

Fachhochschule Köln
Institut für Medien- und Phototechnik

Prof. Dr. D. Kunz

Rauschreduktion in digitalen Niedrigdosis-Röntgenbildern

Diplomarbeit

Björn Eiben

24. Juli 2006

University of Applied Sciences Cologne
Institute of Media and Phototechnology

Prof. Dr. D. Kunz

Noise Reduction in Digital Low Dose X-Ray Images

Diploma Thesis

Björn Eiben

July 24, 2006

Inhalt

Rauschreduktion in Niedrigdosis-Röntgenbildern, wie sie beispielsweise in der intraoperativen Fluoroskopie erzeugt werden, stellt für die Bildverarbeitung der akquirierten Aufnahmen einen entscheidenden Schlüsselfaktor dar.

Für eine visuelle Qualitätsverbesserung wird in dieser Arbeit eine auf einem multiskalaren Ansatz beruhende Rauschreduktion vorgestellt, welche auf der zur nichtlinearen, anisotropen Diffusion verwandten bilateralen Filterung basiert. Hierbei werden insbesondere die bestehenden Verfahren auf die Eigenschaften des im Röntgenbild vorhandenen Rauschens angepasst. Die Leistungsfähigkeit der entwickelten Filterung wird an klinischen Fluoroskopiesequenzen demonstriert.

Schlüsselwörter

Rauschreduktion, nichtlineare Diffusion, bilaterale Filter, Laplace-Pyramide, Fluoroskopie.

Hamburg, 24. Juli 2006

Abstract

Noise reduction is a major key factor of postprocessing low dose x-ray images, as they are generated by intra-surgery fluoroscopy for instance.

For visual quality improvement this thesis presents a noise reduction method based on a multiscale approach using bilateral filtering, which is closely related to anisotropic, nonlinear diffusion filtering. Particularly these existing methods are adjusted with regard to the characteristic properties of the noise in each x-ray image. The application of the proposed method to clinical fluoroscopy image sequences demonstrates the performance of the proposed filtering method.

Keywords

Noise Reduction, Nonlinear Diffusion, Bilateral Filtering, Laplacian-Pyramid, Fluoroscopy

Hamburg, July 24, 2006

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mich während meiner Diplomarbeit unterstützt haben – auf welche Weise auch immer.

Prof. Dr. Kunz danke ich insbesondere für seine fokussierenden und motivierenden Anregungen. Ohne seine Mithilfe wäre ein Kontakt zu *Philips Medizin Systeme* wahrscheinlich nicht entstanden.

Besonders erwähnen möchte ich auch *alle* Mitarbeiter der Arbeitsgruppe „*Rapid*“, stellvertretend Thomas Pralow und Marc Hensel, die bereitwillig auf alle Fragen meinerseits eingegangen sind und mich bei Problemen stets unterstützt haben.

Möglich geworden ist diese Arbeit aber nicht zuletzt durch die moralische und auch finanzielle Unterstützung meiner Familie.

Das Durchhaltevermögen verdanke ich Meike.

Danke!

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iii
Tabellenverzeichnis	iv
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Überblick Fluoroskopie	2
2 Material und Methoden	4
2.1 Software und verwendetes Bildmaterial	4
2.2 Rauschen	5
2.2.1 Rauschquellen	5
2.2.2 Quantenrauschen	6
2.3 Die Laplace-Pyramide	7
2.3.1 Zerlegung	7
2.3.2 Rekonstruktion	9
2.3.3 Eigenschaften	9
2.3.4 Rauschverteilung	11
3 Stand der Forschung	21
3.1 Nichtlineare Diffusion	22
3.1.1 Explizites Schema	23
3.1.2 Semi-implizites Schema	24
3.2 Bilaterales Filter	25
3.3 Diffusions- und Ähnlichkeitsfunktion	27
3.4 Auswahl eines Verfahrens zur Weiterentwicklung	31
4 Ergebnisse	36
4.1 Rauschschätzer	36
4.1.1 Einfluss der Logarithmierung von Bilddaten	36
4.1.2 Verifizierung der Schätzung	38
4.2 Multiskalare bilaterale Filterung	45
4.2.1 Berücksichtigung der Rauscheigenschaften	46

4.2.2	Bedingte Summen-Filter	49
4.2.3	Filterungsprozess	50
4.2.4	Parameterwahl	50
4.2.5	Bewertung der Ergebnisse	52
5	Zusammenfassung	58
5.1	Diskussion	59
5.2	Ausblick	59
A	Diskretisierung der Diffusionsgleichung 1-D	61
B	Zusatzbilder	63
B.1	Explizites Schema nichtlineare Diffusion	64
B.2	Semi-implizites Schema nichtlineare Diffusion	65
B.3	Bilaterale Filterung	66
B.4	Testaufnahmen	67
C	Inhalt der CD	68
D	Symbole	69
	Literaturverzeichnis	71
	Index	73
	Erklärungen	75

Abbildungsverzeichnis

2.1	Reduce- und Expand-Operator	8
2.2	Blockschaltbild Laplace-Pyramide	10
2.3	Transferfunktionen für Binomialfilterkerne	12
2.4	Autokorrelationsfunktion eines Bildes (<i>AKF</i>)	14
2.5	<i>AKF</i> für Gauß-Pyramidenebene G_1	16
2.6	<i>AKF</i> für Laplace-Ebenen	17
2.7	Ortsabhängigkeit der Filtermaske des expandierten Tiefpassbildes	18
3.1	Funktionsprinzip bilateraler Filter	26
3.2	Diffusions- und Flussfunktionen	28
3.3	Kantenaufsteilung durch Diffusion	30
3.4	Artefaktbildung	32
4.1	Lineare Approximation für Rauschen bei Logarithmierung	37
4.2	Röntgenaufnahmen für die Rauschanalyse	39
4.3	Rauschmessung durch Mittelung von Bildern	40
4.4	Verschiebung des Histogramms im Differenzbild	41
4.5	Rauschschätzung und -messung in ROIs	43
4.6	Rauschschätzung für strukturierte und unstrukturierte Bilder	44
4.7	Blockschaltbild multiskalare bilaterale Filterung	45
4.8	Zwischenbilder des Kontrollpfades für die multiskalare bilaterale Filterung	48
4.9	Ergebnis der multiskalaren bilateralen Filterung	51
4.10	Differenzbilder	52
4.11	Verbesserung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses	54
4.12	Ergebnisse der Rauschschätzung und Histogramme	56
4.13	Abgeschätzte Verbesserung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses	57
B.1	Bilderserie nichtlineare Diffusion – explizites Schema	64
B.2	Bilderserie nichtlineare Diffusion – semi-implizites Schema	65
B.3	Bildserie bilaterales Filter	66

Tabellenverzeichnis

2.1	Varianzreduktion bei linearer Filterung	13
2.2	Varianzberechnung und -messung	15
2.3	Varianzberechnung und -messung für Pyramidenebenen	19
3.1	Rechenzeiten	34
4.1	Histogrammverschiebung	42
4.2	Standardabweichungen aus Messungen und Schätzungen	44
B.1	Aufnahmedaten für Testaufnahmen	67

Kapitel 1

Einleitung

Diese Arbeit entstand in Kooperation mit „*Philips Medizin Systeme*“ in Hamburg.

1.1 Motivation

Niedrigdosis-Röntgenbilder werden in der medizinischen Anwendung beispielsweise bei der intraoperativen *Fluoroskopie* erzeugt. Dabei handelt es sich um ein bildgebendes Verfahren, welches mittels Röntgenstrahlung einen Einblick in Strukturen und Vorgänge im Körper des Patienten in Echtzeit gewährt. Typische Anwendungsfelder sind beispielsweise die Katheterisierung und Positionierung von Implantaten sowie die Beobachtung des zeitlichen Ablaufes der Ausbreitung von Kontrastmitteln bei der Angiographie.

Die Dauer einer solchen *Durchleuchtung* ist stark situationsabhängig und variiert von wenigen Sekunden bis zu mehreren Minuten. Damit die Belastung durch die ionisierende Röntgenstrahlung für Patienten und medizinisches Personal dennoch auf ein Minimum reduziert werden kann, ist die Strahlendosis möglichst gering zu halten.

Aufgrund dieser geringen Dosis, welche für die Bildgebung genutzt werden kann, stellt Rauschen in Niedrigdosis-Röntgenbildern den größten, qualitätsmindernden Faktor dar [2]. Physikalische Gegenmaßnahmen führen zu einer höheren Strahlenbelastung, weshalb zur Rauschreduktion auf die Bildverarbeitung zurückgegriffen wird.

Lineare Filter sind für diese Aufgabe allein dadurch schon ungeeignet, dass sie erhaltenswerte Bildstrukturen und zu minimierendes Rauschen auf gleiche Weise behandeln. Daher soll im Rahmen dieser Arbeit ein Verfahren zur Rauschunterdrückung

entwickelt werden, welches auf der nichtlinearen, anisotropen Diffusion beziehungsweise auf dem dazu verwandten bilateralen Filter beruht. Zusätzlich werden die charakteristischen Rauscheigenschaften in digitalen Röntgenbildern untersucht und bei der Filterung berücksichtigt. Als Hilfsmittel dienen hierfür unter anderem eine von *Philips* bereitgestellte Rauschschätzung und die Laplace-Pyramide als multiskalarer Ansatz.

1.2 Überblick Fluoroskopie

Im Folgenden wird ein grober Überblick über die Abläufe bei der Fluoroskopie gegeben, welche im weiteren Verlauf der Arbeit von Bedeutung sind oder aber eine bessere Einordnung dieses Themas erlauben. Umfassende Darstellungen der physikalischen und technischen Abläufe findet man zum Beispiel in [9, 8].

Prinzipiell wird Röntgenstrahlung dadurch erzeugt, dass durch eine Anodenspannung beschleunigte Elektronen auf ein Anodenmaterial auftreffen und mit diesem wechselwirken. Betrachtet man das Spektrum der resultierenden Röntgenstrahlung, dann erkennt man die Überlagerung von zwei unterschiedlichen Strahlungsarten.

Bei der ersten Strahlungsart handelt es sich um die kontinuierliche *Bremsstrahlung*, welche dadurch zustande kommt, dass ein Elektron im elektrischen Feld der Atome des Anodenmaterials abgebremst und von seiner ursprünglichen Bahn abgelenkt wird. Der Energieverlust des auftreffenden Elektrons wird in Form eines Röntgenquants abgegeben.

Die zweite Art der Strahlung ist die *charakteristische Strahlung*. Sie entsteht, wenn das auftreffende Elektron aus der Atomhülle eines Atoms der Anode ein gebundenes Elektron herausschlägt. Die Lücke in der jeweiligen Atomschale wird durch Valenzelektronen von höher liegenden Energieniveaus aufgefüllt. Bei diesem Sprung wird die freigesetzte Energie ebenfalls in Form eines Röntgenquants freigegeben. Aufgrund der für ein Material festen, charakteristischen Abstände der Energieniveaus weist die charakteristische Strahlung ein diskretes Spektrum auf. Damit ergibt sich das Spektrum der Röntgenstrahlung aus der Überlagerung der kontinuierlichen Bremsstrahlung und der materialspezifischen, diskreten charakteristischen Strahlung.

Für die Diagnostik ist nun die Schwächung der Röntgenstrahlung auf dem Weg von der Anode zum Detektor relevant. Dabei ist die Dicke eines durchleuchteten Materials und dessen Schwächungskoeffizient für die Modellierung der Röntgenstrahlung von entscheidender Bedeutung. Den allgemeinen Zusammenhang kann man mit Hilfe des

Lambert-Beerschen Gesetzes beschreiben [9]. Sei I'_0 die auf ein Material der Dicke d und dem Schwächungskoeffizienten μ auftreffende Strahlung, dann resultiert nach dem Durchlaufen des Materials die Strahlungsstärke I' :

$$I' = I'_0 \cdot e^{-\mu d} \quad (1.1)$$

Die Röntgenstrahlung wird im Fall der Fluoroskopie zunächst auf einen Röntgenbildverstärker gegeben. Dieser wandelt die Röntgenstrahlung mittels einer Cäsium-Iodid Schicht (häufig mit Natrium dotiert) in sichtbares Licht um. Für die Weiterverarbeitung ist das Signal aber noch zu schwach. Daher befindet sich hinter dieser Schicht eine Photokathode, aus welcher auf Grund des Photoeffekts durch das auftreffende Licht Elektronen herausgelöst werden. Diese freien Elektronen werden in der sich anschließenden Elektronenoptik fokussiert und auf einen Leuchtschirm hin beschleunigt. Dieser wandelt dann, wie man es von monochromen Bildröhren kennt, die Energie der auftreffenden Elektronen in sichtbares Licht um. Das auf dem Leuchtschirm entstandene Bild kann beispielsweise mit einer CCD-Kamera abgetastet werden.

Flachdetektoren werden vorwiegend in statischen Röntgensystemen eingesetzt. Diese kann man sich als einen großen CCD-Sensor mit Abmessungen von etwa 30×30 cm vorstellen. Für Röntgenstrahlen sind die Sensoren aber relativ unempfindlich, weshalb auch hier mittels einer direkt auf den Sensor aufgetragenen Cäsium-Iodid Schicht die Röntgenstrahlung vor der Detektion in sichtbare Strahlung umgewandelt wird.

Man kann sich überlegen, dass unter anderem durch eine endliche Dicke der Cäsium-Iodid Schichten ein auftreffendes Röntgenquant nicht einen idealen Leuchtpunkt erzeugt, sondern einen räumlich ausgedehnten „Fleck“. Damit kommt der Einsatz einer solchen Schicht einer Tiefpassfilterung gleich. Ein ähnlicher Effekt ist beim Auftreffen der Elektronen nach dem Durchlaufen der Elektronenoptik auf dem Leuchtschirm zu erwarten. Wie sich im Verlauf der Arbeit in Abschnitt 2.3.4 zeigen wird, sind reale Systeme nicht ideal, sondern weisen eben eine solche Tiefpasseigenschaft auf.

Kapitel 2

Material und Methoden

Grundlegende Materialien, welche für die Erstellung dieser Arbeit von Bedeutung waren, werden kurz in diesem Kapitel beschrieben. Dazu gehören unter anderem allgemeine Aspekte der erstellten Filterimplementierungen, sowie grundsätzliche Betrachtungen zum Rauschen in Röntgenbildern und zur Bildverarbeitung auf der Laplace-Pyramide.

2.1 Software und verwendetes Bildmaterial

Die Implementierung aller untersuchten und entwickelten Filterungen geschah in der *GIP-library*. Diese Bildverarbeitungsbibliothek wurde von der Arbeitsgruppe *Rapid* entwickelt und ist damit Eigentum von Philips Medizin Systeme Hamburg. Die verwendeten Programmiersprachen sind *C* und *Ruby*.

Das in dieser Arbeit abgebildete Bildmaterial wurde ebenfalls von Philips bereitgestellt. Dabei handelt es sich um reale, klinische Aufnahmen. Zusätzlich wurden für die Qualitätsbestimmung der eingesetzten Rauschschätzung Phantomaufnahmen an einem statischen *Digital-Diagnost* System erstellt. Im Rahmen dieser Arbeit wären Phantomaufnahmen und deren anschließende Auswertung an dynamischen Systemen zwar wesentlich aussagekräftiger gewesen, diese waren aber aus technischen Gründen nicht zu erstellen.

Damit die Daten aus statischen und dynamischen Systemen vergleichbar werden, ist die bei der Logarithmierung der Bilddaten angewendete Skalierung in sämtlichen Abbildungen auf einen gemeinsamen Faktor zurückgerechnet worden. Diese Skalierung ist für beide Arten von Systemen unterschiedlich.

2.2 Rauschen

Jedes physikalisch messbare Signal wird von zufälligen Störkomponenten begleitet – dem Rauschen. Das Rauschen kann das Nutzsignal sowohl additiv als auch multiplikativ verfälschen. Die Art der Beeinflussung hängt direkt zusammen mit der Art der Rauschquelle.

Im Rahmen dieser Arbeit wird generell von additivem, mittelwertfreiem Rauschen ausgegangen. Näheres hierzu findet man in [10]. Wenn I' ein Bildsignal ist, dann kann man sich dieses zusammengesetzt vorstellen aus dem determinierten Signal I'_0 und dem Rauschsignal ϵ'_f :

$$I' = I'_0 + \epsilon'_f \quad (2.1)$$

Bei der Behandlung dieses Themas sollte man sich im voraus verdeutlichen, dass es trotz ausführlicher Behandlungen keine allgemein gültige Definition für den Begriff des Rauschens gibt. Diese wird dem Anwendungsfall entsprechend angepasst. Man kann beispielsweise annehmen, dass jeder Inhalt, der in einem bestimmten Kontext irrelevant ist, als Rauschen zu bezeichnen ist [3]. Von der mathematischen Perspektive aus betrachtet wird man mit Hilfe der Stochastik versuchen, geeignete Definitionen und Rauschmodelle zu finden [10].

2.2.1 Rauschquellen

Das Rauschen in digitalen Niedrigdosis-Röntgenbildern setzt sich aus mehreren einzelnen Rauschquellen zusammen. Das sind im Wesentlichen

- Quantenrauschen, welches bereits dem aufzunehmenden Signal inhärent ist
- Elektronenrauschen im Röntgenbildverstärker,
- Rauschen der Auslese- und Verstärkungselektronik, sowie
- Quantisierungsrauschen.

Das Quantenrauschen stellt bei Niedrigdosis-Anwendungen den betragsmäßig größten Anteil am Gesamtrauschen dar. Hier stehen zur Bildgebung pro Sensorelement verhältnismäßig wenige Photonen zur Verfügung. Daher können die übrigen Rauschquellen in erster Näherung vernachlässigt werden [2]. Eine detailliertere Untersuchung der Rauschquellen findet man zum Beispiel in [2].

2.2.2 Quantenrauschen

Im Folgenden sollen die wesentlichen Eigenschaften des Quantenrauschens, der dominierenden Rauschquelle, näher betrachtet werden.

Das Quantenrauschen eines einzelnen Sensorelementes folgt der *Poisson-Verteilung* [10, 2]

$$P_\lambda(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad (2.2)$$

wobei P die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass bei einem Erwartungswert λ die diskrete Zufallsvariable X den Wert $n \in \mathbb{N}_0$ annimmt.

Bei der Poisson-Verteilung gilt für die Varianz σ^2 , dass diese gleich dem Erwartungswert λ ist, womit für die Standardabweichung folgt:

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \quad (2.3)$$

Da der Erwartungswert direkt dem durchschnittlichen Photonenstrom pro Zeit und Fläche und damit letztlich dem mittleren Grauwert entspricht, ist aus Gleichung (2.3) ersichtlich, dass die Standardabweichung und damit die Amplitude des Photonenrauschens signalabhängig ist.

Nicht jedes Photon kann im Sensor ein Elektron erzeugen und somit zur weiteren Bildgebung beitragen. Es kann ein Wirkungsgrad $0 \leq \eta \leq 1$ angenommen werden. Für diesen gilt [10]

$$\eta = \frac{Q_e}{Q_p}, \quad (2.4)$$

wobei Q_e die Anzahl der erzeugten Elektronen und Q_p die Anzahl der eingefangenen Photonen darstellt. Geht man im Weiteren von einer linear arbeitenden Verstärkungselektronik aus, so besteht ein proportionaler Zusammenhang zwischen der Anzahl der eingefangenen Photonen und der ausgegebenen Signalstärke, dem Grauwert. Daher folgt auch das Bildsignal der Poisson-Verteilung.

In der Regel treffen eine ausreichend hohe Zahl von Photonen auf dem Detektor auf. Für eine große Anzahl von zufälligen Prozessen $n \gg 1$ lässt sich die Poisson-Verteilung durch die Gauß-Verteilung mit entsprechendem Erwartungswert und Standardabweichung annähern. Den Zusammenhang liefert der zentrale Grenzwertsatz.

2.3 Die Laplace-Pyramide

Jedes Bild beinhaltet Informationen auf unterschiedlichen *Skalen*. Dabei bezieht sich dieser Begriff auf die räumliche Ausdehnung von Objekten in Bildern. Durch die Theorie der Skalenräume wird das Bild um eine zusätzliche, kontinuierliche Dimension erweitert. Im gaußschen Skalenraum beispielsweise gelangt man zu höheren Skalen, wenn das Bild mit einem gaußförmigen Filterkern mit wachsender Varianz gefaltet wird. Die Varianz stellt in diesem Fall den Skalenparameter dar. Kleinere Details verschwinden folglich mit steigendem Skalenparameter.

Wenn man das Gauß-Filter durch ein Binomialfilter ersetzt, steht eine kontinuierliche Variation der Filterstärke und damit der Skalengröße nicht mehr zur Verfügung. Auf diese Weise erhält man einen diskreten Skalenraum. Anstatt das Eingangsbild mit einem stetig wachsenden Filterkern neu zu filtern, kann man von einer Skalenstufe zur nächsten durch die erneute Filterung der zuvor berechneten Skalenstufe gelangen.

Die Laplace-Pyramide ist eine differentielle, *multiskalare Bildrepräsentation*, wovon jede Ebene die Differenz von einer bestimmten Skala des diskreten Skalenraums zur nächsten darstellt [10]. Es gibt auch hier keinen kontinuierlichen Skalenparameter, vielmehr stellen die Pyramidenebenen das diskrete Gegenstück zu diesem dar.

Zusätzlich werden die Pyramidenstufen von einer Ebene zur nächsten in ihrer Auflösung verkleinert. In der Regel wählt man hier eine Unterabtastung in jeder Bilddimension um den Faktor zwei. Diese Verringerung der Auflösung sorgt zusammen mit der Diskretisierung des Skalenparameters für eine begrenzte Datenmenge.

Die Reduzierung der Bildgröße ist legitim, da höhere Skalen mit räumlich größeren Strukturen für die Darstellung nur eine geringere Auflösung benötigen [6]. Wie später noch gezeigt wird, ist die Einhaltung des Abtasttheorems für die Unterabtastung aber nicht zwingend erforderlich.

Die Laplace-Pyramide wurde erstmals von Burt und Adelson im Jahre 1983 als eine dekorrelierte Bildbeschreibung vorgestellt, die sich aber aufgrund ihrer Struktur für viele Bildanalyseaufgaben etabliert hat [7].

2.3.1 Zerlegung

Die Bildinformationen können auf mehrere Bilder durch die eingangs beschriebene Methode aufgeteilt werden. Man spricht in diesem Fall von einer *Zerlegung*. Für eine

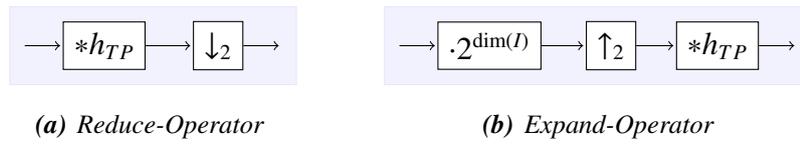


Abbildung 2.1: Für die Erstellung von Gauß- und Laplace-Pyramide definierte Operatoren.

kompaktere Beschreibung dieses Vorgangs seien hier zunächst die zwei grundlegenden Operatoren definiert (siehe Abbildung 2.1):

1. *Reduce-Operator*: Ist die Hintereinanderausführung einer Glättung und einer Unterabtastung (2.7a) um den Faktor zwei für jede Dimension des Bildes.

$$\text{reduce}(I[\vec{x}]) = \downarrow_2 (I * h_{TP}[\vec{x}]) \quad (2.5)$$

2. *Expand-Operator*: Ist die Hintereinanderausführung einer Multiplikation mit einem Skalierungsfaktor, einer Überabtastung (2.7b) um den Faktor zwei für jede Dimension des Bildes und einer anschließenden Glättung. Diese übernimmt hier die Funktion einer Interpolation. Der Skalierungsfaktor dient zur Kompensation der Reduktion des mittleren Grauwertes durch die anschließende Überabtastung (2.7b) um den Faktor zwei.

$$\text{expand}(I[\vec{x}]) = (2^{\dim(I)} \cdot \uparrow_2(I)) * h_{TP}[\vec{x}] \quad (2.6)$$

Die Unter- und Überabtastung sind dabei für den eindimensionalen Fall wie folgt definiert:

$$\downarrow_2(I)[n] = I[2n] \quad (2.7a)$$

$$\uparrow_2(I)[n] = \begin{cases} I\left[\frac{n}{2}\right] & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.7b)$$

Der mehrdimensionale Fall ergibt sich durch die Hintereinanderausführung in jede Dimensionsrichtung des Bildes.

