Niederfrequenzasymptotik und Wirbelstrom–Approximation der verallgemeinerten dissipativen Maxwell–Gleichungen

Dissertation

zur
Erlangung des Grades
eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

Dem
Fachbereich Mathematik
der
Universität Duisburg–Essen

vorgelegt im Dezember 2005
von

Tiemo Pepperl

aus
Essen

Vorlage der Dissertation:	21.12.2005
Tag der Disputation:	27.03.2006
Vorsitzender des Prüfungsausschusses:	Prof. Dr. Markus Kunze, Essen
Gutachter:	Prof. Dr. Rainer Picard, Dresden Prof. Dr. Norbert Weck, Essen Prof. Dr. Karl-Josef Witsch, Essen

Danksagungen

Ich bedanke mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. N. Weck und Herrn Prof. Dr. K.-J. Witsch für die Betreuung meiner Dissertation, sowie bei meinen Kollegen Herrn Dr. D. Pauly und Herrn Dr. S. Bauer, die ebenfalls mit Rat und Diskussion zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Einleitung

Die Maxwell–Gleichungen, benannt nach James Clerk Maxwell (1831–1879), bilden die Grundlage des Elektromagnetismus. Sie beschreiben, dass ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld ein magnetisches Feld erzeugt und umgekehrt. Die Gleichungen sind im $\mathbb{R}^3$ von der Gestalt

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\ t}}\mathbf{D} = \mathbf{I} \quad , \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\ t}}\mathbf{B} = 0 \quad , \quad \mathrm{div}\mathbf{D} = \boldsymbol{\rho} \quad , \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \quad , \tag{1.1}$$

wobei die dabei auftretenden Größen die folgenden Bedeutungen haben:

$\mathbf{B}$	:	Induktionsflussdichte
$\mathbf{D}$	:	dielektrische Verschiebung
$\mathbf{E}$	:	elektrische Feldstärke
$\mathbf{H}$	:	magnetische Feldstärke
$\mathbf{I}$	:	Stromdichte
$\boldsymbol{\rho}$	:	Ladungsdichte

Die in den Gleichungen auftretenden Operatoren rot := $\nabla\times$ und div := $\nabla\cdot$ werden in der Vektoranalysis als Rotation und Divergenz bezeichnet. Mit den Materialeigenschaften Dielektrizität (ε), Permeabilität (μ) und Leitfähigkeit (σ) lassen sich weitere Zusammenhänge zwischen den Größen aufstellen, und zwar

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad , \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_{\mathrm{ext}} + \sigma\mathbf{E} \quad .$$

Unter der Annahme, dass diese Materialeigenschaften linear und orts–, aber nicht zeitabhängig sind, erhalten die Maxwell–Gleichungen die Form

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} - \varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\ t}}\mathbf{E} - \sigma\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\mathrm{ext}} \quad , \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} + \mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\ t}}\mathbf{H} = 0 \quad , \quad \mathrm{div}\varepsilon\mathbf{E} = \boldsymbol{\rho} \quad , \quad \mathrm{div}\mu\mathbf{H} = 0 \quad . \tag{1.2}$$

Macht man einen zeitharmonischen Ansatz (d.h. alle Größen sind von der Form $\mathbf{U}(x,t) = \exp(\mathrm{i}\omega t)U(x)$ mit einer gewissen Frequenz ω), so erhält man nach Division durch $\exp(\mathrm{i}\omega t)$ die Gleichungen

$$\mathrm{rot}H - \mathrm{i}\omega\varepsilon E - \sigma E = I_{\mathrm{ext}} \quad , \quad \mathrm{rot}E + \mathrm{i}\omega\mu H = 0 \quad , \quad \mathrm{div}\varepsilon E = \rho \quad , \quad \mathrm{div}\mu H = 0 \quad , \tag{1.3}$$

welche nur noch ortsabhängige Gleichungen sind. Die letzten beiden Gleichungen werden dann im Falle $\omega \neq 0$ unnötig für die Suche nach einer Lösung (E, H), weil sie implizit in den ersten beiden Gleichungen stecken. Da wir diese Gleichungen im Ganzraum betrachten wollen, benötigen wir keine Randbedingungen. Die Leitfähigkeit σ sollte einen beschränkten Träger besitzen, da das leitende Medium bzw. die leitenden Medien endliche Ausmaße haben.

Die Maxwell–Gleichungen können für Riemannsche Mannigfaltigkeiten, also auch speziell in den $\mathbb{R}^N$, verallgemeinert werden, was Hermann Weyl 1952 in [25] präsentiert. Dabei sind die auftretenden Größen Differentialformen (auch q–Formen genannt) und die Operatoren rot und div werden dann durch die Cartan'sche Ableitung d und die Co–Ableitung δ ersetzt. Die Materialeigenschaften ε, μ und σ sind entsprechend lineare Transformationen auf dem Raum der Differentialformen. Diese Verallgemeinerung der Maxwell–Gleichungen ist für den Fall $N = 3$ und $q = 1$ äquivalent zum klassischen, oben erwähnten Maxwell–System. Setzen wir rot := d und div := δ fest, so haben die Maxwell–Gleichungen in verallgemeinerter Form für $\omega \neq 0$ dann die Gestalt

$$\mathrm{div}H + \mathrm{i}\omega\varepsilon E + \sigma E = F \quad , \quad \mathrm{rot}E + \mathrm{i}\omega\mu H = G \quad . \tag{1.4}$$

Unser Ziel wird es in dieser Arbeit sein, die Lösung (E, H) dieses Gleichungssystems für vorgegebene Daten (F, G) in Potenzen von ω für kleine ω zu entwickeln, also eine Niederfrequenzasymptotik für die Lösung dieses Gleichungssystems aufzustellen. Wir folgen in dieser Arbeit sehr eng der Arbeit [11] von Dirk Pauly, welcher dieselbe Zielsetzung für $\sigma = 0$ (dem sogenannten nicht–dissipativen Fall) in Außengebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ verfolgt. Da diese beiden Probleme sehr eng verknüpft sind (siehe Abschnitt 2.1), ist es nicht verwunderlich, dass viele Dinge analog gehen. Jedoch ist diese Arbeit keine einfache Folgerung aus [11], da die Kopplung der entsprechenden statischen Gleichungen ($\omega = 0$) zusätzliche Schwierigkeiten mit sich bringt, sowie im zeitharmonischen Fall keine Untersuchung des Spektrums eines selbstadjungierten Operators mehr vorliegt. Die Daten (F, G) werden aus gewichteten L^2–Räumen kommen und die Koeffizienten ε und μ werden asymptotisch im Unendlichen mit der

Rate $r^{-\tau}$ ($\tau > 0$) gegen die Identität konvergieren.

Im zweiten Kapitel erarbeiten wir eine Fredholm–Theorie für den zeitharmonischen Fall. Dies geschieht über eine Lösungstheorie für Frequenzen ω aus der unteren Halbebene, eine a–priori–Abschätzung der Lösungen, das polynomiale Abklingen von Eigenlösungen zu reellen Frequenzen, sowie dem Prinzip der Grenzabsorption. Wir werden dann Daten $(F, G) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>\frac{1}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>\frac{1}{2}}$ behandeln können, die auf Kerne endlicher Dimension senkrecht stehen. Wir werden zeigen können, dass sich die Eigenwerte des entsprechenden Maxwell–Operators in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ nicht häufen können. Genügen ε und μ stärkeren Voraussetzungen (zweimal stetige Differenzierbarkeit), so können wir folgern, dass Eigenlösungen zu reellen Frequenzen exponentiell abklingen müssen. Im klassischen Fall kann Sebastian Bauer in [4] zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen Eigenlösungen sogar gar nicht auftreten können, was sich leider nicht auf beliebige N und q übertragen lässt. Dennoch ist es uns möglich, weitere Aussagen zu machen, im Falle weiterer Voraussetzungen an ε und μ mit Hilfe des Prinzips der eindeutigen Fortsetzbarkeit.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Lösungstheorie für den statischen Fall ($\omega = 0$). Durch das Auftreten der Leitfähigkeit σ sind die Gleichungen nicht entkoppelt, was uns dazu bewegt, das Ganzraumproblem in ein Innen– und ein Außenraumproblem mit Übergangsbedingungen für die Tangentialspur und Normalspur aufzuspalten. Wir können dabei zeigen, dass die Anzahl der Freiheitsgrade, die man beim Lösen des Innenraumproblems hat, genau der Anzahl der Bedingungen zum Lösen des Außenraumproblems entspricht, und diese immer eindeutig einzurichten sind. In der Behandlung der Außenraumprobleme treten die von Pauly in [11] aufgestellten Turmformen auf, die Produkte sogenannter „spherical harmonics" und Radiuspotenzen sind. Diese Turmformen können beim einmaligen statischen Lösen auftreten und können dafür sorgen, dass die statischen Lösungen mit einem Gewicht integrierbar sind, das niedriger als $s - 1$ ist, wenn die Daten mit Gewicht s integrierbar sind. Um den statischen Lösungsoperator iterieren zu können, wie wir es für den Ansatz einer Neumannschen Reihe tun wollen, werden wir ihn dann auf Daten verallgemeinern, die Turmformenanteile enthalten können. Um dies zu ermöglichen, müssen wir von ε und μ fordern, dass sie in einer Umgebung von Unendlich einmal stetig differenzierbar sind, sowie die Abklingrate τ entsprechend anpassen.

Die Niederfrequenzasymptotik im vierten Kapitel wird dann liefern, dass sich das Spektrum des Maxwell–Operators in ganz $\mathbb{R}$ nicht häufen kann, und dass für Daten (F, G) aus einem speziellen Datenraum die Lösungen ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F, G)$ für $\omega \to 0$ in gewichteten Normen gegen die Lösung des statischen Problems ${}_\sigma\mathcal{L}_0(F, G)$ konvergieren. Wir werden dann Unterräume dieses speziellen Datenraums identifizieren können, für die ein Potenzreihenansatz für ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F, G)$ in Potenzen von ω bis zu einer gewissen Ordnung durchführbar ist, sodass wir in Abhängigkeit von den Daten die Neumannsche Reihe als Approximation heranziehen können, die mit einer gewissen Konvergenzordnung gegen ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F, G)$ konvergiert. Unter der Bedingung eines nahe bei Unendlich homogenen Mediums werden wir anschließend auf unserem speziellen Datenraum Korrekturoperatoren einführen können, mit Hilfe derer wir die asymptotische Entwicklung bis zu einer gewissen Ordnung sogar auf unserem ursprünglichen Datenraum durchführen können.

Im fünften Kapitel werden wir dann ein Wirbelstrom–Problem betrachten, welches eine Approximation für das Maxwell–Problem sein soll. Auch hier werden wir eine Niederfrequenzasymptotik bestimmen können, und in der Lage sein, zu zeigen, dass diese in nullter Ordnung immer mit der des Maxwell–Problems übereinstimmt, unter gewissen Voraussetzungen an die Daten sogar in erster Ordnung, aber nur für triviale Daten auch in zweiter Ordnung. Die Untersuchung dieses Wirbelstrom–Problems wurde inspiriert durch die entsprechenden Betrachtungen von Ammari, Buffa und Nédélec in [1] für den klassischen Fall. Die vorliegende Arbeit stellt bezüglich der Betrachtung des Wirbelstrom–Problems im Vergleich zur Arbeit [1] von Ammari, Buffa und Nédélec eine Korrektur und wesentliche Verbesserung der Ergebnisse dar, da Ammari, Buffa und Nédélec erstens davon ausgehen, dass die Lösungen (E, H) des Maxwell–Problems und des Wirbelstrom–Problems in eine Potenzreihe um ω entwickelt werden können, ohne dies zu beweisen, zweitens, weil sie auf die Einführung gewichteter L^2–Räume verzichten, wodurch einige Schlüsse falsch werden, drittens, weil ihre Voraussetzungen strenger und die Bedingungen an die Daten komplizierter formuliert sind, und viertens, weil sie nur den klassischen Fall behandeln, wohingegen wir den allgemeinen Fall beliebiger ungerader Raumdimension $N \geq 3$ behandeln können.

1.2 Bezeichnungen

Wir wollen die Bezeichnungen sehr stark an denen von PAULY in [11] halten, da sich dies aufgrund der Nähe der Thematiken einfach anbietet, und da es dem Leser dann leichter fällt, sich zwischen dieser Arbeit und der Arbeit von PAULY zu bewegen.

Grundlegendes

Es seien $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{C}$ die Mengen der positiven natürlichen, nicht negativen natürlichen, ganzen, reellen, positiven reellen und komplexen Zahlen. Weiterhin sei i die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$ und für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ seien $\mathrm{Re}\ z$, $\mathrm{Im}\ z$ und $\overline{z}$ der Realteil, Imaginärteil und die Konjugierte von z. Damit definieren wir die Mengen

$$\mathbb{C}_- := \big\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z \le 0 \big\} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{C}_+ := \big\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z \ge 0 \big\} \qquad .$$

Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ mit $|\cdot|$ und für $x, y \in \mathbb{C}^n$ seien

$$r(x) := |x| \qquad \text{und} \qquad x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \qquad .$$

Wenn x und y Elemente derselben Menge X sind, so bezeichnet das Kronecker–Symbol

$$\delta_{x,y} \quad := \quad \begin{cases} 1 & \text{, falls} \quad x = y \\ 0 & \text{, falls} \quad x \neq y \end{cases} \qquad .$$

Für Teilmengen U, V eines metrischen Raums bezeichnen wir mit $\overline{U}$ und ∂U den Abschluss und den Rand von U. Wir nennen U kompakt enthalten in V (in Zeichen: $U \Subset V$), falls $\overline{U} \subset V$ und $\overline{U}$ kompakt ist. Unter $\mathrm{dist}(U, V)$ verstehen wir den Abstand von U zu V.

Die Mengen $U(x, R)$, $K(x, R)$ und $S(x, R)$ repräsentieren die offene Kugel, abgeschlossene Kugel und die Sphäre um den Punkt x mit Radius R. S^{N-1} sei im Speziellen definiert als $S^{N-1} := S(0, 1) \subset \mathbb{R}^N$. Weiterhin definieren wir für den Spezialfall des $\mathbb{R}^N$

$$U(R) := U(0,R) \quad , \quad K(R) := K(0,R) \quad , \quad S(R) := S(0,R) \quad , \quad A(R) := \mathbb{R}^N \setminus K(R) \quad , \quad Z(r,R) := A(r) \cap U(R)$$

Für zwei Mengen X und Y sei $\mathrm{F}(X, Y)$ die Menge aller Abbildungen f mit Definitionsbereich $D(f) = X$ und Wertebereich $W(f) \subset Y$. Ist f eine Funktion aus $\mathrm{F}(X, Y)$, so stehen $N(f)$ und $\mathrm{supp}(f)$ für den Nullraum und den Träger von f. Mit $f|_U$ bezeichnen wir die Einschränkung von f auf die Teilmenge $U \subset X$. Die Funktionen $f, g \in F(\mathbb{R}^k, \mathbb{C}^n)$ erfüllen $f = \mathcal{O}(g)$ für $r \to \infty$ genau dann, wenn

$$\bigvee_{C>0} \quad \bigvee_{R>0} \quad \bigwedge_{x \in A(R)} \quad |f(x)| \le C \cdot |g(x)| \qquad .$$

Sind X und Y normierte Räume, so repräsentieren $L(X, Y)$ und $B(X, Y)$ die Mengen der linearen und der beschränkten linearen Operatoren von X nach Y. Bezeichnen X' und Y' die Dualräume von X und Y, so verstehen wir für einen linearen Operator $A \in L(X, Y)$ unter $A' \in L(Y', X')$ den konjugierten Operator. Mit $\mathrm{Id}_X \in L(X, X)$ bezeichnen wir die Identität auf X. Ist aus dem Kontext ersichtlich, um welchen Raum X es sich handelt, so lassen wir den Raumindex an der Identität auch schon mal wegfallen.

Sind X und Y Hilberträume, so verstehen wir unter $\bar{A} \in L(D(\bar{A}), Y)$ und $A^* \in L(D(A^*), X)$ den Abschluss und den adjungierten Operator eines Operators $A \in L(D(A), Y)$. Den Kommutator zweier Operatoren A und B bezeichnen wir mit

$$C_{A,B} := AB - BA \qquad .$$

Für Unterräume $V_1, \ldots, V_n$ eines Vektorraums V schreiben wir

$$V_1 + V_2 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{n} V_i \qquad , \qquad V_1 \dot{+} V_2 \quad \text{bzw.} \quad \sideset{}{^\bullet}\sum_{i=1,\ldots,n} V_i \qquad , \qquad V_1 \oplus V_2 \quad \text{bzw.} \quad \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$$

als die Summe, die direkte Summe und die orthogonale Summe der Vektorräume V_1 und V_2 bzw. $V_1, \ldots, V_n$. Im Falle der Letzteren muss natürlich ein Skalarprodukt auf V existieren. Mit $\mathrm{Lin}\ \{v_1, \ldots, v_n\}$ bezeichnen wir die lineare Hülle der Elemente $v_1, \ldots, v_n$ eines Vektorraums V.

Sind $(V_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{V_1}), \ldots, (V_n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{V_n})$ Hilberträume, so versehen wir den Hilbertraum $V_1 \times \ldots \times V_n$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), (\psi_1, \ldots, \psi_n)\rangle_{V_1 \times \ldots \times V_n} := \sum_{i=1}^{n} \langle\varphi_i, \psi_i\rangle_{V_i} \qquad .$$

Partielle Ableitungen nach mehreren Variablen fassen wir in der Multiindexschreibweise zusammen. Sei also $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ mit $N \in \mathbb{N}$, so verstehen wir unter $|\alpha| := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ die Ableitungsordnung der Ableitung

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_N^{\alpha_N} \qquad \text{mit} \qquad \partial_n := \frac{\partial}{\partial x_n} \qquad .$$

Der Gradient und der Laplace-Operator seien definiert als

$$\nabla := \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_N \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Delta := \sum_{i=1}^{N} \partial_i^2 \qquad .$$

Benutzen wir während einer Abschätzung eine Konstante c, so kann sich deren Wert von Schritt zu Schritt ändern, bleibt aber immer unabhängig von den genannten Werten.

Klassische Funktionenräume, Lebesgue– und Sobolev–Funktionenräume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet, $k \in \mathbb{N}_0$ und $l \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Damit definieren wir die klassischen Funktionenräume ($n \in \mathbb{N}$ sei hierbei beliebig)

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}^k(\Omega) &:= \big\{ f \in \mathrm{F}(\Omega, \mathbb{C}^n) : f \text{ ist } k\text{–mal stetig differenzierbar} \big\} \qquad , \\
\mathrm{C}^\infty(\Omega) &:= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{C}^k(\Omega) \qquad , \\
\mathrm{C}_0^l(\Omega) &:= \big\{ f \in \mathrm{C}^l(\Omega) : \operatorname{supp}(f) \Subset \Omega \big\} \qquad , \\
\mathrm{C}^l(\overline{\Omega}) &:= \big\{ f \in \mathrm{C}^l(\Omega) : f = \varphi|_\Omega \text{ mit } \varphi \in \mathrm{C}^l(\mathbb{R}^N) \big\} \qquad , \\
\mathrm{C}_0^l(\overline{\Omega}) &:= \big\{ f \in \mathrm{C}^l(\Omega) : f = \varphi|_\Omega \text{ mit } \varphi \in \mathrm{C}_0^l(\mathbb{R}^N) \big\} \qquad .
\end{aligned}$$

Ist λ das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^N$, so definieren wir auf $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ das Skalarprodukt sowie die dadurch induzierte Norm

$$\langle f, g\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)} := \int_\Omega f \cdot \overline{g} \, d\lambda \qquad \text{und} \qquad \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2 := \langle f, f\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \qquad .$$

Schließen wir nun $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ in der $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$-Norm ab, so erhalten wir den Raum der quadratintegrablen, Lebesgue–messbaren Funktionen

$$\mathrm{L}^2(\Omega) \quad := \quad \overline{\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)} \quad = \quad \big\{ f \in \mathrm{F}(\Omega, \mathbb{C}^n) : f \text{ ist Lebesgue–messbar und } \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} < \infty \big\} \qquad .$$

Als Nächstes führen wir gewichtete Lebesgue– und Sobolev–Räume mittels der Gewichtsfunktion $\rho := (1 + r^2)^{\frac{1}{2}}$ und der schwachen Ableitungen ein. Für $m \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{R}$ definieren wir die folgenden Räume mit den durch die entsprechenden Skalarprodukte induzierten Normen:

$$\mathrm{L}_s^2(\Omega) := \big\{ f \in \mathrm{F}(\Omega, \mathbb{C}^n) : \rho^s f \in \mathrm{L}^2(\Omega) \big\} \qquad \text{mit} \qquad \|f\|_{\mathrm{L}_s^2(\Omega)} := \|\rho^s f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \qquad , \tag{1.5}$$

$$\mathbf{H}_s^m(\Omega) := \big\{ f \in \mathrm{L}_s^2(\Omega) : \bigwedge_{|\alpha| \le m} \partial^\alpha f \in \mathrm{L}_s^2(\Omega) \big\} \qquad \text{mit} \qquad \|f\|_{\mathbf{H}_s^m(\Omega)}^2 := \sum_{|\alpha| \le m} \|\partial^\alpha f\|_{\mathrm{L}_s^2(\Omega)}^2 \qquad , \tag{1.6}$$

$$\mathrm{H}_s^m(\Omega) := \big\{ f \in \mathrm{L}_s^2(\Omega) : \bigwedge_{|\alpha| \le m} \partial^\alpha f \in \mathrm{L}_{s+|\alpha|}^2(\Omega) \big\} \qquad \text{mit} \qquad \|f\|_{\mathrm{H}_s^m(\Omega)}^2 := \sum_{|\alpha| \le m} \|\partial^\alpha f\|_{\mathrm{L}_{s+|\alpha|}^2(\Omega)}^2 \qquad . \tag{1.7}$$

Diese Räume sind mit ihren natürlichen Skalarprodukten Hilbert–Räume. Mit $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}_s^m(\Omega)$ bzw. $\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}_s^m(\Omega)$ bezeichnen wir den Abschluss von $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ bzgl. der $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_s^m(\Omega)}$– bzw. $\|\cdot\|_{\mathrm{H}_s^m(\Omega)}$–Norm. Im Falle $s = 0$ lassen wir den Index für das Gewicht s wegfallen.

Ableitungen von Funktionen aus $\mathrm{H}^m_s(\Omega)$ sind also mit einem Gewicht integrierbar, welches um die Ableitungsordnung höher ist als das Gewicht, mit dem die Funktion selbst integrierbar ist, während Ableitungen von Funktionen aus $\mathbf{H}^m_s(\Omega)$ mit demselben Gewicht integrierbar sind wie die Funktion selbst. Damit ist klar, dass für beschränkte Gebiete Ω für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{H}^m_s(\Omega) \quad = \quad \mathbf{H}^m(\Omega) \quad = \quad \mathrm{H}^m(\Omega) \quad = \quad \mathrm{H}^m_s(\Omega)$$

mit äquivalenten Normen gilt. Die Äquivalenzkonstanten hängen dabei von Ω, m und s ab. Wir definieren noch für $m \in \mathbb{N}_0$

$$\mathrm{H}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \Big\{ f \in \mathrm{F}(\Omega, \mathbb{C}^n) : \bigwedge_{\varphi \in \mathrm{C}^\infty_0(\Omega)} \varphi \cdot f \in \mathrm{H}^m(\Omega) \Big\} \qquad , \qquad \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \mathrm{H}^0_{\mathrm{loc}}(\Omega) \qquad ,$$
$$\mathrm{H}^m_{\mathrm{vox}}(\Omega) := \Big\{ f \in \mathrm{H}^m(\Omega) : \mathrm{supp}(f) \Subset \mathbb{R}^N \Big\} \qquad , \qquad \mathrm{L}^2_{\mathrm{vox}}(\Omega) := \mathrm{H}^0_{\mathrm{vox}}(\Omega) \qquad .$$

Offensichtlich gelten für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und für alle $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < t$

$$\mathrm{L}^2_s(\Omega) = \mathbf{H}^0_s(\Omega) = \mathring{\mathbf{H}}^0_s(\Omega) = \mathrm{H}^0_s(\Omega) = \mathring{\mathrm{H}}^0_s(\Omega) \quad , \quad \overset{(\circ)}{\mathbf{H}}{}^{m+1}_s(\Omega) \subset \overset{(\circ)}{\mathbf{H}}{}^m_s(\Omega) \quad , \quad \overset{(\circ)}{\mathrm{H}}{}^{m+1}_s(\Omega) \subset \overset{(\circ)}{\mathrm{H}}{}^m_s(\Omega) \quad , \tag{1.8}$$
$$\overset{(\circ)}{\mathrm{H}}{}^m_s(\Omega) \subset \overset{(\circ)}{\mathbf{H}}{}^m_s(\Omega) \subset \overset{(\circ)}{\mathrm{H}}{}^m_{s-m}(\Omega) \quad , \quad \mathring{\mathbf{H}}^m_t(\Omega) \subset \mathring{\mathbf{H}}^m_s(\Omega) \quad , \quad \mathring{\mathrm{H}}^m_t(\Omega) \subset \mathring{\mathrm{H}}^m_s(\Omega) \quad , \tag{1.9}$$
$$\mathrm{H}^m_{\mathrm{vox}}(\Omega) \subset \mathbf{H}^m_t(\Omega) \subset \mathbf{H}^m_s(\Omega) \subset \mathrm{H}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad , \quad \mathrm{H}^m_{\mathrm{vox}}(\Omega) \subset \mathrm{H}^m_t(\Omega) \subset \mathrm{H}^m_s(\Omega) \subset \mathrm{H}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad . \tag{1.10}$$

Im Falle $\Omega = \mathbb{R}^N$ lassen wir die Gebietsabhängigkeit bei allen Funktionenräumen wegfallen.

Mannigfaltigkeiten und Differentialformen

Als Nächstes wollen wir die Mannigfaltigkeiten– und Differentialformenbegriffe zusammenstellen, die wir in dieser Arbeit benötigen. Ausführlicheres zu diesem Thema ist bei Bishop und Goldberg in [5] oder bei Jänich in [6] nachzulesen.

Im Folgenden sei M eine reelle, unendlich oft differenzierbare, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension N und $M' \subset M$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der gleichen Dimension mit $\overline{M'} \subset M$. $\mathrm{T}_x M$ bezeichnet für $x \in M$ den Vektorraum der Derivationen im Punkte x, den sogenannten Tangentialraum in x. Eine Derivation in x ist eine lineare Abbildung

$$D_x \;:\; \mathrm{C}^\infty(x) := \Big\{ f \in \mathrm{C}^\infty(U_x) : U_x \text{ ist offene Umgebung von } x \Big\} \;\longrightarrow\; \mathbb{R} \qquad ,$$

welche die folgende Produktregel erfüllt:

$$\bigwedge_{f,g \in \mathrm{C}^\infty(x)} \qquad D_x(f \cdot g) = D_x(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot \mathrm{D}_x(g) \qquad .$$

Das Tangentialbündel nennen wir $\mathrm{T}M$. Der Raum $\mathrm{A}^q(x)$ bezeichnet für $q \in \mathbb{Z}$ den komplexen Vektorraum der kovarianten alternierenden Tensoren des Ranges q in x, welche wir mit dem Begriff der q–Formen abkürzen, und $\mathrm{A}^q(M)$ bezeichnet sein Bündel. Für $\Phi \in \mathrm{A}^q(M)$ und $x \in M$ verstehen wir unter Φ_x das entsprechende Element von $\mathrm{A}^q(x)$ und unter $\Phi|_{M'}$ das entsprechende Element von $\mathrm{A}^q(M')$. Man beachte $\mathrm{A}^q(M) = \{0\}$ für $q \in \mathbb{Z} \backslash \{0, \ldots, N\}$. Die Elemente von $\mathrm{A}^0(M)$ sind gerade die komplexwertigen Funktionen auf M. Wir erklären punktweise das äußere Produkt, welches aus einer q–Form und einer p–Form eine $(q+p)$–Form macht,

$$\wedge \;:\; \mathrm{A}^q(M) \times \mathrm{A}^p(M) \;\longrightarrow\; \mathrm{A}^{q+p}(M) \qquad \text{mit} \qquad \bigwedge_{\Phi \in \mathrm{A}^q(M)} \quad \bigwedge_{\Psi \in \mathrm{A}^p(M)} \quad \Phi \wedge \Psi = (-1)^{p \cdot q} \Psi \wedge \Phi \qquad .$$

Mit einer Karte (U, h) um x erhalten wir Tangenten $\partial^h_j \in \mathrm{T}U$ durch die Vorschrift $\partial^h_j(\varphi) := \big(\partial_j(\varphi \circ h^{-1})\big) \circ h$. Die Menge $\{\partial^h_1, \ldots, \partial^h_N\}$ bildet eine Basis von $\mathrm{T}_x U$ für alle $x \in U$. Es gilt $\partial^h_j(h_l) = \delta_{j,l}$.

Sind M_1 und M_2 zwei Mannigfaltigkeiten und $f \in \mathrm{C}^\infty(M_1, M_2)$, so definieren wir das Differential $\mathrm{d}f \;:\; \mathrm{T}M_1 \;\longrightarrow\; \mathrm{T}M_2$ punktweise durch $\mathrm{d}_x f \;:\; \mathrm{T}_x M_1 \;\longrightarrow\; \mathrm{T}_x M_2$ mit

$$\bigwedge_{t_x \in \mathrm{T}_x M_1} \quad \bigwedge_{\varphi \in \mathrm{C}^\infty(f(x))} \quad \mathrm{d}_x f(t_x)(\varphi) := t_x(\varphi \circ f) \qquad .$$

Ist (U, h) eine Karte von M_1 und $M_2 = \mathbb{R}^n$, so liefert dies $\mathrm{d}f(\partial_j^h) = \partial_j^h f \in \mathbb{R}^n$, wobei wir $\mathrm{T}_{f(x)}\mathbb{R}^n$ über $\partial_i^{\mathrm{Id}} \widehat{=} e^i$ mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren (e^i ist dabei der i–te Einheitsvektor). Für eine Karte gilt also $\mathrm{d}h^j(\partial_i^h) = \delta_{i,j}$.

Die Kartendifferentiale $\{\mathrm{d}h^1, \ldots, \mathrm{d}h^N\}$ bilden für jedes $x \in U$ eine Basis von $\mathrm{A}^1(x)$. Definieren wir $\mathcal{I}(q, N) := \{I := (i_1, \ldots, i_q) \in \mathbb{N}^q : 1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq N\}$ und $\mathrm{d}h^I := \mathrm{d}h^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}h^{i_q}$ für $I \in \mathcal{I}(q, N)$, so erhalten wir mit der Menge $\{\mathrm{d}h^I : I \in \mathcal{I}(q, N)\}$ eine Basis von $\mathrm{A}^q(x)$ für $x \in U$. Dies ermöglicht es uns, jedes $\Phi \in \mathrm{A}^q(M)$ eindeutig lokal darzustellen als

$$\Phi|_U = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \Phi_I \, \mathrm{d}h^I \qquad \text{mit} \qquad \Phi_I \; : \; U \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad \Phi_I = \Phi(\partial_{i_1}^h, \ldots, \partial_{i_q}^h) \qquad .$$

Dadurch sind wir in der Lage, Begriffe wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit auch für q–Formen einzuführen: Wir nennen $\Phi \in \mathrm{A}^q(M)$ stetig bzw. l–mal differenzierbar, falls dies lokal für alle Komponentenfunktionen Φ_I und alle Karten h gilt. Für $l \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ definieren wir die Räume

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}^{l,q}(M) &:= \big\{\Phi \in \mathrm{A}^q(M) : \Phi \text{ ist } l\text{–mal stetig differenzierbar}\big\} \qquad , \\
\mathrm{C}_0^{l,q}(M) &:= \big\{\Phi \in \mathrm{C}^{l,q}(M) : \mathrm{supp}(\Phi) \Subset M\big\} \qquad , \\
\mathrm{C}_0^{l,q}(\overline{M'}) &:= \big\{\Phi \in \mathrm{C}^{l,q}(M') : \Phi = \Psi|_{M'} \text{ mit } \Psi \in \mathrm{C}_0^{l,q}(M)\big\} \qquad .
\end{aligned}$$

Dabei definieren wir den Träger einer Form $\Phi \in \mathrm{A}^q(M)$ als $\mathrm{supp}(\Phi) := \overline{\{x \in M : \Phi_x \neq 0\}} \subset M$.

Der Hodgesche Sternoperator $* \; : \; \mathrm{A}^q(M) \longrightarrow \mathrm{A}^{N-q}(M)$ ist ein Isomorphismus mit der folgenden Eigenschaft: Ist $\{v^1, \ldots, v^N\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathrm{A}^1(x)$ bzw. $\mathrm{A}^1(U)$, so gilt für $I := (i_1, \ldots, i_q)$ mit $v^I := v^{i_1} \wedge \cdots \wedge v^{i_q}$

$$*v^I = \sigma(I, I') v^{I'} \qquad ,$$

wobei $I' := (i'_1, \ldots, i'_{N-q}) \in \mathcal{I}(N-q, N)$ die Eigenschaft $\{i_1, \ldots, i_q\} \cup \{i'_1, \ldots, i'_{N-q}\} = \{1, \ldots, N\}$ erfüllt, und $\sigma(I, I')$ das Vorzeichen der Permutation angibt, die die Menge $\{i_1, \ldots, i_q, i'_1, \ldots, i'_{N-q}\}$ in die Menge $\{1, \ldots, N\}$ überführt. Desweiteren besitzt der Hodgesche Sternoperator die Eigenschaften

- $\displaystyle\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{A}^q(M)} \quad ** = (-1)^{q \cdot (N-q)} \mathrm{Id}_{\mathrm{A}^q(M)} \qquad ,$
- $\displaystyle\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{A}^q(M)} \; \bigwedge_{\Psi \in \mathrm{A}^{N-q}(M)} \quad \Phi \wedge \Psi = (*\Phi) \wedge (*\Psi) \qquad ,$
- $\displaystyle\bigwedge_{\varphi \in \mathrm{A}^0(M)} \; \bigwedge_{\Phi \in \mathrm{A}^q(M)} \quad *(\varphi \cdot \Phi) = \varphi * \Phi \qquad .$

Man beachte, dass der Hodgesche Sternoperator sowohl von der Mannigfaltigkeit M, als auch vom Rang q abhängig ist. Wir wollen ihn jedoch nicht mit Indizes versehen, da der jeweilige Kontext ergibt, um welchen Sternoperator es sich handeln muss. In einigen Fällen, wo besondere Vorsicht geboten ist, werden wir genau angeben, welchen Sternoperator wir meinen. In den obigen Eigenschaften haben wir $*$ für den Sternoperator sowohl auf $\mathrm{A}^q(M)$, als auch auf $\mathrm{A}^{N-q}(M)$ benutzt.

Die äußere oder Cartansche Ableitung $\mathrm{d} \; : \; \mathrm{C}^{\infty,q}(M) \longrightarrow \mathrm{C}^{\infty,q+1}(M)$ lässt sich lokal erklären: Ist (U, h) eine Karte, so ist

$$\mathrm{d}\Phi|_U = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \sum_{j=1}^{N} \partial_j^h \Phi_I \, \mathrm{d}h^j \wedge \mathrm{d}h^I \qquad \text{für} \qquad \Phi|_U = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \Phi_I \, \mathrm{d}h^I \qquad .$$

Die äußere Ableitung hat die Eigenschaften

- $\displaystyle\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{C}^{\infty,q}(M)} \; \bigwedge_{\Psi \in \mathrm{C}^{\infty,p}(M)} \quad \mathrm{d}(\Phi \wedge \Psi) = (\mathrm{d}\Phi) \wedge \Psi + (-1)^q \cdot \Phi \wedge (\mathrm{d}\Psi) \qquad ,$
- $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0 \qquad .$

Analog zum Hodgeschen Sternoperator unterdrücken wir eine Indizierung der äußeren Ableitung nach M und q. Auf 0–Formen wirkt die äußere Ableitung wie das Differential. Die Co–Ableitung $\delta \; : \; \mathrm{C}^{\infty,q+1}(M) \longrightarrow \mathrm{C}^{\infty,q}(M)$ wird durch $\delta\Phi := (-1)^{q \cdot N} * \mathrm{d} * \Phi$ definiert.

Eine Abbildung $f \in \mathrm{C}^\infty(M_1, M_2)$ zweier Mannigfaltigkeiten induziert für alle $q \in \mathbb{Z}$ eine lineare Abbildung $f^* : \mathrm{A}^q(M_2) \longrightarrow \mathrm{A}^q(M_1)$, welche wir punktweise durch

$$\bigwedge_{x \in M_1} \quad \bigwedge_{t_1,\dots,t_q \in \mathrm{T}_x M_1} \quad \bigwedge_{\Phi \in \mathrm{A}^q(M_2)} \quad (f^*\Phi)_x(t_1,\dots,t_q) := \Phi_{f(x)}\big(\mathrm{d}f(t_1),\dots,\mathrm{d}f(t_q)\big)$$

erklären, und welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

- $$\bigwedge_{\varphi \in \mathrm{A}^0(M_2)} \quad f^*\varphi = \varphi \circ f \qquad ,$$
- $$\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{A}^q(M_2)} \quad \bigwedge_{\Psi \in \mathrm{A}^p(M_2)} \quad f^*(\Phi \wedge \Psi) = (f^*\Phi) \wedge (f^*\Psi) \qquad ,$$
- $$\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{C}^{\infty,q}(M_2)} \quad \mathrm{d}f^*\Phi = f^*\mathrm{d}\Phi \qquad .$$

Kommen wir nun zur Integration auf Mannigfaltigkeiten. Eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ist mit der globalen Karte (Ω, Id) eine glatte N–dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Mit den kartesischen Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ ist die Menge $\{\mathrm{d}x^1, \dots, \mathrm{d}x^N\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{A}^1(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^N$. Wir erhalten daher für jedes $\Phi \in \mathrm{A}^q(\Omega)$ die globale Darstellung

$$\Phi = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \Phi_I \; \mathrm{d}x^I \qquad .$$

Im Spezialfall $q = N$ kann also jedes Element $\Phi \in \mathrm{A}^N(\Omega)$ geschrieben werden als $\Phi = \Phi_{I_N} \; \mathrm{d}x^{I_N}$. Hierbei ist $I_N := (1, \dots, N)$. Somit können wir für $\Phi \in \mathrm{C}_0^{\infty,N}(\Omega)$ mit dem Lebesguemaß λ im $\mathbb{R}^N$ ein Integral definieren durch

$$\int_\Omega \Phi := \int_\Omega \Phi_{I_N} \; \mathrm{d}\lambda \qquad .$$

Ist (U, h) eine Karte auf M und $\Phi \in \mathrm{C}_0^{\infty,N}(U)$ mit der Darstellung $\Phi = \Phi_{I_N} \; \mathrm{d}h^{I_N}$, so definieren wir das Integral

$$\int_U \Phi := \int_{h(U)} (h^{-1})^*\Phi = \int_{h(U)} \Phi_{I_N} \circ h^{-1} \; \mathrm{d}\lambda \qquad ,$$

welches aufgrund des Transformationssatzes unabhängig von der Kartenwahl ist. Ordnen wir den Kartengebieten eine Zerlegung der Eins unter, so können wir für $\Phi \in \mathrm{C}_0^{\infty,N}(M)$ das Integral $\int_M \Phi$ definieren.

Für einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $f : M_1' \longrightarrow M_2'$ mit $M_i' \subset M_i$ gilt der Transformationssatz:

$$\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{C}_0^{\infty,N}(\overline{M_2'})} \quad \int_{M_1'} f^*\Phi = \int_{M_2'} \Phi \qquad .$$

Ist der Rand $\partial M'$ einer Teilmenge $M' \subset M$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit, so gilt mit der Inklusionsabbildung $\iota : \partial M' \longrightarrow \overline{M'}$ der Satz von Stokes:

$$\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{C}_0^{\infty,N-1}(\overline{M'})} \quad \int_{M'} \mathrm{d}\Phi = \int_{\partial M'} \iota^*\Phi \qquad .$$

Wir definieren auf $\mathrm{C}_0^{\infty,q}(M)$ das Skalarprodukt und die entsprechende Norm

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{\mathrm{L}^{2,q}(M)} := \int_M \Phi \wedge *\overline{\Psi} \qquad \text{mit} \qquad \|\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}(M)} := \langle \Phi, \Phi \rangle_{\mathrm{L}^{2,q}(M)}$$

und bezeichnen mit $\mathrm{L}^{2,q}(M)$ den Abschluss von $\mathrm{C}_0^{\infty,q}(M)$ bzgl. dieser Norm. Weiterhin führen wir noch folgende Räume ein:

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(M) &:= \Big\{ \Phi \in \mathrm{A}^q(M) : \bigwedge_{\varphi \in \mathrm{C}_0^{\infty,0}(M)} \varphi \cdot \Phi \in \mathrm{L}^{2,q}(M) \Big\} \qquad , \\
\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{M'}) &:= \Big\{ \Phi \in \mathrm{A}^q(M') : \bigwedge_{\varphi \in \mathrm{C}_0^{\infty,0}(\overline{M'})} \varphi \cdot \Phi \in \mathrm{L}^{2,q}(M') \Big\} \qquad .
\end{aligned}$$

Ist für die Karte (U,h) die Menge $\{\mathrm{d}h^1,\ldots,\mathrm{d}h^N\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathrm{A}^1(U)$, und haben $\Phi,\Psi\in\mathrm{A}^q(M)$ die lokalen Darstellungen $\Phi|_U=\sum\limits_{I\in\mathcal{I}(q,N)}\Phi_I\,\mathrm{d}h^I$ und $\Psi|_U=\sum\limits_{J\in\mathcal{I}(q,N)}\Psi_J\,\mathrm{d}h^J$, so gilt

$$\begin{aligned}\langle\Phi,\Psi\rangle_{\mathrm{L}^{2,q}(U)} &= \sum_{I,J\in\mathcal{I}(q,N)}\int_U\Phi_I\cdot\overline{\Psi_J}\,\mathrm{d}h^I\wedge*\,\mathrm{d}h^J\\ &= \sum_{I,J\in\mathcal{I}(q,N)}\int_U\Phi_I\cdot\overline{\Psi_J}\cdot\delta_{I,J}\,\mathrm{d}h^{I_N} = \sum_{I\in\mathcal{I}(q,N)}\int_{h(U)}(\Phi_I\cdot\overline{\Psi_I})\circ h^{-1}\,\mathrm{d}\lambda \quad .\end{aligned}$$

Daran erkennt man direkt für Kartengebiete: $\Phi\in\mathrm{L}^{2,q}(U)\quad\Leftrightarrow\quad\bigwedge\limits_{I\in\mathcal{I}(q,N)}\Phi_I\circ h^{-1}\in\mathrm{L}^2\big(h(U)\big)$.

