird als *Leakage* bezeichnet. Für Superpositionen des Grundzustands mit höheren Niveaus ergeben sich kompliziertere Ausdrücke, die mit Hilfe des Ausdrucks (5.50) für die Purity des Grundzustands vereinfacht werden können. Aus der Lösung (5.36) der Born-Markovschen Mastergleichung (2.14) erhält für die anfängliche Superposition $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ die folgende Entwicklung der niedrigsten Dichtematrixelemente:

$$\rho_{00}(t) = \frac{2\mu_0(t)}{[1 + \mu_0(t)]^2} [1 + \mu_0(t) (1 - e^{-\gamma t})], \quad (6.50)$$

$$\rho_{11}(t) = \frac{2\mu_0(t)}{[1 + \mu_0(t)]^3} [1 - \mu_0^2(t) - \mu_0(t)e^{-\gamma t}(1 - 3\mu_0(t))], \quad (6.51)$$

$$\rho_{10}(t) = \frac{2\mu_0(t)}{[1 + \mu_0(t)]^2} e^{-i\omega_0 t - \gamma t/2}, \quad (6.52)$$

$$\rho_{\text{leak}}(t) = 1 - \rho_{00}(t) - \rho_{11}(t), \quad (6.53)$$

mit den stationären Werten für $\rho_{00} = 1 - e^{-\beta\hbar\omega_0}$, $\rho_{11} = \rho_{00}e^{-\beta\hbar\omega_0}$ und $\rho_{01} = \rho_{10} = 0$ und $\rho_{\text{leak}} = e^{-2\beta\hbar\omega_0}$. Für tiefe Temperaturen lässt sich die Dynamik mit der eines Qubit-Systems vergleichen. Die Lösung der Bloch-Mastergleichung (2.19) ist bereits in Gl. (2.20) angegeben und lautet explizit

$$\rho_{00}^{2\text{LS}}(t) = \rho_{00}(0)e^{-\gamma t/\mu_\infty} + \frac{1}{1 + e^{-\beta\hbar\omega_0}} \left(1 - e^{-\gamma t/\mu_\infty}\right), \quad (6.54)$$

$$\rho_{11}^{2\text{LS}}(t) = 1 - \rho_{00}(t), \quad (6.55)$$

$$\rho_{10}^{2\text{LS}}(t) = \rho_{10}(0)e^{-i\omega_0 t - \gamma t/2\mu_\infty}, \quad (6.56)$$

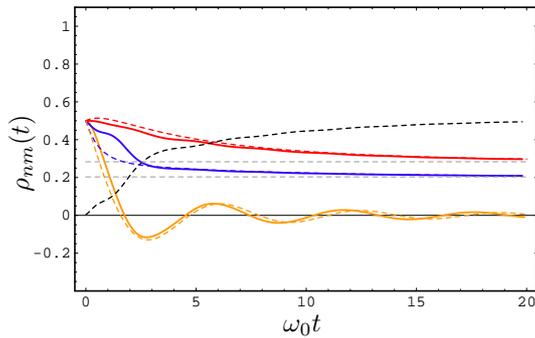
mit den stationären Werten $\rho_{00}^{2\text{LS}} = [1 + e^{-\beta\hbar\omega_0}]^{-1}$ und $\rho_{11}^{2\text{LS}} = [1 + e^{\beta\hbar\omega_0}]^{-1}$. Die Relaxationszeiten von Diagonal- und Nichtdiagonalelementen unterscheiden sich um einen Faktor zwei,

$$\tau_\gamma^{2\text{LS}} = \frac{\mu_\infty}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \tanh \beta\hbar\omega_0 \xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma}, \quad \tau_d^{2\text{LS}} = \frac{2\mu_\infty}{\gamma} = \frac{2}{\gamma} \tanh \beta\hbar\omega_0 \xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{2}{\gamma} \quad (6.57)$$

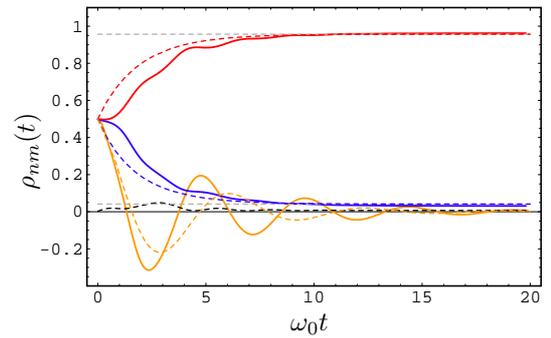
wobei das *Dephasing* bzw. die Phasendämpfung der langsamere Prozess ist. Die stationäre Purity und die Zeitabhängigkeit der Norm des Interferenzterms sind durch

$$\mu(t)^{2\text{LS}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \text{sech}(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_0)}, \quad \mu_I^{2\text{LS}}(t) = \frac{1}{2}e^{-\gamma t/\mu_\infty} \quad (6.58)$$

gegeben. Die Abbildung 6.9 zeigt Beispiele der zeitlichen Entwicklung bei starker System-Bad-Wechselwirkung. Die zeitabhängige Frequenzverschiebung $\delta Q(t)$ des Oszillators ist in diesem Fall nicht mehr zu vernachlässigen und zeigt sich insbesondere in einer Verschiebung der Oszillationsfrequenz der Nichtdiagonalelemente, deren ungestörte Oszillationsfrequenz allgemein durch $\rho_{nm}(t) \sim e^{-i(E_n - E_m)t/\hbar} = e^{-i(n-m)\omega_0 t}$ bestimmt wird. Für tiefe Temperaturen erfolgt die Relaxation der Diagonalelemente im Vergleich zum Markovschen Fall verzögert. Die Zeitskalen der Relaxation von Diagonalelementen und Phasendämpfung der Nicht-Diagonalen unterscheiden sich, wie oben angegeben, um etwa einen Faktor zwei. Diese



(a) Mittlerer Temperaturbereich $kT = 3\hbar\omega_0$. Der erste angeregte Zustand wird zugunsten des Grundzustands langsamer depopularisiert. Die Leakage ρ_{leak} ist die schwarz gestrichelte Linie.



(b) Tiefe Temperaturen $kT = 10^{-3}\hbar\omega_0$. Die Diagonalelemente relaxieren verzögert, bei der Oszillation der Nichtdiagonalelemente wird die anfängliche Frequenzverschiebung deutlich.

Abbildung 6.9: Superposition ψ_{01} mit Zeitentwicklung der Dichtematrixelemente ρ_{00} (rot), ρ_{11} (blau) und ρ_{01} (gelb) unter starker System-Bad-Wechselwirkung im Vergleich zum Markovschen Fall (jeweils gestrichelt). Parameter $\gamma = 0.25m\omega_0$ (links) und $\gamma = m\omega_0$ (rechts) und $\Gamma = \omega_0$.

Resultate sind vergleichbar mit den Ergebnissen für das Jaynes-Cummings Modell des Zwei-Niveau-Systems mit σ_{\pm} -Kopplung im nicht-Markovsche Regime [63, 64, 164] und somit in diesem Fall unabhängig von der Art der System-Bad-Wechselwirkung. Das QBM-Modell in der Fockraum-Repräsentation kann für tiefe Temperaturen als effektives Zwei-Niveau-System aufgefasst werden und bietet somit eine einfache Möglichkeit nicht-Markovsche Einflüsse bei Qubit-Systemen zu untersuchen.

6.3.2.2 Mikroskopischer versus makroskopischer Cat-State

Im Folgenden soll die Dekohärenz mikroskopischer und makroskopischer Superposition untersucht werden. Mikroskopisch heißt in diesem Zusammenhang eine Superposition aus nur wenigen Fock-Zuständen, makroskopische Superpositionen sind eine Überlagerung sehr vieler Besetzungszahl-Zustände (wie es bei kohärenten Zuständen der Fall ist). Wie bereits in Abschnitt 5.2.3 angedeutet, ist die Superposition ψ_{02} aus Grundzustand und zweiten angeregten Zustand gut zum Vergleich mit der Superposition $\psi_{\pm\alpha}$ zweier kohärenter Zustände geeignet. Die Abbildung 6.10 zeigt diese beiden Zustände im Fockraum, wobei der Parameter $|\alpha|$ so gewählt wurde, dass die Dichtematrixelemente ρ_{00} , ρ_{02} , ρ_{20} und ρ_{22} die gleiche anfängliche Amplitude aufweisen, während alle Elemente mit ungeraden Kombinationen der Zahlen n , m verschwinden. Die Zeitentwicklung der Dichtematrixelemente der anfänglichen Superposition ψ_{02} ist in Abbildung 6.11a dargestellt. Ein Vergleich mit der Abbildung 6.11b lässt die Ähnlichkeit zur Entwicklung der Matrixelemente des Zustands $\psi_{\pm q_0}$ offenkundig werden. Bei einem genaueren Blick auf die Zeitentwicklung der Nebendiagonalelemente $\rho_{02}(t)$ in Abbildung 6.11c erkennt man allerdings, dass sich $\rho_{02}(t) = \rho_{02}^{\text{coh}}(t) + \rho_{02}^{\text{inf}}(t)$ aus zwei Anteilen zusammensetzt, die unterschiedliches Verhalten zeigen. Der Anteil $\rho_{02}^{\text{coh}}(t)$ resultiert von den Diagonaltermen $\rho_{\text{coh}}(q, q', t)$ der Dichtematrix in Ortsdarstellung und zeigt nur einen langsam abfallenden, oszillierenden Verlauf, während der Anteil $\rho_{02}^{\text{inf}}(t)$, der von dem Interferenzterm $\rho_{\text{inf}}(q, q', t)$ der Dichtematrix im Ortsraum herrührt, wesentlich stärker gedämpft wird. Aus Abb. 6.11d ist zu ersehen, dass der schnelle Abfall der Anteile ρ_{nm}^{inf} allgemein zu beobachten ist. Die auf die Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix in Ortsdarstellung bzw. das Interferenzmuster im Phasenraum wirksame Dekohärenz zeigt sich somit durch ein schnelleres anfängliches Abfallen der Dichtematrixelemente der makroskopischen Superposition $\psi_{\pm q_0}$ im Vergleich zur mikroskopischen Superposition ψ_{02} .

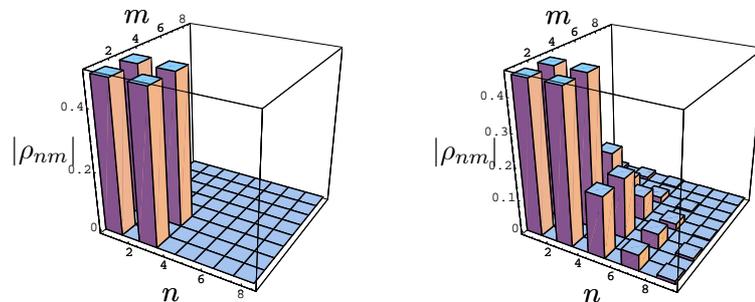
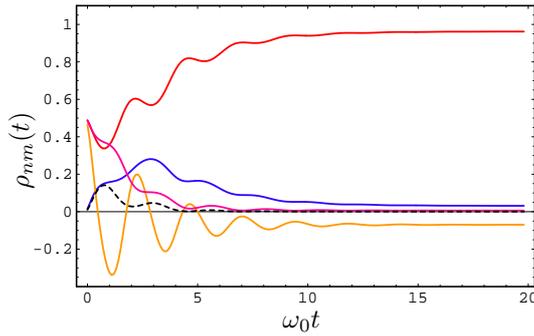
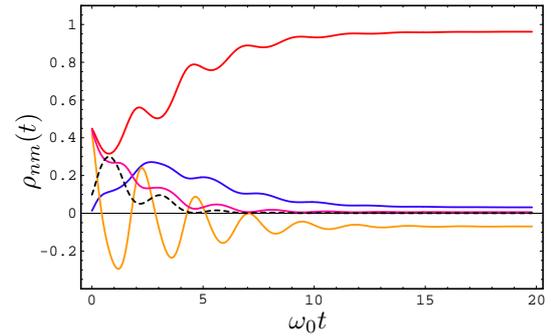


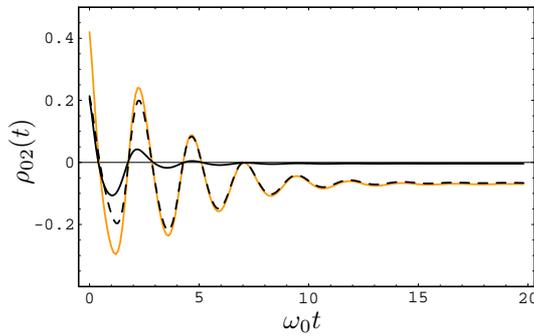
Abbildung 6.10: Vergleich der Superpositionen ψ_{02} (links) und $\psi_{\pm q_0}$ mit geeignet gewählter Verschiebung $q_0 = 2^{7/4}\sigma_0$ (rechts). Die Matrixelemente der anfänglichen Dichtematrix von $\psi_{\pm q_0}$ sind dann gleich $\rho_{00} = \rho_{22} = \rho_{02} = \rho_{20} \gg \rho_{nm}$, $n, m > 2$, sowie $\rho_{11} = \rho_{01} = \rho_{10} = 0$.



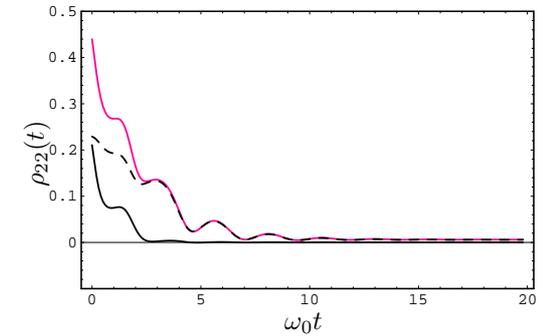
(a) Superposition ψ_{02} mit den entsprechenden Startwerten $\rho_{00} = \rho_{02} = \rho_{22} = \frac{1}{2}$. Bei starker Kopplung können Nichtdiagonalelemente wie ρ_{02} für $t \rightarrow \infty$ von Null abweichen (vgl. Kap. 4).



(b) Superposition $\psi_{\pm q_0}$. Die Startwerte sind etwas kleiner als für ψ_{02} . ρ_{leak} (scharz gestrichelt) ist bereits zu Beginn größer als Null, da auch höhere Niveaus besetzt sind (vgl. Abb. 6.10).



(c) Anteile $\rho_{02}^{\text{coh}}(t)$ (gestrichelt) und $\rho_{02}^{\text{inf}}(t)$ (schwarz) von $\rho_{02}(t)$ (gelb). Die Interferenzanteile werden wesentlich schneller gedämpft.



(d) Anteile $\rho_{22}^{\text{coh}}(t)$ (gestrichelt) und $\rho_{22}^{\text{inf}}(t)$ (schwarz) von $\rho_{22}(t)$ (violett). Die Interferenzanteile werden wesentlich schneller gedämpft.

Abbildung 6.11: Vergleich der Superpositionen ψ_{02} und $\psi_{\pm q_0}$ in Form der Zeitentwicklung der Dichtematrixelemente ρ_{00} (rot), ρ_{11} (blau), ρ_{22} (violett) und $\rho_{02}(t)$ (gelb). Parameter wie in Abb. 6.9b und Separation $q_0 = 2^{7/4}\sigma_0$. Die Anteile $\rho_{nm}^{\text{coh}}(t)$ resultieren von dem Diagonalterm $\rho_{\text{coh}}(q, q', t)$ der Dichtematrix in Ortsdarstellung und zeigen nur einen langsam abfallenden, oszillierenden Verlauf, während die Anteile $\rho_{nm}^{\text{inf}}(t)$, die von dem Interferenzterm $\rho_{\text{inf}}(q, q', t)$ der Dichtematrix im Ortsraum herrühren, wesentlich stärker gedämpft werden.

6.4 Zusammenfassung von Kapitel 6

In diesem Kapitel wurden nicht-Markovsche Effekte auf die Dekohärenzprozesse von CV-Systemen im Rahmen des QBM-Modells untersucht. Die HPZ-Mastergleichung wurde dafür für unterschiedliche anfängliche Superpositionszustände gelöst und anschließend die Norm des Interferenzterms als Dekohärenzmaß im Phasenraum berechnet. Anhand eines Vergleichs mit alternativen Maßen wurde aufgezeigt, dass Phasenraummaße und Dekohärenzmaße im Orts- bzw. Implusraum gerade bei einer nicht-Markovschen Betrachtung mitunter um Größenordnungen verschiedene Zeitskalen liefern können. Bei der Verwendung der Norm des Interferenzterms als Dekohärenzmaß hat sich gezeigt, dass der Dekohärenzprozess selbst für ein lineares Modell wie die quantenmechanische Brownsche Bewegung qualitativ sehr unterschiedliches Verhalten zeigen kann – der Verlauf kann exponentiell, gaußförmig, algebraisch (für ein freies Teilchen bei tiefen Temperaturen) abfallend, oder sogar durch partielle, periodische Wiederkehr bzw. Rekurrenz der Kohärenz gekennzeichnet sein. Die unterschiedlichen Dekohärenz-Szenarios werden dabei durch das Verhältnis der charakteristischen Zeitskalen des Systems und des Bades festgelegt. Für die Grenzfälle einer Dekohärenzzeit τ_d , die wesentlich größer oder wesentlich kleiner als die charakteristische Systemzeit τ_s ist, wurden Näherungslösungen angeben, die unabhängig von den speziellen Systemparametern sind. Die Dekohärenzzeit einer Superposition kohärenter Zustände ist abhängig von der Separation $|\alpha_+ - \alpha_-|$ im Phasenraum. Im Fall $\tau_d \gg \tau_s$ ergibt sich das Standardresultat einer mit der quadratischen Separation skalierenden Dekohärenzrate. Im Gegensatz dazu ist die Beziehung von Dekohärenzzeit und Separation im Fall von $\tau_d \ll \tau_s$ nur noch linear in der inversen Separation. Der Übergang zwischen den beiden Regimen erfolgt wenn die Dekohärenzzeit in der Größenordnung der kürzesten Badkorrelationszeit liegt, die durch die Abschneidefrequenz der spektralen Dichte bestimmt wird. Auf dieser Zeitskala sind die Koeffizienten der HPZ-Mastergleichung zeitabhängig und für die nicht-Markovschen Effekte der Nichtgleichgewichtsdynamik verantwortlich. Das mittels der HPZ-Mastergleichung auch nicht-Markovsche Effekte in Zwei-Niveau-Systemen untersucht werden können, wurde durch einen Vergleich der Dynamik eines effektiven Zwei-Niveau-Systems bei tiefen Temperaturen gezeigt. Der dafür vorgenommene Übergang zur Fockraumdarstellung hat sich auch im Hinblick auf einen Vergleich mikroskopischer und makroskopischer Superpositionen als vorteilhaft erwiesen. Nicht-Markovsche Effekte sind immer dann zu berücksichtigen, wenn bestimmte Nichtgleichgewichtsprozesse auf Zeitskalen ablaufen, die wesentlich kleiner sind als die übrigen charakteristischen Zeiten des Systems. Neben Dekohärenz von kohärenten Superpositionen ist das der Verlust nicht-klassischer Korrelationen (*Disentanglement*) von ursprünglich verschränkten Zuständen. Erst verschränkte Superpositionszustände sind relevant für die Quanten-Informatik und Quanten-Kommunikation. Dort kommt der Vermeidung von Dekohärenz auch besondere Bedeutung zu. Die nicht-Markovsche Nichtgleichgewichtsdynamik verschränkter Zustände wird deshalb nun im folgenden Kapitel untersucht.

Kapitel 7

Verschränkung von CV-Systemen im QBM-Modell

„Entanglement is not one but rather the characteristic trait of quantum mechanics.“
Erwin Schrödinger [165]

Die Charakterisierung und Quantifizierung der Verschränkung von quantenmechanischen Systemen stellt ein aktives Forschungsfeld dar [1, 40], das sich in den letzten Jahren auf den Bereich der CV-Systeme erweitert hat [166, 167, 168, 169]. Der Präparation und Aufrechterhaltung verschränkter CV-Zustände kommt eine Schlüsselrolle bei der erfolgreichen Implementierung von Techniken der Quantenkryptographie und Quantenteleportation zu. Zwei Teilsysteme A und B eines gemischten Quantensystems ρ sind separabel bzw. nicht verschränkt, sofern sich ρ als konvexe Summe der Produktzustände $\rho^A \otimes \rho^B$ darstellen lässt:

$$\rho = \sum_{j=1}^n p_j \rho_j^A \otimes \rho_j^B, \quad \sum_{j=1}^n p_j = 1, \quad p_j > 0. \quad (7.1)$$

Diese notwendige und hinreichende Separabilitätsbedingung ist allerdings in dieser Form in der Praxis nur schwer anwendbar. Peres und Horodecki haben gezeigt [42, 43, 170], dass für niedrig-dimensionale Systeme ein experimentell einfacher umzusetzendes Kriterium in Form der Positivität des partiell transponierten Dichteoperators

$$\rho^{T_B} = \sum_j p_j \rho_j^A \otimes (\rho_j^B)^T \quad (7.2)$$

existiert, das deshalb auch als PPT-Kriterium bezeichnet wird (Positivity of the Partial Transpose). Die Positivität von ρ^{T_B} ist für Systeme mit 2×2 und 2×3 Dimensionen sowohl ein notwendiges wie auch hinreichendes Kriterium für die Separabilität des Zustands. Für diskrete Systeme höherer Dimensionen des Hilbert-Raums $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ist dies nur noch eine notwendige Bedingung [43, 170]. Im Grenzfall unendlich dimensionaler Systeme – insbesondere für Gaußsche CV-Systeme – stellt die Positivitätsbedingung an die partiell Transponierte allerdings wieder ein sowohl notwendiges als auch hinreichendes Kriterium dar, wie Simon [46] gezeigt hat. Dieses PPT-Kriterium für CV-Systeme soll nun in diesem Kapitel zunächst in seinen verschiedenen Ausprägungen dargestellt werden, um damit im Anschluss die dynamische Entwicklung verschränkter Zwei-Moden-Zustände in unterschiedlichen Umgebungen zu analysieren.

7.1 Definition von Verschränkung kontinuierlicher Systeme

Im Folgenden werden die Verschränkungskriterien für Systeme mit kontinuierlichen Variablen dargestellt. Zunächst soll das PPT-Kriterium für CV-Systeme von Simon erläutert werden. Dieses ist für die Klasse der zweigeteilten Gaußschen Zustände mit 1×1 ein sowohl hinreichendes als auch notwendiges Kriterium [46] und kann auf den Fall mit $1 \times n$ Moden verallgemeinert werden [171]. Für Gaußsche Zustände mit $n \times m$ Moden lässt sich dieses Kriterium allerdings nur in Ausnahmefällen anwenden (für bisymmetrische Zustände [169]). Ein auch für nicht-Gaußsche Zustände hinreichendes Kriterium wurde von Duan *et al* [47] entwickelt. Dieses baut auf Unschärferelationen und EPR-Korrelationen von CV-Systemen [172] auf. Für Gaußsche Zustände liefert dieses Kriterium die gleichen Vorhersagen.

7.1.1 Verschränkung bei Gaußschen Zwei-Moden-Zuständen

Die Verschränkungseigenschaften und Separabilitätskriterien von Gaußschen Zuständen waren in den letzten Jahren vielfach Untersuchungsgegenstand und konzentrieren sich insbesondere auf den Fall zweier Gaußscher Moden [173, 174, 175, 176, 177]. Diese sind durch ihre Kovarianz vollständig charakterisiert. Mit den daraus gewonnenen symplektischen Invarianten lassen sich Separabilitätskriterien aufstellen. Durch Transformation der Kovarianzmatrix auf bestimmte Standardformen lassen sich diese Kriterien weiter vereinfachen.

7.1.1.1 Charakterisierung durch symplektische Invarianten

Die Darstellung der Verschränkung von CV-Systemen konzentriert sich im Folgenden auf Gaußsche Zwei-Moden-Zustände. Die Verteilung der Koordinaten q_1, q_2 und Impulse p_1, p_2 im semi-klassischen Phasenraum wird durch eine gaußförmige Wigner-Funktion

$$W(\mathbf{X}) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{\det \mathbf{V}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{X} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}^T \right] \quad \text{mit} \quad \mathbf{X} = (q_1, p_1, q_2, p_2) \quad (7.3)$$

beschrieben. Die Elemente der 4×4 -Kovarianz Matrix

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad V_{ij} = \frac{1}{2} \langle X_i X_j + X_j X_i \rangle - \langle X_j \rangle \langle X_i \rangle \quad (7.4)$$

charakterisieren diesen Zustand folglich vollständig, wobei die kanonischen Kommutator-Relationen der Koordinaten X_i in Form von

$$[X_i, X_j] = i\hbar \Omega_{ij} \quad \text{mit} \quad \Omega = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

gegeben sind. Den vier lokalen symplektischen Invarianten in Form von Determinanten der einzelnen Kovarianzmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{V} kommt besondere Bedeutung zu. Zusammen mit den aus der Matrix $|i\Omega V|$ gewonnenen symplektischen Eigenwerten

$$\nu_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Delta_V \pm \sqrt{\Delta_V^2 - 4 \det V} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{mit} \quad \Delta_V = \det A + \det B + 2 \det C, \quad (7.6)$$

die V in die Kovarianzmatrix $\nu = \text{diag}\{\nu_-, \nu_-, \nu_+, \nu_+\}$ überführen, können die Bedingungen der Heisenbergschen Unschärferelation in Form der folgenden äquivalenten Ungleichungen angegeben werden:

$$V + \frac{i}{2}\Omega \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad (7.7)$$

$$\nu_- \geq \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad (7.8)$$

$$\det \mathbf{V} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4}\Delta_V \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad (7.9)$$

$$\det \mathbf{V} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4}(\det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} + 2 \det \mathbf{C}) \geq 0 \quad (7.10)$$

$$\text{mit } \det \mathbf{V} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} + (\det \mathbf{C})^2 - \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{C}^T\mathbf{J}), \quad (7.11)$$

wobei hier, wie auch im Folgenden, $\hbar = 1$ gesetzt wurde.