Durch N -fache Anwendung des Reduce-Operators erhält man die Gauß-Pyramide mit $N + 1$ Ebenen:

$$G_0[\vec{x}] = I[\vec{x}] \quad (2.8a)$$

$$G_{n+1}[\vec{x}] = \text{reduce}(G_n[\vec{x}]) \quad (2.8b)$$

Dabei entspricht die unterste Pyramidenstufe $G_0[\vec{x}]$ dem Eingangsbild $I[\vec{x}]$ und $n \leq N \in \mathbb{N}_0$ gibt die Pyramidenstufe an.

Aus der Gauß-Pyramide lässt sich die Laplace-Pyramide erstellen. Dazu bildet man die Differenz aus einer Ebene der Gauß-Pyramide und dem Ergebnis des Expand-Operators, welcher auf die nächst höhere Ebene der Gauß-Pyramide angewendet worden ist. Die höchste Pyramidenstufe der Laplace-Pyramide entspricht der höchsten Pyramidenstufe der Gauß-Pyramide (siehe Abbildung 2.2).

$$L_N [\vec{x}] = G_N [\vec{x}] \quad (2.9a)$$

$$L_n [\vec{x}] = G_n [\vec{x}] - \text{expand} (G_{n+1} [\vec{x}]) \quad (2.9b)$$

Auch hier gibt N die höchste Pyramidenstufe an.

In der Theorie ist es möglich, die Zerlegung eines Bildes in die Laplace-Pyramide so weit zu führen, dass die oberste Pyramidenebene nur noch aus einem einzigen Pixel besteht. In der Bildverarbeitungspraxis wird man N aber so wählen, dass nur so viele Ebenen erstellt werden, wie auch später prozessiert werden sollen.

Für die Rauschreduktion ist $N = 2$ durchaus ausreichend wie in Abschnitt 2.3.4 dargestellt wird.

2.3.2 Rekonstruktion

Aus der Laplace-Pyramide lässt sich das Eingangsbild wieder rekonstruieren. Dazu benötigt man lediglich den Expand-Operator (2.6) aus Abschnitt 2.3.1.

Man beginnt auf der obersten Pyramidenebene L_N , wendet auf diese den Expand-Operator an und addiert das Ergebnis mit der darunter liegenden Laplace-Ebene. Auf diese Weise erhält man wieder die Gauß-Ebenen, wie man durch Umstellen von Gleichung (2.9b) sieht:

$$G_n [\vec{x}] = L_n [\vec{x}] + \text{expand} (G_{n+1} [\vec{x}]) \quad (2.10)$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Operation gelangt man schließlich zur Gauß-Ebene $n = 0$ und damit zum ursprünglichen Bild.

Ein Überblick über Zerlegung und Rekonstruktion der Laplace-Pyramide ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

2.3.3 Eigenschaften

Wie aus Gleichung (2.10) direkt ersichtlich ist, lässt sich das Originalbild verlustfrei aus der Laplace-Pyramide rekonstruieren.

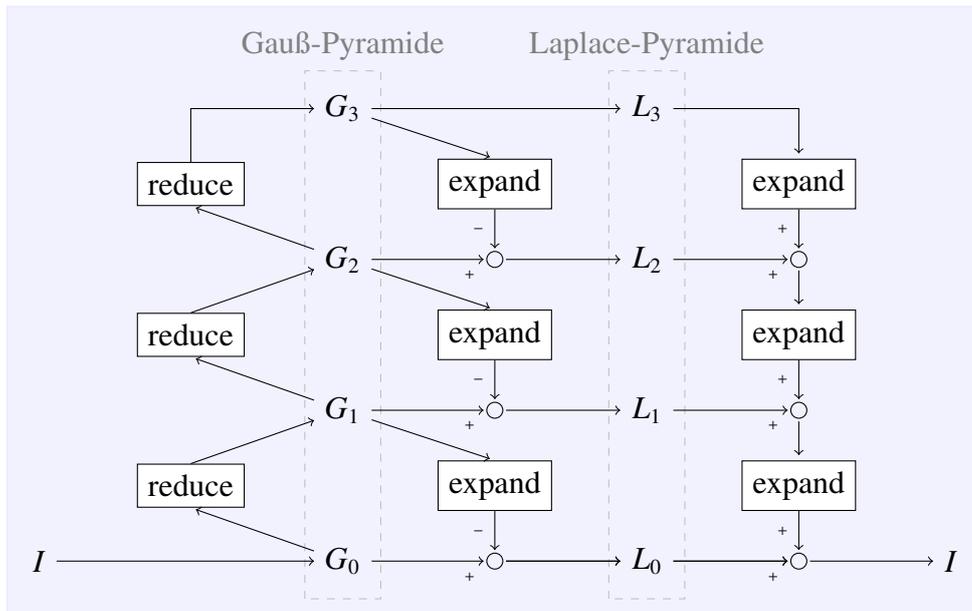


Abbildung 2.2: Blockschaltbild zur Darstellung des Gesamtablaufes bei Zerlegung und Rekonstruktion der Laplace-Pyramide. Exemplarisch wurde eine Zerlegung für $N = 3$ gewählt, eine weitere Fortführung ist möglich – eine hinreichende Bildgröße vorausgesetzt.

Das gilt auch dann, wenn der Filterkern h_{TP} aus Gleichungen (2.5) und (2.6) keine idealen Tiefpasseigenschaften¹ aufweist, welche für die Unterabtastung im Reduce-Operator theoretisch notwendig wären. In diesem Fall erhält man auf den Bandpass-ebenen der Laplace-Pyramide Aliasartefakte, welche sich bei der Rekonstruktion aber wieder komplett aufheben. Man spricht in diesem Fall von *perfekter Rekonstruktion*.

Führt man aber Bildverarbeitungsoperationen auf den einzelnen Ebenen L_n aus, geht diese Eigenschaft verloren. Da es aber dennoch sinnvoll ist, die Pyramidenebenen einzeln zu filtern, kommt der Tiefpassfilterung eine besondere Bedeutung zu. Ein Filterkern h_{TP} bzw. dessen Übertragungsfunktion H_{TP} mit $h_{TP} \circ \bullet H_{TP}$ sollte daher für eine ideale Glättung folgende Eigenschaften aufweisen:

1. *Tiefpasscharakteristik:* Die Übertragungsfunktion H_{TP} ist reell, monoton fallend, möglichst glatt und hat im Idealfall eine Grenzfrequenz bei der halben Nyquistfrequenz.
2. *Helligkeitserhaltung:* Die Summe der Filtermaskeneinträge ist Eins $\sum_{\xi=-r}^r h_{TP}[\xi] = 1$. Dabei ist r der Radius der Filtermaske

¹Unter *ideal* versteht man in diesem Zusammenhang die Einhaltung des Abtasttheorems: Die maximale, im Bild vorkommende Frequenz muss vor der Unterabtastung auf die Hälfte der neuen Abtastfrequenz reduziert werden.

3. *Isotropie*: Die Tiefpasscharakteristik sollte richtungsunabhängig sein.

Diese Forderungen sind in der Praxis nicht direkt erfüllbar. Daher sollen im weiteren die Fehler betrachtet werden, wenn man als Annäherung an die geforderte ideale Filterung ein *Binomialfilter* mit unterschiedlichen Kerngrößen verwendet. Der Filterkern des Binomialfilters r -ter Ordnung ist für den zweidimensionalen Fall wie folgt definiert:

$$b_k \begin{bmatrix} \cdot \\ \xi \\ \cdot \end{bmatrix} = 2^{-2k} \binom{k}{\xi_1} \cdot \binom{k}{\xi_2} \quad \text{für } 0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq k \quad (2.11)$$

Hier ergeben sich für $r = 3$ und $r = 5$ die folgende Faltungsmasken:

$$b_3 = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b_5 = \frac{1}{256} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Bei der Wahl der Filterkerngrößen ist man nicht auf ungerade Kernel begrenzt. Verwendet man geradzahlig große Kerne, dann liegen die berechneten Werte der neuen Ebene auf Zwischengitterpositionen der alten Ebene. Das hat den Vorteil einer symmetrischen Gewichtung der Bildpunkte. Da aber bei der späteren Implementierung auf bereits bestehende Verfahren zurückgegriffen werden soll, bleiben effektiv nur die Kerne b_3 und b_5 für die Erzeugung der Gauß-Laplace-Pyramide übrig und werden hier nicht weiter behandelt.

Abbildung 2.3 zeigt die Übertragungsfunktionen von Binomialfiltern mit den Kerngrößen 3×3 und 5×5 . Die halbe Nyquistfrequenz liegt in dieser Darstellung bei 0,25. Durch die Filterung im Bild verbleibende Frequenzanteile, welche höher sind als diese, führen durch die periodische Wiederholung des Spektrums bei ganzzahligen Vielfachen der Abtastfrequenz zu Aliasartefakten.

Weiterhin nehmen die anisotropen Eigenschaften mit steigender Filterkerngröße ab [10].

2.3.4 Rauschverteilung

Um die Rauschverteilung auf der Laplace-Pyramide zu verstehen, ist es zunächst einmal erforderlich das Rauschen auf der Gauß-Pyramide zu untersuchen. Dabei stellt sich zuerst die Frage, inwiefern sich eine lineare Filterung, welche den ersten Verarbeitungsschritt des Reduce-Operators (siehe Abbildung 2.1(a)) bildet, auf das Rauschen in einem Bild auswirkt.

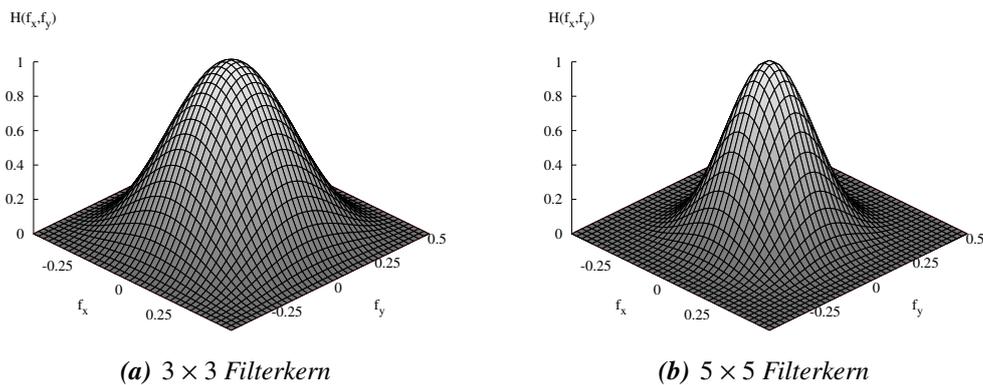


Abbildung 2.3: Transferfunktionen für Binomialfilterkerne

Die einzelnen Grauwerte eines Bildes können als Zufallsvariablen X_i aufgefasst werden. Führt man eine lineare Filterung durch, dann entspricht das der Bildung einer gewichteten Summe eben dieser Zufallsvariablen mit den Gewichtungsfaktoren a_i . Für die Varianz der summierten Variablen gilt:

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n a_i X_i \right) = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \text{Cov} (X_i, X_j) \quad (2.13)$$

Geht man in erster Näherung davon aus, dass die Zufallsvariablen unkorreliert sind und die gleiche Varianz σ^2 besitzen, vereinfacht sich Gleichung (2.13) zu:

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n a_i X_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var} (X_i) \quad (2.14a)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad (2.14b)$$

Die Varianz nach der Filterung $\tilde{\sigma}^2$ sinkt also entsprechend der Filtermaskeneinträge um den Faktor $\sum_{i=1}^n a_i^2$. In Tabelle 2.1 sind Faktoren für Binomial- und Rechteckfilter für die angegebenen Näherungen aufgeführt.

Im Folgenden soll nun betrachtet werden, inwiefern sich die Kovarianz benachbarter Bildpunkte auf die Reduktion der Varianz und Standardabweichung auswirkt. Um den Einfluss dieser Kovarianz beschreiben zu können, bietet sich die Autokorrelationsfunktion – kurz *AKF* – an. Sei $E(X)$ der Erwartungswert der Zufallsvariablen X , dann ist diese wie folgt definiert:

$$\varphi_{XX}(dt) = \text{Cov} (X(t), X(t+dt)) \quad (2.15a)$$

$$= E(X(t)X(t+dt)) - E(X(t))E(X(t+dt)) \quad (2.15b)$$

Die Autokorrelationsfunktion gibt also an, wie stark ein zeitlich zu sich selbst verschobenes Signal in Abhängigkeit der Verschiebung korreliert ist.

Filterkern			
Typ	Größe	$\sum_{i=1}^n a_i^2$	$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$
Binomial	3×3	0,141	0,375
	5×5	0,075	0,273
	7×7	0,051	0,226
Rechteck	3×3	0,111	0,333
	5×5	0,040	0,200
	7×7	0,020	0,143

Table 2.1: Abschwächungsfaktoren für die Varianz σ^2 und Standardabweichung σ bei einer linearen Filterung von unkorrelierten Zufallsvariablen mit Binomial- und Rechteckfiltern.

Um nun den Übergang zur Bildverarbeitung zu schaffen, betrachtet man den Grauwert eines Pixels als eine Zufallsvariable in Abhängigkeit vom Ort $X[\vec{x}]$ und die zeitliche Verschiebung als eine räumliche Verschiebung $d\vec{x}$. Berechnet man auf diese Weise die *AKF*, dann kann eine Aussage darüber getroffen werden, wie stark benachbarte Pixel zueinander korreliert sind.

Für das Bild Nr. 243, dargestellt in Abbildung 4.2(a) auf Seite 39, wurde in einem möglichst homogen belichteten Bereich die Autokorrelationsfunktion ermittelt.

In Abbildung 2.4 ist die *AKF* für eine Verschiebung des Signals zu sich selbst für bis zu 8 Bildpunkte in jede Richtung dargestellt. Die Größe des zu sich selbst verschobenen Signals hatte eine Größe von 64 Bildpunkten für jede Dimension des Bildes. Wie erwartet hat diese im Punkt (0; 0) ein Maximum und fällt dann für größere Verschiebungen auf Null ab.

Für den Fall von weißem, unkorrelierten Rauschen ergäbe sich für die Autokorrelationsfunktion ein Dirac-Impuls an der Stelle (0; 0). Zu beobachten ist aber die Abweichung von diesem Dirac-Impuls hin zu einer deutlichen Tiefpasscharakteristik. Aus diesem Grund dürfen benachbarte Pixel in einem Bild *nicht* als unkorreliert betrachtet werden. Der Faktor der Rauschreduktion würde in diesem Fall überschätzt. Ein Erklärungsansatz wurde bereits in Abschnitt 1.2 durch die Tiefpasseigenschaften realer Systeme geliefert.

Die Theorie soll exemplarisch an einem Bild bestätigt werden. Dazu wird das Bild (Nr. 243) mit einem 5×5 Binomialfilterkern gefaltet und die Varianz und Standardabweichung vor und nach der Filterung an unstrukturierten, möglichst homogen belichteten Stellen im Bild gemessen. Die *AKF* ist bereits bekannt.

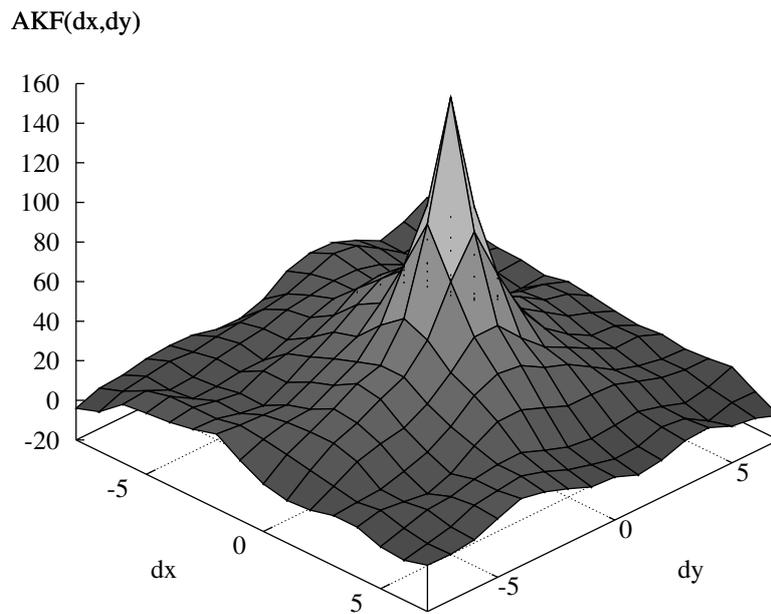


Abbildung 2.4: Autokorrelationsfunktion des Bildes Nr. 243, gemessen an der Position (1600; 1760) mit einer Fenstergröße von 64×64 Bildpunkten

Für eine einfachere Betrachtung wird zunächst Gleichung (2.13) in zwei Summanden aufgeteilt, so dass der zweite Summand für unkorrelierte Bildpunkte zu Null wird. Somit erhält man:

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n a_i X_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var} (X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_i a_j \text{Cov} (X_i, X_j) \quad (2.16)$$

Das Ergebnis des ersten Summanden für einen 5×5 Binomialfilterkern ist 0,075 (siehe Tabelle 2.1) multipliziert mit der Varianz, welche der Wert der *AKF* an der Stelle (0; 0) ist.

Für den zweiten Summanden muss die Summe über alle möglichen Kombinationen unterschiedlicher Filtermaskeneinträge gebildet werden. Deren räumliche Beziehung zueinander bestimmt, welcher Wert aus der Autokorrelationsfunktion für die Kovarianz benötigt wird.

Die Ergebnisse der Berechnung der Varianz und Standardabweichung, sowie die Messung der gleichen Werte im Bild sind in Tabelle 2.2 dargestellt. Man kann deutlich erkennen, dass die eingangs dargestellte Näherung *nicht* zulässig ist.

Doch nicht nur die Varianz ist für das gefilterte Bild berechenbar, sondern auch die *AKF* selbst. Gibt man ein Signal $X[\vec{x}]$ auf ein System mit der *symmetrischen* Impulsantwort h , dann erhält man am Ausgang des Systems das gefilterte Signal $Y[\vec{x}] = X * h[\vec{x}]$. Für die Autokorrelationsfunktion des gefilterten Signals φ_{YY} gilt

Method	$\tilde{\sigma}^2$	$\tilde{\sigma}$	p
Berechnung (unkorreliert)	11,46	3,38	0,27
Berechnung (korreliert)	66,05	8,13	0,66

Tabelle 2.2: Berechnung der Varianz und Standardabweichung im Bild 243 für die Näherung unkorrelierter Bildpunkte und unter Berücksichtigung der Korrelation. Vor der Filterung betrug die Varianz des Rauschens $\sigma^2 = 153,2$ und die Standardabweichung $\sigma = 12,4$. p gibt den Faktor $p = \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma}$ an.

dann folgender Zusammenhang:

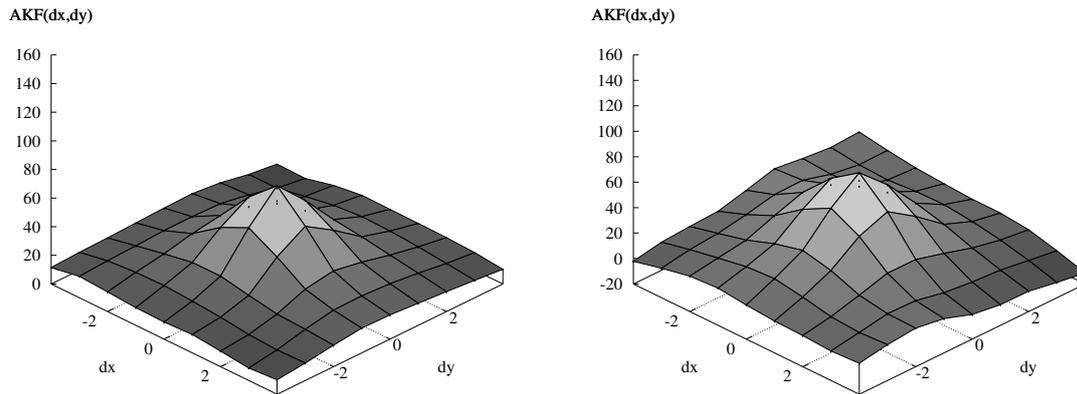
$$\varphi_{YY} [d\vec{x}] = h * h * \varphi_{XX} [d\vec{x}] \quad (2.17)$$

Die zweimalige Faltung mit dem Filterkern h kann man sich bildlich dadurch erklären, dass für die Berechnung der neuen *AKF* sowohl das Referenzsignal, als auch das dazu verschobene Signal die Filterung durchlaufen haben.

Damit sind die Auswirkungen einer linearen Filterung auf die Varianz und *AKF* des Rauschens in einem Bild vorhersagbar. Für die weiteren Überlegungen ist es noch einmal wichtig, die Bedeutung der *AKF* zu verdeutlichen. Geht man zunächst davon aus, dass auf den Detektor weißes Rauschen gegeben wird, dann wird dieses bedingt durch die Korrelation benachbarter Bildpunkte beeinflusst. Im vorliegenden Fall kann man die Aufnahme im Detektor mit einer Tiefpassfilterung vergleichen. Die dargestellte *AKF* lässt gemäß Gleichung (2.17) Rückschlüsse auf die *Point-Spread-Function* des Detektors zu.

Es bleibt die Frage der Auswirkung der Unterabtastung auf die *AKF*. Für die Berechnung dieser Funktion werden das Signal und das zu sich selbst verschobene Signal benötigt. Nun kann man sich leicht überlegen, dass es äquivalent ist, ob man im unterabgetasteten Signal eine Verschiebung um einen Bildpunkt vornimmt, oder im Originalsignal nur solche Verschiebungen zulässt, die ein Vielfaches des Faktors der Unterabtastung sind. Im Umkehrschluss bedeutet das, dass das unterabgetastete Signal die um den gleichen Faktor unterabgetastete *AKF* besitzt wie das Eingangssignal.

Damit kann man festhalten, dass sich die Autokorrelationsfunktion für ein Tiefpassbild der Gauß-Pyramide G_n daraus berechnen lässt, dass man die *AKF* des nächst größeren Tiefpassbildes G_{n-1} zweimalig mit dem für die Erzeugung der Gauß-Pyramide benutzten, symmetrischen Filterkern faltet und anschließend mit dem Faktor unterabtestet, welcher auch zur Erstellung der Gauß-Pyramide genutzt worden ist. Im Falle eines 5×5 Binomialfilters und einer Unterabtastung um den Faktor zwei in jede Bildrichtung ergibt sich die *AKF* der Gauß-Pyramidenebene $\varphi_{G_{n+1}}$ durch die *AKF* der nächst



(a) Gemessen in Gauß-Pyramidenebene G_1 .
 $\varphi_{G_1 G_1}(0,0) = 68,6$

(b) Berechnet für die Gauß-Pyramidenebene G_1 aus dem Eingangsbild G_0 gemäß \downarrow_2
 $(\varphi_{G_0 G_0} * b_5 * b_5)(0,0) = 67,4$.