Sind $\Phi\in\mathrm{C}_0^{\infty,q}(M)$ und $\Psi\in\mathrm{C}^{\infty,q+1}(M)$, so folgt für $\Phi\wedge*\overline{\Psi}\in\mathrm{C}_0^{\infty,N-1}(M)$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\Phi\wedge*\overline{\Psi}) &= (\mathrm{d}\Phi)\wedge*\overline{\Psi}+(-1)^q\cdot\Phi\wedge(\mathrm{d}*\overline{\Psi})\\ &= (\mathrm{d}\Phi)\wedge*\overline{\Psi}+(-1)^q\cdot(-1)^{q\cdot(N-q)}\cdot\Phi\wedge(**\mathrm{d}*\overline{\Psi})\\ &= (\mathrm{d}\Phi)\wedge*\overline{\Psi}+(-1)^q\cdot(-1)^{q\cdot(N-q)}\cdot(-1)^{q\cdot N}\cdot\Phi\wedge(*\delta\overline{\Psi})\\ &= (\mathrm{d}\Phi)\wedge*\overline{\Psi}+\Phi\wedge(*\overline{\delta\Psi}) \quad .\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Stokes erhalten wir $\langle\mathrm{d}\Phi,\Psi\rangle_{\mathrm{L}^{2,q+1}(M)}+\langle\Phi,\delta\Psi\rangle_{\mathrm{L}^{2,q}(M)}=0$.
Die äußere Ableitung $\mathrm{d}|_{\mathrm{C}_0^{\infty,q}(M)}$ und die Co–Ableitung δ sind also bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{L}^{2,q}(M)}$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{L}^{2,q+1}(M)}$ zueinander schiefadjungiert. Analoges gilt für d und $\delta|_{\mathrm{C}_0^{\infty,q+1}(M)}$

Um den Bezug zur elektromagnetischen Theorie herzustellen, wollen wir die äußere Ableitung d von nun an mit rot und die Co–Ableitung δ mit div bezeichnen. Im Spezialfall $M=\mathbb{R}^3$, $q=1$ und $N=3$ entsprechen die äußere Ableitung und die Co–Ableitung gerade den klassischen Operatoren der Vektoranalysis:

$$\mathrm{d}\Phi=\begin{bmatrix}\partial_2\Phi_3-\partial_3\Phi_2\\ \partial_3\Phi_1-\partial_1\Phi_3\\ \partial_1\Phi_2-\partial_2\Phi_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3\\ \mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1\\ \mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\end{bmatrix}\qquad\text{und}\qquad\delta\Phi=\sum_{i=1}^3\partial_i\Phi_i\qquad\text{für}\qquad\Phi=\sum_{i=1}^3\Phi_i\,\mathrm{d}x^i\quad .$$

Mit dieser Bezeichnungsänderung erhalten wir für beliebige $N\in\mathbb{N}$ und $q\in\mathbb{Z}$ im $\mathbb{R}^N$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}=0\quad,\qquad\mathrm{div}\,\mathrm{div}=0\quad,\qquad\Delta=\mathrm{rot}\,\mathrm{div}+\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\quad .$$

Hierbei erklären wir den Laplace–Operator Δ auf q–Formen in kartesischen Koordinaten komponentenweise. Die Schiefadjungiertheit der Operatoren rot und div nutzen wir aus, um die Rotation und die Divergenz im schwachen Sinne zu definieren. Für $(E,H)\in\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(M)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}(M)$ definieren wir

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}E=G\in\mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}(M)\quad&:\Leftrightarrow\quad\bigwedge_{\Phi\in\mathrm{C}_0^{\infty,q+1}(M)}\langle E,\mathrm{div}\Phi\rangle_{\mathrm{L}^{2,q}(M)}=-\langle G,\Phi\rangle_{\mathrm{L}^{2,q+1}(M)}\quad,\\ \mathrm{div}H=F\in\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(M)\quad&:\Leftrightarrow\quad\bigwedge_{\Phi\in\mathrm{C}_0^{\infty,q}(M)}\langle H,\mathrm{rot}\Phi\rangle_{\mathrm{L}^{2,q+1}(M)}=-\langle F,\Phi\rangle_{\mathrm{L}^{2,q}(M)}\quad .\end{aligned}$$

Damit führen wir die folgenden Rotations– und Divergenz–Räume ein:

$$\begin{aligned}\mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(M)&:=\big\{\Phi\in\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(M):\mathrm{rot}\Phi\in\mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}(M)\big\}\ ,&\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(M)&:=\big\{\Phi\in\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(M):\mathrm{div}\Phi\in\mathrm{L}^{2,q-1}_{\mathrm{loc}}(M)\big\}\ ,\\ \mathrm{R}^q(M)&:=\big\{\Phi\in\mathrm{L}^{2,q}(M):\mathrm{rot}\Phi\in\mathrm{L}^{2,q+1}(M)\big\}\ ,&\mathrm{D}^q(M)&:=\big\{\Phi\in\mathrm{L}^{2,q}(M):\mathrm{div}\Phi\in\mathrm{L}^{2,q-1}(M)\big\}\ ,\\ {}_0\mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(M)&:=\big\{\Phi\in\mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(M):\mathrm{rot}\Phi=0\big\}\ ,&{}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(M)&:=\big\{\Phi\in\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(M):\mathrm{div}\Phi=0\big\}\ ,\\ {}_0\mathrm{R}^q(M)&:=\big\{\Phi\in\mathrm{R}^q(M):\mathrm{rot}\Phi=0\big\}\ ,&{}_0\mathrm{D}^q(M)&:=\big\{\Phi\in\mathrm{D}^q(M):\mathrm{div}\Phi=0\big\}\ .\end{aligned}$$

Mit den Normen

$$\|\Phi\|^2_{\mathrm{R}^q(M)}:=\|\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}(M)}+\|\mathrm{rot}\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}(M)}\quad,\qquad\|\Phi\|^2_{\mathrm{D}^q(M)}:=\|\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}(M)}+\|\mathrm{div}\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q-1}(M)}$$

bezeichnen wir mit $\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(M)$ bzw. $\overset{\circ}{\mathrm{D}}{}^q(M)$ den Abschluss von $\mathrm{C}_0^{\infty,q}(M)$ bzgl. der $\|\cdot\|_{\mathrm{R}^q(M)}$– bzw. $\|\cdot\|_{\mathrm{D}^q(M)}$–Norm.
Ist $\iota\,:\,\partial M\longrightarrow\overline{M}$ die Inklusionsabbildung, so besteht $\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(M)$ gerade aus denjenigen Elementen $\Phi\in\mathrm{R}^q(M)$,

die $\iota^*\Phi = 0$ erfüllen. Für $\mathrm{C}^{\infty,q}(M)$–Elemente folgt dies mit dem Satz von Stokes. Analog besteht $\overset{\circ}{\mathrm{D}}{}^q(M)$ gerade aus denjenigen Elementen $\Phi \in \mathrm{D}^q(M)$, die $\iota^* * \Phi = 0$ erfüllen.
Im klassischen Fall der elektromagnetischen Theorie ($N = 3$, $q = 1, 2$, $M \subset \mathbb{R}^3$ ein C^1–Gebiet) entspricht $\iota^* E = 0$ für eine 1–Form E der klassischen elektrischen Randbedingung der Totalreflexion $\nu \times E = 0$ an ∂M, und für eine 2–Form E der klassischen magnetischen Randbedingung $\nu \cdot E = 0$ an ∂M. Hierbei ist ν die äußere Normale an ∂M und $\times$ bzw. $\cdot$ das Kreuz– bzw. Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$.

Weiterhin definieren wir

$$ {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(M) := \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(M) \cap {}_0\mathrm{R}^q(M) \qquad , \qquad {}_0\overset{\circ}{\mathrm{D}}{}^q(M) := \overset{\circ}{\mathrm{D}}{}^q(M) \cap {}_0\mathrm{D}^q(M) \qquad . $$

${}_0\mathrm{R}^q(M)$, $\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(M)$ und ${}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(M)$ sind abgeschlossene Unterräume von $\mathrm{R}^q(M)$ und sie sind mit ihren natürlichen Skalarprodukten Hilbert–Räume. Analoges gilt für die Unterräume ${}_0\mathrm{D}^q(M)$, $\overset{\circ}{\mathrm{D}}{}^q(M)$ und ${}_0\overset{\circ}{\mathrm{D}}{}^q(M)$ von $\mathrm{D}^q(M)$. Definieren wir die linearen Operatoren

$$ \begin{array}{rcccc} \mathrm{rot} & : & \mathrm{R}^q(M) \subset \mathrm{L}^{2,q}(M) & \longrightarrow & \mathrm{L}^{2,q+1}(M) \\ & & \Phi & \longmapsto & \mathrm{rot}\Phi \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{rcccc} \mathrm{div} & : & \mathrm{D}^{q+1}(M) \subset \mathrm{L}^{2,q+1}(M) & \longrightarrow & \mathrm{L}^{2,q}(M) \\ & & \Psi & \longmapsto & \mathrm{div}\Phi \end{array} \quad , $$

so gilt $(\mathrm{rot})^* = -\mathrm{div}|_{\overset{\circ}{\mathrm{D}}{}^{q+1}(M)}$ und $(\mathrm{div})^* = -\mathrm{rot}|_{\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(M)}$.

Für $\Phi \in \mathrm{R}^q(M')$, $\Psi \in \mathrm{D}^q(M')$ und $\varphi \in \mathrm{C}^{\infty,0}(\overline{M'})$ gelten $\varphi \cdot \Phi \in \mathrm{R}^q(M')$ und $\varphi \cdot \Psi \in \mathrm{D}^q(M')$ mit

$$ \begin{aligned} \mathrm{rot}(\varphi \cdot \Phi) &= \varphi \cdot \mathrm{rot}\Phi + \mathrm{rot}\varphi \wedge \Phi \qquad , \\ \mathrm{div}(\varphi \cdot \Psi) &= \varphi \cdot \mathrm{div}\Psi + (-1)^{q \cdot N} * (\mathrm{rot}\varphi \wedge *\Psi) \qquad . \end{aligned} $$

Ist sogar $\Phi \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(M')$ bzw. $\Psi \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}{}^q(M')$, so ist auch $\varphi \cdot \Phi \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(M')$ bzw. $\varphi \cdot \Psi \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}{}^q(M')$.

Der Hodgesche Sternoperator liefert eine lineare Isometrie von $\mathrm{R}^q(M)$ nach $\mathrm{D}^{N-q}(M)$, es gilt sogar

$$ {}_{(0)}\overset{(0)}{\mathrm{R}}{}^q_{(\mathrm{loc})} = *\,{}_{(0)}\overset{(0)}{\mathrm{D}}{}^{N-q}_{(\mathrm{loc})} \qquad . $$

Sobolev–, Rotations– und Divergenz–Räume von q–Formen im $\mathbb{R}^N$

Wenden wir den Differentialformenkalkül auf den Spezialfall eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ an, so haben wir bereits gesehen, dass uns mit (Ω, Id) eine globale Karte zur Verfügung steht, und wir mit den kartesischen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ für jedes $x \in \mathbb{R}^N$ eine Orthonormalbasis $\{\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^N\}$ von $\mathrm{A}^1(x)$ besitzen, sodass wir für jedes $\Phi \in \mathrm{A}^q(\Omega)$ die globale Darstellung

$$ \Phi = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \Phi_I \, \mathrm{d}x^I \qquad \text{mit} \qquad \Phi_I \; : \; \Omega \longrightarrow \mathbb{C} $$

erhalten. In diesem Fall ist $\Phi|_{\Omega'}$ für eine Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$ nichts anderes als dasjenige Element von $\mathrm{A}^q(\Omega')$, dessen Komponentenfunktionen gerade die $\Phi_I|_{\Omega'}$ sind, wobei die Einschränkung $\Phi_I|_{\Omega'}$ im Funktionensinne gemeint ist. Genauso ist $\mathrm{supp}(\Phi)$ dann nichts anderes als die Vereinigung $\bigcup_I \mathrm{supp}(\Phi_I)$, wobei die Träger $\mathrm{supp}(\Phi_I)$ im Funktionensinne zu verstehen sind.

Definieren wir die schwachen Ableitungen von Φ komponentenweise, also

$$ \partial^\alpha \Phi := \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \partial^\alpha \Phi_I \, \mathrm{d}x^I \qquad , $$

so können wir mit der Gewichtsfunktion $\rho := (1+r^2)^{\frac{1}{2}}$ gewichtete Lebesgue–, Sobolev–, Rotations– und Divergenz–Räume von q–Formen definieren. Mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{R}$ seien

$$
\begin{array}{llll}
\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) & := \big\{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \rho^s\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}(\Omega)\big\} & \text{mit} & \|\Phi\|_{\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)} := \|\rho^s\Phi\|_{\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)} \quad ,\\
\mathbf{H}^{m,q}_s(\Omega) & := \big\{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) : \bigwedge\limits_{|\alpha|\le m} \partial^\alpha\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)\big\} & \text{mit} & \|\Phi\|^2_{\mathbf{H}^{m,q}_s(\Omega)} := \sum\limits_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)} \quad ,\\
\mathrm{H}^{m,q}_s(\Omega) & := \big\{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) : \bigwedge\limits_{|\alpha|\le m} \partial^\alpha\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_{s+|\alpha|}(\Omega)\big\} & \text{mit} & \|\Phi\|^2_{\mathrm{H}^{m,q}_s(\Omega)} := \sum\limits_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}_{s+|\alpha|}(\Omega)} \quad ,\\
\mathbf{R}^q_s(\Omega) & := \big\{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) : \mathrm{rot}\Phi \in \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)\big\} & \text{mit} & \|\Phi\|^2_{\mathbf{R}^q_s(\Omega)} := \|\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)} + \|\mathrm{rot}\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)} \quad ,\\
\mathrm{R}^q_s(\Omega) & := \big\{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) : \mathrm{rot}\Phi \in \mathrm{L}^{2,q+1}_{s+1}(\Omega)\big\} & \text{mit} & \|\Phi\|^2_{\mathrm{R}^q_s(\Omega)} := \|\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)} + \|\mathrm{rot}\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}_{s+1}(\Omega)} \quad ,\\
\mathbf{D}^q_s(\Omega) & := \big\{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) : \mathrm{div}\Phi \in \mathrm{L}^{2,q-1}_s(\Omega)\big\} & \text{mit} & \|\Phi\|^2_{\mathbf{D}^q_s(\Omega)} := \|\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)} + \|\mathrm{div}\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q-1}_s(\Omega)} \quad ,\\
\mathrm{D}^q_s(\Omega) & := \big\{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) : \mathrm{div}\Phi \in \mathrm{L}^{2,q-1}_{s+1}(\Omega)\big\} & \text{mit} & \|\Phi\|^2_{\mathrm{D}^q_s(\Omega)} := \|\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)} + \|\mathrm{div}\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q-1}_{s+1}(\Omega)} \quad .
\end{array}
$$

Diese Räume sind mit ihren natürlichen Skalarprodukten Hilbert–Räume. Die jeweiligen Unterräume

$$\mathring{\mathbf{H}}^{m,q}_s(\Omega) \quad , \quad \mathring{\mathrm{H}}^{m,q}_s(\Omega) \quad , \quad \mathring{\mathbf{R}}^q_s(\Omega) \quad , \quad \mathring{\mathrm{R}}^q_s(\Omega) \quad , \quad \mathring{\mathbf{D}}^q_s(\Omega) \quad , \quad \mathring{\mathrm{D}}^q_s(\Omega)$$

bezeichnen den Abschluss von $\mathrm{C}^{\infty,q}_0(\Omega)$ bzgl. der entsprechenden Norm

$$\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{m,q}_s(\Omega)} \quad , \quad \|\cdot\|_{\mathrm{H}^{m,q}_s(\Omega)} \quad , \quad \|\cdot\|_{\mathbf{R}^q_s(\Omega)} \quad , \quad \|\cdot\|_{\mathrm{R}^q_s(\Omega)} \quad , \quad \|\cdot\|_{\mathbf{D}^q_s(\Omega)} \quad , \quad \|\cdot\|_{\mathrm{D}^q_s(\Omega)} \quad .$$

Im Falle $s = 0$ lassen wir den Index für das Gewicht wegfallen.

Ganz analog zu den Funktionenräumen bringen diese gewichteten Lebesgue–, Sobolev–, Rotations– und Divergenz–Räume von q–Formen nur für unbeschränktes Ω etwas Neues. Ist Ω hingegen beschränkt, so gelten für alle $q \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{R}$ analog zu den Funktionenräumen $\mathbf{H}^{m,q}_s(\Omega) = \mathbf{H}^{m,q}(\Omega) = \mathrm{H}^{m,q}(\Omega) = \mathrm{H}^{m,q}_s(\Omega)$, sowie auch

$$\mathbf{R}^q_s(\Omega) = \mathbf{R}^q(\Omega) = \mathrm{R}^q(\Omega) = \mathrm{R}^q_s(\Omega) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{D}^q_s(\Omega) = \mathbf{D}^q(\Omega) = \mathrm{D}^q(\Omega) = \mathrm{D}^q_s(\Omega)$$

mit äquivalenten Normen, wobei die Äquivalenzkonstanten nur von Ω, m und s abhängen. Nun definieren wir noch für $m \in \mathbb{N}_0$ die Räume mit dem Index loc

$$
\begin{array}{llll}
\mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) & := \big\{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \mathrm{rot}\Phi \in \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\big\} & , \quad \mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) & := \big\{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \mathrm{div}\Phi \in \mathrm{L}^{2,q-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\big\} \quad ,\\
\mathring{\mathrm{R}}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) & := \big\{\Phi \in \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \bigwedge\limits_{\varphi\in\mathrm{C}^{\infty,0}_0} \varphi\cdot\Phi \in \mathring{\mathrm{R}}^q(\Omega)\big\} & , \quad \mathring{\mathrm{D}}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) & := \big\{\Phi \in \mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \bigwedge\limits_{\varphi\in\mathrm{C}^{\infty,0}_0} \varphi\cdot\Phi \in \mathring{\mathrm{D}}^q(\Omega)\big\} \quad ,\\
\mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) & := \big\{\Phi \in \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \bigwedge\limits_{\varphi\in\mathrm{C}^{\infty,0}_0} \varphi\cdot\Phi \in \mathrm{R}^q(\Omega)\big\} & , \quad \mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) & := \big\{\Phi \in \mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \bigwedge\limits_{\varphi\in\mathrm{C}^{\infty,0}_0} \varphi\cdot\Phi \in \mathrm{D}^q(\Omega)\big\} \quad ,\\
\mathrm{H}^{m,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) & := \big\{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \bigwedge\limits_{|\alpha|\le m} \partial^\alpha\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\big\} & , &
\end{array}
$$

und die Räume mit dem Index vox, welche kompakten Träger im $\mathbb{R}^N$ besitzen,

$$
\begin{array}{llll}
\mathrm{H}^{m,q}_{\mathrm{vox}}(\Omega) := \big\{\Phi \in \mathrm{H}^{m,q}(\Omega) : \mathrm{supp}(\Phi) \Subset \mathbb{R}^N\big\} & , & \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{vox}}(\Omega) := \mathrm{H}^{0,q}_{\mathrm{vox}}(\Omega) & ,\\
\mathrm{R}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) := \big\{\Phi \in \mathrm{R}^q(\Omega) : \mathrm{supp}(\Phi) \Subset \mathbb{R}^N\big\} & , & \mathring{\mathrm{R}}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) := \mathrm{R}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{R}}^q(\Omega) & ,\\
\mathrm{D}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) := \big\{\Phi \in \mathrm{D}^q(\Omega) : \mathrm{supp}(\Phi) \Subset \mathbb{R}^N\big\} & , & \mathring{\mathrm{D}}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) := \mathrm{D}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{D}}^q(\Omega) & .
\end{array}
$$

Ein Index 0 unten links an irgendeinem der hier eingeführten Rotations– oder Divergenz–Räume bezeichnet verschwindende Rotation bzw. Divergenz, also z.B.

$${}_0\mathrm{R}^q_s(\Omega) := \big\{\Phi \in \mathrm{R}^q_s(\Omega) : \mathrm{rot}\Phi = 0\big\} \qquad \text{oder} \qquad {}_0\mathring{\mathrm{D}}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \big\{\Phi \in \mathring{\mathrm{D}}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \mathrm{div}\Phi = 0\big\} \quad .$$

Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$U_{<t} := \bigcap_{s<t} U_s \qquad \text{und} \qquad U_{>t} := \bigcup_{s>t} U_s$$

mit einem beliebigen der oben eingeführten gewichteten Räume der Form

$$U_s \in \Big\{ \overset{(\circ)}{\mathbf{H}}{}^{m,q}_s(\Omega)\ ,\ \overset{(\circ)}{\mathrm{H}}{}^{m,q}_s(\Omega)\ ,\ {}_{(0)}\overset{(\circ)}{\mathbf{R}}{}^{q}_s(\Omega)\ ,\ {}_{(0)}\overset{(\circ)}{\mathrm{R}}{}^{q}_s(\Omega)\ ,\ {}_{(0)}\overset{(\circ)}{\mathbf{D}}{}^{q}_s(\Omega)\ ,\ {}_{(0)}\overset{(\circ)}{\mathrm{D}}{}^{q}_s(\Omega) \Big\} \qquad (q \in \mathbb{Z}\ ,\ m \in \mathbb{N}_0\ ,\ s \in \mathbb{R}) \qquad .$$

Die Sobolev–Räume der q–Formen erfüllen dieselben Gleichungen und Inklusionen (1.8), (1.9) und (1.10), die die entsprechenden Funktionenräume erfüllen. Für die oben definierten Rotations– und Divergenz–Räume gelten für alle $q \in \mathbb{Z}$ und $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < t$

$$\overset{(\circ)}{\mathbf{H}}{}^{1,q}_s(\Omega) \subset \overset{(\circ)}{\mathbf{R}}{}^{q}_s(\Omega) \quad , \quad \overset{(\circ)}{\mathrm{H}}{}^{1,q}_s(\Omega) \subset \overset{(\circ)}{\mathrm{R}}{}^{q}_s(\Omega) \quad , \tag{1.11}$$

$$\overset{(\circ)}{\mathrm{R}}{}^{q}_s(\Omega) \subset \overset{(\circ)}{\mathbf{R}}{}^{q}_s(\Omega) \subset \overset{(\circ)}{\mathrm{R}}{}^{q}_{s-1}(\Omega) \quad , \quad {}_0\overset{(\circ)}{\mathbf{R}}{}^{q}_s(\Omega) = {}_0\overset{(\circ)}{\mathrm{R}}{}^{q}_s(\Omega) \quad , \tag{1.12}$$

$$\overset{(\circ)}{\mathrm{R}}{}^{q}_{\mathrm{vox}}(\Omega) \subset \overset{(\circ)}{\mathbf{R}}{}^{q}_t(\Omega) \subset \overset{(\circ)}{\mathbf{R}}{}^{q}_s(\Omega) \subset \overset{(\circ)}{\mathrm{R}}{}^{q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad , \quad \overset{(\circ)}{\mathrm{R}}{}^{q}_{\mathrm{vox}}(\Omega) \subset \overset{(\circ)}{\mathrm{R}}{}^{q}_t(\Omega) \subset \overset{(\circ)}{\mathrm{R}}{}^{q}_s(\Omega) \subset \overset{(\circ)}{\mathrm{R}}{}^{q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad , \tag{1.13}$$

$${}_{(0)}\overset{(\circ)}{\mathbf{D}}{}^{q}_i(\Omega) = *\,{}_{(0)}\overset{(\circ)}{\mathbf{R}}{}^{N-q}_i(\Omega) \quad , \quad {}_{(0)}\overset{(\circ)}{\mathrm{D}}{}^{q}_i(\Omega) = *\,{}_{(0)}\overset{(\circ)}{\mathrm{R}}{}^{N-q}_i(\Omega) \quad . \tag{1.14}$$

Hierbei ist $i \in \{s, > s, < s, \mathrm{loc}, \mathrm{vox}\}$ ein beliebiger Index und $*$ der Hodgesche Sternoperator auf $\mathrm{A}^{N-q}(\Omega)$. Über (1.14) erhält man die zu (1.11), (1.12) und (1.13) analogen Inklusionen für die Divergenz–Räume.

Für ein Tupel von q–Formen $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n) \in \mathrm{L}^{2,q_1}_s(\Omega) \times \ldots \times \mathrm{L}^{2,q_n}_s(\Omega)$ führen wir zur Abkürzung noch diese Notation ein:

$$\big\|(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)\big\|^2_{\mathrm{L}^2_s(\Omega)} := \sum_{i=1}^{n} \big\|\Phi_i\big\|^2_{\mathrm{L}^{2,q_i}_s(\Omega)} \qquad .$$

Analog definieren wir die Normen $\big\|(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)\big\|_{\mathrm{H}^m_s(\Omega)}$ bzw. $\big\|(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)\big\|_{\mathbf{H}^m_s(\Omega)}$ für ein q–Formen–Tupel $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n) \in \mathrm{H}^{m,q_1}_s(\Omega) \times \ldots \times \mathrm{H}^{m,q_n}_s(\Omega)$ bzw. $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n) \in \mathbf{H}^{m,q_1}_s(\Omega) \times \ldots \times \mathbf{H}^{m,q_n}_s(\Omega)$. Im Folgenden benutzen wir für $\Phi, \Psi \in \mathrm{A}^q(\Omega)$ die Schreibweise

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_\Omega := \int_\Omega \Phi \wedge *\overline{\Psi} \qquad ,$$

sofern das Integral auf der rechten Seite existiert. Dies ist zum Beispiel für $(\Phi, \Psi) \in \mathrm{L}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q}(\Omega)$, oder für $(\Phi, \Psi) \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q}_{-s}(\Omega)$ mit $s \in \mathbb{R}$, oder für $(\Phi, \Psi) \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{vox}}(\Omega)$ der Fall. Diese Schreibweise verallgemeinern wir noch auf Tupel von q–Formen: Für $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n), (\Psi_1, \ldots, \Psi_n) \in \mathrm{A}^{q_1}(\Omega) \times \ldots \times \mathrm{A}^{q_n}(\Omega)$ ist

$$\big\langle (\Phi_1, \ldots, \Phi_n), (\Psi_1, \ldots, \Psi_n) \big\rangle_\Omega := \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \Phi_i \wedge *\overline{\Psi_i} \qquad ,$$

sofern jedes einzelne Integral auf der rechten Seite existiert.
Im Falle $\Omega = \mathbb{R}^N$ lassen wir die Gebietsabhängigkeit bei allen Formenräumen, Normen, und bei der Skalarprodukt–Schreibweise wegfallen.

Problemspezifisches

Um die Anforderungen an die Transformationen ε (Dielektrizität), μ (Permeabilität) und σ (Leitfähigkeit) besser zusammenfassen zu können, wollen wir noch Räume von Transformationen definieren, die die gewünschten Eigenschaften besitzen. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ und $\tau \geq 0$. Wir sagen $\nu \in \mathrm{V}^{q,0}_\tau(\Omega)$, falls ν die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $\nu\ :\ \Omega \longrightarrow \big\{ A\ :\ \mathrm{A}^q(\Omega) \longrightarrow \mathrm{A}^q(\Omega) : A \text{ ist linear in jeder Faser} \big\} \qquad ,$

(ii) Die Matrixdarstellung von ν bzgl. der Basis $\{\mathrm{d}x^I\}$ besitzt L^∞–Einträge $\qquad ,$

(iii) ν ist symmetrisch und gleichmäßig positiv definit, d.h.

$$\bigwedge_{\Phi, \Psi \in \mathrm{L}^{2,q}(\Omega)} \langle \nu\Phi, \Psi \rangle_\Omega = \langle \Phi, \nu\Psi \rangle_\Omega \qquad \text{und} \qquad \bigvee_{c>0} \ \bigwedge_{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}(\Omega)} \langle \nu\Phi, \Phi \rangle_\Omega \geq c \cdot \big\|\Phi\big\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)} \qquad ,$$

(iv) $\nu = \nu_0 + \hat{\nu} := \nu_0 \cdot \mathrm{Id} + \hat{\nu}$ mit $\nu_0 \in \mathbb{R}_+$ und $\hat{\nu} = \mathcal{O}(r^{-\tau})$ für $r \to \infty$. Damit ist natürlich gemeint, dass die Einträge der Matrixdarstellung von $\hat{\nu}$ bzgl. der Basis $\{\mathrm{d}x^I : I \in \mathcal{I}(q, N)\}$ alle $\mathcal{O}(r^{-\tau})$ für $r \to \infty$ im Funktionensinne sind. Im Falle $\tau = 0$ bedeutet dies lediglich, dass $\hat{\nu}$ und somit ν beschränkt sind.

Für $l \in \mathbb{N}_0$ nennen wir $\nu \in \mathrm{C}^{l,q}(\Omega)$ bzw. $\nu \in \mathrm{C}^{l,q}(\overline{\Omega})$, falls die Matrixdarstellung von ν bzgl. der Basis $\{\mathrm{d}x^I : I \in \mathcal{I}(q,N)\}$ $\mathrm{C}^l(\Omega)$– bzw. $\mathrm{C}^l(\overline{\Omega})$–Einträge besitzt. Die Ableitung $\partial^\alpha \nu$ für $|\alpha| \le l$ ist die Transformation, deren Matrixdarstellung die entsprechende Ableitung der Matrixdarstellung von ν ist. Wir sagen $\nu \in \mathrm{V}^{q,l}_\tau(\Omega)$ bzw. $\nu \in \mathrm{V}^{q,l}_\tau(\overline{\Omega})$, falls $\nu \in \mathrm{V}^{q,0}_\tau(\Omega) \cap \mathrm{C}^{l,q}(\Omega)$ bzw. $\nu \in \mathrm{V}^{q,0}_\tau(\Omega) \cap \mathrm{C}^{l,q}(\overline{\Omega})$ gilt und $\partial^\alpha \hat{\nu} = \mathcal{O}(r^{-\tau})$ für alle $|\alpha| \le l$ und $r \to \infty$ erfüllt ist.
Im Falle $\Omega = \mathbb{R}^N$ lassen wir die Gebietsabhängigkeit bei den Transformationen–Räumen wegfallen.

Sind $\nu \in \mathrm{V}^{q,0}_0(\Omega)$ und $V, W \subset \mathrm{A}^q(\Omega)$ zwei Unterräume, so definieren wir

$$W^{\perp_\nu} := \big\{\Phi \in \mathrm{A}^q(\Omega) : \bigwedge_{\Psi \in W} \langle \nu\Phi, \Psi\rangle_\Omega = 0\big\} \qquad ,$$

und die orthogonale Zerlegung

$$\mathrm{L}^{2,q}(\Omega) = V \oplus_\nu W \quad :\Leftrightarrow \quad V, W \subset \mathrm{L}^{2,q}(\Omega) \quad \wedge \quad \mathrm{L}^{2,q}(\Omega) = V + W \quad \wedge \quad V = W^{\perp_\nu} \qquad .$$

Im Falle $\nu = \mathrm{Id}$ lassen wir den Index für die Transformation an $\perp$ und $\oplus$ wegfallen. Ist $W \subset \mathrm{L}^{2,q}(\Omega)$, so ist im Folgenden unter $W^{\perp_\nu}$ das orthogonale Komplement bezüglich $\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)$ gemeint, und im Falle $W \subset \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)$ mit $s < 0$ der Annihilator bezüglich der $\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)$–$\mathrm{L}^{2,q}_{-s}(\Omega)$–Dualität.

Für das Zweiertupel von Transformationen $(\varepsilon, \mu) = (\varepsilon_0, \mu_0) + (\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}) \in \mathrm{V}^{q,0}_\tau \times \mathrm{V}^{q+1,0}_\tau$ und die Transformation σ seien

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad , \quad \Lambda_0 := \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & \mu_0 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{\Lambda} := \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \hat{\mu} \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{\sigma} := \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$
$$\Lambda(\Phi, \Psi) := (\varepsilon\Phi, \mu\Psi) \quad , \quad \Lambda_0(\Phi, \Psi) := (\varepsilon_0\Phi, \mu_0\Psi) \quad , \quad \hat{\Lambda}(\Phi, \Psi) := (\hat{\varepsilon}\Phi, \hat{\mu}\Psi) \quad , \quad \hat{\sigma}(\Phi, \Psi) := (\sigma\Phi, 0) \qquad .$$

Hierbei sei $(\Phi, \Psi) \in \mathrm{A}^q(\mathbb{R}^N) \times \mathrm{A}^{q+1}(\mathbb{R}^N)$. Wir definieren den formalen Maxwell–Operator

$$M := \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{div} \\ \mathrm{rot} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad M(\Phi, \Psi) := (\mathrm{div}\Psi, \mathrm{rot}\Phi) \qquad \text{für} \qquad (\Phi, \Psi) \in \mathrm{C}^{\infty,q}(\Omega) \times \mathrm{C}^{\infty,q+1}(\Omega) \qquad .$$

Mit $X(x) := \sum_{i=1}^N x_i \cdot \mathrm{d}x^i$ führen wir noch die Operatoren

$$R \; : \; \begin{array}{ccc} \mathrm{A}^q(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathrm{A}^{q+1}(\mathbb{R}^N) \\ \Phi & \longmapsto & X \wedge \Phi \end{array} \qquad \text{und} \qquad T \; : \; \begin{array}{ccc} \mathrm{A}^{q+1}(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathrm{A}^q(\mathbb{R}^N) \\ \Phi & \longmapsto & (-1)^{q \cdot N} * R * \Phi \end{array}$$

und schließlich

$$S := \begin{bmatrix} 0 & T \\ R & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad S(\Phi, \Psi) := (T\Psi, R\Phi) \qquad \text{für} \qquad (\Phi, \Psi) \in \mathrm{A}^q(\mathbb{R}^N) \times \mathrm{A}^{q+1}(\mathbb{R}^N)$$

ein. Weitere Eigenschaften der Operatoren sind bei Weck und Witsch in [23, Def. 1] oder bei Pauly in [11, Bem. 2.2] aufgeführt.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt wollen wir die verallgemeinerten dissipativen Maxwell–Gleichungen

$$\mathrm{rot}E + \mathrm{i}\omega\mu H = G \quad \wedge \quad \mathrm{div}H + \mathrm{i}\omega\varepsilon E + \sigma E = F \qquad \text{oder kurz} \qquad (M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})(E, H) = (F, G)$$

betrachten. Durch die Substitutionen

$$\tilde{x} := \alpha x \qquad \text{und} \qquad \tilde{H} := \beta H$$

lässt sich mit geeigneter Wahl von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ immer

$$\varepsilon_0 = \mu_0 = 1 \qquad \text{, also} \qquad \Lambda_0 = \mathrm{Id} \tag{1.15}$$

erreichen. Im Folgenden wollen wir annehmen, dass (1.15) gilt. Desweiteren wollen wir annehmen, dass es ein Innengebiet $\Omega_I \subset \mathbb{R}^N$ gibt mit $\sigma|_{\Omega_I} \in \mathrm{V}^{q,0}_0(\Omega_I)$ und $\mathrm{supp}(\sigma) \cap \Omega_A = \emptyset$. Hierbei ist $\Omega_A := \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}_I$.

Wir benötigen in den späteren Kapiteln noch eine Ausschneidefunktion η, deren Eigenschaften wir hier festhalten wollen. Es sei

$$\boldsymbol{\eta} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \qquad \text{mit} \qquad \operatorname{supp}(\boldsymbol{\eta}) \subset [1,\infty) \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{\eta}|_{[2,\infty)} = 1 \qquad , \tag{1.16}$$

und mit $0 < r_1 < r_2 < \infty$ seien

$$\hat{\eta}(t) := \boldsymbol{\eta}\Big(1 + \frac{t - r_1}{r_2 - r_1}\Big) \qquad \text{und} \qquad \eta := \hat{\eta} \circ r \qquad . \tag{1.17}$$

Damit ergeben sich die folgenden Kommutatorgleichungen:

$$C_{\mathrm{rot},\eta} = \hat{\eta}'(r) r^{-1} R \qquad , \qquad C_{\mathrm{div},\eta} = \hat{\eta}'(r) r^{-1} T \qquad , \qquad C_{M,\eta} = \hat{\eta}'(r) r^{-1} S \qquad .$$

Wie bereits von Weck und Witsch in [22, Lemma 2 (i)] beschrieben, kann man für jedes $\hat{j} \in \mathbb{N}_0$ die Funktion $\hat{\eta}$ (bzw. $\boldsymbol{\eta}$) so wählen, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\eta}'(r) r^j \, dr = \delta_{0,j} \qquad \text{für} \qquad -\hat{j} \leq j \leq \hat{j} \tag{1.18}$$

gilt. Abschliessend definieren wir mit

$$\mathbb{I} \quad := \quad \big\{ n + N/2 : n \in \mathbb{N}_0 \big\} \cup \big\{ 1 - n - N/2 : n \in \mathbb{N}_0 \big\} \tag{1.19}$$

eine von der Raumdimension N abhängige Menge von „Ausnahmegewichten“.

Gebietseigenschaften

Für die Lösungstheorie benötigen wir noch eine Gebietseigenschaft, die wir festhalten wollen in der folgenden

Definition 1.1
Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ besitzt die „Maxwellsche Kompaktheitseigenschaft“ (kurz MKE), falls für alle $q \in \{0, \dots, N\}$ die Einbettungen

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q(\Omega) \cap \mathbf{D}^q(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^{2,q}(\Omega)$$

kompakt sind. Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ besitzt die „lokale Maxwellsche Kompaktheitseigenschaft“ (kurz LMKE), falls für alle $q \in \{0, \dots, N\}$ die Einbettungen

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q(\Omega) \cap \mathbf{D}^q(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$$

kompakt sind.

Die MKE wurde für beschränkte Gebiete schon in vielen Arbeiten untersucht. Der erste Beweis der MKE für beschränkte Gebiete mit nichtglatten Rändern gelang Weck in [20] im Falle von „Kegelgebieten“. Picard konnte in [14] die MKE für „Lipschitz–Gebiete“ beweisen. Im klassischen Fall haben Picard, Weck und Witsch in [17] die MKE für die bisher allgemeinste Klasse von Rändern bewiesen.

Bemerkung 1.2

(i) *Beschränkte Gebiete mit Kegeleigenschaft (siehe [20]) oder Lipschitz–Gebiete (siehe [14]) besitzen die MKE.*

(ii) *Die MKE bzw. LMKE sind Eigenschaften des Gebietsrandes.*

Eine weitere Eigenschaft von Gebieten mit LMKE werden wir später häufiger in Beweisen gebrauchen, und wollen sie deshalb hier notieren:

Korollar 1.3
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet mit LMKE und $t \in \mathbb{R}$. Dann sind für alle $q \in \{0, \dots, N\}$ und alle $\tilde{t} < t$ die Einbettungen

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_t(\Omega) \cap \mathbf{D}^q_t(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^{2,q}_{\tilde{t}}(\Omega)$$

kompakt.

2 Lösungstheorie des zeitharmonischen Problems

In diesem Kapitel werden wir die zeitharmonische Lösungstheorie ($\omega \neq 0$) des dissipativen Maxwell–Problems

$$(M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})(E, H) = (F, G)$$

im Ganzraumfall (d.h. im $\mathbb{R}^N$) entwickeln. Im Falle $N = 3$ und $q = 1$ wurde dieses Problem z.B. schon von Ramm, Weaver, Weck und Witsch in [18], sowie von Kuhn in [7] bearbeitet. Dieses Kapitel verallgemeinert die genannten Resultate also auf q–Formen im $\mathbb{R}^N$.

2.1 Zusammenhang zwischen den dissipativen und den nicht–dissipativen Maxwell–Gleichungen

Da sich die dissipativen Maxwell–Gleichungen (d.h. die Gleichungen mit auftretendem $\hat{\sigma}$) von den nicht–dissipativen Gleichungen (d.h. den Gleichungen mit $\hat{\sigma} = 0$) nur in eben diesem Term $\hat{\sigma}$ unterscheiden, ist eine Lösung der dissipativen Maxwell–Gleichungen auch immer eine Lösung der nicht–dissipativen Maxwell–Gleichungen mit „leicht“ veränderten Daten und umgekehrt. Genauer gesagt:

$$(M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})(E, H) = (F, G) \quad \Leftrightarrow \quad (M + \mathrm{i}\omega\Lambda)(E, H) = (F - \sigma E, G) \quad , \tag{2.1}$$

sowie

$$(M + \mathrm{i}\omega\Lambda)(E, H) = (F, G) \quad \Leftrightarrow \quad (M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})(E, H) = (F + \sigma E, G) \quad . \tag{2.2}$$

Aufgrund dieser engen Verknüpfung zwischen den dissipativen und den nicht–dissipativen Maxwell–Gleichungen sind wir in der Lage, sehr viele Aussagen über die Lösung (E, H) zu gewinnen, indem wir sie als Lösung der entsprechenden nicht–dissipativen Maxwell–Gleichungen auffassen.

