DAS OPTIMIERUNGSLABOR – EIN ERFAHRUNGSBERICHT

MIRIAM KIESSLING, TOBIAS KREISEL, SASCHA KURZ, JÖRG RAMBAU, KONRAD SCHADE
UND CORNELIUS SCHWARZ

1. EINLEITUNG

Seit mehreren Jahren besuchen uns Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 10–13 an der Universität Bayreuth zu Anlässen wie dem Tag der Mathematik[1], dem Girls' Day, der MINT-Herbstuniversität oder einfach auf Initiative ihrer Klassenleitungen. Sie möchten einen Einblick in die Welt der Mathematik über die Schulmathematik hinaus bekommen. Doch wie lässt sich die Brücke vom Schulstoff zu den Inhalten der Universitätsmathematik schlagen? Und: findet man einen Themenschwerpunkt, bei dem ein aktives Mitmachen trotz fehlender Vorkenntnisse und in Anbetracht begrenzter Zeit möglich wird?

In der diskreten Optimierung lassen sich Problem-Modellierung und Problem-Lösung sehr gut trennen. Selbst forschungsnahe Modelle der ganzzahligen linearen Optimierung (ILP-Modelle) basieren auf sehr elementaren Überlegungen, wie die Entscheidungsmöglichkeiten, Ziele und Restriktionen eines Alltagsproblems in Variablen, Bewertungsfunktionen, Gleichungen und Ungleichungen ausgedrückt werden können. Wie dann optimale Lösungen gefunden werden, erfordert zwar tiefergehende Mathematik, es gibt aber Software dafür, in der das Wissen aus Teilen des Mathematik-Studiums und der mathematischen Forschung kondensiert vorliegt.

Unser Vermittlungsziel: Schülerinnen und Schüler wissen nach dem Besuch, dass man verschiedenste Probleme angreifen kann, indem man sie in die Sprache der Mathematik übersetzt, denn in Software gegossenes mathematisches Know-How kann dann diese Probleme lösen, ohne etwas über die Probleme selbst zu wissen. Unsere Idee für eine Maßnahme: Ein Optimierungslabor. Die Schülerinnen und Schüler isolieren in Teamarbeit die wesentlichen logischen Merkmale von Sudokulösen, Rucksackpacken, Routenplanung u. v. a. m. Dann übersetzen sie die Problemstellungen in die Sprache der Mathematik (hier: ILP-Modelle) und lassen sie (unterstützt durch unser Team) von Computerprogrammen lösen (ILP-Löser), die nichts anderes als diese Sprache verstehen. Schließlich übersetzen sie die mathematischen Lösungen wieder in die Sprache der Problemstellung. Erfahrungen mit der Modellierung auf Basis linearer Gleichungssysteme können dabei aus dem Schulunterricht eingebracht werden.

In diesem Bericht wollen wir unsere Erfahrungen mit konkreten Details der Umsetzung schildern.

2. HISTORIE DES PROJEKTS

Die Idee, Modellierungswerkzeuge und Standardsoftware zu benutzen, um ohne viel Vorlauf Studierenden in frühen Semestern den Zugang zur Leistungsfähigkeit einer mathematischen Methode zu ebnen, ist nicht von uns. In Arbeitsgruppen der diskreten Optimierung werden mittlerweile an vielen Universitäten Modellierungsaufgaben regelmäßig in Vorlesungen verwendet.

Eine der Pionierveranstaltungen in diesem Bereich für Schulklassen, die Modellierungswoche der TU Kaiserslautern und der TU Darmstadt in Lambrecht, läuft seit 1993.[2] Die daten- und softwareorientierte Darstellung von Themen aus der Kombinatorischen Optimierung anhand von Praxisprojekten für Studierende ist eine langjährige Idee von Martin Grötschel gewesen, formuliert zuerst als ein Buchprojekt „Combinatorial Optimization at Work", Projekt G1 aus der Gründungsphase des Matheon Berlin 2004, später als ein Blockkursprojekt mit Online-Dokumentation.

[1] http://www.tdm.uni-bayreuth.de

[2] Siehe den Überblick unter http://www.kfunigraz.ac.at/imawww/modellwoche/konzept4.html.

Unser Start war ein Blockkurs für Studierende ab dem 2. Semester Anfang 2005 an der Universität Bayreuth.[3] Teile des Übungsmaterials fanden auch Verwendung im ersten Blockkurs „Combinatorial Optimization at Work“ in Berlin, 2005.[4]

Schnell wurde deutlich, dass die Vorgehensweise nach weiteren Vereinfachungsschritten auch für Schülerinnen und Schüler sowie für die allgemeine Öffentlichkeit interessant sein könnte. Die zunächst angebotenen Labore an den Bayreuther Tagen der Mathematik 2007 und 2008 waren noch recht nah an die universitäre Arbeitsweise angelehnt. Es war zu merken, dass ein Ausschnitt aus einem Blockkurs allein noch kein ausreichendes Konzept für eine zweistündige Veranstaltung sein kann. Im Jahr der Mathematik 2008 wurde dann die Strategie im Rahmen einer Kooperation mit der Stadtbibliothek Bayreuth überarbeitet. Kernpunkte dieser Überarbeitung waren die Bereitstellung von möglichst greifbaren Materialien zur besseren Aktivierung von kooperativem Nachdenken, Dokumentieren, Verwerfen, Revidieren, Sichern. Im Nachgang dazu hat sich ein Portfolio [5] von beispielhaften Optimierungsprojekten stabilisiert, in denen die Übersetzung des (idealisierten) Anwendungsproblems in die Sprache der Mathematik im Mittelpunkt steht.

Mittlerweile wird das Optimierungslabor, wann immer die Zeit es zulässt, eingeleitet von einem separat für die URANIA[6]-Vortragsreihe des MATHEON[7] Berlin entstandenen Vortrag über die Optimierung der „Gelben Engel“ des ADAC.[8] Hier werden die Grundprinzipien mathematischen Modellierens am Beispiel des Handlungsreisendenproblems detailliert vorgeführt und in die Rahmenhandlung des ADAC-Praxisprojekts eingebettet. Ziel ist die Einstimmung und der erste Kontakt mit dem Thema „Mathematik als Sprache“. Das Publikum wird dabei zum aktiven Mitdenken angeregt; viele legen beim Vortrag ihre anfängliche Zurückhaltung nach und nach ab.