7.1.1.2 PPT-Inseparabilitätskriterium für Gaußsche CV-Systeme

Das *PPT*-Kriterium von Peres und Horodecki sagt aus, dass ein bipartiter Quantenzustand dann und nur dann separabel ist, wenn die Positivität des partielle Transposition des Dichteoperators gegeben ist. Im Falle kontinuierlicher Systeme hat die (partielle) Transposition des Dichteoperators eine anschauliche geometrische Interpretation in Form einer Spiegelung der Wigner-Funktion im Phasenraum:

$$\rho \rightarrow \rho^T \quad \Leftrightarrow \quad W(q, p) \rightarrow W(q, -p). \quad (7.12)$$

Im Falle eines Gaußschen Zwei-Moden-Zustands geht deshalb die partielle Transposition ρ^{T_1} des Dichteoperators mit einem Vorzeichenwechsel bei jenen Elementen der Kovarianzmatrix V einher, die den Impuls p_1 des ersten Systems mit der Ortsvariablen q_2 oder dem Impuls p_2 des zweiten Systems verbinden. Bezogen auf die symplektischen Invarianten korrespondiert dies mit einem Vorzeichenwechsel in der Determinante $\det C$, so dass sich für die symplektischen Eigenwerte des partiell transponierten Zustands $\tilde{\rho}$ ergibt:

$$\tilde{\nu}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\tilde{\Delta}_V \pm \sqrt{\tilde{\Delta}_V^2 - 4 \det V} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{mit } \tilde{\Delta}_V = \det A + \det B - 2 \det C. \quad (7.13)$$

Die Heisenberg-Bedingungen (7.7)-(7.10) können damit umgeschrieben werden zu den folgenden notwendigen und hinreichenden Separabilitätsbedingungen [46]

$$V + \frac{i}{2}\tilde{\Omega} \geq 0 \quad \text{mit } \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (7.14)$$

$$\tilde{\nu}_- \geq \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad (7.15)$$

$$\det \mathbf{V} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4}(\det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} + 2|\det \mathbf{C}|) \geq 0. \quad (7.16)$$

Weiterhin kann gezeigt werden [46], dass ein Zwei-Moden-Zustand nicht verschränkt ist, falls

$$\det C \geq 0. \quad (7.17)$$

Dies ist jedoch nicht hinreichend für das Vorliegen eines separablen Zustands. Für $\det C \leq 0$ kann der Zustand entweder verschränkt sein oder auch nicht. Aus Gleichung (7.16) zusammen mit dem Ausdruck (7.11) folgt, dass ein Quantenzustand nur dann separabel ist, wenn gilt

$$\det \mathbf{A} \det \mathbf{B} + \left(\frac{1}{4} - |\det \mathbf{C}| \right)^2 - \text{Tr}(\mathbf{A} \mathbf{J} \mathbf{C} \mathbf{J} \mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{C}^T \mathbf{J}) - \frac{1}{4}(\det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}) \geq 0. \quad (7.18)$$

Dies ist das Separabilitätskriterium von Simon [46], das auch als PPT-Kriterium für CV-Systeme bezeichnet wird und ein sowohl notwendiges als auch hinreichendes Kriterium für das Vorliegen von CV-Verschränkung darstellt.

7.1.1.3 Standardformen der Kovarianzmatrix

Obiges Separabilitätskriterium lässt sich weiter vereinfachen, indem die Kovarianzmatrix durch lokale symplektische Operationen auf Standardform gebracht wird. Es existieren dabei zwei Standardformen, die als Typ I und Typ II bezeichnet werden. Diese Standardformen lauten

$$V_I = \begin{pmatrix} a & 0 & c_+ & 0 \\ 0 & a & 0 & c_- \\ c_+ & 0 & b & 0 \\ 0 & c_- & 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V_{II} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & m_2 \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Dabei sind die Kovarianzen a, b, c_+ und c_- der Standardform V_I durch die vier symplektischen Invarianten gegeben:

$$\det \mathbf{A} = a, \quad \det \mathbf{B} = b, \quad \det \mathbf{V} = (ab - c_+^2)(ab - c_-^2), \quad \det \mathbf{C} = c_+ c_-. \quad (7.20)$$

Die Elemente der zweiten Standardform V_{II} erfüllen die folgenden Relationen:

$$\frac{n_1 - 1}{m_1 - 1} = \frac{n_2 - 1}{m_2 - 1}, \quad (7.21)$$

$$|c_1| - |c_2| = \sqrt{(n_1 - 1)(m_1 - 1)} - \sqrt{(n_2 - 1)(m_2 - 1)}. \quad (7.22)$$

Mit Hilfe der Standardform V_I kann das Simon-Kriterium (7.18) auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$4(ab - c_+^2)(ab - c_-^2) - \frac{1}{4} - (a^2 + b^2) - 2|c_+ c_-| \geq 0. \quad (7.23)$$

Mit Hilfe der Standardform V_{II} haben Duan *et al* [47] ein alternatives Separabilitätskriterium hergeleitet, welches nicht auf der partiellen Transposition beruht, sondern ausschließlich Unschärferelationen für gewisse Varianzen nutzt. Dieses Kriterium wird im folgenden Abschnitt dargestellt.

7.1.1.4 EPR-Separabilitätskriterium

Einstein, Podolsky und Rosen [126] erörterten die Frage nach der Vollständigkeit der Quantenmechanik im Rahmen eines Systems zweier Teilchen mit perfekter (Anti-)Korrelation in

Ort und Impuls. Bezogen auf die hier verwendete Terminologie, handelt es sich dabei folglich um ein System mit kontinuierlichen Variablen, genauer gesagt um den Extremfall eines Zwei-Moden-System dessen Wellenfunktion im Orts- bzw. Impulsraum jeweils deltaförmig ist,

$$\psi(q_1, q_2) \rightarrow \delta(q_1 - q_2) \quad \text{und} \quad \psi(p_1, p_2) \rightarrow \delta(p_1 + p_2). \quad (7.24)$$

Dieser Zustand kann aufgefasst werden als Grenzfall eines extrem gequetschten Zwei-Moden-Zustands (5.22) mit $\xi \rightarrow \infty$. Gequetschte Zwei-Moden-Zustände werden deshalb im Folgenden auch als Quasi-EPR-Zustände bezeichnet. Erst nachdem Bohm die Fragestellung des EPR-Paradoxons auf ein Spinsystem übertrug [178, 179], konzentrierte sich die Debatte über den nichtlokalen Charakter der Quantenmechanik auf Systeme mit diskreten Variablen, so dass auch Bell seine berühmten Ungleichungen für solche Systeme formulierte [41]. Seitdem Systeme kontinuierlicher Variablen in den letzten Jahren an Aufmerksamkeit gewonnen haben, werden EPR-Korrelationen auch wieder an CV-Systemen untersucht [180, 172]. Das Inseparabilitätskriterium von Duan *et al* [47] ist ein Beispiel hierfür und basiert auf der Bestimmung der Varianz eines Paares von Operatoren des Einstein-Podolsky-Rosen Typs (EPR-Operatoren). Es liefert ein hinreichendes Kriterium für die Verschränkung beliebiger bipartiter CV-Systeme. Für alle Gaußschen Zustände ist es zusätzlich auch ein notwendiges Kriterium und ist dem PPT-Kriterium äquivalent. Ausgangspunkt ist die Definition eines Paares von EPR-Operatoren

$$\hat{u} = |a|\hat{q}_1 + \frac{1}{a}\hat{q}_2, \quad \text{und} \quad \hat{v} = |a|\hat{p}_1 - \frac{1}{a}\hat{p}_2, \quad (7.25)$$

mit den geltenden Kommutator-Relation $[\hat{q}_k, \hat{p}_j] = i\delta_{kj}$, $j, k = 1, 2$. Dann gilt das *EPR-Separabilitätskriterium* [47]: Für jeden separablen Quantenzustand ρ , erfüllt die gemeinsame Varianz des in Gl. (7.25) definierten Paares von EPR-Operatoren die Ungleichung

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_\rho + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_\rho \geq a^2 + \frac{1}{a^2}. \quad (7.26)$$

Speziell gilt für einen separablen Gaußschen Zustand, der durch die Standardform V_{II} dargestellt wird, dass die obige Ungleichung (7.26) erfüllt wird durch das folgende Paar von EPR-Operatoren:

$$\hat{u} = |a_0|\hat{q}_1 - \frac{1}{a_0} \frac{c_1}{|c_1|}\hat{q}_2, \quad \hat{v} = |a_0|\hat{p}_1 - \frac{1}{a_0} \frac{c_2}{|c_2|}\hat{p}_2, \quad \text{mit} \quad a_0^2 = \sqrt{\frac{m_1 - 1}{n_1 - 1}} = \sqrt{\frac{m_2 - 1}{n_2 - 1}}. \quad (7.27)$$

Aus der Standardform V_{II} lässt sich damit als Separabilitätskriterium für $n_1 = m_1$ und $n_2 = m_2$ herleiten [181]:

$$(n_1 - |c_1|)(n_2 - |c_2|) - 1 \geq 0. \quad (7.28)$$

Ein zu Ungleichung (7.26) ähnliches, allerdings schwächeres (lediglich notwendiges) Separabilitätskriterium wurde bereits von Tan [182] hergeleitet und lautet

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle \cdot \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle \geq 1. \quad (7.29)$$

Eine anschauliche Anwendung der Kriterien (7.28) und (7.29) findet sich für das System zweier gekoppelter Moden aus Kapitel 5.1.2.4. Hier ist das Paar EPR-artiger Operatoren für $a = 1$ über Schwerpunktkoordinate R und Relativimpuls p_x durch $u = 2R = (q_1 + q_2)$ und

$v = 2p_x = (p_1 - p_2)$ gegeben. Aus Ungleichung (7.28) und der Kovarianzmatrix (5.33) gewinnt man somit (mit expliziter Berücksichtigung von \hbar):

$$\left(\langle q_j^2 \rangle - \frac{1}{2} |\langle \{q_1, q_2\} \rangle| \right) \left(\langle p_j^2 \rangle - \frac{1}{2} |\langle \{p_1, p_2\} \rangle| \right) \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad \text{für } j = 1, 2 \quad (7.30)$$

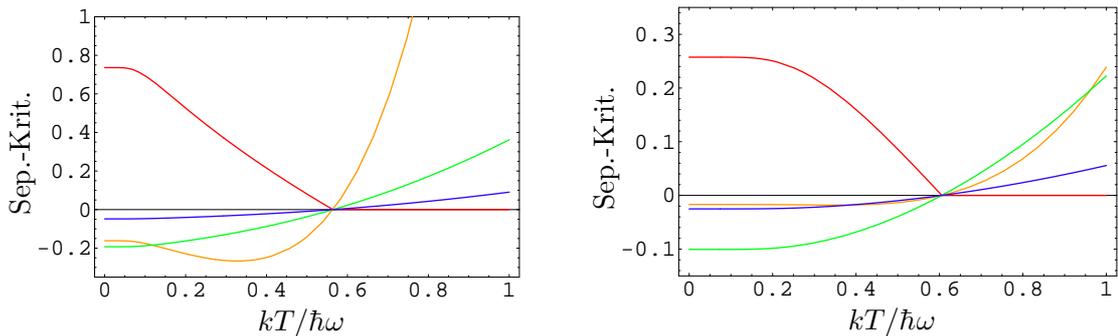
wobei ein symmetrischer Zustand mit $\langle q_1^2 \rangle = \langle q_2^2 \rangle$ und $\langle p_1^2 \rangle = \langle p_2^2 \rangle$ vorausgesetzt wurde. Äquivalent ergibt sich aus Bedingung (7.29) mit den speziell gewählten EPR-Operatoren

$$\langle (q_1 + q_2)^2 \rangle \langle (p_1 - p_2)^2 \rangle \geq \hbar^2 \quad \text{bzw.} \quad \langle R^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{16}. \quad (7.31)$$

Für $\langle \{q_1, q_2\} \rangle < 0$ und $\langle \{p_1, p_2\} \rangle > 0$ stimmen also beide Kriterien überein. Im Falle einer thermischen Umgebung mit inverser Temperatur β sind die Korrelationen der Normalmoden zweier identischer aber unterscheidbarer Oszillatoren ($m_{1,2} = m$, $\omega_{1,2} = \omega_0$) gegeben durch $\langle R^2 \rangle = \frac{\hbar}{4m\Omega_r} \coth(\frac{1}{2}\beta\hbar\Omega_r)$ und $\langle p_x^2 \rangle = \frac{\hbar}{4}m\Omega_x \coth(\frac{1}{2}\beta\hbar\Omega_x)$, wobei die Normalfrequenzen Ω_r , Ω_x durch die konkrete Form der Kopplung zwischen den beiden Oszillatoren bestimmt wird. Damit lautet die Bedingung (7.31) für Separabilität folglich

$$\frac{\Omega_x}{\Omega_r} - \tanh(\frac{1}{2}\beta\hbar\Omega_r) \tanh(\frac{1}{2}\beta\hbar\Omega_x) \geq 0, \quad (7.32)$$

und ist für zwei unterschiedliche Kopplungen H_{12} zwischen den Oszillatoren in Abb. 7.1 im Vergleich zu den anderen Separabilitätskriterien dargestellt. Im Hochtemperatur-Grenzfall $kT \gg \hbar\Omega_r \geq \hbar\Omega_x$ ist der Zustand immer separabel, da sich aus (7.31) in diesem Fall als Bedingung für das Vorliegen von Verschränkung $\hbar\Omega_r \leq 2kT$ ergibt, was der Hochtemperaturannahme widerspricht. Für $T \rightarrow 0$ ist die Ungleichung für $\Omega_r \geq \Omega_x$ verletzt, was für die Normalfrequenzen bei gewählter Kopplung immer gilt. Der (reine) Vakuumzustand ist somit immer verschränkt. Dazwischen existiert eine kritische Temperatur T_c , bei der in Abhängigkeit der Kopplungsstärke λ der Übergang von Verschränkung zu Separabilität stattfindet.



(a) Wechselwirkung $H_{12} = m\lambda^2 q_1 q_2$, Normalfrequenzen $\Omega_x = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ und $\Omega_r = \sqrt{\omega^2 + \lambda^2}$.

(b) Wechselwirkung $H_{12} = m\lambda^2 (q_1 + q_2)^2$, Normalfrequenzen $\Omega_x = \omega$ und $\Omega_r = \sqrt{\omega^2 + 2\lambda^2}$.

Abbildungung 7.1: Temperaturabhängigkeit der Separabilitätskriterien (7.18) (gelbe Linie), (7.28) (grüne Linie) und (7.32) (blaue Linie), sowie die logarithmische Negativität (7.41) (rote Linie) für zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren. Die Abbildungen (a) und (b) unterscheiden sich in der Form des gewählten Wechselwirkungs-Hamilton-Operators H_{12} . Der Kopplungsparameter ist jeweils $\lambda^2 = 0.9\omega^2$. Am Schnittpunkt aller Kurven mit der Abszisse liegt die kritische Temperatur, die von der konkreten Form der Kopplung abhängt. Wird diese Temperatur überschritten, ist der Zustand separabel.

7.1.1.5 Separabilitätskriterium auf Basis der Purity

Die bisher vorgestellten Kriterien basierten auf den zweiten Momenten der Orts- und Impulsoperatoren bzw. den Quadraturen der elektromagnetischen Feldmoden. Die experimentelle Bestimmung der Verschränkung zwischen Gaußschen Zwei-Moden Zuständen gemäß obigen Ungleichungen erfordert die Messung bzw. Rekonstruktion aller zweiten Momente des Gaußschen Feldes. Einen alternativen Zugang bietet die Klassifizierung von Gaußschen Zuständen über die Purities des Gesamtsystems und der reduzierten Teilsysteme. Adesso *et al* [167, 183, 168] haben folgende Klassifizierung von Gaußschen Zuständen, in Abhängigkeit der Purity μ des gesamten Zwei-Moden-Systems und den Purities μ_1 und μ_2 der reduzierten Dichtematrizen jeweils einer Mode hergeleitet:

$$\mu_1\mu_2 \leq \mu \leq \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2} \Rightarrow \text{separabel}, \quad (7.33)$$

$$\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2} < \mu \leq \frac{\mu_1\mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_1^2\mu_2^2}} \Rightarrow \text{Koexistenz}, \quad (7.34)$$

$$\frac{\mu_1\mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_1^2\mu_2^2}} < \mu \leq \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2 - |\mu_1 - \mu_2|} \Rightarrow \text{verschränkt}, \quad (7.35)$$

wobei die Purities mit den symplektischen Invarianten (7.20) über

$$\mu_1 = \frac{\hbar}{2\sqrt{\det \mathbf{A}}}, \quad \mu_2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{\det \mathbf{B}}}, \quad (7.36)$$

$$\mu = \frac{\hbar}{4\sqrt{\det \mathbf{V}}} = \frac{\hbar}{4\sqrt{\left(\frac{1}{4\mu_1\mu_2} - c_+^2\right)\left(\frac{1}{4\mu_1\mu_2} - c_-^2\right)}}, \quad (7.37)$$

$$\text{mit } c_{\pm} = \frac{\sqrt{\mu_1\mu_2}}{4}(\epsilon_- \pm \epsilon_+), \quad \text{und } \epsilon_{\pm} = \sqrt{\left[\det \mathbf{C} + \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 - (\mu_1 \pm \mu_2)^2}{\mu_1^2\mu_2^2}\right]^2 - \frac{4}{\mu^2}}$$

zusammenhängen. Die Kenntnis der Purity des Gesamtsystems und der Teilsysteme erlaubt deshalb die Verschränkung von Gaußschen Zwei-Moden-Zuständen auf einfache Weise zu charakterisieren, und wird im Rahmen der Dynamik in Ein- und Zwei-Reservoir-Modellen in Abschnitt 7.3 eingesetzt.

7.1.1.6 Verschränkungsmaße für Gaußsche Zustände

Praktisch alle bisher entwickelten Verschränkungsmaße beruhen auf einer kompletten Kenntnis des zugrundeliegenden Quantenzustands (dessen Rekonstruktion allerdings keine triviale experimentelle Aufgabe ist). Die *Negativität* bzw. *logarithmische Negativität* [44], zusammen mit dem *Entanglement of Formation* [45], sind dabei die beiden wichtigsten Verschränkungsmaße für Gaußsche Zustände und werden in diesem Abschnitt vorgestellt.

Sofern die vier symplektischen Invarianten des Gaußschen Zwei-Moden-Zustands bekannt sind, kann die Negativität bestimmt werden. Mit der Norm $\|\tilde{\rho}\|_1 = \text{Tr}\sqrt{\tilde{\rho}^\dagger\tilde{\rho}}$ (allg: Schatten p -Norm $\|\rho\|_p = (\text{Tr}|\rho|^p)^{1/p}$) der partiellen Transponierten $\tilde{\rho}$ des Quantensystems ρ ist die Negativität definiert als

$$\mathcal{N}(\rho) = \frac{\|\tilde{\rho}\|_1 - 1}{2}, \quad (7.38)$$

was dem Betrag der Summe aller negativen Eigenwerte von $\tilde{\rho}$ entspricht und für nicht-verschränkte Zustände verschwindet. Die so definierte Negativität ist ein *Entanglement Monotone* und kann deshalb als Verschränkungsmaß in zusammengesetzten Systemen herangezogen werden. Die *logarithmische Negativität*

$$E_{\mathcal{N}}(\rho) = \log_2 \|\tilde{\rho}\|_1 \quad (7.39)$$

ist zudem eine additive Größe. (Der exakte Wert der Negativität, der nur durch nicht-lokale Messungen erhalten werden kann – kann auch durch eine Messung der partiellen und kompletten Purities abgeschätzt werden). Mittels der symplektischen Eigenwerte $\tilde{\nu}_{\pm}$ des partiell transponierten Zustands $\tilde{\rho}$ lässt sich die (logarithmische) Negativität auch schreiben als:

$$\mathcal{N}(\rho) = \max \left\{ 0, \frac{1 - 2\tilde{\nu}_-}{4\tilde{\nu}_-} \right\}, \quad (7.40)$$

$$E_{\mathcal{N}}(\rho) = \max \{ 0, -\ln 2\tilde{\nu}_- \}. \quad (7.41)$$

Das *Entanglement of Formation* kann nur für symmetrische Gaußsche Zustände ($\det A = \det B$) analytisch bestimmt werden und lautet in diesem Fall [184]:

$$E_f(\rho) = g \left(2\sqrt{\det \mathbf{A} - \det \mathbf{C} - \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{C}^T\mathbf{J}) - 2\det \mathbf{A} \det \mathbf{C}}} \right), \quad (7.42)$$

mit Funktion $g(x) = c_+(x) \log_2[c_+(x)] - c_-(x) \log_2[c_-(x)]$, wobei $c_{\pm}(x) = (x^{-1/2} \pm x^{1/2})^2 / 4$. Für symmetrische Zustände ist $E_f(\rho)$ ebenso wie $E_{\mathcal{N}}(\rho)$ eine monoton fallende Funktion von $\tilde{\nu}_-$ und deshalb ein vollkommen zu $E_{\mathcal{N}}(\rho)$ äquivalentes Verschränkungsmaß. Andernfalls liefern die beiden Verschränkungsmaße unterschiedliche Reihenfolgen bei der Verschränkklassifizierung [185].

Ein Maß für die gesamten klassischen sowie nicht-lokalen Korrelationen in einem Gaußschen Zwei-Moden-Zustand ist durch die *wechselseitige Information (mutual information)*

$$I(\rho) = S_v(\rho_1) + S_v(\rho_2) - S_v(\rho) \quad (7.43)$$

gegeben, die mit Hilfe der von Neumann Entropie $S_v(\rho)$ des gesamten Zwei-Moden-Zustands und den Entropien der reduzierten Zustände $\rho_1 = \text{Tr}_2[\rho]$ und $\rho_2 = \text{Tr}_1[\rho]$ bestimmt werden kann. Die von Neumann Entropie des Gesamtsystems ergibt sich dabei allerdings nicht durch die nur für Ein-Moden-Zustände gültige Beziehung (4.19) aus der Purity μ des Gesamtsystems, sondern ist durch die symplektischen Eigenwerte (7.6) der Kovarianzmatrix (7.4) bestimmt [174]:

$$S_v(\rho) = f(\nu_-) + f(\nu_+) \quad \text{mit} \quad f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln\left(x - \frac{1}{2}\right). \quad (7.44)$$

Die Entropien der reduzierten Ein-Moden-Zustände ergeben sich hingegen aus der bereits in Kapitel 4 bekannten Beziehung (4.19) aus den Purities μ_1 und μ_2 der Teilsysteme

$$S_v(\rho_1) = f\left(\frac{1}{2\mu_1}\right) \quad \text{und} \quad S_v(\rho_2) = f\left(\frac{1}{2\mu_2}\right). \quad (7.45)$$

Zu beachten ist, dass die von Neumann Entropie im Allgemeinen nur im Ein-Moden-Fall eine monoton wachsende Funktion der linearen Entropie und damit der Purity ist, so dass nur in diesem Fall die beiden Größen von Neumann Entropie und lineare Entropie die gleiche Charakterisierung von gemischten Zuständen liefern.

7.1.2 Verschränkungsmaße für nicht-Gaußsche Zustände

7.1.2.1 Concurrence und Tangle für verschränkte kohärente Zustände

Als Verschränkungsmaße bipartiter verschränkter kohärenter Zustände kommen in erster Linie das Entanglement of Formation und die Concurrence [186, 187] in Frage. Für die Dichtematrix ρ_{12} eines Qubit-Paares ist die *Concurrence* definiert als

$$\mathcal{C}_{12} = \max \{ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0 \}, \quad (7.46)$$

wobei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ die Quadratwurzeln der Eigenwerte des Dichte-Operators

$$\varrho_{12} \equiv \rho_{12} (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_{12}^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad \text{mit Pauli-Matrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (7.47)$$

sind. Die Concurrence ist nur dann ungleich Null, wenn die beiden Qubits 1 und 2 verschränkt sind. Maximal verschränkte Zustände haben eine Concurrence von $\mathcal{C}_{12} = 1$.