Wegen $\mathrm{supp}(\sigma) \Subset \mathbb{R}^N$ gilt für $E \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}$

$$\sigma E \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{vox}} \subset \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathrm{L}^{2,q}_s \qquad \text{und somit} \qquad F - \sigma E \in \mathrm{L}^{2,q}_s \quad \Leftrightarrow \quad F \in \mathrm{L}^{2,q}_s \quad \Leftrightarrow \quad F + \sigma E \in \mathrm{L}^{2,q}_s \quad .$$

Daher liegt es nahe, bei der Lösungstheorie für die dissipativen Maxwell–Gleichungen die Daten (F, G) aus denselben gewichteten L^2-Räumen zuzulassen wie für die nicht–dissipativen Maxwell–Gleichungen.

Die Lösungstheorie für die nicht–dissipativen Maxwell–Gleichungen wird von Pauly in [11] für Außengebiete Ω sehr ausgiebig untersucht, wodurch wir in der Lage sind, sehr viel zitieren zu können. Einige Aussagen und Methoden werden durch die Tatsache vereinfacht, dass wir nur den Fall $\Omega = \mathbb{R}^N$ benötigen.

Aus diesem Grund wird sich der Aufbau dieses Kapitels sehr eng an den Aufbau des entsprechenden Kapitels bei Pauly [11, Kap. 4] halten. Dies ermöglicht es uns, die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen der zeitharmonischen Lösungstheorie des dissipativen und der des nicht–dissipativen Maxwell–Problems für $\Omega = \mathbb{R}^N$ genauer zu verfolgen.

In diesem Kapitel werden wir also die Lösungstheorie für Frequenzen $\omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ebenfalls wie Pauly mittels des Prinzips der Grenzabsorption durchführen. Das polynomiale Abklingen von Eigenlösungen bzw. das, bei stärkeren Voraussetzungen an die Koeffizienten ε und μ, exponentielle Abklingen von Eigenlösungen können wir ohne großen Aufwand aus den Resultaten von Pauly folgern. Hierbei ist anzumerken, dass Bauer in [4] ebenfalls für Maxwell–,Lamé– und verallgemeinerte Helmholtzsysteme im klassischen Fall das polynomiale und exponentielle Abklingen von Eigenlösungen, sowie daraus gefolgert die Beschränktheit und mit Hilfe des Prinzips der eindeutigen Fortsetzbarkeit schließlich das Verschwinden von Eigenlösungen für abklingende C^2–Koeffizienten (ε, μ) nachweisen kann.

Für dieses Kapitel wollen wir die folgenden Generalvoraussetzungen treffen:

(1) Die Raumdimension sei N und der Rang der Differentialformen sei $q \in \{0, \ldots, N\}$.

(2) $\Omega_I \subset \mathbb{R}^N$ sei ein Innengebiet und $\Omega_A := \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}_I$.

(3) Die Transformationen ε und μ erfüllen $(\varepsilon, \mu) \in \mathrm{V}^{q,0}_\tau \times \mathrm{V}^{q+1,0}_\tau$ mit $\tau \geq 0$. Die Abklingrate τ von $(\hat{\varepsilon}, \hat{\mu})$ wird dabei später noch näher spezifiziert.

(4) Die Transformation σ erfülle $\sigma \in \mathrm{V}^{q,0}_0(\Omega_I)$ und $\mathrm{supp}(\sigma) \cap \Omega_A = \emptyset$.

2.2 Der Lösungsbegriff

Aufgrund der Vorbetrachtung aus Abschnitt 2.1 werden wir den Lösungsbegriff analog zu PAULY [11, Def. 4.1] definieren.

Definition 2.1
Seien $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ *und* $(F, G) \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}$. *Dann löst* (E, H) *das Problem* $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, \omega, F, G)$, *falls*

(i) $\quad (E, H) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{D}^{q+1} \quad ,$

(ii) $\quad (M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})(E, H) = (F, G) \quad .$

Analog wie bei PAULY [11, Def. 4.2] müssen wir beim Lösungsbegriff für reelle Frequenzen stärkere Bedingungen an die Daten (F, G) und schwächere Bedingungen an die Lösungen (E, H) stellen.

Definition 2.2
Seien $\omega \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ *und* $(F, G) \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}$. *Dann löst* (E, H) *das Problem* $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, \omega, F, G)$, *falls*

(i) $\quad (E, H) \in \mathbf{R}^q_{<-\frac{1}{2}} \times \mathbf{D}^{q+1}_{<-\frac{1}{2}} \quad ,$

(ii) $\quad (M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})(E, H) = (F, G) \quad ,$

(iii) $\quad (r^{-1}TH - E, r^{-1}RE - H) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}} \quad .$

Die folgenden beiden Bemerkungen sind ebenfalls leicht abgewandelte Zitate aus der Arbeit [11, Bem. 4.3 u. 4.4] von PAULY.

Bemerkung 2.3
Die obige Bedingung (iii) heißt „Maxwellsche Strahlungsbedingung“, oder kurz „Strahlungsbedingung“, denn sie verallgemeinert die klassischen Sommerfeldschen Strahlungsbedingungen zu den Maxwell–Gleichungen

$$\xi \times H + E \in \mathrm{L}^2_{>-\frac{1}{2}} \qquad \textit{und} \qquad \xi \times E - H \in \mathrm{L}^2_{>-\frac{1}{2}} \qquad .$$

Klassisch nennen wir den Fall $N = 3$ *und* $q = 1$. *Hierbei sind* $\xi(x) := \frac{x}{r}$ *und* $\times$ *das Kreuzprodukt im* $\mathbb{R}^3$.

Bemerkung 2.4
Die Strahlungsbedingung (iii) kann auch kompakter geschrieben werden in der Form

$$(r^{-1}S - \mathrm{Id})(E, H) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}} \qquad \textit{oder} \qquad \begin{bmatrix} -1 & r^{-1}T \\ r^{-1}R & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}} \qquad .$$

Bemerkung 2.5
Die Bedingung

$$(r^{-1}TH - E, r^{-1}RE - H) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}}$$

nennt man auch „Einstrahlungsbedingung“. Im nicht–dissipativen Fall kann man stattdessen auch die Bedingung

$$(r^{-1}TH + E, r^{-1}RE + H) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}}$$

stellen, die sogenannte „Ausstrahlungsbedingung“, wie PAULY *dies in [11] tut. Dies beeinflusst natürlich den Lösungsbegriff für reelle Frequenzen. Die Lösungen, welche die Ausstrahlungsbedingung erfüllen, erhält man mit Hilfe des Prinzips der Grenzabsorption über die obere Halbebene* $\mathbb{C}_+$. *Die Lösungen, welche der Einstrahlungsbedingung genügen, erhält man ebenfalls mit Hilfe des Prinzips der Grenzabsorption, jedoch über die untere Halbebene* $\mathbb{C}_-$.

Im dissipativen Fall haben wir keine Wahl zwischen der Ein- und Ausstrahlungsbedingung. Wir bekommen nur eine Lösungstheorie für Frequenzen $\omega \in \mathbb{C}_-$, *also müssen wir die Grenzabsorption über die untere Halbebene durchführen. Da wir für Lösungen zu diesen Frequenzen nur eine a–priori–Abschätzung für die Einstrahlungsbedingung erhalten, überträgt sich bei der Grenzabsorption die Einstrahlungsbedingung auf die Lösungen für reelle Frequenzen.*

2.3 Lösungstheorie für nichtreelle Frequenzen

In seiner Arbeit überführt Pauly die nicht–dissipativen Maxwell–Gleichungen in eine Eigenwert–Gleichung für einen speziellen, selbstadjungierten Maxwell–Operator und erhält somit direkt die Existenz eindeutiger Lösungen für nichtreelle Frequenzen $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Der im dissipativen Fall auftretende Operator $\hat{\sigma}$ sorgt jedoch dafür, dass die hier vorgestellte Lösungstheorie nur für die untere Halbebene durchgeführt werden kann.

Wir führen zunächst zwei Lemmata an. Das erste Lemma zeigt, dass es reicht, die eindeutige Lösbarkeit für nichtreelle Frequenzen aus einem Quadranten der komplexen Zahlen zu beweisen, um die eindeutige Lösbarkeit auf der entsprechenden Halbebene zu folgern.

Lemma 2.6
Seien $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}$. Dann gilt

$$(E,H) \textit{ löst } \mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G) \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{E},\overline{H}) \textit{ löst } \mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,-\overline{\omega},\overline{F},\overline{G}) \qquad .$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(E,H) \text{ löst } \mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G) \quad &\Leftrightarrow \quad (E,H) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{D}^{q+1} \quad \text{und} \quad (M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})(E,H) = (F,G) \\
&\Leftrightarrow \quad (\overline{E},\overline{H}) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{D}^{q+1} \quad \text{und} \quad \overline{(M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})(E,H)} = \overline{(F,G)} \\
&\Leftrightarrow \quad (\overline{E},\overline{H}) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{D}^{q+1} \quad \text{und} \quad (M - \mathrm{i}\overline{\omega}\Lambda + \hat{\sigma})(\overline{E},\overline{H}) = (\overline{F},\overline{G}) \\
&\Leftrightarrow \quad (\overline{E},\overline{H}) \text{ löst } \mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,-\overline{\omega},\overline{F},\overline{G}) \qquad .
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir sowohl die Symmetrie von ε, μ und σ ausgenutzt, als auch die Tatsache, dass wir die Konjugation an den Operatoren rot und div vorbeiziehen können. ■

Das zweite Lemma zeigt uns, dass wir bei der Ersetzung $\sigma \to -\sigma$ entsprechend eine Lösungstheorie für die obere Halbebene erhalten, wodurch die Grenzabsorption zu Lösungen für reelle Frequenzen führt, die der Ausstrahlungsbedingung genügen.

Lemma 2.7
Seien $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}$. Dann gilt

$$(E,H) \textit{ löst } \mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G) \quad \Leftrightarrow \quad (-E,H) \textit{ löst } \mathrm{Max}(-\sigma,\Lambda,-\omega,F,-G) \qquad .$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(E,H) \text{ löst } \mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G) \quad &\Leftrightarrow \quad (E,H) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{D}^{q+1} \quad \text{und} \quad (M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})(E,H) = (F,G) \\
&\Leftrightarrow \quad (-E,H) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{D}^{q+1} \quad \text{und} \quad (M - \mathrm{i}\omega\Lambda - \hat{\sigma})(-E,H) = (F,-G) \\
&\Leftrightarrow \quad (-E,H) \text{ löst } \mathrm{Max}(-\sigma,\Lambda,-\omega,F,-G) \qquad .
\end{aligned}$$

■

Mit Hilfe einer völlig analogen Beweisführung können wir für reelle Frequenzen das folgende Korollar ziehen.

Korollar 2.8
Seien $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(i) (E,H) *löst* $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G)$ *mit der Einstrahlungsbedingung* ,

(ii) $(-E,H)$ *löst* $\mathrm{Max}(-\sigma,\Lambda,-\omega,F,-G)$ *mit der Ausstrahlungsbedingung* .

Im nicht–dissipativen Fall ($\sigma = 0$) sieht man hieran direkt, wie man die Lösungstheorie für eine Strahlungsbedingung erhält, falls man sie für die andere Strahlungsbedingung schon durchgeführt hat.
Im dissipativen Fall erkennt man, wie man die Lösungstheorie für die Maxwell–Gleichungen mit negativer Leitfähigkeit erhält, wenn man sie für positive Leitfähigkeit durchgeführt hat, und umgekehrt.

Da bei den Abschätzungen der Normen der Lösungen (E,H) durch die Normen der Daten (F,G) eine Konjugation oder eine Veränderung des Vorzeichens von E, H, F oder G keine Rolle spielen, können wir die Lemmata 2.6, 2.7 und das Korollar 2.8 dazu benutzen, solche Abschätzungen aus dem von Pauly behandelten Fall, nämlich der nicht–dissipativen Maxwell–Gleichungen mit Ausstrahlungsbedingung, direkt auf die restlichen Fälle zu übertragen. Dies wird uns bei der a–priori–Abschätzung von großem Nutzen sein.

Wir werden zunächst noch ein technisches Lemma bereitstellen, welches uns bei der Lösungstheorie für nichtreelle Frequenzen, sowie später auch bei der Lösungstheorie für reelle Frequenzen nützen wird.

Lemma 2.9
Für $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *sei*

$$\varepsilon' \quad := \quad \varepsilon + \frac{1}{\mathrm{i}\omega} \cdot \sigma \quad = \quad \varepsilon - \frac{\mathrm{i}\overline{\omega}}{|\omega|^2} \cdot \sigma \qquad .$$

Dann gelten

(i) $$\bigwedge_{\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}} \quad \bigvee_{c>0} \quad \bigwedge_{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}} \quad \left\|\varepsilon'\Phi\right\|_{\mathrm{L}^{2,q}} \leq c \cdot \left\|\Phi\right\|_{\mathrm{L}^{2,q}} \qquad ,$$

(ii) $$\bigvee_{c>0} \quad \bigwedge_{\omega \in \mathbb{C}_-\backslash\{0\}} \quad \bigwedge_{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}} \quad \left\|\varepsilon'^{-1}\Phi\right\|_{\mathrm{L}^{2,q}} \leq c \cdot \left\|\Phi\right\|_{\mathrm{L}^{2,q}} \qquad ,$$

(iii) $$\bigwedge_{\omega \in \mathbb{C}_-\backslash\{0\}} \quad \bigvee_{c>0} \quad \bigwedge_{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}} \quad \left\|\Phi\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}} \leq c \cdot \left|\langle \varepsilon'^{-1}\Phi, \Phi\rangle\right| \qquad .$$

Beweis:
(i) Seien $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}$. Dann gilt

$$\left\|\varepsilon'\Phi\right\|_{\mathrm{L}^{2,q}} \quad \leq \quad \left\|\varepsilon\Phi\right\|_{\mathrm{L}^{2,q}} + \frac{1}{|\omega|} \cdot \left\|\sigma\Phi\right\|_{\mathrm{L}^{2,q}} \quad \leq \quad c \cdot \left\|\Phi\right\|_{\mathrm{L}^{2,q}} \qquad ,$$

denn ε und σ sind nach Generalvoraussetzungen (3) und (4) beschränkt. Die Konstante c hängt offensichtlich von ω ab. □

(ii) Seien $\omega \in \mathbb{C}_-\backslash\{0\}$ und $\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}$. Wir betrachten die Gleichung

$$\langle \varepsilon'\Phi, \Phi\rangle \quad = \quad \langle \varepsilon\Phi, \Phi\rangle - \frac{\mathrm{i}\overline{\omega}}{|\omega|^2} \cdot \langle \sigma\Phi, \Phi\rangle \quad = \quad \underbrace{\langle \varepsilon\Phi, \Phi\rangle - \frac{\operatorname{Im}\omega}{|\omega|^2} \cdot \langle \sigma\Phi, \Phi\rangle}_{\in\mathbb{R}} - \underbrace{\frac{\mathrm{i}\operatorname{Re}\omega}{|\omega|^2} \cdot \langle \sigma\Phi, \Phi\rangle}_{\in\mathrm{i}\cdot\mathbb{R}} \qquad .$$

Wegen $\operatorname{Im}\omega \leq 0$ für alle $\omega \in \mathbb{C}_-$ und den Generalvoraussetzungen (3) und (4) für ε und σ erhalten wir also die gleichmäßige Abschätzung

$$\bigvee_{c>0} \quad \bigwedge_{\omega \in \mathbb{C}_-\backslash\{0\}} \quad \bigwedge_{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}} \quad \operatorname{Re}\langle \varepsilon'\Phi, \Phi\rangle \geq \langle \varepsilon\Phi, \Phi\rangle \geq c \cdot \left\|\Phi\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}} \qquad .$$

Damit ist $\operatorname{dist}(\{0\}, \overline{W(\varepsilon')}) \geq c$ für alle $\omega \in \mathbb{C}_-\backslash\{0\}$, wobei $W(\varepsilon') := \left\{\langle \varepsilon'\Phi, \Phi\rangle \,\boldsymbol{:}\, \left\|\Phi\right\|_{\mathrm{L}^{2,q}} = 1\right\}$ der numerische Wertebereich der stetigen linearen Abbildung von $\mathrm{L}^{2,q}$ in sich ist, welche Φ auf $\varepsilon'\Phi$ abbildet. Nach Bachman und Narici [2, The. 21.11] existiert dann ε'^{-1} für alle $\omega \in \mathbb{C}_-\backslash\{0\}$ und es gilt

$$\bigwedge_{\omega \in \mathbb{C}_-\backslash\{0\}} \quad \bigwedge_{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}} \quad \left\|\varepsilon'^{-1}\Phi\right\|_{\mathrm{L}^{2,q}} \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(\{0\}, \overline{W(\varepsilon')})} \cdot \left\|\Phi\right\|_{\mathrm{L}^{2,q}} \leq \frac{1}{c} \cdot \left\|\Phi\right\|_{\mathrm{L}^{2,q}} \qquad .$$

Wir sehen also, dass die Stetigkeitskonstante unabhängig von ω gewählt werden kann. □

(iii) Seien $\omega \in \mathbb{C}_-\backslash\{0\}$ und $\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}$. Dann gilt mit **(i)** und **(ii)**

$$\left\|\Phi\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}} \quad \leq \quad c \cdot \left\|\varepsilon'^{-1}\Phi\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}} \quad \leq \quad c \cdot \operatorname{Re}\langle \varepsilon'\varepsilon'^{-1}\Phi, \varepsilon'^{-1}\Phi\rangle \quad \leq \quad c \cdot \left|\langle \varepsilon'^{-1}\Phi, \Phi\rangle\right| \qquad .$$

Die Konstante c, welche sich hier von Abschätzung zu Abschätzung ändert, beinhaltet die Konstante aus (i) und ist somit abhängig von ω. ■

Satz 2.10
Seien $\omega \in \mathbb{C}_-\backslash\mathbb{R}$ *und* $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q} \times \mathrm{L}^{2,q+1}$. *Dann ist das Problem* $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G)$ *eindeutig lösbar und der Lösungsoperator*

$$\begin{array}{rclcl} {}_\sigma\mathcal{L}_\omega & : & \mathrm{L}^{2,q} \times \mathrm{L}^{2,q+1} & \longrightarrow & \mathbf{R}^q \times \mathbf{D}^{q+1} \\ & & (F,G) & \longmapsto & (E,H) \quad \textit{Lösung zu } \mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G) \end{array}$$

ist stetig.

Beweis:
`1.Fall:` Sei $\omega = \alpha + \mathrm{i}\beta$ mit $\alpha > 0$ und $\beta < 0$.

Wir werden beim Beweis analog zur Arbeit von Kuhn [7, Lemma 18] vorgehen. Wie schon in Lemma 2.9 definieren wir

$$\varepsilon' := \varepsilon + \frac{1}{\mathrm{i}\omega} \cdot \sigma = \varepsilon - \frac{\mathrm{i}\overline{\omega}}{|\omega|^2} \cdot \sigma \qquad \text{und} \qquad \Lambda' := \begin{bmatrix} \varepsilon' & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad .$$

Lemma 2.9 (ii) liefert die Existenz und Beschränktheit von ε'^{-1}. Um unser Problem variationell zu formulieren, betrachten wir folgende Äquivalenzen:

$$\begin{array}{cl} & (E,H) \text{ löst } \mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G) \\ \Leftrightarrow & (E,H) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{D}^{q+1} \quad \text{und} \quad (M + \mathrm{i}\omega\Lambda')(E,H) = (F,G) \\ \Leftrightarrow & (E,H) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{D}^{q+1} \quad \text{und} \quad E = \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}\varepsilon'^{-1}(F - \mathrm{div}H) \quad \text{und} \quad \mathrm{rot}E = G - \mathrm{i}\omega\mu H \\ \Leftrightarrow & H \in \mathbf{D}^{q+1} \quad \text{und} \quad E = \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}\varepsilon'^{-1}(F - \mathrm{div}H) \quad \text{und} \\ \bigwedge\limits_{\Phi \in \mathbf{D}^{q+1}} & \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega} \cdot \langle \varepsilon'^{-1}(F - \mathrm{div}H), \mathrm{div}\Phi \rangle = -\langle G - \mathrm{i}\omega\mu H, \Phi \rangle \\ \Leftrightarrow & H \in \mathbf{D}^{q+1} \quad \text{und} \quad E = \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}\varepsilon'^{-1}(F - \mathrm{div}H) \quad \text{und} \\ \bigwedge\limits_{\Phi \in \mathbf{D}^{q+1}} & \langle \varepsilon'^{-1}\mathrm{div}H, \mathrm{div}\Phi \rangle - \omega^2 \langle \mu H, \Phi \rangle = \langle \varepsilon'^{-1}F, \mathrm{div}\Phi \rangle + \mathrm{i}\omega\langle G, \Phi \rangle \qquad . \end{array}$$

Setzen wir

$$\begin{array}{rclcl|rclcl} b & : & \mathbf{D}^{q+1} \times \mathbf{D}^{q+1} & \longrightarrow & \mathbb{C} & f & : & \mathbf{D}^{q+1} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & (\Psi,\Phi) & \longmapsto & \langle \varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Psi, \mathrm{div}\Phi \rangle - \omega^2\langle \mu\Psi, \Phi \rangle & & & \Phi & \longmapsto & \langle \varepsilon'^{-1}F, \mathrm{div}\Phi \rangle + \mathrm{i}\omega\langle G, \Phi \rangle \end{array}$$

so erhalten wir unser eindeutiges (E,H) mit Hilfe des Satzes von Lax–Milgram, falls wir zeigen können, dass b eine stetige, streng koerzitive Sesquilinearform auf $\mathbf{D}^{q+1}$ und f ein stetiges, antilineares Funktional auf $\mathbf{D}^{q+1}$ darstellen. Die Sesquilinearität von b und die Antilinearität von f sind trivial. Die Stetigkeit von b und die von f sind mit der Beschränktheit von ε'^{-1} ebenfalls klar. Es bleibt also nur noch die strenge Koerzitivität von b zu zeigen. Dazu betrachten wir

$$\begin{array}{rcl} \langle \varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi, \mathrm{div}\Phi \rangle & = & \langle \varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi, \mathrm{div}\Phi \rangle_{\Omega_I} + \langle \varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi, \mathrm{div}\Phi \rangle_{\Omega_A} \\ & = & \langle \varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi, \varepsilon'\varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi \rangle_{\Omega_I} + \langle \varepsilon^{-1}\mathrm{div}\Phi, \mathrm{div}\Phi \rangle_{\Omega_A} \\ & = & \langle \varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi, \varepsilon\varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi \rangle_{\Omega_I} + \langle \varepsilon^{-1}\mathrm{div}\Phi, \mathrm{div}\Phi \rangle_{\Omega_A} \\ & + & \dfrac{\mathrm{i}\omega}{|\omega|^2} \cdot \langle \varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi, \sigma\varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi \rangle_{\Omega_I} \qquad , \\ -\omega^2 \cdot \langle \mu\Phi, \Phi \rangle & = & (\beta^2 - \alpha^2 - 2\mathrm{i}\alpha\beta) \cdot \langle \mu\Phi, \Phi \rangle \qquad . \end{array}$$

Wir erhalten damit als Abschätzungen für den Realteil und Imaginärteil von $b(\Phi,\Phi)$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} b(\Phi,\Phi) &= \langle \varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi, \varepsilon\varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi\rangle_{\Omega_I} + \langle \varepsilon^{-1}\mathrm{div}\Phi, \mathrm{div}\Phi\rangle_{\Omega_A} \\
&- \frac{\beta}{|\omega|^2}\cdot\langle \varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi, \sigma\varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi\rangle_{\Omega_I} + (\beta^2-\alpha^2)\cdot\langle\mu\Phi,\Phi\rangle \\
&\geq \langle \varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi, \varepsilon\varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi\rangle_{\Omega_I} + \langle \varepsilon^{-1}\mathrm{div}\Phi, \mathrm{div}\Phi\rangle_{\Omega_A} - \alpha^2\cdot\langle\mu\Phi,\Phi\rangle \\
&\geq \gamma_1\cdot\left\|\mathrm{div}\Phi\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}} - \gamma_2\cdot\left\|\Phi\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}} \qquad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} b(\Phi,\Phi) &= -2\alpha\beta\cdot\langle\mu\Phi,\Phi\rangle + \frac{\alpha}{|\omega|^2}\cdot\langle \varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi, \sigma\varepsilon'^{-1}\mathrm{div}\Phi\rangle_{\Omega_I} \\
&\geq -2\alpha\beta\cdot\langle\mu\Phi,\Phi\rangle \\
&\geq \gamma_3\cdot\left\|\Phi\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}}
\end{aligned}$$

mit geeigneten, von ω abhängigen Konstanten $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3>0$. Folglich ergibt sich für alle $\delta\in[0,1]$

$$\begin{aligned}
|b(\Phi,\Phi)| &\geq \delta\cdot|\operatorname{Re} b(\Phi,\Phi)| + (1-\delta)\cdot|\operatorname{Im} b(\Phi,\Phi)| \\
&\geq \delta\cdot\left(\gamma_1\cdot\left\|\mathrm{div}\Phi\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}} - \gamma_2\cdot\left\|\Phi\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}}\right) + (1-\delta)\cdot\gamma_3\cdot\left\|\Phi\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}} \\
&= \delta\cdot\gamma_1\cdot\left\|\mathrm{div}\Phi\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}} + \gamma_3\cdot\left\|\Phi\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}} - \delta\cdot(\gamma_2+\gamma_3)\cdot\left\|\Phi\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}} \qquad .
\end{aligned}$$

Nach geeigneter Wahl von δ erhalten wir schließlich eine von ω abhängige Konstante $\gamma>0$ mit

$$|b(\Phi,\Phi)| \quad\geq\quad \gamma\cdot\left\|\Phi\right\|^2_{\mathbf{D}^{q+1}} \qquad . \tag{2.3}$$

Damit ist die strenge Koerzitivität von b nachgewiesen und folglich auch die Existenz der eindeutigen Lösung (E,H) des Problems $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G)$.

Als Letztes wollen wir die Stetigkeit des Lösungsoperators ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega$ nachprüfen. Abschätzung (2.3) liefert uns

$$\begin{aligned}
\left\|H\right\|^2_{\mathbf{D}^{q+1}} &\leq \frac{1}{\gamma}\cdot|b(H,H)| \quad=\quad \frac{1}{\gamma}\cdot|f(H)| \quad=\quad \frac{1}{\gamma}\cdot\left|\langle\varepsilon'^{-1}F,\mathrm{div}H\rangle + \mathrm{i}\omega\langle G,H\rangle\right| \\
&\leq c\cdot\left\|(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^{2,q}\times\mathrm{L}^{2,q+1}}\cdot\left\|H\right\|_{\mathbf{D}^{q+1}} \qquad .
\end{aligned}$$

Division durch $\left\|H\right\|_{\mathbf{D}^{q+1}}$ liefert die Abschätzung für $\left\|H\right\|_{\mathbf{D}^{q+1}}$. Die Abschätzung für $\left\|E\right\|_{\mathbf{R}^q}$ erhalten wir durch die Gleichungen für E und $\mathrm{rot}E$ und die Abschätzung für $\left\|H\right\|_{\mathbf{D}^{q+1}}$. Damit ist die Stetigkeit des Lösungsoperators bewiesen. □

`2.Fall:` Sei $\omega=\alpha+\mathrm{i}\beta$ mit $\alpha<0$ und $\beta<0$.

Dann ist $-\overline{\omega}=-\alpha+\mathrm{i}\beta$. Lemma 2.6 liefert die eindeutige Lösbarkeit von $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G)$ über die eindeutige Lösbarkeit von $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,-\overline{\omega},\overline{F},\overline{G})$ nach dem 1. Fall. Die Bemerkungen nach Korollar 2.8 liefern die Stetigkeit des Lösungsoperators ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega$. □

`3.Fall:` Sei $\omega=\mathrm{i}\beta$ mit $\beta<0$. Dann ist

$$\varepsilon' := \varepsilon + \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\cdot\sigma = \varepsilon + \frac{1}{|\beta|}\cdot\sigma \qquad \text{und} \qquad \Lambda' := \begin{bmatrix}\varepsilon' & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix} \qquad .$$

Da ε' in diesem Fall dieselben Eigenschaften hat wie ε, liefert die Lösungstheorie für das nicht–dissipative Maxwell–Problem mit Λ' anstelle von Λ nach PAULY [11, Satz 4.5] die Behauptung. ■

2.4 Die a–priori–Abschätzung

Die a–priori–Abschätzung wird zeigen, dass wir bei bestimmten nichtreellen Frequenzen $\omega \in \mathbb{C}_-$ die Lösung (E,H) von $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G)$ in der Norm mit jedem Gewicht $t < -1/2$, sowie die Strahlungsbedingung in der Norm mit einem bestimmten Gewicht $\hat{t} > 1/2$ durch die Norm der Daten (F,G) mit beliebigem Gewicht $s > 1/2$, sowie der Norm von (E,H) auf einem Kompaktum abschätzen können. Dies werden wir später bei der Grenzabsorption benutzen, um zu zeigen, dass die entsprechende Lösung für reelle Frequenzen der Einstrahlungsbedingung genügt.

Aufgrund der Überlegungen in Abschnitt 2.1, sowie Lemma 2.7 und Korollar 2.8 können wir diese a–priori–Abschätzung direkt aus der a–priori–Abschätzung für das nicht–dissipative Maxwell–Problem mit Ausstrahlungsbedingung folgern. Diese Abschätzung zitieren wir zunächst aus Pauly [11, Satz 4.9].

Satz 2.11
Seien $J \Subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ein Intervall, $t < -1/2$, $s \in (1/2,1)$ und $\tau > 1$. Dann existieren Konstanten $c,\delta > 0$ und ein $\hat{t} > -1/2$, sodass für alle $\omega \in \mathbb{C}_+$ mit $\omega^2 = \lambda^2 + \mathrm{i}\xi\lambda$, $\lambda \in J$, $\xi \in (0,1]$ und $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s$ die folgende Abschätzung für die Lösung (E,H) von $\mathrm{Max}(0,\Lambda,\omega,F,G)$ gilt:

$$\left\|(E,H)\right\|_{\mathbf{R}^q_t\times\mathbf{D}^{q+1}_t} + \left\|(r^{-1}S+\mathrm{Id})(E,H)\right\|_{\mathrm{L}^2_{\hat{t}}} \quad\leq\quad c\cdot\Big(\left\|(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} + \left\|(E,H)\right\|_{\mathrm{L}^2(U(\delta))}\Big) \qquad .$$

Hieraus gewinnen wir unsere a–priori–Abschätzung als

Korollar 2.12
Seien $J \Subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ein Intervall, $t < -1/2$, $s \in (1/2,1)$ und $\tau > 1$. Dann existieren Konstanten $c,\delta > 0$ und ein $\hat{t} > -1/2$, sodass für alle $\omega \in \mathbb{C}_-$ mit $\omega^2 = \lambda^2 - \mathrm{i}\xi\lambda$, $\lambda \in J$, $\xi \in (0,1]$ und $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s$ die folgende Abschätzung für die Lösung (E,H) von $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G)$ gilt:

$$\left\|(E,H)\right\|_{\mathbf{R}^q_t\times\mathbf{D}^{q+1}_t} + \left\|(r^{-1}S-\mathrm{Id})(E,H)\right\|_{\mathrm{L}^2_{\hat{t}}} \quad\leq\quad c\cdot\Big(\left\|(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} + \left\|(E,H)\right\|_{\mathrm{L}^2(U(\delta))}\Big) \qquad .$$

Beweis:
Wegen Gleichung (2.1) und Lemma 2.7 gilt

$$(E,H) \text{ löst } \mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G) \quad\Leftrightarrow\quad (-E,H) \text{ löst } \mathrm{Max}(0,\Lambda,-\omega,F-\sigma E,-G) \qquad .$$

Desweiteren gilt für den Strahlungsterm

$$\begin{aligned} (r^{-1}TH - E, r^{-1}RE - H) &= (r^{-1}TH + (-E), -(r^{-1}R(-E)+H)) \\ \Rightarrow\qquad \left\|(r^{-1}S-\mathrm{Id})(E,H)\right\|_{\mathrm{L}^2_{\hat{t}}} &= \left\|(r^{-1}S+\mathrm{Id})(-E,H)\right\|_{\mathrm{L}^2_{\hat{t}}} \qquad . \end{aligned}$$

Die Frequenzen ω erfüllen mit $\lambda \in J$ und $\xi \in (0,1]$ die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & \omega \in \mathbb{C}_- && \text{mit} && \omega^2 &= \lambda^2 - \mathrm{i}\xi\lambda \\ \Leftrightarrow\qquad & -\omega \in \mathbb{C}_+ && \text{mit} && (-\omega)^2 &= (-\lambda)^2 + \mathrm{i}\xi(-\lambda) \qquad . \end{aligned}$$

Nach Satz 2.11 erhalten wir für das Intervall $-J$, $t < -1/2$ und $s \in (1/2,1)$ Konstanten $c,\delta > 0$ unabhängig von ω, (E,H) und (F,G), sowie ein $\hat{t} > -1/2$, mit denen folgende Abschätzung gilt:

$$\left\|(E,H)\right\|_{\mathbf{R}^q_t\times\mathbf{D}^{q+1}_t} + \left\|(r^{-1}S-\mathrm{Id})(E,H)\right\|_{\mathrm{L}^2_{\hat{t}}} \quad\leq\quad c\cdot\Big(\left\|(F-\sigma E,-G)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} + \left\|(E,H)\right\|_{\mathrm{L}^2(U(\delta))}\Big) \qquad .$$

Die Verwendung der Dreiecksungleichung auf den ersten Summanden der rechten Seite und ein eventuelles Vergrößern der Konstanten c und δ (abhängig nur von σ) liefern die Behauptung. ■

2.5 Polynomiales und exponentielles Abklingen

In seiner Arbeit kann PAULY [11, Satz 4.11] das polynomiale Abklingen für sehr allgemeine Λ zeigen, und zwar reicht die Voraussetzung, dass Λ nur L^{∞}-Einträge besitzt. Da für das polynomiale Abklingen nur die Maxwell–Gleichungen benötigt werden, nicht aber die Strahlungsbedingung, reichen die Überlegungen aus Abschnitt 2.1 vollkommen aus, ein völlig analoges Ergebnis für die Lösung der dissipativen Maxwell–Gleichungen zu folgern.

Satz 2.13
Seien $\omega \in J \Subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ein Intervall, $1/2 < s \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{I}$ und $\tau > 1$. Ist bereits $(E,H) \in \mathbf{R}^q_{>-\frac{1}{2}} \times \mathbf{D}^{q+1}_{>-\frac{1}{2}}$ und erfüllt die Maxwell–Gleichungen

$$(M + \mathrm{i}\omega\Lambda)(E,H) =: (F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s \qquad ,$$

so ist $(E,H) \in \mathbf{R}^q_{s-1} \times \mathbf{D}^{q+1}_{s-1}$ und es existieren von (E,H), (F,G) und ω unabhängige Konstanten $c, \delta > 0$, sodass die folgende Abschätzung gilt:

$$\big\|(E,H)\big\|_{\mathbf{R}^q_{s-1} \times \mathbf{D}^{q+1}_{s-1}} \quad \leq \quad c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{\mathrm{L}^2_s} + \big\|(E,H)\big\|_{\mathrm{L}^2(U(\delta))} \Big) \qquad .$$

Hieraus ziehen wir sofort das folgende

Korollar 2.14
Seien $\omega \in J \Subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ein Intervall, $1/2 < s \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{I}$ und $\tau > 1$. Ist bereits $(E,H) \in \mathbf{R}^q_{>-\frac{1}{2}} \times \mathbf{D}^{q+1}_{>-\frac{1}{2}}$ und erfüllt die dissipativen Maxwell–Gleichungen

$$(M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})(E,H) =: (F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s \qquad ,$$

so ist $(E,H) \in \mathbf{R}^q_{s-1} \times \mathbf{D}^{q+1}_{s-1}$ und es existieren von (E,H), (F,G) und ω unabhängige Konstanten $c, \delta > 0$, sodass die folgende Abschätzung gilt:

$$\big\|(E,H)\big\|_{\mathbf{R}^q_{s-1} \times \mathbf{D}^{q+1}_{s-1}} \quad \leq \quad c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{\mathrm{L}^2_s} + \big\|(E,H)\big\|_{\mathrm{L}^2(U(\delta))} \Big) \qquad .$$

Die nachfolgende Bemerkung [11, Bem. 4.12] zitieren wir ebenfalls aus der Arbeit von PAULY und erweitern sie auf die Lösung der dissipativen Maxwell–Gleichungen.

Bemerkung 2.15
Gilt in Satz 2.13 bzw. in Korollar 2.14 sogar $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s$ für alle $s \in \mathbb{R}$, so folgt

$$(E,H) \in \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \mathbf{R}^q_s \times \mathbf{D}^{q+1}_s \qquad .$$

Dies ist z.B. bei $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{vox}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{vox}}$ der Fall.

Weiterhin kann PAULY in seiner Arbeit sogar exponentielles Abklingen nachweisen, falls

$$(\varepsilon, \mu) \in \mathrm{C}^{2,q}(\Xi) \times \mathrm{C}^{2,q+1}(\Xi)$$

mit beschränkten Ableitungen gilt. Hierbei ist $\Xi \subset \mathbb{R}^N$ ein Außengebiet. Außerdem müssen die Daten etwas regulärer sein. Dieses Resultat benötigt PAULY in seiner Arbeit nicht und auch wir benötigen es nicht, aber es ist ebenso leicht auf das nicht–dissipative Problem zu übertragen wie das polynomiale Abklingen, weswegen wir es der Vollständigkeit halber tun möchten. Wiederum benötigen wir nur die Maxwell–Gleichungen und nicht die Strahlungsbedingung. Wir zitieren [11, Satz 4.19]:

Satz 2.16
Seien $(\varepsilon, \mu) \in \mathrm{C}^{2,q}(\Xi) \times \mathrm{C}^{2,q+1}(\Xi)$ mit beschränkten Ableitungen, $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\tau > 1$ und $\exp(tr) \cdot (F,G) \in \mathbf{H}^{2,q}(\Xi) \times \mathbf{H}^{2,q+1}(\Xi)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sowie

$$(E,H) \in \mathbf{R}^q_{>-\frac{1}{2}}(\Xi) \times \mathbf{D}^{q+1}_{>-\frac{1}{2}}(\Xi) \qquad \text{mit} \qquad (M + \mathrm{i}\omega\Lambda)(E,H) = (F,G) \qquad .$$

Dann folgt für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle Außengebiete $\tilde{\Xi} \subset \Xi$ mit $\operatorname{dist}(\tilde{\Xi}, \partial\Xi) > 0$ und $0 \notin \overline{\tilde{\Xi}}$

$$\exp(tr) \cdot (E,H) \in \mathbf{H}^{2,q}(\tilde{\Xi}) \times \mathbf{H}^{2,q+1}(\tilde{\Xi}) \qquad .$$

Analog erhält man das

Korollar 2.17
Seien $(\varepsilon,\mu) \in \mathrm{C}^{2,q}(\Xi) \times \mathrm{C}^{2,q+1}(\Xi)$ *mit beschränkten Ableitungen,* $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*,* $\tau > 1$ *und* $\exp(tr) \cdot (F,G) \in \mathbf{H}^{2,q}(\Xi) \times \mathbf{H}^{2,q+1}(\Xi)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$ *sowie*

$$(E,H) \in \mathbf{R}^q_{>-\frac{1}{2}}(\Xi) \times \mathbf{D}^{q+1}_{>-\frac{1}{2}}(\Xi) \qquad \text{mit} \qquad (M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})(E,H) = (F,G) \qquad .$$

Dann folgt für alle $t \in \mathbb{R}$ *und alle Außengebiete* $\tilde{\Xi} \subset \Xi$ *mit* $\mathrm{dist}(\tilde{\Xi}, \partial\Xi) > 0$, $\mathrm{dist}(\tilde{\Xi}, \mathrm{supp}(\sigma)) > 0$ *und* $0 \notin \overline{\tilde{\Xi}}$

$$\exp(tr) \cdot (E,H) \in \mathbf{H}^{2,q}(\tilde{\Xi}) \times \mathbf{H}^{2,q+1}(\tilde{\Xi}) \qquad .$$

Wir zitieren eine weitere Bemerkung [11, Bem. 4.20] und erweitern sie auf das dissipative Problem.

Bemerkung 2.18
Für $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{vox}}(\Xi) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{vox}}(\Xi)$ *liefert Satz 2.16 bzw. Korollar 2.17 für alle* $t \in \mathbb{R}$ *mit* $\Xi' := \mathbb{R}^N \backslash (\mathrm{supp}(F,G) \cup \mathrm{supp}(\sigma) \cup \{0\})$

$$\exp(tr) \cdot (E,H) \in \mathbf{H}^{2,q}(\Xi') \times \mathbf{H}^{2,q+1}(\Xi') \qquad .$$

2.6 Polynomiales und exponentielles Abklingen der Eigenlösungen

Nun können wir daran gehen, für $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ das polynomiale Abklingen der Eigenlösungen des dissipativen Problems $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, \omega, 0, 0)$ zu folgern, sowie unter den stärkeren Voraussetzungen an (ε, μ) sogar das exponentielle Abklingen der Eigenlösungen.

Hierbei werden zum ersten Mal nicht nur die Maxwell–Gleichungen benötigt, sondern auch die Strahlungsbedingung. Der Beweis für das dissipative Problem wird vollkommen analog zu dem von Pauly geführten verlaufen und darüberhinaus liefern, dass die Eigenlösungen des dissipativen Problems gerade die Eigenlösungen des nicht–dissipativen Problems sind, welche auf Ω_I verschwinden.