Abbildung 2.5: Autokorrelationsfunktionen für die Gauß-Pyramidenebene G_1 .

größeren Gaußpyramidenebene φ_{G_n}

$$\varphi_{G_{n+1}} = \downarrow_2 (b_5 * b_5 * \varphi_{G_n}) \quad (2.18)$$

Dabei muss die Unterabtastung so gewählt werden, dass die Position $(0,0)$ erhalten bleibt.

In Abbildung 2.5 ist die *AKF* des ersten Tiefpassbildes der Gauß-Pyramide und die aus dem Eingangsbild berechnete *AKF* dargestellt. Man kann die Reduktion der Varianz bedingt durch die Tiefpassfilterung im Vergleich zu Abbildung 2.4 deutlich erkennen. Die Standardabweichung kann mit guter Genauigkeit für die nächste Gaußebene berechnet werden.

Genau wie für die Tiefpassbilder aus der Gauß-Pyramide kann man nun die Autokorrelationsfunktionen für die Bandpassbilder aus der Laplace-Pyramide ermitteln. Diese sind in Abbildung 2.6 dargestellt. Hier kann man direkt ablesen, wie stark sich das Rauschen auf den einzelnen Laplace-Ebenen verteilt. Vergleicht man die Standardabweichungen auf den Ebenen L_0 und L_2 , so reduziert sich diese um den Faktor drei. Damit sind für eine effektive Rauschfilterung die unteren Bandpassebenen von wesentlich höherer Bedeutung als die höheren.

Um die *AKF* für die Bandpassbilder zu berechnen wird vereinfachend angenommen, dass die Unter- und Überabtastung vernachlässigt werden kann. Damit wird das Bandpassbild erzeugt, indem eine einfach tiefpassgefilterte Version des Eingangsbildes vom Eingangsbild selbst abgezogen wird. Diese Betrachtungsweise lässt sich wieder auf eine einfache Filterung mit einem Bandpassfilterkern h_{BP} zurückführen. Folglich kann

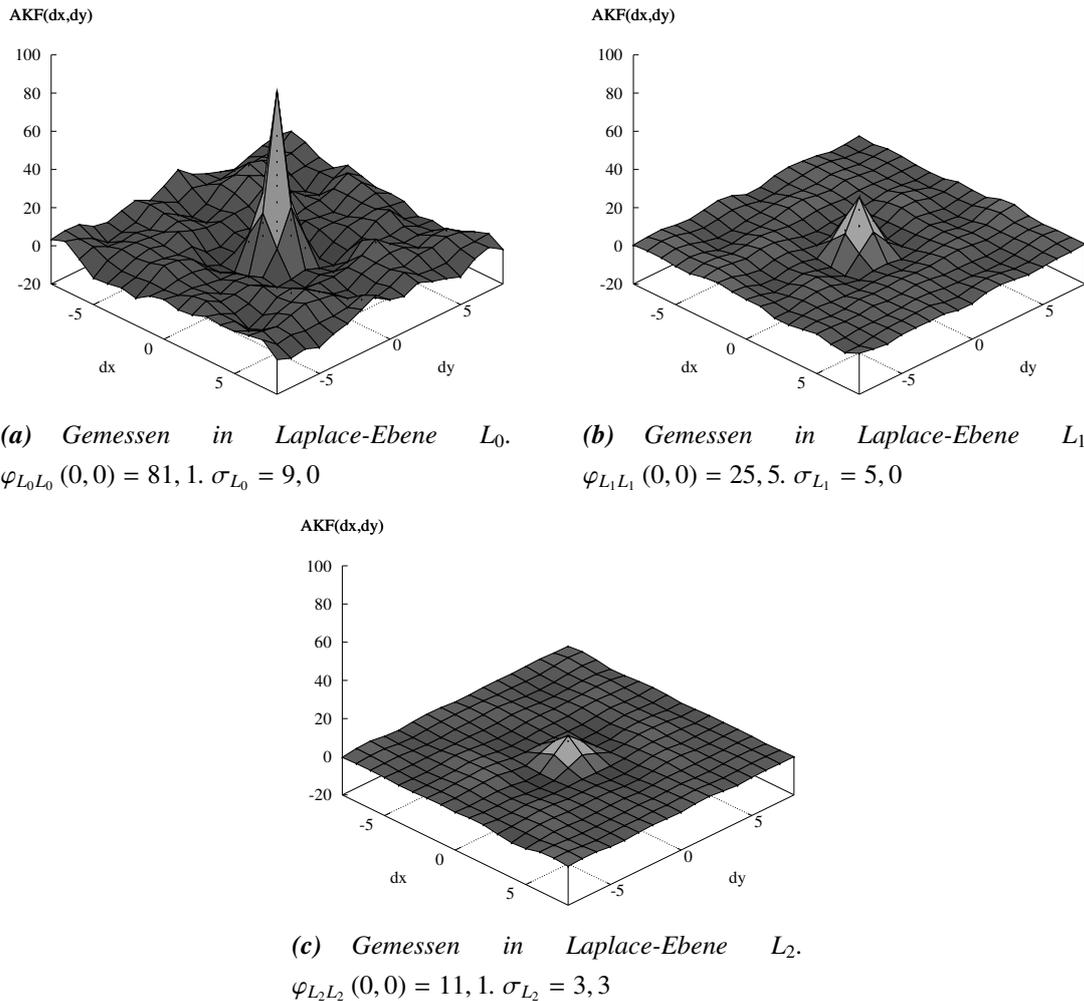
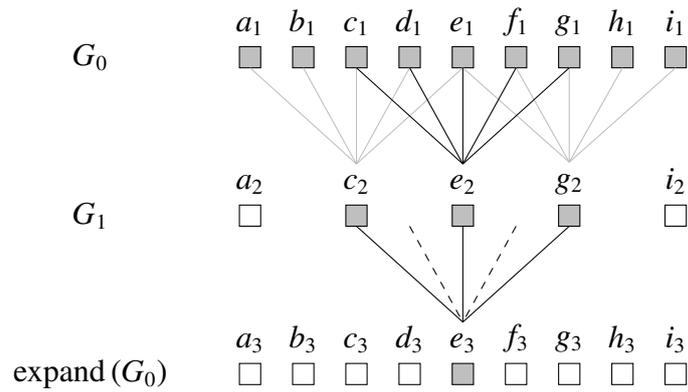


Abbildung 2.6: AKF gemessen in den Laplace-Ebenen L_0 bis L_1 . Man erkennt eine deutliche Reduzierung der Varianz von einer Ebene zu nächsten.

die AKF der Bandpassbilder näherungsweise erneut mit Gleichung (2.17) berechnet werden.

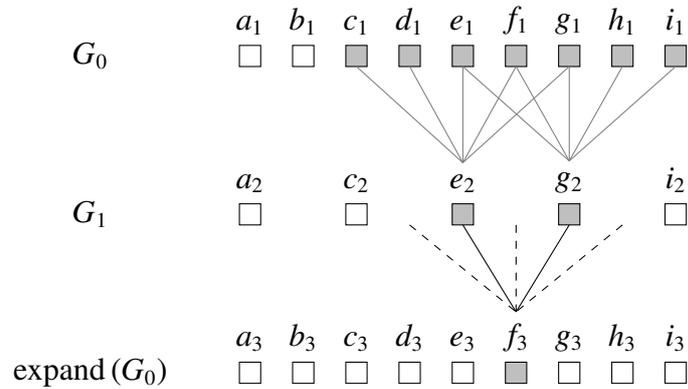
Die Filtermaske, mit der das expandierte Bandpassbild berechnet werden kann ist ortsabhängig. Eine Visualisierung dieses Problems bietet Abbildung 2.7. Mit Hilfe dieser Abbildung kann man sich weiterhin verdeutlichen, dass die Wahl eines 5×5 Binomialfilterkerns zur Erzeugung der Laplace-Pyramide von Vorteil ist, denn die zustande kommenden Ortsabhängigkeiten werden mit kleiner werdender Filtermaske größer.

Schreibt man diese Filtermasken zunächst als Vektoren, dann erhält man auf den geraden Positionen die Filterkoeffizienten gemäß $h_{TP,G}$ und auf den ungeraden Positionen



(a) Faltungsmaske für gerade Positionen im expandierten Bild.

$$e_3 = \frac{1}{128} (a_1 + 4b_1 + 12c_1 + 28d_1 + 38e_1 + 28f_1 + 12g_1 + 4h_1 + i_1)$$



(b) Faltungsmaske für ungerade Positionen im expandierten Bild.

$$e_3 = \frac{1}{128} (4c_1 + 16d_1 + 28e_1 + 32f_1 + 28g_1 + 16h_1 + 4i_1)$$

Abbildung 2.7: Abhängigkeit der Berechnung des expandierten Bandpassbildes von der Position im Bild. Für ein eindimensionales Binomialfilter b_5 erhält man für die exemplarisch betrachteten Pixel e_3 und f_3 unterschiedliche Masken.

gemäß $h_{TP,U}$:

$$h_{TP,G} = \frac{1}{128} (1 \ 4 \ 12 \ 28 \ 38 \ 28 \ 12 \ 4 \ 1) \quad (2.19a)$$

$$h_{TP,U} = \frac{1}{128} (0 \ 4 \ 16 \ 28 \ 32 \ 28 \ 16 \ 4 \ 0) \quad (2.19b)$$

Im zweidimensionalen Fall können vier unterschiedliche Faltungsmasken entsprechend den Positionen auf dem Gitter entstehen, welche sich gemäß der Matrixmul-

Ebene	gemessen		berechnet		$\frac{\sigma - \tilde{\sigma}}{\sigma}$ in [%]
	σ^2	σ	$\tilde{\sigma}^2$	$\tilde{\sigma}$	
G_0	153,21	12,37			
G_1	68,58	8,28	67,37	8,21	0,85
G_2	36,60	6,05	33,00	5,74	5,12
L_0	81,12	9,01	70,06	8,37	7,10
L_1	25,49	5,05	24,94	4,99	1,19
L_2	11,09	3,33	15,44	3,93	-18,01

Tabelle 2.3: Varianz und Standardabweichungen der Gauß-Laplace-Pyramide. Die berechneten Werte beruhen allein auf der AKF des Eingangsbildes G_0 . Werte für G_3 konnten wegen zu klein werdenden Flächen nicht berechnet werden.

tiplikation ergeben. Es resultieren quadratische Matrizen:

$$h_{TP,GG} = (h_{TP,G})^T h_{TP,G} \quad (2.20a)$$

$$h_{TP,UU} = (h_{TP,U})^T h_{TP,U} \quad (2.20b)$$

$$h_{TP,GU} = (h_{TP,G})^T h_{TP,U} \quad (2.20c)$$

$$h_{TP,UG} = (h_{TP,U})^T h_{TP,G} \quad (2.20d)$$

Da alle Filtermasken gleich häufig auftreten, wird der Mittelwert der Matrizen gebildet und anschließend von der das Bild erhaltenden Filtermaske h_E mit dem einzigen zentralen von Null verschiedenen Eintrag 1 abgezogen. Damit ergibt sich näherungsweise folgende Filtermaske h_{BP} für das Bandpassbild:

$$h_{BP} = h_E - \frac{1}{4} (h_{TP,GG} + h_{TP,UU} + h_{TP,GU} + h_{TP,UG}) \quad (2.21)$$

Die Autokorrelationsfunktion für eine Laplace-Pyramidenebene ergibt sich gemäß:

$$\varphi_{L_n} [d\vec{x}] \approx h_{BP} * h_{BP} * \varphi_{G_n} [d\vec{x}] \quad (2.22)$$

In Tabelle 2.3 sind alle Varianzen und Standardabweichungen für das Bild Nr. 243 dargestellt, ermittelt durch berechnete und gemessene Autokorrelationsfunktionen für die Bandpass und Tiefpassbilder. Die berechneten Werte beruhen nur auf der im Eingangsbild G_0 gemessenen Autokorrelationsfunktion. Der maximale relative Fehler beträgt bei der Berechnung der Standardabweichung für die Laplace-Ebene L_3 etwa 18%. Die übrigen Werte liegen deutlich unterhalb dieses Fehlers. Weiterhin kann nun mit dieser Tabelle der Faktor bestimmt werden, mit dem das Rauschen von Ebene zu Ebene abnimmt.

Es bleibt festzuhalten, dass die Autokorrelationsfunktion zusammen mit den bekannten Parametern der Pyramidenerstellung (Tiefpassfilterkerngröße und Faktor der Unter- und Überabtastung) zuverlässige Aussagen darüber liefern kann, wie sich das Rauschen auf der Gauß-Laplace-Pyramide verteilt.

Kapitel 3

Stand der Forschung

Wie im vorangegangenen Kapitel gezeigt wurde, kann zum Beispiel eine Filterung mit einem 3×3 Binomialfilter die Standardabweichung von unkorreliertem Rauschen in einem Bild um den Faktor 0,38 reduzieren. Damit kann man erkennen, dass lineare Tiefpassfilter in der Lage sind, das Rauschen in einem Bild deutlich zu reduzieren.

Zur Rauschreduktion eines Bildes könnte man daher eine solche Filterung in Erwägung ziehen. Allerdings behandelt ein lineares Filter Struktur und Rauschen gleich. Daher folgt eine Reduktion der Bildqualität und Verminderung des Schärfeeindrucks.

Aus diesem Grund kamen nur nichtlineare oder anisotrope Verfahren für eine weitergehende Betrachtung in Frage. Solche Filter passen sich dem Bildinhalt individuell an. Daher besteht eine Hauptaufgabe bei dem Einsatz solcher Filter darin, erhaltenswerte Bildstruktur von Rauschen zu unterscheiden, so dass auf dieser Basis das Filterverhalten angeglichen werden kann.

Folgende Eigenschaften sollen alle Verfahren besitzen:

- Erhaltung des mittleren Grauwertes,
- Kantenerhaltung,
- Rauschreduktion.

Diese Eigenschaften werden von der nichtlinearen Diffusion und einem jüngeren, dazu verwandten Verfahren, dem bilateralen Filter, erfüllt. Barash schlägt für die Beziehung zwischen den Verfahren die adaptive Glättung vor [4]. Eine ausführliche Betrachtung ist in der erwähnten Literatur zu finden.

3.1 Nichtlineare Diffusion

Die Diffusion ist ein aus der Physik bekannter Ablauf, der beispielsweise in Gasen oder Flüssigkeiten bedingt durch die Brownsche Molekularbewegung zu einem zeitlich ablaufenden Konzentrationsausgleich führt. Erst nach völligem Konzentrationsausgleich kommt dieser Prozess zum Erliegen [12].

Eine Beschreibung dieses Vorganges ist mit Hilfe des Fickschen Gesetzes möglich. Dieses setzt die Teilchenstromdichte j – auch als Flux bezeichnet – mit dem Konzentrationsgradienten ∇c in Beziehung:

$$j = -D \cdot \nabla c \quad (3.1)$$

Der Proportionalitätsfaktor D wird als Diffusionskoeffizient bezeichnet. Der Flux ist dem Konzentrationsgradienten entgegen gerichtet und bewirkt folglich den Konzentrationsausgleich.

Zur Diffusionsgleichung gelangt man durch Einsetzen von (3.1) in die Kontinuitätsgleichung. Dabei nutzt man die Eigenschaft der Massenerhaltung aus.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D \cdot \nabla c) \quad (3.2)$$

Der Übergang zur Bildverarbeitung gelingt, wenn man die Grauwerte eines Bildes als örtlich verteilte Konzentrationen auffasst. Folglich wird die Konzentration c durch das Bild I ersetzt.

Hält man zunächst den Diffusionskoeffizienten konstant, so ist der Flux j nur abhängig vom Konzentrationsgradienten ∇c oder im Fall der Bildverarbeitung ∇I und man spricht von linearer Diffusion. Dieser Prozess ist äquivalent zur Faltung des Bildes mit einem gaußschen Filterkern [16]. Wie eingangs gezeigt, führt dies aber nicht zum gewünschten Ergebnis.

Die nichtlineare Diffusion wurde zunächst von Perona und Malik zur Bildung von Skalenräumen genutzt [13]. Ihre Motivation bestand in der örtlich korrekten Lokalisierung von Objekten auf höheren Skalen eines Skalenraumes, was in dem gaußschen Skalenraum nicht möglich ist. Eine dabei postulierte Eigenschaft ist die Glättung in zusammenhängenden Flächen bei einer gleichzeitigen Kantenerhaltung. Dieser Effekt wird erzielt, indem man den Diffusionskoeffizienten vom Bildinhalt abhängig macht. Damit kann man den Diffusionsprozess an den Stellen stoppen, wo erhaltenswerte Bildstruktur vorhanden ist. Für eine Rauschreduktion benötigt man eine Filterung mit genau diesen Eigenschaften, weshalb dieser Ansatz näher betrachtet wurde.

Sei $I(\vec{x})$ das Eingangsbild, dann wird es für den zeitlich ablaufenden Diffusionsprozess um die Dimension $t \geq 0$ erweitert und es gilt $I(\vec{x}, t)$. Weiterhin muss noch die örtlich variierende Stärke der Diffusion gesteuert werden. Hierzu wählt man den Diffusionskoeffizienten D abhängig vom Bildinhalt, besser gesagt vom Betrag des Gradienten an einer bestimmten Stelle \vec{x} , und man erhält die Diffusionsfunktion $D(|\nabla I|)$. Die Diffusionsgleichung lautet dann:

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(D(|\nabla I(x, t)|) \cdot \nabla I(x, t)) \quad (3.3)$$

3.1.1 Explizites Schema

Der Ansatz, dass man die adaptive Filterung eines Bildes als Lösung der partiellen Differentialgleichung (3.3) auffasst, wurde zuerst 1990 von Perona und Malik [13] beschrieben.

Konkrete Implementierungen basierend auf Gleichung (3.3) weisen Schwächen bei der Behandlung von Kanten auf. Je nach Parameterwahl können diese unterschiedliche Verläufe aufweisen [15].

Um dieses Problem zu umgehen wurde zum Beispiel von Catté und anderen vorgeschlagen, zur Berechnung der Diffusionskoeffizienten nicht das Eingangsbild, sondern eine so genannte regularisierte Version davon zu benutzen. Diese erhält man durch eine „leichte“ Tiefpassfilterung des Eingangsbildes I mit einem Tiefpassfilterkern h_{TP} .

Dadurch ändert sich Gleichung (3.3) mit $I_\sigma = I * h_{TP}$ in:

$$\frac{\partial I(\vec{x}, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(D(|\nabla I_\sigma(\vec{x}, t)|) \cdot \nabla I(\vec{x}, t)) \quad (3.4)$$

Die Diskretisierung der Diffusionsgleichung (3.4) liefert für den eindimensionalen Fall das folgende Ergebnis:

$$I_i^{k+1} \approx I_i^k + \tau \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{D_j^k + D_i^k}{2h^2} (I_j^k - I_i^k) \quad (3.5)$$

Dabei ist $\mathcal{N}(i)$ die Nachbarschaft des i -ten Vektoreintrag. Weiterhin sei W die Länge des Vektors, dann gilt:

$$I_i^k := I(x_i, t_k) \quad \text{mit } 1 \leq i \leq W, t \in \mathbb{N}_0 \quad (3.6a)$$

$$D_i^k := D(|\partial_x I_\sigma(x_i, t_k)|) \quad \text{mit } 1 \leq i \leq W, t \in \mathbb{N}_0 \quad (3.6b)$$

Die Herleitung mit den notwendigen Definitionen ist im Anhang A dargestellt.

In Gleichung (3.5) wird der iterative Ansatz, der hier verfolgt wird, sofort deutlich. Da zur Berechnung nur Werte benutzt werden, die zum Zeitpunkt k bereits bekannt sind, spricht man in diesem Fall vom *expliziten Schema*. Diese Gleichung kann man aber auch als eine Matrixmultiplikation auffassen [17]:

$$\frac{I_i^{k+1} - I_i^k}{\tau} = A(I^k) I^k \quad (3.7)$$

Dabei sind dann in der die Filterung bestimmenden Matrix A folgende Einträge verzeichnet:

$$a_{ij}(I^k) = \begin{cases} \frac{D_i^k + D_j^k}{2h^2} & \text{für } j \in \mathcal{N}(i), \\ -\sum_{n \in \mathcal{N}(i)} \frac{D_i^k + D_n^k}{2h^2} & \text{für } j = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.8)$$

Sei E die Einheitsmatrix, dann gilt für die Berechnung des nächsten Iterationsschrittes die Gleichung:

$$I^{k+1} = (E + \tau A(I^k)) I^k \quad (3.9)$$

Weickert untersucht die Möglichkeiten des iterativen Berechnungsschemas zur Bildung eines Skalenraums und zeigt, dass die Stabilität dieses Verfahrens nur für Zeitschritte der Größe $\tau < \frac{1}{2 \dim(I)}$ gewährleistet ist. Eine ausführliche Darstellung findet man in [17].

3.1.2 Semi-implizites Schema

Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, wird häufig die hohe Rechenzeit des expliziten Verfahrens als sein Hauptnachteil angeführt [17, 5, 15]. Da besonders im Hinblick auf eine Echtzeitverarbeitung von Bildsequenzen die Rechenzeit von enormer Bedeutung ist, dürfen bereits bekannte und als besonders schnell geltende Algorithmen hier nicht außer Acht gelassen werden.

Zunächst wird Gleichung (3.9) leicht modifiziert:

$$I^{k+1} = (E - \tau A(I^k))^{-1} I^k \quad (3.10)$$

Es ist direkt ersichtlich, dass hier für die Berechnung des Bildes I^{k+1} zuerst die inverse Matrix zu $(E - \tau A(I^k))$ bestimmt werden muss. In [17] ist gezeigt, dass die Eigenschaften der Filterungsmatrix zur Bildung eines diskreten Skalenraumes für beliebig große Zeitschritte erfüllt sind. Die Restriktion der kleinen Zeitschritte ist damit aufgehoben.

Im eindimensionalen Fall ist diese Matrix tridiagonal und man kann aus diesem Grund für die Berechnung der inversen Matrix den *Thomas-Algorithmus* einsetzen [17].

Daher zielen Verfahren wie zum Beispiel das *additive Operatoren Splitting* darauf ab, die zweidimensionale Filterung auf ein eindimensionales Problem zurückzuführen. Ein Lösungsansatz besteht in der getrennten Behandlung der Bildkoordinaten.

Diese Separierung eines vom Ansatz her nicht separierbaren Problems muss kritisch betrachtet werden.

3.2 Bilaterales Filter

Die bilaterale Filterung folgt einer einfachen aber effektiven Idee. Um die Glättung über Kanten hinweg zu verhindern, wird zunächst ein Gauß-Filter angenommen, das aber ortsabhängig der Bildstruktur angepasst wird. Ist bei einem einfachen Gauß-Filter der Koeffizient für einen Pixel innerhalb der Filtermaske nur abhängig von seiner räumlichen Entfernung zum zentralen Pixel, berücksichtigt das bilaterale Filter als zusätzliches Kriterium noch die Ähnlichkeit des jeweiligen Pixels zum zentralen Pixel. Ein Maß für diese Ähnlichkeit ist die Differenz der Grauwerte.

In Abbildung 3.1 ist das Funktionsprinzip der bilateralen Filterung qualitativ dargestellt. Die zugehörige Filtermaske 3.1(b) ist hier exemplarisch für einen Punkt im hellen, im Oberflächenplot oberen Bereich nahe der Kante abgebildet. Es ist deutlich zu erkennen, wie sich der Filterkern der Form der Kante anpasst, indem die Koeffizienten, vom zentralen Pixel aus betrachtet jenseits der Kante, stark reduziert werden.