3. DER EINFÜHRUNGSVORTRAG: GELBE ENGEL, EIN HANDLUNGSREISENDER UND DIE SPRACHE DER MATHEMATIK

Zu Beginn der Veranstaltung wird die Gruppe auf das Thema Modellierung eingestimmt. Alle Projekte, die die Gruppe später aktiv bearbeiten wird, sind akademische Modellierungsbeispiele. Ziel ist ein Begreifen von Prinzipien. Echte, praxistaugliche Modelle sind komplizierter, beziehen sich aber in Teilen immer wieder auf diese Prinzipien. Der Prozess, in dem man aus einem hoch-komplexen Anwendungsproblem der realen Welt wichtige Modellierungsprinzipien extrahiert, wird im Vortrag nachverfolgt. Motto des Vortrags ist ein Zitat von Galilei aus seiner „Goldwaage“.[9] Sinngemäß behauptet Galilei, dass das Universum nur verstanden werden kann, wenn man die Sprache der Mathematik beherrscht. Wir behaupten etwas weniger: Manche Probleme der Praxis kann man nur dann fundiert lösen, wenn man sie vorher in die Sprache der Mathematik übersetzt – der Kern der mathematischen Modellierung.

Aufhänger ist das Einsatzplanungsproblem der „Gelben Engel“ des ADAC: Wie wird entschieden, welches Hilfefahrzeug in welcher Reihenfolge welchen Havaristen hilft, so dass einerseits jedem geholfen wird und andererseits Kosten und Wartezeiten möglichst gering sind? Ein Beispiel für ein *Optimierungsproblem*. In einer ersten Argumentationslinie werden die *Online-* und die *Echtzeitproblematik* herausgestellt: Man weiß nicht, wer in der Zukunft noch havarieren wird, und die Entscheidung über die Einsatzplanung muss noch während des Telefonats mit dem Havaristen getroffen werden, damit eine geschätzte Ankunftszeit mitgeteilt werden kann. Als grundsätzliches Vorgehen wird die *Reoptimierung* erläutert: plane zu jedem Zeitpunkt optimal für den Fall, dass keine neue Havaristen mehr anrufen. Ruft doch einer

[3] http://www.rambau.wm.uni-bayreuth.de/Teaching/Uni_Bayreuth/WS_2004/Diskrete_Optimierung_Anwendungen/

[4] http://co-at-work.zib.de/berlin/

[5] http://www.wm.uni-bayreuth.de/index.php?id=optlabor

[6] http://www.urania.de/die-urania/

[7] http://www.matheon.de/

[8] http://www.wm.uni-bayreuth.de/fileadmin/Sonstiges/Folien/Schueler_ADAC_2004-11-16.pdf

[9] *Saggiatore*, zu finden unter http://www.liberliber.it/biblioteca/g/galilei/

an, dann wiederhole die Planung. Dies reduziert das Problem auf ein *Offline-Optimierungsproblem* auf Daten eines *Schnappschusses* des Systems. An dieser Stelle braucht man ein Computerprogramm, das für jeden Schnappschuss des Systems eine optimale Einsatzplanung echtzeittauglich (d. h. in etwa 10 s) berechnet.

An dieser Stelle wird der Anwendungskontext verlassen, weil man in einem Modell für das ADAC-Problem den Wald vor lauter Bäumen nicht mehr sähe (Genaueres findet sich in [8] und [7]). Stattdessen wird das Problem durch gezieltes Weglassen einiger Aspekte auf ein *Handlungsreisendenproblem (TSP)* reduziert: Ein Handlungsreisender sucht eine kürzeste, geschlossene Tour durch eine Menge von Städten. Und die Modellierung eines TSPs enthält einige schöne grundsätzliche Aspekte, deren genaue, möglichst interaktiv gefundene Formalisierung den Kern des Vortrags ausmacht.

Die Struktur des Modellierungsprozesses orientiert sich an folgenden Schritten:

(1) Wie stellt man die *wesentlichen Aspekte des Problems* dar? Dies führt auf *gewichtete, ungerichtete Graphen* als zentrale mathematische Struktur.
(2) Wie *kodiert* man eine spezielle TSP-Tour? Dies führt zu *Adjazenzmatrizen*, die in einer Tabellenkalkulation gut visualisierbar sind.
(3) Wie repräsentiert man eine *unbekannte* TSP-Tour? Dies führt auf Adjazenzmatrizen, die *Variablen* als Einträge haben. *Entscheidungsmöglichkeiten* werden in der Sprache der Mathematik durch solche Variablen repräsentiert.
(4) Wie ermittelt man die *Kosten* einer TSP-Tour aus ihrer Adjazenzmatrix? Dies führt auf die Matrix aller paarweisen Entfernungen, die manchen aus Atlanten bekannt sein dürfte. Das *Ziel*, eine möglichst kurze Tour zu finden, wird repräsentiert durch eine *Zielfunktion* in den Variablen.
(5) Wie findet man heraus, ob eine gegebene Adjazenzmatrix wirklich alle *Bedingungen* für eine TSP-Tour erfüllt? Dies ist der logisch anspruchsvollste Schritt und ein Sieg der Mathematik: Man kann dies für eine allgemeine TSP-Tour ausdrücken, beschrieben durch mathematisch formulierte *Restriktionen* für die Variablenbelegung (*Gleichungen*, *Ungleichungen*, *Ganzzahligkeitsbedingungen* in den Variablen). In der Mathematik kann man mit etwas rechnen, das man noch gar nicht kennt!