Zunächst zitieren wir ein Lemma aus Pauly [11, Lemma 4.21], welches wir wegen $\Omega = \mathbb{R}^N$ etwas spezialisieren können.

Lemma 2.19
Seien $\varrho > 0$ *und* $(E,H) \in \mathbf{R}^q_t \times \mathbf{D}^{q+1}_t$ *mit einem* $t \in \mathbb{R}$ *und* $\varphi \in \mathrm{C}^0([0,\varrho], \mathbb{C})$*. Dann gilt für*

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & [0,\varrho] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & \theta & \longmapsto & \displaystyle\int_\theta^\varrho \varphi(s)\, ds \end{array}$$

und mit $\Phi := \varphi \circ r$*,* $\Psi := \psi \circ r$

$$\langle \Phi r^{-1} R E, H \rangle_{U(\varrho)} \quad = \quad \langle \Psi \mathrm{rot} E, H \rangle_{U(\varrho)} + \langle \Psi E, \mathrm{div} H \rangle_{U(\varrho)} \qquad .$$

Der folgende Satz liefert das polynomiale bzw. exponentielle Abklingen der Eigenlösungen des nicht–dissipativen Problems mit Einstrahlungsbedingung.

Satz 2.20
Seien $\tau > 1$ *und* $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*. Ist* (E,H) *Lösung zu* $\mathrm{Max}(0, \Lambda, \omega, 0, 0)$*, so folgt*

$$(E,H) \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \left(\mathbf{R}^q_t \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathbf{D}^q_t \right) \times \left(\mathbf{D}^{q+1}_t \cap \mu^{-1}{}_0\mathbf{R}^{q+1}_t \right) \qquad .$$

Gilt desweiteren $(\varepsilon,\mu) \in \mathrm{C}^{2,q}(\Xi) \times \mathrm{C}^{2,q+1}(\Xi)$ *mit beschränkten Ableitungen für ein Außengebiet* $\Xi \subset \mathbb{R}^N$*, so liefert dies für alle* $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(tr) \cdot (E,H) \in \left(\mathbf{R}^q \cap \varepsilon^{-1} \mathbf{D}^q \right) \times \left(\mathbf{D}^{q+1} \cap \mu^{-1} \mathbf{R}^{q+1} \right)$$

und für alle Außengebiete $\tilde{\Xi} \subset \Xi$ *mit* $\mathrm{dist}(\tilde{\Xi}, \partial\Xi) > 0$

$$\exp(tr) \cdot (E,H) \in \mathbf{H}^{2,q}(\tilde{\Xi}) \times \mathbf{H}^{2,q+1}(\tilde{\Xi}) \qquad .$$

Die Aussage ist mit der aus der Arbeit von PAULY [11, Satz 4.22] für das Maxwell–Problem mit Ausstrahlungsbedingung identisch. Aufgrund von Korollar 2.8, sowie den Voraussetzungen $\sigma = 0$ und $(F, G) = (0, 0)$ ist die Folgerung dieser Aussage für das Maxwell–Problem mit Einstrahlungsbedingung trivial.

Als Nächstes wollen wir in einem analogen Beweis zeigen, dass die Eigenlösungen des dissipativen Maxwell–Problems spezielle Eigenlösungen des nicht–dissipativen Maxwell–Problems sind. Dies formulieren wir in

Satz 2.21
Sei $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(i) (E, H) *löst* $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, \omega, 0, 0)$,

(ii) (E, H) *löst* $\mathrm{Max}(0, \Lambda, \omega, 0, 0)$ *und* $(E, H)|_{\Omega_I} = (0, 0)$.

Beweis:
Die Aussage **(ii)** $\Rightarrow$ **(i)** ist völlig trivial. Also müssen wir nur noch **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)** zeigen. Dazu gehen wir genauso wie PAULY [11, Satz 4.22] vor:
Sei (E, H) die Lösung von $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, \omega, 0, 0)$. Die Strahlungsbedingung $r^{-1}RE - H \in \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}}$ gibt uns ein $t > -1/2$ mit

$$\lim_{\varrho\to\infty} \left\|r^{-1}RE - H\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}_t(U(\varrho))} < \infty$$

und es gilt

$$\left\|r^{-1}RE - H\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}_t(U(\varrho))} = \left\|r^{-1}RE\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}_t(U(\varrho))} + \left\|H\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}_t(U(\varrho))} - 2\mathrm{Re}\,\langle \Phi r^{-1}RE, H\rangle_{U(\varrho)}$$

mit $\varphi(\theta) := (1 + \theta^2)^t$ und $\Phi := \varphi \circ r$. Lemma 2.19 und die Differentialgleichung liefern

$$\begin{aligned} \langle \Phi r^{-1}RE, H\rangle_{U(\varrho)} &= \langle \Psi \mathrm{rot}E, H\rangle_{U(\varrho)} + \langle \Psi E, \mathrm{div}H\rangle_{U(\varrho)} \\ &= -\mathrm{i}\omega \underbrace{\langle \Psi\mu H, H\rangle_{U(\varrho)}}_{\in\mathbb{R}} + \mathrm{i}\omega \underbrace{\langle \Psi E, \varepsilon E\rangle_{U(\varrho)}}_{\in\mathbb{R}} - \underbrace{\langle \Psi E, \sigma E\rangle_{U(\varrho)}}_{\in\mathbb{R}} \quad . \end{aligned}$$

Die Aussagen unter den Klammern folgen aus der Symmetrie von ε, μ und σ. Damit ist für genügend großes ϱ

$$-2\mathrm{Re}\,\langle \Phi r^{-1}RE, H\rangle_{U(\varrho)} = 2\langle \Psi E, \sigma E\rangle_{U(\varrho)} = 2\langle \Psi E, \sigma E\rangle_{\Omega_I} \quad .$$

Wegen $\mathrm{supp}(\sigma) \Subset \mathbb{R}^N$ erhalten wir mit dem Satz von der monotonen Konvergenz für $\varrho \to \infty$ die Integrabilität $H \in \mathrm{L}^{2,q+1}_t$. Der zweite Term der Strahlungsbedingung $r^{-1}TH - E \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}$ liefert dann die gewünschte Integrabilität

$$(E, H) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}} \quad .$$

Schliesslich gilt mit Hilfe der Differentialgleichung, Korollar 2.14 und Bemerkung 2.15

$$(E, H) \in \mathbf{R}^q_{>-\frac{1}{2}} \times \mathbf{D}^{q+1}_{>-\frac{1}{2}} \quad \Longrightarrow \quad (E, H) \in \mathbf{R}^q_s \times \mathbf{D}^{q+1}_s \quad \text{für alle} \quad s \in \mathbb{R} \quad ,$$

was uns mit der Differentialgleichung zur Gleichung

$$\langle \sigma E, E\rangle = -\mathrm{Re}\Big(- \langle \sigma E, E\rangle \underbrace{-\mathrm{i}\omega\langle \varepsilon E, E\rangle + \mathrm{i}\omega\langle H, \mu H\rangle}_{\in\mathrm{i}\cdot\mathbb{R}}\Big) = -\mathrm{Re}\Big(\langle \mathrm{div}H, E\rangle + \langle H, \mathrm{rot}E\rangle\Big) = 0$$

bringt. Aufgrund der Generalvoraussetzung (4) an σ, Gleichung (2.1) und der Differentialgleichung ergibt sich also

$$(E, H)|_{\Omega_I} = (0, 0) \quad \text{und} \quad (E, H) \text{ löst } \mathrm{Max}(0, \Lambda, \omega, 0, 0) \quad .$$

■

Korollar 2.22
Gilt bei den Maxwell–Gleichungen das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit, so existieren keine nichttrivialen Eigenlösungen des dissipativen Maxwell–Problems für $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dies wird für den klassischen Fall von BAUER *in [4] gezeigt.*

2.7 Fredholmsche Alternative

Wir haben jetzt alle nötigen Vorbereitungen getroffen, um mit dem Prinzip der Grenzabsorption die Lösbarkeit des dissipativen Maxwell–Problems für reelle Frequenzen $\omega \neq 0$ zu zeigen. Auch in diesem Kapitel halten wir unsere Aussagen und Schlüsse sehr nahe an der Arbeit von PAULY, wobei die Grenzabsorption jedoch eine Mischung der Methode von PAULY [11, Satz 4.29] und der von KUHN [7, Lemma 21] darstellt.

Wir zitieren zunächst ein Lemma [11, Lemma 4.23] und eine Bemerkung [11, Bem. 4.24] von PAULY, welche wir für unseren Fall $\Omega = \mathbb{R}^N$ spezialisieren können.

Lemma 2.23
Seien $(E, H) \in \mathbf{R}^q_t \times \mathbf{D}^{q+1}_s$ bzw. $(E, H) \in \mathrm{R}^q_t \times \mathrm{D}^{q+1}_s$ mit $t, s \in \mathbb{R}$ und $t + s \geq 0$ bzw. $t + s \geq -1$. Dann gilt

$$\langle \mathrm{rot} E, H\rangle + \langle E, \mathrm{div} H\rangle \quad = \quad 0 \qquad .$$

Bemerkung 2.24
Für $(E, H) \in \mathbf{R}^q_t \times \mathbf{D}^{q+1}_t$ bzw. $\mathrm{R}^q_t \times \mathrm{D}^{q+1}_t$ und $(e, h) \in \mathbf{R}^q_s \times \mathbf{D}^{q+1}_s$ bzw. $\mathrm{R}^q_s \times \mathrm{D}^{q+1}_s$ mit $t, s \in \mathbb{R}$ und $t + s \geq 0$ bzw. $t + s \geq -1$ gilt

$$\langle M(E, H), (e, h)\rangle + \langle (E, H), M(e, h)\rangle \quad = \quad 0 \qquad .$$

Als Nächstes benötigen wir noch folgende

Definition 2.25
Wir definieren

$${}_\sigma\mathbb{P} := \big\{\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, \omega, 0, 0) \text{ besitzt eine nichttriviale Lösung}\big\}$$

und für $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$$\mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega) := \big\{(E, H) : (E, H) \text{ löst } \mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, \omega, 0, 0)\big\} \qquad .$$

Mit Hilfe der Sätze 2.10 und 2.21 geben wir noch folgende

Bemerkung 2.26
Es gelten:

(i) ${}_\sigma\mathbb{P} \subset \mathbb{C}_+\backslash\{0\} \qquad .$

(ii) *Für $\omega \in \mathbb{C}_-\backslash\mathbb{R}$ ist*

$$\mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega) = \{(0, 0)\} \qquad .$$

(iii) *Für $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist*

$$\mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega) = \big\{(E, H) \in \mathcal{N}(\mathrm{Max}, 0, \Lambda, \omega) : (E, H)|_{\Omega_I} = (0, 0)\big\} \qquad .$$

Das nächste Lemma benötigen wir noch, um bei der Grenzabsorption von der Konvergenz in $\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}$ und gleichmäßiger Beschränktheit auf die Konvergenz in $\mathrm{L}^{2,q}_{<-\frac{1}{2}}$ zu schließen.

Lemma 2.27
Seien $(\Phi_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^{2,q}_{<t_0}$ mit $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}$ mit

$$\bigwedge_{t<t_0} \ \bigvee_{c>0} \ \bigwedge_{l\in\mathbb{N}} \ \|\Phi_l\|_{\mathrm{L}^{2,q}_t} \quad \leq \quad c \qquad \text{und} \qquad \Phi_l \xrightarrow[\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}]{l\to\infty} \Phi \qquad .$$

Dann gelten

$$\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_{<t_0} \qquad \text{und} \qquad \bigwedge_{t<t_0} \ \Phi_l \xrightarrow[\mathrm{L}^{2,q}_t]{l\to\infty} \Phi \qquad .$$

Beweis:
Seien $t < t_0$ und $\delta > 0$ gegeben. Dann wählen wir ein $t < \hat{t} < t_0$. Dazu gibt es nach Voraussetzung ein $c > 0$ mit

$$\bigwedge_{l\in\mathbb{N}} \ \|\Phi_l\|_{\mathrm{L}^{2,q}_{\hat{t}}} \quad \leq \quad c \qquad .$$

Nun wählen wir $R > 0$ so groß, dass $(1+R^2)^{\frac{t-\hat{t}}{2}} < \frac{\delta}{4c}$. Damit erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\|\Phi_n - \Phi_m\right\|_{\mathrm{L}_t^{2,q}} &= \left\|\Phi_n - \Phi_m\right\|_{\mathrm{L}_t^{2,q}(U(R))} + \left\|\Phi_n - \Phi_m\right\|_{\mathrm{L}_t^{2,q}(A(R))} \\ &\leq \left\|\Phi_n - \Phi_m\right\|_{\mathrm{L}_t^{2,q}(U(R))} + (1+R^2)^{\frac{t-\hat{t}}{2}} \cdot \left\|\Phi_n - \Phi_m\right\|_{\mathrm{L}_{\hat{t}}^{2,q}(A(R))} \\ &< \left\|\Phi_n - \Phi_m\right\|_{\mathrm{L}_t^{2,q}(U(R))} + \frac{\delta}{2} \\ &< \delta \end{aligned}$$

für genügend große $n, m \in \mathbb{N}$. Folglich ist $(\Phi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ Cauchy–Folge in $\mathrm{L}_t^{2,q}$, konvergiert also gegen ein $\hat{\Phi} \in \mathrm{L}_t^{2,q}$. Da die Konvergenz in $\mathrm{L}_t^{2,q}$ aber auch die Konvergenz in $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{2,q}$ impliziert, folgt $\hat{\Phi} = \Phi$. ■

Nun können wir die Hauptaussage dieses Kapitels aufstellen:

Satz 2.28
Sei $\tau > 1$. Dann gelten

(i) *Für alle $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist $\mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)$ ein endlichdimensionaler Unterraum von*

$$\bigcap_{t\in\mathbb{R}} \left(\mathbf{R}_t^q \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathbf{D}_t^q\right) \times \left(\mathbf{D}_t^{q+1} \cap \mu^{-1}{}_0\mathbf{R}_t^{q+1}\right) \qquad .$$

(ii) *${}_\sigma\mathbb{P}$ besitzt in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ keinen Häufungspunkt.*

(iii) *Für alle $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und zu jedem $(F, G) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>\frac{1}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>\frac{1}{2}}$ existiert genau dann eine Lösung (E, H) von $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, \omega, F, G)$, wenn für alle $(e, h) \in \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)$*

$$\langle (F, G), (e, h)\rangle = 0 \tag{2.4}$$

gilt. Die Lösung kann so gewählt werden, dass für alle $(e, h) \in \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)$

$$\langle \Lambda(E, H), (e, h)\rangle = 0 \tag{2.5}$$

erfüllt ist und sie ist dadurch eindeutig bestimmt.

(iv) *Der Lösungsoperator aus (iii), welchen wir analog zu Satz 2.10 mit ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega$ bezeichnen wollen, bildet für alle $s > 1/2$ und $t < -1/2$*

$$\left(\mathrm{L}_s^{2,q} \times \mathrm{L}_s^{2,q+1}\right) \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)^{\perp}$$

stetig nach

$$\left(\mathbf{R}_t^q \times \mathbf{D}_t^{q+1}\right) \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)^{\perp_\Lambda}$$

ab, d.h. zu jedem $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und allen $s > 1/2$ und $t < -1/2$ existiert eine Konstante $c = c(\omega, t, s) > 0$, sodass für alle

$$(F, G) \in \left(\mathrm{L}_s^{2,q} \times \mathrm{L}_s^{2,q+1}\right) \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)^{\perp}$$

die Abschätzung

$$\left\|{}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F, G)\right\|_{\mathbf{R}_t^q \times \mathbf{D}_t^{q+1}} \quad \leq \quad c \cdot \left\|(F, G)\right\|_{\mathrm{L}_s^2}$$

gilt. Hierbei bezeichnet $\perp_\Lambda$ die Orthogonalität bzgl. $\langle \Lambda\cdot, \cdot\rangle$.

Beweis:
Zu (i) und (ii): Bemerkung 2.26 (iii) liefert für alle $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ die beiden Aussagen

$$\mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega) \subset \mathcal{N}(\mathrm{Max}, 0, \Lambda, \omega) \qquad \text{und} \qquad {}_\sigma\mathbb{P} \cap (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \subset {}_0\mathbb{P} \qquad .$$

Nun besteht ${}_0\mathbb{P}$ gerade aus den reellen Frequenzen ω, zu denen das nicht–dissipative Maxwell–Problem mit Einstrahlungsbedingung nichttriviale Eigenlösungen besitzt. Aus Korollar 2.8 schließen wir, dass dies genau dieselben Frequenzen sind, zu denen das nicht–dissipative Maxwell–Problem mit Ausstrahlungsbedingung nichttriviale Eigenlösungen besitzt. Also liefert uns der analoge Satz [11, Satz 4.29] bei Pauly die Behauptungen (i) und (ii). □

Zu (iii): (2.4) ist eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit zu den Daten (F, G), denn mit dem polynomialen Abklingen der Eigenlösungen aus $\mathcal{N}(\mathrm{Max}, 0, \Lambda, \omega)$ nach Satz 2.20, sowie Bemerkungen 2.24 und 2.26 (iii) gilt für alle $(e, h) \in \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)$

$$\langle (F,G),(e,h)\rangle \quad = \quad \langle (M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})(E,H),(e,h)\rangle \quad = \quad -\langle (E,H),(M+\mathrm{i}\omega\Lambda)(e,h)\rangle + \langle E, \sigma e\rangle \quad = \quad 0 \qquad .$$

Als Nächstes wollen wir uns um die Existenz der Lösung (E, H) kümmern. Seien dazu $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $s > 1/2$ mit $(F, G) \in \left(\mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s\right) \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)^\perp$. Seien weiterhin

$$((F_l, G_l))_{l\in\mathbb{N}} \subset \left(\mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s\right) \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)^\perp \qquad \text{mit} \qquad (F_l, G_l) \xrightarrow[\mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s]{l\to\infty} (F, G) \qquad .$$

Mit einer beliebigen positiven Nullfolge $(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset (0, 1]$ definieren wir uns die nichtreellen Frequenzen

$$\omega_l := -\sqrt{\omega^2 - \mathrm{i}\xi_l\omega} \in \mathbb{C}_-\backslash\mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad \omega_l^2 = \omega^2 - \mathrm{i}\xi_l\omega \qquad \text{und} \qquad \omega_l \xrightarrow{l\to\infty} \omega$$

und dazu die nach Satz 2.10 eindeutigen Lösungen von $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, \omega_l, F_l, G_l)$

$$(E_l, H_l) := {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega_l}(F_l, G_l) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{D}^{q+1} \qquad \text{mit} \qquad (M + \mathrm{i}\omega_l\Lambda + \hat{\sigma})(E_l, H_l) = (F_l, G_l) \qquad .$$

Wegen $\mathrm{L}^{2,q+1} = \mu({}_0\mathbf{D}^{q+1}) \oplus_{\mu^{-1}} \overline{\mathrm{rot}\mathbf{R}^q}$ (siehe Weck [19, Lemma 2 (i)]) können wir für alle $l \in \mathbb{N}$ die Zerlegung

$$G_l =: G_l^1 + G_l^2 \in \quad \mu({}_0\mathbf{D}^{q+1}) \oplus_{\mu^{-1}} \overline{\mathrm{rot}\mathbf{R}^q} \qquad \text{und} \qquad G =: G^1 + G^2 \in \quad \mu({}_0\mathbf{D}^{q+1}) \oplus_{\mu^{-1}} \overline{\mathrm{rot}\mathbf{R}^q}$$

vornehmen. Als Orthogonalprojektionen konvergieren die Formen $G_l^k \xrightarrow[\mathrm{L}^{2,q+1}]{l\to\infty} G^k$ für $k = 1, 2$.
Zerlegen wir für alle $l \in \mathbb{N}$ unser Maxwell–Problem in die Probleme

$$(E_l^1, H_l^1) := {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega_l}(0, G_l^1) \qquad \text{und} \qquad (E_l^2, H_l^2) := {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega_l}(F_l, G_l^2) \qquad ,$$

so erhalten wir für unsere Lösungen die Darstellung

$$(E_l^1, H_l^1) = (0, (\mathrm{i}\omega_l\mu)^{-1}G_l^1) \in \{0\} \times {}_0\mathbf{D}^{q+1} \qquad \text{und} \qquad (E_l^2, H_l^2) = (E_l, H_l - H_l^1) \in \mathbf{R}^q \times \left(\mathbf{D}^{q+1} \cap \mu^{-1}{}_0\mathbf{R}^{q+1}\right) \qquad .$$

Da $(H_l^1)_{l\in\mathbb{N}}$ in ${}_0\mathbf{D}^{q+1}$ gegen $H^1 := (\mathrm{i}\omega\mu)^{-1}G^1 \in {}_0\mathbf{D}^{q+1}$konvergiert, müssen wir nur noch die Lösungen (E_l, H_l^2) des zweiten Problems auf die Existenz einer in $\mathrm{L}^{2,q}_{<-\frac{1}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{<-\frac{1}{2}}$ konvergenten Teilfolge untersuchen.
Dazu machen wir noch die zusätzliche Annahme

$$\bigwedge_{t<-\frac{1}{2}} \quad \bigvee_{c>0} \quad \bigwedge_{l\in\mathbb{N}} \quad \left\|(E_l, H_l)\right\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad \leq \quad c \qquad . \tag{2.6}$$

Aufgrund der Konvergenz von $(H_l^1)_{l\in\mathbb{N}}$ in ${}_0\mathbf{D}^{q+1}$ können wir in Annahme (2.6) H_l auch durch H_l^2 ersetzen.
Sei nun $U_k := U(k)$ für $k \in \mathbb{N}$ und

$$\chi_k \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \qquad \text{mit} \qquad \chi_k|_{U_k} \equiv 1 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{supp}(\chi_k) \Subset U_{k+1} \qquad .$$

Damit ist $(\chi_k H_l^2)_{l\in\mathbb{N}} \subset \mu^{-1}\mathring{\mathbf{R}}^{q+1}(U_{k+1}) \cap \mathbf{D}^{q+1}(U_{k+1})$ und für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_k H_l^2\right\|^2_{\mathbf{D}^{q+1}(U_{k+1})\cap\mu^{-1}\mathring{\mathbf{R}}^{q+1}(U_{k+1})} \quad &\leq \quad c \cdot \Big(\left\|H_l^2\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}(U_{k+1})} + \left\|\mathrm{div} H_l^2\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}(U_{k+1})} + \left\|\mathrm{rot}\mu H_l^2\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+2}(U_{k+1})}\Big) \\
&\leq \quad c \cdot \Big(\left\|H_l^2\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}(U_{k+1})} + \left\|E_l\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}(U_{k+1})} + \left\|F_l\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}(U_{k+1})}\Big) \\
&\leq \quad c_{k+1} \qquad .
\end{aligned}$$

Folglich ist $(\chi_k H_l^2)_{l\in\mathbb{N}}$ eine in $\mu^{-1}\mathring{\mathbf{R}}^{q+1}(U_{k+1}) \cap \mathbf{D}^{q+1}(U_{k+1})$ beschränkte Folge, enthält also nach Bemerkung 1.2 (i) eine in $\mathrm{L}^{2,q+1}(U_{k+1})$ konvergente Teilfolge, da U_{k+1} als glattes Innengebiet die MKE besitzt. Sukzessive Teilfolgenauswahl für $k \in \mathbb{N}$ und Übergang zur Diagonalfolge führen zu einer Teilfolge $(H_{\pi l}^2)_{l\in\mathbb{N}}$ von $(H_l^2)_{l\in\mathbb{N}}$, welche in $\mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}$ konvergiert.

Wir wollen nun zeigen, dass dann auch $(\mathrm{div} H_{\pi l}^2)_{l\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}$ konvergiert. Dazu sehen wir, dass

$$\varepsilon_l' := \varepsilon + \frac{1}{\mathrm{i}\omega_l} \cdot \sigma \xrightarrow{l\to\infty} \varepsilon + \frac{1}{\mathrm{i}\omega} \cdot \sigma =: \varepsilon' \qquad \text{und} \qquad {\varepsilon_l'}^{-1} \xrightarrow{l\to\infty} {\varepsilon'}^{-1} \qquad .$$

Wir stellen die zweite Maxwell–Gleichung um zu

$$\mathrm{div} H_l + \mathrm{i}\omega\varepsilon' E_l \quad = \quad F_l + \mathrm{i}(\omega\varepsilon' - \omega_l\varepsilon_l')E_l \quad =: \quad \tilde{F}_l \qquad .$$

Die Folge $(\tilde{F}_l)_{l\in\mathbb{N}}$ konvergiert offensichtlich in $\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}$. Mit den Bezeichnungen

$$h_{nm} := H^2_{\pi n} - H^2_{\pi m} \qquad , \qquad e_{nm} := E_{\pi n} - E_{\pi m} \qquad , \qquad f_{nm} := \tilde{F}_{\pi n} - \tilde{F}_{\pi m}$$

erhalten wir mit Lemma 2.9 (iii) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left\|\mathrm{div} h_{nm}\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}(U_k)} &\leq \left\|\sqrt{\chi_k}\mathrm{div} h_{nm}\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}(U_{k+1})} \\
&\leq c\cdot\left|\langle\chi_k{\varepsilon'}^{-1}\mathrm{div} h_{nm}, \mathrm{div} h_{nm}\rangle_{U_{k+1}}\right| \\
&\leq c\cdot\left(\left|-\mathrm{i}\omega\langle\chi_k e_{nm}, \mathrm{div} h_{nm}\rangle_{U_{k+1}}\right| + \left|\langle\chi_k{\varepsilon'}^{-1}f_{nm}, \mathrm{div} h_{nm}\rangle_{U_{k+1}}\right|\right) \\
&\leq c\cdot\left(\left|\langle\mathrm{rot}(\chi_k e_{nm}), h_{nm}\rangle_{U_{k+1}}\right| + \left|\langle\chi_k{\varepsilon'}^{-1}f_{nm}, \mathrm{div} h_{nm}\rangle_{U_{k+1}}\right|\right)
\end{aligned}$$

Die Terme $\mathrm{rot}(\chi_k e_{nm})$ und $\mathrm{div} h_{nm}$ sind in $\mathrm{L}^{2,q+1}(U_{k+1})$ bzw. $\mathrm{L}^{2,q}(U_{k+1})$ beschränkt, während die Terme h_{nm} und ${\varepsilon'}^{-1}f_{nm}$ für $n,m\to\infty$ in $\mathrm{L}^{2,q+1}(U_{k+1})$ bzw. $\mathrm{L}^{2,q}(U_{k+1})$ gegen 0 konvergieren. Folglich ist $(\mathrm{div} H^2_{\pi l})_{l\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}$, also auch konvergent in $\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}$. Dadurch erhalten wir die Konvergenz von $(H_{\pi l})_{l\in\mathbb{N}}$ in $\mathbf{D}^{q+1}_{\mathrm{loc}}$. Damit sind auch

$$E_{\pi l} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega_{\pi l}}{\varepsilon'}^{-1}_{\pi l}(F_{\pi l} - \mathrm{div} H_{\pi l}) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{rot} E_{\pi l} = G_{\pi l} - \mathrm{i}\omega_{\pi l}\mu H_{\pi l}$$

in $\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}$ bzw. $\mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}$ konvergent. Insgesamt gibt es also ein $(E,H)\in\mathbf{R}^q_{\mathrm{loc}}\times\mathbf{D}^{q+1}_{\mathrm{loc}}$ mit

$$(E_{\pi l}, H_{\pi l}) \xrightarrow[\mathbf{R}^q_{\mathrm{loc}}\times\mathbf{D}^{q+1}_{\mathrm{loc}}]{l\to\infty} (E,H) \qquad \text{und} \qquad (M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})(E,H) = (F,G) \qquad .$$

Nach Lemma 2.27 gilt mit Zusatzannahme (2.6) und mit Hilfe der Differentialgleichungen

$$(E,H)\in\mathbf{R}^q_{<-\frac{1}{2}}\times\mathbf{D}^{q+1}_{<-\frac{1}{2}} \qquad \text{und} \qquad \bigwedge_{t<-\frac{1}{2}} \quad (E_{\pi l}, H_{\pi l}) \xrightarrow[\mathbf{R}^q_t\times\mathbf{D}^{q+1}_t]{l\to\infty} (E,H) \qquad . \tag{2.7}$$

Um die Strahlungsbedingung für (E,H) zu überprüfen, benötigen wir die a–priori–Abschätzung aus Korollar 2.12. Sei dazu $t < -1/2$ beliebig vorgegeben. Desweiteren sei $\tilde{s}\leq s$ mit $\tilde{s}\in(1/2,1)$ beliebig. Dann erhalten wir mit Korollar 2.12 Konstanten $c,\delta>0$ und ein $\hat{t}>1/2$, sodass für genügend großes $l\in\mathbb{N}$ unabhängig von $\xi_{\pi l}$, $(F_{\pi l}, G_{\pi l})$, $(E_{\pi l}, H_{\pi l})$ und $\varrho>0$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\begin{aligned}
&\left\|(E_{\pi l}, H_{\pi l})\right\|_{\mathbf{R}^q_t(U(\varrho))\times\mathbf{D}^{q+1}_t(U(\varrho))} + \left\|(r^{-1}S - \mathrm{Id})(E_{\pi l}, H_{\pi l})\right\|_{\mathrm{L}^2_{\hat{t}}(U(\varrho))} \\
\leq\quad & c\cdot\left(\left\|(F_{\pi l}, G_{\pi l})\right\|_{\mathrm{L}^2_{\tilde{s}}} + \left\|(E_{\pi l}, H_{\pi l})\right\|_{\mathrm{L}^2(U(\delta))}\right) \\
\leq\quad & c\cdot\left(\left\|(F_{\pi l}, G_{\pi l})\right\|_{\mathrm{L}^2_s} + \left\|(E_{\pi l}, H_{\pi l})\right\|_{\mathrm{L}^2(U(\delta))}\right) \qquad .
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Der Grenzübergang $l\to\infty$ liefert unabhängig von ϱ

$$\begin{aligned}
&\left\|(E,H)\right\|_{\mathbf{R}^q_t(U(\varrho))\times\mathbf{D}^{q+1}_t(U(\varrho))} + \left\|(r^{-1}S - \mathrm{Id})(E,H)\right\|_{\mathrm{L}^2_{\hat{t}}(U(\varrho))} \\
\leq\quad & c\cdot\left(\left\|(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} + \left\|(E,H)\right\|_{\mathrm{L}^2(U(\delta))}\right) \qquad .
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Führen wir nun den Grenzübergang $\varrho\to\infty$ durch, so erhalten wir mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\left\|(E,H)\right\|_{\mathbf{R}^q_t\times\mathbf{D}^{q+1}_t} + \left\|(r^{-1}S - \mathrm{Id})(E,H)\right\|_{\mathrm{L}^2_{\hat{t}}} \quad \leq \quad c\cdot\left(\left\|(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} + \left\|(E,H)\right\|_{\mathrm{L}^2(U(\delta))}\right) \qquad . \tag{2.10}$$

Dies liefert uns erneut die richtige Integrabilität für (E,H) und die gewünschte Strahlungsbedingung

$$(E,H)\in\mathbf{R}^q_{<-\frac{1}{2}}\times\mathbf{D}^{q+1}_{<-\frac{1}{2}} \qquad \text{und} \qquad (r^{-1}S - \mathrm{Id})(E,H)\in\mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}\times\mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}} \qquad .$$

Damit löst (E,H) das Problem $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G)$. Wählen wir $(F_l,G_l) := (F,G)$ für alle $l\in\mathbb{N}$, so haben wir die Existenz einer Lösung zu $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G)$ gezeigt.

Wegen des polynomialen Abklingens der Eigenlösungen aus $\mathcal{N}(\mathrm{Max}, 0, \Lambda, \omega)$ nach Satz 2.20, sowie Bemerkungen 2.24 und 2.26 (iii) gilt für alle $(e, h) \in \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)$ und für alle $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (F_l, G_l), (e,h) \rangle &=& \langle (M + \mathrm{i}\omega_l \Lambda + \hat{\sigma})(E_l, H_l), (e,h) \rangle \\ &= -\langle (E_l, H_l), (M + \mathrm{i}\overline{\omega}_l \Lambda)(e,h) \rangle &=& \mathrm{i} \underbrace{(\omega_l - \omega)}_{\neq 0} \cdot \langle \Lambda(E_l, H_l), (e,h) \rangle \end{aligned}$$

und somit $\langle \Lambda(E_l, H_l), (e,h) \rangle = 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Für jedes $t < -1/2$ ist $\langle \Lambda \cdot, (e,h) \rangle$ für jede Eigenlösung $(e, h) \in \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathrm{L}^{2,q}_t \times \mathrm{L}^{2,q+1}_t$. Folglich erhalten wir mit (2.7)

$$\bigwedge_{(e,h) \in \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)} \langle \Lambda(E, H), (e,h) \rangle = 0 \qquad . \tag{2.11}$$

Damit ist die Lösung (E, H) eindeutig bestimmt, wodurch wir einen Lösungsoperator ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega$ definieren können:

$$\begin{aligned} {}_\sigma\mathcal{L}_\omega \quad : \quad \left(\mathrm{L}^{2,q}_{>\frac{1}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>\frac{1}{2}} \right) \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)^\perp &\longrightarrow \left(\mathbf{R}^q_{<-\frac{1}{2}} \times \mathbf{D}^{q+1}_{<-\frac{1}{2}} \right) \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)^{\perp_\Lambda} \\ (F, G) &\longmapsto (E, H) \quad \text{Lösung zu } \mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, \omega, F, G) \end{aligned}$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass unsere Zusatzannahme (2.6) richtig ist. Diese wollen wir mit einem Widerspruchsbeweis zeigen. Wäre (2.6) falsch, so hieße das

$$\bigvee_{t < -\frac{1}{2}} \ \bigwedge_{c > 0} \ \bigvee_{l \in \mathbb{N}} \ \left\| (E_l, H_l) \right\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad > \quad c \qquad .$$

Also gäbe es (nach eventueller Teilfolgenauswahl) ein $t < -1/2$ mit $\left\| (E_l, H_l) \right\|_{\mathrm{L}^2_t} \xrightarrow{l \to \infty} \infty$. Definieren wir uns die Formen

$$(\tilde{E}_l, \tilde{H}_l) := \left\| (E_l, H_l) \right\|^{-1}_{\mathrm{L}^2_t} \cdot (E_l, H_l) \qquad \text{und} \qquad (\tilde{F}_l, \tilde{G}_l) := \left\| (E_l, H_l) \right\|^{-1}_{\mathrm{L}^2_t} \cdot (F_l, G_l) \qquad ,$$

so gelten die Aussagen

$$\left\| (\tilde{E}_l, \tilde{H}_l) \right\|_{\mathrm{L}^2_t} = 1 \quad \text{und} \quad (M + \mathrm{i}\omega_l \Lambda + \hat{\sigma})(\tilde{E}_l, \tilde{H}_l) = (\tilde{F}_l, \tilde{G}_l) \quad \text{für alle} \quad l \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \left\| (\tilde{F}_l, \tilde{G}_l) \right\|_{\mathrm{L}^2_s} \xrightarrow{l \to \infty} 0 \qquad .$$

Führen wir die obige Argumentation des Beweises durch, so erhalten wir die Konvergenz einer Teilfolge $((\tilde{E}_{\pi l}, \tilde{H}_{\pi l}))_{l \in \mathbb{N}}$ in $\mathbf{R}^q_{\tilde{t}} \times \mathbf{D}^{q+1}_{\tilde{t}}$ gegen ein $(\tilde{E}, \tilde{H}) \in \mathbf{R}^q_{\tilde{t}} \times \mathbf{D}^{q+1}_{\tilde{t}}$ für jedes $\tilde{t} < t$. Die Abschätzungen (2.8), (2.9) und (2.10) sind mit Korollar 2.12 analog durchführbar.
Damit wäre $(\tilde{E}, \tilde{H}) \in \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)^{\perp_\Lambda} \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega) = \{(0,0)\}$. Dies ist aber wegen der Abschätzung

$$1 \quad = \quad \left\| (\tilde{E}_{\pi l}, \tilde{H}_{\pi l}) \right\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad \leq \quad c \cdot \left(\left\| (\tilde{F}_{\pi l}, \tilde{G}_{\pi l}) \right\|_{\mathrm{L}^2_s} + \left\| (\tilde{E}_{\pi l}, \tilde{H}_{\pi l}) \right\|_{\mathrm{L}^2(U(\delta))} \right) \quad \xrightarrow{l \to \infty} \quad 0$$

ein Widerspruch. Folglich ist die Existenz einer eindeutigen Lösung (E, H) von $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, \omega, F, G)$ gezeigt. $\square$

Zu (iv): Wir wählen $s > 1/2$ und $t < -1/2$ und betrachten

$$\begin{aligned} {}_\sigma\mathcal{L}_\omega \quad : \quad D_s({}_\sigma\mathcal{L}_\omega) &\longrightarrow W({}_\sigma\mathcal{L}_\omega) \subset W_t({}_\sigma\mathcal{L}_\omega) := \left(\mathbf{R}^q_t \times \mathbf{D}^{q+1}_t \right) \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)^{\perp_\Lambda} \\ (F, G) &\longmapsto (E, H) \end{aligned}$$

Hierbei sind

$$D_s({}_\sigma\mathcal{L}_\omega) := \left(\mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s \right) \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega)^\perp$$

und (E, H) die nach (iii) eindeutige Lösung zu $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, \omega, F, G)$. Da die Eigenlösungen polynomial abklingen, sind $D_s({}_\sigma\mathcal{L}_\omega)$ und $W_t({}_\sigma\mathcal{L}_\omega)$ Hilbert–Räume. Mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt die Stetigkeit von ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega$ aus der Abgeschlossenheit von ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega$. Um diese zu zeigen, betrachten wir die Folgen

$$\begin{aligned} D_s({}_\sigma\mathcal{L}_\omega) \ni (F_l, G_l) \quad &\xrightarrow[\mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s]{l \to \infty} \quad (F, G) \in D_s({}_\sigma\mathcal{L}_\omega) \\ &\text{und} \\ W({}_\sigma\mathcal{L}_\omega) \ni {}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F_l, G_l) =: (E_l, H_l) \quad &\xrightarrow[\mathbf{R}^q_t \times \mathbf{D}^{q+1}_t]{l \to \infty} \quad (E, H) \in W_t({}_\sigma\mathcal{L}_\omega) \qquad . \end{aligned}$$

Wir müssen also $(E,H) = {}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ zeigen. Es ist klar, dass gilt

$$(M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})(E,H) \quad = \quad (F,G) \qquad .$$

Sei nun $\tilde{t} < -1/2$. Mit der Abschätzung (2.9) erhalten wir ein $\hat{t} > 0$ und von l unabhängige Konstanten $c, \delta > 0$, sodass für alle $\varrho > 0$

$$\begin{aligned} &\left\|(E_l,H_l)\right\|_{\mathbf{R}^q_{\tilde{t}}(U(\varrho))\times\mathbf{D}^{q+1}_{\tilde{t}}(U(\varrho))} + \left\|(r^{-1}S - \mathrm{Id})(E_l,H_l)\right\|_{\mathrm{L}^2_{\hat{t}}(U(\varrho))} \\ \leq \quad & c\cdot\left(\left\|(F_l,G_l)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} + \left\|(E_l,H_l)\right\|_{\mathrm{L}^2(U(\delta))}\right) \end{aligned}$$

gilt. Führen wir nun die Grenzübergänge $l \to \infty$ und $\varrho \to \infty$ in dieser Reihenfolge durch, so ergeben sich

$$(E,H) \in W_{<-\frac{1}{2}}({}_\sigma\mathcal{L}_\omega)$$

und die Strahlungsbedingung für (E,H). Damit ist $(E,H) = {}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$, was die Abgeschlossenheit von ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega$ und somit die Stetigkeit beweist. ■

Zum Abschluss des Abschnittes zitieren wir noch zwei Bemerkungen [11, Bem. 4.30 u. 4.31] aus PAULY, die auch auf das dissipative Maxwell–Problem übertragen werden können.

Bemerkung 2.29
Genügen die Maxwell–Gleichungen dem Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit, so folgt mit Bemerkung 2.26 (iii) für $\sigma \neq 0$ für alle $\omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\mathcal{N}(\mathrm{Max},\sigma,\Lambda,\omega) = \{(0,0)\} \qquad .$$

In jedem Fall gilt jedoch zumindest für alle $\omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $(E,H) \in \mathcal{N}(\mathrm{Max},\sigma,\Lambda,\omega)$

$$\operatorname{supp}(E,H) \subset U(\varrho) \qquad \textit{falls} \qquad \operatorname{supp}(\hat{\Lambda}) \Subset U(\varrho) \qquad \textit{mit} \qquad \varrho > 0 \qquad ,$$

denn (E,H) löst in $A(\varrho)$ die Helmholtz–Gleichung

$$(\Delta + \omega^2)(E,H) = (0,0)$$

und muss somit nach der Rellichschen Abschätzung (siehe LEIS *[10, p. 59]) in $A(\varrho)$ verschwinden. Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, kann* BAUER *in [4] im klassischen Fall die Beschränktheit des Trägers von Eigenlösungen im Falle von C^2–Koeffizienten (ε,μ) nachweisen, sodass mit Hilfe des von* LEIS *bewiesenen Prinzips der eindeutigen Fortsetzbarkeit die Existenz nichttrivialer Eigenlösungen für $\omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ausgeschlossen werden kann.*

Bemerkung 2.30
Seien $\omega \in {}_\sigma\mathbb{P} \cap (\mathbb{R}\setminus\{0\})$ und $d_q(\omega) := \dim \mathcal{N}(\mathrm{Max},\sigma,\Lambda,\omega)$, sowie $\{(e_l,h_l)\}_{l=1}^{d_q(\omega)}$ eine Basis von $\mathcal{N}(\mathrm{Max},\sigma,\Lambda,\omega)$. Dann können wir zu gegebenem $\gamma \in \mathbb{C}^{d_q(\omega)}$ eine Lösung (E,H) von $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G)$ aus Satz 2.28 (iii) auch so wählen, dass

$$\langle\Lambda(E,H),(e_l,h_l)\rangle = \gamma_l \qquad , \qquad l = 1,\ldots,d_q(\omega)$$

gilt. Auch hierdurch ist die Lösung eindeutig bestimmt.