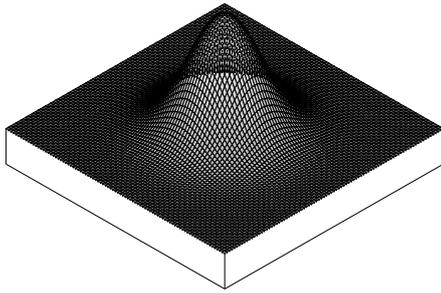
Wie man in der Abbildung weiterhin erkennen kann, nimmt das Rauschen in der Nähe der Kante leicht zu. Das ist auf die Tatsache zurück zu führen, dass in dieser Umgebung weniger Werte innerhalb der Maske zur Mittelung herangezogen werden und somit die Standardabweichung des Rauschens nur geringer reduziert wird. Der mathematische Hintergrund wurde bereits eingangs in Abschnitt 2.3.4 dargestellt.

Es ist leicht ersichtlich, dass die Filtermaske im Fall des bilateralen Filters vom Bildinhalt und damit vom Ort abhängig ist. Das gefilterte Bild $I'[\vec{x}]$ ergibt sich durch die diskrete Faltung:

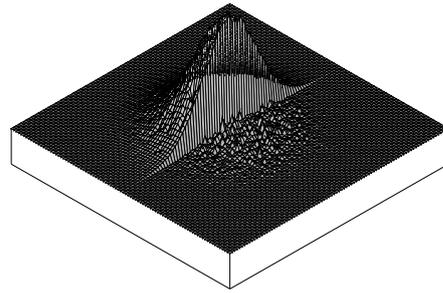
$$I'[\vec{x}] = \frac{\sum_{\xi_1, \xi_2 = -r}^r h_{BL}[\vec{x}, \vec{\xi}] I[\vec{x} + \vec{\xi}]}{\sum_{\xi_1, \xi_2 = -r}^r h_{BL}[\vec{x}, \vec{\xi}]} \quad (3.11)$$

Dabei ist r der Filtermaskenradius und $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ der Abstand eines innerhalb der Filtermaske liegenden Bildpunkts zum Zentrum der Filtermaske.

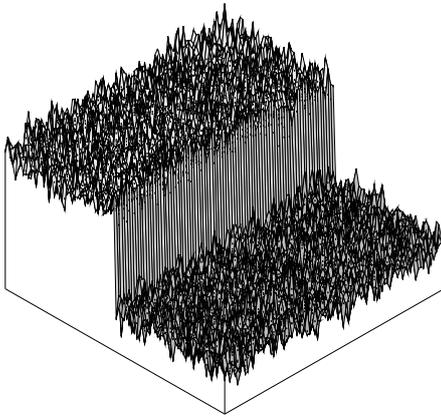
Die Filtermaske berechnet sich mit der Ähnlichkeitsfunktion S und dem Tiefpassfil-



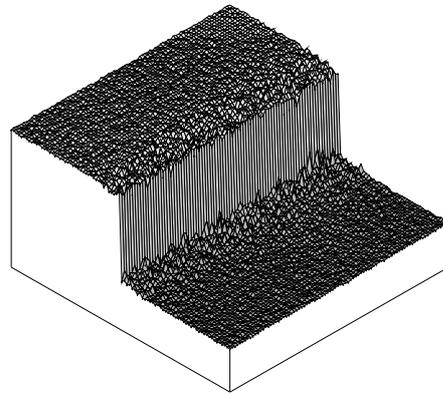
(a) Normaler Gauß-Filterkern



(b) Bilateraler Filterkern bei zusätzlicher Berücksichtigung der Ähnlichkeit der Grauwerte von zentralem Pixel zu den umliegenden Pixeln



(c) Oberflächenplot einer Kante in einem verrauschten Bild



(d) Oberflächenplot der Kante aus 3.1(c) nach der bilateralen Filterung

Abbildung 3.1: Prinzip der bilateralen Filterung durch Anpassung des gaußschen Filterkerns an die lokale Bildstruktur

terkern h_{TP} dem Bildinhalt entsprechend:

$$h_{BL}[\vec{x}, \vec{\xi}] = h_{TP}[\vec{\xi}] \cdot S\left(\left|I[\vec{x}] - I[\vec{x} + \vec{\xi}]\right|\right) \quad (3.12)$$

Der genutzte Tiefpassfilterkern h_{TP} , der für die Bestimmung der geometrischen Nähe eines Pixels genutzt wird, bestimmt letztlich den Radius der bilateralen Filtermaske. Die Form der Tiefpassfilterkernmaske ist im Prinzip frei wählbar, es bietet sich aber an, Binomialfilter zu verwenden. Wenn die Filterstärke kontinuierlich einstellbar sein soll, kann man auf die Gauß-Funktion zurückgreifen, welche auf den Gitterpunkten der Filtermaske abgetastet wird.

$$h_G[\vec{\xi}] = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\sigma_D^2}\right) & \text{für } -3\sigma_D \leq \xi_1, \xi_2 \leq 3\sigma_D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.13)$$

Dabei ist $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ mit $\xi_1 = \xi_2 \in \mathbb{Z}$ ein Punkt innerhalb der Filtermaske.

Die Aufgabe der Ähnlichkeitsfunktion S ist vergleichbar mit der Diffusionsfunktion bei der nichtlinearen Diffusion. Daher können bei beiden untersuchten Verfahren die gleichen Funktionen verwendet werden.

Auf einer ähnlichen Idee wie das bilaterale Filter beruht auch das „multi resolution gradient adaptive filtering“ (MRGAF). Dieses wird von Kunz u.a. in [11] vorgestellt. Auch hier wird ein deformierbarer Tiefpassfilterkern den örtlichen Strukturen im Bild angepasst. Wie der Name suggeriert, ist die Form von dem im Bild berechneten Gradienten abhängig. Die Filterung findet aber nicht im Originalbild, sondern auf den Ebenen der Laplace-Pyramide statt. Sei $b_3 \left[\vec{\xi} \right]$ der 3×3 Binomialfilterkern, dann berechnet sich die Filtermaske $h_{MRGAF} \left[\vec{x}, \vec{\xi} \right]$ an der Stelle \vec{x} wie folgt:

$$h_{MRGAF} \left[\vec{x}, \vec{\xi} \right] = \frac{b_3 \left[\vec{\xi} \right]}{c + \left(\text{Grad}_n^{x_1} \left[\vec{x} \right] \xi_1 + \text{Grad}_n^{x_2} \left[\vec{x} \right] \xi_2 \right)^2} \quad (3.14)$$

Dabei ist $\text{Grad}_n^{x_1} \left[\vec{x} \right]$ der für die Laplace-Pyramidenstufe n berechnete Gradient an der Stelle \vec{x} in der Richtung x_1 . Der Betrag eines Filterkoeffizienten ist dann im Wesentlichen abhängig von dem Skalarprodukt aus Gradient und Filterrichtung. Der Summand c dient als Parameter mit dem bestimmt werden kann, wie groß ein Gradient sein muss, damit die Filterung anisotrop wird.

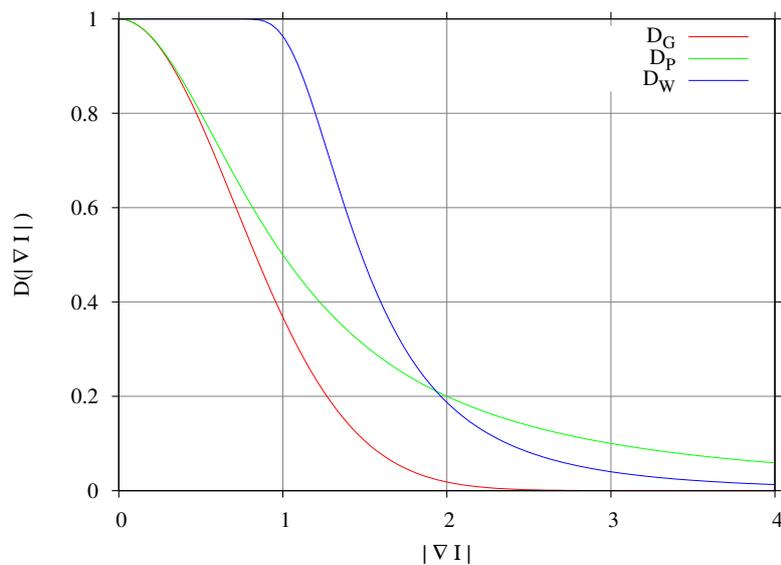
Die gefilterte Version der Laplace-Pyramidenstufe L_n erhält man wie beim bilateralen Filter durch die diskrete Faltung gemäß Gleichung (3.11), nur dass das Originalbild $I \left[\vec{x} \right]$ durch die entsprechende Laplace-Pyramidenstufe $L_n \left[\vec{x} \right]$ und die Faltungsmaske h_{BL} durch h_{MRGAF} ersetzt werden muss.

3.3 Diffusions- und Ähnlichkeitsfunktion

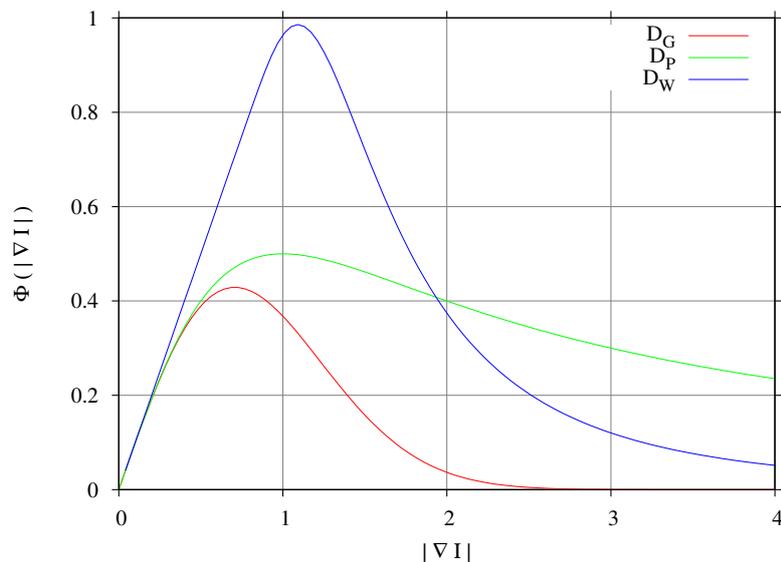
Die Diffusions- und die Ähnlichkeitsfunktion in der nichtlinearen Diffusion und bei der bilateralen Filterung übernehmen vom Ansatz aus betrachtet die gleichen Aufgaben. Sie dienen als Entscheidungskriterium, ob es sich bei einer vorhandenen Grauwertdifferenz um erhaltenswerte Bildstruktur oder aber um zu unterdrückendes Rauschen handelt. Im Folgenden werden die beiden Funktionen unter dem Begriff der Diffusionsfunktion zusammengefasst.

Die Diffusionsfunktion D sollte folgende Eigenschaften aufweisen:

- Sie bildet eine positive reelle Zahl auf eine positive reelle Zahl ab $D : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$,
- der Definitionsbereich ist in $\mathcal{D}_D = [0; \infty[$,



(a) Diffusionsfunktionen



(b) Flussfunktionen

Abbildung 3.2: Diffusions- und Flussfunktionen in Abhängigkeit des Grauwertgradienten $|\nabla I|$. Der Parameter beträgt $\sigma_R = 1$.

- der Wertebereich auf dem Definitionsbereich ist $\mathcal{W}_D = [0; 1]$ und
- der Verlauf ist streng monoton fallend.

Der wesentliche Unterschied zwischen den unterschiedlichen Diffusionsfunktionen besteht in der Steilheit der Ableitung auf dem Teil der Funktion, welcher zwischen Diffusion und keiner Diffusion entscheidet. Weiterhin ist die Eigenschaft, wie schnell die Funktionen für $(|\nabla I(x, t)| \rightarrow \infty)$ gegen Null konvergieren von Bedeutung.

Folgende Funktionen werden exemplarisch untersucht, die Verläufe sind in Abbildung 3.2 dargestellt:

- Die Gauß-Funktion:

$$D_G(|\nabla I(x, t)|) = e^{-\left(\frac{|\nabla I|}{\sigma_R}\right)^2} \quad (3.15)$$

- Eine von Perona und Malik vorgeschlagene Funktion:

$$D_P(|\nabla I(x, t)|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\nabla I|}{\sigma_R}\right)^2} \quad (3.16)$$

- Eine von Weickert vorgeschlagene Funktion:

$$D_W(|\nabla I(x, t)|) = \begin{cases} 1 - e^{-3,315 \cdot \left(\frac{\sigma_R}{|\nabla I|}\right)^4} & \text{für } |\nabla I(x, t)| > 0 \\ 1 & \text{für } |\nabla I(x, t)| \leq 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Die Flussfunktion ergibt sich gemäß Gleichung (3.1):

$$\Phi(|\nabla I|) = \nabla I \cdot D(|\nabla I|) \quad (3.18)$$

Zur einfacheren Betrachtung wird der eindimensionale Fall angenommen. Dann lautet die Diffusionsgleichung:

$$\partial_t I(x, t) = \partial_x (D(\partial_x I(x, t)) \partial_x I(x, t)) \quad (3.19a)$$

$$\partial_t I(x, t) = \partial_x (\Phi(\partial_x I(x, t))) \quad (3.19b)$$

Abbildung 3.3 zeigt die Ableitung einer künstlich angenommenen Kante in einem Bild I_k , diese habe die Form einer Gauß-Funktion. Berechnet man nun die Diffusion entsprechend Gleichung (3.19), so kann man für einen Iterationsschritt vorhersagen, wie die Kante beeinflusst wird. Bei allen Funktionen bedingt die Form des Ergebnisses ($\partial_x \Phi(\partial_x I_k)$) eine Kantenaufsteilung, sobald eine bestimmte Gradientengröße überschritten wird. Den Vorgang in diesem Bereich nennt man auch Rückwärtsdiffusion.

Für den Fall der bilateralen Filter ist die Betrachtung der Flussfunktion unwesentlich. Hier entscheidet allein die Steilheit der Steigung der Ähnlichkeitsfunktion darüber, ob Grauwertdifferenzen als ähnlich betrachtet werden oder nicht.

Alle Filtermethoden, welche die Grauwertdifferenz oder den Grauwertgradienten an einem Ort \vec{x} als Strukturmaß benutzen, setzen implizit voraus, dass sich das Rauschen

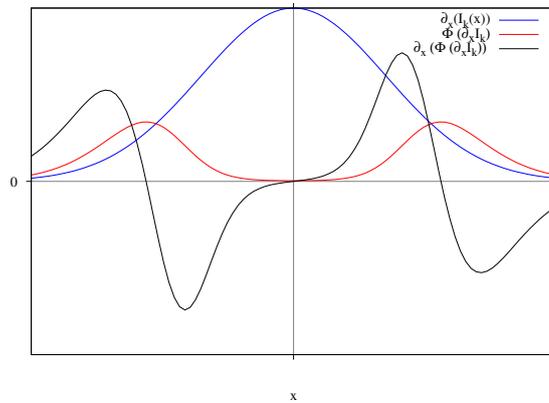
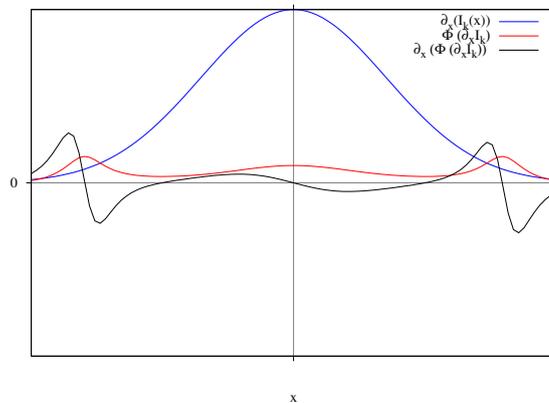
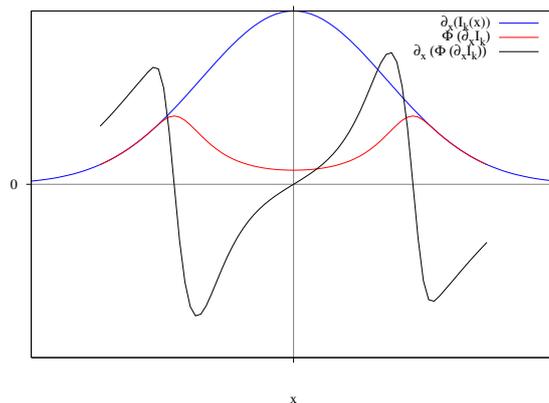
(a) Gauß-Diffusionsfunktion D_G .(b) Perona-Malik-Diffusionsfunktion D_P .(c) Weickert-Diffusionsfunktion D_W .

Abbildung 3.3: Für das Bild einer Kante I_k sei die Ableitung eine Gauß-Funktion $\partial_x I_k(x) = e^{-x^2}$. Setzt man diese Ableitung in die jeweiligen Fluss- bzw. Diffusionsfunktionen ein, dann kann man nach nochmaliger Ableitung in x -Richtung die Änderung der Grauwerte für jede Position für den nächsten Iterationsschritt vorhersagen. Die Form von $\partial_x \Phi(\partial_x I_k(x))$ bedingt eine Kantenaufsteilung.

im Bild in den bestimmten Grenzen abspielt. Daraus ergibt sich direkt der Nachteil, dass zum Beispiel *Salz und Pfeffer Rauschen*, bei dem zufällig Pixel entweder den maximalen oder minimalen Grauwert annehmen, in der Regel als erhaltenswerte Struktur bewertet werden und damit von allen untersuchten Verfahren nicht herausgefiltert werden. Bei der Entwicklung einer auf diesen Methoden basierenden Filterung ist dieser Nachteil zu berücksichtigen.

3.4 Auswahl eines Verfahrens zur Weiterentwicklung

Die Implementierung der in diesem Abschnitt vorgestellten Methoden dient als Entscheidungskriterium, welche Methode für die Entwicklung eines optimierten Verfahrens herangezogen wird. Dafür werden folgende Entscheidungskriterien betrachtet:

- Visuelle Qualität im Hinblick auf Artefaktbildung,
- Rechenzeit,
- Anzahl der Parameter.

Das explizite Schema wurde gemäß dem ursprünglichen Artikel von Perona und Malik [13] implementiert mit der zusätzlichen Option zu der Regularisierung des Eingangsbildes mit einem Binomialfilter.

Die Implementierung des semi-impliziten Schemas beruht im Wesentlichen auf dem von Weickert vorgeschlagenen additiven Operatoren Splitting [17]. Für die Lösung des tridiagonalen linearen Gleichungssystems wurde der Thomas-Algorithmus verwendet. Auch hier ist eine Regularisierung wie im expliziten Schema möglich.

Das bilaterale Filter wurde auf der Basis des von Tomasi [14] veröffentlichten Artikels implementiert. Bei allen Verfahren können die Diffusionsfunktionen, welche in Abschnitt 3.3 vorgestellt worden sind als Parameter ausgewählt werden.

Zunächst sollen die Artefakte näher betrachtet werden, welche die Verfahren erzeugen können. Deren Filterungsergebnisse für ausgewählte Parameter ist im Anhang in den Abbildungen B.1 bis B.3 ab Seite 64 dargestellt. Eine ausschnittweise Betrachtung ermöglicht Abbildung 3.4. Diese zeigt das Originalbild und die durch die drei vorgestellten Verfahren gefilterten Bilder. Die Filterungsparameter sind für eine bessere Visualisierung der Artefaktbildung so gewählt, dass eine deutliche *Überfilterung* erkennbar ist.



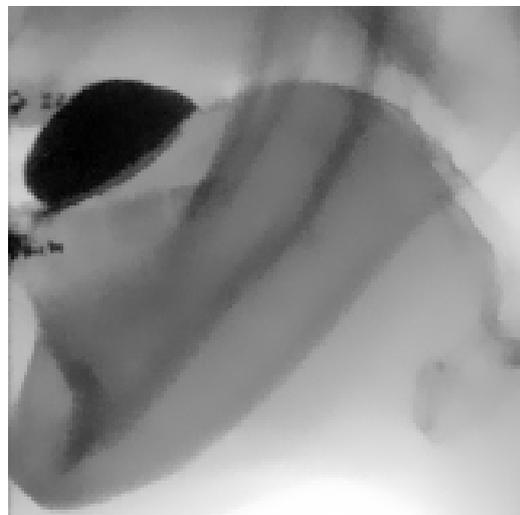
(a) Originalbild.



(b) Nichtlineare Diffusion nach dem expliziten Schema. Iterationen $k = 10$, Zeitschrittgröße $\tau = 0,25$, Regularisierung mit 3×3 Binomialfilter b_3 , Diffusionsfunktion nach Gauß D_G mit $\sigma_R = 40$.



(c) Nichtlineare Diffusion nach dem semi-impliziten Schema. Zeitschrittgröße $\tau = 10$, Regularisierung mit 3×3 Binomialfilter b_3 , Diffusionsfunktion nach Gauß D_G mit $\sigma_R = 40$.



(d) Bilaterale Filterung mit der Tiefpassfilterkerngröße $\sigma_D = 3,0$, Ähnlichkeitsfunktion nach Gauß D_G mit $\sigma_R = 300$.

Abbildung 3.4: Bild aus der Sequenz swallow.gip mit untersuchten Methoden gefiltert. Die Parameter wurden zur Verdeutlichung der Artefaktbildung bewusst zu hoch gewählt.

Die nichtlineare Diffusion erzielt eine Kantenaufsteilung wie in Abschnitt 3.3 näher erläutert wurde. Aus diesem Grund neigt diese Methode dazu, eine klar definierte Unterscheidung zwischen Kante und Fläche vorzunehmen. Das Ergebnis bei der Filterung nach dem expliziten Schema (siehe Abbildung 3.4(b)) ist dann ein visueller Eindruck ähnlich zu dem, wie man ihn von der wiederholten Anwendung des Medianfilters kennt: Ein Bild bestehend aus scharf voneinander abgegrenzten Flächen mit annähernd konstanter Helligkeit. Probleme treten auf, wenn Kanten durch starkes Rauschen überlagert sind. Deren Position ist dann für das Filter nicht genau detektierbar, dennoch wird die Kantenaufsteilung aufgrund eines ausreichend hohen Kontrastes vorgenommen. Es resultiert ein sehr unruhiger Kantenverlauf mit einem häufigen Richtungswechsel. Eine stärkere Regularisierung könnte Abhilfe schaffen, gleichzeitig wird damit aber auch der Verlauf der Kante ungewisser und dicht zusammenliegende Strukturen werden nicht mehr unterschieden.

Die gleichen Erscheinungen lassen sich sowohl bei der Berechnung nach dem expliziten als auch nach dem semi-impliziten Verfahren beobachten (siehe Abbildung 3.4(c)). Beim letzteren ist zusätzlich noch die getrennte Behandlung von horizontaler und vertikaler Filterung erkennbar. Diese äußert sich durch eine gekreuzte, streifenförmige Struktur, welche insbesondere in homogenen Flächen sichtbar wird. Der unruhige, treppenförmige Verlauf von diagonalen Kanten wird dadurch zusätzlich verstärkt.

Das bilaterale Filter nimmt die Kantenaufsteilung nicht vor, sondern reduziert in Bereichen von hohen Kontrasten lediglich die Filterkoeffizienten (siehe Abbildung 3.4(d)). Damit bleiben die Verläufe der Kanten unverändert, sofern sie einen ausreichend hohen Kontrast aufweisen. Das bedeutet im Umkehrschluss aber auch, dass der verbesserte Schärfeeindruck bedingt durch eine Kantenaufsteilung nicht erfolgt.

Visuell am natürlichsten wirkt das Resultat der bilateralen Filterung, da kaum sichtbare Artefakte auftreten. Auch die Beibehaltung der Kanten, im Gegensatz zur künstlichen Aufsteilung, kann im Bezug auf das sensible, medizinische Bildmaterial als Vorteil angesehen werden. Bezogen auf die visuelle Qualität ist also der letzten untersuchten Methode der Vorzug zu geben.