Ergebnis dieser Schritte ist ein vollständiges Modell für das TSP aus der Klasse der *Ganzzahligen Linearen Optimierungsaufgaben (ILP)*. Für diese gibt es Software, in der (fast) das ganze mathematische Wissen über solche Aufgaben kondensiert vorliegt. Diese Software weiß weder etwas vom Handlungsreisenden noch vom ADAC. Sie kennt nur die Sprache der Mathematik. Und für das Modell findet sie Lösungen für alle nicht zu großen Problembeispiele. Wie groß „nicht zu groß“ sein kann, zeigen die aktuellen Weltrekorde mit beweisbar optimalen Touren durch über zwanzigtausend Städte.[10]

Im ADAC-Problem führte dieses Vorgehen in der Praxis zum Erfolg. Aber die „Rahmenhandlung“ zum ADAC-Problem wird auf einem narrativen Niveau zum Abschluss gebracht. Natürlich nicht ohne einen Hinweis darauf, dass man die Mathematik, die in der Optimierungs-Software steckt, an der Universität auch lernen kann (im Optimierungslabor jedoch leider nicht).

Dass die *Modellierung* mit ein wenig Hilfestellung gar nicht so schwer ist, erleben die Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten der nun folgenden Modellierungsprojekte. Unser Vorgehen beschreiben wir im Folgenden stellvertretend an einem Rätsel aus dem Schach.

4. Ein Modellierungsprojekt: nicht-schlagende Damenkonfigurationen im Schach

Kann man acht Damen so auf einem Schachbrett platzieren, dass keine eine andere schlagen kann, wenn sie sich, wie üblich, beliebig weit horizontal, vertikal und diagonal über das Brett bewegen dürfen?

Um dieses Schachrätsel als ILP modellieren zu können, fragen wir nach den wesentlichen Aspekten des Problems: Was kann man entscheiden? Natürlich die Positionen der 8 Damen. Der nächste Schritt ist die Übersetzung unserer Entscheidungen in die Sprache der Mathematik: Wie kann man diese *kodieren*?

[10] http://www.tsp.gatech.edu/

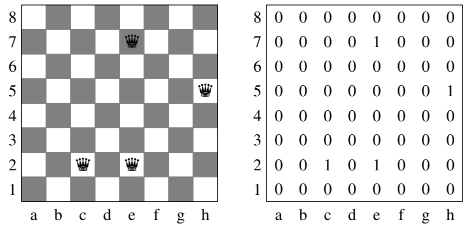

Abbildung 1. Gewohnte und übersetzte Darstellung.

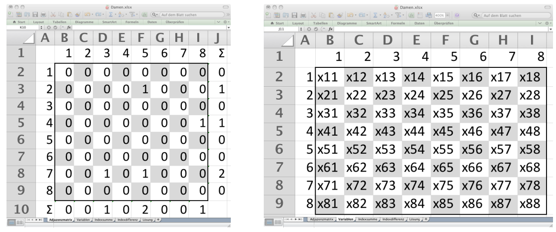

Abbildung 2. In einer Tabellenkalkulation.

Abbildung 1 zeigt links eine Stellung von vier Damen in gewohnter Manier. Rechts daneben haben wir auf schmückendes Beiwerk verzichtet: Felder mit einer Dame werden durch eine 1, Felder ohne durch eine 0 ausgedrückt. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass wir damit – z. B. in einer Tabellenkalkulation wie Excel – rechnen können.

Wo die Damen letztlich stehen müssen, wissen wir aber noch gar nicht, lediglich *dass* auf jedem Feld eine steht oder nicht. Das drücken wir durch Variablen aus, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen können und deren Name Auskunft über die Position des zugehörigen Feldes gibt, siehe Abbildung 2 rechts. Der dabei vorgenommene Wechsel von der gewohnten alphanumerischen Feldbezeichnung zu einer rein numerischen wird sich später als nützlich herausstellen.

Es könnte sein, dass es nicht möglich ist, acht Damen (nicht-schlagend) auf einem Schachbrett zu platzieren. Vorsichtshalber formulieren wir die Aufgabe deshalb um zu „Platziere möglichst viele Damen, die sich gegenseitig nicht schlagen können“. Deren Anzahl lässt sich dann bestimmen, indem man die $0/1$-Werte aller 64 Felder aufaddiert. Unser *Ziel* muss es damit sein, diese Summe möglichst groß zu machen. Das Schöne an Mathematik: Diese Idee funktioniert auch, wenn wir Variablen (also noch unbekannte Größen) verwenden. Unsere *Zielfunktion* lautet dann

$$\max \quad x_{1,1}+x_{1,2}+x_{1,3}+x_{1,4}+x_{1,5}+x_{1,6}+x_{1,7}+x_{1,8}+x_{2,1}+\cdots+x_{8,7}+x_{8,8}.$$

Nun müssen wir dafür sorgen, dass die „Regeln“ eingehalten werden, sich die platzierten Damen also nicht gegenseitig schlagen können. In Abbildung 1 ist das verletzt, leicht zu erkennen an den Zweiern in Abbildung 2 links, welche die Zeilen- und Spaltensummen angeben. Eine Stellung ist nur dann zulässig, wenn diese Summe 0 oder 1 ist. Ausgedrückt mit unseren *Entscheidungsvariablen* lautet diese *Nebenbedingung* für Zeile 7:

$$x_{7,1}+x_{7,2}+x_{7,3}+x_{7,4}+x_{7,5}+x_{7,6}+x_{7,7}+x_{7,8} \leq 1.$$

Damit bleiben die Diagonalen. Diese lassen sich ganz analog behandeln. Für die Hauptdiagonale von links oben nach rechts unten lautet unsere Bedingung

$$x_{\underbrace{1,1}_{1-1=0}}+x_{\underbrace{2,2}_{2-2=0}}+x_{\underbrace{3,3}_{3-3=0}}+x_{\underbrace{4,4}_{4-4=0}}+x_{\underbrace{5,5}_{5-5=0}}+x_{\underbrace{6,6}_{6-6=0}}+x_{\underbrace{7,7}_{7-7=0}}+x_{\underbrace{8,8}_{8-8=0}} \leq 1.$$

Die geschweiften Klammern verdeutlichen, dass man sich – dank der numerischen Feldbezeichner – eines Kniffs bedienen kann: Bei Aufwärtsdiagonalen ist jeweils die *Summe* der Indizes gleich, bei Abwärtsdiagonalen die *Differenz* der Indizes, siehe Abbildung 3. Damit lassen sich die Felder einer Diagonale kompakt beschreiben.