Das Konzept der Concurrence als Verschränkungsmaß kann auch auf einige CV-Systeme übertragen werden, insbesondere auf die verschränkten kohärenten Multimoden-Zustände [132]. Ein Beispiel für die Multimoden-Version des verschränkten kohärenten Zweimoden-Zustands aus (5.72) ist der Zustand

$$|\alpha, \theta, N\rangle = \frac{|\alpha_+\rangle_1 \otimes |\alpha_+\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\alpha_+\rangle_N + e^{i\theta} |\alpha_-\rangle_1 \otimes |\alpha_-\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\alpha_-\rangle_N}{\sqrt{2 + 2e^{-2N|\alpha|^2} \cos \theta}}, \quad (7.48)$$

dessen Grenzfälle für $|\alpha| \rightarrow \infty$ und $|\alpha| \rightarrow 0$ durch die kontinuierlichen Versionen des GHZ- und W-Zustands gegeben sind:

$$|GHZ\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\mathbf{0}\rangle_1 \otimes |\mathbf{0}\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\mathbf{0}\rangle_N + e^{i\theta} |\mathbf{1}\rangle_1 \otimes |\mathbf{1}\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\mathbf{1}\rangle_N \right), \quad (7.49)$$

$$|W\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{N}} (|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes \dots \otimes |0\rangle_N + |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \otimes \dots \otimes |0\rangle_N + \dots + |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes \dots \otimes |1\rangle_N), \quad (7.50)$$

$$\dots + |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes \dots \otimes |1\rangle_N), \quad (7.51)$$

wobei $|\mathbf{0}\rangle_i \equiv |\alpha_+ \rightarrow \infty\rangle_i$ und $|\mathbf{1}\rangle_i \equiv |\alpha_- \rightarrow -\infty\rangle_i$ asymptotisch für $|\alpha| \rightarrow \infty$ eine orthogonale Basis darstellen und die Zustände $|0\rangle_i, |1\rangle_i$ im Limit $|\alpha| \rightarrow 0$ Fockzustände der Mode i bezeichnen. Um nun die paarweise Verschränkung eines N -Moden-Systems mittels der Concurrence analog zum diskreten N -Qubit System zu bestimmen, wird zunächst die reduzierte Dichtematrix $\rho_{12} = \text{Tr}_{2,4,\dots,N} \{ |\alpha, \theta, N\rangle \langle \alpha, \theta, N| \}$ zweier Moden 1 und 2 bestimmt. Dabei sind alle reduzierten Dichtematrizen ρ_{kl} zweier beliebiger Moden k und l identisch. Es genügt daher, die Dichtematrix

$$\rho_{12} = \frac{1}{2(1 + e^{-4N|\alpha|^2})} \{ |\alpha_+\rangle |\alpha_-\rangle \langle \alpha_+| \langle \alpha_-| + |\alpha_-\rangle |\alpha_+\rangle \langle \alpha_-| \langle \alpha_+| + e^{i\theta - 2(N-2)|\alpha|^2} |\alpha_-\rangle |\alpha_+\rangle \langle \alpha_+| \langle \alpha_-| + e^{-i\theta - 2(N-2)|\alpha|^2} |\alpha_+\rangle |\alpha_-\rangle \langle \alpha_-| \langle \alpha_+| \} \quad (7.52)$$

zu betrachten, und diese anschließend in der orthogonalen Basis $\{|\mathbf{0}\rangle, |\mathbf{1}\rangle\}$ mit

$$|\mathbf{0}\rangle \equiv |\alpha_+\rangle, \quad |\mathbf{1}\rangle \equiv \frac{|\alpha_-\rangle - e^{-2|\alpha|^2} |\alpha_+\rangle}{\sqrt{1 - e^{-4|\alpha|^2}}} \quad (7.53)$$

als 4×4 -Matrix

$$\rho_{12} = N_0^2 \begin{pmatrix} 2p^2(1+q\cos\theta) & pM(1+qe^{i\theta}) & pM(1+qe^{-i\theta}) & 0 \\ pM(1+qe^{-i\theta}) & M^2 & M^2qe^{-i\theta} & 0 \\ pM(1+qe^{i\theta}) & M^2qe^{i\theta} & M^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.54)$$

mit den Parametern

$$p = e^{-2|\alpha|^2}, \quad N_0 = (2 + 2p^N \cos\theta)^{-1}, \quad q = p^{N-2} \quad \text{und} \quad M = \sqrt{1-p^2} \quad (7.55)$$

darzustellen [132]. Mit deren vier Eigenwerten

$$\lambda_1 = N_0^2 M^2 (1+q), \quad \lambda_2 = N_0^2 M^2 (1-q), \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \quad (7.56)$$

ergibt sich die Concurrence des reduzierten (und deshalb gemischten) Zustands ρ_{12} zu

$$\mathcal{C}_{12} = \frac{M^2 q}{1 + p^N \cos\theta} = \frac{e^{-2N|\alpha|^2} (1 - e^{4|\alpha|^2})}{1 + e^{-2N|\alpha|^2} \cos\theta}. \quad (7.57)$$

Im Falle eines Zustandes mit nur $N = 2$ Moden, handelt es sich um die Verschränkung eines reinen Zustands. Neben der paarweisen Verschränkung kann auch die Verschränkung zwischen drei und mehr Moden über den N -Tangle eines verschränkten kohärenten N -Modenzustands bestimmt werden [136] und lautet

$$\tau_N = \frac{(1 - e^{-4|\alpha|^2})^N}{(1 + e^{-2N|\alpha|^2} \cos\theta)^2} \quad (7.58)$$

Für die Verschränkung dreier Moden ergibt sich der 3-Tangle direkt über $\tau_3 = \mathcal{C}_{1(23)}^2 - 2\mathcal{C}_{12}^2$ als Kombination der paarweisen Concurrence der Teilsysteme.

7.1.2.2 Entanglement of Formation für Quasi-Bell-Zustände

Neben der Concurrence, die direkt aus der 4×4 -Dichtematrix des Zwei-Moden-Systems gewonnen wird, bietet sich als alternatives Verschränkungsmaß das *Entanglement of Formation* an, das für reinen Zustand der von Neumann-Entropie der reduzierten Dichtematrix für jeweils eine Mode entspricht:

$$E_f = -\text{Tr}(\rho_1 \log_2 \rho_1) = -\text{Tr}(\rho_2 \log_2 \rho_2), \quad \text{mit} \quad \rho_1 = \text{Tr}_2 \rho_{12}, \quad \rho_2 = \text{Tr}_1 \rho_{12} \quad (7.59)$$

und sich im Falle eines Zustands

$$|\alpha_1, \alpha_2, \theta\rangle = \frac{|\alpha_1\rangle_1 |\alpha_2\rangle_2 \pm |-\alpha_1\rangle_1 |-\alpha_2\rangle_2}{\sqrt{2(1 + e^{-2|\alpha_1|^2 - 2|\alpha_2|^2})}} \quad (7.60)$$

aus den beiden Eigenwerten λ_{\pm} der reduzierten Dichtematrix einer Mode zu

$$E_f = -\lambda_+ \log_2 \lambda_+ - \lambda_- \log_2 \lambda_-, \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - N^4 (1 - e^{-4|\alpha_1|^2})(1 - e^{-4|\alpha_2|^2})} \quad (7.61)$$

ergibt. Für einen gemischten Zustand kann das Entanglement of Formation durch

$$E_f = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right), \quad \text{mit} \quad h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x) \quad (7.62)$$

über die Concurrence bestimmt werden [186, 187]. In Abb.7.2 sind Beispiele der vorgestellten Verschränkungsmaße für kohärent verschränkte Zustände in Abhängigkeit der Parameter α und θ dargestellt.

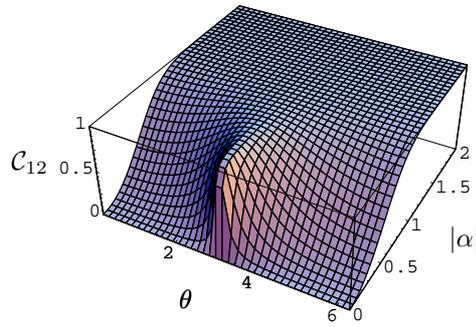
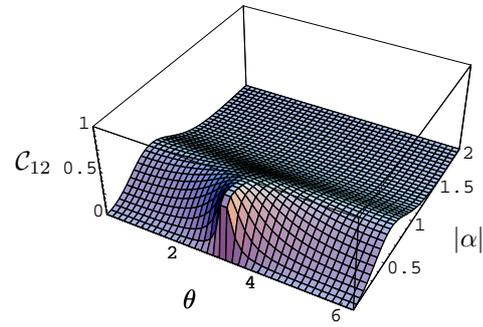
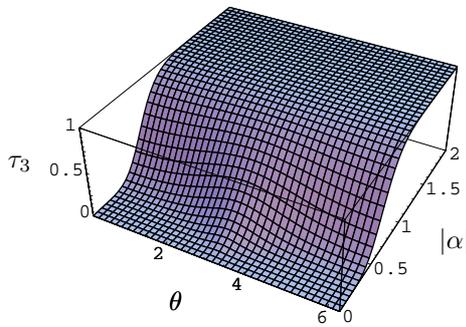
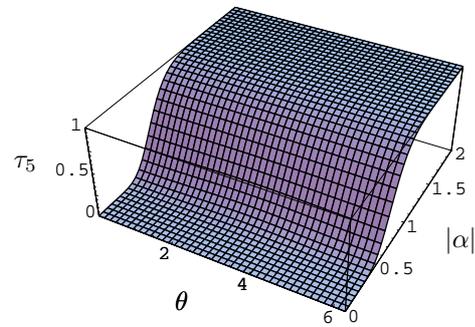
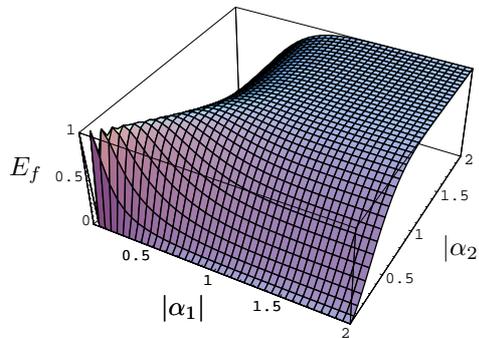
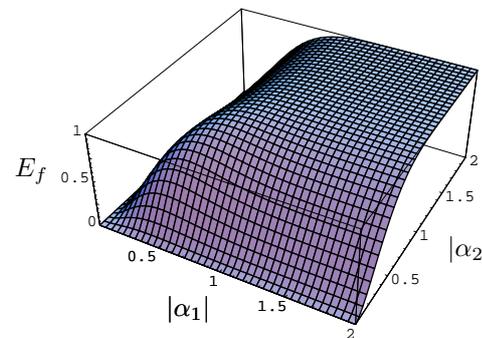
(a) Concurrence für reinen Zustand $N = 2$.(b) Concurrence für gemischten Zustand ρ_{12} für $N = 3$.(c) Tangle für $N = 3$ (d) Tangle für $N = 5$ (e) Entanglement of formation für $\theta = \pi$.(f) Entanglement of formation für $\theta = \frac{3}{4}\pi$.

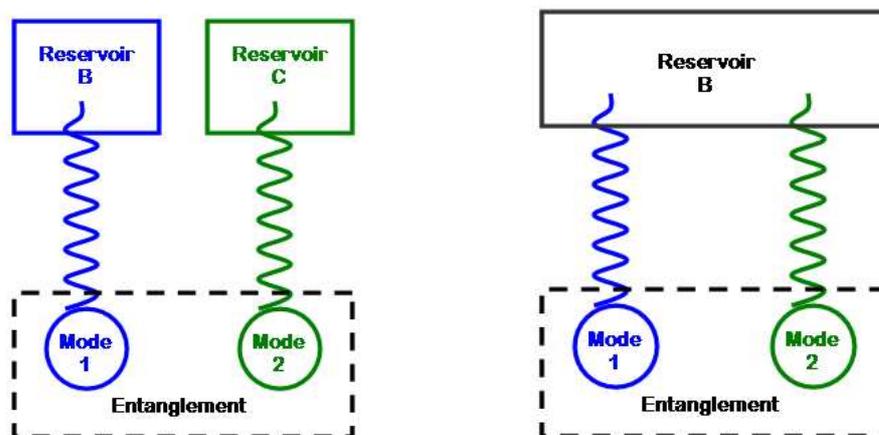
Abbildung 7.2: Die Verschränkungsmaße Concurrence (7.57), N -Tangle (7.58) und Entanglement of Formation (7.61) für unterschiedliche verschränkte kohärente Zustände.

7.2 Zwei-Moden-Zustände unter Markovscher Evolution

Die vorgestellten Separabilitätskriterien und Verschränkungsmaße sollen nun im Folgenden dazu benutzt werden die zeitliche Entwicklung verschränkter Zwei-Moden-Zustände zu untersuchen. Zunächst werden die Ergebnisse für Markovsche Mastergleichungen zusammengestellt bevor im Kapitel 7.3 auf nicht-Markovsche Effekte eingegangen wird. Die beiden Moden gleicher Frequenz werden durch die Hamilton-Operatoren

$$H_{S1} = \hbar\omega_0 \left(a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2} \right) \quad \text{und} \quad H_{S2} = \hbar\omega_0 \left(a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2} \right) \quad (7.63)$$

beschrieben und seien untereinander nicht gekoppelt. Unterschieden wird ebenfalls nach Zwei- und Ein-Reservoir-Modellen, wobei entweder jede der Moden an ein separates Bad gekoppelt ist oder beide Moden mit einem gemeinsamen Bad wechselwirken. Die Abbildung 7.3 soll den Unterschied von Ein- und Zwei-Reservoir-Modell visualisieren. Im Zwei-Reservoir-Modell geht die anfängliche Verschränkung sowohl im Markovschen als auch im Nicht-Markovschen Fall verloren. Im Ein-Reservoir-Modell besteht eine indirekte Kopplung, vermittelt über die einzelnen Badfreiheitsgrade. Dies verändert die zeitliche Entwicklung des verschränkten Zwei-Moden-Zustands. Wird auf die Born-Approximation verzichtet bzw. das exakte QBM-Modell zugrundegelegt, können die beiden Moden auch im stationären Zustand unterhalb einer kritischen Temperatur verschränkt sein, wie im anschließenden Abschnitt 7.3 gezeigt wird.



(a) Zwei-Reservoir-Modell: Die zwei anfangs miteinander verschränkten Moden sind jeweils an ein separates Reservoir gleicher Temperatur gekoppelt. Im stationären Zustand sind die zwei Moden unkorreliert.

(b) Ein-Reservoir-Modell: Die zwei anfangs miteinander verschränkten Moden sind an ein gemeinsames Reservoir gekoppelt. Im stationären Zustand können die beiden Moden unterhalb einer kritischen Temperatur verschränkt bleiben.

Abbildung 7.3: Ein- und Zwei-Reservoir-Modell im Vergleich. Die beiden verschränkten Moden wechselwirken nicht direkt miteinander. Im Falle eines gemeinsamen Bades besteht dennoch eine indirekte Kopplung, vermittelt über die einzelnen Badmoden. Die zeitliche Entwicklung eines verschränkten Zwei-Moden-Zustands innerhalb der beiden Modelle wird in diesem Kapitel untersucht und dabei der Markovsche und nicht-Markovsche Fall unterschieden.

7.2.1 Zeitliche Entwicklung der Verschränkung im Zwei-Reservoir Modell

Die Kopplung an die Bäder wird durch den RWA-Wechselwirkungs-Hamilton-Operator

$$H_{\text{int}} \sim \hat{a}_1 \sum_{k=1}^{\infty} b_k^\dagger + \hat{a}_1^\dagger \sum_{k=1}^{\infty} b_k + \hat{a}_2 \sum_{l=1}^{\infty} c_l^\dagger + \hat{a}_2^\dagger \sum_{l=1}^{\infty} c_l \quad (7.64)$$

beschrieben, wobei die Operatoren b_k und c_l die einzelnen Badmoden der beiden Bäder bezeichnen sollen. Für unkorrelierte Bäder ergibt sich die Evolutionsgleichung einfach als Summe zweier einzelner Mastergleichungen (2.14) im Wechselwirkungsbild zu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\gamma_\downarrow}{2} \sum_{j=1}^2 \left[2a_j \rho a_j^\dagger - a_j^\dagger a_j \rho - \rho a_j^\dagger a_j \right] + \frac{\gamma_\uparrow}{2} \sum_{j=1}^2 \left[2a_j^\dagger \rho a_j - a_j a_j^\dagger \rho - \rho a_j a_j^\dagger \right], \quad (7.65)$$

wobei die Koeffizienten über $\gamma_\downarrow = \frac{D_p}{\hbar\omega_0} + \frac{\gamma_p}{2} = \gamma(\bar{n} + 1)$ und $\gamma_\uparrow = \frac{D_p}{\hbar\omega_0} - \frac{\gamma_p}{2} = \gamma\bar{n}$ mit den stationären Werten $D_p = \frac{\hbar\omega_0}{2}(2\bar{n} + 1)$ und $\gamma_p = \gamma$ der korrespondierenden Fokker-Planck-Gleichung zusammenhängen. Für eine Vakuum-Umgebung mit $\bar{n} \rightarrow 0$ ist $\gamma_\downarrow = \gamma$ und $\gamma_\uparrow = 0$.

7.2.1.1 Markovsche Dynamik des Quasi-EPR-Zustands

Nun soll die Zeitentwicklung der Verschränkung des gequetschten Zwei-Moden Zustands aus Abschnitt 5.1.2.3 untersucht werden. Da sich die Wigner-Funktion für unendliches Squeezing $|\xi| \rightarrow \infty$ dem perfekt korrelierten und maximal verschränkten EPR-Zustand $\sim \delta(q_1 - q_2)\delta(p_1 + p_2)$ annähert, wird ein gequetschter Zwei-Moden-Zustand in der Literatur auch als Quasi-EPR-Zustand bezeichnet. Experimentell realisiert wird er meist durch einen *twin beam state of radiation* (TWB-State) [188]. Die Kovarianzmatrix (5.23) dieses Zustands liegt in der Standardform V_I gem. Gl. (7.19) vor. Unter einer Markovschen Zeitentwicklung gemäß obiger Mastergleichung (7.65) ist die Zeitentwicklung der Matrixelemente durch

$$a(t) = ae^{-\gamma t} + \Delta(t), \quad b(t) = be^{-\gamma t} + \Delta(t) \quad \text{und} \quad c_\pm(t) = \pm c_\pm e^{-\gamma t} \quad (7.66)$$

mit $\Delta(t) = (2\bar{n} + 1)(1 - e^{-\gamma t})$ gegeben, so dass sich das PPT-Kriterium (7.23) in der zeitabhängigen Form

$$\left[(a + b)e^{-\gamma t} + \Delta(t) \right]^2 - \left[(a - b)^2 + 2(c_+^2 + c_-^2) \right] e^{-2\gamma t} \quad (7.67)$$

$$+ 2e^{-\gamma t} \sqrt{(a - b)^2 + (c_+ - c_-)^2 + (c_+^2 - c_-^2)^2} e^{-2\gamma t} \geq 1 \quad (7.68)$$

schreiben lässt [189]. Im Falle eines symmetrischen Zustands mit $a = b$ und $c_+ = -c_-$ lässt sich dies weiter vereinfachen zu

$$2(a - |c_+|)e^{-\gamma t} + \Delta(t) \geq 1. \quad (7.69)$$

Für einen gequetschten Zwei-Moden-Zustand ist $a = b = \frac{1}{2} \cosh(2\xi)$ und $c_\pm = \pm \frac{1}{2} \sinh(2\xi)$, so dass sich schließlich nach Einführung der Separabilitätsfunktion

$$S(t) = e^{-2\xi} e^{-\gamma t} + \Delta(t) - 1 \quad (7.70)$$

die Separabilitätszeit, als Zeit nach der der Zustand nicht mehr verschränkt ist, aus der Bedingung $S(t) \geq 0$ zu

$$\tau_{s2b} = \frac{1}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{1 - e^{-2\xi}}{2\bar{n}} \right) \quad (7.71)$$

bestimmen lässt [47, 188, 173]. Die der Mastergleichung (7.65) zugrundeliegende Born-Näherung bzw. Schwachkopplungs-Näherung führt dazu, dass die Separabilitätszeit (7.71) in einer Vakuum-Umgebung unendlich groß wird, also $\tau_{s2b} \rightarrow \infty$ für $\bar{n} \rightarrow 0$.

7.2.1.2 Markovsche Dynamik des Quasi-Bell-Zustands

Verschränkte kohärente Zwei-Moden-Zustände, die in Kapitel 5.2.2.3 bereits eingeführt wurden, werden in der Literatur gelegentlich auch als Quasi-Bell Zustände bezeichnet um die Analogie zu einem Zwei-Qubit System aufzuzeigen [133, 134, 135]. An dieser Stelle wird speziell der Zustand

$$|\alpha, \theta, 2\rangle = \frac{|\alpha_+\rangle_1 |\alpha_+\rangle_2 + e^{i\theta} |\alpha_-\rangle_1 |\alpha_-\rangle_2}{\sqrt{2 + 2e^{-4|\alpha|^2} \cos \theta}}, \quad (7.72)$$

betrachtet. Die zeitliche Entwicklung des Entanglement of Formation wurde für den Fall zweier unkorrelierter Bäder der Temperatur Null für solche Zustände bereits untersucht [142]. Für die Concurrence ergeben sich vergleichbare Ergebnisse. Die Markovsche Dynamik unter Gleichung (7.65) für eine Vakuum-Umgebung mit $\gamma_{\downarrow} = \gamma$ und $\gamma_{\uparrow} = 0$ führt nach Einführung der zeitabhängigen orthogonalen Basisvektoren

$$|\mathbf{0}(t)\rangle \equiv |\alpha_+(t)\rangle, \quad |\mathbf{1}(t)\rangle \equiv \frac{|\alpha_-(t)\rangle - e^{-2e^{-\gamma t}|\alpha|^2} |\alpha_+(t)\rangle}{\sqrt{1 - e^{-4e^{-\gamma t}|\alpha|^2}}} \quad (7.73)$$

mit $|\alpha_{\pm}(t)\rangle = |\pm \alpha_0 e^{-\gamma t/2}\rangle$, auf die zeitabhängige Dichtematrix

$$\rho_{12}(t) = N_0^2 \begin{pmatrix} 2p^2(1 + q \cos \theta) & pM(1 + qe^{i\theta}) & pM(1 + qe^{-i\theta}) & 0 \\ pM(1 + qe^{-i\theta}) & M^2 & M^2 qe^{-i\theta} & 0 \\ pM(1 + qe^{i\theta}) & M^2 qe^{i\theta} & M^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.74)$$

mit Normierung $N_0 = (2 + 2e^{-4|\alpha|^2} \cos \theta)^{-1}$ und den zeitabhängigen Koeffizienten

$$p(t) = e^{-2e^{-\gamma t}|\alpha|^2}, \quad q(t) = e^{-4(1-e^{-\gamma t})|\alpha|^2}, \quad M(t) = \sqrt{1 - p^2(t)}. \quad (7.75)$$

Daraus ergeben sich die entsprechenden Eigenwerte zu

$$\lambda_1 = N_0^2 M^2(t) [1 + q(t)], \quad \lambda_2 = N_0^2 M^2(t) [1 - q(t)], \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \quad (7.76)$$

Die zeitabhängige Concurrence lautet also folglich

$$\mathcal{C}_{12}(t) = N^2 M^2(t) q(t) = \frac{1 - e^{-4e^{-\gamma t}|\alpha|^2}}{1 - e^{-4|\alpha|^2} \cos \theta} e^{-4(1-e^{-\gamma t})|\alpha|^2}. \quad (7.77)$$

Diese fällt exponentiell für $t \rightarrow \infty$ auf Null ab, spiegelt also das Resultat einer gegen unendlich gehenden Separabilitätszeit τ_{s2b} des Quasi-EPR Zustands wider.

7.2.2 Zeitliche Entwicklung der Verschränkung im Ein-Reservoir Modell

Der RWA-Wechselwirkungs-Hamilton-Operator für die Kopplung der beiden Moden an ein gemeinsames Bad lautet

$$H_{\text{int}} \sim \sum_{i=1}^2 \left(\hat{a}_i \sum_k^{\infty} b_k^\dagger + \hat{a}_i^\dagger \sum_k^{\infty} b_k \right). \quad (7.78)$$

Die Markovsche Mastergleichung enthält im Vergleich zu (7.65) dann vier zusätzliche Terme und lautet im Wechselwirkungsbild [181]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & \frac{\gamma_{\downarrow}}{2} \sum_{j=1}^2 \left[2a_j \rho a_j^\dagger - a_j^\dagger a_j \rho - \rho a_j^\dagger a_j \right] + \frac{\gamma_{\uparrow}}{2} \sum_{j=1}^2 \left[2a_j^\dagger \rho a_j - a_j a_j^\dagger \rho - \rho a_j a_j^\dagger \right] \\ & + \frac{\gamma_{\downarrow}}{2} \left[2a_1 \rho a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2 \rho - \rho a_1^\dagger a_2 \right] + \frac{\gamma_{\uparrow}}{2} \left[2a_1 \rho a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2 \rho - \rho a_1^\dagger a_2 \right] \\ & + \frac{\gamma_{\downarrow}}{2} \left[2a_2 \rho a_1^\dagger - a_2^\dagger a_1 \rho - \rho a_2^\dagger a_1 \right] + \frac{\gamma_{\uparrow}}{2} \left[2a_2 \rho a_1^\dagger - a_2^\dagger a_1 \rho - \rho a_2^\dagger a_1 \right]. \end{aligned} \quad (7.79)$$

Daraus ergeben sich einige Unterschiede zu der im vorangegangenen Abschnitt behandelten Zeitentwicklung eines gequetschten Zwei-Moden-Zustands in unkorrelierten Bädern. In einem gemeinsamen Bad unterscheidet sich die zeitliche Entwicklung der Kovarianzen, weshalb die Standardform V_{II} die beste Wahl darstellt. Für identische Moden ist hier $n_1 = m_1$ und $n_2 = m_2$ und es ergibt sich

$$n_1(t) = \frac{1}{2} \left[2 \cosh(2\xi) + (2\bar{n} + 1 - e^{-2\xi})(1 - e^{-2\gamma t}) \right], \quad (7.80)$$

$$n_2(t) = \frac{1}{2} \left[2 \cosh(2\xi) + (2\bar{n} + 1 - e^{2\xi})(1 - e^{-2\gamma t}) \right], \quad (7.81)$$

$$c_1(t) = \frac{1}{2} \left[(2\bar{n} + 1 - e^{-2\xi})(1 - e^{-2\gamma t}) - \sinh(2\xi) \right], \quad (7.82)$$

$$c_2(t) = \frac{1}{2} \left[(2\bar{n} + 1 - e^{2\xi})(1 - e^{-2\gamma t}) + \sinh(2\xi) \right]. \quad (7.83)$$

Für die Standardform V_{II} mit $n_1 = m_1$ und $n_2 = m_2$ kann das PPT-Kriterium in der Form

$$(n_1 - |c_1|)(n_2 - |c_2|) \geq 1 \quad (7.84)$$

geschrieben werden. Werden die zeitabhängigen Kovarianzen in Standardform eingesetzt, ergibt sich als Separabilitätszeit [181]

$$\tau_{s1b} = \frac{1}{2\gamma} \ln \left(\frac{2\bar{n} + 1 - e^{-2\xi}}{2\bar{n} + 1 - e^{2\xi}} \right). \quad (7.85)$$

Die Zeit, in der die Verschränkung eines Quasi-EPR-Zustands verschwindet, ist somit bei der Bewegung in einem gemeinsamen Bad in der Regel größer als im Fall zweier unkorrelierter Bäder. Die Verschränkung bleibt nicht nur für $\bar{n} \rightarrow 0$ erhalten, sondern auch falls das anfängliche Squeezing groß genug ist und die Bedingung

$$\xi \geq \frac{1}{2} \ln(2\bar{n} + 1) \quad (7.86)$$

erfüllt ist [181]. Wie der nächste Abschnitt zeigen wird, existiert ein solcher Grenzwert für den anfänglichen Quetschparameter im QBM-Ein-Reservoir-Modell nicht.

7.3 Zwei Moden unter nicht-Markovscher Evolution

Die bisher dargestellten Resultate bezogen sich auf die Entwicklung unter Markovschen Mastergleichungen. Wird auf eine Born-Markovsche Näherung verzichtet, sollten sich in Bezug auf die Separabilitäts-Zeitskala Unterschiede ergeben. Insbesondere wird der Verzicht auf eine Schwachkopplungsannahme auch für eine Nulltemperatur-Umgebung zu einer endlichen Separabilitäts-Zeitskala führen.