In Tabelle 3.1 sind für die einzelnen Verfahren mit den unterschiedlichen Parametern exemplarisch die Rechenzeiten für das erste Bild der Sequenz *swallow.gip* aufgelistet, welches eine Auflösung von 512×512 Bildpunkten hat. Es ist zu beachten, dass die Rechenzeiten der nichtlinearen Diffusion nach dem expliziten Schema abhängig von der Anzahl der berechneten Iterationsschritte k sind. Bei den bilateralen Filtern ist diese Abhängigkeit durch die Wahl der Filterkerngröße gegeben (siehe Gleichung (3.13)).

Methoden	Parameter	t_R [ms]
NLD explizit	$k = 5$	190,5
	$k = 10$	336,3
	$k = 100$	3007,0
NLD semi-implizit	—	140,5
Bilateral	$\sigma_D = 1,0$	143,0
	$\sigma_D = 1,3$	251,8
	$\sigma_D = 1,6$	388,5

Tabelle 3.1: Rechenzeiten t_R für die nachimplementierten Verfahren. Es sind jeweils die durchschnittlichen Rechenzeiten für vier Filterungen aufgelistet. Bei der nichtlinearen Diffusion ist k die Anzahl der berechneten Iterationsschritte, bei der bilateralen Filterung bestimmt σ_D die Größe des Filterkerns: $\sigma_D = 1,0 \rightarrow 5 \times 5$, $\sigma_D = 1,3 \rightarrow 7 \times 7$, $\sigma_D = 1,6 \rightarrow 9 \times 9$. Ergebnisse für einen Rechner der folgenden Konfiguration: 3,6 GHz Intel Xeon CPU, 3 GB RAM, Betriebssystem Windows XP Professional.

Wenn das bilaterale Filter mit einer 5×5 Maske eingesetzt wird, dann ist es im Bezug auf den Rechenaufwand der Filterung ähnlich schnell wie die nichtlineare Diffusion nach dem semi-impliziten Schema. Werden bei der nichtlinearen Diffusion nur fünf Iterationsschritte berechnet, ist auch dieses Verfahren ähnlich aufwendig.

Auch die Anzahl der Parameter spricht für das bilaterale Filter. Eine hohe Anzahl von Parametern macht es im praktischen Einsatz schwer, das Optimum einer Filterung zu finden. Im Folgenden werden daher noch einmal alle Parameter der jeweiligen Filtermethode aufgelistet.

- Nichtlineare Diffusion nach dem expliziten Schema:
 - Anzahl der Iterationen k ,
 - Zeitschrittgröße τ ,
 - Stärke der Regularisierung,
 - Wahl der Diffusionsfunktion D ,
 - Streckung der Diffusionsfunktion entlang der Gradientenachse σ_R .
- Nichtlineare Diffusion nach dem semi-impliziten Schema:
 - Zeitschrittgröße τ ,
 - Stärke der Regularisierung,
 - Wahl der Diffusionsfunktion D ,

- Streckung der Diffusionsfunktion entlang der Gradientenachse σ_R .
- Bilaterales Filter:
 - Größe des Tiefpassfilterkerns σ_D ,
 - Wahl der Ähnlichkeitsfunktion D ,
 - Streckung der Diffusionsfunktion entlang der Gradientenachse σ_R .

Sowohl die geringe Anzahl der Parameter des bilateralen Filters als auch dessen Rechenzeit sind zusätzlich zu den visuell überzeugenden Ergebnissen die Entscheidungsträger, weshalb dieses Verfahren im folgenden Abschnitt optimiert und an die Eigenschaften des Rauschens in Niedrigdosis-Röntgenbildern angepasst werden soll.

Kapitel 4

Ergebnisse

4.1 Rauschschätzer

Die Rauschschätzung ist ein wesentlicher Bestandteil für eine effektive Filterung zur Reduktion von Rauschen. Auf dieser Basis wird letztlich die Entscheidung vorgenommen, mit welcher Wahrscheinlichkeit es sich bei einer bestimmten Grauwertdifferenz um Bildstruktur oder Rauschen handelt. Alle im vorherigen Kapitel beschriebenen Methoden müssen auf zuverlässige Schätzungen der Standardabweichung oder Varianz in Abhängigkeit des Grauwertes zurückgreifen können.

4.1.1 Einfluss der Logarithmierung von Bilddaten

Im Abschnitt 2.2.2 wurde bereits die Signalabhängigkeit des Rauschens begründet. Nun muss man in der praktischen Bildverarbeitung zusätzlich die Vorverarbeitung der Daten berücksichtigen, welche die Rauschcharakteristik beeinflussen können. Im erwähnten Abschnitt geht man zunächst von linearen Bilddaten aus. Greift man das Signal direkt am Detektor ab, dann besteht dieser lineare Zusammenhang zwischen der Anzahl der auftreffenden Photonen und dem resultierenden Signal.

Allerdings besteht kein linearer Zusammenhang zwischen der Anzahl der auftreffenden Photonen und der Dicke des durchleuchteten Materials. Die Grundlage hierfür liefert das *Lambert-Beersche Gesetz* [9]. Sei I'_0 die auf ein Material der Dicke d mit dem Schwächungskoeffizienten μ auftreffende Strahlung, dann ergibt sich die austretende Strahlung I' :

$$I' = I'_0 \cdot e^{-\mu d} \quad (4.1)$$

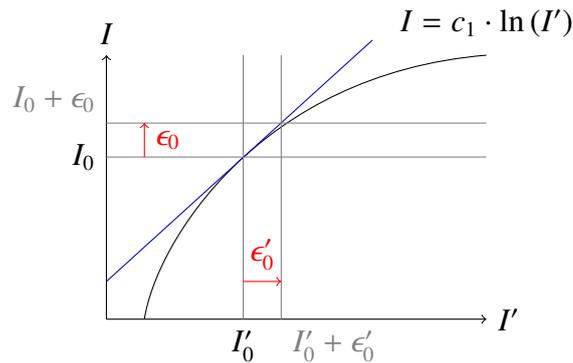


Abbildung 4.1: Lineare Approximation des durch Rauschen bedingten Fehlers ϵ_0 bei Anwendung einer logarithmischen Kennlinie.

Um nun einen linearen Zusammenhang zwischen auftreffendem Signal und resultierendem Grauwert herzustellen, logarithmiert man die Bilddaten.

$$I = c_1 \ln(I') \quad (4.2)$$

Historisch betrachtet ist diese Logarithmierung allerdings nicht neu, denn bereits die Röntgenfilme mit ihren charakteristischen Gradationskurven weisen diese Eigenschaften auf. Dieser Schritt ist also auch in Betracht auf die Akzeptanz von digitaler Technik im klinischen Umfeld von Bedeutung.

Diese Logarithmierung wirkt sich auch auf die Charakteristik der Rauschkurve aus. Es besteht nun die Frage, wie der lineare Zusammenhang zwischen Erwartungswert und Varianz in den logarithmierten Bilddaten aussieht. Wie in Gleichung (2.1) formuliert, wird auf ein Signal die Störkomponente ϵ'_I addiert. Diese Störkomponente hat eine Varianz, die dem Erwartungswert entspricht.

$$\text{Var}(\epsilon'_I) = \lambda = c_2 \cdot I' \quad (4.3)$$

Und der Erwartungswert entspricht bis auf einen Skalierungsfaktor der Signalstärke, welcher hier als c_2 bezeichnet wird. Man kann sich nun leicht überlegen, dass für hinreichend kleine ϵ'_I das neue Signal wieder als eine additive Überlagerung dargestellt werden kann.

$$I = I_0 + \epsilon_I \quad (4.4)$$

Das neue ϵ_I kann durch lineare Approximation durch den Betrag der Ableitung an der Stelle I' berechnet werden, wie es in Abbildung 4.1 dargestellt ist. Eine Herleitung ist über den Satz von Taylor möglich.

$$\epsilon_I \approx \epsilon'_I \cdot \frac{dI}{dI'} = \epsilon'_I \cdot \frac{c_1}{I'} \quad (4.5)$$

Die Varianz der neuen Störkomponente ϵ_I berechnet sich demnach wie folgt:

$$\text{Var}(\epsilon_I) = \text{Var}\left(\epsilon'_I \cdot \frac{c_1}{I'}\right) \quad (4.6a)$$

$$= \frac{c_1^2}{I'^2} \cdot \text{Var}(\epsilon'_I) \quad (4.6b)$$

$$= \frac{c_1^2 c_2}{I'} \quad (4.6c)$$

$$= c_1^2 c_2 \cdot e^{-\frac{1}{c_1}} \quad (4.6d)$$

Nach Gleichung (4.6d) wird also für den Zusammenhang zwischen resultierendem Grauwert und Varianz eine fallende Exponentialfunktion erwartet. Für die Standardabweichung gilt auf Grund der Eigenschaften der Exponentialfunktion das gleiche.

4.1.2 Verifizierung der Schätzung

Die Qualität des bereitgestellten Schätzverfahrens soll ebenfalls im Rahmen dieser Arbeit bewertet werden. Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, wird eine fallende Exponentialfunktion als Zusammenhang zwischen Grauwert und Standardabweichung des Rauschens erwartet. Aus diesem Grund liefert die Rauschschätzung, welche auf den logarithmierten Bilddaten arbeitet, als Ergebnis eine solche Funktion in Form einer *Look-Up-Table*.

Für die Bewertung wurden folgende Aufnahmen an einem digitalen Röntgensystem für statische Aufnahmen erstellt (siehe Abbildung 4.2):

- Serie von Phantomaufnahmen mit gleich bleibender Dosis
- Phantomaufnahmen und Graukeile mit konstanter Anodenspannung und steigender Ladung

Im ersten Fall wurde eine Serie von Phantomaufnahmen I_i mit gleich bleibender Dosis erstellt. Im Idealfall unterscheiden sich solche Aufnahmen nur durch das vorhandene Rauschen. Somit ist eine pixelweise Mittelung der Bilder möglich und man erhält I_{Avr} :

$$I_{Avr}[\vec{x}] = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K I_i[\vec{x}] \quad (4.7)$$

Das gemittelte Bild I_{Avr} kann man zusammen mit den Einzelaufnahmen nutzen, um die signalabhängige Rauschkurve für das verwendete System in dem resultierenden

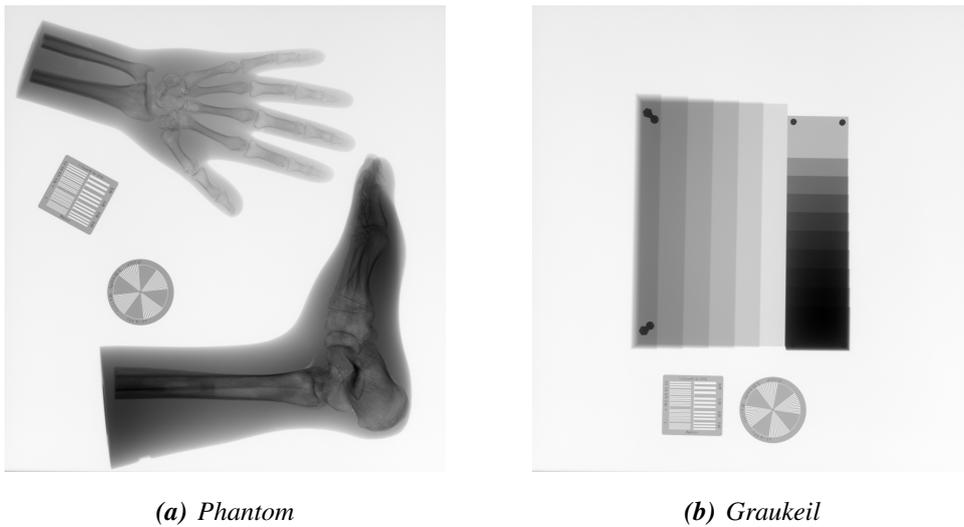


Abbildung 4.2: Röntgenbilder, erstellt für die Rauschanalyse und die Bewertung des bereitgestellten Schätzverfahrens.

Grauwertbereich zu bestimmen. Dazu wird dieser Bereich in 128 Intervalle eingeteilt¹ und für jede einzeln die Standardabweichung berechnet. Durch die Logarithmierung der Bilder bei der Vorprozessierung ist eine fallende Exponentialfunktion zu erwarten. Abbildung 4.3 zeigt das Ergebnis dieser Auswertung und bestätigt die Annahme.

Die Ermittlung der Standardabweichung sieht im Einzelnen so aus, dass zunächst nach Gleichung (4.7) das gemittelte Bild I_{Avr} berechnet wird. Danach berechnet man in den Einzelaufnahmen I_i pixelweise für jedes \vec{x} die quadratische Abweichung $(I_i[\vec{x}] - I_{Avr}[\vec{x}])^2$ und addiert diese anschließend in der entsprechenden Bin auf. Die Bin wird anhand des Grauwertes im gemittelten Bild an der Stelle \vec{x} bestimmt. Man kann nun für jede Bin die Varianz und Standardabweichung bestimmen.

Es zeigt sich, dass die Messungen der Standardabweichung σ_{measured} in Abbildung 4.3 im gesamten Messbereich oberhalb der Standardabweichung der Rauschschätzung für das Graukeilbild (Nr. 261) liegen, welche ebenfalls in der Abbildung in Form einer durchgezogenen Kurve dargestellt ist. Diese Abweichung zeigt entweder, dass die Rauschschätzung über den gesamten Grauwertbereich das Rauschen unterschätzt oder aber, dass ein systematischer Fehler bei der Ermittlung der Standardabweichung aufgetreten ist.

Die Ergebnisse der Rauschschätzung müssen zunächst einmal als gegeben hingenommen werden. Die größte potentielle Fehlerquelle bei einer Rauschschätzung liegt in

¹Die Einteilung entspricht zur besseren Vergleichbarkeit der Grauwertbereichseinteilung der Rauschschätzung.

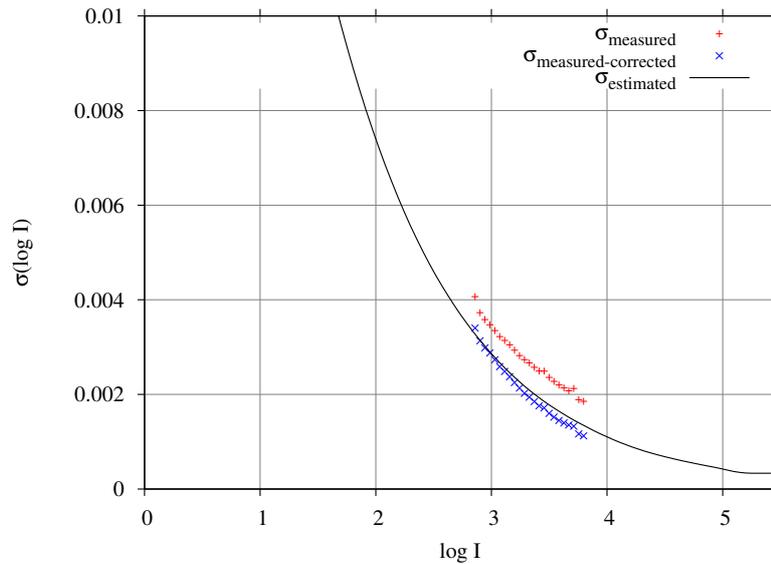


Abbildung 4.3: Rauschmessung durch pixelweise Messung der Standardabweichung in einer Serie von 16 Phantomaufnahmen (Nr. 243 bis 249, 251 bis 258 und 260) und anschließender Zuordnung in Intensitätsbins vor und nach Korrektur von globalen Helligkeitsschwankungen. Zusätzlich ist die Rauschschätzung eines Graukeilbildes (Nr. 261) mit gleicher Dosis abgebildet

der Fehlinterpretation von Struktur als Rauschen. Diese ist aber in den Graukeilaufnahmen so weit wie möglich eliminiert worden. Daher sollte die Schätzung das eigentliche Rauschverhalten widerspiegeln. Aus diesem Grund wird die Rauschanalyse noch einmal kritisch untersucht.

Dazu werden zunächst die Differenzbilder $I_{\text{Diff}_i}[\vec{x}]$ der Einzelaufnahmen der Serie zum gemittelten Bild erstellt $I_{\text{Diff}_i}[\vec{x}] = I_{\text{Avr}}[\vec{x}] - I_i[\vec{x}]$. Bei näherer Betrachtung der Histogramme fällt auf, dass die Form einer gaußschen Glockenkurve mit einem zum Nullpunkt verschobenen Maximum ähnelt. Exemplarisch ist in Abbildung 4.4 das Histogramm des Differenzbildes von Aufnahme 248 und dem gemittelten Bild dargestellt.

Die Verschiebung der Maxima der Histogramme für die Differenzbilder legt nahe, dass bei der Erstellung der Serienaufnahmen die Belichtung trotz gleicher Einstellungsparameter nicht absolut konstant war. Wäre die Belichtung in allen Serienaufnahmen absolut konstant, dann hätte das Histogramm sein Maximum stets auf dem Nullpunkt. Berechnet man also auf die oben beschriebene Weise die Standardabweichung ohne eine mögliche Belichtungsschwankung zu berücksichtigen, wird diese zu groß. Die Belichtungsschwankungen müssen also ausgeglichen werden. Daher wird vor der Berechnung der Standardabweichung die Differenz D vom Mittelwert über alle Pixel im gemittelten Bild und vom Mittelwert über alle Pixel im jeweiligen Einzelbild der Serie gebildet und aufaddiert.

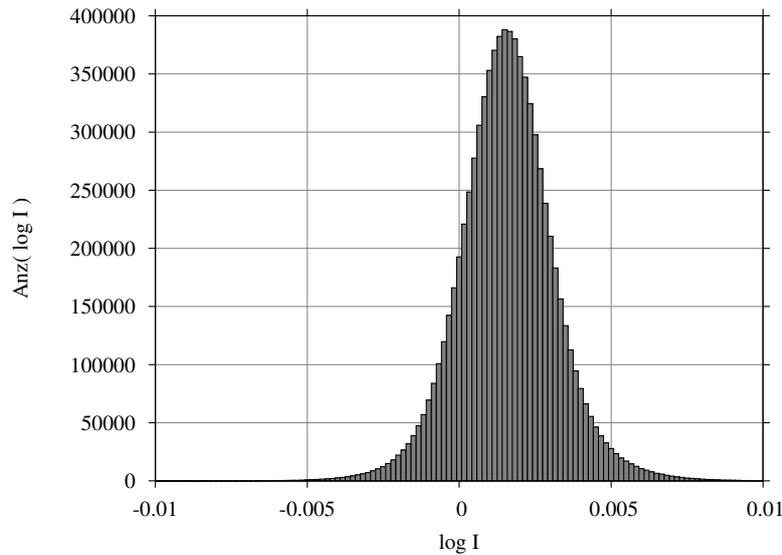


Abbildung 4.4: Exemplarisch dargestellte Verschiebung des Histogramms bei der Bildung des Differenzbildes aus gemitteltem Bild I_{Avr} und einem Serienbild I_i (hier: Nr. 248)

Sei $\bar{I}_{Avr} = \frac{1}{K} \sum_{\vec{x}}^K \bar{I}[\vec{x}]$ der mittlere Grauwert des Bildes I_{Avr} dann gilt für den Korrekturfaktor D :

$$D = \frac{1}{K} \left(\sum_{\vec{x}}^K \bar{I}[\vec{x}] - \sum_{\vec{x}}^K I_i[\vec{x}] \right) \quad (4.8)$$

Hierbei ist K die Anzahl der Pixel im Bild. Tabelle 4.1 zeigt den Zusammenhang zwischen der Verschiebung der Histogramme und der Differenz der absoluten Mittelwerte. Die Korrelation der Werte erlaubt es nun, den Korrekturfaktor D vor der Berechnung der Standardabweichung auf das jeweilige Serienbild I_i zu addieren.

Das Ergebnis der Berechnung der Standardabweichung nach der Korrektur ist in Abbildung 4.3 mit $\sigma_{\text{measured-corrected}}$ dargestellt. Man kann die deutliche Reduzierung bedingt durch die Korrektur erkennen. Weiterhin sieht man, dass die Ergebnisse der Rauschschätzung mit der Messung fast exakt übereinstimmen.

Um weitere Fehler in der Berechnung der Standardabweichung ausschließen zu können, werden die Messwerte und die Schätzung noch durch eine zweite Messung verifiziert. Hierfür betrachtet man in den Stufengraukeilen kleine Regionen von 10×10 Bildpunkten. Diese Regionen sind so auf den Stufen des Graukeils platziert worden, dass sie möglichst homogene Belichtungen zeigen. Für jede Region kann der Erwartungswert und die Varianz berechnet werden.

Wenn die zu messende Region R im Bild I_i durch den Eckpunkt \vec{x}_R und eine horizontale wie vertikale Ausdehnung d_R besitzt, dann berechnen sich der Mittelwert \bar{R} und die

Aufnahme	$D = \bar{I}_{Avr} - \bar{I}_i$	max
243	6,2	6
244	-12,6	-12
245	-14,0	-13
246	-6,8	-6
247	16,7	16
248	9,5	9
249	-6,4	-6
250	-	-
251	-9,5	-9
252	10,3	10
253	7,4	7
254	-10,6	-10
255	4,0	3
256	5,7	5
257	1,2	1
258	-16,0	-16
259	-	-
260	7,4	6

Tabelle 4.1: Die Differenz der mittleren Grauwerte von gemitteltem Bild I_{Avr} zu der jeweiligen Serienaufnahme I_i im Vergleich zum Histogrammmaximum der Differenzbilder aus gemitteltem Bild und Einzelbild der Serie $\bar{I}_{Avr} - \bar{I}_i$. Zu beachten ist hierbei, dass die Bestimmung des Histogrammmaximums nur auf ganze Grauwerte genau ist.

zugehörige Standardabweichung $\sigma(R)$ zu:

$$\bar{R} = \frac{1}{d_R^2} \sum_{\xi_1, \xi_2=0}^{d_R-1} I_i[\vec{x} + \vec{\xi}] \quad (4.9)$$

$$\sigma(R) = \sqrt{\frac{1}{d_R^2 - 1} \sum_{\xi_1, \xi_2=0}^{d_R-1} (I_i[\vec{x} + \vec{\xi}] - \bar{R})^2} \quad (4.10)$$

Abbildung 4.5 zeigt die Messergebnisse für drei unterschiedliche Belichtungen. In jeder Aufnahme stimmen die Messwerte mit der Schätzung für den vorhandenen Grauwertbereich, welcher im nebenstehenden Histogramm dargestellt ist, sehr gut überein.

Es bleibt also festzuhalten, dass die Rauschschätzung für unstrukturierte Bilder sehr präzise Ergebnisse liefert.