Insgesamt ergeben sich je acht Nebenbedingungen für Zeilen bzw. Spalten und $2 \cdot 15$ Nebenbedingungen für die Diagonalen. Mit etwas mathematischem Formalismus und durch Ausnutzen des eben gesehenen Musters kann man sich einige Schreibarbeit sparen und das ILP-Modell kompakt hinschreiben:

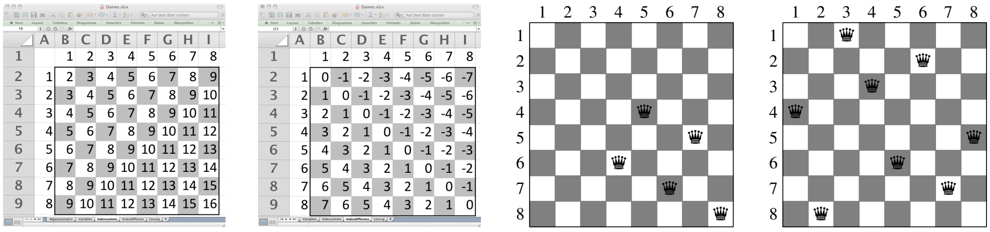

Abbildung 3. Summe bzw. Differenz der Feldindizes und zwei Beispielkonfigurationen.

$$\begin{aligned}
\max \textstyle\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} x_{i,j} \quad & \text{unter den Nebenbedingungen} \\
x_{i,j} \in \{0,1\} \quad & \forall i,j = 1,\dots,8, \\
\textstyle\sum_{j=1}^{8} x_{i,j} \leq 1 \quad & \forall i = 1,\dots,8, \\
\textstyle\sum_{i=1}^{8} x_{i,j} \leq 1 \quad & \forall j = 1,\dots,8, \\
\textstyle\sum_{i+j=k} x_{i,j} \leq 1 \quad & \forall k = 2,\dots,16, \\
\textstyle\sum_{i-j=k} x_{i,j} \leq 1 \quad & \forall k = -7,\dots,7.
\end{aligned}$$

Übergibt man dieses Modell an ein Computerprogramm zum Lösen von ILPs[11], könnte man die rechte Konfiguration aus Abbildung 3 erhalten (insgesamt gibt es 92 Lösungen). Die Konfiguration links daneben mit nur fünf Damen ist auch etwas Besonderes. Warum?[12]

Selten gibt es in der Mathematik nur einen Weg zum Ziel, und so lassen sich auch beim Damenproblem alternative Modelle finden, siehe dazu [4, S. 32 ff.].

5. Weitere Modellierungsprojekte

Den Schülerinnen und Schülern stellen wir viele weitere Aufgabenstellungen zur Wahl. Das Projekt der nicht-schlagenden Damen haben wir hier genauer beleuchtet, da es die Übersetzung von Entscheidungsmöglichkeiten, Zielen und Restriktionen eines direkt nachvollziehbaren Problems in Variablen, Bewertungsfunktionen, Gleichungen und Ungleichungen veranschaulicht.

Im Laufe der Zeit haben sich einige Modellierungsprojekte herauskristallisiert, deren Problemstellungen wir im Folgenden beschreiben wollen. Auswahlkriterien waren die potentielle *Nähe* zum Alltag der Schüler (abhängig von der Interessenslage), die Möglichkeit, ohne viel theoretische Vorkenntnisse aktiv mitmachen zu können, eine überschaubare Komplexität (bedingt durch zeitliche Einschränkungen und den anvisierten motivierenden Charakter) und teilweise größere konzeptionelle Überschneidungen zwischen den einzelnen Projektvorschlägen, um Erfolgserlebnisse durch *Transferleistungen* zu ermöglichen. Des Weiteren sollte das Problem nicht allzu einfach *mit der Hand* zu lösen sein. Die nachfolgend vorgestellte Auswahl ist keineswegs abschließend zu sehen. Sie soll dem Leser als Anregung dienen und die Breite möglicher Problemstellungen andeuten. Ein letzter Warn- bzw. Motivationshinweis: Die Grenze zwischen reinen Spielproblemen, ökonomisch relevanten Problemen und Forschungsproblemen ist fließend.

Bleiben wir zunächst beim Schach. Eine *Springertour* ist eine Route auf einem leeren Schachbrett, bei der jedes Feld genau ein Mal besucht wird. Bewegen darf sich ein Springer jeweils zwei Felder gerade aus und eines zur Seite, siehe Abbildung 4. Sind Start- und Endfeld einen Springerzug voneinander entfernt, so spricht man von einer *geschlossenen* Springertour. Beginnend mit dem Schweizer Mathematiker Leonard

[11] z. B. die ZIB Optimization Suite, siehe http://zibopt.zib.de/.

[12] Die Auflösung findet sich am Ende des Artikels.

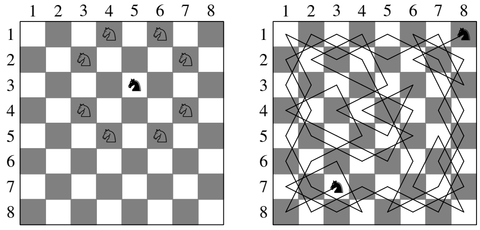

Abbildung 4. Links: Der Rösselsprung. Rechts: Eine offene Springertour.

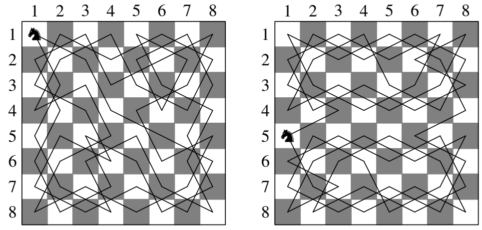

Abbildung 5. Zwei verschiedene geschlossene Springertouren.

Euler haben sich seit 1759 viele Mathematiker und Hobby-Tüftler mit dem Problem beschäftigt. So wurde die Frage nach der algorithmischen Konstruktion solcher Touren auf verallgemeinerten $n \times n$-Schachbrettern auch im Rahmen einer „Jugend forscht“-Arbeit geklärt, siehe [2] für Details.