7.3.1 Zeitliche Entwicklung der Verschränkung im Zwei-Reservoir Modell

Die Dynamik zweier identischer, nicht gekoppelter Moden in zwei unkorrelierten Bädern bzw. Quantenkanälen wird im QBM-Modell durch den Wechselwirkungs-Hamilton-Operator

$$H_{\text{int}} = -q_1 \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i^b - q_2 \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i^c \quad \text{mit} \quad \langle x_i^b x_j^c + x_i^c x_j^b \rangle = 0 \quad \forall i, j \quad (7.87)$$

bestimmt. Dieses Modell zweier unkorrelierter Bäder findet auch im Rahmen des quantenmechanischen Wärmetransports Anwendung, indem die zwei ungekoppelten Moden durch eine Kette harmonischer Oszillatoren ersetzt wird [190, 191, 192]. Die Mastergleichung für die reduzierte Dichtematrix des Zwei-Moden-Systems ergibt sich einfach als Summe der nicht-Markovschen HPZ-Mastergleichungen der einzelnen Moden

$$\dot{\rho} = \sum_{j=1}^2 \left\{ \left[\frac{p_j^2}{2i\hbar m} + \frac{m\gamma_q(t)q_j^2}{2i\hbar}, \rho \right] + \frac{\gamma_p(t)}{2i\hbar} [q_j, \{p_j, \rho\}] + \frac{D_{qp}(t)}{\hbar^2} [q_j, [p_j, \rho]] - \frac{D_p(t)}{\hbar^2} [q_j, [q_j, \rho]] \right\}, \quad (7.88)$$

bzw. geschrieben als Fokker-Planck-Gleichung im Phasenraum

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sum_{j=1}^2 \left[-\frac{p_j}{m} \frac{\partial W}{\partial q_j} + m\gamma_q(t)q_j \frac{\partial W}{\partial p_j} + \gamma_p(t) \frac{\partial(p_j W)}{\partial p_j} + D_{qp}(t) \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial p_j} + D_p(t) \frac{\partial^2 W}{\partial p_j^2} \right]. \quad (7.89)$$

Die zeitabhängigen HPZ-Koeffizienten sind dabei durch die Gleichungen (3.92) bis (3.95) gegeben. Wird die als sekundäre WCL-Approximation bezeichnete Näherung analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 3.3.3.2 durchgeführt, erhält man die Mastergleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\tilde{\gamma}_{\downarrow}(t)}{2} \sum_{j=1}^2 \left[2a_j \rho a_j^{\dagger} - a_j^{\dagger} a_j \rho - \rho a_j^{\dagger} a_j \right] + \frac{\tilde{\gamma}_{\uparrow}(t)}{2} \sum_{j=1}^2 \left[2a_j^{\dagger} \rho a_j - a_j a_j^{\dagger} \rho - \rho a_j a_j^{\dagger} \right], \quad (7.90)$$

wobei die Koeffizienten wie in (3.131) aus den HPZ-Koeffizienten gewonnen werden. Zu beachten ist das auch für $\bar{n} \rightarrow 0$ der zeitabhängige Koeffizient $\tilde{\gamma}_{\uparrow}(t)$ zunächst von Null verschieden ist und erst für Zeiten $t \gg \Gamma^{-1}$ auf Null abfällt. Mit dieser Mastergleichung können wiederum nicht-Markovsche Effekte im Schwachkopplungsregime untersucht werden.

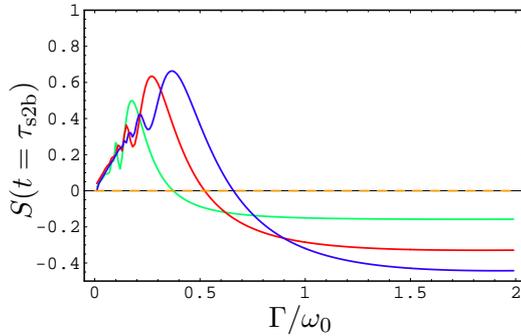
7.3.1.1 Nicht-Markovsche Dynamik des Quasi-EPR-Zustands

Mit der Mastergleichung (7.90) können nicht-Markovsche Einflüsse auf die Separabilitätszeit untersucht werden. Die Lösung dieser Mastergleichung für den Fall einer Mode wurde

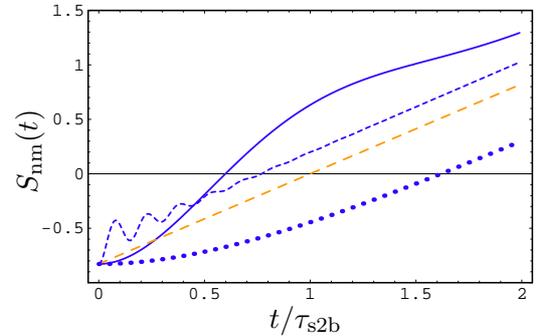
bereits in Kapitel 5.1.3 angegeben. Für zwei unkorrelierte Bäder ist die Vorgehensweise analog. Letztlich muss in der Lösung für einen Quasi-EPR-Zustand (7.66) nur die Ersetzung $\gamma t \rightarrow \Gamma_p(t) = \int_0^t ds \gamma_p(s)$ und $\Delta(t) \rightarrow \Delta_p(t) = \frac{2e^{-\Gamma_p(t)}}{\hbar m \omega_0} \int_0^t ds e^{\Gamma_p(s)} D_p(s)$ vorgenommen werden. Für die Separabilitätsfunktion im nicht-Markovschen Regime erhält man folglich [189]

$$S_{\text{nm}}(t) = e^{-2\xi} e^{-\Gamma_p(t)} + \Delta_p(t) - 1 \stackrel{t \leq \tau_b}{\approx} e^{-2\xi} \left(1 - \int_0^t ds \gamma_p(s) \right) + \int_0^t ds D_p(s) - 1. \quad (7.91)$$

Das Verhältnis von Badkorrelationszeit $\tau_b \sim \Gamma^{-1}$ (mit Abschneidefrequenz Γ) und Separabilitätszeit bestimmt den qualitativen Verlauf der Separabilitätsfunktion $S_{\text{nm}}(t)$ im Vergleich zum Markovschen Fall. Für kleine Abschneidefrequenz bzw. für relativ lange Badkorrelationszeiten zeigt $S_{\text{nm}}(t)$ die charakteristischen Oszillationen, die schon im Rahmen der Nichtgleichgewichtsdynamik und Dekohärenz im nicht-Markovschen Regime beobachtet wurden. Die Abbildung 7.4 zeigt die nicht-Markovsche Separabilitätsfunktion (7.91) im Vergleich zum Markovschen Resultat (7.70). Es zeigt sich, dass die Auswirkungen auf die Separabilitätszeit nicht pauschal vorhergesagt werden können. Die Separabilitätszeit im nicht-Markovschen Regime kann sowohl kürzer, als auch länger als τ_{s2b} sein. Da eine Variation der Abschneidefrequenz Γ auch den Dämpfungsparameter $\gamma_p(\infty)$ aus Gleichung (3.96) verändert, ist zu beachten, dass zum korrekten Vergleich auch in den Markovschen Ausdrücken für $S(t)$ und τ_{s2b} die Dämpfungskonstante γ durch $\gamma_p(\infty)$ ersetzt werden muss. Die Abb. 7.4 macht deutlich, dass für *Out-of-Resonance*-Bäder mit einer Abschneidefrequenz $\Gamma \ll \omega_0$ der Zustand für gegebene übrige Parameter in der Regel schneller separabel wird. Für Werte $\Gamma \geq \omega_0$ bleibt die Verschränkung länger bestehen, und für $\Gamma \gg \omega_0^2/\gamma$ erhält man schließlich eine Übereinstimmung mit dem Markovschen Fall.



(a) Wert der Separabilitätsfunktion S_{nm} zur Zeit ($t = \tau_{\text{sep}}$) in Abhängigkeit der Abschneidefrequenz Γ für drei unterschiedliche Werte des Quetschparameters, $\xi = 0.9$ (blau), $\xi = 0.3$ (rot) und $\xi = 0.1$ (grün). Positive Werte bedeuten, dass der Zustand im nicht-Markovschen Regime zur (Markovschen) Separabilitätszeit bereits separabel ist, für negative Werte ist er noch verschränkt.



(b) Zeitabhängigkeit der Separabilitätsfunktion $S_{\text{nm}}(t)$ für $\xi = 0.9$ für drei unterschiedliche Werte der Abschneidefrequenz: $\Gamma = 0.4\omega_0$ (blau), $\Gamma = 0.1\omega_0$ (blau gestrichelt) und $\Gamma = 2\omega_0$ (gepunktet) im Vergleich zum Markovschen Fall mit modifizierter Dämpfungskonstante $\gamma = \gamma_p(\infty)$ (gelb). Die Separabilitätszeit kann im nicht-Markovschen Fall sowohl kleiner als auch größer als τ_{sep} sein.

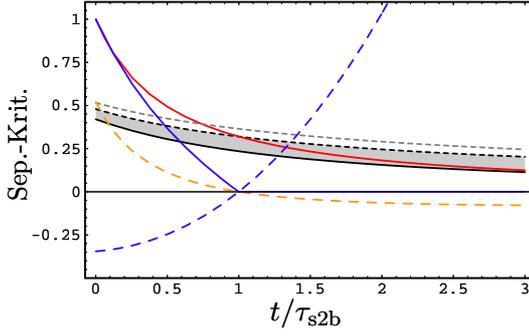
Abbildung 7.4: Nicht-Markovsche Separabilitätsfunktion $S_{\text{nm}}(t)$ im Vergleich zum Markovschen Fall für unterschiedliche Werte des Quetschparameters ξ und der Abschneidefrequenz Γ . Da eine Variation von Γ auch den Dämpfungsparameter $\gamma_p(\infty)$ aus Gleichung (3.96) verändert, muss zum korrekten Vergleich in den Markovschen Ausdrücken für $S(t)$ und τ_{s2b} auch γ durch $\gamma_p(\infty)$ ersetzt werden. Übrige Parameter: $\gamma = 0.01m\omega_0$ und $T = 100\hbar\omega_0/k$.

7.3.1.2 Quasi-EPR-Zustand bei starker System-Bad-Wechselwirkung

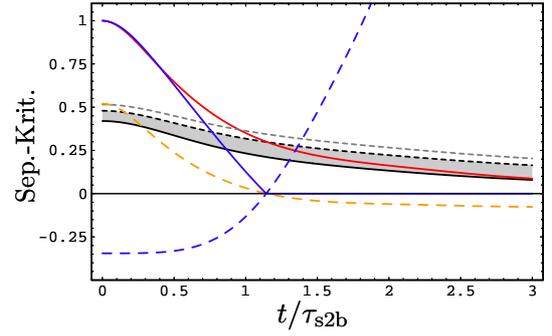
Sollen neben den reinen nicht-Markovschen Effekten auch Einflüsse einer starken System-Bad-Wechselwirkung mit einbezogen werden, reicht die Mastergleichung (7.90) zur Beschreibung nicht mehr aus, und es muss die exakte HPZ-Mastergleichung (7.88) herangezogen werden. In diesem Fall sind auch die übrigen Kovarianzelemente zeitabhängig und verschwinden erst im stationären Zustand. Die Kovarianzmatrix liegt also nicht mehr von vornherein in den Standardformen V_I oder V_{II} vor und die daraus gewonnenen Separabilitätskriterien sind nicht unmittelbar anwendbar. Eine Transformation auf Standardform ist zwar mittels lokaler symplektischer Transformationen möglich, allerdings nicht nötig. Zum einen kann das PPT-Kriterium in seiner ursprünglichen Form (7.18) direkt angewendet werden, indem die vier Kovarianzmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{V} direkt berechnet werden können, zum anderen sind auch die im Abschnitt 7.1.1.5 vorgestellten, auf den Purities der Teilsysteme und des Gesamtsystems beruhenden Kriterien leicht anwendbar.

Die Abbildung 7.5 zeigt die zeitliche Entwicklung der Purity des Zwei-Moden-Systems in den durch die Kriterien (7.33) bestimmten Bereichen. Der in der Abbildung grau unterlegte Bereich markiert das Gebiet, in dem die Purity des Gesamtsystems gem. Gl. (7.33) liegen muss, damit Separabilität vorliegt. Der Zeitpunkt, zu dem sie in diesen Bereich eintritt, stimmt mit dem durch das PPT-Kriterium (7.18) erhaltenen Zeitpunkt überein (Übergang der blau gestrichelten Kurve vom negativen in den positiven Bereich). Die logarithmische Negativität (blau) gem. Gl. (7.41) misst den Grad der Verschränkung und wird Null falls Separabilität vorliegt. Wie aus der Abbildung hervorgeht, liefert sie ebenfalls jeweils das gleiche Resultat in Bezug auf die Separabilitätszeit wie die zuvor genannten Kriterien. Da wie bereits oben erwähnt, eine Variation der Abschneidefrequenz Γ auch den Dämpfungsparameter $\gamma_p(\infty)$ aus Gleichung (3.96) verändert, ist zu beachten, dass zum korrekten Vergleich auch in der Markovschen Separabilitätszeit τ_{s2b} die Dämpfungskonstante γ durch $\gamma_p(\infty)$ ersetzt werden muss.

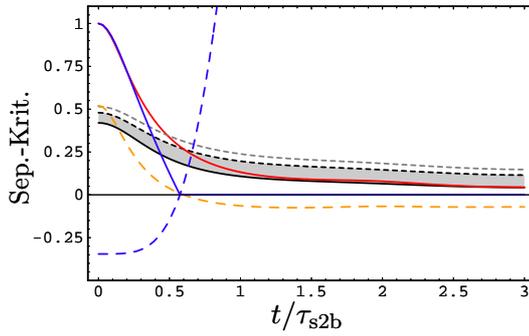
Es wird deutlich, dass je nach Parameterkombination die Markovsche Separabilitätszeit im QBM-Modell unter- oder überschritten werden kann. Die nicht-Markovsche Separabilitätszeit wird relativ zur Markovschen Separabilitätszeit jedoch tendenziell um so kürzer, je stärker die System-Bad-Wechselwirkung in Form des Parameters γ gewählt wird. Der störende Einfluss des Bades vermindert die Lebensdauer der anfänglichen Verschränkung also in stärkerem Maße, als es der ebenfalls in die Separabilitätszeit t_{s2b} eingehende Dämpfungsparameter γ bzw. $\gamma_p(\infty)$ erwarten lässt. Die Auswirkungen nicht-Markovscher Einflüsse müssen folglich unterschieden werden in ein moderat nicht-Markovsches Regime mit $\Gamma \geq \omega_0$ und in ein stark nicht-Markovsches Regime für Out-of-Resonance Bäder $\Gamma \ll \omega_0$. Moderat nicht-Markovsche Einflüsse führen zu einem langsameren Verlust der speziellen quantenmechanischen Eigenschaften und damit zu einer verlängerten Separabilitätszeit. Ist der nicht-Markovsche Charakter stärker ausgeprägt – im Sinne eines Out-of-Resonance Bades – so verkehrt sich dieser Effekt in Gegenteil und die Separabilitätszeit wird verkürzt.



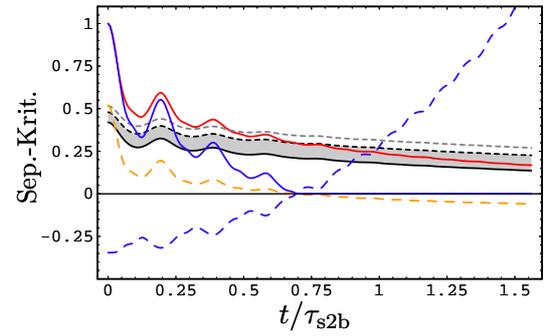
(a) Ohmsche WCL-Näherung des QBM-Modells mit $\gamma = 0.01m\omega_0$. Der Zustand wird zur Zeit $t = \tau_{s2b}$ separabel.



(b) Mittlere Kopplungsstärke $\gamma = 0.5m\omega_0$ und Abschnidefrequenz $\Gamma = 0.5\omega_0$ führt zu verlangelter Separabilitätszeit.



(c) Starke System Bad-Wechselwirkung mit $\gamma = 10m\omega_0$ und kleiner Abschnidefrequenz $\Gamma = 0.1m\omega_0$ reduziert die Separabilitätszeit.



(d) Out-of-Resonance Bad mit $\Gamma = 0.1m\omega_0$ und $\gamma = 0.01m\omega_0$ bei hoher Temperatur $T = 100\hbar\omega_0/k$ mit charakteristischen Oszillationen.

Abbildung 7.5: Zeitliche Entwicklung der Verschränkung eines anfänglichen gequetschten Zwei-Moden-Zustands im QBM-Zwei-Reservoir-Modell in Form der in Form der logarithmischen Negativität (blau) sowie der Purity des Zwei-Moden-Systems (rot) in den durch die Kriterien (7.33) bestimmten Bereichen (grau und schwarz gestrichelt). Die Zeit ist dargestellt in Einheiten der Markovschen Separabilitätszeit τ_{s2b} . Je nach Parameterkombination kann diese im QBM-Modell unter- oder überschritten werden. Die Badtemperatur liegt in Abb. (a)-(c) bei $T = 3.5\hbar\omega_0/k$ und der anfängliche Squeezing-Parameter ist stets $\xi = 0.5$, so dass wegen $\tilde{\nu}_- = \frac{1}{2}e^{-2\xi}$ folgt $E_{\mathcal{N}} = 1$. Weitere Erlauerungen finden sich im Text.

7.3.1.3 Nicht-Markovsche Dynamik des Quasi-Bell-Zustands

Im Folgenden soll die Dynamik eines verschränkten kohärenten Zustands in dem durch die Mastergleichung (7.90) beschriebenen nicht-Markovschen Regime untersucht werden. Für eine Nulltemperatur-Umgebung geschieht dies wiederum in einfacher Weise durch die Ersetzung

$$\gamma t \rightarrow \Gamma_p(t) = \int_0^t ds \gamma_p(s) \quad \text{und} \quad \Delta(t) \rightarrow \Delta_p(t) = \frac{2e^{-\Gamma_p(t)}}{\hbar m \omega_0} \int_0^t ds e^{\Gamma_p(s)} D_p(s) \quad (7.92)$$

in der Markovschen Lösung (7.75) des Quasi-Bell-Zustands. Man erhält also eine zeitabhängige 4×4 -Matrix analog zu (7.74) mit zeitabhängigen Koeffizienten

$$p(t) = e^{-2e^{-\Gamma_p(t)}|\alpha|^2}, \quad q(t) = e^{-4\Delta_p(t)|\alpha|^2}, \quad M(t) = \sqrt{1 - p^2(t)}, \quad (7.93)$$

was mit den entsprechenden Eigenwerten $\lambda_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$ auf die Concurrence

$$C_{12}(t) = N^2 M^2(t) q(t) = \frac{1 - e^{-4e^{-\Gamma p(t)} |\alpha|^2}}{1 - e^{-4|\alpha|^2} \cos \theta} e^{-4\Delta_p(t) |\alpha|^2} \quad (7.94)$$

führt. Die Abbildungen 7.6a-d zeigen die zeitliche Entwicklung der Concurrence $C_{12}(t)$ (rot) für einen verschränkten kohärenten Zustand mit $|\Phi_+\rangle = |\alpha, \theta = 0, N = 2\rangle$ in Umgebungen mit unterschiedlich ausgeprägten nicht-Markovschen Charakter in Form des Verhältnisses Γ/ω_0 . Qualitativ ergibt sich das gleiche Verhalten wie im Falle der Separabilitätsfunktion eines Quasi-EPR-Zustands. Ausgehend von einem annähernd Ohmschen Bad ($\Gamma \gg \omega_0$) mit guter Übereinstimmung von Markovschen und nicht-Markovschen Verhalten (Abb.7.6a) führt eine Reduzierung der Abschneidefrequenz zu einer im Zeitverlauf länger erhalten bleibenden Verschränkung, verglichen mit den Markovschen Resultaten (Abb.7.6b,c). Im Extrembereich eines Out-of-Resonance Bades mit $\Gamma < \omega_0$ bleibt dieses Verhältnis im Verlauf der Funktionen nur für kleine Zeiten erhalten, während es sich für größere Zeiten schließlich umkehrt, mit einem schnelleren Abfall der nicht-Markovschen Concurrence, wie in Abb. 7.6d dargestellt.

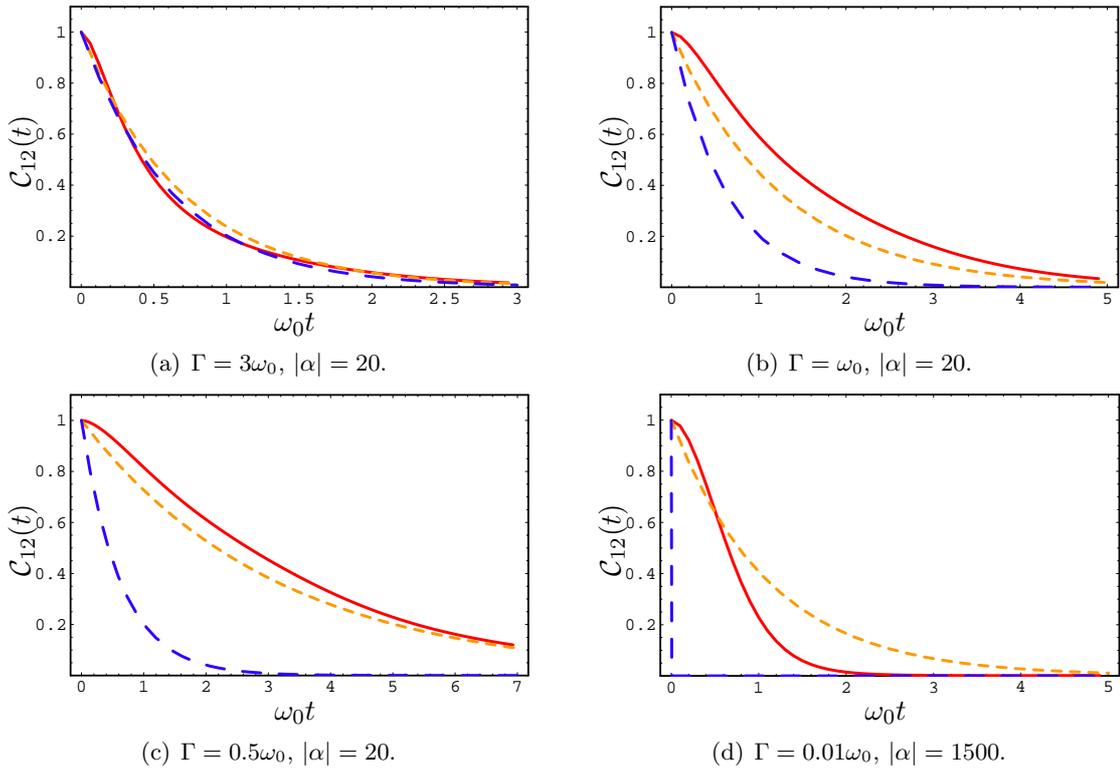


Abbildung 7.6: Zeitliche Entwicklung der Concurrence $C_{12}(t)$ (rot) für einen verschränkten kohärenten Zwei-Moden-Zustand $|\Phi_+\rangle = |\alpha, \theta = 0, N = 2\rangle$ in einem Nulltemperatur-Reservoir mit unterschiedlich ausgeprägten nicht-Markovschen Charakter in Form des Verhältnisses Γ/ω_0 . Zugrunde liegt die nicht-Markovsche Mastergleichung in Schwachkopplungsnaheung (3.130) mit $\gamma = 10^{-3} m\omega_0^2$. Zum Vergleich die Markovsche Entwicklung mit Relaxationszeit m/γ (blau gestrichelt) und mit an Γ angepasster Relaxationszeit τ_γ aus Gleichung (3.134) (gelb gestrichelt). Im moderat nicht-Markovschen Regime bleibt die Verschränkung länger erhalten (b, c), für ein Out-of-Resonance Bad mit $\Gamma \ll \omega_0$ geht die Verschränkung schneller verloren (d). Das Verhalten ist vergleichbar mit der Separabilitätsfunktion des Quasi-EPR-Zustands in Abb. 7.4.

7.3.2 Zeitliche Entwicklung der Verschränkung im Ein-Reservoir Modell

Die Dynamik zweier identischer Moden in einem gemeinsamen Bad bzw. korreliertem Quantenkanal wird im QBM-Modell durch den Wechselwirkungs-Hamilton-Operator

$$H_{\text{int}} \sim -q_1 \sum_{i=1}^{\infty} c_i q_i - q_2 \sum_{i=1}^{\infty} c_i q_i \quad (7.95)$$

beschrieben. Die zugehörige HPZ-Mastergleichung zweier identischer Moden in einem gemeinsamen Bad ist durch

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & \frac{1}{i\hbar} [H_{S1} + H_{S2}, \rho] + \frac{m\delta\Omega^2(t)}{2i\hbar} [(q_1 + q_2)^2, \rho] + \frac{\gamma_p(t)}{2i\hbar} [(q_1 + q_2), \{(p_1 + p_2), \rho\}] \\ & + \frac{D_{qp}(t)}{\hbar^2} [(q_1 + q_2), [(p_1 + p_2), \rho]] - \frac{D_p(t)}{\hbar^2} [(q_1 + q_2), [(q_1 + q_2), \rho]] \end{aligned} \quad (7.96)$$

gegeben [193], und lautet als Fokker-Planck-Gleichung im Phasenraum geschrieben

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & - \sum_{j=1}^2 \left(\frac{p_j}{m} \frac{\partial W}{\partial q_j} - m\omega_0^2 q_j \frac{\partial W}{\partial p_j} \right) + \sum_{j,k=1}^2 \left[m\delta\Omega^2(t) q_j \frac{\partial W}{\partial q_k} + \gamma_p(t) \frac{\partial(p_j W)}{\partial p_k} \right] \\ & + \sum_{j,k=1}^2 \left[D_q(t) \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial p_k} + D_p(t) \frac{\partial^2 W}{\partial p_j \partial p_k} \right]. \end{aligned} \quad (7.97)$$

Es fällt auf, dass die Mastergleichung (7.96) nur noch von der Normalmode $R = q_1 + q_2$ bzw. $P_R = p_1 + p_2$ abhängt, nicht mehr jedoch von der Mode der Relativbewegung $q_1 - q_2$. Dies ist zum einen Folge der gewählten Kopplung an die Koordinate $(q_1 + q_2)$, zum anderen durch die Wahl identischer Moden bedingt. In diesem Fall unterliegt die Mode der Relativbewegung keiner Dissipation [123, 194]. Deshalb sind zusätzliche Annahmen über die Dynamik der Relativbewegung nötig. Eine Diskussion dieses Sachverhalts und eine Analyse der Zustandsentwicklung des Zwei-Moden-Systems in einem gemeinsamen Bad wird im folgenden Abschnitt über starke System-Bad-Wechselwirkung erfolgen.