Im Folgenden soll die Frage geklärt werden, welche Auswirkungen Strukturierung im Bild auf die Rauschschätzung hat. Da die Messungen und Schätzungen für die unstrukturierten Bilder übereinstimmen, wird für die Bewertung der Abweichung die Rauschschätzung für das Bild 261 als Referenz gewählt. Dieses ist mit der gleichen

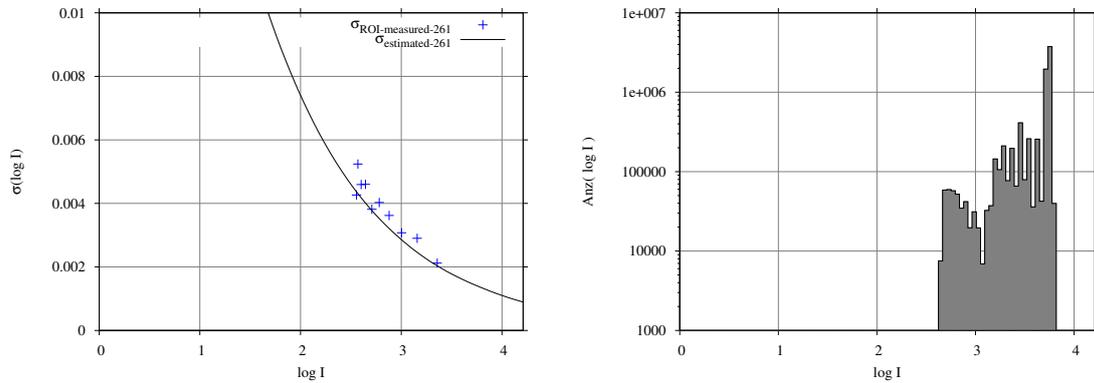
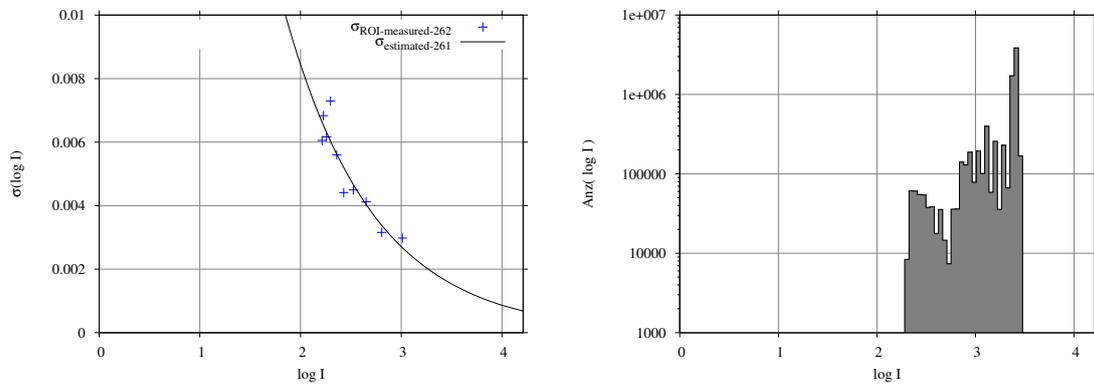
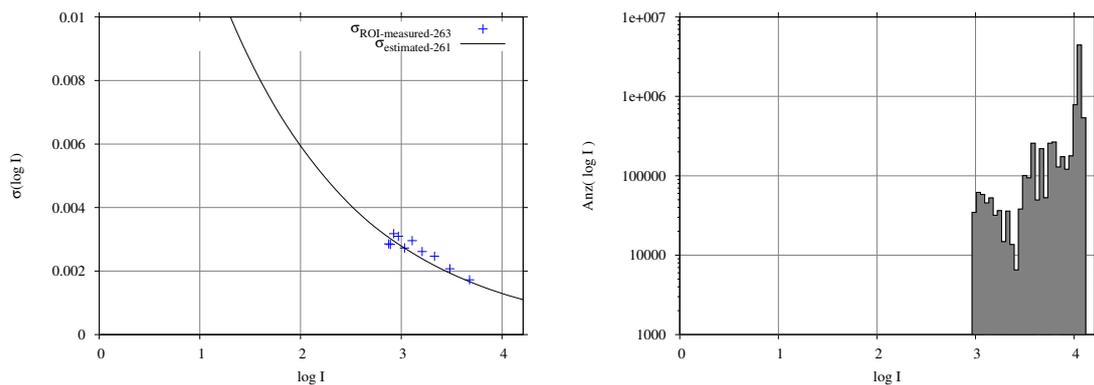
(a) Aufnahme 261 – Referenz Ladung C_1 (b) Aufnahme 262 – Ladung $C_2 = \frac{1}{2} \cdot C_1$ (c) Aufnahme 263 – Ladung $C_3 = 2 \cdot C_1$

Abbildung 4.5: Messungen des Rauschens in Graukeilbildern Nr. 261 bis 263 mit unterschiedlicher Dosis bei einer Anodenspannung von U_A in Regionen mit einer Größe vom 10×10 Bildpunkten. Zum Vergleich sind die Ergebnisse der Rauschschätzung für die entsprechenden Bilder ebenfalls dargestellt.

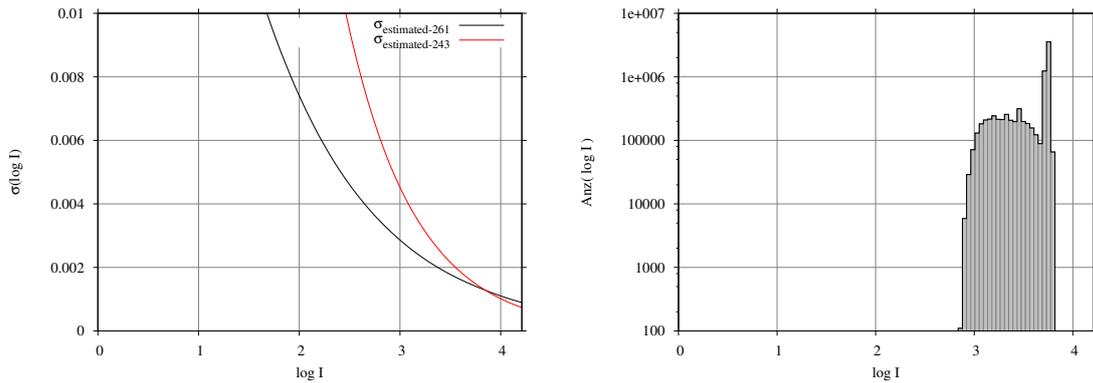


Abbildung 4.6: Rauschschätzung für strukturierte Phantom- und unstrukturierte Stufengraukeilaufnahmen.

Grauwert	$\sigma_{Avr} [\cdot 10^{-3}]$	$\sigma_R [\cdot 10^{-3}]$	$\sigma_{S,Phantom} [\cdot 10^{-3}]$	$\sigma_{S,Stufen} [\cdot 10^{-3}]$
2,86	3,41	3,62	3,17	5,17
2,99	2,88	3,08	2,83	4,33
3,16	2,37	2,90	2,33	3,33
3,33	1,94	2,12	2,00	2,67
3,58	1,45	—	1,67	1,83
3,76	1,17	—	1,33	1,33

Tabelle 4.2: Standardabweichungen aus Messungen innerhalb der Serie σ_{Avr} , aus Messungen in 10×10 großen Regionen σ_R in Phantomaufnahme Nr 243, aus der Rauschschätzung für die Stufengraukeilaufnahme $\sigma_{S,261}$ und aus der Rauschschätzung für die Phantomaufnahme $\sigma_{S,243}$.

Dosis aufgenommen worden, wie die Serie der Phantome (Aufnahmen 243 bis 260) und aus diesem Grund weisen beide Aufnahmen einen ähnlichen Grauwertumfang auf.

Für den Vergleich wird nun die Rauschschätzung auf das Phantombild angewendet. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Man kann deutlich erkennen, wie die Struktur die Rauschschätzung beeinflusst. Offensichtlich wird Struktur als Rauschen identifiziert und es findet eine Überschätzung statt. Damit die Auswirkungen für das konkrete Bild deutlich werden ist das Histogramm der Phantomaufnahme ebenfalls abgebildet. Das Bild beinhaltet Grauwerte auf dem Intervall [2,9 ; 3,8]

Im Grauwertbereich der Direktstrahlung (Grauwert 3,8), welcher durch das Maximum im Histogramm gekennzeichnet ist, stimmen die Schätzungen überein, da dieser auch für die Phantomaufnahmen strukturlos ist (siehe Tabelle 4.2). Betrachtet man den Unterschied der Rauschschätzung in den dunklen Bildbereichen, so hat man hier einen maximalen Faktor von $\frac{\sigma_{S,261}}{\sigma_{S,243}} \doteq 1,63$, mit dem das Rauschen überschätzt wird.

Zur Überprüfung der Konstanz der Rauschschätzung wurden deren Ergebnisse für die

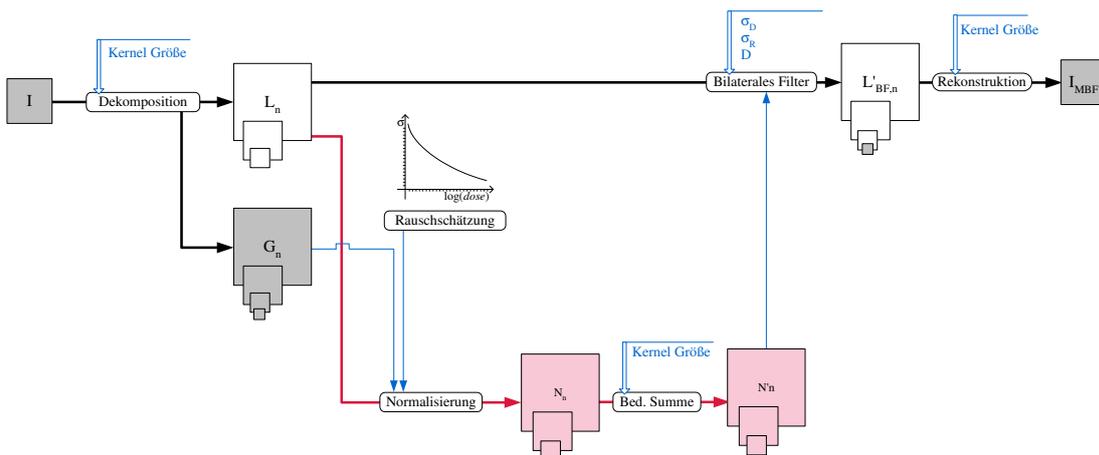


Abbildung 4.7: Blockschaltbild über den Filterungsablauf bei der multiskalaren bilateralen Filterung. Aus dem in die Gauß-Laplace-Pyramide zerlegten Eingangsbild wird der Kontrollpfad berechnet (hier rot eingefärbt). Dieser bestimmt die Filterkoeffizienten des bilateralen Filters. Die Parameter der jeweiligen Verarbeitungsstufe sind blau eingefärbt.

Serienaufnahmen miteinander verglichen. Diese ist sehr hoch und im Grauwertbereich der Bilderserie treten keine quantifizierbaren Schwankungen auf.

4.2 Multiskalare bilaterale Filterung

Wie in Abschnitt 3.4 beschrieben waren die Ergebnisse der bilateralen Filterung am überzeugendsten. Insbesondere die geringe Artefaktbildung trägt zu einer hohen visuellen Qualität bei. Allerdings kann die einfache bilaterale Filterung wesentliche Aspekte nicht erfüllen:

- Berücksichtigung des signalabhängigen Rauschens $\sigma(I)$
- Filterung tiefer Bildfrequenzen mit kleinen Filterkernen

Daher wurde in Betracht gezogen, die Filterung auf der Gauß-Laplace-Pyramide durchzuführen, sowie die bereits in Abschnitt 4.1 untersuchte Rauschschätzung zu implementieren.

Der erste Schritt besteht also in der Zerlegung des Eingangsbildes auf die Gauß-Laplace-Pyramide. Hierfür konnte auf bereits bestehende Methoden zurückgegriffen werden. Die theoretische Behandlung des Themas findet sich in Abschnitt 2.3 auf Seite 7.

Einen Überblick über den gesamten Ablauf der Filterung liefert Abbildung 4.7.

4.2.1 Berücksichtigung der Rauscheigenschaften

Um die bilaterale Filterung dem signalabhängigen Rauschen anzupassen, ist es ein sinnvoller Ansatz, die Ähnlichkeitsfunktion $D\left(\left|I[\vec{x}] - I[\vec{x} + \vec{\xi}]\right|\right)$ bildpunktweise entsprechend dem Grauwert zu variieren. Da die Standardabweichung des Rauschens auf den logarithmierten Bilddaten eine annähernd exponentiell abfallende Funktion in Abhängigkeit des Grauwertes ist (siehe Abschnitt 4.1.1), müssen die Funktionswerte entlang der Ordinate dem Rauschen entsprechend gestaucht oder gestreckt werden.

Das Ziel ist es also, nicht für die absolute Grauwertdifferenz, sondern vielmehr für ein Vielfaches der Standardabweichung die Gewichtungsfaktoren aus der Ähnlichkeitsfunktion zu erhalten. Den Zusammenhang liefert die Rauschschätzung $\sigma(I)$. Geht man zunächst einmal von der Gauß-Glocke als Ähnlichkeitsfunktion aus, so erhält diese als Variablen den Grauwert $I[\vec{x}]$ im Zentrum der Filtermaske und den Grauwert eines innerhalb der Filtermaske liegenden Pixels $I[\vec{x} + \vec{\xi}]$ mit dem Abstand $\vec{\xi}$ vom Zentrum. Die absolute Differenz wird durch die Rauschschätzung für den Grauwert im Punkt \vec{x} normiert. Man erhält also:

$$D_G\left(I[\vec{x}], I[\vec{x} + \vec{\xi}]\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\left|I[\vec{x}] - I[\vec{x} + \vec{\xi}]\right|}{\sigma_R(I[\vec{x}])}\right)^2\right) \quad (4.11)$$

Für eine effektive Implementierung kommt eine Neuberechnung der Funktionswerte nicht in Frage, denn hier wird man aus Gründen der Rechenzeit die Arbeit mit *Look-Up-Tables* bevorzugen. Gemäß Gleichung (4.11) wird zunächst die absolute Grauwertdifferenz bestimmt. Diese wird dann auf ein Vielfaches des Rauschens normiert. Die Ergebnisse der Rauschschätzung liegen bereits als *Look-Up-Table* vor. Anschließend kann der so ermittelte Wert in einer zweiten *Table* nachgeschlagen werden.

So kann man die Koeffizienten der bilateralen Filterung für die Ähnlichkeit mit zweimaligem Nachschlagen in einer Tabelle realisieren. In der entwickelten Methode wurde jedoch eine andere Möglichkeit der Berücksichtigung des signalabhängigen Rauschens realisiert. Da die Filterung in den Bandpassbildern der Laplace-Pyramide stattfinden soll, muss man sich verdeutlichen, dass die Grauwerte der Tiefpassbilder nicht mehr unmittelbar zur Verfügung stehen. Die Basis, auf der die Rauschschätzung Ergebnisse liefert geht also verloren. Daher wird in der entwickelten Filtermethode eine Kontrollpyramide berechnet, auf deren Basis dann die eigentlichen Filtermaskenkoeffizienten für die zu filternde Laplace-Pyramide berechnet werden

Der erste Schritt in diesem *Kontrollpfad* besteht aus der Normierung der Laplacebilder auf das signalabhängige Rauschen. Die Einträge im Bild liegen dann als Vielfaches der Standardabweichung vor. Dazu muss noch einmal auf die entsprechenden Tiefpassbilder zugegriffen werden.

Für die Normierung der Bandpassbilder aus der Laplace-Pyramide $L_n[\vec{x}]$ benutzt man die entsprechenden Tiefpassbilder der Gauß-Pyramide $G_n[\vec{x}]$. Ist $\sigma(I)$ die Standardabweichung eines Grauwertes, dann ergibt sich das normierte Bandpassbild $N_n[\vec{x}]$ mit $n < N \in \mathbb{N}_0$ nach:

$$N_n[\vec{x}] = \frac{L_n[\vec{x}]}{\sigma(G_n[\vec{x}])} \quad (4.12)$$

Die beschriebene Normierung ist in Abbildung 4.8(b) dargestellt. Im unnormierten Bandpassbild 4.8(a) kann man deutlich erkennen, wie das Rauschen in den Bereichen geringer Dosis (zum Beispiel im oberen Schädelbereich) eine höhere Amplitude aufweist als in den Bereichen höherer Dosis (zum Beispiel unterhalb des Kieferknochens). Durch die Normierung gelingt es nun, die Amplitude des Rauschens im gesamten Bandpassbild annähernd konstant zu halten. Die einzige Ausnahme bildet hier der Bereich der Direktstrahlung, der stark überbelichtet ist und somit keine Strukturierung aufweist.

Bezieht man diese Normierung in Gleichung (4.11) ein, ergibt sich für die Berechnung der Ähnlichkeitsfunktion:

$$D_G(\vec{x}, \vec{\xi}) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_R^2} \left(\frac{L_n[\vec{x}]}{\sigma(G_n[\vec{x}])} - \frac{L_n[\vec{x} + \vec{\xi}]}{\sigma(G_n[\vec{x} + \vec{\xi}])} \right)^2\right) \quad (4.13)$$

Durch die Normierung ist nun die Verwendung eines konstanten σ_R möglich, welches die Standardabweichung der Rauschschätzung skaliert. Dieses dient somit als zusätzlicher Steuerungsparameter für die Entscheidungsschwelle zwischen Rauschen und Struktur. Die Rauschschätzung liefert σ , welches nicht mit σ_R verwechselt werden sollte.

Die beschriebene Normierung erfolgt auf jeder Ebene der Laplace-Pyramide auf der Basis der jeweiligen Tiefpassbilder der Gauß-Pyramide. Das signalabhängige Rauschen ist damit berücksichtigt, es bleibt noch die Verteilung des Rauschens von einer Laplace-Pyramidenebene zur nächsten zu berücksichtigen. Die Ergebnisse der Messungen aus Abschnitt 2.3.4 bezüglich dieser Verteilung können hier verwertet werden (siehe Tabelle 2.3 auf Seite 19). Die Abnahme der Standardabweichung wird durch die Einführung eines Abschwächungsfaktors für eine Pyramidenebene zur nächsten berücksichtigt. Konkret bedeutet dies, dass die Filterstärke von Ebene zu Ebene reduziert werden muss. Auch hier ist σ_R ein geeigneter Parameter und ist von der Pyramide-

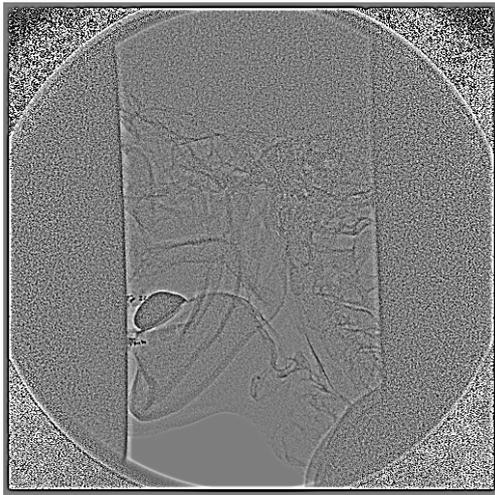
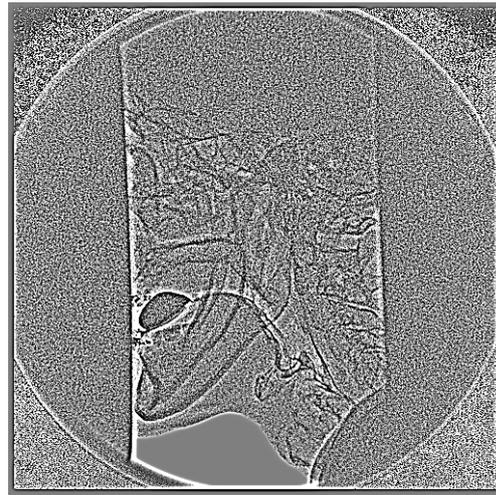
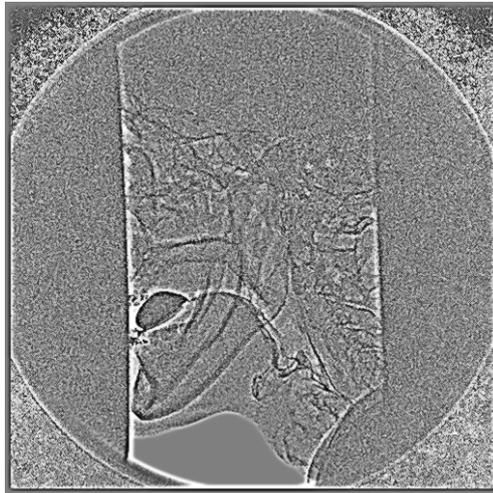
(a) Bandpassbild L_0 (b) Normiertes Bandpassbild N_0 (c) Normiertes Bandpassbild nach bedingten Summen-Filterung N'_0

Abbildung 4.8: Zwischenbilder aus dem Kontrollpfad der multiskalaren bilateralen Filterung exemplarisch für das Bandpassbild aus der Sequenz swallow.gip (Auflösung 512×512 Pixel)

nebene und insbesondere von der für die Pyramidenerstellung benutzten Filterkernen abhängig. Daher erweitert man σ_R um den von der Pyramidenebene abhängigen Abschwächungsfaktor $s(n)$. Dabei berechnet sich $s(n)$ entweder aus den Messungen oder den Berechnungen der AKF.

$$s(n) = \frac{\varphi_{L_n, L_n}(0, 0)}{\varphi_{L_0, L_0}(0, 0)} \quad (4.14)$$

Der Berechnung der Ähnlichkeitsfunktion kommt hier also die enorme Bedeutung zu, die Eigenschaften der Rauschverteilung auf der Gauß-Laplace-Pyramide zu berücksichtigen.

sichtigen. Sie berechnet sich nun wie folgt:

$$D_G(\vec{x}, \vec{\xi}) = \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_{RS}(n))^2} \left(\frac{L_n[\vec{x}]}{\sigma(G_n[\vec{x}])} - \frac{L_n[\vec{x} + \vec{\xi}]}{\sigma(G_n[\vec{x} + \vec{\xi}])}\right)^2\right) \quad (4.15)$$

Die Abbildung 4.8(b) ist das erste Zwischenergebnis des Kontrollpfades. In den weiteren Stufen ist es nun wünschenswert, die im Bild vorhandene Struktur vom Rauschen zu unterscheiden. Zu diesem Zweck wurden noch eine weitere Stufe des Kontrollpfades implementiert.

4.2.2 Bedingte Summen-Filter

Die nächste Filterung des Kontrollbildes zielt darauf ab, die bilaterale Filterung über Kanten hinweg zu verhindern um den Verlauf der Kanten zu bewahren. Dazu ist es zunächst wichtig, sich das Erscheinungsbild einer Kante in den Bandpassbildern zu verdeutlichen.

Die Stelle, an der eine Kante liegt, ist durch einen Nulldurchgang bestimmt. Gelingt es nun, die Differenz zu den Werten jenseits der Kante zu vergrößern, dann verringert man gleichermaßen die Wahrscheinlichkeit, dass bei der bilateralen Filterung über die Kante hinweg gemittelt wird.

Ein möglicher Ansatz besteht darin, nur die Werte in der Filtermaske zu berücksichtigen, die auch das gleiche Vorzeichen haben wie der zentrale Bildpunkt. Filtert man das Kontrollbild aus Abbildung 4.8(b), dann ergibt sich das letzte Bild des Kontrollpfades $N'_n[\vec{x}]$ dargestellt in Abbildung 4.8(c):

$$N'_n[\vec{x}] = \frac{1}{r^2} \sum_{\xi_1, \xi_2 = -r}^r \frac{\text{sgn}(N_n[\vec{x}]) + \text{sgn}(N_n[\vec{x} + \vec{\xi}])}{2} N_n(\vec{x} + \vec{\xi}) \quad (4.16)$$

Dabei ist sgn die Signumfunktion, wobei für die Implementierung auf die Sonderstellung der Null verzichtet worden ist. Die zugrunde gelegte Definition lautet dann:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Im Bezug auf Kantenerhaltung zeigte die bedingte Summenbildung deutlich bessere Ergebnisse als die Verwendung eines normalen Tiefpassfilters.

4.2.3 Filterungsprozess

Die in den Abschnitten 4.2.1 bis 4.2.2 beschriebenen Filterungen dienen allein dazu, eine Kontrollpyramide zu erstellen. Aus dieser werden die Filterkoeffizienten bestimmt, mit der dann die Bandpassbilder der Eingangspyramide bilateral gefiltert werden.