Eine etwas *praktischere* Problemstellung ist *Routenplanung* – Navigationsgeräte für den Straßenverkehr finden sich heutzutage in fast jedem PKW. Nach Eingabe des Start- und Zielorts wird auf Knopfdruck eine kürzeste oder schnellste Route berechnet. Kennt man die Distanz bzw. den Zeitverbrauch zwischen allen möglichen benachbarten Zwischenzielen, lässt sich auch diese Aufgabe mit Hilfe ganzzahliger linearer Optimierung modellieren.[13]

1	9	7	5	6	4	8	3	2
3	8	2	9	7	1	5	6	4
6	5	4	8	3	2	1	7	9
9	6	5	4	1	8	7	2	3
8	7	3	6	2	9	4	1	5
2	4	1	7	5	3	9	8	6
7	3	9	2	8	5	6	4	1
4	2	6	1	9	7	3	5	8
5	1	8	3	4	6	2	9	7

Abbildung 6. Gelöstes Sudoku.

							1	
4								
	2							
				5		4		7
		8				3		
		1		9				
3			4			2		
	5		1					
			8		6			

	2			4	8		6	
4	6	8	3		1		7	
			7					
9	1	4	8					
2		6	1			3		9
8	3		6			5	9	
	7							
6		9	2	8		7	3	

Abbildung 7. Ausgangssituationen.

Mit *Sudoku* haben wir einen weiteren Leckerbissen für Rätselknacker im Programm. Das Zahlenpuzzle benötigte seit seiner Erfindung 1979[14] einige Jahre und den Umweg über Japan (daher der Name) bis es hierzulande große Beliebtheit erlangte. Dabei soll ein 9×9 Gitter so mit den Zahlen von 1 bis 9 ausgefüllt werden, dass in jeder Spalte, jeder Zeile und in jedem Block (3×3-Untergitter) jede Zahl genau ein Mal vorkommt, wobei stets einige Zahlen vorgegeben sind, siehe Abbildung 7. Die Suche nach einer *zulässigen* Sudokulösung kann wiederum als ILP modelliert werden.[15] Noch etwas interessanter wird es, wenn man zusätzlich fordert, dass es nur eine, und damit eindeutige, Lösung geben darf.[16] Die Frage nach der minimal nötigen Anzahl an Hinweisen, bei der ein Sudoku eine eindeutige Lösung hat, konnte erst vor Kurzem beantwortet werden: 17 ausgefüllte Felder werden mindestens benötigt.[17]

---

[13] Navigationsgeräte verwenden allerdings maßgeschneiderte Kürzeste-Wege-Algorithmen für dieses Problem, die deutlich schneller sind. Stichworte sind: Dijkstra oder A*-Algorithmus.

[14] Howard Garns erfand es seinerzeit unter dem Namen *NumberPlace*, siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Sudoku.

[15] Das Ergebnis (Abbildung 6) ist ein „alter Hut“, ein lateinisches Quadrat – auch damit befasste sich schon Leonard Euler. Als ILP wird es in [5] und [1] betrachtet.

[16] Als der Sudoku-Hype noch größer war, gab es einige wohl sehr eilig produzierte Rätselhefte mit nicht eindeutig lösbaren Sudokus – einer der Autoren hatte sich damals beim zuständigen Verlag beschwert und zumindest ein weiteres Gratisheft erhalten. Eines der beiden unvollständig ausgefüllten Sudokus aus Abbildung 7 ist nicht eindeutig lösbar.

[17] Ein Forscherteam um Gary McGuire konnte durch vollständige Enumeration zeigen, dass kein eindeutig lösbares Sudoku mit nur 16 Hinweisen existiert, siehe http://www.arxiv.org/abs/1201.0749 bzw. http://www.math.ie/checker.html.

Ein weiteres, recht anschauliches Problem, welches in vielen Modellierungen als Teilaspekt vorkommt, ist das sogenannte *Rucksackproblem*. Hierbei hat man eine Menge von Gegenständen, beispielsweise ein Handy, einen MP3-Player, Schokolade, ein Tagebuch, u. v. a. m. zur Auswahl, die alle ein gewisses Gewicht und einen persönlich festgelegten Nutzen haben. Unter einer Gewichtsrestriktion möchte man nun den Rucksack so bestücken, dass die summierten Nutzenwerte maximal sind.

Zum Abschluss[18] möchten wir ein geometrisches Fliesenproblem erwähnen. Ein 13×13-Zimmer soll mit kleineren $a \times a$-Fliesen ($a = 1, 2, 3, \ldots, 12$) vollständig (und überlappungsfrei) gefliest werden. Eine Möglichkeit mit 11 Fliesen ist in Abbildung 8 dargestellt. Diese Lösung finden und zeigen, dass es keine mit weniger Fliesen gibt, kann man mit Hilfe einer ILP-Modellierung.

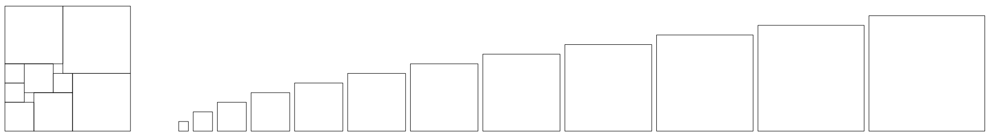

Abbildung 8. Fliesplan für ein quadratisches 13×13 Zimmer und zur Auswahl stehende Fliesen.

6. Unser Weg zum Material

Unser Optimierungslabor war ursprünglich gedacht als ein Miniworkshop zur computergestützten Lösung von (vereinfachten) Alltagsproblemen. Blaupause war eine Blockvorlesung für Studierende im Umfang einer vierstündigen Vorlesung mit einer zweistündigen Übung: eine Tour-de-force, aber bei den Studierenden erfolgreich.