7.3.2.1 Das modifizierte Ein-Reservoir Modell

Der Hamilton-Operator (7.95) beschreibt eine bilineare Kopplung in den Koordinaten der beiden Moden und den Koordinaten der Badmoden. Sie entspricht de facto einer Kopplung an die Schwerpunktskoordinate $R = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ des Zwei-Moden-Systems. Um nicht-Markovsche Effekte unter schwacher System-Bad-Wechselwirkung zu studieren ist dieser Ansatz ausreichend. Ähnlich wie im ursprünglichen Caldeira-Leggett Modell führt eine starke System-Bad-Wechselwirkung allerdings zu einer Frequenzverschiebung des Oszillators, die durch einen zusätzlichen Selbstwechselwirkungsterm $\sim R^2$ kompensiert werden sollte. Der entsprechende Wechselwirkungs-Operator lautet dann

$$H_{\text{int}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i (q_1 + q_2) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^2}{8m_i \omega_i^2} (q_1^2 + q_2^2) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^2}{4m_i \omega_i^2} q_1 q_2 \quad (7.98)$$

und garantiert, dass die Eigenwertgleichung für die Normalfrequenzen ν des Gesamtsystems

$$[\nu^2 - \omega_1^2 + h(\nu)] [\nu^2 - \omega_2^2 + h(\nu)] - h^2(\nu) = 0 \quad \text{mit} \quad h(\nu) = \sum_i \frac{c_i^2 \nu^2}{4\omega_i^2 (\omega_i^2 - \nu^2)} \quad (7.99)$$

nur Eigenwerte $\nu \geq 0$ liefert (wobei alle Massen gleich eins gesetzt wurden). Entsprechend wird die Frequenzverschiebung im stationären Zustand kompensiert und die physikalisch messbare und die ursprüngliche Frequenz stimmen überein [195]. Der Hamilton-Operator des Gesamtsystems setzt sich also zusammen aus den Hamilton-Operatoren der beiden Moden (7.63), dem Hamilton-Operator $H_b = \sum_i \hbar \omega_i (b^\dagger b + 1)$ des Bades sowie dem Wechselwirkungsoperator (7.98). Das Gleichungssystem der Heisenbergschen Bewegungsgleichungen kann dann analog zum Fall eines Brownschen Oszillators etwa mittels Laplace-Transformation gelöst werden und führt auf das gekoppelte System zweier quantenmechanischer Langevin-Gleichungen in den Koordinaten der beiden Moden:

$$\ddot{q}_1(t) = -\omega_1^2 q_1(t) - \frac{\gamma(t)}{M} R(0) - \frac{1}{M} \int_0^t dt' \gamma(t-t') \dot{R}(t') + \frac{1}{M} \eta(t), \quad (7.100)$$

$$\ddot{q}_2(t) = -\omega_2^2 q_2(t) - \frac{\gamma(t)}{M} R(0) - \frac{1}{M} \int_0^t dt' \gamma(t-t') \dot{R}(t') + \frac{1}{M} \eta(t), \quad (7.101)$$

wobei aus der Schwerpunktskoordinate $R = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ die Kopplung der Bewegungsgleichungen ersichtlich wird. Im Falle identischer Moden mit $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ und Schwerpunktsmasse $M = 2m$ wird daraus wegen $\ddot{R} = \frac{1}{2}(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)$ eine quantenmechanische Langevin-Gleichung für die Schwerpunktskoordinate

$$M\ddot{R}(t) + M\omega_0^2 R(t) + \int_0^t dt' \gamma(t-t') \dot{R}(t') = \eta(t) - R(0)\gamma(t). \quad (7.102)$$

Davon entkoppelt ist die Bewegung der Relativkoordinate $x = (q_1 - q_2)$, die in diesem Modell wegen $\ddot{x} = -\omega_1 \ddot{q}_1 - \omega_2 \ddot{q}_2$ für gleiche Moden unbestimmt ist. Dies äußert sich formal bei der Lösung des Gleichungssystems (7.100) in nicht-verschwindenden, oszillierenden Anteilen der Greenschen Funktion (Pole bei $\pm i\omega_0$) auch für $t \rightarrow \infty$, sofern $\omega_{1,2} = \omega_0$. Um dennoch den Fall identischer Moden untersuchen zu können, sind deshalb zusätzliche Annahmen über die Dynamik der Relativbewegung nötig. Plausibel ist in diesem Fall die Annahme einer schwach vorhandenen Kopplung an das Bad, die im Endeffekt zur Dissipation bzw. Relaxation führt und durch die Lösung der Born-Markovschen Mastergleichungen gegeben ist. Die Varianz der Relativkoordinate würde demnach unabhängig von der Schwerpunktskoordinate in der Form

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle x_0^2 \rangle e^{-\gamma_p t} + (1 - e^{-\gamma_p t}) \frac{\hbar}{2m_x \omega_0} \coth\left(\frac{1}{2}\beta \hbar \omega_0\right) \quad (7.103)$$

auf den stationären Wert relaxieren, wobei hier $m_x = M/4$ die reduzierte Masse bezeichnet und γ_p den, die Relaxation bestimmenden, stationären Wert des Dämpfungskoeffizienten (3.96) der HPZ-Mastergleichung bezeichnet. Der Wert von $\langle x_0^2 \rangle$ ist durch den konkreten Anfangszustand vorgegeben und lautet etwa im Falle eines gequetschen Zwei-Moden-Zustands $\langle x_0^2 \rangle = e^{-2|\xi|}$. Die Entkopplung von Schwerpunkt- und Relativbewegung mit $\langle \{x, R\}(t) \rangle = 0$ bedeutet natürlich nicht, dass keine Kopplung bzw. Korrelation in den ursprünglichen Koordinaten vorhanden wäre. Dies wird im Folgenden deutlich werden, wenn die Lösung für einen konkreten Anfangszustand im Form des Quasi-EPR-Zustands präsentiert wird.

7.3.2.2 Nicht-Markovsche Dynamik des Quasi-EPR-Zustands

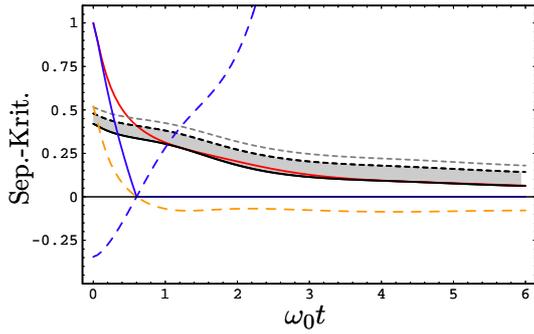
Das oben entwickelte Modell soll nun dazu dienen die nicht-Markovsche Dynamik zweier Moden eines anfänglichen Quasi-EPR-Zustands zu untersuchen. Dessen Kovarianzmatrix zu Beginn ist durch (5.23) gegeben, mit

$$\langle q_j^2 \rangle = \langle p_j^2 \rangle = \frac{1}{2} \cosh(2\xi) \quad \text{und} \quad \langle \{q_1, q_2\} \rangle = -\langle \{p_1, p_2\} \rangle = \sinh(2\xi) \quad (7.104)$$

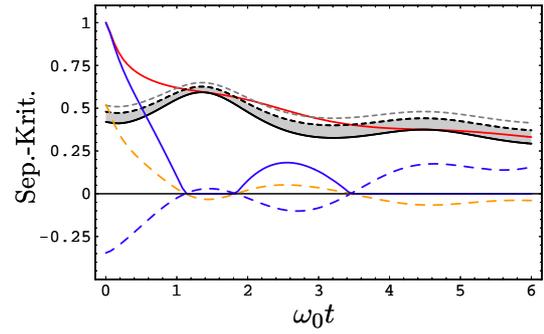
für $j = 1, 2$ und jeweils zu Eins gesetzten Frequenzen und Massen (und $\hbar = 1$). Daraus ergeben sich die entsprechenden Startwerte der Varianzen für Schwerpunkt und Relativkoordinate zu

$$\langle R^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2\xi}, \quad \langle P_R^2 \rangle = e^{-2\xi}, \quad \langle x^2 \rangle = e^{-2\xi}, \quad \langle p_x^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2\xi}, \quad (7.105)$$

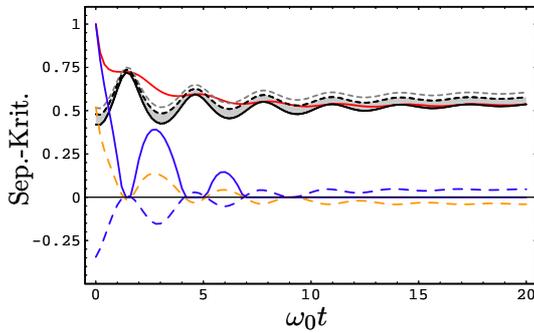
mit minimaler Unschärfe für $\langle R^2 \rangle \langle P_R^2 \rangle = \frac{1}{4}$ und $\langle x^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle = \frac{1}{4}$. Die Abbildung 7.7 zeigt Beispiele für die Zeitentwicklung eines gequetschten Zwei-Moden-Zustands in einem gemeinsamen Bad. Zunächst ist wieder eine Abweichung von der Markovschen Separabilitätszeit τ_{s1b} festzustellen, wie sie bereits von dem Modell mit zwei Bädern aus Abschnitt 7.3.1.1 bekannt ist. Neu ist in diesem Fall zusätzlich, dass im Vergleich zu den Ergebnissen aus Referenz [181] kein Rest der anfänglichen Verschränkung im stationären Zustand erhalten bleibt, auch wenn der Quetschparameter einen temperaturabhängigen kritischen Wert (7.86) überschreitet. Die durch das *Squeezing* hervorgerufene Verschränkung verschwindet in diesem Modell auf jeden Fall. Während für die Wahl kleiner Kopplung γ und großer Abschneidefrequenz Γ die Resultate der Markovschen Näherung reproduziert werden (Abb. 7.7a), ergibt sich für stärkere Kopplung ein differenziertes Bild. Die Abbildungen 7.7b und 7.7c zeigen, dass nach einem ersten Verschwinden der Verschränkung zu späteren Zeiten erneute nicht-separable Zustände entstehen können, erkennbar etwa an der Oszillation der logarithmischen Negativität (blaue Kurve) zwischen positiven Werten (Verschränkung) und dem Wert Null (Separabilität). Gleiches lässt sich aus dem Verlauf der Purity des Zwei-Moden-Systems (rote Kurve) folgern. Nachdem die Purity bereits in das grau unterlegte Gebiet eingetreten ist (d.h. ein separabler Zustand vorliegt), wird dieser Bereich wieder verlassen und später dann erneut erreicht. Der Endzustand für die in den Abbildungen (a) bis (c) gewählten Parameterkombinationen ist jeweils separabel. Es ist jedoch prinzipiell möglich, dass auch im stationären Zustand Quantenkorrelationen vorliegen. Dies soll aus den Abbildungen 7.7d-f sichtbar werden, die Beispiele für tiefe Temperaturen darstellen. Nach einem frühen Verschwinden der logarithmischen Negativität des gequetschten Zwei-Moden-Zustands in Abb. 7.7d und damit dem Vorliegen eines separablen Zustands, baut sich für spätere Zeiten erneut eine Verschränkung auf, die stabil ist und auch im stationären Zustand erhalten bleibt. Neben einer Separabilitätszeit existiert also auch eine bestimmte *Verschränkungszeit*, nach der der Zustand für $t \rightarrow \infty$ verschränkt bleibt. Die möglichen Oszillationen der logarithmischen Negativität mit partiellem Verschwinden und Wiederkehr erschweren allerdings das Auffinden dieser charakteristischen Zeit. Dass es auch möglich ist, durchgehend einen verschränkten Zustand beizubehalten, kann aus Abb. 7.7f erschlossen werden. Das anfängliche Squeezing mit Parameter ξ hat auf diese stationäre Verschränkung allerdings keine Auswirkungen, im Unterschied zu den Ergebnissen im Markovschen Fall. Notwendig für eine stationäre Verschränkung ist, dass die Temperatur zu gegebenen Werten von γ und Γ einen kritischen Wert unterschreitet. Im nächsten Abschnitt wird ein einfaches Kriterium hierfür hergeleitet.



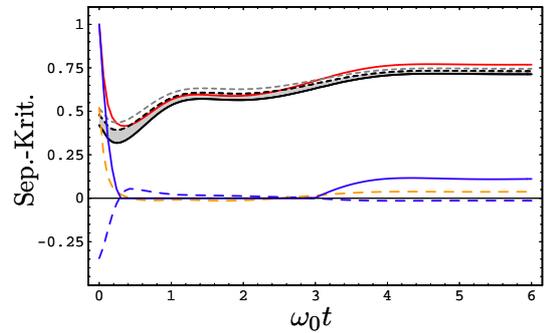
(a) $\gamma = 0.2m\omega_0$, $\Gamma = 10\omega_0$ und $T = 3.5\hbar\omega_0/k$. Verkürzung der Separabilitätszeit im Vergleich zum Markovschen Fall ($t_{s2b} \approx 1$ und $t_{s1b} \approx 2.2$).



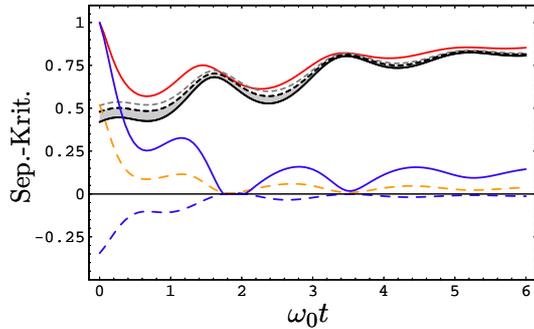
(b) $\gamma = 0.2m\omega_0$, $\Gamma = 10\omega_0$ und $T = \hbar\omega_0/k$. Partielle Wiederkehr der logarithmischen Negativität. Die Separabilitätszeit ist wesentlich verkürzt im Vergleich zu $t_{s1b} \rightarrow \infty$ und $t_{s2b} \approx 4.3$.



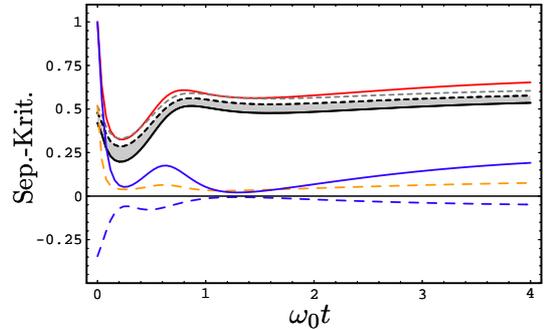
(c) $\gamma = 0.2m\omega_0$, $\Gamma = 10\omega_0$ und $T = 0.5\hbar\omega_0/k$. Oszillation der logarithmischen Negativität verbunden mit Aus- und Einritten der Purity (rot) in den grau schraffierten Separabilitätsbereich. Markovsche Zeiten hier $t_{s1b} \rightarrow \infty$ und $t_{s2b} \approx 11$.



(d) $\gamma = 2m\omega_0$, $\Gamma = 10\omega_0$ und $T = 10^{-3}\hbar\omega_0/k$. Wiederkehr einer stabilen Verschränkung im stationären Zustand bei tiefen Temperaturen (d.h. $t_{s1b} \rightarrow \infty$ und $t_{s2b} \rightarrow \infty$).



(e) $\gamma = 5m\omega_0$, $\Gamma = \omega_0$ und $T = 10^{-3}\hbar\omega_0/k$. Zustand bleibt bei starker WW und tiefen Temperaturen nahezu durchgehend verschränkt.



(f) $\gamma = 5m\omega_0$, $\Gamma = 10\omega_0$ und $T = 10^{-3}\hbar\omega_0/k$. Zustand bleibt bei starker WW und tiefen Temperaturen durchgehend verschränkt.

Abbildung 7.7: Zeitliche Entwicklung der Verschränkung eines anfänglichen gequetschten Zwei-Moden-Zustands (Parameter $\xi = 0.5$) im QBM-Ein-Reservoir-Modell in Form der logarithmischen Negativität (blau) sowie der Purity des Zwei-Moden-Systems (rot) in den durch die Kriterien (7.33) bestimmten Bereichen (grau und schwarz gestrichelt). Der grau schraffierte Bereich markiert wie in Abb. 7.5 den Separabilitätsbereich und der Bereich zwischen schwarz und grau gestrichelter Kurve den Koexistenzbereich. Bei tiefen Temperaturen und hinreichend starker System-Bad-Wechselwirkung existieren zwischen den beiden Moden auch im stationären Zustand Quantenkorrelationen.

7.3.2.3 Umgebungsinduzierte Verschränkung im Ein-Reservoir Modell

Wie im vorausgegangenen Abschnitt dargestellt, entsteht im Ein-Reservoir Modell unter bestimmten Bedingungen ein nicht-separabler stationärer Zustand, dessen Verschränkung nicht von dem anfänglichen Squeezing abhängt, sondern eine Folge der durch das gemeinsame Bad entstandenen nichtlokalen Korrelationen ist. Im Folgenden wird eine einfache Bedingung für das Vorliegen von Verschränkung im stationären Zustand hergeleitet. Ausgangspunkt ist die im Abschnitt 7.1.1.4 geleistete Vorarbeit im Hinblick auf ein Separabilitätskriterium für Quasi-EPR-Zustände. Wie dort gezeigt, stellen die Normalkoordinaten $R = (q_1 + q_2)/2$ und $p_x = (p_1 - p_2)/2$ ein Paar EPR-artiger Operatoren dar, mit deren Hilfe aus den Separabilitätskriterien von Duan (7.26) und Tan (7.29) eine notwendige Bedingung in Form von

$$\langle R^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{16} \quad \text{bzw.} \quad \langle (q_1 + q_2)^2 \rangle \langle (p_1 - p_2)^2 \rangle \geq \hbar^2 \quad (7.106)$$

für das Vorliegen separablen stationären Zwei-Moden-Zustands abgeleitet werden kann, sofern $\langle \{q_1, q_2\} \rangle < 0$ und $\langle \{p_1, p_2\} \rangle > 0$. Diese Bedingung für die Korrelationen ist hier erfüllt. Mit den in Gl. (3.16) gegebenen Varianzen des QBM-Modells sowie der Annahme (7.103) ergibt sich schließlich als Separabilitätskriterium im stationären Zustand

$$\frac{\omega_0}{\pi} \int_0^\infty d\omega (2\bar{n} + 1) \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \tilde{\chi}''(\omega) \geq \frac{1}{4}, \quad (7.107)$$

mit mittlerer Besetzungszahl $\bar{n} = (e^{\beta\hbar\omega_0} - 1)^{-1}$ der Normalmode für die Relativbewegung. Die Abbildung 7.8a vergleicht dieses Separabilitätskriterium mit dem PPT-Kriterium (7.18) und der logarithmischen Negativität (7.41). Ebenfalls eingezeichnet sind die stationären Korrelationen $\langle \{q_1, q_2\} \rangle$ und $\langle \{p_1, p_2\} \rangle$ sowie die wechselseitige Information nach Gleichung (7.43) für einen Gaußschen Zustand. Letztere ist ein Maß für die quantenmechanische und klassische Korrelation und fällt – genauso wie die genannten Korrelationen – wesentlich langsamer ab als die logarithmische Negativität. Oberhalb einer kritischen Temperatur verbleiben lediglich klassische Korrelationen. Es ist allerdings zu beachten, das obiges Separabilitätskriterium nur für den stationären Zustand gilt, in dem die Kovarianzmatrix wieder die Standardform V_{II} hat. Dies wird durch Abb. 7.8b deutlich, die einen Ausschnitt der bereits in Abb. 7.7d dargestellten Dynamik zeigt. Zusätzlich enthalten ist als rot gezeichnete Kurve das Separabilitätskriterium $E_{Rx}(t) = \frac{\hbar^2}{16} - \langle R^2(t) \rangle \langle p_x^2(t) \rangle$. Man sieht, dass die anfängliche Verschränkung des gequetschten Zwei-Moden-Zustands mit positiver logarithmischer Negativität nicht erfasst wird, da die Funktion (rote Kurve) nur für negative Werte eine Verschränkung impliziert. Der erneute Anstieg der logarithmischen Negativität wird hingegen richtig erfasst, in dem die Funktion zu diesem Zeitpunkt negativ wird. Zusätzlich ist die Übereinstimmung mit dem PPT-Kriterium ab diesem Zeitpunkt zu erkennen. Es können in diesem Fall neue Quantenkorrelationen zwischen den beiden Moden aufgebaut werden, obwohl keine direkte Kopplung zwischen ihnen besteht, sondern die nötige Wechselwirkung nur indirekt über das gemeinsame Bad vermittelt wird. Die Existenz von Quantenkorrelationen im stationären Zustand ist gebunden an das Unterschreiten einer kritischen Temperatur, die sich aus Ungleichung (7.107) ergibt und von den Parametern der spektralen Dichte des gemeinsamen Bades und der Response-Funktion bzw. Suszeptibilität des Systems abhängig ist. Die Abbildung 7.9 illustriert die Abhängigkeit der Verschränkung von den Parametern γ , Γ und der kritischen Temperatur. Beim Überschreiten dieser Temperatur verbleiben lediglich klassische Korrelationen.

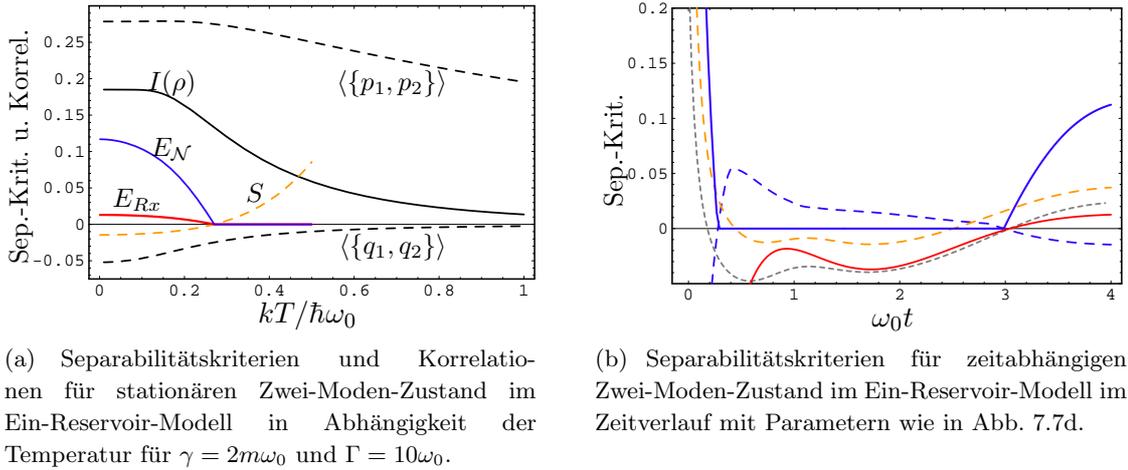


Abbildung 7.8: Separabilitätskriterien und Korrelationen für den stationären Zustand im QBM-Ein-Reservoir-Modell (links) sowie deren Zeitabhängigkeit (rechts). **Links:** logarithmische Negativität (blau), PPT-Kriterium (blau gestrichelt) und Funktion $\frac{\hbar^2}{16} - \langle R^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle$ (rot) liefern übereinstimmenden Wert für kritischen Temperaturwert T_c . Die Korrelationen $\langle\{q_1, q_2\}\rangle < 0$ und $\langle\{p_1, p_2\}\rangle > 0$ (grau gestrichelt) sowie die wechselseitige Information gem. Gl. (7.43) (gelb) fallen wesentlich langsamer ab. Oberhalb der kritischen Temperatur (mit $E_{\mathcal{N}}(T_c) = 0$) verbleiben lediglich klassische Korrelationen. **Rechts:** Die zeitabhängige Betrachtung der Separabilitätskriterien zeigt, dass das abgeleitete Kriterium $\frac{\hbar^2}{16} - \langle R^2(t) \rangle \langle p_x^2(t) \rangle$ (rot) nur im stationären Zustand, in dem die Kovarianzmatrix Standardform besitzt, ein zuverlässiges Separabilitätskriterium darstellt. Ein positiver Wert der gelb gestrichelten Funktion zeigt an, dass die Purity den in den vorherigen Abbildungen grau unterlegten Separabilitätsbereich verlassen hat. Diese Funktion wird schon früher positiv als die logarithmische Negativität. Erst wenn der darauffolgende Koexistenzbereich tatsächlich verlassen wird, liegt nach den Kriterien (7.33) tatsächlich Verschränkung vor (grau gestrichelte Kurve im positiven Bereich).

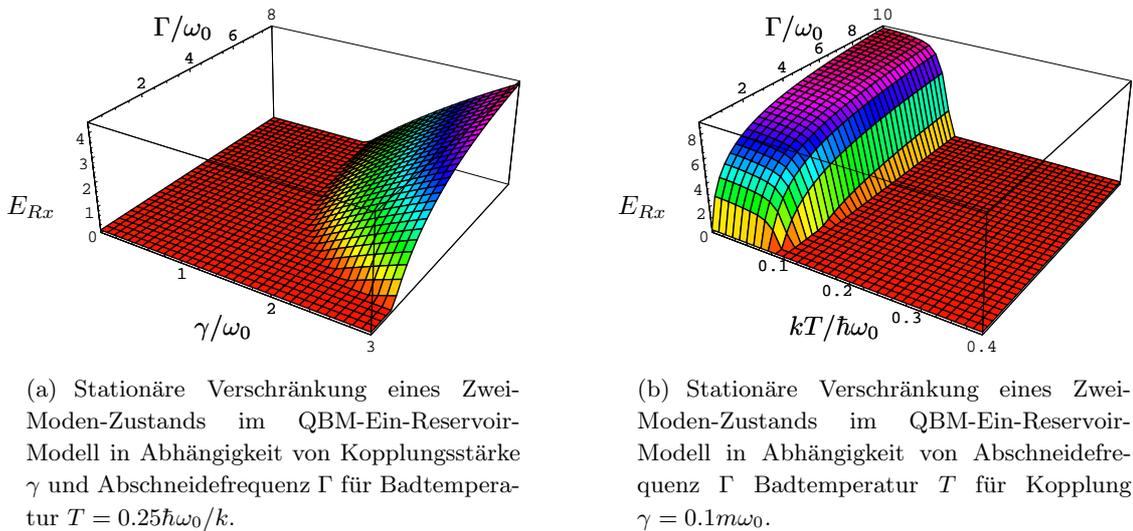


Abbildung 7.9: Stationäre Verschränkung eines Zwei-Moden-Zustands im QBM-Ein-Reservoir-Modell in Form des Kriteriums $E_{Rx} = \max\left\{\frac{\hbar^2}{16} - \langle R^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle, 0\right\}$ in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter. Die kritische Temperatur zu gegebenen γ und Γ ist durch Gleichung (7.107) bestimmt.