3 Elektro–Magneto–Statik

Dieses Kapitel widmen wir der Lösungstheorie für das statische dissipative Maxwell–Problem, d.h. wir wollen Gleichungen der Form

$$\mathrm{rot} E = G \qquad \text{und} \qquad \mathrm{div} H + \sigma E = F \tag{3.1}$$

behandeln. Im Gegensatz zum entsprechenden statischen nicht–dissipativen Maxwell–Problem sind die Gleichungen für E und H nicht entkoppelt, wodurch wir $E \in \mathbf{R}^q_{\mathrm{loc}}$ und $H \in \mathbf{D}^{q+1}_{\mathrm{loc}}$ nicht getrennt voneinander bestimmen können. Die Kopplung der Gleichungen über die Transformation σ, welche kompakten Träger besitzt, bringt zusätzliche Schwierigkeiten mit sich:

Es ist klar, dass wir für die Eindeutigkeit von E und H noch weitere Daten — z.B. für die Rotation von H und die Divergenz von E — benötigen. Jedoch ist leicht einzusehen, dass die zweite Gleichung aus (3.1) $F - \sigma E \in {}_0\mathbf{D}^q_{\mathrm{loc}}$ impliziert. Damit ist die Divergenz von σE auf Ω_I schon festgelegt, sodass wir nur noch ein Datum für die Divergenz von E auf Ω_A fordern können. Dies impliziert aber auch, dass wir an E auf Ω_A noch endlich viele Nebenbedingungen stellen müssen, um die Existenz nichttrivialer Lösungen für das homogene Problem auszuschließen.

Um diesen Bedingungen an E Genüge zu tragen, werden wir unsere Lösung (E, H) so konstruieren, dass wir zuerst die Einschränkung von E auf Ω_I finden, und sie dann derart nach Ω_A fortsetzen, dass $E \in \mathbf{R}^q_{\mathrm{loc}}$ gilt. Haben wir E ermittelt, so erhalten wir H als Lösung eines statischen Ganzraumproblems.

Zur Vorbereitung dieser Lösungsmethode wollen wir im ersten Abschnitt Ergebnisse für die Behandlung statischer Maxwell–Probleme auf Innengebieten zusammentragen, sowie im zweiten Abschnitt analoge Ergebnisse für die Lösung statischer Maxwell–Probleme auf Außengebieten. Bei der Lösungstheorie für solche Gebiete werden nicht nur Daten für die Rotation und die Divergenz von E erforderlich sein, sondern auch Daten für die entsprechende Tangentialspur bzw. Normalspur von E, sowie Daten für jeweils endlich viele Nebenbedingungen, welche die Eindeutigkeit sichern.

Im dritten Abschnitt werden wir dann untersuchen, wie sich die Bedingungen $E \in \mathbf{R}^q_{\mathrm{loc}}$ bzw. $F - \sigma E \in {}_0\mathbf{D}^q_{\mathrm{loc}}$ in Bedingungen an die Tangentialspuren bzw. Normalspuren von E auf Ω_I und Ω_A übertragen. Außerdem werden wir dort einen Zusammenhang zwischen den Nebenbedingungen für die Lösung des statischen Maxwell–Problems auf Ω_I und den Nebenbedingungen für die Lösung des statischen Maxwell–Problems auf Ω_A herstellen.
Sind diese Vorbereitungen getroffen, werden wir definieren, was wir unter einer Lösung (E, H) des statischen dissipativen Maxwell–Problems verstehen, welches die Gleichungen (3.1) beinhaltet, und können dann Bedingungen an die Daten für die eindeutige Lösbarkeit des statischen Maxwell–Problems aufstellen. Wir sind dabei in der Lage, Daten $(F, G) \in \mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s$ für Gewichte $s > 1 - N/2$ zuzulassen.

Der vierte Abschnitt befasst sich anschließend mit der Iteration eines geeigneten statischen Lösungsoperators. Diese Ergebnisse benötigen wir, um die Niederfrequenzasymptotik des nächsten Kapitels aufstellen zu können.

Für dieses Kapitel wollen wir die folgenden Generalvoraussetzungen treffen:

(1) Die Raumdimension $N \geq 3$ sei <u>ungerade</u> und der Rang der Differentialformen sei $q \in \{0, \dots, N\}$.

(2) $\Omega_I \subset \mathbb{R}^N$ sei ein Innengebiet der Klasse C^3. Dann ist $\Omega_A := \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}_I$ ein Außengebiet mit C^3–Rand.

(3) Der Radius r_0 sei so groß, dass $\Omega_I \subset U(r_0)$ und für alle q die Träger der Formen aus $\mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega_A)$ und $\mathrm{B}^q(\Omega_A)$ (letztere nur im Falle $q \neq 1$) in $U(r_0)$ liegen. $\mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega_A)$ und $\mathrm{B}^q(\Omega_A)$ werden in Lemma 3.12 definiert.

(4) Die Radien r_1, r_2 in der Definition (1.17) der Ausschneidefunktion η setzen wir durch die Formel $r_n := 2^n \cdot r_0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ fest.

(5) Die Transformationen $(\varepsilon, \mu) = \mathrm{Id} + (\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}) \in \mathrm{V}^{q,0}_\tau \times \mathrm{V}^{q+1,0}_\tau$ mit $\tau \geq 0$ seien einmal stetig differenzierbar mit

$$\partial_n \hat{\varepsilon}, \partial_n \hat{\mu} = \mathcal{O}(r^{-1-\tau}) \quad \text{für} \quad r \to \infty \quad \text{und} \quad n = 1, \dots, N \qquad .$$

Transformationen (ε, μ) mit dieser Eigenschaft nennen wir „τ–konstant". Die Abklingrate τ von $(\hat{\varepsilon}, \hat{\mu})$ wird dabei später noch näher spezifiziert.

(6) Die Transformation σ erfülle $\sigma \in \mathrm{V}^{q,0}_0(\Omega_I)$ und $\mathrm{supp}(\sigma) \cap \Omega_A = \emptyset$.

3.1 Statische Maxwell–Probleme auf Innengebieten

Die hier zitierten Spursätze, sowie die Lösungstheorie für die statischen Maxwell–Probleme wurden von Kuhn in [8] für beschränkte Mannigfaltigkeiten mit glattem Rand erarbeitet und später von Kuhn und Pauly in [9] auf beschränkte Mannigfaltigkeiten mit C^3–Rand verallgemeinert. Aus dieser Arbeit wollen wir im Folgenden die von uns benötigten Ergebnisse für Innengebiete zitieren. Hierbei ist anzumerken, dass für die Formulierung und Gültigkeit der Spursätze ein Gebiet mit Lipschitz–Rand ausreicht, wie von Weck in [21] gezeigt wird.

Als allgemeine Voraussetzungen gelten in diesem Abschnitt:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sei ein Innengebiet,
- ν sei eine Transformation aus $\mathrm{V}_0^{q,0}(\Omega)$.

3.1.1 Spursätze für Innengebiete

Wie schon erwähnt, werden bei der Lösungstheorie Randbedingungen auftauchen. Um die dabei benötigten Spuroperatoren zu definieren, müssen wir zuerst noch einige Räume erklären, die in den Spursätzen auftreten werden. Diese Definitionen zitieren wir aus der Arbeit von Kuhn und Pauly [9]:

Der Raum $\mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega)$ sei im Folgenden der Dualraum des Sobolev–Raums $\mathbf{H}^{m,q}(\partial\Omega)$ für $m \in (0,\infty)$ und $\langle\varphi,\psi\rangle_{\mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega)}$ bezeichne für $\varphi \in \mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega)$ und $\psi \in \mathbf{H}^{m,q}(\partial\Omega)$ die $\mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega)$–$\mathbf{H}^{m,q}(\partial\Omega)$–Dualität mit Antilinearität in der zweiten Komponente. Damit seien die Operatoren rot und div auf $\mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega)$ definiert durch

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{rot}\varphi,\psi\rangle_{\mathbf{H}^{-m-1,q+1}(\partial\Omega)} &:= -\langle\varphi,\mathrm{div}\psi\rangle_{\mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega)} \quad \text{für} \quad \psi\in\mathbf{H}^{m+1,q+1}(\partial\Omega) \quad ,\\
\langle \mathrm{div}\varphi,\psi\rangle_{\mathbf{H}^{-m-1,q-1}(\partial\Omega)} &:= -\langle\varphi,\mathrm{rot}\psi\rangle_{\mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega)} \quad \text{für} \quad \psi\in\mathbf{H}^{m+1,q-1}(\partial\Omega) \quad .
\end{aligned}$$

Weiterhin führen wir die folgenden Hilbert–Räume mit ihren entsprechenden Normen ein:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^q(\partial\Omega) &:= \left\{\varphi\in\mathbf{H}^{-\frac12,q}(\partial\Omega) : \mathrm{rot}\varphi\in\mathbf{H}^{-\frac12,q+1}(\partial\Omega)\right\} \quad ,\\
\mathcal{D}^q(\partial\Omega) &:= \left\{\varphi\in\mathbf{H}^{-\frac12,q}(\partial\Omega) : \mathrm{div}\varphi\in\mathbf{H}^{-\frac12,q-1}(\partial\Omega)\right\} \quad ,\\
\|\varphi\|^2_{\mathcal{R}^q(\partial\Omega)} &:= \|\varphi\|^2_{\mathbf{H}^{-\frac12,q}(\partial\Omega)} + \|\mathrm{rot}\varphi\|^2_{\mathbf{H}^{-\frac12,q+1}(\partial\Omega)} \quad ,\\
\|\varphi\|^2_{\mathcal{D}^q(\partial\Omega)} &:= \|\varphi\|^2_{\mathbf{H}^{-\frac12,q}(\partial\Omega)} + \|\mathrm{div}\varphi\|^2_{\mathbf{H}^{-\frac12,q-1}(\partial\Omega)} \quad .
\end{aligned}$$

Hierbei bedeutet $\mathrm{rot}\varphi \in \mathbf{H}^{-\frac12,q+1}(\partial\Omega)$, dass $\mathrm{rot}\varphi$ eine stetige Fortsetzung in $\mathbf{H}^{-\frac12,q+1}(\partial\Omega)$ besitzt. Der Hodgesche Sternoperator $\circledast$ auf $\mathrm{A}^q(\partial\Omega)$ liefert eine Isometrie zwischen $\mathcal{R}^q(\partial\Omega)$ und $\mathcal{D}^{N-q}(\partial\Omega)$.

Mit diesen Definitionen zitieren wir nun aus [9] die Existenz eines Tangentialspuroperators samt Rechtsinverser.

Satz 3.1
Seien Ω ein C^{m+1}–Gebiet mit $m \in \mathbb{N}$ und $\iota : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ die Inklusionsabbildung. Dann existieren ein stetiger linearer Tangentialspuroperator $\gamma_t : \mathbf{R}^q(\Omega) \longrightarrow \mathcal{R}^q(\partial\Omega)$ mit den Eigenschaften

(i) $$\bigwedge_{\Phi\in\mathbf{R}^q(\Omega)} \mathrm{rot}\gamma_t\Phi = \gamma_t\mathrm{rot}\Phi \quad ,$$

(ii) $$\bigwedge_{\Phi\in\mathbf{H}^{m,q}(\Omega)} \gamma_t\Phi \in \mathbf{H}^{m-\frac12,q}(\partial\Omega) \quad ,$$

(iii) $$\bigwedge_{\Phi\in\mathrm{C}^{m,q}(\overline{\Omega})} \gamma_t\Phi = \iota^*\Phi \quad ,$$

sowie ein stetiger linearer Fortsetzungsoperator $\check{\gamma}_t : \mathcal{R}^q(\partial\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}^q(\Omega) \cap \nu^{-1}{}_0\mathbf{D}^q(\Omega)$ mit $\gamma_t\check{\gamma}_t = \mathrm{Id}$.

Die Rechtsinverse $\check{\gamma}_t$ hängt natürlich von der gewählten Transformation ν ab. Wir verzichten jedoch darauf, dies mittels eines Indexes zu notieren.

Durch die Benutzung der Hodgeschen Sternoperatoren $*$ auf $\mathrm{A}^q(\Omega)$ und $\circledast$ auf $\mathrm{A}^q(\partial\Omega)$ erhält man damit ebenfalls nach [9] die Existenz eines Normalspuroperators samt Rechtsinverser.

Satz 3.2
Seien Ω ein C^{m+1}–Gebiet mit $m \in \mathbb{N}$ und $\iota \;:\; \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ die Inklusionsabbildung. Dann existieren ein stetiger linearer Normalspuroperator $\gamma_n \;:\; \mathbf{D}^q(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}^{q-1}(\partial\Omega)$ mit den Eigenschaften

(i) $$\bigwedge_{\Phi\in\mathbf{D}^q(\Omega)} \operatorname{div}\gamma_n\Phi = -\gamma_n\operatorname{div}\Phi \qquad ,$$

(ii) $$\bigwedge_{\Phi\in\mathbf{H}^{m,q}(\Omega)} \gamma_n\Phi \in \mathbf{H}^{m-\frac{1}{2},q-1}(\partial\Omega) \qquad ,$$

(iii) $$\bigwedge_{\Phi\in\mathrm{C}^{m,q}(\overline{\Omega})} \gamma_n\Phi = (-1)^{N(q-1)} \circledast \iota^* * \Phi \qquad ,$$

sowie ein stetiger linearer Fortsetzungsoperator $\check{\gamma}_n \;:\; \mathcal{D}^{q-1}(\partial\Omega) \longrightarrow \mathbf{D}^q(\Omega) \cap \nu^{-1}{}_0\mathbf{R}^q(\Omega)$ mit $\gamma_n\check{\gamma}_n = \mathrm{Id}$.

Hierbei ist zu beachten, dass die Spuroperatoren γ_t und γ_n, sowie ihre Rechtsinversen $\check{\gamma}_t$ und $\check{\gamma}_n$ vom Rang q abhängen. Den Rang wollen wir jedoch nicht als Index notieren, da bei zukünftigen Rechnungen der jeweilige Kontext ergibt, um welches q es sich handeln muss. Außerdem hängt $\check{\gamma}_n$ genauso wie $\check{\gamma}_t$ von der Transformation ν ab.

Als Letztes wollen wir noch weitere nützliche Eigenschaften der oben definierten Operatoren sammeln. Diese zitieren wir aus Kuhn und Pauly [9] in der folgenden

Bemerkung 3.3
Die oben genannten Operatoren γ_t und γ_n besitzen unter anderem die folgenden Eigenschaften:

(i) $$\bigwedge_{\Phi\in\mathbf{R}^q(\Omega)} \; \bigwedge_{\Psi\in\mathbf{H}^{1,q+1}(\Omega)} \langle\gamma_t\Phi,\gamma_n\Psi\rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega)} = \langle\operatorname{rot}\Phi,\Psi\rangle_\Omega + \langle\Phi,\operatorname{div}\Psi\rangle_\Omega \qquad ,$$

(ii) $$\bigwedge_{\Phi\in\mathbf{D}^q(\Omega)} \; \bigwedge_{\Psi\in\mathbf{H}^{1,q-1}(\Omega)} \langle\gamma_n\Phi,\gamma_t\Psi\rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q-1}(\partial\Omega)} = \langle\operatorname{div}\Phi,\Psi\rangle_\Omega + \langle\Phi,\operatorname{rot}\Psi\rangle_\Omega \qquad ,$$

(iii) $$\Phi \in \mathbf{R}^q(\Omega) \quad\wedge\quad \gamma_t\Phi = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \Phi \in \mathring{\mathbf{R}}^q(\Omega) \qquad ,$$

(iv) $$\Phi \in \mathbf{D}^q(\Omega) \quad\wedge\quad \gamma_n\Phi = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \Phi \in \mathring{\mathbf{D}}^q(\Omega) \qquad .$$

3.1.2 Dirichlet– und Neumann–Formen auf Innengebieten

Um für statische Maxwell–Probleme eindeutige Lösbarkeit zu erlangen, muss man durch Nebenbedingungen sogenannte Dirichlet– bzw. Neumann–Formen heraustesten. Diese sind gegeben durch die folgende

Definition 3.4
Wir definieren durch

$${}_\nu\mathcal{H}^q(\Omega) := {}_0\mathring{\mathbf{R}}^q(\Omega) \cap \nu^{-1}{}_0\mathbf{D}^q(\Omega) \qquad \textit{bzw.} \qquad {}_\nu\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega) := {}_0\mathring{\mathbf{D}}^q(\Omega) \cap \nu^{-1}{}_0\mathbf{R}^q(\Omega)$$

den Raum der „(harmonischen) Dirichlet– bzw. Neumann–Formen (vom Rang q zur Transformation ν)“.
Im Falle $\nu = \mathrm{Id}$ lassen wir den Index für die Transformation bei der Bezeichnung wegfallen.

Nach Picard [13] und Kuhn und Pauly [9] erhalten wir

Bemerkung 3.5
Mit dem Hodgeschen Sternoperator $*$ auf $\mathrm{A}^q(\Omega)$ gilt $\tilde{\mathcal{H}}^{N-q}(\Omega) = *\mathcal{H}^q(\Omega)$. Die Räume ${}_\nu\mathcal{H}^q(\Omega)$ und ${}_\nu\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega)$ sind endlichdimensional und es gelten

$$d^q := \dim \mathcal{H}^q(\Omega) = \dim {}_\nu\mathcal{H}^q(\Omega) \qquad \textit{und} \qquad \tilde{d}^q := \dim \tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega) = \dim {}_\nu\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega) \qquad .$$

Die Dimension von ${}_\nu\mathcal{H}^q(\Omega)$ bzw. ${}_\nu\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega)$ ist also unabhängig von der Transformation ν und es ist $\tilde{d}^{N-q} = d^q$.

3.1.3 Lösungstheorie für statische Maxwell–Probleme auf Innengebieten

Nun können wir daran gehen, die Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit statischer Maxwell–Probleme mit vorgegebener Tangential– bzw. Normalspur auf Innengebieten anzugeben. Dazu zitieren wir erneut aus Kuhn und Pauly [9] den

Satz 3.6
Seien Ω ein C^3–Gebiet und $\{{}_\nu\Phi_l : l = 1, \ldots, \tilde{d}^q\}$ eine Menge stetiger linearer Funktionale auf $\mathbf{D}^q(\Omega) \cap \nu^{-1}\mathbf{R}^q(\Omega)$ mit

$$ {}_\nu\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega) \cap \bigcap_{l=1}^{\tilde{d}^q} N({}_\nu\Phi_l) = \{0\} \qquad . $$

Dann sind für die Existenz einer eindeutigen Lösung $H \in \mathbf{D}^q(\Omega) \cap \nu^{-1}\mathbf{R}^q(\Omega)$ des Maxwell–Problems

$$ \mathrm{div} H = F \quad , \quad \mathrm{rot}\nu H = G \quad , \quad \gamma_n H = \lambda \quad , \quad {}_\nu\Phi_l(H) = \alpha_l \quad \text{für} \quad l = 1, \ldots, \tilde{d}^q \tag{3.2} $$

die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:

(i) $F \in {}_0\mathbf{D}^{q-1}(\Omega) \quad , \quad G \in {}_0\mathbf{R}^{q+1}(\Omega) \cap \tilde{\mathcal{H}}^{q+1}(\Omega)^\perp \quad ,$

(ii) $\lambda \in \mathcal{D}^{q-1}(\partial\Omega) \quad , \quad \mathrm{div}\lambda = -\gamma_n F \quad ,$

(iii) $\displaystyle\bigwedge_{\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}^{q-1}(\Omega)} \langle F, \tilde{h} \rangle_\Omega = \langle \lambda, \gamma_t \tilde{h} \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q-1}(\partial\Omega)} \quad .$

Die Lösung H hängt stetig von den Daten (F, G, λ, α) ab, d.h. es existiert eine von F, G, H, λ, α unabhängige Konstante $c > 0$, sodass die folgende Abschätzung gilt:

$$ \|H\|_{\mathbf{D}^q(\Omega)\cap\nu^{-1}\mathbf{R}^q(\Omega)} \quad \leq \quad c \cdot \Big(\|F\|_{\mathrm{L}^{2,q-1}(\Omega)} + \|G\|_{\mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega)} + \|\lambda\|_{\mathcal{D}^{q-1}(\partial\Omega)} + |\alpha| \Big) \qquad . $$

Mit Hilfe der Stern–Dualität erhält man ganz analog die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit des statischen Maxwell–Problems mit vorgegebener Tangentialspur. Hierbei müssen wir jedoch Funktionale $\{{}_\nu\Phi_l : l = 1, \ldots, d^q\}$ verwenden, die die Dirichlet–Formen ${}_\nu\mathcal{H}^q(\Omega)$ heraustesten. Dieses Ergebnis wird aber von uns nicht benötigt, also verzichten wir darauf, es ebenfalls von Pauly und Kuhn zu zitieren.

3.2 Statische Maxwell–Probleme auf Außengebieten

Analog zur Lösungstheorie statischer Maxwell–Probleme auf Innengebieten lässt sich die Lösungstheorie auf Außengebieten aufstellen. Dies wird von KUHN und PAULY in [9] für Außengebiete mit C^3-Rand und Daten $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q} \times \mathrm{L}^{2,q+1}$ durchgeführt. Wir werden diese Ergebnisse mit den Ergebnissen von PAULY [11, Satz 6.34] für homogene Randdaten und Daten $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s$ mit allgemeinen Gewichten $s > 1 - N/2$ kombinieren, um die Lösungstheorie für inhomogene Randdaten und allgemein gewichtete Daten (F,G) zu erlangen.

Als allgemeine Voraussetzungen gelten in diesem Abschnitt:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sei ein Außengebiet mit LMKE und $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \subset U(r_0)$,
- ν sei eine Transformation aus $\mathrm{V}^{q,0}_0(\Omega)$.

3.2.1 Spursätze für Außengebiete

KUHN und PAULY bekommen einen Tangential– und einen Normalspuroperator für ein Außengebiet mit Hilfe des entsprechenden Operators für das Innengebiet $\Omega \cap U(r_3)$. Wegen $\partial(\Omega \cap U(r_3)) = \partial\Omega \cup S(r_3)$ können der Tangential– und Normalspuroperator als Hintereinanderschaltung der Einschränkung auf $\partial\Omega$ und des entsprechenden Operators für $\Omega \cap U(r_3)$ definiert werden. Die jeweiligen Rechtsinversen für das Außengebiet erhalten sie als Hintereinanderschaltung der Multiplikation mit $(1-\eta)$ und der entsprechenden Rechtsinversen für $\Omega \cap U(r_3)$, welche sie noch modifizieren, um Divergenz– bzw. Rotationsfreiheit zu erlangen. Diese Konstruktion sorgt ebenfalls dafür, dass die Fortsetzungen der Spuren kompakten Träger in $\mathbb{R}^N$ besitzen.

Mit analog zum Innengebiet definierten Räumen, Normen und Operatoren für $\partial\Omega$ zitieren wir aus [9]

Satz 3.7
Ω besitze C^{m+1}–Rand mit $m \in \mathbb{N}$ und $\iota : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ sei die Inklusionsabbildung. Dann existieren ein stetiger linearer Tangentialspuroperator $\Gamma_t : \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{R}^q(\partial\Omega)$ mit den Eigenschaften

(i) $$\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})} \mathrm{rot}\Gamma_t\Phi = \Gamma_t \mathrm{rot}\Phi \quad ,$$

(ii) $$\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{H}^{m,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})} \Gamma_t\Phi \in \mathbf{H}^{m-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega) \quad ,$$

(iii) $$\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{C}^{m,q}(\overline{\Omega})} \Gamma_t\Phi = \iota^*\Phi \quad ,$$

sowie ein stetiger linearer Fortsetzungsoperator $\check{\Gamma}_t : \mathcal{R}^q(\partial\Omega) \longrightarrow \mathrm{R}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) \cap {}_\nu\mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon}$ mit $\Gamma_t\check{\Gamma}_t = \mathrm{Id}$.

Satz 3.8
Ω besitze C^{m+1}–Rand mit $m \in \mathbb{N}$ und $\iota : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ sei die Inklusionsabbildung. Dann existieren ein stetiger linearer Normalspuroperator $\Gamma_n : \mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{D}^{q-1}(\partial\Omega)$ mit den Eigenschaften

(i) $$\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})} \mathrm{div}\Gamma_n\Phi = -\Gamma_n \mathrm{div}\Phi \quad ,$$

(ii) $$\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{H}^{m,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})} \Gamma_n\Phi \in \mathbf{H}^{m-\frac{1}{2},q-1}(\partial\Omega) \quad ,$$

(iii) $$\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{C}^{m,q}(\overline{\Omega})} \Gamma_n\Phi = (-1)^{N(q-1)} \circledast \iota^* * \Phi \quad ,$$

sowie ein stetiger linearer Fortsetzungsoperator $\check{\Gamma}_n : \mathcal{D}^{q-1}(\partial\Omega) \longrightarrow \mathrm{D}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{R}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) \cap {}_\nu\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon}$ mit $\Gamma_n\check{\Gamma}_n = \mathrm{Id}$.

Bemerkung 3.9
Die oben genannten Operatoren Γ_t, $\check{\Gamma}_t$, Γ_n und $\check{\Gamma}_n$ besitzen unter anderem die folgenden Eigenschaften:

(i) $\bigwedge_{\Phi\in \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})} \bigwedge_{\Psi\in \mathrm{H}^{1,q+1}_{\mathrm{vox}}(\Omega)} \langle \Gamma_t\Phi, \Gamma_n\Psi\rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega)} = \langle \mathrm{rot}\Phi, \Psi\rangle_\Omega + \langle \Phi, \mathrm{div}\Psi\rangle_\Omega$,

(ii) $\bigwedge_{\Phi\in \mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})} \bigwedge_{\Psi\in \mathrm{H}^{1,q-1}_{\mathrm{vox}}(\Omega)} \langle \Gamma_n\Phi, \Gamma_t\Psi\rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q-1}(\partial\Omega)} = \langle \mathrm{div}\Phi, \Psi\rangle_\Omega + \langle \Phi, \mathrm{rot}\Psi\rangle_\Omega$,

(iii) $\Phi \in \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \quad \wedge \quad \Gamma_t\Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi \in \mathring{\mathrm{R}}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$,

(iv) $\Phi \in \mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \quad \wedge \quad \Gamma_n\Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi \in \mathring{\mathrm{D}}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$,

(v) $\bigwedge_{\varphi\in\mathcal{R}^q(\partial\Omega)} \mathrm{supp}(\check{\Gamma}_t\varphi) \subset \overline{\Omega\cap U(r_2)}$,

(vi) $\bigwedge_{\varphi\in\mathcal{D}^{q-1}(\partial\Omega)} \mathrm{supp}(\check{\Gamma}_n\varphi) \subset \overline{\Omega\cap U(r_2)}$.

3.2.2 Dirichlet– und Neumann–Formen auf Außengebieten

Da die Lösungstheorie für statische Maxwell–Probleme auf Außengebieten gewichtete Räume verwendet, müssen die Räume der Dirichlet– bzw. Neumann–Formen, welche nichttriviale Lösungen der statischen Maxwell–Probleme zu homogenen Daten darstellen, ebenfalls mit Gewichten versehen werden. Der Hodgesche Sternoperator liefert wieder eine Isometrie zwischen Dirichlet– und Neumann–Formen. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir die Neumann–Formen nicht explizit benötigen. Aus diesem Grund wollen wir im Folgenden nur die Dirichlet–Formen für Außengebiete behandeln. Dazu zitieren wir aus Pauly [11, Def. 6.4] die folgende

Definition 3.10
Für $s \in \mathbb{R}$ definieren wir durch

$$_\nu\mathcal{H}^q_s(\Omega) := {}_0\mathring{\mathrm{R}}^q_s(\Omega) \cap \nu^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega)$$

den Raum der „(gewichteten) Dirichlet–Formen (vom Rang q zur Transformation ν mit Gewicht s)".
Im Falle $\nu = \mathrm{Id}$ lassen wir den Index für die Transformation bei der Bezeichnung wegfallen, sowie im Falle $s = 0$ den Index für das Gewicht.

Als Nächstes zitieren wir einige weitere Eigenschaften der gewichteten Dirichlet–Formen aus den Arbeiten von Pauly [11, Lemmata 6.5 u. 6.22, Kor. 6.24] und Kuhn und Pauly [9].

Bemerkung 3.11

(i) *Für $s = 0$ gilt* $d^q := \dim \mathcal{H}^q(\Omega) = \dim {}_\nu\mathcal{H}^q(\Omega)$,

(ii) *Für $\tau > 0$ gilt* ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{-\frac{N}{2}}(\Omega) = {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) = {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{<\frac{N}{2}-1}(\Omega)$,

(iii) *Für $\tau > 0$ und $-N/2 \le s < N/2 - 1$ gilt* $\dim {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_s(\Omega) = d^q$,

(iv) *Für $s \in \mathbb{R}$, Ω mit C^{m+1}–Rand und $\nu \in \mathrm{V}^{q,m}_0(\Omega)$ gilt* ${}_\nu\mathcal{H}^q_s(\Omega) \subset \mathbf{H}^{m,q}_s(\Omega)$.

Bei der statischen Lösungstheorie werden wir sehen, dass die Lösungen zu Daten mit Gewicht s im Allgemeinen nicht einfach mit dem Gewicht $s - 1$ integrierbar sind. Für große s werden die Lösungen Anteile haben, die schlechter integrierbar sind als mit dem Gewicht $s - 1$. Bei der Iteration des Lösungsoperators verschlechtern sich die Integrationsgewichte für die iterierten Lösungen weiter. Da wir aber durch Orthogonalitätsbedingungen die entsprechenden Dirichlet–Formen heraustesten müssen, benötigen wir eine Methode, diese mit Hilfe von Formen herauszutesten, die mit jedem Gewicht integrierbar sind.

Zu diesem Zweck zitieren wir die Existenz geeigneter Formen aus einer Arbeit von Picard [16].

Lemma 3.12
Ω sei eine Lipschitz–Transformation eines Außengebietes mit glattem Rand. Dann gelten:

(i) *Es existiert eine endliche Menge $\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega) \subset {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(\Omega)$, welche linear unabhängig modulo $\overline{\mathrm{rot}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)}$ ist, mit*

$$|\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)| = d^q \qquad \textit{und} \qquad {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon} = \{0\} \qquad .$$

Die Elemente von $\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)$ besitzen kompakten Träger in Ω. Ihre Orthogonalprojektionen auf ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)$ in ${}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(\Omega)$ entlang $\overline{\mathrm{rot}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)}$ bzgl. des $\langle\varepsilon\cdot,\cdot\rangle_\Omega$–Skalarprodukts bilden eine Basis von ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)$.

(ii) *Für $q \neq 1$ existiert eine endliche Menge $\mathrm{B}^q(\Omega) \subset {}_0\mathrm{D}^q(\Omega)$, welche linear unabhängig modulo $\overline{\mathrm{div}\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)}$ ist, mit*

$$|\mathrm{B}^q(\Omega)| = d^q \qquad \textit{und} \qquad {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) \cap \mathrm{B}^q(\Omega)^{\perp} = \{0\} \qquad .$$

Die Elemente von $\mathrm{B}^q(\Omega)$ besitzen kompakten Träger in $\overline{\Omega}$. Die Orthogonalprojektionen der Elemente aus $\varepsilon^{-1}\mathrm{B}^q(\Omega)$ auf ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)$ in $\varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q(\Omega)$ entlang $\varepsilon^{-1}\overline{\mathrm{div}\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)}$ bzgl. des $\langle\varepsilon\cdot,\cdot\rangle_\Omega$–Skalarprodukts bilden eine Basis von ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)$.

Die Mengen $\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)$ und $\mathrm{B}^q(\Omega)$ sind unabhängig von ε. Die Abschlüsse werden stets in $\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)$ genommen.

Wir werden noch einige weitere, von Pauly untersuchter Eigenschaften von $\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)$ und $\mathrm{B}^q(\Omega)$ aus dessen Arbeit [11, Lemma 6.32, Kor. 6.33] zitieren, welche wir für die Lösungstheorie benötigen. Diese sammeln wir in der folgenden

Bemerkung 3.13

(i) *Sei $s \in \mathbb{R}$. Dann gelten mit Abschlüssen in $\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)$*

$$\overline{\mathrm{div}\mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)} \cup \overline{\mathrm{div}\mathbf{D}^{q+1}_s(\Omega)} \subset \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)^\perp \qquad \textit{und für } q \neq 1 \qquad \overline{\mathrm{rot}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q-1}_{s-1}(\Omega)} \cup \overline{\mathrm{rot}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}_s(\Omega)} \subset \mathrm{B}^q(\Omega)^\perp \qquad .$$

(ii) *Es gelten mit Abschlüssen in $\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)$*

$$\overline{\mathrm{div}\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)} = {}_0\mathrm{D}^q(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)^\perp \qquad \textit{und für } q \neq 1 \qquad \overline{\mathrm{rot}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)} = {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(\Omega) \cap \mathrm{B}^q(\Omega)^\perp \qquad .$$

(iii) *Seien $s \in (1-N/2,\infty)\backslash\mathbb{I}$ und $\tau > \max\{0, s-N/2\}$, sowie $\tau \geq -s$. Dann gelten*

$${}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega) \cap {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)^\perp = {}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)^\perp \qquad \textit{und für } q \neq 1 \qquad {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_s(\Omega) \cap {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon} = {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_s(\Omega) \cap \mathrm{B}^q(\Omega)^\perp \qquad .$$

3.2.3 Türme spezieller statischer Lösungen

Pauly kann in seiner Arbeit [11, Sec. 6.3] für die statische Lösungstheorie zu homogenen Randdaten zeigen, dass die Lösungen zu Daten $(F, G) \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)$ mit Gewichten $s \geq N/2$ nicht mit dem Gewicht $s-1$ integrierbar sind, sondern spezielle, schlechter gewichtete Anteile enthalten. Diese speziellen Anteile lassen sich mit Hilfe von Radiuspotenzen und den Eigenformen des Beltrami–Operators B_q auf $D(B_q) \subset \mathrm{L}^{2,q}(S^{N-1})$ darstellen. Bei der Iteration des statischen Lösungsoperators verschlechtern sich die Integrationsgewichte der iterierten Lösungen weiter, was daran liegt, dass die Lösungen für die speziellen Anteile eine Integrationsstufe verlieren. So entwickelt Pauly sogenannte „Türme" von speziellen Formen, in denen man mittels der alternierenden Anwendung der Operatoren rot und div durch die „Stockwerke" nach unten schreitet. Wir zitieren [11, Sec. 5.4, Def. 5.10]

Lemma 3.14
Für $k, \beta \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \{1,\ldots,\mu^q_\beta\}$ gibt es homogene Formen

$${}^\pm D^{q,k}_{\beta,m} \quad \textit{und} \quad {}^\pm R^{q,k}_{\beta,m} \quad \textit{aus} \quad \mathrm{C}^{\infty,q}\left(\mathbb{R}^N\backslash\{0\}\right) \qquad ,$$

welche sich multiplikativ aus Radiuspotenzen und den Eigenformen des Beltrami–Operators B_q auf $D(B_q) \subset \mathrm{L}^{2,q}(S^{N-1})$ zusammensetzen, die den folgenden Gleichungen genügen:

$$\bullet \quad \mathrm{rot}\,^{\pm}D^{q,0}_{\beta,m} = 0 \quad , \qquad \bullet \quad \mathrm{div}\,^{\pm}R^{q+1,0}_{\beta,m} = 0 \quad , \tag{3.3}$$

$$\bullet \quad \mathrm{div}\,^{\pm}D^{q,k}_{\beta,m} = 0 \quad , \qquad \bullet \quad \mathrm{rot}\,^{\pm}R^{q+1,k}_{\beta,m} = 0 \quad , \tag{3.4}$$

$$\bullet \quad \mathrm{rot}\,^{\pm}D^{q,k}_{\beta,m} = {}^{\pm}R^{q+1,k-1}_{\beta,m} \quad , \qquad \bullet \quad \mathrm{div}\,^{\pm}R^{q+1,k}_{\beta,m} = {}^{\pm}D^{q,k-1}_{\beta,m} \quad . \tag{3.5}$$

Hierbei ist μ^q_β die Vielfachheit des Eigenwertes κ^q_β des Beltrami–Operators B_q auf ${}_0\mathrm{D}^q(S^{N-1})^\perp$. Die Gesamtheit dieser speziellen Formen wollen wir im Folgenden als „Turmformen" bezeichnen.

Definition 3.15
Für die Turmformen ${}^{\pm}D^{q,k}_{\beta,m}$ und ${}^{\pm}R^{q,k}_{\beta,m}$ aus Lemma 3.14 definieren wir deren „Homogenitätsgrad" durch

$$h({}^{\pm}D^{q,k}_{\beta,m}) \quad := \quad h({}^{\pm}R^{q,k}_{\beta,m}) \quad := \quad {}^{\pm}\mathrm{h}^k_\beta \quad := \quad \begin{cases} k+\beta & , \textit{ falls } \quad \pm = + \\ k-\beta-N & , \textit{ falls } \quad \pm = - \end{cases} \quad .$$

Im Folgenden bezeichnen wir k als ihre „Höhe", β als ihren „Index" und m als ihren „Zählindex".

Eine Eigenschaft von Turmformen ungerader Höhe möchten wir aus Pauly [11, Bem. 5.17] zitieren, da wir sie bei der Niederfrequenzasymptotik in Kapitel 4 brauchen werden:

Bemerkung 3.16
Es gelten nicht nur

$$\mathrm{div}\,^{\pm}D^{q,2k+1}_{\beta,m} = 0 \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{rot}\,^{\pm}R^{q,2k+1}_{\beta,m} = 0 \qquad ,$$

sondern auch für alle $\varphi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$

$$\mathrm{div}(\varphi(r)\,^{\pm}D^{q,2k+1}_{\beta,m}) = 0 \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{rot}(\varphi(r)\,^{\pm}R^{q,2k+1}_{\beta,m}) = 0 \qquad .$$

Bei der Niederfrequenzasymptotik benötigen wir ebenfalls gewisse Orthogonalitätseigenschaften der Turmformen bzgl. des Operators $C_{\Delta,\eta}$. Wir zitieren Pauly [11, Lemma 5.19] in

Lemma 3.17
Seien u und v Turmformen vom Rang $q \in \{1,\dots,N-1\}$ mit maximaler Höhe K und maximalem Index Z. Weiterhin sei in (1.18) $\hat{j} \geq N+2+2K+2Z$. Dann ist

$$\langle C_{\Delta,\eta}u, v\rangle = 0$$

außer in den Spezialfällen

$$\langle C_{\Delta,\eta}\,{}^{-}D^{q,k}_{\beta,m}, {}^{+}D^{q,l}_{\beta,m}\rangle = -\langle C_{\Delta,\eta}\,{}^{+}D^{q,l}_{\beta,m}, {}^{-}D^{q,k}_{\beta,m}\rangle = \langle C_{\Delta,\eta}\,{}^{-}R^{q,l}_{\beta,m}, {}^{+}R^{q,k}_{\beta,m}\rangle = -\langle C_{\Delta,\eta}\,{}^{+}R^{q,k}_{\beta,m}, {}^{-}R^{q,l}_{\beta,m}\rangle = \alpha_1$$

und

$$\langle C_{\Delta,\eta}\,{}^{-}D^{q,k}_{\beta,m}, {}^{+}R^{q,l}_{\beta,m}\rangle = -\langle C_{\Delta,\eta}\,{}^{+}D^{q,k}_{\beta,m}, {}^{-}R^{q,l}_{\beta,m}\rangle = \langle C_{\Delta,\eta}\,{}^{-}R^{q,l}_{\beta,m}, {}^{+}D^{q,k}_{\beta,m}\rangle = \langle C_{\Delta,\eta}\,{}^{+}R^{q,l}_{\beta,m}, {}^{-}D^{q,k}_{\beta,m}\rangle = \alpha_2$$

mit

$$\alpha_1 := \begin{cases} -\frac{q+\beta}{N+2\beta} & , \quad (k,l) = (0,2) \\ 1 & , \quad (k,l) = (1,1) \\ -\frac{N-q+\beta}{N+2\beta} & , \quad (k,l) = (2,0) \end{cases} \qquad \textit{und} \quad \alpha_2 := \mathrm{i}\frac{\sqrt{(q+\beta)(N-q+\beta)}}{N+2\beta} \cdot \begin{cases} -1 & , \quad (k,l) = (0,2) \\ 1 & , \quad (k,l) = (2,0) \end{cases} \quad .$$

Nun wollen wir Räume definieren, die Turmformen bzgl. Zählindex, Index und Höhe zusammenfassen. Dazu zitieren wir aus Pauly [11, Def. 5.23] die folgende

Definition 3.18
Für $k, K, \beta \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

- ${}^{\pm}\mathcal{D}^{q,k}_{\beta,m} := \mathrm{Lin}\,\{{}^{\pm}D^{q,k}_{\beta,m}\}$,
- ${}^{\pm}\mathcal{R}^{q,k}_{\beta,m} := \mathrm{Lin}\,\{{}^{\pm}R^{q,k}_{\beta,m}\}$,
- ${}^{\pm}\mathcal{D}^{q,k}_{\beta} := \bigoplus_{1\leq m\leq\mu^{q,k}_\beta} {}^{\pm}\mathcal{D}^{q,k}_{\beta,m}$,
- ${}^{\pm}\mathcal{R}^{q,k}_{\beta} := \bigoplus_{1\leq m\leq\mu^{q-1,k+1}_\beta} {}^{\pm}\mathcal{R}^{q,k}_{\beta,m}$,
- ${}^{\pm}\mathcal{D}^{q,k}_{\leq t} := \bigoplus_{\beta\leq t} {}^{\pm}\mathcal{D}^{q,k}_{\beta}$,
- ${}^{\pm}\mathcal{R}^{q,k}_{\leq t} := \bigoplus_{\beta\leq t} {}^{\pm}\mathcal{R}^{q,k}_{\beta}$,
- ${}^{-}\mathcal{D}^{q,\leq K}_{t} := \dot{\sum_{\substack{0\leq k\leq K,\\ 0\leq\beta\leq t+k}}} {}^{-}\mathcal{D}^{q,k}_{\beta} = \dot{\sum_{0\leq k\leq K}} {}^{-}\mathcal{D}^{q,k}_{\leq t+k}$,
- ${}^{-}\mathcal{R}^{q,\leq K}_{t} := \dot{\sum_{\substack{0\leq k\leq K,\\ 0\leq\beta\leq t+k}}} {}^{-}\mathcal{R}^{q,k}_{\beta} = \dot{\sum_{0\leq k\leq K}} {}^{-}\mathcal{R}^{q,k}_{\leq t+k}$.