Nun waren die Voraussetzungen in einer eintägigen Veranstaltung über einige Stunden anders. Trotzdem stand anfangs die Computernutzung im Zentrum. Gedanken gemacht hat sich die teilnehmende Gruppe dann vor dem Bildschirm in Zweier- oder maximal Dreierteams. Wir haben dann festgestellt, dass dies für die eigentlich intellektuell anspruchsvolle Aufgabe, die Logik eines Problems zu erfassen und mathematisch zu formalisieren, keine attraktive Arbeitsumgebung ist. Ferner stellte das Selbereintippen des Modells für die Optimierungssoftware zwar eine Aktivierung der Gruppe dar, verlagerte aber den Schwerpunkt zu sehr auf das rein Handwerkliche der Computernutzung. Die unterschiedliche Affinität zum Umgang mit dem Computer selbst stellte ein weiteres Problem dar: Informatikbegeisterte fanden sich schnell zurecht, andere waren dadurch eher überfordert, was der Motivation insgesamt abträglich war.

In einem Zwischenschritt haben wir Arbeitsblätter entworfen, die durch gezielte Aufgaben zum Selberlösen die Gruppe auch ohne lückenlose Betreuung zum Modell hinführen sollte. Alles in allem blieb aber der Betreuungsaufwand immens, und der Computer lud alle die zum Abschweifen ein, bei denen gerade kein Betreuungsgespräch lief.

Wir entschlossen uns dann zu einer klareren Schwerpunktsetzung und einer deutlicheren Abgrenzung zur mehrtägigen Blockveranstaltung für Studierende: Die Übersetzung eines Problems in die Sprache der Mathematik sollte durch Material und Sitzordnung in den Mittelpunkt rücken. Da die Lösung durch die Software am Ende nicht verzichtbar ist, haben wir diesen „krönenden“ Abschluss ins Plenum verlegt: Ein erfahrenes Teammitglied bedient am Schluss den Computer, dessen Bildschirmausgabe auf dem Beamerbild live verfolgt werden kann. Das Erarbeiten der Modelle wird nun mit dreidimensionalem Material unterstützt: Für jedes Team wird ein großer Tisch mit einer Magnettafel bedeckt. Auf dieser Tafel werden reale Objekte der Projekte (z. B. ein Schachbrett mit acht Damen, eine Waage etc.), beschreibbare Magnete, Whiteboardmarker, Papier etc. bereitgestellt. Von allen Seiten kann am Objekt probiert werden, Magnete beschriftet, platziert und verschoben werden, auf die Tafel geschrieben und gewischt werden.

[18] Weitere Problemstellungen wie *Globetrotter* oder *Blind-Dance* befinden sich unter `http://www.wm.uni-bayreuth.de/index.php?id=optlabor` bzw. [3].

Abbildung 9. Links: Während der Probierphase. Daneben: Teamdiskussion als Foto und darunter als TSP-Tour mit 447 256 zu besuchenden „Städten“; Software mit freundlicher Genehmigung des Zuse Institut in Berlin.

Für eine Sechsergruppe und eine Betreuungsperson ist problemlos simultane Aktivität und Diskussion möglich.

Mit den beschreibbaren Magneten können Lösungsvarianten (z. B. eine Damenkonfiguration auf dem Schachbrett) kodiert werden (siehe Abbildung 10), indem man die Einsermagnete auf die Felder mit den Damen legt und die Nullermagnete auf die restlichen Felder. Variablen können zunächst den Entscheidungen räumlich zugeordnet werden (z. B. durch Auflegen von x_{23} auf das Schachfeld C7). Danach können die identischen Magnete zur Synthese einer Formel auf die Tafel verfrachtet werden. Ergebnissicherung kann dann klassisch durch Abschreiben erfolgreicher Lösungsansätze von Tafel auf Papier erfolgen. Die räumliche Nähe aller beteiligten Personen und Objekte sowie die große Aktionsfläche hatten einen enorm positiven Einfluss auf die Mitwirkung.

Ein „Mitgebsel“ zum Thema (z. B. ein Portrait der Teilnehmer, in Punkte aufgelöst und durch eine TSP-Tour verbunden, siehe Abbildung 11) hat eine Verstärkung des Erinnerungseffekts zum Ziel.

7. Gesammelte Erfahrungen

Die eben beschriebene Form des Optimierungslabors haben wir zu zahlreichen Gelegenheiten angeboten und dabei einige Erfahrungen gesammelt, über die wir hier berichten wollen.

Um aktiv an der Gruppenarbeit teilnehmen zu können, sollten die Teilnehmenden mit Grundlagen aus der linearen Algebra, insbesondere der Lösung linearer Gleichungssysteme bzw. dem Prinzip der Darstellung von Zusammenhängen mittels der Verwendung von Variablen vertraut sein. Als Zielgruppe für unser Angebot sehen wir daher die neunte Klassenstufe, u. U. die achte.

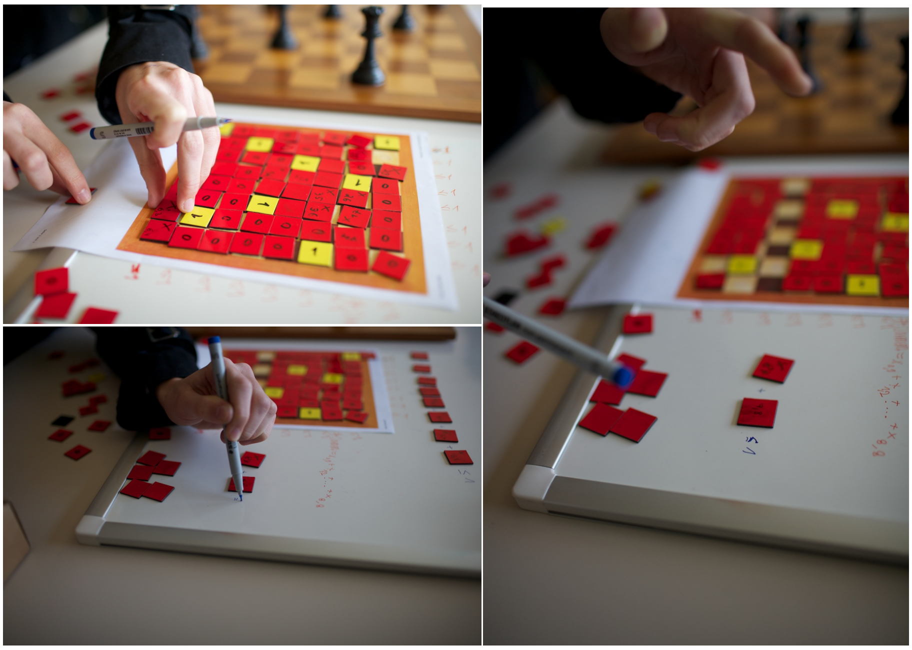

Abbildung 10. Von 0/1-Belegungen über Variablen hin zu Ungleichungen.