7.4 Zusammenfassung von Kapitel 7

In diesem Kapitel wurde die Zeitentwicklung verschränkter Zwei-Moden-Zustände in Ein- und Zwei-Reservoir-Modellen untersucht. Zunächst wurden Separabilitätskriterien und Verschränkungsmaße für Systeme kontinuierlicher Variablen eingeführt. Für Gaußsche Zustände basieren diese auf der Kovarianzmatrix des Systems, für nicht-Gaußsche Zustände existieren hinreichende Kriterien für EPR-artige Operatoren. Für Spezialfälle wie die verschränkten, kohärenten Zwei-Moden-Zustände sind zudem Maße wie die Concurrence und das Entanglement of Formation anwendbar.

Als repräsentative Gaußsche Zustände wurden die gequetschten Zwei-Moden-Zustände gewählt, als nicht-Gaußsche Zustände die verschränkten, kohärenten Zwei-Moden-Zustände. Deren Dynamik wurde in Ein- und Zwei-Reservoir Modellen untersucht, die als verrauschte korrelierte bzw. unkorrelierte Quantenkanäle aufgefasst werden können. Im Mittelpunkt standen dabei nicht-Markovsche Effekte und Einflüsse durch starke System-Bad-Wechselwirkung. Die Auswirkungen auf den Verlauf von Verschränkungsmaßen und auf Separabilitätszeiten wurden mit den bekannten Markovschen Resultaten verglichen. Die Ausprägung des nicht-Markovschen Charakters wird dabei durch das Verhältnis der die Badkorrelationszeit bestimmenden Abschneidefrequenz Γ zu anderen charakteristischen Zeitskalen des Systems bestimmt. Es wurde gezeigt, dass die Auswirkungen nicht-Markovscher Einflüsse weiter unterschieden werden müssen in ein moderat nicht-Markovsches Regime mit $\Gamma \geq \omega_0$ und in ein stark nicht-Markovsches Regime für Out-of-Resonance Bäder mit $\Gamma \ll \omega_0$. Moderat nicht-Markovsche Einflüsse führen für kohärente Superpositionen und verschränkte Zustände zu einem langsameren Verlust der speziellen quantenmechanischen Eigenschaften und damit zu einer verlängerten Separabilitätszeit. Das *Gedächtnis* des Reservoirs bzw. Quantenkanals hilft also dabei, die wichtigen Eigenschaften der quanteninformatrontragenden Zustände länger zu konservieren. Ist der nicht-Markovsche Charakter stärker ausgeprägt – im Sinne eines Out-of-Resonance Bades – so verkehrt sich dieser Effekt in Gegenteil und die Separabilitätszeit wird verkürzt.

Qualitativ sind die beschriebenen Auswirkungen im Ein- bzw. Zwei-Reservoir-Modell identisch, allerdings kann die Bewegung in einem gemeinsamen Bad bei sonst gleichen Parametern den Verlust anfänglich vorhandener Verschränkung weiter abmildern bzw. den Dekohärenzprozess zusätzlich verlangsamen. Mitunter werden die anfänglich bestehenden Quantenkorrelationen nicht nur länger bewahrt, sondern es können durch ein gemeinsames Bad auch neue Quantenkorrelationen zwischen den beiden Moden aufgebaut werden. Dies ist dann der Fall, wenn auf die Born-Approximation verzichtet wird und die System-Bad-Wechselwirkung nicht mehr als sehr schwach vorausgesetzt wird. Wie im letzten Unterkapitel anhand eines gequetschten Zwei-Moden-Zustands gezeigt, können in diesem Fall neue Quantenkorrelationen zwischen den beiden Moden aufgebaut werden, obwohl keine direkte Kopplung zwischen ihnen besteht, sondern die nötige Wechselwirkung nur indirekt über das gemeinsame Bad vermittelt wird. Diese können auch im stationären Zustand bestehen bleiben.

Die Existenz von Quantenkorrelationen im stationären Zustand ist gebunden an das Unterschreiten einer kritischen Temperatur, die abhängig ist von den Parametern der spektralen Dichte des gemeinsamen Bades und der Response-Funktion bzw. Suszeptibilität des Systems. Bei Überschreiten dieser Temperatur verbleiben lediglich klassische Korrelationen. Aus dem

Separabilitätskriterium für EPR-artige Operatoren wurde eine Ungleichung hergeleitet, deren Verletzung ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen von stationären Quantenkorrelationen eines Zwei-Moden-Systems in einem gemeinsamen Bad darstellt. Neben einer umgebungsinduzierten Dekohärenz (*environmental induced decoherence*) bzw. Zerstörung anfänglich bestehender Quantenkorrelationen bietet das vorgestellte Modell somit ein Beispiel für *umgebungsinduzierte Verschränkung* zweier nicht direkt gekoppelter Moden, die selbst im stationären Zustand bestehen bleiben kann.

Kapitel 8

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasste sich mit der Dynamik, Dekohärenz und Verschränkung von dissipativen Quantensystemen unter nicht-Markovschen Mastergleichungen und deren Anwendung in der Quanteninformationstheorie von Systemen kontinuierlicher Variablen. Die Grundlage zur Beschreibung von nicht-Markovscher Dynamik in CV-Systemen bildete das Caldeira-Leggett Modell der quantenmechanischen Brownschen Bewegung (QBM-Modell). Die aus dem Einfluss-Funktional-Pfadintegralformalismus für dissipative Quantensysteme gewonnene HPZ-Mastergleichung wurde für unterschiedliche Superpositionszustände einer Mode und für verschränkte Zwei-Moden-Zustände gelöst. Die zeitabhängigen HPZ-Koeffizienten, die in der Regel numerisch integriert wurden, waren für die nicht-Markovschen Eigenschaften der Dynamik verantwortlich. Im Mittelpunkt des Interesses standen die Auswirkungen der nicht-Markovscher Beschreibung auf die Dekohärenz- und Separabilitätszeiten von Gaußschen und nicht-Gaußschen Ein- und Zwei-Moden-Zuständen. An dieser Stelle werden die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst, eine ausführliche Diskussion der Resultate findet sich auch jeweils am Ende der entsprechenden Kapitel.

In Kapitel 4 war der stationäre Zustand des QBM-Modells zunächst Ausgangspunkt für die Diskussion quantenstatistischer und thermodynamischer Eigenschaften in offenen, mit dem umgebenden Bad korrelierten Quantensystemen. Es hat sich gezeigt, dass der stationäre QBM-Zustand auch bei einer gegen Null gehenden Badtemperatur in der Regel ein gemischter Zustand ist, mit nicht verschwindender von Neumann Entropie und einer Verteilung der Diagonalelemente der reduzierten Dichtematrix, die von einer thermischen Gleichgewichtsverteilung abweicht. Zudem zeigt der Zustand Charakteristika, die an einen gequetschten Vakuumzustand erinnern. Es wurde dargelegt, dass die thermodynamische Entropie und die von Neumann Entropie für den stationären QBM-Zustand in der Regel nicht identisch sind. Der zu diesem stationären Zustand führende Relaxationsprozess wurde in Kapitel 5 im Rahmen einer Übersicht der Systeme kontinuierlicher Variablen für unterschiedliche Nichtgleichgewichtszustände betrachtet und mit den Markovschen Resultaten verglichen.

In Kapitel 6 wurden schließlich nicht-Markovsche Effekte bei Dekohärenzprozessen von CV-Systemen im Rahmen des QBM-Modells untersucht. Die HPZ-Mastergleichung wurde dafür für unterschiedliche anfängliche Superpositionszustände gelöst und anschließend die Norm des Interferenzterms als Dekohärenzmaß im Phasenraum berechnet. Anhand eines Vergleichs mit alternativen Maßen wurde aufgezeigt, dass Phasenraummaße und Dekohärenz-

maße im Orts- bzw. Implusraum gerade bei einer nicht-Markovschen Betrachtung mitunter um Größenordnungen verschiedene Zeitskalen liefern können. Bei der Verwendung der Norm des Interferenzterms als Dekohärenzmaß hat sich gezeigt, dass der Dekohärenzprozess selbst für ein lineares Modell wie die quantenmechanische Brownsche Bewegung qualitativ sehr unterschiedliches Verhalten zeigen kann – der Verlauf kann exponentiell, gaußförmig oder algebraisch (für ein freies Teilchen bei tiefen Temperaturen) abfallend sein und mitunter eine partielle Rekurrenz der Kohärenzeigenschaften aufweisen.

Die unterschiedlichen Dekohärenz-Szenarios werden dabei durch das Verhältnis der charakteristischen Zeitskalen des Systems und des Bades festgelegt. Die Abhängigkeit der Dekohärenzzeit von spektralen Eigenschaften des Bades bietet die Möglichkeit, durch gezieltes *Bath Engineering* den Verlust quantenmechanischer Interferenzfähigkeit und nichtklassischer Korrelationen verschränkter Zustände abzumildern sowie das nicht-Markovsche Regime experimentell zugänglich zu machen. Die geschilderten Fortschritte in diesem Bereich lassen die experimentelle Simulation des nicht-Markovschen Regimes bereits in naher Zukunft möglich erscheinen.

Das Kapitel 7 behandelte die Zeitentwicklung verschränkter Zwei-Moden-Zustände in Ein- und Zwei-Reservoir-Modellen. Als repräsentative Gaußsche Zustände wurden die gequetschten Zwei-Moden-Zustände gewählt, als nicht-Gaußsche Zustände die verschränkten, kohärenten Zwei-Moden-Zustände. Deren Dynamik wurde in Ein- und Zwei-Reservoir Modellen untersucht, die als verrauschte korrelierte bzw. unkorrelierte Quantenkanäle aufgefasst werden können. Die Auswirkungen nicht-Markovscher Effekte auf den Verlauf von Verschränkungsmaßen und auf die jeweiligen Separabilitätszeiten wurden mit den bekannten Markovschen Resultaten verglichen. Moderat nicht-Markovsche Einflüsse führten für kohärente Superpositionen und verschränkte Zustände zu einem langsameren Verlust der speziellen quantenmechanischen Eigenschaften und damit zu einer verlängerten Separabilitätszeit. In Out-of-Resonance Bädern mit stark nicht-Markovschem Charakter verkehrt sich dieser Effekt ins Gegenteil und die Separabilitätszeit wird verkürzt.

Qualitativ sind die beschriebenen Auswirkungen im Ein- bzw. Zwei-Reservoir-Modell identisch, allerdings kann die Bewegung in einem gemeinsamen Bad bei sonst gleichen Parametern den Verlust anfänglich vorhandener Verschränkung abmildern bzw. den Dekohärenzprozess verlangsamen. Mitunter werden die anfänglich bestehenden Quantenkorrelationen nicht nur länger bewahrt, sondern es können durch ein gemeinsames Bad auch neue Quantenkorrelationen zwischen den beiden Moden aufgebaut werden. Dies ist dann der Fall, wenn auf die Born-Approximation verzichtet wird und die System-Bad-Wechselwirkung nicht mehr als sehr schwach vorausgesetzt wird. Wie anhand eines gequetschten Zwei-Moden-Zustands gezeigt wurde, können in diesem Fall neue Quantenkorrelationen zwischen den beiden Moden aufgebaut werden, obwohl keine direkte Kopplung zwischen ihnen besteht, sondern die nötige Wechselwirkung nur indirekt über das gemeinsame Bad vermittelt wird.

Es wurde dargelegt, dass die Existenz von Quantenkorrelationen im stationären Zustand an das Unterschreiten einer kritischen Temperatur gebunden ist, die abhängig ist von den Parametern der spektralen Dichte des gemeinsamen Bades und der Response-Funktion bzw. Suszeptibilität des Systems. Aus dem Separabilitätskriterium für EPR-artige Operatoren wurde eine Ungleichung hergeleitet, deren Verletzung ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für das Vorliegen von stationären Quantenkorrelationen eines Zwei-Moden-Systems in einem gemeinsamen Bad darstellt. Neben einer umgebungsinduzierten Dekohärenz (*environmental*

induced decoherence) bzw. Zerstörung anfänglich bestehender Quantenkorrelationen bot das vorgestellte Modell somit ein Beispiel für *umgebungsinduzierte Verschränkung* zweier nicht direkt gekoppelter Moden, die erst im Verlauf der Evolution entsteht und sogar im stationären Zustand bestehen bleibt.

Die Betrachtung nicht-Markovscher Einflüsse auf die Dekohärenz- und Separabilitätszeiten offener Quantensysteme bleibt ein Thema, das gerade im Hinblick auf die Relevanz für Anwendung in der Quanteninformationstheorie von Systemen kontinuierlicher Variablen auch in Zukunft weitere Beachtung erfahren wird.

Anhang A

QBM und CV-Systeme im Experiment

Das Modell der quantenmechanischen Brownschen Bewegung ist in vielfältigen experimentellen Bereichen anwendbar. Zum einen ist es das paradigmatische Modell zur Beschreibung und Erklärung dissipativer Quantendynamik einschließlich der umgebungsinduzierten Dekohärenz. Zum anderen findet es im weiten Feld der Quanteninformationstheorie dort Anwendung, wo es um das genaue experimentelle Verständnis dissipativer Effekte geht – angefangen von der experimentellen Realisierung von Quantencomputern in Form von Ionenfallen [19, 20, 21] bis hin zur Quantenkommunikation über verrauschte Quantenkanäle. Das Modell der QBM ist dabei so vielseitig einsetzbar, dass es sowohl die quantisierte Bewegung von materiellen Teilchen wie Ionen in optischen Fallen beschreiben kann, als auch die dissipative Dynamik von Resonator-Moden des elektromagnetischen Feldes [22]. Im ersten Fall geht es um die Schwerpunktsbewegung von Ionen in Radiofrequenzfallen, die mittels Laserkühlung so stark verlangsamt wurden, dass ihre Bewegung einer quantisierten Schwingung in einem harmonischen Potenzial entspricht [196, 197]. Im zweiten Fall wird die Analogie zur Hohlraum-Quantenelektrodynamik ausgenutzt, um die Übertragung von Quanteninformation mittels verschränkter Lichtmoden über verrauschte Quantenkanäle zu modellieren. Literaturhinweise zu experimentellen Techniken der Präparation von nichtklassischen Zuständen und der Rekonstruktion entsprechender Phasenraumfunktionen werden im Folgenden gegeben, ein guter Überblick findet sich beispielsweise in Ref. [59].

A.1 Präparation von CV-Systemen

Bei der Präparation und Rekonstruktion von nichtklassischen Zuständen auf atomarer Skala sind in den letzten Jahren große Fortschritte erzielt worden. Grundlage der experimentellen Realisierung von Superpositionszuständen einzelner Atome ist Technik der Laserkühlung in Ionenfallen und anschließende Verschränkung von internen (elektronischen) mit externen (Bewegungs-) Zuständen der Ionen mittels Laserpulsen. Eine Abkühlung bis auf den Grundzustand der Bewegung ist beispielsweise bereits für $^{198}\text{Hg}^+$ Ionen [196], $^9\text{Be}^+$ Ionen [197] sowie $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen [198] in optischen Fallen experimentell realisiert worden. Für auf den

Vibrations-Grundzustand abgekühlte ${}^9\text{Be}^+$ Ionen in Radiofrequenz-Fallen (Paul-Fallen) wurden sowohl einzelne Fock Zustände, kohärente und gequetschte Zustände präpariert [199], als auch Cat-State Superpositionen kohärenter Zustände [200] hergestellt.

A.2 Rekonstruktion von CV-Systemen

Die Rekonstruktion von nicht-klassischen Zuständen einzelner Ionen oder Lichtmoden in Form der Wigner-Funktion im Phasenraum oder der Dichtematrix im Fockraum ist keine leichte experimentelle Aufgabe. Die Standardmethode zur Rekonstruktion quantenoptischer Zustände ist die homodyne Tomographie [201], bei der aus den marginalen Verteilungen der Orts- und Impuls-Operatoren bzw. der Quadraturen des elektromagnetischen Feldes die Wigner-Funktion rekonstruiert wird. Mit dieser Technik ist es nicht nur möglich, kohärente [202] und gequetschte Feldzustände [203] zu rekonstruieren, sondern mittlerweile auch einzelne Photonen-Fock-Zustände [204, 205] sowie Zwei-Photonen-Zustände [206]. Eine andere Methode kommt zum Einsatz bei der Bestimmung der Wigner-Funktion der Oszillationszustände einzelner Ionen in Paul-Fallen [207]. Dabei wird die mittlere Besetzung interner elektronischer Freiheitsgrade mittels Fluoreszenzmessungen getriebener zyklischer Dipolübergänge bestimmt, die einen Rückschluss auf die Dichtematrixelemente der quantisierten Ionenbewegung zulässt. Damit kann die Dichtematrix in Besetzungsdarstellung rekonstruiert werden und somit auch die Wigner-Funktion gewonnen werden. Die Bestimmung von Größen wie der Purity und von Neumann-Entropie anfänglicher Fock-Zustände erfolgt dann über die Diagonalelemente der Dichtematrix:

$$\mu(t) \simeq \sum_{n=0}^{n_{\max}} p_n^2(t) \quad \text{und} \quad S_v(t) \simeq \sum_{n=0}^{n_{\max}} p_n(t) \ln p_n(t), \quad (\text{A.1})$$

wobei n_{\max} den maximalen Wert der im Experiment bestimmten Niveau-Besetzung bezeichnet [38]. Als Modell für die experimentell beobachtbare Dynamik der quantisierten Schwerpunktsbewegung der Ionen wurde das QBM-Modell in seiner allgemeinen (nicht-Markovschen) Version ebenfalls bereits zugrundegelegt [70, 95].

A.3 Bath-Engineering

Das *Engineering* der Reservoireigenschaften – im Sinne einer gezielten Steuerung der Kopplungsstärke und Modellierung der spektralen Dichte der Badmoden – bietet Ansatzpunkte, Dekohärenz für nicht-Markovsche Umgebungen experimentell zu simulieren und zu studieren. Die im Markovschen Regime bereits durchgeführten Experimente [37, 38] basierten auf der Kopplung einzelner Ionen in einer Paul-Falle mit der Umgebung in Form von fluktuierenden Feldern. Die Kopplung beruht auf der Absorption von Laser-Photonen und anschließender spontaner Emission. Die Variation der Laserfrequenz und -intensität erlaubt es die Kopplung zu variieren [37, 39]. Durch geeignet geschaltete Niedrigpassfilter kann die Form der spektralen Dichte variiert werden [70] und nicht-Markovschen Verhalten simuliert werden. Dazu die folgende Abschätzung: Die charakteristische Frequenz der Ionen liegt in der Größenordnung von $\omega_0 \simeq 10^7 \text{ Hz}$. Die typische zeitliche Auflösung der Experimente liegt zwischen $1 - 100 \mu\text{s}$.

Für $\Gamma \gg \omega_0$ ist nicht-Markovsches Verhalten also nur für Zeiten $t \ll 0.1\mu s$ zu erwarten und deshalb experimentell nicht zu beobachten. Kann nun die Abscheidefrequenz Γ des künstlichen Bades (in Form fluktuierender Felder) variiert werden, so dass $\Gamma > \omega_0$, dann liegen die Korrelationszeiten des Bades in der Größenordnung der internen Systemdynamik. Beispielsweise sollte es möglich sein, für $\Gamma/\omega_0 \leq 0.1$ nicht-Markovsches Verhalten experimentell zu beobachten, da dieses dann auch noch bei Zeiten $t \simeq 1\mu s$ relevant ist [70].

A.4 Dekohärenz und Verschränkung im Experiment

Die in Kapitel 6 erörterte quadratische Skalierung der Dekohärenzrate mit dem Abstand zweier kohärenter Zustände im Phasenraum wurde mittlerweile in unterschiedlichen Experimenten bestätigt [22, 37, 38]. In Ref. [22] war das untersuchte System eine Mikrowellen-Feldmode in einem aus zwei Spiegeln gebildeten Resonator. Die Spiegel sind nicht perfekt, so dass die elektromagnetische Feldenergie mit einer bestimmten Rate dissipiert. Im Experiment wurden Cat State Superpositionen der Resonatormode durch die Wechselwirkung mit einzelnen, durch den Resonator gesendeten Rydberg-Atomen erzeugt und deren Dekohärenz dann durch Variation der Rabi-Frequenz der Atom-Feld Wechselwirkung, der Durchflugzeit der Rydberg-Atome und der Verstimmung zwischen Resonatormode und verwendetem Rydberg-Übergang gemessen. Die experimentelle Realisierung von makroskopischer Superpositionszuständen – etwa von Fulleren-Molekülen [208], Bose-Einstein-Kondensaten [209, 210] oder gegenläufigen Strömen in SQUIDS (superconducting quantum interference devices) [211] – zeugen von den bereits erzielten Fortschritten auf diesem Gebiet. Eine Übersicht hierzu bietet etwa Ref. [212]. Verschränkte Zwei-Moden-Zuständen kommen insbesondere bei der Quantenteleportation zum Einsatz. Nachdem diese bereits mit Polarisations-verschränkten Photonen [3] und gequetschten Zwei-Moden Zustände [26, 27, 28] als Quanten-Kanälen [213] realisiert wurde, sind auch verschränkte kohärente Zustände [214, 215] in der Diskussion. Ein Vorschlag zur Präparation eines stationär-verschränkten Zwei-Moden-Zustandes, der Ähnlichkeiten zur stochastischen Resonanz aufweist, wurde ebenfalls bereits entwickelt [216].

A.5 CV-Systeme in der Quanteninformationstheorie

Die Implementierung von Quanten-Computern auf Basis von lasergekühlten Ionen in Paul-Fallen [19, 20] ist ein vielversprechender Vorschlag. Die Qubits sind dabei durch interne Elektronenzustände der Ionen realisiert und Information wird mittels gemeinsamer Bewegungsfreiheitsgrade übertragen. Auch das Interesse an nicht-Markovschen Reservoiren bei quanteninformationsverarbeitenden Systemen [50] hat zugenommen und erste nicht-Markovsche Beschreibungen von Quanten-Computern wurden präsentiert [51, 52]. Systeme kontinuierlicher Variablen eignen sich insbesondere zur Quanten-Kommunikation und -Teleportation, wo Laserstrahlen hoher Intensität ihre Vorteile der geringeren Störungsanfälligkeit und leichteren Detektierbarkeit gegenüber einzelnen verschränkten Photonen ausspielen können. Bisher wurde die Anwendungen verschränkter Moden als Quantenkanäle vor allem unter Markovschen Approximationen untersucht, allerdings sind auch erste Vorschläge für das Verhalten bei nicht-Markovschen Quantenkanälen [53, 54, 55] in der Diskussion. Eine Übersicht bietet etwa Ref. [217].

Anhang B

Details zu Modellen und Berechnungen

B.1 Lösung der Hu-Paz-Zhang Mastergleichung

Im Verlauf dieser Arbeit wurde die Hu-Paz-Zhang Mastergleichung für verschiedene Anfangszustände exakt gelöst. Insbesondere wurde die nicht-Markovsche Dynamik von nicht-Gaußschen Zuständen in Form der Superpositionen aus Fock-Zuständen $\sim (|n\rangle + |m\rangle)$ sowie aus kohärenten Zuständen $\sim (|\alpha_+\rangle + |\alpha_-\rangle)$ betrachtet. Da die Lösungen für die unterschiedlichen Beispiele über die Arbeit verteilt sind, wird die Vorgehensweise an dieser Stelle noch einmal übersichtlich dargestellt.

Ausgangspunkt für die Berechnung der Purity, der Dekohärenzfunktion oder der zeitlichen Entwicklung der Besetzungszahlen war jeweils die Wigner-Funktion $W(q, p, t)$, deren Zeitentwicklung über die generalisierte Fokker-Planck-Gleichung (3.111) beschrieben wird. Diese wurde auf zwei äquivalenten Wegen gelöst:

- Die Wigner-Funktion kann direkt über den auf die anfängliche Präparation $W(q, p, 0)$ wirkenden Propagator $\mathcal{P}(q, p; t|q_0, p_0; 0)$ bestimmt werden, mit

$$W(q, p, t) = \int dq_0 dp_0 \mathcal{P}(q, p; t|q_0, p_0; 0) W(q_0, p_0, 0), \quad (\text{B.1})$$

$$\text{und } \mathcal{P}(q, p; t|q_0, p_0; 0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{R}^T \Sigma^{-1} \mathbf{R} \right], \quad (\text{B.2})$$

wobei $\mathcal{P}(q, p; t|q_0, p_0; 0)$ durch die Funktionen (3.21) und (3.27) über

$$\Sigma(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} K_q(t) & K_{qp}(t) \\ K_{qp}(t) & K_p(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} q - \langle q(t) \rangle \\ p - \langle p(t) \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

gegeben ist [90]. Dabei beziehen sich die Mittelungen $\langle q(t) \rangle$ und $\langle p(t) \rangle$ auf die Lösungen (3.21) der Langevin-Gleichung mit Anfangswerten q_0 und p_0 .