Hierbei sei

$$\mu_\beta^{q,k} \quad := \quad \begin{cases} \mu_\beta^q & \text{, falls} \quad k \text{ gerade} \\ \mu_\beta^{q+1} & \text{, falls} \quad k \text{ ungerade} \end{cases} \qquad .$$

Die Orthogonalität der Summen sei im Sinne des $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(1)}$–Skalarprodukts (siehe z.B. [23, Lemma 1] oder [11, Lemma 2.4]) zu verstehen.

Um festzustellen, mit welchem Gewicht $s \in \mathbb{R}$ die Turmformen integrierbar sind, nutzt man die Homogenität dieser Formen. Wir zitieren [11, Bem. 5.24]

Bemerkung 3.19
Da die Turmformen ${}^{\pm}D_{\beta,m}^{q,k}$ und ${}^{\pm}R_{\beta,m}^{q,k}$ homogen vom Grad ${}^{\pm}\mathrm{h}_\beta^k$ sind, gilt bezüglich ihrer Integrierbarkeit für alle $l \in \mathbb{N}_0$

$${}^{\pm}\mathcal{D}_\beta^{q,k}, {}^{\pm}\mathcal{R}_\beta^{q,k} \subset \mathrm{L}_s^{2,q}(A(1)) \quad \Leftrightarrow \quad {}^{\pm}\mathcal{D}_\beta^{q,k}, {}^{\pm}\mathcal{R}_\beta^{q,k} \subset \mathrm{H}_s^{l,q}(A(1)) \quad \Leftrightarrow \quad {}^{\pm}\mathrm{h}_\beta^k < -s - N/2 \quad ,$$

folglich also

$${}^{+}\mathcal{D}_\beta^{q,k}, {}^{+}\mathcal{R}_\beta^{q,k} \subset \mathrm{H}_{<-\beta-k-\frac{N}{2}}^{l,q}(A(1)) \qquad \text{und} \qquad {}^{-}\mathcal{D}_\beta^{q,k}, {}^{-}\mathcal{R}_\beta^{q,k} \subset \mathrm{H}_{<\beta-k+\frac{N}{2}}^{l,q}(A(1)) \qquad .$$

Für die statische Lösungstheorie wollen wir Räume von Turmformen der Höhe $k = 0$ so definieren, dass ihr Index angibt, mit welchem Gewicht $s \in \mathbb{R}$ sie nicht integrierbar sind. Dazu zitieren wir [11, Def. 6.15]

Definition 3.20
Für $s \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\mathcal{D}_s^q \quad := \quad {}^{-}\mathcal{D}_{\leq s-\frac{N}{2}}^{q,0} \quad = \quad {}^{-}\mathcal{R}_{\leq s-\frac{N}{2}}^{q,0} \quad =: \quad \mathcal{R}_s^q$$

und die Ausnahmeformen

$$A_s^q \quad := \quad \begin{cases} {}^{-}R_{0,1}^{1,1} & \text{, falls} \quad q = 1 \text{ und } s \geq N/2 - 1 \\ {}^{-}D_{0,1}^{N-1,1} & \text{, falls} \quad q = N-1 \text{ und } s \geq N/2 - 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

sowie deren Erzeugnis $\mathcal{A}_s^q := \mathrm{Lin}\, A_s^q$.

Bemerkung 3.21
Der Index s in $\mathcal{D}_s^q$ charakterisiert nun nicht mehr einen Homogenitätsgrad, sondern eine Integrierbarkeitsbedingung. Wegen $\mathcal{D}_s^q, \mathcal{A}_s^q \subset \mathrm{C}^{\infty,q}\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$ gelten für alle $m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_s^q \cap \mathrm{L}_s^{2,q}(A(1)) = \{0\} \qquad &\text{und} \qquad \mathcal{D}_s^q \subset \mathrm{H}_{<\frac{N}{2}}^{m,q}(A(1)) \quad , \\ \mathcal{A}_s^q \cap \mathrm{L}_s^{2,q}(A(1)) = \{0\} \qquad &\text{und} \qquad \mathcal{A}_s^q \subset \mathrm{H}_{<\frac{N}{2}-1}^{m,q}(A(1)) \quad , \end{aligned}$$

sowie $\mathcal{D}_s^q = \{0\}$ und $\mathcal{A}_{s-1}^q = \{0\}$ für $s < N/2$.

Bei der statischen Lösungstheorie werden wir Turmformen mit der Ausschneidefunktion η multiplizieren und Räume der Gestalt

$$U_s^q(\Omega) := V_s^q(\Omega) + \mathrm{Lin}\, \eta\tilde{\mathcal{T}}^q$$

benutzen. Hierbei seien $V_s^q(\Omega) \subset \mathrm{L}_s^{2,q}(\Omega)$ ein beliebiger Hilbert–Raum und $\tilde{\mathcal{T}}^q$ eine beliebige Teilmenge der abzählbaren Menge aller Turmformen vom Rang q

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^q \quad &:= \quad \left\{ {}^{\pm}D_{\beta,m}^{q,k}, {}^{\pm}R_{\beta,m}^{q,k+1} : k, \beta \in \mathbb{N}_0 \wedge m = 1, \dots \right\} \\ &= \quad \left\{ {}^{\pm}D_{\beta,m}^{q,k+1}, {}^{\pm}R_{\beta,m}^{q,k} : k, \beta \in \mathbb{N}_0 \wedge m = 1, \dots \right\} \subset \mathrm{C}^{\infty,q}\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right) \qquad . \end{aligned}$$

$\eta\tilde{\mathcal{T}}^q$ ist dann für $\tilde{\mathcal{T}}^q \subset \mathcal{T}^q$ definiert durch

$$\eta\tilde{\mathcal{T}}^q := \left\{ \eta \cdot \Phi : \Phi \in \tilde{\mathcal{T}}^q \right\} \subset \mathrm{C}^{\infty,q}\left(\mathbb{R}^N\right) \qquad .$$

Nach Pauly [11, Bem. 6.16] ist $\eta\mathcal{T}^q$ in $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{2,q}(\overline{\Omega})$ linear unabhängig und wir können in $\mathrm{Lin}\, \eta\mathcal{T}^q$ ein Skalarprodukt einführen, sodass $\eta\mathcal{T}^q$ eine Orthonormalbasis dieses Vektorraums wird. Weiterhin kann man (siehe z.B. Weck und Witsch in [22, p. 1631] oder [24, p. 1511], Peter in [12, S. 51], oder Bauer in [3, S. 39]) ein inneres Produkt in $U_s^q(\Omega)$ derart definieren, dass

- in $V_s^q(\Omega)$ das natürliche Skalarprodukt beibehalten wird,
- in Lin $\eta\tilde{\mathfrak{T}}_s^q$ mit $\tilde{\mathfrak{T}}_s^q := \{\Phi \in \tilde{\mathfrak{T}}^q : \Phi \notin \mathrm{L}_s^{2,q}(A(1))\}$ irgendein Skalarprodukt definiert ist und
- $V_s^q(\Omega)$ auf Lin $\eta\tilde{\mathfrak{T}}_s^q$ senkrecht steht.

Auf diese Weise erhält man die orthogonale Zerlegung von $U_s^q(\Omega)$ bzgl. dieses neuen Skalarprodukts:

$$U_s^q(\Omega) = V_s^q(\Omega) \oplus \mathrm{Lin}\ \eta\tilde{\mathfrak{T}}_s^q \qquad .$$

Wir zitieren weiter von Pauly [11, Bem. 6.17] die

Bemerkung 3.22

- *$U_s^q(\Omega)$ ist mit dem oben definierten Skalarprodukt genau dann ein Hilbert–Raum, wenn $\tilde{\mathfrak{T}}_s^q$ endlich ist.*
- *$U_s^q(\Omega)$ ist im folgenden Sinne unabhängig von der Ausschneidefunktion η: Ist $\tilde{\eta}$ eine weitere Ausschneidefunktion mit gleichen Eigenschaften wie η, so gilt mengentheoretisch (mit verschiedenen Skalarprodukten)*

  $$V_s^q(\Omega) \oplus \mathrm{Lin}\ \eta\tilde{\mathfrak{T}}_s^q = V_s^q(\Omega) \oplus \mathrm{Lin}\ \tilde{\eta}\tilde{\mathfrak{T}}_s^q \qquad ,$$

  und die eine Menge ist genau dann ein Hilbert–Raum, wenn die andere einer ist. In diesem Fall ist die Identität ein topologischer Isomorphismus zwischen ihnen, dessen Norm von η und $\tilde{\eta}$ abhängt.
- *Die Mengen $\eta\mathcal{D}_s^q$ oder $\eta\mathcal{D}_s^q \oplus \eta\mathcal{A}_s^q$ sind z.B. solche* Lin $\eta\tilde{\mathfrak{T}}_s^q$.

3.2.4 Lösungstheorie für statische Maxwell–Probleme auf Außengebieten

Jetzt lässt sich die Lösungstheorie für statische Maxwell–Probleme mit Daten $(F,G) \in \mathrm{L}_s^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}_s^{2,q+1}(\Omega)$ für allgemeine Gewichte $s > 1 - N/2$ aufstellen. Wir werden den Beweis des Satzes analog zu dem entsprechenden Satz von Kuhn und Pauly [9] für $s = 0$ aufbauen und dabei auf die Ergebnisse von Pauly für homogene Randdaten [11, Satz 6.34] zurückgreifen.

Satz 3.23
Ω besitze C^3–Rand und es seien $s \in (1 - N/2, \infty)\setminus\mathbb{I}$, $\tau > \max\{0, s - N/2\}$ und $\tau \geq -s$. Mit

$$D(\mathcal{M}\mathrm{ax}_\varepsilon^q) \quad := \quad \big(\mathrm{R}_{s-1}^q(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}_{s-1}^q(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{D}_{s-1}^q \oplus \eta\mathcal{A}_{s-1}^q$$

sei $\{{}_\varepsilon\Phi_l : l = 1, \dots, d^q\}$ eine Menge stetiger linearer Funktionale auf $D(\mathcal{M}\mathrm{ax}_\varepsilon^q)$ mit

$${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) \cap \bigcap_{l=1}^{d^q} N({}_\varepsilon\Phi_l) = \{0\} \qquad .$$

Dann sind für die Existenz einer eindeutigen Lösung $E \in D(\mathcal{M}\mathrm{ax}_\varepsilon^q)$ des Maxwell–Problems

$$\mathrm{rot}E = G \qquad , \qquad \mathrm{div}\varepsilon E = F \qquad , \qquad \Gamma_t E = \lambda \qquad , \qquad {}_\varepsilon\Phi_l(E) = \alpha_l \quad \textit{für} \quad l = 1, \dots, d^q \tag{3.6}$$

die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:

(i) $\quad F \in {}_0\mathrm{D}_s^{q-1}(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q-1}(\Omega)^\perp \qquad , \qquad G \in {}_0\mathrm{R}_s^{q+1}(\Omega) \qquad ,$

(ii) $\quad \lambda \in \mathcal{R}^q(\partial\Omega) \qquad , \qquad \mathrm{rot}\lambda = \Gamma_t G \qquad ,$

(iii) $\quad \bigwedge_{h \in \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)} \langle G, h\rangle_\Omega = \langle \lambda, \Gamma_n h\rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega)} \qquad .$

Die Lösung E hängt stetig von den Daten (F, G, λ, α) ab, d.h. es existiert eine von E, F, G, λ, α unabhängige Konstante $c > 0$, sodass die folgende Abschätzung gilt:

$$\|E\|_{D(\mathcal{M}\mathrm{ax}_\varepsilon^q)} \quad \leq \quad c \cdot \Big(\|F\|_{\mathrm{L}_s^{2,q-1}(\Omega)} + \|G\|_{\mathrm{L}_s^{2,q+1}(\Omega)} + \|\lambda\|_{\mathcal{R}^q(\partial\Omega)} + |\alpha|\Big) \qquad .$$

Beweis:
Aufgrund von Bemerkung 3.11 (ii) bemerken wir zunächst, dass für $1 - N/2 < s < 0$ die Dirichlet–Formen $\mathcal{H}^q(\Omega)$ eine Teilmenge des Dualraums $\mathrm{L}^{2,q}_{-s}(\Omega)$ von $\mathrm{L}^{2,q}_{s}(\Omega)$ sind, sodass in diesem Falle für $h \in \mathcal{H}^q(\Omega)$ mit

$$\langle \cdot, h\rangle_\Omega \qquad \text{und} \qquad \mathcal{H}^q(\Omega)^\perp$$

die $\mathrm{L}^{2,q}_{s}(\Omega)$–$\mathrm{L}^{2,q}_{-s}(\Omega)$–Dualität (mit Antilinearität in der zweiten Komponente) und der Annihilator bzgl. dieser Dualität gemeint sind und im Falle $s \geq 0$ natürlich das $\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)$–Skalarprodukt und die Orthogonalität bzgl. diesem.

Damit sind die Bezeichnungen und die Notwendigkeit der Bedingung (i) für die Lösbarkeit des Problems (3.6) klar. Die Notwendigkeit der Bedingung (ii) ergibt sich direkt aus Satz 3.7 (i). Bemerkung 3.11 (iv) liefert $\mathcal{H}^{q+1}(\Omega) \subset \mathbf{H}^{2,q+1}(\Omega)$. Folglich ist $\Gamma_n h \in \mathbf{H}^{\frac{3}{2},q}(\partial\Omega)$ für $h \in \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)$ nach Satz 3.8 (ii). Approximieren wir h in $\mathbf{H}^{1,q+1}(\Omega)$ durch eine Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{H}^{1,q+1}_{\mathrm{vox}}(\Omega)$, so erhalten wir mit Bemerkung 3.9 (i) und der Stetigkeit von Γ_n

$$\begin{aligned} \langle G, h\rangle_\Omega &= \langle \mathrm{rot}E, h\rangle_\Omega + \underbrace{\langle E, \mathrm{div}h\rangle_\Omega}_{=0} &&= \lim_{k\to\infty}\Big(\langle \mathrm{rot}E, h_k\rangle_\Omega + \langle E, \mathrm{div}h_k\rangle_\Omega\Big) \\ &= \lim_{k\to\infty}\langle \Gamma_t E, \Gamma_n h_k\rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega)} &&= \langle \lambda, \Gamma_n h\rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega)} \qquad . \end{aligned}$$

Dies zeigt die Notwendigkeit der Bedingung (iii). □

Um die Existenz einer Lösung zu zeigen, machen wir den Ansatz

$$E := \check{E} + \tilde{E} \qquad \text{mit} \qquad \check{E} := \check{\Gamma}_t\lambda \in \mathrm{R}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) \cap {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon} \qquad \text{und} \qquad \tilde{E} \in D(\mathcal{M}\mathrm{ax}^q_\varepsilon) \qquad .$$

Dieser Ansatz führt uns zu den folgenden Gleichungen für $\tilde{E}$:

$$\mathrm{rot}\tilde{E} = G - \mathrm{rot}\check{E} =: \tilde{G} \quad , \quad \mathrm{div}\varepsilon\tilde{E} = F \quad , \quad {}_\varepsilon\Phi_l(\tilde{E}) = \alpha_l - {}_\varepsilon\Phi_l(\check{E}) =: \tilde{\alpha}_l \quad \text{für} \quad l = 1, \ldots, d^q. \tag{3.7}$$

Analog zur obigen Rechnung führt für alle $h \in \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)$ eine Approximation in $\mathbf{H}^{1,q+1}(\Omega)$ durch eine Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{H}^{1,q+1}_{\mathrm{vox}}(\Omega)$ wegen $\Gamma_t\check{E} = \lambda$ und Bedingung (iii) zu

$$\langle \tilde{G}, h\rangle_\Omega \quad = \quad \langle G, h\rangle_\Omega - \langle \mathrm{rot}\check{E}, h\rangle_\Omega - \underbrace{\langle \check{E}, \mathrm{div}h\rangle_\Omega}_{=0} \quad = \quad \langle G, h\rangle_\Omega - \langle \lambda, \Gamma_n h\rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega)} \quad = \quad 0 \qquad .$$

Weiterhin berechnen wir mit Satz 3.7 (i) und Bedingung (ii) für die Daten G und λ

$$\Gamma_t\tilde{G} \quad = \quad \Gamma_t G - \Gamma_t\mathrm{rot}\check{E} \quad = \quad \Gamma_t G - \mathrm{rot}\Gamma_t\check{E} \quad = \quad \Gamma_t G - \mathrm{rot}\lambda \quad = \quad 0 \qquad .$$

Unter Benutzung von Bemerkung 3.9 (iii) erhalten wir $\tilde{G} \in {}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^\perp$. Nach Pauly [11, Satz 6.34] ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \big(\mathring{\mathrm{R}}^q_{s-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{D}^q_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^q_{s-1} & \longrightarrow & \big({}_0\mathrm{D}^{q-1}_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q-1}(\Omega)^\perp\big) \times \big({}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^\perp\big) \times \mathbb{C}^{d^q} \\ E & \longmapsto & \big(\mathrm{div}\varepsilon E, \mathrm{rot}E, {}_\varepsilon\Phi_1(E), \ldots, {}_\varepsilon\Phi_{d^q}(E)\big) \end{array}$$

ein topologischer Isomorphismus, d.h. wir erhalten ein eindeutiges $\tilde{E} \in \big(\mathring{\mathrm{R}}^q_{s-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{D}^q_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^q_{s-1}$, welches die Gleichungen (3.7) löst und stetig von den Daten $(F, \tilde{G}, \tilde{\alpha})$ abhängt. Diese Daten hängen wiederum stetig von F, G, α, sowie von $\check{E}$ und $\mathrm{rot}\check{E}$ ab. Da die letzten beiden genannten Daten nach Satz 3.7 stetig von λ abhängen, ist $E := \check{E} + \tilde{E} \in D(\mathcal{M}\mathrm{ax}^q_\varepsilon)$ eine Lösung des Maxwell–Problems (3.6), welche stetig von den Daten (F, G, λ, α) abhängt. □

Zum Beweis der Eindeutigkeit der Lösung sei E Lösung des Problems (3.6) zu Daten $(0, 0, 0, 0)$. Mit Hilfe von Bemerkungen 3.11 (ii) und 3.21 folgt dann

$$E \in {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) \cap \bigcap_{l=1}^{d^q} N({}_\varepsilon\Phi_l) = \{0\} \qquad .$$

Wiederum ermöglicht es die Stern–Dualität, analog die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit des statischen Maxwell–Problems mit vorgegebener Normalspur aufzustellen. Dies wollen wir aber nicht explizit tun. ■

Bemerkung 3.24

Die Bedingungen des Satzes 3.23 an die Daten F, G und λ lassen sich auch mit Hilfe der Räume $\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)$ *und* $\mathrm{B}^q(\Omega)$ *ausdrücken: Bemerkung 3.13 (iii) liefert, dass die Bedingung (i) des Satzes 3.23 auch in der Form*

$$\textbf{(i)} \qquad F \in {}_0\mathrm{D}_s^{q-1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^{q-1}(\Omega)^\perp \qquad , \qquad G \in {}_0\mathrm{R}_s^{q+1}(\Omega)$$

geschrieben werden kann. Ist $q \neq 0$, so kann die Bedingung (iii) des Satzes 3.23 ersetzt werden durch die äquivalente Bedingung

$$\textbf{(iii')} \qquad \bigwedge_{b \in \mathrm{B}^{q+1}(\Omega)} \quad \langle G, b \rangle_\Omega = \langle \lambda, \Gamma_n b \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega)} \qquad .$$

Nach Picard *[16] können die Elemente von* $\mathrm{B}^{q+1}(\Omega)$ *nämlich so konstruiert werden, dass sie in* $\mathrm{C}^{\infty,q+1}(\Omega)$ *und somit in* $\mathrm{H}^{1,q+1}_{\mathrm{vox}}(\Omega)$ *liegen.*

Bemerkung 3.25

Sind $q = 1$ und ${}_\varepsilon\Phi_l := \langle \varepsilon \cdot, \overset{\circ}{b}{}_l^q \rangle_\Omega$ mit $\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega) = \left\{ \overset{\circ}{b}{}_l^q : l = 1, \ldots, d^q \right\}$, so tritt die Ausnahmeform $\eta\mathcal{A}_{s-1}^q$ in der Darstellung von E nicht mehr auf, falls $F = 0$ und $\alpha = 0$ sind.
Dann verschwindet nämlich auch $\tilde{\alpha}$, denn nach Bemerkung 3.13 (iii) ist

$$\varepsilon\check{E} \in {}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)^\perp \qquad \textit{und somit} \qquad {}_\varepsilon\Phi_l(\check{E}) = 0 \quad \textit{für} \quad l = 1, \ldots, d^q \qquad .$$

Nach Pauly *[11, Satz 6.39] ist die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \Big(\big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{s-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega) \big) \oplus \eta\mathcal{D}^q_{s-1} \Big) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon} & \longrightarrow & {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^\perp \\ E & \longmapsto & \mathrm{rot} E \end{array}$$

ein topologischer Isomorphismus. Also kann $\tilde{E}$ offenbar keinen Anteil aus $\eta\mathcal{A}^q_{s-1}$ enthalten.
Eine analoge Aussage kann für den dualen Fall getroffen werden.

3.3 Lösungstheorie für das dissipative statische Maxwell–Problem im Ganzraum

Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels angekündigt, wollen wir für die Lösung (E, H) des dissipativen statischen Maxwell–Problems das elektrische Feld E auf Ω_I und Ω_A bestimmen und dann zusammensetzen. Die statische Lösungstheorie für das Innengebiet Ω_I und das Außengebiet Ω_A haben wir ja in den letzten zwei Abschnitten bereitgestellt. Nun müssen wir noch herausfinden, wie wir diese Lösungstheorien kombinieren können, damit eine zusammengesetzte Lösung im richtigen Lösungsraum liegt.

Als allgemeine Voraussetzungen gelten von nun an:

- Die Operatoren γ_t und γ_n aus Abschnitt 3.1.1 seien der Tangential– und der Normalspuroperator für Ω_I.
- Die Operatoren Γ_t und Γ_n aus Abschnitt 3.2.1 seien der Tangential– und der Normalspuroperator für Ω_A.

Zuerst einmal müssen wir uns überlegen, wie die Hilbert–Räume und Operatoren für $\partial\Omega_I$ und $\partial\Omega_A$ zusammenhängen. Dies tun wir in der folgenden

Bemerkung 3.26
Mengentheoretisch gilt $\partial\Omega_I = \partial\Omega_A$. Als Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ betrachtet gilt $\partial\Omega_I = -\partial\Omega_A$, d.h. sie sind dieselbe Mannigfaltigkeit, jedoch mit unterschiedlicher Orientierung (siehe z.B. Jänich [6]). Dadurch kann für jedes $m \geq 0$ ein Element von $\mathbf{H}^{m,q}(\partial\Omega_I)$ auch als ein Element von $\mathbf{H}^{m,q}(\partial\Omega_A)$ aufgefasst werden und umgekehrt. Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{I} : & \mathbf{H}^{m,q}(\partial\Omega_I) & \longrightarrow & \mathbf{H}^{m,q}(\partial\Omega_A) \\ & \psi & \longmapsto & \psi \end{array} \quad \textit{und ihre Konjugierte} \quad \begin{array}{cccc} \mathfrak{I}' : & \mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega_A) & \longrightarrow & \mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega_I) \\ & \varphi & \longmapsto & \mathfrak{I}'\varphi \end{array}$$

sind lineare Isometrien. Dabei ist $\mathfrak{I}'$ definiert durch

$$\bigwedge_{\varphi\in\mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega_A)} \quad \bigwedge_{\psi\in\mathbf{H}^{m,q}(\partial\Omega_I)} \quad \langle \mathfrak{I}'\varphi, \psi\rangle_{\mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega_I)} := \langle \varphi, \mathfrak{I}\psi\rangle_{\mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega_A)} \qquad .$$

Die unterschiedliche Orientierung von $\partial\Omega_I$ und $\partial\Omega_A$ führt zu einem unterschiedlichen Vorzeichen bei der Volumenform, welche zur Definition des Hodgeschen Sternoperators für eine Mannigfaltigkeit benutzt werden kann [6, Sek. 12.3]. Dieses Vorzeichen überträgt sich dann auf den Hodgeschen Sternoperator, sodass

$$\mathfrak{I}\circledast_{\partial\Omega_I} = - \circledast_{\partial\Omega_A} \mathfrak{I} \tag{3.8}$$

gilt. Für Elemente $\varphi \in \mathrm{L}^{2,q}(\partial\Omega_A) \subset \mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega_A)$ und $\psi \in \mathbf{H}^{m,q}(\partial\Omega_I)$ mit $m \geq 0$ gilt

$$\langle \mathfrak{I}^{-1}\varphi, \psi\rangle_{\mathrm{L}^{2,q}(\partial\Omega_I)} = \langle \varphi, \mathfrak{I}\psi\rangle_{\mathrm{L}^{2,q}(\partial\Omega_A)} = \langle \varphi, \mathfrak{I}\psi\rangle_{\mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega_A)} \qquad \textit{und somit} \qquad \mathfrak{I}'\varphi = \mathfrak{I}^{-1}\varphi \qquad .$$

Der Operator rot *ist auf* $\mathrm{C}^{\infty,q}(\partial\Omega_I)$ *unabhängig von der Orientierung der Mannigfaltigkeit. Damit ist der Operator* div *auf* $\mathrm{C}^{\infty,q}(\partial\Omega_I)$ *ebenfalls unabhängig von der Orientierung, da er mit Hilfe von* rot *und zwei Hodgeschen Sternoperatoren gebildet wird. Deswegen gelten für alle $\psi \in \mathbf{H}^{m+1,q}(\partial\Omega_I)$ mit $m \geq 0$*

$$\mathfrak{I}\mathrm{rot}\psi = \mathrm{rot}\mathfrak{I}\psi \qquad \textit{und} \qquad \mathfrak{I}\mathrm{div}\psi = \mathrm{div}\mathfrak{I}\psi \qquad .$$

Dies impliziert für alle $\varphi \in \mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega_A)$ mit $m > 0$

$$\mathfrak{I}'\mathrm{rot}\varphi = \mathrm{rot}\mathfrak{I}'\varphi \qquad \textit{und} \qquad \mathfrak{I}'\mathrm{div}\varphi = \mathrm{div}\mathfrak{I}'\varphi \qquad ,$$

denn es ist nach Definition für $\psi \in \mathbf{H}^{m+1,q+1}(\partial\Omega_I)$ und $\varphi \in \mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega_A)$ mit $m > 0$

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{I}'\mathrm{rot}\varphi, \psi\rangle_{\mathbf{H}^{-m-1,q+1}(\partial\Omega_I)} &= \langle \mathrm{rot}\varphi, \mathfrak{I}\psi\rangle_{\mathbf{H}^{-m-1,q+1}(\partial\Omega_A)} = -\langle \varphi, \mathrm{div}\mathfrak{I}\psi\rangle_{\mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega_A)} \\ &= -\langle \varphi, \mathfrak{I}\mathrm{div}\psi\rangle_{\mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega_A)} = -\langle \mathfrak{I}'\varphi, \mathrm{div}\psi\rangle_{\mathbf{H}^{-m,q}(\partial\Omega_I)} \\ &= \langle \mathrm{rot}\mathfrak{I}'\varphi, \psi\rangle_{\mathbf{H}^{-m-1,q+1}(\partial\Omega_I)} \qquad . \end{aligned}$$

Durch eine analoge Rechnung lässt sich die zweite Gleichung zeigen. Im Folgenden wollen wir die Isometrien $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}'$ unterdrücken und schreiben stattdessen für $\varphi \in \mathbf{H}^{m,q}(\partial\Omega_I)$ und $\Phi \in \mathbf{H}^{m,q}(\partial\Omega_A)$ mit $m \in \mathbb{R}$

$$\varphi = \Phi \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathfrak{I}\varphi = \Phi & , \textit{falls} \quad m \geq 0 \\ \varphi = \mathfrak{I}'\Phi & , \textit{falls} \quad m < 0 \end{cases} \qquad .$$

Um uns bei der Lösungstheorie ein wenig Schreibarbeit zu ersparen, führen wir noch eine kürzere Schreibweise für die Einschränkung auf Ω_I bzw. Ω_A ein:

Definition 3.27
Für $\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}$ definieren wir

$$\Phi_I := \Phi|_{\Omega_I} \in \mathrm{L}^{2,q}(\Omega_I) \qquad \textit{und} \qquad \Phi_A := \Phi|_{\Omega_A} \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}_A) \qquad .$$

Nun können wir Übergangsbedingungen für die Tangential– und Normalspuren an $\partial\Omega_I$ und $\partial\Omega_A$ aufstellen.

Lemma 3.28

(i) $$\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{C}_0^{\infty,q}} \quad \gamma_t \Phi_I = \Gamma_t \Phi_A \quad \textit{und} \quad \gamma_n \Phi_I = -\Gamma_n \Phi_A \qquad ,$$

(ii) $$\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}} \quad \Phi \in \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_I \in \mathbf{R}^q(\Omega_I) \quad \wedge \quad \Phi_A \in \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}_A) \quad \wedge \quad \gamma_t \Phi_I = \Gamma_t \Phi_A \qquad ,$$

(iii) $$\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}} \quad \Phi \in \mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_I \in \mathbf{D}^q(\Omega_I) \quad \wedge \quad \Phi_A \in \mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}_A) \quad \wedge \quad \gamma_n \Phi_I = -\Gamma_n \Phi_A \qquad .$$

Die Gleichungen in (i), (ii) und (iii) sind im Sinne von Bemerkung 3.26 zu verstehen.

Beweis:
Zu (i): Durch die Mengengleichheit $\partial\Omega_I = \partial\Omega_A$ nach Bemerkung 3.26 sind die Inklusionsabbildungen $\iota_I \ : \ \partial\Omega_I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ und $\iota_A \ : \ \partial\Omega_A \longrightarrow \mathbb{R}^N$ identisch und für $\Phi \in \mathrm{C}_0^{\infty,q}$ gilt nach Sätzen 3.1 (iii) und 3.7 (iii)

$$\mathfrak{I}\gamma_t \Phi_I \quad = \quad \mathfrak{I}\iota_I^* \Phi \quad = \quad \iota_A^* \Phi \quad = \quad \Gamma_t \Phi_A \qquad .$$

Dies impliziert zusätzlich wegen Gleichung (3.8) für $\Phi \in \mathrm{C}_0^{\infty,q}$ unter Benutzung der Sätze 3.2 (iii) und 3.8 (iii)

$$\mathfrak{I}\gamma_n \Phi_I \quad = \quad (-1)^{N(q-1)} \mathfrak{I} \circledast_{\partial\Omega_I} \iota_I^* *_{\mathbb{R}^N} \Phi \quad = \quad -(-1)^{N(q-1)} \circledast_{\partial\Omega_A} \iota_A^* *_{\mathbb{R}^N} \Phi \quad = \quad -\Gamma_n \Phi_A \qquad .$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Zu (ii): Sei $\Phi \in \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}$. Dann ist folglich auch $\Phi_I \in \mathbf{R}^q(\Omega_I)$ und $\Phi_A \in \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}_A)$. Es liegt $\mathrm{C}_0^{\infty,q} \subset \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}$ dicht. Approximieren wir Φ in $\mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}$ durch eine Folge $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_0^{\infty,q}$, so folgen die Konvergenzen

$$\Phi_{k,I} \xrightarrow[\mathbf{R}^q(\Omega_I)]{k\to\infty} \Phi_I \qquad \text{und} \qquad \Phi_{k,A} \xrightarrow[\mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}_A)]{k\to\infty} \Phi_A \qquad .$$

Mit (i) und der Stetigkeit von γ_t und Γ_t nach Sätzen 3.1 und 3.7 und Bemerkung 3.26 erhalten wir

$$\gamma_t \Phi_I \xleftarrow[\mathcal{R}^q(\partial\Omega_I)]{k\to\infty} \gamma_t \Phi_{k,I} \quad = \quad \mathfrak{I}^{-1} \Gamma_t \Phi_{k,A} \xrightarrow[\mathcal{R}^q(\partial\Omega_I)]{k\to\infty} \mathfrak{I}' \Gamma_t \Phi_A \qquad \text{und somit} \qquad \gamma_t \Phi_I = \Gamma_t \Phi_A \qquad .$$

Sei andererseits $\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}$ mit $\Phi_I \in \mathbf{R}^q(\Omega_I)$, $\Phi_A \in \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}_A)$ und $\gamma_t \Phi_I = \Gamma_t \Phi_A$. Dann gilt für alle $\Psi \in \mathrm{C}_0^{\infty,q+1}$

$$\begin{aligned}
\langle \Phi, \mathrm{div}\Psi \rangle \quad &= \quad \langle \Phi_I, \mathrm{div}\Psi_I \rangle_{\Omega_I} + \langle \Phi_A, \mathrm{div}\Psi_A \rangle_{\Omega_A} \\
&= \quad -\langle \mathrm{rot}\Phi_I, \Psi_I \rangle_{\Omega_I} + \langle \gamma_t \Phi_I, \gamma_n \Psi_I \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega_I)} \\
&\qquad -\langle \mathrm{rot}\Phi_A, \Psi_A \rangle_{\Omega_A} + \langle \Gamma_t \Phi_A, \Gamma_n \Psi_A \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega_A)} \\
&= \quad -\langle \mathrm{rot}\Phi_I, \Psi_I \rangle_{\Omega_I} - \langle \mathrm{rot}\Phi_A, \Psi_A \rangle_{\Omega_A} \\
&\qquad +\langle \gamma_t \Phi_I, \gamma_n \Psi_I \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega_I)} - \langle \Gamma_t \Phi_A, \gamma_n \Psi_I \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega_A)} \\
&= \quad -\langle \mathrm{rot}\Phi_I, \Psi_I \rangle_{\Omega_I} - \langle \mathrm{rot}\Phi_A, \Psi_A \rangle_{\Omega_A} \qquad .
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Bemerkungen 3.3 (i) und 3.9 (i), sowie Teil (i) dieses Lemmas benutzt. Damit ist $\Phi \in \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}$ mit $(\mathrm{rot}\Phi)_I = \mathrm{rot}\Phi_I$ und $(\mathrm{rot}\Phi)_A = \mathrm{rot}\Phi_A$. □

Zu (iii): Diese zu (ii) duale Aussage kann ganz analog wie (ii) bewiesen werden. ■

Als Nächstes stellen wir noch einen Zusammenhang zwischen dem Raum der Neumann–Formen vom Rang q auf Ω_I und dem Raum der Dirichlet–Formen vom Rang $q+1$ auf Ω_A her. Wir können zeigen, dass sie dieselbe Dimension besitzen. Dies wird uns bei der Lösungstheorie helfen, um das elektrische Feld E_I so zu konstruieren, dass die Tangentialspur stetig in die von E_A übergeht, sodass wir nach Lemma 3.28 (ii) ein elektrisches Feld $E \in \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}$ erhalten.

Lemma 3.29
Sei $\nu \in \mathrm{V}_0^{q,0}(\Omega_I)$. Dann gilt

$$\tilde{d}_I^q \quad := \quad \dim \tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega_I) \quad = \quad \dim {}_\nu\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega_I) \quad = \quad \dim \mathcal{H}^{q+1}(\Omega_A) \quad =: \quad d_A^{q+1} \qquad .$$

Ist $\{\tilde{h}_j : j = 1, \ldots, \tilde{d}_I^q\}$ eine Basis von ${}_\nu\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega_I)$ und $\{h_i : i = 1, \ldots, d_A^{q+1}\}$ eine Basis von $\mathcal{H}^{q+1}(\Omega_A)$, sowie $\{b_i : i = 1, \ldots, d_A^{q+1}\} = \mathrm{B}^{q+1}(\Omega_A)$, so sind die folgenden Matrizen regulär:

$$\begin{array}{llllll} A & := & (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,d_A^{q+1}} & \textit{mit} & a_{ij} & := & \langle \gamma_t(\nu\tilde{h}_j), \Gamma_n h_i \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega_A)} \quad , \\ \tilde{A} & := & (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1,\ldots,d_A^{q+1}} & \textit{mit} & \tilde{a}_{ij} & := & \langle \gamma_t(\nu\tilde{h}_j), \Gamma_n b_i \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega_A)} \quad . \end{array}$$

Beweis:
Die erste Gleichheit entnehmen wir Bemerkung 3.5. Sei nun $\{h_i : i = 1, \ldots, d_A^{q+1}\}$ eine Basis von $\mathcal{H}^{q+1}(\Omega_A)$. Damit definieren wir die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{X} : & {}_\nu\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega_I) & \longrightarrow & \mathbb{C}^{d_A^{q+1}} \\ & \tilde{h} & \longmapsto & (a_1, \ldots, a_{d_A^{q+1}}) \end{array} \qquad \text{mit} \qquad a_k \quad := \quad \langle \gamma_t(\nu\tilde{h}), \Gamma_n h_k \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega_A)} \qquad .$$

Sei $\tilde{h} \in {}_\nu\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega_I)$ mit $\mathcal{X}\tilde{h} = 0$. Nach Satz 3.23 (mit $s = 1$ und $\varepsilon = \mathrm{Id}$) gibt es ein $E \in \mathrm{R}^q(\Omega_A) \cap \mathrm{D}^q(\Omega_A)$ mit

$$\mathrm{rot}E = 0 \qquad , \qquad \mathrm{div}E = 0 \qquad , \qquad \Gamma_t E = \gamma_t(\nu\tilde{h}) \qquad .$$

Bedingung (i) des Satzes ist trivialerweise erfüllt. Bedingung (ii) ist ebenfalls erfüllt, da nach Satz 3.1 (i) die Gleichung $\mathrm{rot}\gamma_t(\nu\tilde{h}) = \gamma_t \mathrm{rot}\nu\tilde{h} = 0$ gilt. Bedingung (iii) ist durch $\mathcal{X}\tilde{h} = 0$ erfüllt. Setzen wir nun

$$\Phi \quad := \quad \begin{cases} \nu\tilde{h} & \text{in} \quad \Omega_I \\ E & \text{in} \quad \Omega_A \end{cases} \qquad ,$$

so gilt nach Lemma 3.28 (ii) $\Phi \in {}_0\mathrm{R}^q$. Ist $q = 0$, so ist $\Phi \in {}_0\mathrm{R}^0 = \{0\}$ (siehe [23, The. 4 (iv)]). Ist $q \neq 0$, so existiert nach Weck und Witsch (siehe [23, The. 5]) ein $\Psi \in \mathrm{R}_{-1}^{q-1} \cap {}_0\mathrm{D}_{-1}^{q-1}$ mit $\Phi = \mathrm{rot}\Psi$. Schließlich erhalten wir wegen $\tilde{h} \in {}_\nu\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega_I)$

$$\langle \nu\tilde{h}, \tilde{h} \rangle_{\Omega_I} \quad = \quad \langle \mathrm{rot}\Psi_I, \tilde{h} \rangle_{\Omega_I} \quad = \quad 0 \qquad ,$$

was uns zu $\tilde{h} = 0$ bringt. Folglich ist $\mathcal{X}$ injektiv und

$$\tilde{d}_I^q \quad = \quad \dim {}_\nu\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega_I) \quad = \quad \dim \mathrm{Bild}(\mathcal{X}) + \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{X}) \quad = \quad \dim \mathrm{Bild}(\mathcal{X}) \quad \leq \quad d_A^{q+1} \qquad .$$

In einem ganz analogen Beweis wollen wir nun $d_A^{q+1} \leq \tilde{d}_I^q$ zeigen. Sei also $\{\tilde{h}_j : j = 1, \ldots, \tilde{d}_I^q\}$ eine Basis von $\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega_I)$. Damit definieren wir die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{Y} : & \mathcal{H}^{q+1}(\Omega_A) & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\tilde{d}_I^q} \\ & h & \longmapsto & (a'_1, \ldots, a'_{\tilde{d}_I^q}) \end{array} \qquad \text{mit} \qquad a'_k \quad := \quad \langle \gamma_t\tilde{h}_k, \Gamma_n h \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega_A)} \qquad .$$

Sei $h \in \mathcal{H}^{q+1}(\Omega_A)$ mit $\mathcal{Y}h = 0$. Für $q = N$ ist $\mathcal{H}^{N+1}(\Omega_A) = \{0\}$ und es ist nichts zu zeigen. Für $q \neq N$ gibt es nach Satz 3.6 (mit $\nu = \mathrm{Id}$) ein $H \in \mathbf{D}^{q+1}(\Omega_I) \cap \mathbf{R}^{q+1}(\Omega_I)$ mit

$$\mathrm{div}H = 0 \qquad , \qquad \mathrm{rot}H = 0 \qquad , \qquad \gamma_n H = -\Gamma_n h \qquad .$$

Bedingung (i) des Satzes ist wieder trivialerweise erfüllt. Bedingung (ii) ist ebenfalls erfüllt, da nach Satz 3.8 (i) die Gleichung $\mathrm{div}(-\Gamma_n h) = \Gamma_n \mathrm{div}h = 0$ gilt. Bedingung (iii) ist durch $\mathcal{Y}h = 0$ erfüllt. Setzen wir nun

$$\Phi \quad := \quad \begin{cases} H & \text{in} \quad \Omega_I \\ h & \text{in} \quad \Omega_A \end{cases} \qquad ,$$

so gilt nach Lemma 3.28 (iii) $\Phi \in {}_0\mathrm{D}^{q+1}$. Ist $q = N-1$, so ist $\Phi \in {}_0\mathrm{D}^N = \{0\}$ (siehe [23, The. 4 (iv)]). Ist $q \notin \{N-1, N\}$, so existiert nach Weck und Witsch (siehe [23, The. 7]) ein $\Psi \in \mathrm{D}_{-1}^{q+2} \cap {}_0\mathrm{R}_{-1}^{q+2}$ mit $\Phi = \mathrm{div}\Psi$. Schließlich erhalten wir wegen $h \in \mathcal{H}^{q+1}(\Omega_A)$

$$\langle h, h \rangle_{\Omega_A} \quad = \quad \langle \mathrm{div}\Psi_A, h \rangle_{\Omega_A} \quad = \quad 0 \qquad ,$$

was uns zu $h = 0$ bringt. Also ist auch $\mathcal{Y}$ injektiv. Damit ist die Gleichheit $d_A^{q+1} = \tilde{d}_I^q$ gezeigt. Die Abbildungen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ sind somit bijektiv. Aus der Bijektivität von $\mathcal{X}$ folgt unmittelbar die Regularität der Matrix A. Die Regularität der Matrix $\tilde{A}$ erhält man in einem analogen Beweis unter Berücksichtigung von Bemerkung 3.24. ∎

Jetzt sind alle Vorbereitungen getroffen, um die Lösungstheorie für das statische dissipative Maxwell–Problem anzugehen. Dieses Problem definieren wir wie folgt:

Definition 3.30
Wir sagen, (E, H) löst das „statische dissipative Maxwell–Problem“ $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, 0, f, F, G, g, \alpha)$ *zu Daten*

$$(f, F, G, g, \alpha) \in \mathrm{L}^{2,q-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega_A) \times \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}} \times \mathrm{L}^{2,q+2}_{\mathrm{loc}} \times \mathbb{C}^{d^q_A} \quad ,$$

falls

$$(E, H) \in \left(\mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{N}{2}} \cap \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}\right) \times \left(\mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{N}{2}} \cap \mu^{-1}\mathrm{R}^{q+1}_{\mathrm{loc}} \cap \mathrm{D}^{q+1}_{\mathrm{loc}}\right) \qquad \textit{und} \qquad E_A \in \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega_A) \quad ,$$

sowie die Gleichungen

- $\mathrm{rot} E = G \quad , \quad \mathrm{div} \varepsilon E_A = f \quad , \quad \langle \varepsilon E_A, \mathring{b}^q_l \rangle_{\Omega_A} = \alpha_l$ *für* $l = 1, \ldots, d^q_A \quad ,$
- $\mathrm{rot} \mu H = g \quad , \quad \mathrm{div} H + \sigma E = F$

erfüllt sind. Hierbei sei $\{\mathring{b}^q_l : l = 1, \ldots, d^q_A\} = \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega_A)$.