Gerade der Umschwung auf die Gruppenarbeit mit einer Betreuungsperson für sechs bis acht Personen erwies sich als große Verbesserung. So haben auch mathematisch weniger versierte Schüler(innen) die Möglichkeit, sogar nach einer kurzen Durststrecke, zu einem späteren Zeitpunkt wieder aktiv in die Zusammenarbeit einzusteigen. Als Beispiel seien hier Sudoku und die Nebenbedingungen „eine Vier pro Spalte“ und „eine Vier pro Zeile“ genannt. Diese sind insofern analog, als dass bei ersterer der Zeilenindex und bei letzterer der Spaltenindex variabel ist. Sobald eine dieser „ähnlichen“ Nebenbedingungen entdeckt wurde, fand sich fast immer ein anderes Gruppenmitglied, das die zweite Bedingung formulieren konnte.

Im Allgemeinen fiel es den Schüler(inne)n leichter, Ideen zu äußern bzw. Zielfunktion oder Nebenbedingungen mündlich zu formulieren, als schriftlich auf der Tafel niederzuschreiben. Der spielerische Einstieg durch Probieren (z. B. Lösen von Sudokus, Aufstellen der acht Damen auf ein großes Schachbrett usw.) fand stets sehr großen Anklang.[19] Das erklärte Ziel die Modellprojekte so auszuwählen, dass sie zum Ausprobieren einladen, aber nicht im Handumdrehen gelöst werden können, scheinen wir gut erreicht zu haben: So bekommt zum Beispiel die Sudoku-Gruppe seit einiger Zeit zwei Sudokus, darunter ein unlösbares. Taucht hier beim Selberlösen ein Fehler auf, ist es schwer nachzuvollziehen, ob festgesetzte oder eingetragene Zahlen verantwortlich sind – für den Computer eine Sache von Sekundenbruchteilen.[20] Die abschließende Demonstration der Übertragung des Modells auf den Computer und die Präsentation der Ergebnisse wird mit großem Interesse verfolgt. Insbesondere stellen wir selten Schwierigkeiten beim Rückübersetzen der Ergebnisse in den Anwendungskontext fest.

---

[19] Diesen Aspekt des „Vertrautwerdens“ mit dem Problem betonen wir, ist er doch unverzichtbarer Bestandteil des Lösens an sich.

[20] Für viele Optimierungsprobleme gibt es speziell entwickelte Lösungsalgorithmen, die schneller als ein geeigneter ILP-Ansatz sind. Dies herauszustellen könnte Gegenstand einer anderen Initiative sein, die größtmögliche Effizienz in den Mittelpunkt stellt. Die Algorithmen müssen dann allerdings auch etwas Spezielles über das Problem wissen und brauchen die Daten in speziellerer Form. Sie sind daher für andersartige Probleme nicht mehr zu gebrauchen. Wir wollen in *diesem* Projekt die Universalität mathematischer Sprache illustrieren und zielen daher auf die logisch korrekte Anwendung einer mathematisch möglichst universellen Methode.

Uns als Betreuenden bietet sich im Rahmen der gemeinsamen Erarbeitung der Modelle die Möglichkeit und auch Herausforderung, speziell auf die individuelle Stärke unserer Gruppe einzugehen. So machten wir die Erfahrung, dass der Motivationspegel und das Interesse besser gehalten werden kann, wenn wir auf Formalismen wie etwa Summenzeichen – das vielen Schüler(inne)n noch nicht vertraut ist – zunächst verzichten. Zeigt sich, dass die Gruppe sehr stark ist und das Optimierungsproblem vergleichsweise schnell gemeinsam formulieren konnte, kann man sie anschließend zu einer kompakteren, anspruchsvolleren Modellierung führen. Unterschiede in der mathematischen Stärke der Teilnehmenden, auch abhängig von

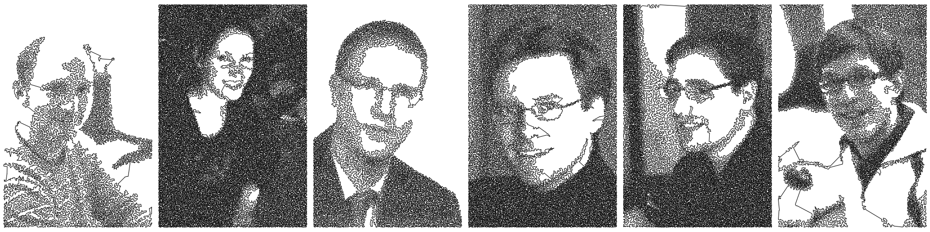

Abbildung 11. Eine TSP-Tour als Erinnerung exemplarisch am „Optimierungsteam ", Software mit freundlicher Genehmigung des Zuse Institut in Berlin.