Wenn L_0 bis L_n mit $n \in N - 1$ die Bandpassbilder des Eingangsbildes sind, dann erhält man die gefilterten Bandpassbilder L'_0 bis L'_n durch die bilaterale Filterung mit dem ortsvarianten Kern, wie er in Gleichung (3.12) beschrieben wurde. Die Filterkoeffizienten werden jetzt aber nicht durch ein Tiefpassbild, sondern durch das vorprozessierte Eingangsbild N' bestimmt:

$$h_{BL}[\vec{x}, \vec{\xi}] = h_{TP}[\vec{\xi}] \cdot D_G\left(\left|N'[\vec{x}] - N'[\vec{x} + \vec{\xi}]\right|\right) \quad (4.18)$$

Die Ähnlichkeitsfunktion ergibt sich gemäß Gleichung (4.15):

$$D_G(\vec{x}, \vec{\xi}) = \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_{RS}(n))^2} \left(N'[\vec{x}] - N'[\vec{x} + \vec{\xi}]\right)^2\right) \quad (4.19)$$

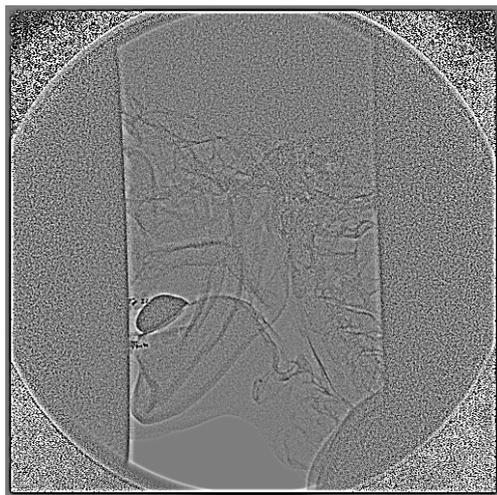
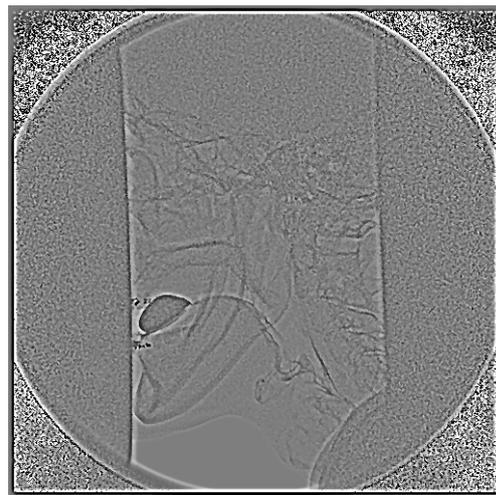
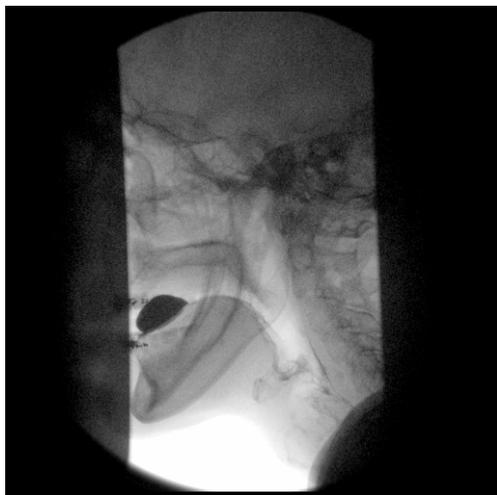
Im Anschluss an diesen Filterungsprozess erfolgt die Rekonstruktion des multiskalar gefilterten Bildes aus den gefilterten Bandpassbildern. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.9 dargestellt.

4.2.4 Parameterwahl

Ein Entscheidungskriterium für eine geeignete Filtermethode ist häufig die Anzahl der Parameter. Ein praxistaugliches Verfahren sollte daher möglichst wenige davon besitzen.

Die multiskalare bilaterale Filterung besitzt folgende Parameter (vgl. Abbildung 4.7):

- Bilaterale Filterung
 - Größe des Tiefpassfilterkerns σ_D ,
 - Breite der Ähnlichkeitsfunktion σ_R ,
- Filterkerngröße bei der Laplace-Pyramidenerzeugung b_P ,
- Filterkerngröße bei bedingter Summenfilterung,
- Anzahl der zu filternden Pyramidenebenen.

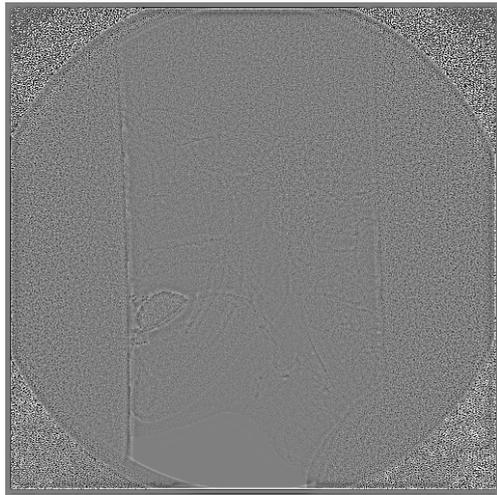
(a) Bandpassbild L_0 vor der Filterung(b) Bandpassbild L'_0 nach der Filterung

(c) Eingangsbild (logarithmiert)

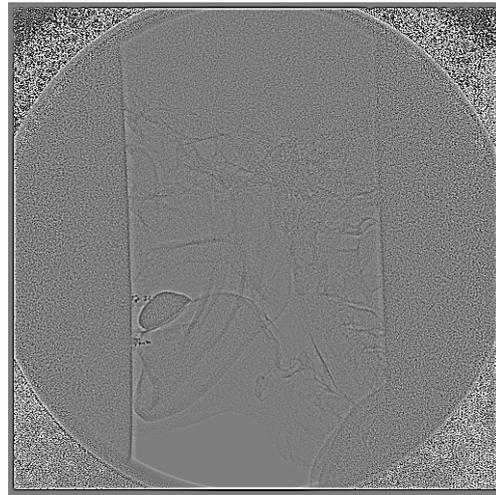
(d) Rekonstruiertes Bild aus den gefilterten Bandpassbildern L'_n **Abbildung 4.9:** Ergebnis der multiskalaren bilateralen Filterung

Auf Grund der Kombination mit bereits bestehenden Filterungen, welche auf der Laplace-Pyramide beruhen, die mit einem 5×5 Binomialfilter erzeugt wird, ist dieser Parameter zunächst gegeben. Das 5×5 Binomialfilter hat insbesondere dadurch Vorteile, dass es weniger Anisotropien zeigt als ein 3×3 Filter und auch die betragsmäßige Abweichung der ortsabhängigen Filterkerne ist geringer (siehe Abschnitt 2.3.4).

Die Ähnlichkeitsfunktion wurde ebenfalls durch die Gauß-Funktion fest vorgegeben. Ein visueller Unterschied zu der von Weickert vorgeschlagenen Funktion ist kaum erkennbar. Damit bleiben als Parameter effektiv die Filterkerngröße des Tiefpasses σ_D , ein Faktor, mit dem die Standardabweichung der Rauschschätzung gestreckt werden kann, σ_R , die Filterkerngröße der bedingten Summen-Filterung, und die Anzahl der zu



(a) Differenzbild aus Eingangsbild und multi-skalar, bilateral gefiltertem Bild.



(b) Differenzbild aus Eingangsbild und binomial gefiltertem Eingangsbild mit einem 5×5 Kernel.

Abbildung 4.10: Differenzbilder zur Bewertung der Qualität der multiskalaren bilateralen Filterung im Hinblick auf Kantenerhaltung. Beide Abbildungen werden im gleichen Grauwertbereich dargestellt.

filternden Laplace-Ebenen N . Die besten Ergebnisse für die exemplarisch in diesem Abschnitt betrachtete Sequenz *swallow.gip* lieferte eine Filterung auf den Laplace-Pyramidenebenen L_0 und L_1 , mit einem Filterstärkefaktor $\sigma_D = 0,4$ und einem 5×5 großen Filterkern bedingt durch die Wahl von $\sigma_R = 1$ für die Größe des Tiefpasskerns.

4.2.5 Bewertung der Ergebnisse

Um die Qualität der entwickelten Methode zu bewerten, ist es wichtig, die zugrunde gelegte Aufgabenstellung erneut ins Auge zu fassen. Im Vordergrund sollte die visuelle Qualität für reale, klinische Aufnahmen stehen. Eine sinnvolle Herangehensweise wäre hier die Ausarbeitung eines Kataloges mit geforderten Qualitätskriterien. Diese Kriterien müssten dann von klinischem Fachpersonal bewertet werden. Aus zeitlichen und technischen Gründen ist eine solche Betrachtung allerdings nicht durchgeführt worden.

Ein generelles Problem, welches sich stellt, ist die Bewertung der Ergebnisse gegenüber einem unbekanntem Optimum, dem unverrauschten Bild. Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis gibt beispielsweise keine Möglichkeit, die Kantenerhaltung zu bewerten. In Bezug darauf ist es oft schon aufschlussreich, das Differenzbild aus Eingangsbild und dessen gefilterter Version zu erstellen (siehe Abbildung 4.10).

Um ein Gefühl für die Erkennbarkeit von Kantenerhaltung zu entwickeln ist zusätzlich in Abbildung 4.10(b) die Differenz zwischen dem Eingangsbild und dem mit einem 5×5 Binomialfilter gefaltetem Bild dargestellt. Beide Aufnahmen sind im gleichen Grauwertbereich dargestellt. Man kann deutlich erkennen, dass die multiskalare bilaterale Filterung mit den im Bild vorhandenen Strukturen wesentlich behutsamer umgeht als die lineare Filterung. Dennoch ist die Reduktion des Rauschens fast identisch. Bei näherer Betrachtung der Kantenverläufe im Differenzbild der multiskalaren bilateralen Filterung kann man Artefakte beobachten, welche auf die Filterung in höher liegenden Laplace-Ebenen zurückzuführen sind. Hier wäre eine Korrektur des Abschwächungskoeffizienten $s(n)$ aus Abschnitt 4.2.3 notwendig.

Die quantitative Bewertung mit Hilfe des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses kann kein alleiniges Qualitätskriterium für eine Filterung sein, denn über die Kantenerhaltung und visuelle Qualitätsverbesserungen beispielsweise ist damit keine Aussage möglich. Dennoch wird für eine Bewertung folgendes Vorgehen beschrrieben: Wie in Abschnitt 4.1.2 gezeigt wurde, liefert der Rauschschätzer für unstrukturierte Bildinhalte sehr zuverlässige Ergebnisse. Aus diesem Grund wird zunächst eine Phantomaufnahme so gefiltert, dass die Strukturen im Bild visuell möglichst gut erhalten bleiben. Mit diesen Parametern wird dann die Stufengraueilaufnahme gefiltert und in diesem Ergebnis erneut die Rauschschätzung durchgeführt.

Für die Bestimmung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses SNR wird folgender Ausdruck zugrunde gelegt:

$$SNR(I) = 20 \cdot \log \left(\frac{\max(I_{TP}) - \min(I_{TP})}{\sigma(I)} \right) \quad (4.20)$$

Dabei sind $I_{TP \max}$ und $I_{TP \min}$ der maximale und der minimale Bildsignalwert. Da das absolute Minimum und Maximum im Bild ebenfalls durch Rauschen beeinflusst sind, wird das Bild zunächst mit einem 5×5 Binomialfilterkern gefiltert und anschließend das Minimum und Maximum bestimmt.

Die Veränderung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses ergibt sich dann aus der Differenz der auf die beschriebene Art bestimmten Werte vor und nach der Filterung:

$$\Delta SNR = SNR(I') - SNR(I) \quad (4.21)$$

In diesem statischen Bild werden im interessierenden Grauwertbereich (siehe Abbildung 4.5(a)) Verbesserungen des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses um bis zu 5,9 dB erzielt. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.11 dargestellt.

Auch für dynamische Fluoroskopiesequenzen sollen quantitative Verbesserungen ermittelt werden. Dazu wird der Rauschschätzer vor und nach der Filterung eingesetzt.

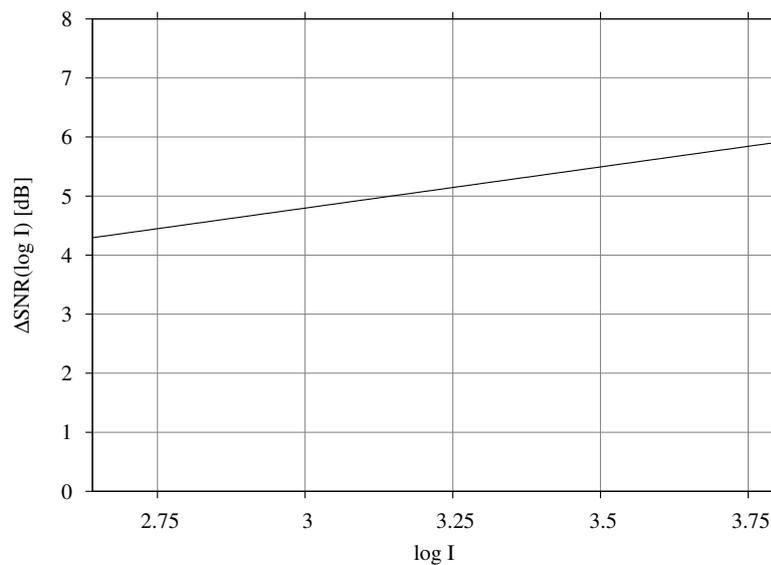


Abbildung 4.11: Verbesserung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses für das statische Bild Nr. 261. Die Parameter sind für das Bild Nr. 243 so eingestellt, dass sich keine wesentlichen Struktureinbußen ergeben.

Die Ergebnisse der reinen Rauschschätzung sind für das erste Bild der Sequenz *swallow.gip* in Abbildung 4.12 dargestellt.

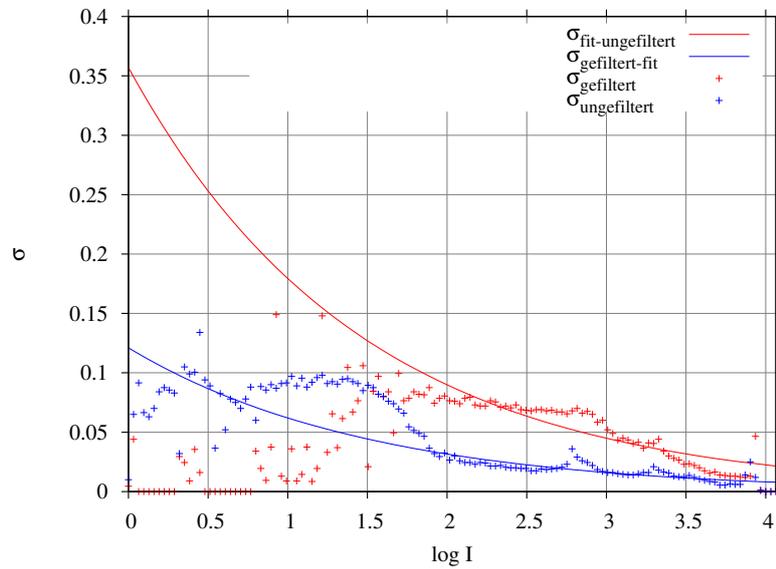
Es sind sowohl die *rohen* Schätzdaten in Form von Punkten, als auch die angepassten Kurven in Form von durchgehenden Linien dargestellt. Betrachtet man die reinen Schätzdaten für die Standardabweichung σ in Abhängigkeit des Grauwertes I , dann kann man in dem unteren Grauwertbereich einen geschätzten Anstieg des Rauschens nach der Filterung erkennen. Betrachtet man den unteren Grauwertbereich des Eingangsbildes jedoch genauer (siehe Abbildung 4.9(c)), so fällt auf, dass dieser Bereich durch den Shutter abgedeckt wurde. Damit sind hier keine klinisch relevanten Informationen enthalten. Zur besseren Visualisierung wurde in Abbildung 4.12(b) zusätzlich das Histogramm des gesamten Eingangsbildes (grau) sowie das des klinisch relevanten Bereiches (rot) dargestellt. Unter klinisch relevant ist in diesem Zusammenhang die Region des Bildes zusammengefasst, welche sich außerhalb des Shutterbereiches befindet. Die logarithmierten Grauwerte dieses Bereiches erstrecken sich auf einem Intervall von $[1,8 ; 4,1]$.

Führt man auf der Basis dieser Rauschschätzung gemäß Gleichung (4.20) und (4.21) eine Abschätzung der Verbesserung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses durch, dann erhält man für fluoroskopische Aufnahmen den in Abbildung 4.13 dargestellten Verbesserungen um bis zu 10 dB und mehr.

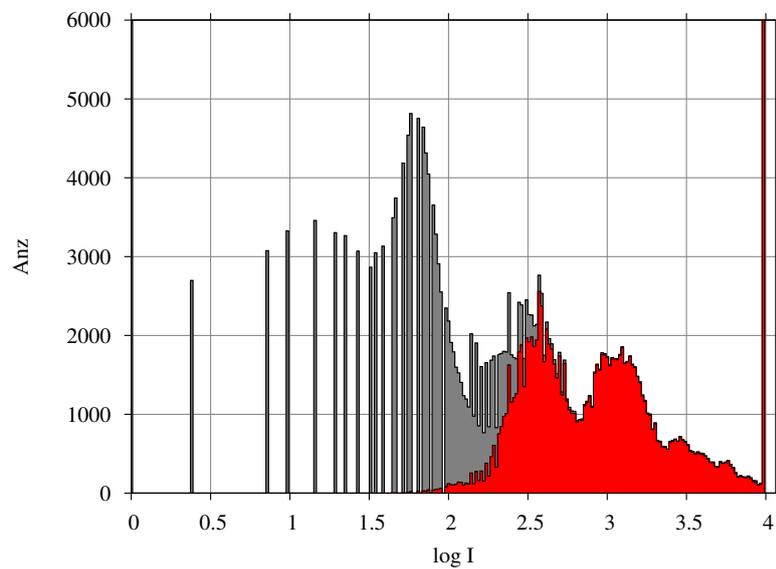
Daraus kann man erkennen, dass die multiskalare bilaterale Filterung für reguläre Bild-

inhalte eine deutliche Verringerung der Rauschamplitude erzielt.

Ein letzter Aspekt, welcher sich quantitativ nicht direkt greifen lässt, hier aber dennoch erwähnt werden soll, ist die Ausbildung von zeitabhängigen Artefakten. Darunter versteht man zum Beispiel kleine zusammenhängende Flächen, die sich im Laufe der Sequenz zusammenhängend fortbewegen, obwohl sie keine relevanten Bildinformationen enthalten. Bei der Betrachtung von vielen Sequenzen ist eine solche artefaktartige Struktur nicht aufgefallen. Offenbar ist der simple Ansatz des bilateralen Filters robust genug, von solchen kleinen Strukturen nicht beeinflusst zu werden. Insbesondere wenn man noch einmal zurückblickt auf die Artefaktausbildungen der nichtlinearen Diffusion, kann dies als ein großer Fortschritt angesehen werden. Im Anhang auf der beiliegend CD befinden sich einige Fluoroskopie-Sequenzen zusammen mit einem Betrachter für die implementierte Filterung. Hier kann diese Eigenschaft näher beobachtet werden.



(a) Ergebnisse der Rauschschätzung für das ungefilterte und gefilterte Bild.



(b) Histogramme von gesamtem Bild und diagnostisch relevantem Teil.

Abbildung 4.12: Ergebnisse der Rauschschätzung vor und nach der Filterung mit dem multiskalaren bilateralen Filter (Parameter $\sigma_r = 0.4$, $\sigma_D = 1.0$).

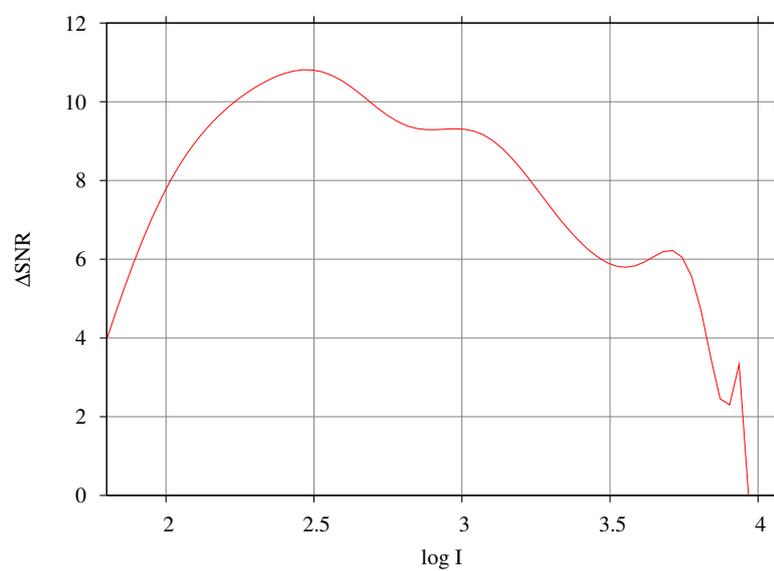


Abbildung 4.13: *Abgeschätzte Verbesserung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses für die Sequenz swallow.gip*

Kapitel 5

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde eine multiskalare bilaterale Filterungsmethode für Niedrigdosis-Röntgenbilder vorgestellt. Diese berücksichtigt die besonderen Eigenschaften des Rauschens in digitalen Röntgenbildern. Das Verfahren ist Einzelbild basiert und kann daher auch zur Filterung statischer Aufnahmen eingesetzt werden.

Aufgrund bestimmter Eigenschaften der Fluoroskopie als bildgebendes Verfahren kann das Rauschen nicht als unkorreliert angenommen werden. Um das Rauschverhalten auf der Gauß-Laplace-Pyramide dennoch berechnen zu können bietet sich die Autokorrelationsfunktion an. Auf diese Weise kann man die Abschwächungsfaktoren des Rauschens von einer Gauß- oder Laplace-Pyramidenebene zur nächsten bestimmen.

Weiterhin wurde die von Philips bereitgestellte Rauschschätzung bewertet und deren Abhängigkeit in Bezug auf Strukturen im Bild untersucht. Eine zuverlässige Rauschschätzung ist insbesondere für die angemessene Behandlung von signalabhängigem Rauschen von Bedeutung.

Die multiskalare bilaterale Filterung an sich beruht auf der Idee, eine die Filterung steuernde Pyramide zu erzeugen, bevor die Filterkoeffizienten anhand dieser Kontrollpyramide berechnet werden. Ein Kontrollbild bestimmt daher die Deformation des gaußschen Filterkerns. Die Erstellung dieser Kontrollstruktur beinhaltet zunächst die Normierung auf signalabhängiges Rauschen, sowie eine den Eigenschaften der bilateralen Filterung angepassten Vorprozessierung in Form des bedingten Summen-Filters.

Ein optisch guter Eindruck kann bei einer Verbesserung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses von etwa 5 dB für statische Aufnahmen und 6 bis ca. 10 dB für fluoroskopische Sequenzen erzielt werden. Weiterhin zeigen sich durch die multiskalare bilaterale

Filterung keine zeitliche Artefakte, die insbesondere den Qualitätseindruck von Sequenzen stark verringern können.

5.1 Diskussion

Die Bewertung der Rauschschätzung konnte aufgrund fehlender fluoroskopischer Phantomaufnahmen nur für statische Aufnahmen durchgeführt werden. Für stärkere Rauschleistungen ist die korrekte Funktion der Schätzung nicht bestätigt. Der konstante visuelle Eindruck der Filterung über den gesamten (medizinisch relevanten) Dosisbereich spricht zwar dafür, eine quantitative Bewertung wäre dennoch wünschenswert gewesen.