Definition 3.31
Wir definieren die Datenräume

$$\mathcal{F}^q(\Omega_A) := {}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}_A) \cap \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega_A)^{\perp} \qquad \textit{und} \qquad \tilde{\mathcal{F}}^q := \left\{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}} : \Phi_A \in \mathcal{F}^q(\Omega_A)\right\} \quad .$$

Damit kommen wir zum Hauptsatz dieses Abschnitts:

Satz 3.32
Sei $\tau \geq N/2 - 1$. Dann existiert zu allen

$$(f, F, G, g, \alpha) \in \left(\mathrm{L}^{2,q-1}_{>1-\frac{N}{2}}(\Omega_A) \cap \mathcal{F}^{q-1}(\Omega_A)\right) \times \left(\mathrm{L}^{2,q}_{>1-\frac{N}{2}} \cap \tilde{\mathcal{F}}^q\right) \times {}_0\mathrm{R}^{q+1}_{>1-\frac{N}{2}} \times {}_0\mathrm{R}^{q+2}_{>1-\frac{N}{2}} \times \mathbb{C}^{d^q_A}$$

genau eine Lösung des Problems $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, 0, f, F, G, g, \alpha)$ *und diese hängt stetig von den Daten ab. Mit*

$$\begin{array}{rcccl} {}_\sigma\mathcal{L}_0 & : & \left(\mathrm{L}^{2,q}_{>1-\frac{N}{2}} \cap \tilde{\mathcal{F}}^q\right) \times {}_0\mathrm{R}^{q+1}_{>1-\frac{N}{2}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^q_{>-\frac{N}{2}} \times \mathbf{D}^{q+1}_{>-\frac{N}{2}} \\ & & (F, G) & \longmapsto & (E, H) \;\; \textit{Lösung zu}\; \mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, 0, 0, F, G, 0, 0) \end{array}$$

bezeichnen wir den Lösungsoperator zum statischen dissipativen Maxwell–Problem $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, 0, 0, F, G, 0, 0)$.

Beweis:
Zur Existenz der Lösung sei $1 - N/2 < s < N - 1$ mit $s \notin \mathbb{I}$ und

$$(f, F, G, g) \in \left(\mathrm{L}^{2,q-1}_s(\Omega_A) \cap \mathcal{F}^{q-1}(\Omega_A)\right) \times \left(\mathrm{L}^{2,q}_s \cap \tilde{\mathcal{F}}^q\right) \times {}_0\mathrm{R}^{q+1}_s \times {}_0\mathrm{R}^{q+2}_s \times \mathbb{C}^{d^q_A} \quad .$$

Mit solch einem s ist $\tau > \max\{0, s - N/2, -s\}$. Wir zerlegen F_I in $\mathrm{L}^{2,q}(\Omega_I)$ orthogonal in

$$F_I \quad := \quad F^1_I + F^2_I \quad \in \quad \sigma\big(\overline{\mathrm{rot}\mathring{\mathbf{R}}^{q-1}(\Omega_I)}\big) \oplus_{\sigma^{-1}} {}_0\mathbf{D}^q(\Omega_I) \quad .$$

Definieren wir damit

$$F^1 := \begin{cases} F^1_I & \text{in } \Omega_I \\ 0 & \text{in } \Omega_A \end{cases} \quad , \quad F^2 := \begin{cases} F^2_I & \text{in } \Omega_I \\ F_A & \text{in } \Omega_A \end{cases} \quad , \quad E^1 := \begin{cases} \sigma^{-1}F^1_I & \text{in } \Omega_I \\ 0 & \text{in } \Omega_A \end{cases} \quad ,$$

so ist wegen $E^1_I \in \overline{\mathrm{rot}\mathring{\mathbf{R}}^{q-1}(\Omega_I)} \subset {}_0\mathring{\mathbf{R}}^q(\Omega_I)$ nach Bemerkung 3.3 (iii) und Lemma 3.28 (ii) $E^1 \in {}_0\mathrm{R}^q_{\mathrm{vox}}$ und

$$(E^1, 0) \quad \text{löst} \quad \mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, 0, 0, F^1, 0, 0, 0) \quad .$$

Nach Satz 3.6 mit $\nu := \sigma^{-1}$ und ${}_\nu\Phi_l := \langle \nu \cdot, \tilde{h}_l \rangle_{\Omega_I}$, wobei $\{\tilde{h}_l : l = 1, \ldots, \tilde{d}^q_I\}$ eine Orthonormalbasis von ${}_\nu\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega_I)$ bzgl. $\langle \nu \cdot, \cdot \rangle_{\Omega_I}$ ist, existiert ein eindeutiges $h \in \mathbf{D}^q(\Omega_I) \cap \sigma\mathbf{R}^q(\Omega_I)$ mit

$$\mathrm{div} h = 0 \quad , \quad \mathrm{rot} \nu h = G_I \quad , \quad \gamma_n h = \gamma_n F^2_I + \Gamma_n F_A \quad , \quad \langle \nu h, \tilde{h}_l \rangle_{\Omega_I} = 0 \quad \text{für} \quad l = 1, \ldots, \tilde{d}^q_I \quad ,$$

denn die Bedingungen (i), (ii) und (iii) aus Satz 3.6 sind erfüllt: wegen $G \in {}_0\mathrm{R}^{q+1}_s$ gibt es nach Weck und Witsch (siehe [23, The. 5]) ein $\Psi \in \mathrm{R}^q_{\hat{s}-1}$ mit $\mathrm{rot}\Psi = G$, wobei $\hat{s} \leq s$ und $\hat{s} < 1 + N/2$ sei. Damit ist

$$G_I = \mathrm{rot}\Psi_I \in {}_0\mathbf{R}^{q+1}(\Omega_I) \cap \tilde{\mathcal{H}}^{q+1}(\Omega_I)^{\perp} \quad .$$

Nach Satz 3.2 (i) und nach Satz 3.8 (i) gilt

$$\gamma_n F_I^2 + \Gamma_n F_A \in \mathcal{D}^{q-1}(\Omega_I) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div}(\gamma_n F_I^2 + \Gamma_n F_A) \quad = \quad -\gamma_n \operatorname{div} F_I^2 - \Gamma_n \operatorname{div} F_A \quad = \quad 0 \qquad .$$

Desweiteren erhalten wir für $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}^{q-1}(\Omega_I)$ nach Bemerkung 3.3 (ii)

$$\langle \gamma_n F_I^2, \gamma_t \tilde{h} \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q-1}(\partial\Omega_I)} \quad = \quad \langle \operatorname{div} F_I^2, \tilde{h} \rangle_{\Omega_I} + \langle F_I, \operatorname{rot} \tilde{h} \rangle_{\Omega_I} \quad = \quad 0 \qquad .$$

Aufgrund von $F_A \in \mathcal{F}^q(\Omega_A)$ gibt es nach Bemerkung 3.13 (iii) und Pauly [11, Kor. 6.27] ein $\Psi' \in \mathrm{D}_{\hat{s}-1}^{q+1}(\Omega_A)$ mit $\operatorname{div}\Psi' = F_A$, wobei $\hat{s} \leq s$ und $\hat{s} < N/2$ sei. Deshalb gilt auch

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_n F_A, \gamma_t \tilde{h} \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q-1}(\partial\Omega_I)} &= \langle \Gamma_n \operatorname{div}\Psi', \gamma_t \tilde{h} \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q-1}(\partial\Omega_I)} = \langle -\operatorname{div}\Gamma_n \Psi', \gamma_t \tilde{h} \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q-1}(\partial\Omega_I)} \\ &= \langle \Gamma_n \Psi', \operatorname{rot}\gamma_t \tilde{h} \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega_I)} = \langle \Gamma_n \Psi', \gamma_t \operatorname{rot}\tilde{h} \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega_I)} = 0 \qquad . \end{aligned}$$

Setzen wir $e := \nu h$, so ist $e \in \nu\mathbf{D}^q(\Omega_I) \cap \mathbf{R}^q(\Omega_I)$ Lösung des Problems

$$\operatorname{div}\sigma e = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} e = G_I \quad , \quad \gamma_n(\sigma e) = \gamma_n F_I^2 + \Gamma_n F_A \quad , \quad \langle e, \tilde{h}_l \rangle_{\Omega_I} = 0 \quad \text{für} \quad l = 1, \ldots, \tilde{d}_I^q \qquad .$$

Lemma 3.29 liefert $\tilde{d}_I^q = d_A^{q+1} =: K$ und für eine Basis $\{h_i : i = 1, \ldots, K\}$ von $\mathcal{H}^{q+1}(\Omega_A)$ die Regularität der Matrix

$$A := (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,K} \qquad \text{mit} \qquad a_{ij} := \langle \gamma_t(\nu \tilde{h}_j), \Gamma_n h_i \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega_A)} \qquad .$$

Wir definieren uns die Vektoren

$$v \in \mathbb{C}^K \quad \text{mit} \quad v_i := \langle G_A, h_i \rangle_{\Omega_A} - \langle \gamma_t e, \Gamma_n h_i \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega_A)} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots K \quad \text{und} \quad u := A^{-1} v \in \mathbb{C}^K \qquad .$$

$E_I^2 := e + \sum_{j=1}^{K} u_j \nu \tilde{h}_j \in \nu\mathbf{D}^q(\Omega_I) \cap \mathbf{R}^q(\Omega_I)$ ist eindeutige Lösung des Problems

$$\operatorname{div}\sigma E_I^2 = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} E_I^2 = G_I \quad , \quad \gamma_n(\sigma E_I^2) = \gamma_n F_I^2 + \Gamma_n F_A \quad , \quad \langle E_I^2, \tilde{h}_l \rangle_{\Omega_I} = u_l \quad \text{für} \quad l = 1, \ldots, \tilde{d}_I^q \qquad .$$

Nach Satz 3.23 mit ${}_\varepsilon\Phi_l := \langle \varepsilon \cdot, \mathring{b}_l^q \rangle_{\Omega_A}$ gibt es ein $E_A \in \big(\mathrm{R}_{s-1}^q(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}_{s-1}^q(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{D}_{s-1}^q \oplus \eta\mathcal{A}_{s-1}^q$ mit

$$\operatorname{rot} E_A = G_A \quad , \quad \operatorname{div}\varepsilon E_A = f \quad , \quad \Gamma_t E_A = \gamma_t E_I^2 \quad , \quad \langle \varepsilon E_A, \mathring{b}_l^q \rangle_{\Omega_A} = \alpha_l \quad \text{für} \quad l = 1, \ldots, d_A^q \qquad ,$$

denn die Bedingungen (i), (ii) und (iii) des Satzes 3.23 sind erfüllt: Mit Bemerkung 3.24 ist Bedingung (i) erfüllt:

$$f \in \mathrm{L}_s^{2,q-1}(\Omega_A) \cap \mathcal{F}^{q-1}(\Omega_A) = {}_0\mathrm{D}_s^{q-1}(\Omega_A) \cap \mathring{\mathrm{B}}^{q-1}(\Omega_A)^\perp \qquad \text{und} \qquad G_A \in {}_0\mathrm{R}_s^{q+1}(\Omega_A) \qquad .$$

Außerdem ist wegen Satz 3.1 (i), Satz 3.7 (i) und Lemma 3.28 (ii)

$$\gamma_t E_I^2 \in \mathcal{R}^q(\partial\Omega_A) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot}\gamma_t E_I^2 \quad = \quad \gamma_t G_I \quad = \quad \Gamma_t G_A \qquad .$$

Die Bedingung (iii) des Satzes 3.23 haben wir mit $Au = v$ erzwungen. Setzen wir

$$E^2 \quad := \quad \begin{cases} E_I^2 & \text{in } \Omega_I \\ E_A & \text{in } \Omega_A \end{cases} \qquad ,$$

so ist wegen $\Gamma_t E_A = \gamma_t E_I^2$ nach Lemma 3.28 (ii) mit Bemerkung 3.21 $E^2 \in \mathrm{R}_{>-\frac{N}{2}}^q$ und $E_A \in \varepsilon^{-1}\mathrm{D}_{>-\frac{N}{2}}^q(\Omega_A)$ mit

$$\operatorname{rot} E^2 = G \qquad , \qquad \operatorname{div}\varepsilon E_A = f \qquad , \qquad \langle \varepsilon E_A, \mathring{b}_l^q \rangle_{\Omega_A} = \alpha_l \quad \text{für} \quad l = 1, \ldots, d_A^q \qquad .$$

Nun fehlt uns noch H. Es gilt nach Konstruktion

$$\gamma_n(F_I^2 - \sigma E_I^2) = -\Gamma_n F_A \qquad , \qquad F_I^2 - \sigma E_I^2 \in {}_0\mathbf{D}^q(\Omega_I) \qquad , \qquad F_A \in {}_0\mathrm{D}_s^q(\Omega_A) \qquad ,$$

also nach Lemma 3.28 (iii) $F^2 - \sigma E^2 \in {}_0\mathrm{D}_s^q$ und $g \in {}_0\mathrm{R}_s^{q+2}$. Nach Pauly [11, Satz 6.36] (für $\Omega = \mathbb{R}^N$) ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \big(\mu^{-1}\mathrm{R}_{s-1}^{q+1} \cap \mathrm{D}_{s-1}^{q+1}\big) \oplus \eta\mathcal{R}_{s-1}^{q+1} \oplus \eta\mathcal{A}_{s-1}^{q+1} & \longrightarrow & {}_0\mathrm{D}_s^q \times {}_0\mathrm{R}_s^{q+2} \\ H & \longmapsto & (\operatorname{div} H, \operatorname{rot}\mu H) \end{array}$$

ein topologischer Isomorphismus, also existiert genau ein $H \in \left(\mu^{-1}\mathrm{R}^{q+1}_{s-1} \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}\right) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1}$ mit

$$\mathrm{div}H = F^2 - \sigma E^2 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{rot}\mu H = g \qquad .$$

Unter Zuhilfenahme von Bemerkung 3.21 sehen wir $H \in \mu^{-1}\mathrm{R}^{q+1}_{>-\frac{N}{2}} \cap \mathrm{D}^{q+1}_{>-\frac{N}{2}}$. Folglich gilt

$$(E,H) := (E^1,0) + (E^2,H) \quad \text{löst} \quad \mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,0,f,F,G,g,\alpha) \qquad .$$

Die stetige Abhängigkeit der Lösung (E,H) von den Daten (f,F,G,g,α) folgt aus der stetigen Abhängigkeit der Lösungen aus Satz 3.6, Satz 3.23 und Pauly [11, Satz 6.36] von deren Daten, welche wiederum stetig von (f,F,G,g,α) abhängen. □

Zum Beweis der Eindeutigkeit sei nun (E,H) Lösung des Problems $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,0,0,0,0,0,0)$. Dann gilt nach Lemma 3.28 (iii) wegen $\sigma E = -\mathrm{div}H \in {}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}$

$$\mathrm{div}\sigma E_I = 0 \quad , \quad \mathrm{rot}E_I = 0 \quad , \quad \gamma_n(\sigma E_I) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E_I \in \nu_\nu\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega_I)$$

mit $\nu := \sigma^{-1}$. Da E_A nach Lemma 3.28 (ii) das Problem

$$\mathrm{rot}E_A = 0 \quad , \quad \mathrm{div}\varepsilon E_A = 0 \quad , \quad \Gamma_t E_A = \gamma_t E_I \quad , \quad \langle \varepsilon E_A, \mathring{b}^q_l\rangle_{\Omega_A} = 0 \quad \text{für} \quad l = 1,\dots,d^q_A$$

löst, muss nach Satz 3.23 für alle $h \in \mathcal{H}^{q+1}(\Omega_A)$

$$\langle \gamma_t E_I, \Gamma_n h\rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2},q}(\partial\Omega_A)} = 0$$

gelten. Aus Lemma 3.29 können wir dann wegen $E_I \in \nu_\nu\tilde{\mathcal{H}}^q(\Omega_I)$ folgern, dass $E_I = 0$ sein muss. Damit muss auch $E_A = 0$ sein, und schließlich muss dann auch $H = 0$ sein. ■

Bemerkung 3.33
Wie schon in Bemerkung 3.25 erwähnt, tritt im Falle $q = 1$ die Ausnahmeform $\eta\mathcal{A}^q_{s-1}$ in der Darstellung von E nicht mehr auf, falls $f = 0$ und $\alpha = 0$ sind.
Im Falle $q = N-2$ tritt die Ausnahmeform $\eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1}$ in der Darstellung von H nicht mehr auf, falls $g = 0$ ist, denn nach Pauly *[11, Satz 6.39] (für $\Omega = \mathbb{R}^N$) ist die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \Big(\left(\mu^{-1}\mathrm{R}^{q+1}_{s-1} \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}\right) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1}\Big) \cap \mu^{-1}{}_0\mathrm{R}^{q+1}_{\mathrm{loc}} & \longrightarrow & {}_0\mathrm{D}^q_s \\ H & \longmapsto & \mathrm{div}H \end{array}$$

ein topologischer Isomorphismus.

3.4 Iteration des statischen Lösungsoperators

Unser Ziel ist es, eine Niederfrequenzasymptotik für den zeitharmonischen Lösungsoperator ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega$ zu entwickeln. Aufgrund des engen Zusammenhangs zwischen den dissipativen und den nicht–dissipativen Maxwell–Gleichungen werden wir analog zu Pauly in [11] vorgehen. Die Differentialgleichung ist dergestalt, dass sie den Ansatz einer Neumannschen Reihe wie bei Weck und Witsch in [22] und [24], sowie bei Pauly in [11], des statischen Lösungsoperators ${}_\sigma\mathcal{L} := \Lambda_\sigma\mathcal{L}_0$ nahelegt. Dazu müssen wir aber in der Lage sein, den Operator ${}_\sigma\mathcal{L}$ mehrfach zu iterieren. Im vorigen Abschnitt haben wir bereits gesehen, dass das einmalige Anwenden des Lösungsoperators schon dazu führen kann, dass die Lösung (E, H) Turmformenanteile nullter Stufe enthalten kann, welche für große s (Integrierbarkeit der Daten) mit schlechterem Gewicht integrierbar sind als mit $s-1$. Um auf $(\varepsilon E, \mu H)$ erneut den Lösungsoperator anwenden zu können, müssen wir also den Lösungsoperator auf Datenräume verallgemeinern, die Turmformen enthalten dürfen. Wir werden im Verlauf sehen, dass beim weiteren Lösen die Höhe der Turmformen weiter wächst.

Damit wir das Auftreten der Ausnahmeformen $\eta\mathcal{A}^1_{s-1}$ bzw. $\eta\mathcal{A}^{N-1}_{s-1}$ ausschließen können, müssen wir in der weiteren Betrachtung den Rang der Formen beschränken auf

$$1 \leq q \leq N-2 \quad .$$

Definition 3.34
Wir wollen zunächst einige Schreibweisen bereitstellen, um die auftretenden Turmformenanteile kompakter schreiben zu können. Die beiden Indexmengen

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{I}} &:= \left\{(k,\beta,m,\theta) : (k,\beta)\in\mathbb{N}_0^2 \ \wedge\ m\in\{1,\dots,\mu_\beta^{q,k}\} \ \wedge\ \theta\in\{+,-\}\right\} \quad , \\ \hat{\mathfrak{J}} &:= \left\{(l,\gamma,n,\vartheta) : (l,\gamma)\in\mathbb{N}_0^2 \ \wedge\ n\in\{1,\dots,\mu_\gamma^{q,l+1}\} \ \wedge\ \vartheta\in\{+,-\}\right\} \end{aligned}$$

definieren die Gesamtmenge aller Indizes der Divergenz– bzw. Rotations–Türme. Für $s\in\mathbb{R}$ und $K, L\in\mathbb{N}_0$ seien

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_s^k &:= \left\{(k,\beta,m,-)\in\hat{\mathfrak{I}} : \eta^- D^{q,k}_{\beta,m} \notin \mathrm{L}^{2,q}_s\right\} = \left\{(k,\beta,m,-)\in\hat{\mathfrak{I}} : \beta\leq s+k-N/2\right\} \quad , \quad \mathfrak{I}_s^{\leq K} := \bigcup_{k=0}^K \mathfrak{I}_s^k \quad , \\ \mathfrak{J}_s^l &:= \left\{(l,\gamma,n,-)\in\hat{\mathfrak{J}} : \eta^- R^{q+1,l}_{\gamma,n} \notin \mathrm{L}^{2,q+1}_s\right\} = \left\{(l,\gamma,n,-)\in\hat{\mathfrak{J}} : \gamma\leq s+l-N/2\right\} \quad , \quad \mathfrak{J}_s^{\leq L} := \bigcup_{l=0}^L \mathfrak{J}_s^l \end{aligned}$$

die speziellen Indexteilmengen, für die die entsprechenden Turmformen eine bestimmte Höhe haben und nicht mit dem Gewicht s integrierbar sind (siehe hierzu Bemerkung 3.19). Die Gesamtheit aller Indizes einer bestimmten Höhe bzw. bis zu einer bestimmten Höhe ist definiert durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_\infty^k &:= \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathfrak{I}_s^k \quad , \quad \mathfrak{I}_\infty^{\leq K} := \bigcup_{k=0}^K \mathfrak{I}_\infty^k \quad , \\ \mathfrak{J}_\infty^l &:= \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathfrak{J}_s^l \quad , \quad \mathfrak{J}_\infty^{\leq L} := \bigcup_{l=0}^L \mathfrak{J}_\infty^l \quad . \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Indexmengen beschreiben wir nun Turmformen und deren Räume in der Form

$$\begin{aligned} D_I^q &:= {}^\theta D^{q,k}_{\beta,m} \quad \text{für} \quad I=(k,\beta,m,\theta)\in\hat{\mathfrak{I}} \quad , \quad \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}) := \mathrm{Lin}\left\{\eta D_I^q : I\in\mathfrak{I}\right\} \quad \text{für} \quad \mathfrak{I}\ (\text{endlich}) \subset \hat{\mathfrak{I}} \quad , \\ R_J^{q+1} &:= {}^\vartheta R^{q+1,l}_{\gamma,n} \quad \text{für} \quad J=(l,\gamma,n,\vartheta)\in\hat{\mathfrak{J}} \quad , \quad \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J}) := \mathrm{Lin}\left\{\eta R_J^{q+1} : J\in\mathfrak{J}\right\} \quad \text{für} \quad \mathfrak{J}\ (\text{endlich}) \subset \hat{\mathfrak{J}} \quad . \end{aligned}$$

Durch den Vergleich mit den Definitionen 3.18 und 3.20 ergibt sich

$$\begin{aligned} \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}_s^0) &= \eta\mathcal{D}_s^q \quad , \quad \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}_s^{\leq K}) = \eta^-\mathcal{D}^{q,\leq K}_{s-\frac{N}{2}} \quad , \\ \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J}_s^0) &= \eta\mathcal{R}_s^{q+1} \quad , \quad \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J}_s^{\leq L}) = \eta^-\mathcal{R}^{q+1,\leq L}_{s-\frac{N}{2}} \quad . \end{aligned}$$

Den Homogenitätsgrad eines Index und den maximalen Homogenitätsgrad einer Indexmenge definieren wir als

$$\mathrm{h}_I := {}^\theta\mathrm{h}^k_\beta \quad \text{für} \quad I=(k,\beta,m,\theta)\in\hat{\mathfrak{I}}\cup\hat{\mathfrak{J}} \quad , \quad \mathrm{h}_\mathfrak{I} := \max_{I\in\mathfrak{I}} \mathrm{h}_I \quad \text{für} \quad \mathfrak{I}\subset\hat{\mathfrak{I}}\cup\hat{\mathfrak{J}} \quad , \quad \mathrm{h}_\emptyset := -\infty \quad .$$

Wenn wir die statische Lösungstheorie auf Daten mit Turmformenanteilen verallgemeinern wollen, ist es sinnvoll, eine Schreibweise für den Index zu finden, der aus dem einmaligen (bzw. im Hinblick auf die Iteration des statischen Lösungsoperators j–maligen) Erhöhen der Höhe eines Index hervorgeht:

$$\begin{array}{llllll} I_+ := (k+1,\beta,m,\theta) \in \hat{\mathcal{J}} & \textit{für} \quad I = (k,\beta,m,\theta) \in \hat{\mathfrak{I}} & , & \mathfrak{I}_+ := \big\{ I_+ : I \in \mathfrak{I} \big\} \subset \hat{\mathcal{J}} & \textit{für} \quad \mathfrak{I} \subset \hat{\mathfrak{I}} & , \\ J_+ := (l+1,\gamma,n,\vartheta) \in \hat{\mathfrak{I}} & \textit{für} \quad J = (l,\gamma,n,\vartheta) \in \hat{\mathcal{J}} & , & \mathcal{J}_+ := \big\{ J_+ : J \in \mathcal{J} \big\} \subset \hat{\mathfrak{I}} & \textit{für} \quad \mathcal{J} \subset \hat{\mathcal{J}} & , \\ I_j := (k+j,\beta,m,\theta) & \textit{für} \quad I = (k,\beta,m,\theta) \in \hat{\mathfrak{I}} & , & \mathfrak{I}_j := \big\{ I_j : I \in \mathfrak{I} \big\} & \textit{für} \quad \mathfrak{I} \subset \hat{\mathfrak{I}} & , \\ J_j := (l+j,\gamma,n,\vartheta) & \textit{für} \quad J = (l,\gamma,n,\vartheta) \in \hat{\mathcal{J}} & , & \mathcal{J}_j := \big\{ J_j : J \in \mathcal{J} \big\} & \textit{für} \quad \mathcal{J} \subset \hat{\mathcal{J}} & . \end{array}$$

Dann gilt für die um j „Stockwerke“ erhöhten Indizes

$$\begin{array}{lllll} I_j \in \hat{\mathcal{J}} \quad , & \mathfrak{I}_j \subset \hat{\mathcal{J}} \quad , & J_j \in \hat{\mathfrak{I}} \quad , & \mathcal{J}_j \subset \hat{\mathfrak{I}} & \textit{für ungerades } j \quad , \\ I_j \in \hat{\mathfrak{I}} \quad , & \mathfrak{I}_j \subset \hat{\mathfrak{I}} \quad , & J_j \in \hat{\mathcal{J}} \quad , & \mathcal{J}_j \subset \hat{\mathcal{J}} & \textit{für gerades } j \quad . \end{array}$$

Zuguterletzt wollen wir noch die Datenräume auf Turmformen verallgemeinern. Dazu seien

$$\begin{array}{lllll} \tilde{\mathbf{F}}^q_s(\mathfrak{I}) & := & \big(\mathrm{L}^{2,q}_s \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I})\big) \cap \tilde{\mathcal{F}}^q & \textit{für} \quad \mathfrak{I} \textit{ (endlich) } \subset \hat{\mathfrak{I}} & , \\ \mathbf{G}^{q+1}_s(\mathcal{J}) & := & \big(\mathrm{L}^{2,q+1}_s \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{J})\big) \cap {}_0\mathrm{R}^{q+1}_{\mathrm{loc}} & \textit{für} \quad \mathcal{J} \textit{ (endlich) } \subset \hat{\mathcal{J}} & . \end{array}$$

Mit diesen Schreibweisen können wir nun definieren, was wir unter einer Lösung des statischen dissipativen Maxwell–Problems verstehen, wenn die Daten (F, G) Turmformenanteile besitzen.

Definition 3.35
Seien $s \in (1 - N/2, \infty)\backslash\mathbb{I}$ und $\emptyset \neq \mathfrak{I}$ (endlich) $\subset \hat{\mathfrak{I}}$ und $\emptyset \neq \mathcal{J}$ (endlich) $\subset \hat{\mathcal{J}}$ mit

$$\eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}) \cap \mathrm{L}^{2,q}_s = \{0\} \qquad \textit{und} \qquad \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{J}) \cap \mathrm{L}^{2,q+1}_s = \{0\} \qquad .$$

Desweiteren sei $\tau > \max\{0, s - N/2, s + N/2 + \mathrm{h}_{\mathfrak{I}}, s + N/2 + \mathrm{h}_{\mathcal{J}}\}$ und $\tau \geq -s$.
Wir sagen, (E, H) löst das „verallgemeinerte statische dissipative Maxwell–Problem“ $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, 0, 0, F, G, 0, 0)$ zu Daten

$$(F, G) \in \tilde{\mathbf{F}}^q_s(\mathfrak{I}) \times \mathbf{G}^{q+1}_s(\mathcal{J}) \qquad ,$$

falls

$$E \in \big(\mathrm{R}^q_{s-1} \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}^0_{s-1}) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathcal{J}_+)\big) \cap \varepsilon^{-1}\tilde{\mathcal{F}}^q \quad , \quad H \in \big((\mu^{-1}\mathrm{R}^{q+1}_{s-1} \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{J}^0_{s-1}) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{I}_+)\big) \cap \mu^{-1}{}_0\mathrm{R}^{q+1}_{\mathrm{loc}}$$

sowie die Gleichungen

$$\mathrm{rot} E = G \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{div} H + \sigma E = F$$

erfüllt sind.

Satz 3.36
Seien $s \in (1 - N/2, \infty)\backslash\mathbb{I}$ und $\emptyset \neq \mathfrak{I}$ (endlich) $\subset \hat{\mathfrak{I}}$ und $\emptyset \neq \mathcal{J}$ (endlich) $\subset \hat{\mathcal{J}}$ mit

$$\eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}) \cap \mathrm{L}^{2,q}_s = \{0\} \qquad \textit{und} \qquad \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{J}) \cap \mathrm{L}^{2,q+1}_s = \{0\} \qquad .$$

Desweiteren sei $\tau > \max\{0, s - N/2, s + N/2 + \mathrm{h}_{\mathfrak{I}}, s + N/2 + \mathrm{h}_{\mathcal{J}}\}$ und $\tau \geq -s$.
Dann ist das verallgemeinerte statische dissipative Maxwell–Problem $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, 0, 0, F, G, 0, 0)$ zu Daten

$$(F, G) \in \tilde{\mathbf{F}}^q_s(\mathfrak{I}) \times \mathbf{G}^{q+1}_s(\mathcal{J})$$

stets eindeutig lösbar.
Für $t_1 < \min\{N/2, -1 - N/2 - \mathrm{h}_{\mathcal{J}}\}$ und $t_1 \leq s - 1$, sowie $t_2 < \min\{N/2, -1 - N/2 - \mathrm{h}_{\mathfrak{I}}\}$ und $t_2 \leq s - 1$ liegt die Lösung (E, H) in $\mathrm{L}^{2,q}_{t_1} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{t_2}$ und der hierdurch definierte Lösungsoperator ist stetig.

Bemerkung 3.37
Ist (F, G) von der Gestalt

$$F = F_s + \sum_{I \in \mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D^q_I \qquad \textit{und} \qquad G = G_s + \sum_{J \in \mathcal{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta R^{q+1}_J$$

mit $\quad F_s \in \mathrm{L}^{2,q}_s \quad , \quad \mathtt{f}_I \in \mathbb{C} \quad , \quad G_s \in \mathrm{L}^{2,q+1}_s \quad , \quad \mathtt{g}_J \in \mathbb{C} \quad ,$ *so hat* (E,H) *die Form*

$$E = E_{s-1} + E_{\mathcal{J}^0_{s-1}} + \sum_{J\in\mathcal{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta D^q_{J_+} \qquad \textit{und} \qquad H = H_{s-1} + H_{\mathcal{J}^0_{s-1}} + \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta R^{q+1}_{I_+}$$

mit $\quad E_{s-1} \in \mathrm{R}^q_{s-1} \quad , \quad E_{\mathcal{J}^0_{s-1}} \in \eta\mathcal{D}^q(\mathcal{J}^0_{s-1}) \quad , \quad H_{s-1} \in \mu^{-1}\mathrm{R}^{q+1}_{s-1} \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1} \quad , \quad H_{\mathcal{J}^0_{s-1}} \in \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{J}^0_{s-1}) \quad .$

Desweiteren hat dann $(\varepsilon E, \mu H)$ *die Form*

$$\varepsilon E = E^\varepsilon_{s-1} + E_{\mathcal{J}^0_{s-1}} + \sum_{J\in\mathcal{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta D^q_{J_+} \qquad \textit{und} \qquad \mu H = H^\mu_{s-1} + H_{\mathcal{J}^0_{s-1}} + \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta R^{q+1}_{I_+}$$

mit $\quad E^\varepsilon_{s-1} = \varepsilon E_{s-1} + \hat\varepsilon E_{\mathcal{J}^0_{s-1}} + \sum_{J\in\mathcal{J}} \mathtt{g}_J \cdot \hat\varepsilon\eta D^q_{J_+} \quad \textit{und} \quad H^\mu_{s-1} = \mu H_{s-1} + \hat\mu H_{\mathcal{J}^0_{s-1}} + \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \hat\mu\eta R^{q+1}_{I_+} \quad ,$ *da die Voraussetzungen an die Abklingrate* τ *dafür sorgen, dass diese Terme mit dem Gewicht* $s-1$ *integrierbar sind.*

Beweis:
Sei (F,G) von der Gestalt

$$F = F_s + \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D^q_I \qquad , \qquad G = G_s + \sum_{J\in\mathcal{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta R^{q+1}_J$$

mit $\quad F_s \in \mathrm{L}^{2,q}_s \quad , \quad \mathtt{f}_I \in \mathbb{C} \quad , \quad G_s \in \mathrm{L}^{2,q+1}_s \quad , \quad \mathtt{g}_J \in \mathbb{C} \quad .$ Dann machen wir den Ansatz

$$E := E' + \sum_{J\in\mathcal{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta D^q_{J_+} \qquad , \qquad H := H' + \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta R^{q+1}_{I_+} \qquad .$$

Dies führt uns zu den Gleichungen

- $\mathrm{rot}E' \quad = \quad G - \sum_{J\in\mathcal{J}} \mathtt{g}_J \cdot \mathrm{rot}(\eta D^q_{J_+}) \quad = \quad G_s - \sum_{J\in\mathcal{J}} \mathtt{g}_J \cdot C_{\mathrm{rot},\eta} D^q_{J_+} \quad =: \quad g_1 \qquad ,$
- $\mathrm{div}\varepsilon E'_A \quad = \quad -\sum_{J\in\mathcal{J}} \mathtt{g}_J \cdot \mathrm{div}(\varepsilon\eta D^q_{J_+}) \quad = \quad -\sum_{J\in\mathcal{J}} \mathtt{g}_J \cdot (C_{\mathrm{div},\eta} D^q_{J_+} + \mathrm{div}(\hat\varepsilon\eta D^q_{J_+})) \quad =: \quad f_1 \qquad ,$
- $\mathrm{div}H' + \sigma E' \quad = \quad F - \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \mathrm{div}(\eta R^{q+1}_{I_+}) \quad = \quad F_s - \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot C_{\mathrm{div},\eta} R^{q+1}_{I_+} \quad =: \quad f_2 \qquad ,$
- $\mathrm{rot}\mu H' \quad = \quad -\sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \mathrm{rot}(\mu\eta R^{q+1}_{I_+}) \quad = \quad -\sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot (C_{\mathrm{rot},\eta} R^{q+1}_{I_+} + \mathrm{rot}(\hat\mu\eta R^{q+1}_{I_+})) \quad =: \quad g_2 \qquad .$

Da $C_{\mathrm{rot},\eta}$ und $C_{\mathrm{div},\eta}$ kompakten Träger haben, gilt offensichtlich

$$g_1 \in {}_0\mathrm{R}^{q+1}_s \qquad \text{und} \qquad f_2 \in \mathrm{L}^{2,q}_s \cap \tilde{\mathcal{F}}^q \qquad ,$$

und wegen Generalvoraussetzung (5), sowie den Voraussetzungen dieses Satzes an die Abklingrate τ ergibt sich

$$g_2 \in {}_0\mathrm{R}^{q+2}_{<-\frac{N}{2}-\mathrm{h}_\mathcal{J}+\tau} \subset {}_0\mathrm{R}^{q+2}_s \qquad \text{und} \qquad f_1 \in \mathrm{L}^{2,q-1}_{<-\frac{N}{2}-\mathrm{h}_\mathcal{J}+\tau}(\Omega_A) \cap \mathcal{F}^{q-1}(\Omega_A) \subset \mathrm{L}^{2,q-1}_s(\Omega_A) \cap \mathcal{F}^{q-1}(\Omega_A) \qquad ,$$

denn $\tau > \max\{s + N/2 + \mathrm{h}_\mathcal{I}, s + N/2 + \mathrm{h}_\mathcal{J}\}$. Desweiteren sind Terme, die den Faktor η enthalten, nach Generalvoraussetzung (3) orthogonal zu $\mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega_A)$, was zur Bedingung $\varepsilon E'_A \in \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega_A)^\perp$ führt. Nach Satz 3.32 gibt es ein eindeutiges

$$(E', H') \in \left(\mathrm{R}^q_{s-1} \oplus \eta\mathcal{D}^q_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^q_{s-1}\right) \times \left((\mu^{-1}\mathrm{R}^{q+1}_{s-1} \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1}\right)$$

welches das Problem $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, 0, f_1, f_2, g_1, g_2, 0)$ löst und stetig von den Daten f_1, f_2, g_1 und g_2 abhängt. Wie schon in Definition 3.34 erwähnt, gilt

$$\eta\mathcal{D}^q_{s-1} = \eta\mathcal{D}^q(\mathcal{J}^0_{s-1}) \qquad \text{und} \qquad \eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} = \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{J}^0_{s-1}) \qquad .$$

Damit sind (E,H) als Lösung der Gleichungen von $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, 0, 0, F, G, 0, 0)$ gefunden, und abgesehen von den Anteilen der Ausnahmeformen liegen sie auch im richtigen Lösungsraum. Desweiteren hängen sie stetig von den

Daten F und G ab. Die Eindeutigkeit der Lösung ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Lösung aus Satz 3.32.