- Einen anderen Lösungsansatz für Gleichung (3.111) bietet die sogenannte quantenstatistische charakteristische Funktion χ , die über eine Fourier-Transformation

$$W(q, p, 0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \chi(\eta, \nu, 0) \exp [i(\eta q + \nu p)/\hbar], \quad (\text{B.4})$$

mit der Wigner-Funktion verbunden ist [88]. Die zeitabhängige Wigner-Funktion kann dabei direkt über das Integral [90]

$$W(q, p, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \tilde{\chi}(\eta_t, \nu_t, 0) \exp [i(\eta p + \nu q)/\hbar] \quad (\text{B.5})$$

bestimmt werden, mit der Funktion $\tilde{\chi}$, die sich aus der anfänglichen charakteristischen Funktion mit substituierten Variablen $\eta_t = \dot{f}(t)\eta + \frac{1}{m}f(t)\nu$ und $\nu_t = m\dot{f}(t)\nu + \dot{f}(t)\eta$ und multipliziertem Gaußschen Faktor in der Form

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(\eta_t, \nu_t, 0) &= \chi \left(\dot{f}(t)\eta + \frac{1}{m}f(t)\nu, m\dot{f}(t)\eta + \dot{f}(t)\nu; 0 \right) \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2\hbar^2} (K_p(t)\eta^2 + 2K_{qp}(t)\eta\nu + K_q(t)\nu^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

ergibt.

Die auf diese Weise erhaltene zeitabhängige Wigner-Funktion bildet die Basis zur Berechnung abgeleiteter Größen wie der Purity und der Norm des Interferenzanteils als Dekohärenzfunktion.

- Die Berechnung der Purity für die Zustandsentwicklung unter der HPZ-Mastergleichung erfolgte über Lösung für die zeitabhängige Wigner-Funktion

$$\mu(t) = (2\pi\hbar)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp W^2(q, p, t). \quad (\text{B.7})$$

Ausgehend von der anfänglichen charakteristischen Funktion für die unterschiedlichen Superpositionszustände

$$\chi_{01}(\alpha, 0) = e^{-|\alpha|^2/2} [2 - |\alpha|^2 - (\alpha^* - \alpha)] / 2, \quad (\text{B.8})$$

$$\chi_{02}(\alpha, 0) = e^{-|\alpha|^2/2} \left[1 + \sqrt{2}(\alpha^2 + \alpha^{*2}) + \frac{1}{2}(2 - 4|\alpha|^2 + |\alpha|^4) \right] / 2, \quad (\text{B.9})$$

$$\chi_{\pm\alpha_0}(\alpha, 0) = N_0 e^{-|\alpha|^2/2} \left[\cosh(\alpha_0^* \alpha - \alpha_0 \alpha^*) + e^{-2|\alpha_0|^2} \cosh(\alpha_0^* \alpha + \alpha_0 \alpha^*) \right] \quad (\text{B.10})$$

mit $N_0 = \left(1 + \cos \theta e^{-2|\alpha_0|^2}\right)^{-1}$ und $\alpha = \frac{\eta}{2\sigma_0} + i\frac{\sigma_0}{\hbar}\nu$ wurde dann die exakte zeitliche Entwicklung bestimmt.

- Die Berechnung der Dekohärenzfunktion als Norm des Interferenzterms der anfänglichen Superposition wurde explizit für eine makroskopische Cat-State Superposition kohärenter Zustände durchgeführt, mit

$$\mu_I(t) = (2\pi\hbar)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp W_I^2(q, p, t), \quad (\text{B.11})$$

wobei $W_I(q, p, t)$ über die charakteristische Funktion

$$\chi_I(\nu, \eta, 0) = N_0 \left[e^{-\frac{1}{8\sigma_0^2}(\nu^2 - 2q_0)^2 - \frac{\sigma_0^2 \eta^2}{2\hbar^2}} + e^{-\frac{1}{8\sigma_0^2}(\nu^2 + 2q_0)^2 - \frac{\sigma_0^2 \eta^2}{2\hbar^2}} \right] \quad (\text{B.12})$$

des Interferenzterms gewonnen wird. Zur Vereinfachung der Integration kann $\chi_I(\nu, \eta, 0)$ aufgeteilt werden in

$$|\chi_I|^2 = |\chi_{12}|^2 + |\chi_{21}|^2 + \chi_{12}\chi_{21}^* + \chi_{12}^*\chi_{21}, \quad (\text{B.13})$$

so dass beispielsweise die Wigner-Funktion der ersten Komponente durch

$$W_{12}(q, p, t) = \frac{N_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{-\frac{\langle p^2(t) \rangle}{2\hbar^2} \eta^2 - \frac{\langle q^2(t) \rangle}{2\hbar^2} \nu^2 - \frac{\langle \{q, p\} \rangle}{2\hbar^2} \eta\nu + a\eta + b\nu + i(\eta p + \nu q)/\hbar},$$

ergibt, mit $a = \frac{q_0}{2\sigma_0^2} \dot{f}(t)$ und $b = \frac{q_0}{2m\sigma_0^2} f(t)$. Die zeitabhängigen Korrelationen $\langle q^2(t) \rangle$, $\langle p^2(t) \rangle$ und $\langle \{q, p\} \rangle(t)$ können als Lösungen (3.24) der quantenmechanischen Langevin-Gleichung (3.11) erhalten werden. Der Term W_{21} der Wigner-Funktion ergibt sich analog. Durch Quadrieren $W_I^2 = W_{12}^2 + W_{21}^2 + 2W_{12}W_{21}$ und Integration über die Koordinaten p und q erhält man schließlich die Norm des Interferenzterms

$$\tilde{\mu}_I(t) = \frac{\mu_0(t)}{2(1 + e^{q_0^2/2\sigma_0^2})^2} \left\{ 1 + \exp \left[\frac{4\mu_0^2(t)}{\hbar^2} (a^2 \langle q^2(t) \rangle - ab \langle \{q, p\} \rangle + b^2 \langle p^2(t) \rangle) \right] \right\} \quad (\text{B.14})$$

die noch mit dem anfänglichen Wert $\tilde{\mu}_I(0) = \frac{1 - e^{q_0^2/\sigma_0^2}}{2(1 + e^{q_0^2/2\sigma_0^2})^2}$ normiert werden kann. Daraus resultiert schließlich die Dekohärenzfunktion

$$\mu_I(t) = \frac{\mu_0(t)}{1 + e^{q_0^2/\sigma_0^2}} \left\{ 1 + \exp \left[\frac{\mu_0^2(t) q_0^2}{\hbar^2 m^2 \sigma_0^4} (m^2 \dot{f}_t^2 \langle q^2(t) \rangle - m f_t \dot{f}_t \langle \{q, p\} \rangle + f_t^2 \langle p^2(t) \rangle) \right] \right\}, \quad (\text{B.15})$$

wobei f_t die zeitabhängige Green-Funktion (3.23) der Lösung der quantenmechanischen Langevin-Gleichung bezeichnet.

B.2 Dynamik im Zwei-Reservoir-Modell

Die zeitliche Entwicklung der Kovarianz eines Zwei-Moden-Zustands mit separater Kopplung der Moden an identische, aber unkorrelierte Reservoirs (Kapitel 7.3.1) ist durch die Kovarianzelemente

$$\langle q_1^2(t) \rangle = \dot{f}_1^2(t)\sigma_{01}^2 + f_1^2(t)\frac{\hbar^2}{4\sigma_{01}^2 m^2} + K_{q_1}(t) \quad (\text{B.16})$$

$$\langle p_1^2(t) \rangle = m^2 \ddot{f}_1^2(t)\sigma_{01}^2 + \dot{f}_1^2(t)\frac{\hbar^2}{4\sigma_0^2} + K_{p_1}(t) \quad (\text{B.17})$$

$$\langle q_2^2(t) \rangle = \dot{f}_2^2(t)\sigma_{02}^2 + f_2^2(t)\frac{\hbar^2}{4\sigma_{02}^2 m^2} + K_{q_2}(t) \quad (\text{B.18})$$

$$\langle p_2^2(t) \rangle = m^2 \ddot{f}_2^2(t)\sigma_{02}^2 + \dot{f}_2^2(t)\frac{\hbar^2}{4\sigma_0^2} + K_{p_2}(t) \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{1}{2}\langle \{q_1, p_1\}(t) \rangle = m\dot{f}_1(t)\ddot{f}_1(t)\sigma_{01}^2 + \frac{\hbar^2}{4m\sigma_{01}^2} f_1(t)\dot{f}_1(t) + K_{q_1 p_1}(t) \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{1}{2}\langle \{q_2, p_2\}(t) \rangle = m\dot{f}_2(t)\ddot{f}_2(t)\sigma_{02}^2 + \frac{\hbar^2}{4m\sigma_{02}^2} f_2(t)\dot{f}_2(t) + K_{q_2 p_2}(t) \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{1}{2}\langle \{q_1, q_2\}(t) \rangle = \langle q_1 q_2(0) \rangle \dot{f}_1(t)\dot{f}_2(t) + \frac{1}{m^2} \langle p_1 p_2(0) \rangle f_1(t)f_2(t) \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{1}{2}\langle \{p_1, p_2\}(t) \rangle = m^2 \langle q_1 q_2(0) \rangle \ddot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) + \langle p_1 p_2(0) \rangle \dot{f}_1(t)\dot{f}_2(t) \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{1}{2}\langle \{q_1, p_2\}(t) \rangle = m \langle q_1 q_2(0) \rangle \dot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) + \frac{1}{m} \langle p_1 p_2(0) \rangle f_1(t)\dot{f}_2(t) \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{1}{2}\langle \{p_1, q_2\}(t) \rangle = m \langle q_1 q_2(0) \rangle \ddot{f}_1(t)\dot{f}_2(t) + \frac{1}{m} \langle p_1 p_2(0) \rangle \dot{f}_1(t)f_2(t) \quad (\text{B.25})$$

bestimmt (wegen der Symmetrie sind hier nur 10 Elemente zur Beschreibung nötig). Für die Frequenzen ω_1 und ω_2 der beiden Moden (hier $m_1 = m_2 = m$) ergeben sich die Greenschen Funktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ aus der Lösung (3.23) der jeweiligen Quanten-Langevin-Gleichung, ebenso die Lösungen des inhomogenen Anteils $K_{q_{1,2}}(t)$, $K_{p_{1,2}}(t)$ sowie $K_{q_1 p_1}(t)$ und $K_{q_2 p_2}(t)$ aus den Gleichung (3.27)-(3.29) folgen. Die Anfangswerte der Korrelationen sind durch die Kovarianzmatrix (5.23) bestimmt.

B.3 Dynamik im Ein-Reservoir-Modell

Im Ein-Reservoir-Modell für zwei identische Moden wird die Dynamik der Schwerpunktskoordinate durch eine Quanten-Langevin-Gleichung (7.102) beschrieben. Die Bewegung der Relativkoordinate ist davon unabhängig und unterliegt annahmegemäß nur einer schwacher Wechselwirkung mit dem Bad – die Dynamik nach (7.103) wird deshalb hinreichend in der

Born-Markov-Approximation beschrieben. Aus der Transformation

$$\langle R^2 \rangle = \frac{1}{4} (\langle q_1^2 \rangle + \langle q_2^2 \rangle + \langle \{q_1, q_2\} \rangle) \quad (\text{B.26})$$

$$\langle P_R^2 \rangle = \langle p_1^2 \rangle + \langle p_2^2 \rangle + \langle \{p_1, p_2\} \rangle \quad (\text{B.27})$$

$$\langle x^2 \rangle = \langle q_1^2 \rangle + \langle q_2^2 \rangle - \langle \{q_1, q_2\} \rangle \quad (\text{B.28})$$

$$\langle p_x^2 \rangle = \frac{1}{4} (\langle p_1^2 \rangle + \langle p_2^2 \rangle - \langle \{p_1, p_2\} \rangle) \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{1}{2} \langle \{x, R\} \rangle = \frac{1}{2} (\langle q_1^2 \rangle - \langle q_2^2 \rangle) \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{1}{2} \langle \{p_x, P_R\} \rangle = \frac{1}{2} (\langle p_1^2 \rangle + \langle p_2^2 \rangle) \quad (\text{B.31})$$

ergeben sich die zeitabhängigen Elemente der Kovarianzmatrix des Systems zu (auf die explizite Angabe der Zeitabhängigkeit in Form einer Funktion von t wird hier verzichtet):

$$\langle q_1^2 \rangle = \langle R^2 \rangle + \langle x^2 \rangle + \langle \{x, R\} \rangle \quad (\text{B.32})$$

$$\langle q_2^2 \rangle = \langle R^2 \rangle + \langle x^2 \rangle - \langle \{x, R\} \rangle \quad (\text{B.33})$$

$$\langle p_1^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle P_R^2 \rangle + \langle p_x^2 \rangle + \langle \{P_R, p_x\} \rangle \quad (\text{B.34})$$

$$\langle p_2^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle P_R^2 \rangle + \langle p_x^2 \rangle - \langle \{P_R, p_x\} \rangle \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{1}{2} \langle \{q_1, q_2\} \rangle = \langle R^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle x^2 \rangle \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{1}{2} \langle \{p_1, p_2\} \rangle = \frac{1}{4} \langle P_R^2 \rangle - \langle p_x^2 \rangle \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{1}{2} \langle \{q_1, p_1\} \rangle = \frac{1}{2} \langle \{R, P_R\} \rangle + \langle \{R, p_x\} \rangle + \frac{1}{4} \langle \{x, P_R\} \rangle + \frac{1}{2} \langle \{x, p_x\} \rangle \quad (\text{B.38})$$

$$\frac{1}{2} \langle \{q_1, p_2\} \rangle = \frac{1}{2} \langle \{R, P_R\} \rangle - \langle \{R, p_x\} \rangle + \frac{1}{4} \langle \{x, P_R\} \rangle - \frac{1}{2} \langle \{x, p_x\} \rangle \quad (\text{B.39})$$

$$\frac{1}{2} \langle \{q_2, p_2\} \rangle = \frac{1}{2} \langle \{R, P_R\} \rangle - \langle \{R, p_x\} \rangle - \frac{1}{4} \langle \{x, P_R\} \rangle + \frac{1}{2} \langle \{x, p_x\} \rangle \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{1}{2} \langle \{q_2, p_1\} \rangle = \frac{1}{2} \langle \{R, P_R\} \rangle + \langle \{R, p_x\} \rangle - \frac{1}{4} \langle \{x, P_R\} \rangle - \frac{1}{2} \langle \{x, p_x\} \rangle \quad (\text{B.41})$$

Im Falle identischer Moden erfolgen Schwerpunkt- und Relativbewegung unabhängig voneinander und die entsprechenden Korrelationen $\langle \{R, x\} \rangle$, $\langle \{R, p_x\} \rangle$, $\langle \{x, P_R\} \rangle$ sind für alle Zeiten Null. Die Laplace-Transformation des gekoppelten Langevin-Gleichungssystems (7.100) liefert dann im Falle identischer Moden ($\omega_{1,2} = \omega_0$) beispielsweise für die Koordinate q_1 die Lösung

$$\hat{q}_1(s) = \hat{F}(s) \left[sq_1(0) + \frac{p_1(0)}{m} + \frac{\hat{\eta}(s)}{2m} \right] - \hat{G}(s) \left[sq_2(0) + \frac{p_2(0)}{m} + \frac{\hat{\eta}(s)}{2m} \right] \quad (\text{B.42})$$

$$\text{mit } \hat{F}(s) = \frac{m^2 \hat{f}(s)}{m^2 - f^2(s) s^2 \hat{\gamma}^2(s)}, \quad \text{und } \hat{G}(s) = \frac{s \hat{\gamma}(s) \hat{f}^2(s)}{m - s \hat{\gamma}(s) \hat{f}^2(s)} \quad (\text{B.43})$$

wobei $\hat{f}(s)$ und $\hat{\gamma}(s)$ die Laplace-Transformierten der Greenschen Funktion (3.23) bzw. der Dämpfungsfunktion (3.40) sind. Die Funktion $F(t) = \int_0^\infty ds \hat{F}(s) e^{-st}$ hat dann komplexe Pole bei $\pm i\omega_0$, was im stationären Zustand zu einer Oszillation der entsprechenden Varianzen führen würde. Physikalisch resultiert dies aus der unitären Bewegung (bzw. Schwingung) der ungekoppelten Relativkoordinate. Durch die Zusatzannahme (7.103) wird die die Behandlung dieses Problems für identische Moden dennoch möglich.

Literaturverzeichnis

- [1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [2] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters. *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*. Phys. Rev. Lett, **70**:1895, 1993.
- [3] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. *Experimental quantum teleportation*. Nature, **390**:575, 1997.
- [4] U. Weiss. *Quantum Dissipative Systems*. World Scientific, Singapore, 1999.
- [5] H.-P. Breuer and F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [6] T. Dittrich, P. Hänggi, G.-L. Ingold, B. Kramer, G. Schön, and W. Zwerger. *Quantum Transport and Dissipation*. Wiley-VCH, Weinheim, 1998.
- [7] C. W. Gardiner and P. Zoller. *Quantum Noise*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2000.
- [8] S. M. Barnett and P. M. Radmore. *Methods in theoretical Quantum Optics*. Clarendon Press, Oxford, 1997.
- [9] D. F. Walls and G. J. Milburn. *Quantum Optics*. Springer, Berlin Heidelberg, 1994.
- [10] H. J. Carmichael. *An Open Systems Approach to Quantum Optics*. Springer, Berlin, 1993.
- [11] A. O. Caldeira and A. J. Leggett. *Quantum tunnelling in a dissipative system*. Ann. Phys. (N.Y.), **149**:374, 1983.
- [12] A. O. Caldeira and A. J. Leggett. *Path integral approach to quantum Brownian motion*. Physica A, **121**:587, 1983.
- [13] R. P. Feynman and F. L. Vernon. *The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system*. Ann. Phys. (N.Y.), **24**:118, 1963.
- [14] H. Grabert, P. Schramm, and G.-L. Ingold. *Quantum Brownian motion: the functional integral approach*. Phys. Rep., **168**:115, 1988.

-
- [15] C. M. Smith and A. O. Caldeira. *Application of the generalized Feynman-Vernon approach to a simple system: The damped harmonic oscillator*. Phys. Rev. A, **41**:3103, 1990.
- [16] B. L. Hu, J. P. Paz, and Y. Zhang. *Quantum Brownian motion in a general environment: Exact master equation with nonlocal dissipation and colored noise*. Phys. Rev. D, **45**:2843, 1992.
- [17] G. W. Ford and M. Kac. *On the Quantum Langevin equation*. J. Stat. Phys., **46**:803, 1987.
- [18] G. W. Ford, J. T. Lewis, and R. F. O'Connell. *Quantum Langevin equation*. Phys. Rev. A, **37**:4419, 1988.
- [19] J. I. Cirac and P. Zoller. *Quantum computations with cold trapped ions*. Phys. Rev. Lett., **74**:4091, 1995.
- [20] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland. *Demonstration of fundamental quantum logic gate*. Phys. Rev. Lett , **75**:4714, 1995.
- [21] D. Leibfried, B. DeMarco, V. Meyer, M. Rowe, J. Britton, W. M. Itano, B. Jelenkovic, C. Langer, T. Rosenband, and D. J. Wineland. *Trapped-ion quantum simulator: experimental application to nonlinear interferometers*. Rev. Rev. Lett., **89**:247901, 2002.
- [22] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche. *Observing the progressive decoherence of the 'meter' in a quantum measurement*. Phys. Rev. Lett., **77**:4887, 1996.
- [23] S. L. Braunstein and A. K. Pati. *Quantum Information Theory with Continuous Variables*. Kluwer, Dordrecht, 2003.
- [24] S. L. Braunstein and P. van Loock. *Quantum information with continuous variables*. Rev. Mod. Phys., **77**:513, 2005.
- [25] N. J. Cerf, G. Leuchs, and E. S. Polzik. *Quantum Information with Continuous Variables of Atoms and Light*. Imperial College Press, London, 2007.
- [26] A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble, and E. S. Polzik. *Unconditional quantum teleportation*. Science, **282**:706, 1998.
- [27] S. L. Braunstein and H. J. Kimble. *Teleportation of continuous quantum variables*. Phys. Rev. Lett., **80**:869, 1998.
- [28] J. Wenger, A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouiri, and P. Grangier. *Time-resolved homodyne characterization of individual quadrature-entangled pulses*. Eur. Phys. J. D, **32**:391, 2005.
- [29] H. D. Zeh. *On the interpretation of measurements in quantum theory*. Found. Phys. , **1**:69, 1970.
- [30] H. D. Zeh. *Toward a quantum theory of observation*. Found. Phys., **3**:109, 1973.
-

-
- [31] W. H. Zurek. *Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?* Phys. Rev. D, **24**:1516, 1981.
- [32] M. Schlosshauer. *Decoherence, the measurement problem and interpretations of quantum mechanics.* Rev. Mod. Phys., **76**:1267, 2004.
- [33] W. H. Zurek. *Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical.* Rev. Mod. Phys., **75**:715, 2003.
- [34] E. Joos, H. D. Zeh, C. Kiefer, D. Giulini, J. Kupsch, and I.-O. Stamatescu. *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory.* Springer Verlag, Berlin, 2003.
- [35] A. O. Bolivar. *Quantum-Classical Correspondance. Dynamical Quantization and the Classical Limit.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.
- [36] D. F. Walls and G. J. Milburn. *Effect of dissipation on quantum coherence.* Phys. Rev. A, **31**:1059, 1985.
- [37] C. J. Myatt, B. E. King, Q. A. Turchette, C. A. Sackett, D. Kielpinski, W. M. Itano, and D. J. Wineland. *Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs.* Nature, **403**:269, 2000.
- [38] Q. A. Turchette, C. J. Myatt, B. E. King, C. A. Sackett, D. Kielpinski, W. M. Itano, C. Monroe, and D. J. Wineland. *Decoherence and decay of motional quantum states of a trapped atom coupled to engineered reservoirs.* Phys. Rev. A, **62**:053807, 2000.
- [39] J. F. Poyatos, J. I. Cirac, and P. Zoller. *Quantum reservoir engineering with Laser cooled trapped ions.* Phys. Rev. Lett., **77**:4728, 1996.
- [40] J. Audretsch. *Verschränkte Systeme. Die Quantenphysik auf neuen Wegen.* Wiley-VCH, Weinheim, 2005.
- [41] J. S. Bell. *On the Einstein Podolsky Rosen paradoxon.* Physics, **1**:195, 1964.
- [42] A. Peres. *Separability criterion for density matrices.* Phys. Rev. Lett., **77**:1413, 1996.
- [43] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki. *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions.* Phys. Lett. A , **223**:1, 1996.
- [44] G. Vidal and R. F. Werner. *Computable measure of entanglement.* Phys. Rev. A, **65**:032314, 2002.
- [45] G. Giedke, M. M. Wolf, O. Krüger, R. F. Werner, and J. I. Cirac. *Entanglement of Formation for symmetric Gaussian states.* Phys. Rev. Lett., **91**:107901, 2003.
- [46] R. Simon. *Peres-Horodecki separability criterion for continous variable systems.* Phys. Rev. Lett., **84**:2726, 2000.
- [47] L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller. *Inseparability Criterion for Continous Variable Systems.* Phys. Rev. Lett., **84**:2722, 2000.
-

-
- [48] T. Quang, M. Woldeyohannes, and S. John. *Coherent control of spontaneous emission near a photonic band edge*. Phys. Rev. Lett., **79**:5238, 1997.
- [49] J. J. Hope, G. M. Moy, M. J. Collett, and C. M. Savage. *Steady-state quantum statistics of non-Markovian atom laser*. Phys. Rev. A, **61**:023603, 2000.
- [50] D. Ahn, Lee. J., M. S. Kim, and S. W. Hwang. *Self-consistent non-Markovian theory of a quantum-state evolution for quantum-information processing*. Phys. Rev. A, **66**:012302, 2002.
- [51] R. Alicki, M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki. *Dynamical description of quantum computing: generic nonlocality of quantum noise*. Phys. Rev. A, **65**:062101, 2002.
- [52] R. Alicki, M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, L. Jacak, and P. Machnikowski. *Optimal strategy for a single-qubit gat and the trade-off between opposit types of decoherence*. Phys. Rev. A, **70**:010501, 2004.
- [53] M. Ban. *Decoherence in phase-preserving linear dissipative processes*. Phys. Lett. A, **359**:402, 2006.
- [54] M. Ban. *Decoherence of continuous variable quantum information in non-Markovian quantum channels*. J. Phys. A: Math. Gen., **39**:1927, 2006.
- [55] H. McAnaney, J. Lee, D. Ahn, and M. S. Kim. *Non-Markovian decoherence: complete positivity and decomposition*. J. Mod. Opt., **52**:935, 2005.
- [56] A. Buchleitner and K. Hornberger. *Coherent Evolution in Noisy Environments*. Springer, Berlin Heidelberg, 2002.
- [57] R. Zwanzig. *Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Oxford Univ. Press, Oxford, 2001.
- [58] G. Lindblad. *On the generators of quantum dynamical semigroups*. Commun. Math. Phys., **48**:119, 1976.
- [59] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland. *Quantum dynamics of single trapped ions*. Rev. Mod. Phys., **75**:281, 2003.
- [60] M. G. A. Paris, F. Illuminati, A. Serafini, and S. De Siena. *Purity of Gaussian states: measurement schemes and time-evolution in noisy channels*. Phys. Rev. A, **68**:012314, 2003.
- [61] A. Serafini, M. G. A. Paris, F. Illuminati, and S. De Siena. *Quantifying decoherence in continuous variable systems*. J. Opt. B; Quantum Semiclass. Opt., **7**, 2005.
- [62] E. T. Jaynes and F. W. Cummings. *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*. Proc. IEEE, **51**:89, 1963.
- [63] K. Shiokawa and B. L. Hu. *Qubit decoherence and non-Markovian dynamics at low temperatures via an effective spin-boson model*. Phys. Rev. A, **70**:062106, 2004.
-