Darüber hinaus hätten diese fluoroskopischen Phantomaufnahmen eine zuverlässige, quantitative Auswertung der Filterungsergebnisse gestattet. Die Verbesserung des Signal-zu-Rausch Verhältnisses kann für dynamische Aufnahmen bisher nur mit Hilfe der Rauschschätzung bestimmt werden.

Die Autokorrelationsfunktion wurde für einen Detektortyp bestimmt und die Ergebnisse aus diesen Messungen wurden für die multiskalare bilaterale Filterung als konstanter Gewichtungsfaktor bei der Entwicklung der Standardabweichung auf der Pyramide fest implementiert. Hier sind noch Fragen offen, inwiefern die Autokorrelationsfunktion vom Detektortyp abhängig ist. Bedingt durch unterschiedliche Aufnahmetechniken sind hier aber starke Unterschiede zu erwarten. Weiterhin wurde die Ortsabhängigkeit der *AKF* vernachlässigt. Eine nähere Untersuchung könnte Aussagen über eventuell vorzunehmende örtliche Anpassungen und deren Auswirkungen auf die räumliche Konstanz der Filterung liefern.

5.2 Ausblick

Diese Arbeit gibt noch Raum für weitere Untersuchungen. Es besteht zum Beispiel die Möglichkeit, nicht die Bandpassbilder, sondern die rekonstruierten Tiefpassbilder zu filtern. Damit kann man auf eine Anpassung der Kontrollpyramide an die Eigenschaften der bilateralen Filterung gegebenenfalls verzichten. Ein Mehraufwand an Rechenleistung dürfte hierfür nicht erforderlich sein.

Um den Schärfeeindruck der gefilterten Bilder bei der bilateralen Filterung zu erhöhen, könnte man die Deformation des Gauß-Filterkerns bei einer ausreichend hohen Grau-

wertdifferenz bis hin zu einem Filterkern mit Hochpasscharakteristik vollziehen. Dazu muss die eingesetzte Ähnlichkeitsfunktion so modifiziert werden, dass hohe Grauwertdifferenzen negative Koeffizienten erzeugen.

Ein weiterer, interessanter Ansatz könnte auch aus dem „*multi resolution gradient adaptive filtering (MRGAF)*“ von Kunz et al übernommen werden [11]. Die Summe der Filtermaskeneinträge des bilateralen Filters gibt Auskunft über lokale Strukturstärken. Je niedriger diese Summe ist, desto strukturierter ist ein Bereich. Hieran können sich detailverstärkende Verarbeitungsoperationen orientieren.

Anhang A

Diskretisierung der Diffusionsgleichung 1-D

Die Diffusionsgleichung für das Bild $I(\vec{x}, t)$, die Zeit t und den Diffusionskoeffizienten D lautet [16]:

$$\frac{\partial I(\vec{x}, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(D \cdot \nabla I(\vec{x}, t)) \quad (\text{A.1})$$

Für den Fall der nichtlinearen Diffusion ist der Diffusionskoeffizient abhängig vom Bildinhalt, genauer gesagt vom Betrag des Gradienten des regularisierten Eingangsbildes $I_\sigma = I * h_{TP}$.

$$\frac{\partial I(\vec{x}, t)}{\partial t} = \operatorname{div}\left(D\left(|\nabla I_\sigma(\vec{x}, t)|\right) \cdot \nabla I(\vec{x}, t)\right) \quad (\text{A.2})$$

Geht man von einem eindimensionalen Eingangsbild aus, wird \vec{x} zu x und (A.2) vereinfacht sich mit $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ zu:

$$\partial_t I(x, t) = \partial_x \left(D(|\partial_x I_\sigma(x, t)|) \partial_x I(x, t) \right) \quad (\text{A.3})$$

Das Bild werde nun sowohl örtlich als auch zeitlich diskretisiert aufgefasst. Somit ist $x_i = i \cdot h$ die diskrete Ortskoordinate und $t_k = k \cdot \tau$ die diskrete Zeitkoordinate mit $1 \leq i \leq W, k \in \mathbb{N}_0$, wobei W die Bildgröße beschreibt. Der Gitterabstand im Bild ist damit h und der zeitliche Abstand ist τ . Für eine kompaktere Schreibweise seien weiterhin definiert:

$$I_i^k := I(x_i, t_k) \quad \text{mit } 1 \leq i \leq W, t \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{A.4a})$$

$$D_i^k := D\left(|\partial_x I_\sigma(x_i, t_k)|^2\right) \quad \text{mit } 1 \leq i \leq W, t \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{A.4b})$$

Die Diskretisierung der partiellen zeitlichen Ableitung ist damit:

$$\partial_t I(x_i, t_k) \approx \frac{I_i^{k+1} - I_i^k}{\tau} \quad (\text{A.5})$$

Die rechte Seite von Gleichung (A.3) wird im Folgenden Schrittweise diskretisiert, beginnend mit der äußeren partiellen Ableitung. Dazu wird die zentrale Differenz mit der Breite h auf vorübergehend genutzte Zwischengitterplätze gebildet.

$$\frac{I_i^{k+1} - I_i^k}{\tau} \approx \partial_x (D_i^k \cdot \partial_x I_i^k) \quad (\text{A.6a})$$

$$\approx \frac{1}{h} \left(D_{i+\frac{1}{2}}^k \cdot \partial_x I_{i+\frac{1}{2}}^k - D_{i-\frac{1}{2}}^k \cdot \partial_x I_{i-\frac{1}{2}}^k \right) \quad (\text{A.6b})$$

Die inneren partiellen Ableitungen führen durch erneute Bildung der zentralen Differenz mit der Breite h auf die regulären Gitterplätze zurück. Für die Diffusionskoeffizienten D nähert man die Ergebnisse für die Zwischengitterplätze durch Bildung des arithmetischen Mittels der Diffusionskoeffizienten für die benachbarten Gitterplätze.

$$\frac{I_i^{k+1} - I_i^k}{\tau} \approx \frac{1}{h} \left(\frac{D_{i+1}^k + D_i^k}{2} \cdot \frac{I_{i+1}^k - I_i^k}{h} - \frac{D_{i-1}^k + D_i^k}{2} \cdot \frac{I_i^k - I_{i-1}^k}{h} \right) \quad (\text{A.7a})$$

$$= \frac{D_{i+1}^k + D_i^k}{2h^2} (I_{i+1}^k - I_i^k) + \frac{D_{i-1}^k + D_i^k}{2h^2} (I_{i-1}^k - I_i^k) \quad (\text{A.7b})$$

Definiert man die Nachbarschaft von i mit $\mathcal{N}(i)$, wofür im eindimensionalen Fall $\mathcal{N}(i) = \{i-1, i+1\}$ gilt, dann kann man (A.7b) vereinfachen zu:

$$\frac{I_i^{k+1} - I_i^k}{\tau} \approx \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{D_j^k + D_i^k}{2h^2} (I_j^k - I_i^k) \quad (\text{A.8})$$

Anhang B

Zusatzbilder

Im folgenden Abschnitt sind zur Visualisierung der untersuchten Methoden weitere Bilder dargestellt.

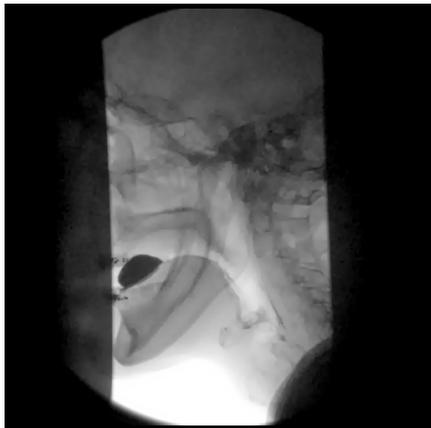
B.1 Explizites Schema nichtlineare Diffusion



(a) $k = 1$



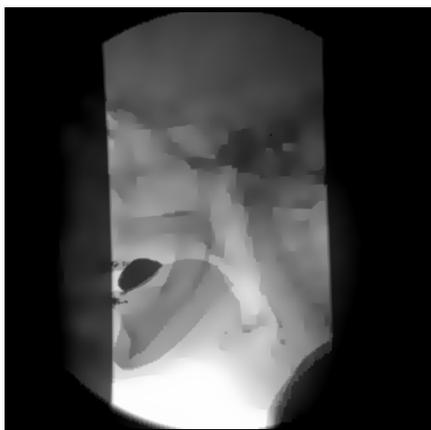
(b) $k = 5$



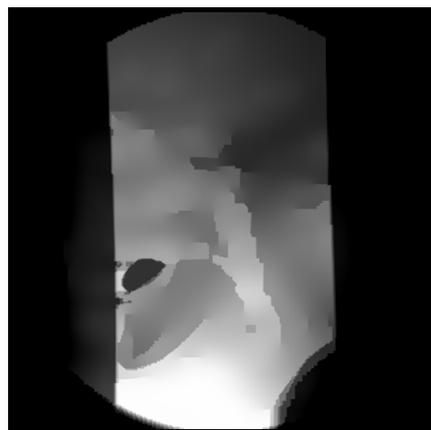
(c) $k = 10$



(d) $k = 50$



(e) $k = 100$



(f) $k = 500$

Abbildung B.1: Die Standardabweichung des Rauschens liegt konstant bei $\sigma = 40$ für das mit einem 3×3 Binomialfilter regularisierte Bild, der Zeitschrittgrößenfaktor liegt auf dem Maximalwert von $\tau = 0,25$. Die Anzahl der Iterationen k variiert.

B.2 Semi-implizites Schema nichtlineare Diffusion



(a) $\tau = 1$



(b) $\tau = 5$



(c) $\tau = 10$



(d) $\tau = 50$



(e) $\tau = 100$



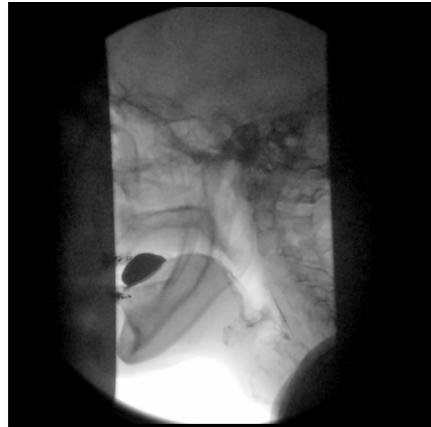
(f) $\tau = 500$

Abbildung B.2: Die Standardabweichung des Rauschens liegt konstant bei $\sigma = 40$ für das mit einem 3×3 Binomialfilter regularisierte Bild, die Zeitschrittgröße τ variiert.

B.3 Bilaterale Filterung



(a) $\sigma_R = 100, 0, \sigma_D = 1, 0$



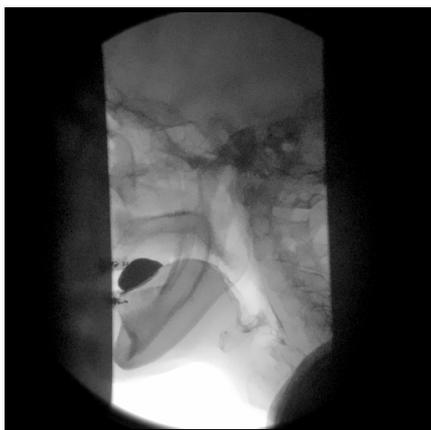
(b) $\sigma_R = 300, 0, \sigma_D = 1, 0$



(c) $\sigma_R = 100, 0, \sigma_D = 3, 0$



(d) $\sigma_R = 300, 0, \sigma_D = 3, 0$



(e) $\sigma_R = 100, 0, \sigma_D = 5, 0$



(f) $\sigma_R = 300, 0, \sigma_D = 5, 0$

Abbildung B.3: Variation der beiden Parameter σ_R für photometrische Ähnlichkeit und σ_D für räumliche Nähe.

Aufnahme	Bildkategorie	Anodenspannung [kV]	Ladung
235	Phantom	70	$4 \cdot C_0$
236	s.o.	70	$1 \cdot C_0$
237	s.o.	70	$2 \cdot C_0$
238	s.o.	70	$4 \cdot C_0$
239	s.o.	70	$8 \cdot C_0$
240	s.o.	70	$16 \cdot C_0$
241	s.o.	70	$32 \cdot C_0$
242	s.o.	70	$64 \cdot C_0$
243	Phantom	70	$4 \cdot C_0$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
260	s.o.	70	$4 \cdot C_0$
261	Stufengraukeil	70	$4 \cdot C_0$
262	s.o.	70	$4 \cdot C_0$
263	s.o.	70	$4 \cdot C_0$

Tabelle B.1: Aufnahmedaten für erstellte Testaufnahmen

B.4 Testaufnahmen

Für die Bewertung der Ergebnisse der eingesetzten Rauschschätzung sind mehrere Testaufnahmen erstellt worden. Im Text sind diese mit ihrer laufenden Nummer (235 bis 263) referenziert. Hier soll nun ein Überblick über die Erstellung, den Bildinhalt und die verfolgte Absicht gegeben werden.

Die erste Klasse von erstellten Aufnahmen wird im Folgenden als *Phantomaufnahmen* bezeichnet, da hierfür so genannte Phantome benutzt worden sind. Dies sind menschliche Extremitäten bestehend aus Hand und Fuß. Die hierin enthaltenen Knochenstrukturen sollen für den Rauschschätzer eine möglichst realistische Aufnahme simulieren und Rückschlüsse auf das Verhalten der Schätzung bei vorhandener Bildstruktur ermöglichen.

Für die zweite Klasse von Aufnahmen wurden Stufengraukeile erzeugt. Hierfür wurden Aluminium- und Plexiglas Treppen aufgenommen. Durch die so entstehenden Bereiche weitgehend homogener Belichtung sind Messungen im Bild in ausgewählten Regionen möglich.

Die Bilder 250 und 259 sind in der Bewertung des Rauschschätzers ausgelassen worden, da sie in den Differenzbildern zum gemittelten Bild deutliche Strukturen aufwiesen.

Anhang C

Inhalt der CD

Die CD im Anhang dieser Arbeit beinhaltet folgende Daten:

- Die Diplomarbeit als Datei im *pdf*-Format,
- die referenzierten Quellen, soweit verfügbar, ebenfalls im *pdf*-Format,
- die Applikation Dali mit der implementierten multiskalaren bilateralen Filterung,
- sowie einige klinische Sequenzen für Testzwecke.

Nähere Informationen zur Installation befinden sich auf der CD.

Anhang D

Symbole

Symbol	Bedeutung
μ	Schwächungskoeffizient
d	Dicke eines durchleuchteten Materials
λ	Erwartungswert Poisson-Verteilung
σ	Standardabweichung
η	Wirkungsgrad
N	Höchste Ebene der Gauß- bzw. Laplace-Pyramide
\vec{x}	Ortskoordinate innerhalb eines Bildes
$\vec{\xi}$	Ortskoordinate innerhalb einer Filtermaske
r	Radius einer Filtermaske
j	Flux
Φ	Flussfunktion
D	Diffusionskoeffizient
$S()$	Ähnlichkeitsfunktion
σ_D	Breite des Tiefpassfilterkerns bei bilateralem Filter
σ_R	Parameter der Ähnlichkeitsfunktion
c	Konzentration
τ	Zeitschrittgröße
E	Einheitsmatrix
A	Filtermatrix
R	Region im Bild
$s(n)$	Schwächungskoeffizient für n-te Laplace-Ebene
$I[\vec{x}]$	Örtlich diskretisierte Bilddaten
I'	Unlogarithmiertes (Bild-)Signal/gefiltertes Bild

I_σ	Regularisierte Version des Bildes I
I^k	Bild zum „Zeitpunkt k “
ϵ	Rauschsignalanteil (logarithmiert)
ϵ'	Rauschsignalanteil (unlogarithmiert)
Q	Anzahl
G_n	n -te Ebene der Gauß-Pyramide
L_n	n -te Ebene der Laplace-Pyramide
N_n	Normalisiertes Bild auf n -ter Pyramidenebene
N'_n	Kotrollbild auf n -ter Pyramidenebene
\mathcal{D}	Definitionsbereich
\mathcal{W}	Wertebereich
<hr/>	
h_{TP}	Filterkern mit Tiefpasscharakteristik
H_{TP}	Transferfunktion des Filterkerns h_{TP}
h_{BP}	Filterkern mit Bandpasscharakteristik
h_E	Filterkern mit Allpasscharakteristik
b_k	Binomialfilterkern k -ter Ordnung
h_{BL}	Filterkern des bilateralen Filters
<hr/>	
<code>reduce ()</code>	Reduce-Operator
<code>expand ()</code>	Expand-Operator
\downarrow_2	Unterabtastung um Faktor 2
\uparrow_2	Überabtastung um Faktor 2
$E(X)$	Erwartungswert der Zufallsvariablen X
Var	Varianz
Cov	Kovarianz
φ_{XX}	Autokorrelationsfunktion der Zufallsvariablen X
∂_x	Partielle Ableitung in x -Richtung
∇	Nabla-Operator $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$
div	Divergenzoperator $\text{div}(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} u_i$
$\text{Grad}_n^{x_k}$	Helligkeitsgradient auf n -ter Pyramidenebene in Richtung x_k
sgn	Signumfunktion
$\text{SNR}(I)$	Signal-zu-Rauschverhältnis

Literaturverzeichnis

- [1] AACH, Til ; KUNZ, Dietmar: Multiscale Linear/Median Hybrid Filters for Noise Reduction in Low Dose X-Ray Images. In: *ICIP (2)*, 1997, S. 358–361
- [2] AACH, Til ; KUNZ, Dietmar ; FLORENT, Raoul ; MARKRAM-EBEID, Shèrif: Noise Reduction and Image Enhancement Algorithms for Low-Dose X-Ray Fluoroscopy. In: LEHMANN, Thomas (Hrsg.) ; SCHOLL, Ingrid (Hrsg.) ; SPITZER, Klaus (Hrsg.): *Bildverarbeitung für die Medizin*. Aachen : Verlag d. Augustinus Buchhandlung, 1996, S. 95–100
- [3] BAJCSY, Ruzena ; TAVAKOLI, Mohamad: Image Filtering – A Context Dependent Process. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 22 (1975), S. 463–474
- [4] BARASH, Danny. *Bilateral Filtering and Anisotropic Diffusion: Towards a Unified Viewpoint*. 2000
- [5] BARASH, Danny ; ISRAELI, Moshe ; KIMMEL, Ron: An Accurate Operator Splitting Scheme for Nonlinear Diffusion Filtering. In: *Lecture Notes in Computer Science* 2106 (2001), S. 281–309
- [6] BOVIC, Al (Hrsg.): *Handbook of Image and Video Processing*. San Diego : Academic Press, 2000. – ISBN 0–12–119790–5
- [7] BURT, Peter J. ; ADELSON, Edward H.: The Laplacian Pyramid as a compact image code. In: *IEEE Transactions on Communications* COM-31,4 (1983), S. 532–540
- [8] BUSHBERG, Jerrald T. ; SEIBERT, J. A. ; LEIDHOLDT, Edwin M. ; BOONE, John M.: *The Essential Physics of Medical Imaging*. Lippincott Williams & Wilkins, 2002. – ISBN 0683301187
- [9] DÖSSEL, Olav: *Bildgebende Verfahren in der Medizin*. 1. Berlin : Springer, 2000. – ISBN 3–540–66014–3
- [10] JÄHNE, Bernd: *Digitale Bildverarbeitung*. 5., überarb. und erw. Auflage. Berlin : Springer, 2002. – ISBN 3–540–41260–3

-
- [11] KUNZ, Dietmar ; ECK, Kai ; FILLBRANDT, Holger ; AACH, Til: A nonlinear multi-resolution gradient adaptive filter for medical images. In: *SPIE Conf. Medical Imaging 2003: Image Processing* (2003)
- [12] MESCHÉDE, Dieter ; VOGEL, Helmut: *Gerthsen Physik*. 21., völlig neubearbeitete Auflage. Berlin : Springer, 2002. – ISBN 3–540–42024–X
- [13] PERONA, Pietro ; MALIK, Jitendra: Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion. In: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 12 (1990), S. 629–639
- [14] TOMASI, Carlo ; MANDUCHI, Roberto: Bilateral Filtering for Gray and Color Images. In: *ICCV*, 1998, S. 839–846
- [15] WEERATUNGA, Sisira K. ; KAMATH, Chandrika: PDE-based Non-linear Diffusion Techniques for Denoising Scientific and Industrial Images: an Empirical Study. (2001)
- [16] WEICKERT, Joachim: *Anisotropic Diffusion in Image Processing*. Stuttgart : Teubner-Verlag, 1998. – ISBN 3–519–02606–6
- [17] WEICKERT, Joachim ; HAAR ROMÉY, Bart M. ; VIERGEVER, Max A.: Efficient and Reliable Schemes for Nonlinear Diffusion Filtering. In: *IEEE Transactions on Image Processing* 7 (1998), S. 398–410

Index

A

Additives Operatoren Splitting	25
Aehnlichkeitsfunktion	25
Artefakte, zeitabhängige	55
Ausblick	59
Autokorrelationsfunktion	12

B

Belichtungsschwankungen	40
Bilaterales Filter	25
Schwächen	45
Binomialfilter	11

D

Diffusion	22
anisotrope, nichtlineare	22
Artefakte	31
explizites Schema	24
Rückwärtsdiffusion	29
semi-implizites Schema	24
Diffusionsfunktion	23, 27
Diskussion	59

E

Elektronenoptik	3
Expand-Operator	8

F

Ficksches Gesetz	22
Filterung, lineare	21
Flachdetektoren	3

Fluoroskopie	1
Flux	22

G

Gauß-Pyramide	8
Glättung, ideale	10

I

Implementierung	
bilaterales Filter	31
Diffusion	31

K

Kantenanhebung	28
Kontinuitätsgleichung	22
Kovarianz	12

L

Lambert-Beersches Gesetz	3
Laplace-Pyramide	7
Eigenschaften	9
Rauschverteilung	11
Rekonstruktion	9
Zerlegung	7
Look-Up-Table	46

M

Material und Methoden	4
MRGAF	27
Multiskalares bilaterales Filter	45
Ähnlichkeitsfunktion	48
Überblick	46

Anpassung Ähnlichkeitsfunktion ...	46	Regularisierung	23
Bedingtes Summen-Filter	49	Rekonstruktion, perfekte	10
Filterungsprozess	50	S	
Normierung auf Rauschen	47	Signal-zu-Rausch-Verhältnis	52
Rauschverteilung	47	Signumfunktion	49
Rekonstruktion	50	Skala	7
N		SNR	53
Niedrigdosis-Röntgenbilder	1	Strahlung	
O		Bremsstrahlung	2
Optimum, unverraushtes	52	charakteristische	2
P		T	
Poisson-Verteilung	6	Thomas-Algorithmus	24
R		U	
Röntgenbildverstärker	3	Ueberabtastung	8
Röntgenstrahlung	1	Unterabtastung	8
Rauschen	5	V	
Quanten-	6	Varianz	12
Rauschquellen	5	nach Logarithmierung	36
signalabhängiges	6	W	
Rauschschätzer	36	Wirkungsgrad	6
Verifizierung	38	Z	
Rechenzeiten	33	Zusammenfassung	58
Reduce-Operator	8		

Erklärungen

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere hiermit, die vorgelegte Arbeit in dem gemeldeten Zeitraum ohne fremde Hilfe verfasst und mich keiner anderen als der angegebenen Hilfsmittel und Quellen bedient zu haben.

Hamburg, 24. Juli 2006

Sperrvermerk

Die Einsicht der Arbeit ist bis zum 24. Juli 2008 gesperrt.

Weitergabeerklärung

Ich erkläre hiermit mein Einverständnis, dass das vorliegende Exemplar meiner Diplomarbeit oder eine Kopie hiervon für wissenschaftliche Zwecke verwendet werden darf.

Hamburg, 24. Juli 2006