der Rahmenveranstaltung, sind nicht von der Hand zu weisen. So wird mit dem Girls' Day oder auch der MINT-Herbstuniversität – beide Veranstaltungen dienen der Berufsorientierung – ein allgemeineres Publikum angesprochen, während der Tag der Mathematik sich speziell an mathematikbegeisterte Schüler(innen) wendet, die im gesamten Rahmen auch an Mathematikwettbewerben teilnehmen. Bezüglich der mathematischen Fähigkeiten sehen wir keine geschlechtsspezifischen Unterschiede bei den Teilnehmenden. Eine besondere Erfahrung für uns war das Optimierungslabor im Rahmen des Hochschultages für im Fach Mathematik besonders begabte bayerische Mittelstufenschüler(innen). Selbst die kompakte Formulierung der Modelle stellte für die Teilnehmenden keine größere Schwierigkeit dar. Die Eigeninitiative war außergewöhnlich hoch und es bestand spürbares Interesse an weiterführenden und mathematisch sehr anspruchsvollen Aspekten. So fragte diese Gruppe immer wieder danach, wie eine Lösungsmethode für ILPs denn nun funktioniert (ein guter Grund, Mathematik zu studieren!). Es wurde sogar (sinngemäß) ein Strukturresultat völlig ungefragt gefunden *und* dem Sinn nach korrekt nachgewiesen: wenn alle Städte *außen* liegen (konvexe Lage), dann muss eine kürzeste Tour außen herum führen, da man sonst durch Austausch von sich kreuzenden Diagonalen mit nicht kreuzenden Verbindungen die Tour verkürzen kann. Da waren wir „platt"!

8. Abschlussbemerkungen

Die Mathematik einmal ausschließlich als Sprache an der Schnittstelle zwischen Mensch und Maschine zu betrachten, kann sich lohnen. Existierende Mathematik-Software ermöglicht es, den Prozess der Modellierung eines Problems vom Prozess der Lösung zu trennen, um auch ohne Kenntnisse der mathematischen Lösungsverfahren zu einem Endergebnis zu kommen. Die Bedienung des Computers und der Software kann dabei getrost dem Betreuungsteam überlassen werden.

Unsere Erfahrungen zeigen nämlich, dass die eigenständige, handwerkliche Benutzung von Computern für eine Lerngruppe in einer Veranstaltung mit Zeitrestriktionen auch zum Hemmschuh werden kann. Es handelt sich wohl um ein weitverbreitetes Missverständnis, dass die Fähigkeit zur *Benutzung* eines Computers *die* High-Tech-Kompetenz schlechthin darstellt. Nach unserer Auffassung stellt auch das Auffinden eines sinnvollen, konsistenten Wegs vom Alltagsproblem zum Computer und von der Computerlösung zurück zum Ausgangsproblem eine kreative intellektuelle Herausforderung dar, deren Bewältigung besonders nachhaltige Aha-Effekte hervorrufen kann.

Diese Herausforderung lässt sich mit begreifbaren Materialien in unserem Arbeitsgebiet lebendiger, kommunikativer und befriedigender angehen als vor dem Bildschirm. Interessanterweise sind die dadurch geförderten und dafür benötigten Fähigkeiten gar nicht spezifisch für Informationstechnologie. Logisches Denken, Initiative, Kritik- und Urteilsfähigkeit, Lese- und Zuhörverständnis: das sind die eigentlichen Erfolgsfaktoren für die Gruppen in unserem Optimierungslabor.

Wir sind weder Lehrer(innen) noch Didaktiker(innen); unseren Konzepten und Beobachtungen fehlt sicher eine einschlägige wissenschaftliche und schulpraktische Fundierung. Deshalb wollen wir auch hier nicht besprechen, inwieweit unser Projekt im Schulunterricht selbst anwendbar ist. Zu ähnlichen Ideen gibt es Untersuchungen, z. B. in [6]. Unser Optimierungslabor ist letztlich ein zum Schulunterricht komplementäres Schnupperangebot, das seinen universitären und forschungsnahen Kontext auch nicht verleugnen will. Trotzdem freuen wir uns über Tipps und Anregungen der Expert(inn)en!

Wir hoffen, dass unsere Erfahrungen zum Optimierungslabor als Diskussionsbeitrag dienlich sind, und wir würden uns freuen, die Schulklassen von Leserinnen und Lesern vielleicht einmal bei uns begrüßen zu dürfen.

Übrigens: Die Fünf-Damen-Konfiguration in Abbildung 3 ist eine nicht-schlagende Damen-Konfiguration mit minimaler Anzahl von Damen, so dass keine Dame mehr nicht-schlagend hinzugefügt werden kann.

LITERATUR

[1] Andrew C. Bartlett, Timothy Chartier, Amy N. Langville und Timothy D. Rankin, *An Integer Programming Model for the Sudoku Problem*, Journal of Online Mathematics and its Applications **8** (2008).

[2] Axel Conrad, Tanja Hindrichs, Hussein Morsy und Ingo Wegener, *Solution of the knight's Hamiltonian path problem on chessboards*, Discrete Appl. Math. **50** (1994), Nr. 2, 125–134.

[3] Stephan (ed.) Hußmann und Brigitte (ed.) Lutz-Westphal, *Kombinatorische Optimierung erleben in Studium und Unterricht*, Mathematik Erleben. Wiesbaden: Vieweg. xvi, 2007.

[4] Thorsten Koch, *Rapid Mathematical Programming*, Dissertation, Technische Universität Berlin, 2004, `http://opus.kobv.de/zib/volltexte/2005/834/`, ZIB-Report 04-58.

[5] ———, *Rapid Mathematical Programming or How to Solve Sudoku Puzzles in a few Seconds*, Operations Research Proceedings 2005 (Hans Dietrich Haasis, Herbert Kopfer und Jörn Schönberger, Hrsg.), 2006, ZIB-Report 05-51, S. 21–26, ISBN 3-540-32537-9, `http://opus.kobv.de/zib/volltexte/2005/884/`.

[6] Brigitte Lutz-Westphal, *Kombinatorische Optimierung – Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht*, Dissertation, TU Berlin, 2006.

[7] Jörg Rambau, *Die gelben Engel von Noetham*, Besser als Mathe: Moderne angewandte Mathematik aus dem MATHEON zum Mitmachen (Katja Biermann, Martin Grötschel und Brigitte Lutz-Westphal, Hrsg.), Vieweg+Teubner, 2010, S. 59–74.

[8] Jörg Rambau und Cornelius Schwarz, *Optimierte dynamische Einsatzplanung für Gelbe Engel und Lastenaufzüge*, Die Kunst des Modellierens (Bernd Luderer, Hrsg.), Teubner Studienbücher Wirtschaftsmathematik, Vieweg+Teubner, 2008, S. 377–398.