-
- [64] C. Anastopoulos and B. L. Hu. *Two-level atom-field interaction: exact master equations for non-Markovian dynamics, decoherence and relaxation*. Phys. Rev. A, **62**:033821, 2000.
- [65] R. Alicki. *Invitation to quantum dynamical semigroups*, in: P. Garbaczewski, R. Olkiewicz (Hrsg.), *Dynamics of Dissipation, Lecture Notes in Physics 597*. Springer, Berlin, 2002.
- [66] G. Lindblad. *Brownian motion of a quantum harmonic oscillator*. Rep. Math. Phys., **10**:393, 1976.
- [67] A. Isar, A. Sandulescu, and W. Scheid. *Density matrix for the damped harmonic oscillator within the Lindblad theory*. J. Math. Phys., **34**:3887, 1993.
- [68] A. Isar, A. Sandulescu, H. Scutaru, E. Stefanescu, and W. Scheid. *Open quantum systems*. Int. J. Mod. Phys. E, **3**:635, 1994.
- [69] A. K. Rajagopal and R. W. Rendell. *Control of decoherence and correlation in single quantum dissipative oscillator systems*. Phys. Lett. A, **279**:175, 2001.
- [70] S. Maniscalco, J. Piilo, F. Intravaia, F. Petruccione, and A. Messina. *Simulating quantum Brownian motion with single trapped ions*. Phys. Rev. A, **69**:052101, 2004.
- [71] N. G. van Kampen. *Remarks on non-Markovian Processes*. Braz. J. Phys., **28**:90, 1998.
- [72] A. O. Caldeira and A. J. Leggett. *Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems*. Phys. Rev. Lett., **46**:211, 1981.
- [73] G. W. Ford, M. Kac, and P. Mazur. *Statistical mechanics of assemblies of coupled oscillators*. J. Math. Phys., **6**:504, 1965.
- [74] G. W. Ford, J. T. Lewis, and R. F. O'Connell. *Independent oscillator model of a heat bath: exact diagonalization of the Hamiltonian*. J. Stat. Phys., **53**:439, 1988.
- [75] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, New York, 1972.
- [76] P. Ullersma. *An exactly solvable model for Brownian motion*. Physica, **32**:27, 1966.
- [77] S. Wolfram. *Das Mathematica Buch*. Addison-Wesley, Bonn, 1997.
- [78] R. P. Feynman. *Space-time approach to non relativistic quantum mechanics*. Rev. Mod. Phys., **20**:367, 1948.
- [79] R. P. Feynman and A. R. Hibb. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [80] H. Kleinert. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics*. World Scientific, Singapore, 1995.
- [81] R. P. Feynman. *Statistical Mechanics*. Perseus Books, Reading, Mass., 1998.
-

-
- [82] P. Hänggi and G.-L. Ingold. *Fundamental aspects of quantum Brownian motion*. Chaos, **15**:026105, 2005.
- [83] R. Karrlein and H. Grabert. *Exact time evolution and master equations for the damped harmonic oscillator*. Phys. Rev. E, **55**:153, 1997.
- [84] F. Haake and R. Reibold. *Strong damping and low-temperature anomalies for the harmonic oscillator*. Phys. Rev. A, **32**:2462, 1985.
- [85] S. M. Barnett and S. Stenholm. *Hazards of reservoir memory*. Phys. Rev. A, **64**:033808, 2001.
- [86] F. Intravaia, S. Maniscalco, and A. Messina. *Density-matrix operatorial solution of the non-Markovian master equation for quantum Brownian motion*. Phys. Rev. A, **67**:042108, 2003.
- [87] E. P. Wigner. *On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium*. Phys. Rev., **40**:749, 1932.
- [88] M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner. *Distribution Functions in Physics: Fundamentals*. Phys. Rep., **106**:121, 1984.
- [89] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.
- [90] G. W. Ford and R. F. O’Connell. *Exact solution of the Hu-Paz-Zhang master equation*. Phys. Rev. D, **64**:105020, 2001.
- [91] W. T. Strunz, F. Haake, and D. Braun. *Universality of decoherence for macroscopic quantum superpositions*. Phys. Rev. A, **67**:022101, 2003.
- [92] A. Isar, A. Sandulescu, and W. Scheid. *Purity and decoherence in the theory of a damped harmonic oscillator*. Phys. Rev. E , **60**:6, 1999.
- [93] A. Isar and W. Scheid. *Uncertainty functions of the open quantum harmonic oscillator in the Lindblad theory*. Phys. Rev. A , **66**:042117, 2002.
- [94] S. Maniscalco, J. Piilo, F. Intravaia, F. Petruccione, and A. Messina. *Lindblad- and non-Lindblad-type dynamics of a quantum Brownian particle*. Phys. Rev. A, **70**:032113, 2004.
- [95] F. Intravaia, S. Maniscalco, J. Piilo, and A. Messina. *Quantum theory of heating of a single trapped ion*. Phys. Lett. A, **308**:6, 2003.
- [96] F. Intravaia, S. Maniscalco, and A. Messina. *Comparison between the rotating wave and Feynman-Vernon system-reservoir couplings in the non-Markovian regime*. Eur. Phys. J. B, **32**:97, 2003.
- [97] J. Gemmer, M. Michel, and G. Mahler. *Quantum Thermodynamics: Emergence of thermodynamic behavior within composite quantum systems*, Lect. Notes Phys. 657. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.
-

-
- [98] G. W. Ford and R. F. O'Connell. *A quantum violation of the second law?* Phys. Rev. Lett., **96**:020402, 2006.
- [99] W. Pusz and L. Woronowicz. *Passive states and KMS states for general quantum systems.* Comm. Math. Phys., **58**:273, 1978.
- [100] A. Lenard. *Thermodynamical proof of the Gibbs formula for elementary quantum systems.* J. Stat. Phys., **19**:575, 1978.
- [101] M. Ohya and D. Petz. *Quantum Entropy and its Use.* Springer, Berlin Heidelberg, 2004.
- [102] D. P. Sheehan. *Quantum Limits to the Second Law.* American Inst. of Physics, Melville, NY, 2002.
- [103] Th. M. Nieuwenhuizen, V. Spicka, and P. D. Keefe. *Frontiers of Quantum and Mesoscopic Thermodynamics.* Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [104] A. E. Allahverdyan and Th. M. Nieuwenhuizen. *Statistical thermodynamics of quantum Brownian motion: birth of perpetuum mobile of the second kind.* Phys. Rev. E, **66**:036102, 2002.
- [105] H. S. Leff and A. F. Rex. *Maxwell's Demon 2: Entropy, Classical and Quantum Information, Computing.* Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2003.
- [106] G. W. Ford and R. F. O'Connell. *Entropy of a quantum oscillator coupled to a heat bath and implications for quantum thermodynamics.* Physica E, **29**:82, 2005.
- [107] P. Hänggi and G. L. Ingold. *Quantum Brownian motion and the Third Law of thermodynamics.* Acta Phys. Pol. B, **37**:1537, 2006.
- [108] I. Kim and G. Mahler. *Quantum Brownian motion and the second law of thermodynamics.* Eur. Phys. J. B, 54:405, 2007.
- [109] H. Grabert, U. Weiss, and P. Talkner. *Quantum theory of the damped harmonic oscillator.* Z. Phys. B, **55**:87, 1984.
- [110] A. N. Jordan and M. Büttiker. *Entanglement energetics at zero temperature.* Phys. Rev. Lett., **92**:247901, 2004.
- [111] M. Büttiker and A. N. Jordan. *Ground state entanglement energetics.* Physica E, **29**:272, 2005.
- [112] G. S. Agarwal. *Entropy, the Wigner distribution function, and the approach to equilibrium of a system of coupled harmonic oscillators.* Phys. Rev. A, **3**:828, 1971.
- [113] M. A. Huerta and H. S. Robertson. *Approach to equilibrium of coupled, harmonically bound oscillator systems.* J. Stat. Phys., **1**:393, 1969.
- [114] W. H. Zurek. *Einselection and decoherence from an information theory perspective.* Ann. Phys. (Leipzig), **9**:855, 2000.
-

-
- [115] H. Ollivier and W. H. Zurek. *Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations*. Phys. Rev. Lett., **88**:017901, 2002.
- [116] H. Araki and E. Lieb. *Entropy inequalities*. Commun. Math. Phys., **18**:160, 1970.
- [117] S. M. Barnett and S. J. D. Phoenix. *Entropy as a measure of quantum optical correlation*. Phys. Rev. A, **40**:2404, 1989.
- [118] D. P. Landau and E. M. Lifshitz. *Statistical Physics, Part 1*. Pergamon, London, 1980.
- [119] R. Landauer. *Irreversibility and heat generation in the computing process*. IBM J. Res. Dev., **5**:183, 1961.
- [120] C. H. Bennett. *Thermodynamics of Computation - A Review*. Int. J. Theor. Phys., **21**:905, 1982.
- [121] R. Landauer. *The physical nature of information*. Phys. Lett. A, **217**:188, 1996.
- [122] A. E. Allahverdyan and Th. M. Nieuwenhuizen. *Breakdown of the Landauer bound for information erasure in the quantum regime*. Phys. Rev. E, **64**:056117, 2001.
- [123] C. Hörhammer and H. Büttner. *Thermodynamics of quantum Brownian motion: the role of entanglement in the strong coupling quantum regime*. J. Phys. A: Math. Gen., **38**:7325, 2005.
- [124] A. Ferraro, S. Olivares, and M. G. A. Paris. *Gaussian states in continuous variable quantum information*. quant-ph/0503237.
- [125] S. T. Ali, J.-P. Antoine, and J.-P. Gazeau. *Coherent States, Wavelets and their Generalizations*. Springer Verlag, New York, 2000.
- [126] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* Phys. Rev., **47**:777, 1935.
- [127] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [128] E. Schroedinger. *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*. Naturwiss., **23**:7, 1935.
- [129] W. Schleich, M. Pernigo, and F. L. Kien. *Nonclassical state from two pseudoclassical states*. Phys. Rev. A, **44**:2172, 1991.
- [130] M. S. Kim and V. Buzek. *Schrödinger-cat states at finite temperature: influence of a finite-temperature heat bath on quantum interferences*. Phys. Rev. A, **46**:4239, 1992.
- [131] B. C. Sanders. *Entangled coherent states*. Phys. Rev. A, **45**:6811, 1992.
- [132] X. Wang and B. C. Sanders. *Multipartite entangled coherent states*. Phys. Rev. A, **65**:012303, 2001.
- [133] O. Hirota and M. Sasaki. *Entangled state based on non-orthogonal state*. <http://arxiv.org/quant-ph/0101018>.
-

-
- [134] O. Hirota, J. S. van Enk, K. Nakamura, M. Sohma, and K. Kentaro. *Entangled non-orthogonal states and their decoherence properties*. <http://arxiv.org/quant-ph/0101018>.
- [135] J. H. An, M. Feng, and W. M. Zhang. *Decoherence dynamics of continuous variable quantum channels*. <http://arxiv.org/quant-ph/0705.2472>.
- [136] A. Mann, B. C. Sanders, and W. J. Munro. *Bell Inequality for an entanglement of non-orthogonal states*. Phys. Rev. A, **51**:989, 1995.
- [137] C. L. Chai. *Two-mode nonclassical state via superpositions of two-mode coherent states*. Phys. Rev. A, **1992**:7187, 1992.
- [138] S. M. Tan, D. F. Walls, and M. J. Collett. *Nonlocality of a single photon*. Phys. Rev. Lett., **66**:252, 1991.
- [139] X. Wang. *Bipartite entangled non-orthogonal states*. J. Phys. A: Math. Gen., **35**:165, 2002.
- [140] S. J. van Enk and O. Hirota. *Entangled coherent states: Teleportation and decoherence*. Phys. Rev. A, **64**:022313, 2001.
- [141] S. J. van Enk and O. Hirota. *The most robust entangled state of light*. Phys. Rev. A, **71**:062322, 2005.
- [142] S.-B. Li and J.-B. Xu. *Quantum probabilistic teleportation via entangled coherent states*. Phys. Lett. A, **309**:321, 2003.
- [143] A. Serafini, F. Illuminati, and S. De Siena. *Decoherence of number states in phase-sensitive reservoirs*. Mod. Phys. Lett. B, **18**:687, 2004.
- [144] A. Serafini, S. De Siena, F. Illuminati, and M. G. A. Paris. *Minimum decoherence cat-like states in Gaussian noisy channels*. Quant. Semiclass. Opt., **6**:S591, 2004.
- [145] R. Alicki. *Pure decoherence in quantum systems*. Open Sys. and Inf. Dyn., **11**:53, 2004.
- [146] J. J. Halliwell, J. Perez-Mercader, and W. H. Zurek. *Physical Origins of Time Asymmetry*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [147] H. D. Zeh. *The Physical Basis of the Direction of Time*. Springer Verlag, Singapur, 1999.
- [148] J. P. Paz, S. Habib, and W. H. Zurek. *Reduction of the wave packet: Preferred observable and decoherence time scale*. Phys. Rev. D, **47**:488, 1993.
- [149] F. C. Lombardo and P. I. Villar. *Decoherence induced by zero point fluctuations in quantum Brownian motion*. Phys. Lett. A, **336**:16, 2005.
- [150] F. M. Cucchietti, D. A. R. Dalvit, J. P. Paz, and W. H. Zurek. *Decoherence and the Loschmidt Echo*. Phys. Rev. Lett., **91**:210403, 2003.
- [151] T. Gorin, T. Prosen, T. H. Seligman, and W. T. Strunz. *Connection between decoherence and fidelity decay in echo dynamics*. Phys. Rev. A, **70**:042105, 2004.
-

-
- [152] A. O. Caldeira and A. J. Leggett. *Influence of damping on quantum interference: An exactly soluble model*. Phys. Rev. A, **31**:1059, 1985.
- [153] G. W. Ford, J. T. Lewis, and R. F. O'Connell. *Quantum measurement and decoherence*. Phys. Rev. A, **64**:032101, 2001.
- [154] M. Murakami, G. W. Ford, and R. F. O'Connell. *Decoherence in phase space*. Laser Phys., **13**:180, 2003.
- [155] W. T. Strunz and F. Haake. *Decoherence scenarios from microscopic to macroscopic superpositions*. Phys. Rev. A, **67**:022102, 2003.
- [156] A. Ratchov, F. Faure, and F. W. J. Hekking. *Loss of quantum coherence in a system coupled to a zero-temperature environment*. Eur. Phys. J. B, **46**:519, 2005.
- [157] S. Sinha. *Decoherence at absolute zero*. Phys. Lett. A, **228**:1, 1997.
- [158] G. W. Ford and R. F. O'Connell. *Decoherence without dissipation*. Phys. Lett. A, **286**:87, 2001.
- [159] R. F. O'Connell. *Decoherence in quantum systems*. IEEE Transactions on Nanotechnology, **4**:77, 2005.
- [160] G. W. Ford and R. F. O'Connell. *Reply to comment on 'Quantum measurement and decoherence'*. Phys. Rev. A, **70**:026102, 2004.
- [161] D. Gobert, J. von Delft, and V. Ambegaokar. *Comment on 'Quantum measurement and decoherence'*. Phys. Rev. A, **70**:026101, 2004.
- [162] V. Ambegaokar. *Dissipation and decoherence in a quantum oscillator*. J. Stat. Phys., **125**:1187, 2006.
- [163] J. P. Paz and W. H. Zurek. *Quantum Limit of decoherence: environment induced superselection of energy eigenstates*. Phys. Rev. Lett., **82**:5181, 1999.
- [164] S. Shresta, C Anastopoulos, A. Dragulescu, and B. L. Hu. *Non-Markovian qubit dynamics in a thermal field bath: relaxation, decoherence and entanglement*. Phys. Rev. A, **71**:022109, 2005.
- [165] E. Schroedinger. *Discussion of probability relations between separated systems (I)*. Proceedings for the Cambridge Philosophy Society, **31**:555, 1935.
- [166] J. Eisert and M. B. Plenio. *Introduction to the basics of entanglement theory in continuous-variable systems*. Int. J. Quant. Inf., **1**:479, 2003.
- [167] G. Adesso, A. Serafini, and F. Illuminati. *Determination of continuous variable entanglement by purity measurements*. Phys. Rev. Lett., **92**:087901, 2004.
- [168] G. Adesso, A. Serafini, and F. Illuminati. *Extremal entanglement and mixedness in continuous variable systems*. Phys. Rev. A, **70**:022318, 2004.
- [169] A. Serafini. *Multimode uncertainty relations and separability of continuous variable states*. Phys. Rev. Lett., **96**:110402, 2006.
-

-
- [170] P. Horodecki. *Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition*. Phys. Lett. A , **232**:333, 1997.
- [171] R. F. Werner and M. M. Wolf. *Bound Entangled Gaussian States*. Phys. Rev. Lett., **86**:3658, 2001.
- [172] M. D. Reid. *Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rose paradox using nondegenerate parametric amplification*. Phys. Rev. A, **40**:913, 1989.
- [173] A. Serafini, F. Illuminati, M. G. A. Paris, and S. De Siena. *Entanglement and purity of two-mode Gaussian states in noisy channels*. Phys. Rev. A, **69**:022318, 2004.
- [174] A. Serafini, F. Illuminati, and S. De Siena. *Symplectic invariants, entropic measures and correlations of Gaussian states*. J. Phys. B, **37**:L21, 2004.
- [175] D. McHugh, M. Ziman, and V. Buzek. *Entanglement, purity and energy: two qubits versus two modes*. Phys. Rev. A, **74**:042303, 2006.
- [176] A. K. Rajagopal and R. W. Rendell. *Decoherence, correlation, and entanglement in a pair of coupled quantum dissipative oscillators*. Phys. Rev. A, **63**:022116, 2001.
- [177] R. W. Rendell and A. K. Rajagopal. *Entanglement of pure two-mode Gaussian states*. Phys. Rev. A, **72**:012330, 2005.
- [178] D. Bohm and Y. Aharonov. *Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen and Podolsky*. Phys. Rev., **108**:1070, 1957.
- [179] D. Bohm. *Quantum Theory*. Dover, New York, 1989.
- [180] M. D. Reid and P. D. Drummond. *Quantum correlations of phase in nondegenerate parametric oscillation*. Phys. Rev. Lett., **60**:2731, 1988.
- [181] J. S. Prauzner-Bechcicki. *Two-mode squeezed vacuum state coupled to the common thermal reservoir*. J. Phys. A, **37**:L173, 2004.
- [182] S. M. Tan. *Confirming entanglement in continuous variable quantum teleportation*. Phys. Rev. A, **60**:2752, 1999.
- [183] G. Adesso, A. Serafini, and F. Illuminati. *Entanglement, purity and information entropies in continuous variable systems*. Open Syst. Inf. Dyn., **12**:189, 2005.
- [184] G. Rigolin and C. O. Escobar. *Lower bounds on the entanglement of formation for general Gaussian states*. Phys. Rev. A, **69**:012307, 2004.
- [185] G. Adesso and F. Illuminati. *Gaussian measures of entanglement versus negativities: Ordering of two-mode Gaussian states*. Phys. Rev. A, **72**:032334, 2005.
- [186] S. Hill and K. W. Wootters. *Entanglement of a Pair of Quantum Bits*. Phys. Rev. Lett., **78**:5022, 1997.
- [187] W. K. Wootters. *Entanglement of Formation of an arbitrary state of two qubits*. Phys. Rev. Lett., **80**:2245, 1998.
-

-
- [188] S. Olivares, M. G. A. Paris, and A. R. Rossi. *Optimized teleportation in Gaussian noisy channels*. Phys. Lett. A, **319**:32, 2003.
- [189] S. Maniscalco, S. Olivares, and M. G. A. Paris. *Entanglement oscillations in non-Markovian quantum channels*. Phys. Rev. A, **75**:062119, 2007.
- [190] U. Zürcher and P. Talkner. *Quantum mechanical harmonic chain attached to heat bath. I. Equilibrium properties*. Phys. Rev. A, **42**:3267, 1990.
- [191] U. Zürcher and P. Talkner. *Quantum mechanical harmonic chain attached to heat bath. II. Nonequilibrium properties*. Phys. Rev. A., **42**:3278, 1990.
- [192] C. Gaul and H. Büttner. *Quantum mechanical heat transport in disordered harmonic chains*. <http://arxiv.org/quant-ph/0702157>.
- [193] C.-H. Chou, T. Yu, and B. L. Hu. *Exact master equation and quantum decoherence of two coupled harmonic oscillators in a general environment*. <http://arxiv.org/quant-ph/0703088>.
- [194] O. S. Duarte and A. O. Caldeira. *Effective coupling between two Brownian particles*. Phys. Rev. Lett., **97**:250601, 2006.
- [195] C. Hörhammer. *Quantenmechanische Brownsche Bewegung mit inneren Freiheitsgraden*. Diplomarbeit, Universität Bayreuth, 2004.
- [196] F. Diedrich, H. C. Bergquist, W. M. Itano, and D. J. Wineland. *Laser cooling to the zero-point energy of motion*. Phys. Rev. Lett. , **62**:403, 1989.
- [197] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, D. J. Wineland, and P. Gould. *Resolved-sideband Raman cooling of a bound atom to the 3D zero-point energy*. Phys. Rev. Lett , **75**:4011, 1995.
- [198] Ch. Roos, Th. Zeiger, H. Rhode, H. C. Naegerl, J. Eschner, D. Leibfried, F. Schmidt-Kaler, and R. Blatt. *Quantum state engineering on an optical transition and decoherence in a Paul trap*. Phys. Rev. Lett, **83**:4713, 1999.
- [199] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland. *Generation of nonclassical motional states of a trapped atom*. Phys. Rev. Lett., **76**:1769, 1996.
- [200] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, and D. J. Wineland. *A Schrödinger cat superposition state of an atom*. Science, **272**:1131, 1996.
- [201] U. Leonhardt and H. Paul. *Measuring the quantum state of light*. Prog. Quant. Electr., **19**:89, 1995.
- [202] H. Hansen, T. Aichele, C. Hettich, P. Lodahl, A. I. Lvovsky, J. Mlynek, and S. Schiller. *Ultrasensitive pulsed, balanced homodyne detector: application to time-domain quantum measurement*. Opt. Lett., **26**:1714, 2001.
- [203] G. Breitenbach, S. Schiller, and J. Mlynek. *Measurement of the quantum states of squeezed light*. Nature, **387**:471, 1997.
-

-
- [204] A. I. Lovovsky, H. Hansen, T. Aichele, O. Benson, J. Mlynek, and S. Schiller. *Quantum state reconstruction of the single-photon fock state*. Phys. Rev. Lett., **87**:050402, 2001.
- [205] A. Zavatta, S. Viciani, and M. Bellini. *Tomographic reconstruction of the single-photon Fock state by high-frequency homodyne detection*. Phys. Rev. A, **77**:053821, 2004.
- [206] A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouiri, and P. Grangier. *Quantum Homodyne Tomography of a two-photon fock state*. Phys. Rev. Lett., **96**:213601, 2006.
- [207] D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King, C. Monroe, W. M. Itano, and D. J. Wineland. *Experimental determination of the motional quantum state of a trapped atom*. Phys. Rev. Lett., **77**:4281, 1996.
- [208] B. Brezger, L. Hackermüller, S. Uttenthaler, J. Petschinka, M. Arndt, and A. Zeilinger. *Matter-wave interferometer for large molecules*. Phys. Rev. Lett., **88**:100404, 2002.
- [209] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. *Observation of interference between two bose condensates*. Science, **275**:637, 1997.
- [210] Y. Shin, M. Saba, T. A. Pasquini, and W. Ketterle. *Atom interferometry with Bose-Einstein condensates in a double-well potential*. Phys. Rev. Lett., **92**:050405, 2004.
- [211] M. J. Everitt, T. D. Clark, P. B. Stiffell, A. Vourdas, J. F. Ralph, R. J. Prance, and H. Prance. *Superconducting analogs of quantum optical phenomena: Macroscopic quantum superpositions and squeezing in a superconducting quantum-interference device ring*. Phys. Rev. A, **69**:224511, 2002.
- [212] M. Schlosshauer. *Experimental motivation and empirical consistency in minimal non-collapse quantum mechanics*. Ann. Phys., **321**:112, 2006.
- [213] M. M. Wolf, D. Perez-Garcia, and G. Giedke. *Quantum Capacities of Bosonic Channels*. Phys. Rev. Lett., **98**:130501, 2007.
- [214] X. Wang. *Quantum teleportation of entangled coherent states*. Phys. Rev. A, **64**:022302, 2001.
- [215] H. Jeong, M. S. Kim, and J. Lee. *Quantum-information processing for a coherent superposition state via a mixed entangled coherent channel*. Phys. Rev. A, **64**:022302, 2001.
- [216] M. B. Plenio and S. F. Huelga. *Entangled light from white noise*. Phys. Rev. Lett., **88**:197901, 2002.
- [217] B. J. Dalton, S. M. Barnett, and B. M. Garraway. *Theory of pseudomodes in quantum optical processes*. Phys. Rev. A, **66**:053813, 2001.
-

Danksagung

Zum Schluss dieser Arbeit und am Ende eines prägenden Lebensabschnitts ist es an der Zeit, jenen Menschen zu danken, die mich auf diesem Weg begleitet und zum Gelingen dieser Dissertation beigetragen haben. Danken möchte ich an dieser Stelle vor allem:

- Meinem Doktorvater Prof. Dr. Helmut Büttner für die Betreuung, die vielfältige Unterstützung und das große Interesse an dieser Arbeit. Die vielen gemeinsamen Diskussionen gaben dabei immer wieder die passenden gedanklichen Anstöße und wiesen die richtige Richtung.
- Prof. Dr. Stephan Kümmel für die spontane Bereitschaft zur Übernahme des Zweitgutachtens.
- Dem Evangelischen Studienwerk Villigst und insbesondere Herrn Dr. Eberhard Müller für die Aufnahme in die Promotionsförderung, die verbunden war mit interessanten und bereichernden Treffen von Promovierenden der verschiedensten Fachrichtungen.
- Allen Mitarbeitern am Lehrstuhl Theoretische Physik I für die gute Arbeitsatmosphäre, Juniorprof. Dr. Cord Müller, Dr. Michael Kaster, Christopher Gaul, Patric Müller, Mark Thiele sowie auch allen anderen Teilnehmern am täglichen Mensagang und der obligatorischen Teestunde, für die abwechslungsreichen Gespräche.
- Sigrid Glas für ihr Organisationstalent und die Nahtstelle zur Verwaltung.
- Meinen ehemaligen Kommilitonen und Doktoranden-Kollegen Jochen Endrejat und Christian Brunhuber für die gemeinsame Zeit an der Universität Bayreuth.

Ein besonderer Dank gilt meiner Freundin Anna, durch die die vergangenen eineinhalb Jahre in Bayreuth noch schöner wurden.

Die vier Jahre als Diplomand und Doktorand am Lehrstuhl Theoretische Physik I in Bayreuth werden mir immer in bester Erinnerung bleiben. Vielen Dank!