Also müssen wir nur noch zeigen, dass E keinen Anteil aus $\eta\mathcal{A}^q_{s-1}$ und H keinen Anteil aus $\eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1}$ enthält. Dazu setzen wir

$$\hat{E} := E_A - \check{\Gamma}_t\gamma_t E_I \in \Big(\big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{s-1}(\Omega_A) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega_A)\big) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}^0_{s-1}) \oplus \eta\mathcal{A}^q_{s-1} \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{J}_+)\Big) \cap \varepsilon^{-1}\mathcal{F}^q(\Omega_A) \quad .$$

Nach Konstruktion gilt

$$\mathrm{rot}\hat{E} = G_A - \mathrm{rot}\check{\Gamma}_t\gamma_t E_I \in \big(\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega_A) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}_s(\mathfrak{J})\big) \cap {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega_A) \cap \mathrm{B}^{q+1}(\Omega_A)^{\perp} \quad .$$

Wie in Pauly [11, Lemmata 6.43 u. 6.55] gezeigt, kann dann das Auftreten der Ausnahmeform in $\hat{E}$ ausgeschlossen werden, und somit auch in E, denn $\check{\Gamma}_t\gamma_t E_I$ hat kompakten Träger. Mit Pauly [11, Lemmata 6.41 u. 6.53] kann analog das Auftreten der Ausnahmeform in H ausgeschlossen werden, denn

$$\mathrm{div}H = -\sigma E + F \in \big(\mathrm{L}^{2,q}_s \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I})\big) \cap {}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}} \quad .$$

Insgesamt ist also (E, H) die eindeutige Lösung von $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, 0, 0, F, G, 0, 0)$. ■

Verfolgen wir noch einmal die Konstruktion der Lösung (E, H) zu den Daten (F, G), so ergibt sich direkt der folgende

Satz 3.38
Die durch Satz 3.36 definierten Lösungsoperatoren

$$\begin{array}{cccccc} {}_\sigma\mathcal{L}_0 & : & \tilde{\mathbf{F}}^q_s(\mathfrak{I}) \times \mathbf{G}^{q+1}_s(\mathfrak{J}) & \longrightarrow & \varepsilon^{-1}\tilde{\mathbf{F}}^q_{s-1}(\mathfrak{I}^0_{s-1} \cup \mathfrak{J}_+) \times \mu^{-1}\mathbf{G}^{q+1}_{s-1}(\mathfrak{J}^0_{s-1} \cup \mathfrak{I}_+) \\ & & (F, G) & \longmapsto & (E, H) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{cccccc} {}_\sigma\mathcal{L} & : & \tilde{\mathbf{F}}^q_s(\mathfrak{I}) \times \mathbf{G}^{q+1}_s(\mathfrak{J}) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{F}}^q_{s-1}(\mathfrak{I}^0_{s-1} \cup \mathfrak{J}_+) \times \mathbf{G}^{q+1}_{s-1}(\mathfrak{J}^0_{s-1} \cup \mathfrak{I}_+) \\ & & (F, G) & \longmapsto & (\varepsilon E, \mu H) \end{array}$$

sind stetig.

Nun haben wir den Lösungsoperator ${}_\sigma\mathcal{L}$ in einer Weise definiert, in der wir ihn iterieren können. Die Gestalt der iterierten Lösungen in Abhängigkeit von den Daten (F, G) hängt davon ab, ob eine gerade oder eine ungerade Iterationsstufe vorliegt. Dies liegt daran, dass der Maxwell–Operator eine „Nebendiagonalgestalt“ besitzt. Wir müssen also die Fälle von gerader und ungerader Iterationsstufe unterscheiden.

Satz 3.39
Seien $j \in \mathbb{N}$, $s \in (j - N/2, \infty)\setminus\mathbb{I}$ und $\mathfrak{I} \times \mathfrak{J}$ eine endliche Teilmenge von $\hat{\mathfrak{I}} \times \hat{\mathfrak{J}}$ mit

$$\eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}) \cap \mathrm{L}^{2,q}_s = \{0\} \qquad \textit{und} \qquad \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J}) \cap \mathrm{L}^{2,q+1}_s = \{0\} \quad .$$

Außerdem gelte $\tau > \max\{0, s - N/2\}$ *und* $\tau \geq j - 1 - s$, *sowie*
$\tau > s + N/2 + \mathrm{h}_{\mathfrak{I}}$, *falls* $\mathfrak{I} \neq \emptyset$ *und* $\tau > s + N/2 + \mathrm{h}_{\mathfrak{J}}$, *falls* $\mathfrak{J} \neq \emptyset$.
Dann ist

$${}_\sigma\mathcal{L}^j : \tilde{\mathbf{F}}^q_s(\mathfrak{I}) \times \mathbf{G}^{q+1}_s(\mathfrak{J}) \longrightarrow \begin{cases} \tilde{\mathbf{F}}^q_{s-j}(\mathfrak{I}^{\leq j-1}_{s-j} \cup \mathfrak{J}_j) \times \mathbf{G}^{q+1}_{s-j}(\mathfrak{J}^{\leq j-1}_{s-j} \cup \mathfrak{I}_j) & , \textit{falls } j \textit{ ungerade} \\ \tilde{\mathbf{F}}^q_{s-j}(\mathfrak{I}^{\leq j-1}_{s-j} \cup \mathfrak{I}_j) \times \mathbf{G}^{q+1}_{s-j}(\mathfrak{J}^{\leq j-1}_{s-j} \cup \mathfrak{J}_j) & , \textit{falls } j \textit{ gerade} \end{cases}$$

wohldefiniert und ein stetiger linearer Operator mit Wertebereich in $\mathrm{L}^{2,q}_t \times \mathrm{L}^{2,q+1}_t$ *für*

$$t \leq s - j \qquad \textit{und} \qquad t < N/2 - j + 1 \qquad , \textit{sowie} \qquad t < -j - N/2 - \max\{\mathrm{h}_{\mathfrak{I}}, \mathrm{h}_{\mathfrak{J}}\} \quad , \textit{falls} \quad \mathfrak{I} \cup \mathfrak{J} \neq \emptyset \quad .$$

Bemerkung 3.40
Aus Bemerkung 3.37 kann man sehr leicht ablesen, wie sich die Turmformkomponenten beim Iterieren rekursiv

„weitervererben". Sei (F, G) *von der Gestalt aus Bemerkung 3.37. Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
{}_\sigma\mathcal{L}^j(F,G) = (E_{s-j}, H_{s-j}) \quad &+ \quad \Big(\sum_{I \in \mathfrak{I}_{s-j}^{\le j-1}} \mathtt{e}_I \cdot \eta D_I^q, \sum_{J \in \mathfrak{J}_{s-j}^{\le j-1}} \mathtt{h}_J \cdot \eta R_J^{q+1} \Big) \\
&+ \begin{cases} \Big(\sum_{J \in \mathfrak{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta D_{J_j}^q, \sum_{I \in \mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta R_{I_j}^{q+1} \Big) & \text{, falls } j \text{ ungerade} \\ \Big(\sum_{I \in \mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D_{I_j}^q, \sum_{J \in \mathfrak{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta R_{J_j}^{q+1} \Big) & \text{, falls } j \text{ gerade} \end{cases} \\
&\textit{und} \\
{}_\sigma\mathcal{L}^{j+1}(F,G) = (\hat{E}_{s-j-1}, \hat{H}_{s-j-1}) \quad &+ \quad \Big(\sum_{I \in \mathfrak{I}_{s-j-1}^{\le j}} \hat{\mathtt{e}}_I \cdot \eta D_I^q, \sum_{J \in \mathfrak{J}_{s-j-1}^{\le j}} \hat{\mathtt{h}}_J \cdot \eta R_J^{q+1} \Big) \\
&+ \begin{cases} \Big(\sum_{I \in \mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D_{I_{j+1}}^q, \sum_{J \in \mathfrak{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta R_{J_{j+1}}^{q+1} \Big) & \text{, falls } j \text{ ungerade} \\ \Big(\sum_{J \in \mathfrak{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta D_{J_{j+1}}^q, \sum_{I \in \mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta R_{I_{j+1}}^{q+1} \Big) & \text{, falls } j \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}
$$

mit $(E_{s-j}, H_{s-j}) \in \mathrm{L}_{s-j}^{2,q} \times \mathrm{L}_{s-j}^{2,q+1}$ *und* $(\hat{E}_{s-j-1}, \hat{H}_{s-j-1}) \in \mathrm{L}_{s-j-1}^{2,q} \times \mathrm{L}_{s-j-1}^{2,q+1}$. *Die Koeffizienten vor den Turmformkomponenten genügen dann den Gleichungen*

$$
\mathtt{e}_I = \hat{\mathtt{h}}_{I_+} \quad \text{für} \quad I \in \mathfrak{I}_{s-j}^{\le j-1} \qquad \text{und} \qquad \mathtt{h}_J = \hat{\mathtt{e}}_{J_+} \quad \text{für} \quad J \in \mathfrak{J}_{s-j}^{\le j-1} \qquad .
$$

Bemerkung 3.41
Die Definitionen, Lemmata und Sätze für die statische Lösungstheorie können auch für $-\sigma$ *anstelle von* σ *durchgeführt werden. Dies hat keine Veränderung der Räume zur Folge, lediglich der statische Lösungsoperator muss anders bezeichnet werden. Alle Ergebnisse dieses Kapitels bleiben auch für* $-\sigma$ *anstelle von* σ *richtig. Wir bezeichnen im Folgenden den statischen Lösungsoperator für das Problem* $\mathrm{Max}(-\sigma, \Lambda, 0, f, F, G, g, \alpha)$ *mit* ${}_{-\sigma}\mathcal{L}_0$ *bzw.* ${}_{-\sigma}\mathcal{L}$*.*

4 Niederfrequenzasymptotik

In diesem Kapitel stellen wir das Hauptergebnis dieser Arbeit vor. Wir sind hier in der Lage, Aussagen über das Verhalten von Lösungen des dissipativen Maxwell–Problems für Frequenzen ω nahe bei Null zu machen. Zuerst werden wir zeigen können, dass Null kein Häufungspunkt von ${}_\sigma\mathbb{P}$ ist, sowie für gewisse Daten (F,G) die Konvergenz von ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ gegen ${}_\sigma\mathcal{L}_0(F,G)$ für $\omega \to 0$ nachweisen, jedoch ohne Angabe einer Konvergenzordnung. Wir halten uns dabei sehr nah an PAULY [11, Kap. 7], welcher analoge Ergebnisse für das nicht–dissipative Problem erhält. PICARD kommt für die klassischen Maxwell–Gleichungen in [15] zu entsprechenden Ergebnissen für Daten, die stärkeren Voraussetzungen genügen.

Danach werden wir für einen speziellen Datenraum und Frequenzen ω nahe bei Null mit Hilfe der verallgemeinerten Neumannschen Reihe eine Potenzreihenentwicklung der Lösung des dissipativen Maxwell–Problems in Potenzen von ω anstreben. Hierbei ist wichtig zu beachten, dass genau wie bei PAULY die Potenzreihenentwicklung nur bis zu einer gewissen Ordnung durchgeführt werden kann, welche wiederum von der Güte der Daten (F,G) abhängt. Wie schon WECK und WITSCH in [22] und [24] bezeichnen wir den Datenraum, auf dem die Potenzreihenentwicklung für die Lösung möglich ist, als „Raum der regulären Konvergenz“ mit mehreren, ineinandergeschachtelten Unterräumen, den sogenannten „Räumen der regulären Konvergenz j–ter Stufe“ , auf welchen die Entwicklung bis zur j–ten Stufe möglich ist.

Abschließend werden wir im Falle von Medien, die nahe bei Unendlich homogen sind, Korrekturoperatoren definieren können, welche uns die Potenzreihenentwicklung bis zu einer gewissen Ordnung auf dem Raum der regulären Konvergenz nullter Stufe erlauben.

Als Generalvoraussetzungen wollen wir in diesem Kapitel festhalten:

(1) Die Raumdimension $N \geq 3$ sei <u>ungerade</u> und der Rang der Differentialformen sei $q \in \{1, \dots, N-2\}$.

(2) $\Omega_I \subset \mathbb{R}^N$ sei ein Innengebiet der Klasse C^3. Dann ist $\Omega_A := \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}_I$ ein Außengebiet mit C^3–Rand.

(3) Der Radius r_0 sei so groß, dass $\Omega_I \subset U(r_0)$ und für alle q die Träger der Formen aus $\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega_A)$ und $\mathrm{B}^q(\Omega_A)$ (letztere nur im Falle $q \neq 1$) in $U(r_0)$ liegen.

(4) Die Radien r_1, r_2 in der Definition (1.17) der Ausschneidefunktion η setzen wir durch die Formel $r_n := 2^n \cdot r_0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ fest.

(5) Die Transformationen $(\varepsilon, \mu) = \mathrm{Id} + (\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}) \in \mathrm{V}_\tau^{q,0} \times \mathrm{V}_\tau^{q+1,0}$ mit $\tau > (N+1)/2$ seien einmal stetig differenzierbar mit

$$\partial_n \hat{\varepsilon}, \partial_n \hat{\mu} = \mathcal{O}(r^{-\tau}) \quad \text{für} \quad r \to \infty \quad \text{und} \quad n = 1, \dots, N \qquad .$$

(6) Die Transformation σ erfülle $\sigma \in \mathrm{V}_0^{q,0}(\Omega_I)$ und $\mathrm{supp}(\sigma) \cap \Omega_A = \emptyset$.

4.1 Einfache Niederfrequenzasymptotik

Definition 4.1

Für $r \in \mathbb{R}_+$ definieren wir die Menge

$$\mathbb{C}_{-,r} := \big\{ z \in \mathbb{C}_- : |z| \leq r \big\} \qquad .$$

Wir schätzen zunächst die Lösung über die Daten, deren Divergenz bzw. Rotation, sowie über die Lösung auf einem Kompaktum ab.

Lemma 4.2

Seien $\tilde{\omega} > 0$, $s \in (1/2, N/2)$ und $t := s - (N+1)/2$. Dann gibt es Konstanten $c, \varrho > 0$, mit denen für alle $\omega \in \mathbb{C}_{-,\tilde{\omega}} \backslash \{0\}$, für alle

$$(F,G) \in \big(\mathrm{L}_s^{2,q} \cap \mathbf{D}_s^q(A(r_0))\big) \times \big(\mathrm{L}_s^{2,q+1} \cap \mathbf{R}_s^{q+1}(A(r_0))\big)$$

und alle Lösungen (E,H) von $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, \omega, F, G)$ die folgende Abschätzung richtig ist:

$$\big\|(E,H)\big\|_{\mathbf{R}_t^q \times \mathbf{D}_t^{q+1}} \quad \leq \quad c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{\mathrm{L}_s^2} + \big\|(E,H)\big\|_{\mathrm{L}^2(U(\varrho))} + |\omega|^{-1} \cdot \big\|(\mathrm{div}F, \mathrm{rot}G)\big\|_{\mathrm{L}_s^2(A(r_0))} \Big) \qquad .$$

Bemerkung 4.3
Dieses Lemma ist für alle $q \in \{0, \ldots, N\}$ richtig.

Beweis:
Sei zunächst $\omega \in \mathbb{C}_{-,\tilde{\omega}} \backslash \mathbb{R}$. Weiterhin seien $(F, G) \in \big(\mathrm{L}^{2,q}_s \cap \mathbf{D}^q_s\big(A(r_0)\big)\big) \times \big(\mathrm{L}^{2,q+1}_s \cap \mathbf{R}^{q+1}_s\big(A(r_0)\big)\big)$ und (E, H) die Lösung von $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, \omega, F, G)$. Dann ist aber $(-E, H)$ die eindeutige Lösung des nicht–dissipativen Maxwell–Problems $\mathrm{Max}(0, \Lambda, -\omega, F - \sigma E, -G)$ mit Ausstrahlungsbedingung. Dies wurde bereits in Abschnitt 2.1, sowie in Lemma 2.7 und Korollar 2.8 diskutiert.

Es ist $-\omega \in \mathbb{C}_{+,\tilde{\omega}}$ (Menge analog definiert), und wegen $\Omega_I \subset U(r_0)$ nach Generalvoraussetzung (3) ist $(F - \sigma E, -G) \in \big(\mathrm{L}^{2,q}_s \cap \mathbf{D}^q_s\big(A(r_0)\big)\big) \times \big(\mathrm{L}^{2,q+1}_s \cap \mathbf{R}^{q+1}_s\big(A(r_0)\big)\big)$. Nach dem analogen Lemma [11, Lemma 7.1] von Pauly gibt es von ω, (F, G) und (E, H) unabhängige Konstanten $c, \varrho > 0$, mit denen die Abschätzung

$$\big\|(-E, H)\big\|_{\mathbf{R}^q_t \times \mathbf{D}^{q+1}_t} \quad \leq \quad c \cdot \Big(\big\|(F - \sigma E, -G)\big\|_{\mathrm{L}^2_s} + \big\|(-E, H)\big\|_{\mathrm{L}^2(U(\varrho))} + |-\omega|^{-1} \cdot \big\|(\mathrm{div} F, -\mathrm{rot} G)\big\|_{\mathrm{L}^2_s(A(r_0))}\Big)$$

gilt. Durch Vergrößern der Konstanten c und ϱ, sodass unter anderem $\Omega_I \subset U(\varrho)$ gilt, erhalten wir die gewünschte Abschätzung. Die Konstanten bleiben dadurch unabhängig von ω, (F, G) und (E, H).

Für reelle Frequenzen $\omega \in \mathbb{C}_{-,\tilde{\omega}} \backslash \{0\}$ erhalten wir die Abschätzung mittels der in Satz 2.28 durchgeführten Grenzabsorption, denn durch die Voraussetzungen ist $t < -1/2$. ■

Als Nächstes benötigen wir ein Hilfslemma, was uns bei der Existenz konvergenter Teilfolgen hilfreich ist.

Lemma 4.4
Seien $t \in \mathbb{R}$ und $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in $\mathbf{R}^q_t(\Omega_A) \cap \varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q_t(\Omega_A)$ beschränkte Folge, sodass $(\Gamma_t E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}^q(\partial\Omega_A)$ konvergiert.

Dann besitzt $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die in $\mathrm{L}^{2,q}_{\tilde{t}}(\Omega_A)$ für jedes $\tilde{t} < t$ konvergiert.

Beweis:
Da $(\Gamma_t E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}^q(\partial\Omega_A)$ konvergiert und $\check{\Gamma}_t$ nach Satz 3.7 ein stetiger Operator ist, konvergiert auch $(\check{\Gamma}_t \Gamma_t E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbf{R}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega_A) \cap \varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega_A)$. Somit ist $(E_n - \check{\Gamma}_t \Gamma_t E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in $\mathring{\mathbf{R}}^q_t(\Omega_A) \cap \varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q_t(\Omega_A)$ beschränkte Folge, besitzt also nach LMKE eine Teilfolge, welche in $\mathrm{L}^{2,q}_{\tilde{t}}(\Omega_A)$ für alle $\tilde{t} < t$ konvergiert. Folglich besitzt auch $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, welche in $\mathrm{L}^{2,q}_{\tilde{t}}(\Omega_A)$ für alle $\tilde{t} < t$ konvergiert. ■

Damit können wir nun den ersten Satz präsentieren, welcher Aufschluss über die Konvergenz der Lösungen für $\omega \to 0$ gibt.

Satz 4.5
Null ist kein Häufungspunkt von ${}_\sigma\mathbb{P}$. Somit hat ${}_\sigma\mathbb{P}$ keinen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$. Weiterhin gibt es dann ein $\tilde{\omega} > 0$, sodass ${}_\sigma\mathbb{P} \cap \mathbb{C}_{-,\tilde{\omega}} = \emptyset$ ist und folglich ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega$ für alle $\omega \in \mathbb{C}_{-,\tilde{\omega}} \backslash \{0\}$ auf ganz $\mathrm{L}^{2,q}_{>\frac{1}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>\frac{1}{2}}$ wohldefiniert ist. Seien $s \in (1/2, N/2)$ und $t := s - (N+1)/2$. Dann gelten:

(i) *Es existieren Konstanten $c > 0$ und $0 < \hat{\omega} \leq \tilde{\omega}$, sodass für alle $\omega \in \mathbb{C}_{-,\hat{\omega}} \backslash \{0\}$ und alle*

$$(F, G) \in \big\{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_s : \Phi_A \in \mathbf{D}^q_s(\Omega_A)\big\} \times \mathbf{R}^{q+1}_s$$

die folgende Abschätzung gilt:

$$\big\|{}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F, G)\big\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad \leq \quad c \cdot \Big(\big\|(F, G)\big\|_{\mathrm{L}^2_s} + |\omega|^{-1} \cdot \big\|\mathrm{div} F\big\|_{\mathrm{L}^{2,q-1}_s(\Omega_A)} + |\omega|^{-1} \cdot \big\|\mathrm{rot} G\big\|_{\mathrm{L}^{2,q+2}_s} + |\omega|^{-1} \cdot \sum_{l=1}^{d^q_A} |\langle F, \mathring{b}^q_l \rangle_{\Omega_A}|\Big) \quad .$$

Für $\omega \in \mathbb{C}_{-,\hat{\omega}} \backslash \{0\}$ und $(F, G) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_s := \Big(\mathrm{L}^{2,q}_s \cap \tilde{\mathcal{F}}^q\Big) \times {}_0\mathrm{R}^{q+1}_s$ erhalten wir die gleichmäßige Abschätzung

$$\big\|{}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F, G)\big\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad \leq \quad c \cdot \big\|(F, G)\big\|_{\mathrm{L}^2_s} \quad .$$

Damit ist ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega$ bzgl. $\omega \in \mathbb{C}_{-,\hat{\omega}} \backslash \{0\}$ gleichgradig stetig. In der Abschätzung kann die $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2_t}$–Norm auf der linken Seite durch die natürliche Norm in

$$\Big(\mathbf{R}^q_t \cap \varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q_t(\Omega_A)\Big) \times \Big(\mu^{-1}\mathbf{R}^{q+1}_t \cap \mathbf{D}^{q+1}_t\Big)$$

ersetzt werden.

(ii) *Seien* $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_{-,\hat{\omega}}\setminus\{0\}$ *eine Nullfolge und* $(F_n, G_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \left\{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_s : \Phi_A \in \mathbf{D}^q_s(\Omega_A)\right\} \times \mathbf{R}^{q+1}_s$ *eine Folge mit*

- $(F_n, G_n) \xrightarrow{n\to\infty} (F, G)$ *in* $\mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s$,
- $-\mathrm{i}\omega_n^{-1}\mathrm{div}\, F_n|_{\Omega_A} \xrightarrow{n\to\infty} f$ *in* $\mathrm{L}^{2,q-1}_s(\Omega_A)$,
- $-\mathrm{i}\omega_n^{-1}\mathrm{rot} G_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ *in* $\mathrm{L}^{2,q+2}_s$,
- $-\mathrm{i}\omega_n^{-1}\langle F_n, \overset{\circ}{b}{}^q_l\rangle_{\Omega_A} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_l$ *in* $\mathbb{C}$ *für* $l = 1, \ldots, d^q_A$.

Dann konvergiert

$$(E_n, H_n) := {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega_n}(F_n, G_n) \qquad in \qquad \left(\mathbf{R}^q_{\tilde{t}} \cap \varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q_{\tilde{t}}(\Omega_A)\right) \times \left(\mu^{-1}\mathbf{R}^{q+1}_{\tilde{t}} \cap \mathbf{D}^{q+1}_{\tilde{t}}\right)$$

für alle $\tilde{t} < t$ *gegen die eindeutige Lösung* (E, H) *des statischen Maxwell–Problems* $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, 0, f, F, G, g, \alpha)$ *aus Satz 3.32.*
Somit konvergiert speziell für $\omega \in \mathbb{C}_{-,\hat{\omega}}\setminus\{0\}$ *und* $(F, G) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_s$ *die Lösung* ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F, G)$ *für* $\omega \to 0$ *in* $\mathbf{R}^q_{\tilde{t}} \times \mathbf{D}^{q+1}_{\tilde{t}}$ *für alle* $\tilde{t} < t$ *gegen* ${}_\sigma\mathcal{L}_0(F, G)$*, die eindeutige Lösung von* $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, 0, 0, F, G, 0, 0)$.

Bemerkung 4.6

(i) *Satz 4.5 ist für alle* $q \neq 0$ *richtig.*

(ii) *Das in Satz 4.5 gefundene* $\hat{\omega}$ *wollen wir festhalten. Im Folgenden werden wir nur noch Frequenzen* $\omega \in \mathbb{C}_{-,\hat{\omega}}$ *betrachten. Für diese ist* ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega$ *auf ganz* $\mathrm{L}^{2,q}_{>\frac{1}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>\frac{1}{2}}$ *wohldefiniert.*

Beweis:
Zu (i): Nehmen wir an, 0 wäre ein Häufungspunkt von ${}_\sigma\mathbb{P}$, oder die Abschätzung wäre falsch. In diesem Falle gäbe es eine Nullfolge von Frequenzen $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_-\setminus\{0\}$, sowie eine Datenfolge

$$(F_n, G_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \left(\left\{\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_s : \Phi_A \in \mathbf{D}^q_s(\Omega_A)\right\} \times \mathbf{R}^{q+1}_s\right) \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \sigma, \Lambda, \omega_n)^\perp$$

mit $\left\|{}_\sigma\mathcal{L}_{\omega_n}(F_n, G_n)\right\|_{\mathrm{L}^2_t} = 1$ und

- $\left\|(F_n, G_n)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} \xrightarrow{n\to\infty} 0$,
- $|\omega_n|^{-1} \cdot \left(\left\|\mathrm{div} F_n\right\|_{\mathrm{L}^{2,q-1}_s(\Omega_A)} + \left\|\mathrm{rot} G_n\right\|_{\mathrm{L}^{2,q+2}_s}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$,
- $|\omega_n|^{-1} \cdot \sum_{l=1}^{d^q_A} |\langle F_n, \overset{\circ}{b}{}^q_l\rangle_{\Omega_A}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Setzen wir $(E_n, H_n) := {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega_n}(F_n, G_n)$, so liefert dies die Gleichungen

- $\mathrm{rot} E_n + \mathrm{i}\omega_n\mu H_n = G_n$,
- $\mathrm{div} H_n + \mathrm{i}\omega_n\varepsilon E_n + \sigma E_n = F_n$.

Aus den Gleichungen erkennen wir, dass $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mu^{-1}\mathbf{R}^{q+1}_t \times \mathbf{D}^{q+1}_t$ beschränkt ist. Die LMKE liefert die Existenz einer Teilfolge (o. B. d. A. sie selbst), welche in $\mathrm{L}^{2,q+1}_{\tilde{t}}$ für alle $\tilde{t} < t$ konvergiert. Den Grenzwert bezeichnen wir mit $H \in \mathrm{L}^{2,q+1}_{\tilde{t}}$.
Als Nächstes wollen wir zeigen, dass $(E_n|_{\Omega_I})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^{2,q}(\Omega_I)$ konvergiert. Seien dazu $\chi \in \mathrm{C}^\infty_0$ mit $\chi \equiv 1$ auf Ω_I und

$$E_{nm} := E_n - E_m \quad , \quad F_{nm} := F_n - F_m \quad , \quad G_{nm} := G_n - G_m \quad , \quad H_{nm} := H_n - H_m \quad .$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle\sigma E_{nm}, E_{nm}\rangle_{\Omega_I} &= \langle\sigma E_{nm}, \chi E_{nm}\rangle \\
&= \langle F_{nm}, \chi E_{nm}\rangle - \mathrm{i}\omega_n\langle\varepsilon E_n, \chi E_{nm}\rangle + \mathrm{i}\omega_m\langle\varepsilon E_m, \chi E_{nm}\rangle - \langle\mathrm{div} H_{nm}, \chi E_{nm}\rangle \\
&= \langle F_{nm}, \chi E_{nm}\rangle - \mathrm{i}\omega_n\langle\varepsilon E_n, \chi E_{nm}\rangle + \mathrm{i}\omega_m\langle\varepsilon E_m, \chi E_{nm}\rangle + \langle H_{nm}, \mathrm{rot}(\chi E_{nm})\rangle \xrightarrow{n,m\to\infty} 0 \quad .
\end{aligned}$$

Folglich ist $(E_n|_{\Omega_I})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^{2,q}(\Omega_I)$ eine Cauchyfolge, also konvergent mit Grenzwert $E_I \in \mathrm{L}^{2,q}(\Omega_I)$. Betrachten wir die Maxwell–Gleichungen genauer, so können wir folgende Konvergenzen feststellen:

$$\mathrm{rot}E_n \xrightarrow[\mathrm{L}^{2,q+1}_t]{n\to\infty} 0 \quad , \quad \mathrm{div}\varepsilon\, E_n|_{\Omega_A} \xrightarrow[\mathrm{L}^{2,q-1}_s(\Omega_A)]{n\to\infty} 0 \quad , \quad \mathrm{div}H_n \xrightarrow[\mathrm{L}^{2,q}_t]{n\to\infty} -\sigma E_I \quad , \quad \mathrm{rot}\mu H_n \xrightarrow[\mathrm{L}^{2,q+2}_s]{n\to\infty} 0 \qquad .$$

Also ist sogar $(E_n|_{\Omega_I})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{R}^q(\Omega_I)$ konvergent mit Grenzwert $E_I \in {}_0\mathbf{R}^q(\Omega_I)$. Da γ_t nach Satz 3.1 ein stetiger Operator ist, impliziert dies, dass $(\gamma_t\, E_n|_{\Omega_I})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}^q(\partial\Omega_I)$ und somit auch $(\Gamma_t\, E_n|_{\Omega_A})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}^q(\partial\Omega_A)$ konvergent sind. Wenden wir Lemma 4.4 auf die beschränkte Folge $(E_n|_{\Omega_A})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{R}^q_t(\Omega_A) \cap \varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q_t(\Omega_A)$ an, so erhalten wir eine Teilfolge (o. B. d. A. sie selbst), welche in $\mathrm{L}^{2,q}_{\tilde{t}}(\Omega_A)$ für alle $\tilde{t} < t$ konvergiert. Damit konvergiert $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nun gegen ein E in $\mathrm{L}^{2,q}_{\tilde{t}}$ für alle $\tilde{t} < t$.

Aus den obigen Konvergenzen erhalten wir $E \in {}_0\mathbf{R}^q_{\tilde{t}}$ und $H \in \mu^{-1}{}_0\mathbf{R}^{q+1}_{\tilde{t}} \cap \mathbf{D}^{q+1}_{\tilde{t}}$ für alle $\tilde{t} < t$ und

$$\mathrm{div}H + \sigma E = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E_I \in {}_0\mathbf{R}^q(\Omega_I) \cap \sigma^{-1}{}_0\overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^q(\Omega_I) \qquad .$$

Nach Weck und Witsch (siehe [23, The. 5]) existiert ein $\psi \in \mathrm{R}^{q-1}_{\tilde{t}-1} \cap {}_0\mathrm{D}^{q-1}_{\tilde{t}-1}$ mit $E = \mathrm{rot}\psi$, und somit

$$E_I \in \mathrm{rot}\mathbf{R}^{q-1}(\Omega_I) \cap \sigma^{-1}{}_0\overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^q(\Omega_I) = \{0\} \qquad \Longrightarrow \qquad H \in \mu^{-1}{}_0\mathbf{R}^{q+1}_{\tilde{t}} \cap {}_0\mathbf{D}^{q+1}_{\tilde{t}} = \{0\} \qquad .$$

Wir erhalten schließlich $E_A \in {}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_{\tilde{t}}(\Omega_A) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathbf{D}^q_{\tilde{t}}(\Omega_A) \cap \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega_A)^{\perp_\varepsilon} = \{0\}$, da

- $\Gamma_t E_A = \gamma_t E_I = 0$,
- $\mathrm{div}\varepsilon E_A = 0$ (folgt aus den Konvergenzen) ,
- $\langle \varepsilon E_A, \overset{\circ}{b}{}^q_l\rangle_{\Omega_A} = \lim\limits_{n\to\infty} \langle \varepsilon E_n, \overset{\circ}{b}{}^q_l\rangle_{\Omega_A} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega_n} \cdot \langle F_n - \mathrm{div}H_n, \overset{\circ}{b}{}^q_l\rangle_{\Omega_A} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega_n} \cdot \langle F_n, \overset{\circ}{b}{}^q_l\rangle_{\Omega_A} = 0$.

Also ergibt sich $(E_n, H_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$ in $\mathrm{L}^{2,q}_{\tilde{t}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\tilde{t}}$ für alle $\tilde{t} < t$. Dies ergibt einem Widerspruch zur Abschätzung aus Lemma 4.2, denn mit geeigneten Konstanten $c, \varrho > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} 1 \quad &= \quad \left\|(E_n, H_n)\right\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad \leq \quad \left\|(E_n, H_n)\right\|_{\mathbf{R}^q_t \times \mathbf{D}^{q+1}_t} \\ &\leq \quad c \cdot \Big(\left\|(F_n, G_n)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} + \left\|(E_n, H_n)\right\|_{\mathrm{L}^2(U(\varrho))} + |\omega_n|^{-1} \cdot \left\|(\mathrm{div}F_n, \mathrm{rot}G_n)\right\|_{\mathrm{L}^2_s(A(r_0))}\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad . \end{aligned}$$

□

Zu (ii): Die in (i) bewiesene Abschätzung liefert, dass $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mu^{-1}\mathbf{R}^{q+1}_t \times \mathbf{D}^{q+1}_t$ beschränkt ist. Die LMKE liefert somit wieder die Existenz einer Teilfolge (o. B. d. A. sie selbst), welche in $\mathrm{L}^{2,q+1}_{\tilde{t}}$ für alle $\tilde{t} < t$ konvergiert.

Ganz analog mit Hilfe von $\chi \in \mathrm{C}^\infty_0$ mit $\chi \equiv 1$ auf Ω_I und

$$E_{nm} := E_n - E_m \quad , \quad F_{nm} := F_n - F_m \quad , \quad G_{nm} := G_n - G_m \quad , \quad H_{nm} := H_n - H_m$$

erhalten wir erneut

$$\langle \sigma E_{nm}, E_{nm}\rangle_{\Omega_I} \quad = \quad \langle F_{nm}, \chi E_{nm}\rangle - \mathrm{i}\omega_n\langle \varepsilon E_n, \chi E_{nm}\rangle + \mathrm{i}\omega_m\langle \varepsilon E_m, \chi E_{nm}\rangle + \langle H_{nm}, \mathrm{rot}(\chi E_{nm})\rangle \xrightarrow{n,m\to\infty} 0 \quad ,$$

sowie aus den Maxwell–Gleichungen die Konvergenzen

$$\mathrm{rot}E_n \xrightarrow[\mathrm{L}^{2,q+1}_t]{n\to\infty} G \quad , \quad \mathrm{div}\varepsilon\, E_n|_{\Omega_A} \xrightarrow[\mathrm{L}^{2,q-1}_s(\Omega_A)]{n\to\infty} f \quad , \quad \mathrm{div}H_n + \sigma E_n \xrightarrow[\mathrm{L}^{2,q}_t]{n\to\infty} F \quad , \quad \mathrm{rot}\mu H_n \xrightarrow[\mathrm{L}^{2,q+2}_s]{n\to\infty} g \qquad .$$

Dies lässt uns wieder auf die Konvergenz von $(E_n|_{\Omega_I})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{R}^q(\Omega_I)$ und über die Konvergenz der Tangentialspur innen wie außen auf die Existenz einer konvergenten Teilfolge von $(E_n|_{\Omega_A})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^{2,q}_{\tilde{t}}(\Omega_A)$ für alle $\tilde{t} < t$ schließen, indem wir Lemma 4.4 benutzen. Erneut erhalten wir also eine konvergente Teilfolge von $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^{2,q}_{\tilde{t}}$ für alle $\tilde{t} < t$ (o. B. d. A. sie selbst).

Die Grenzwerte $(E, H) \in \mathrm{L}^{2,q}_{\tilde{t}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\tilde{t}}$ für alle $\tilde{t} < t$ lösen aufgrund der oben genannten Konvergenzen offensichtlich die Gleichungen

- $\mathrm{rot}E = G \quad , \quad \mathrm{div}\varepsilon E_A = f \quad , \quad \langle \varepsilon E_A, \overset{\circ}{b}{}^q_l \rangle_{\Omega_A} = \alpha_l$ für $l = 1, \ldots, d^q_A \quad ,$
- $\mathrm{rot}\mu H = g \quad , \quad \mathrm{div}H + \sigma E = F \quad .$

Aufgrund der Voraussetzungen und dieser Gleichungen sind die Daten

$$(f, F, G, g, \alpha) \in \Big(\mathrm{L}^{2,q-1}_{>1-\frac{N}{2}}(\Omega_A) \cap \mathcal{F}^{q-1}(\Omega_A)\Big) \times \Big(\mathrm{L}^{2,q}_{>1-\frac{N}{2}} \cap \tilde{\mathcal{F}}^q\Big) \times {}_0\mathrm{R}^{q+1}_{>1-\frac{N}{2}} \times {}_0\mathrm{R}^{q+2}_{>1-\frac{N}{2}} \times \mathbb{C}^{d^q_A} \quad .$$

Die Abklingrate ist $\tau > (N+1)/2$, und wegen $t > -N/2$ und $\tilde{t} < t$ beliebig, sind $(E, H) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{N}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{N}{2}}$. Folglich muss es sich bei (E, H) um die nach Satz 3.32 eindeutige Lösung des statischen dissipativen Maxwell–Problems $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, 0, f, F, G, g, \alpha)$ handeln.

Da jede konvergente Teilfolge von $(E_n, H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aufgrund obiger Schlussfolgerung gegen dasselbe (E, H) konvergieren muss, konvergiert schon die ursprüngliche Folge gegen (E, H). ∎

4.2 Die iterierten Räume der regulären Konvergenz

In Satz 4.5 haben wir schon den Raum der regulären Konvergenz durch

$$\mathrm{Reg}^{q,0}_s \quad := \quad \Big(\mathrm{L}^{2,q}_s \cap \tilde{\mathcal{F}}^q\Big) \times {}_0\mathrm{R}^{q+1}_s$$

definiert und für Daten aus diesem Raum die Konvergenz der Lösungen für $\omega \to 0$ gegen die Lösung des entsprechenden statischen dissipativen Maxwell–Problems festgestellt. Nun wollen wir noch einen Schritt weitergehen. Wir werden zeigen, dass es uns, wenn die Daten aus dem richtigen Teilraum stammen, möglich ist, eine Potenzreihenentwicklung mit Hilfe der verallgemeinerten Neumannschen Reihe bis zu einer bestimmten Ordnung durchzuführen. Die dafür benötigten Teilräume erfassen wir mit der folgenden

Definition 4.7
Für $\mathbf{J} \in \mathbb{N}$, $s \in (\mathbf{J} - N/2, \infty)\backslash\mathbb{I}$, $\tau > s - N/2$ und $\tau \geq \mathbf{J} - s - 1$, sowie $j = 1, \ldots, \mathbf{J}$ definieren wir rekursiv den „Raum der regulären Konvergenz j–ter Stufe“ durch

$$\mathrm{Reg}^{q,j}_s \quad := \quad \big\{(F, G) \in \mathrm{Reg}^{q,j-1}_s : {}_\sigma\mathcal{L}^j(F, G) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_{s-j}\big\} \quad .$$

Bemerkung 4.8
Eine äquivalente rekursive Definition der Räume der regulären Konvergenz j–ter Stufe wird durch

$$\mathrm{Reg}^{q,j}_s \quad := \quad \big\{(F, G) \in \mathrm{Reg}^{q,j-1}_s : {}_\sigma\mathcal{L}^j(F, G) \in \mathrm{L}^{2,q}_{s-j} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{s-j}\big\}$$

gegeben. Hieran erkennt man, dass der Raum der regulären Konvergenz $\mathbf{J}$–ter Stufe gerade aus den Elementen $(F, G) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_s$ besteht, für die bei keiner Iterierten ${}_\sigma\mathcal{L}^j(F, G)$ für $j = 1, \ldots, \mathbf{J}$ Turmformenanteile $\eta^- D^{q,k}_{\beta,m}$ oder ${}^-R^{q+1,l}_{\gamma,n}$ auftreten.

Satz 4.9
Seien $\mathbf{J} \in \mathbb{N}_0$, $s \in (\mathbf{J} + 1/2, \infty)\backslash\mathbb{I}$ und $\tau > s - N/2$. Dann ist für alle $\omega \in \mathbb{C}_{-,\hat{\omega}}\backslash\{0\}$ und alle $(F, G) \in \mathrm{Reg}^{q,\mathbf{J}}_s$ die Lösung des zeitharmonischen dissipativen Maxwell–Problems zu den Daten (F, G) gegeben durch die Gleichung

$$\begin{aligned} {}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F, G) \quad &= \quad \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1} (-\mathrm{i}\omega)^j {}_\sigma\mathcal{L}_0 {}_\sigma\mathcal{L}^j(F, G) + (-\mathrm{i}\omega)^{\mathbf{J}} {}_\sigma\mathcal{L}_\omega {}_\sigma\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F, G) \\ &= \quad \sum_{j=0}^{\mathbf{J}} (-\mathrm{i}\omega)^j {}_\sigma\mathcal{L}_0 {}_\sigma\mathcal{L}^j(F, G) + (-\mathrm{i}\omega)^{\mathbf{J}} ({}_\sigma\mathcal{L}_\omega - {}_\sigma\mathcal{L}_0) {}_\sigma\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F, G) \quad . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $s \in (\mathbf{J} + 1/2, \mathbf{J} + N/2)\backslash\mathbb{I}$ und $t := s - \mathbf{J} - (N+1)/2$ die bzgl. $(F, G) \in \mathrm{Reg}^{g,\mathbf{J}}_s$ gleichmäßge Abschätzung

$$\Big\| {}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F, G) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1} (-\mathrm{i}\omega)^j {}_\sigma\mathcal{L}_0 {}_\sigma\mathcal{L}^j(F, G) \Big\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad = \quad \mathcal{O}(|\omega|^{\mathbf{J}}) \cdot \big\|(F, G)\big\|_{\mathrm{L}^2_s} \quad .$$

Beweis:
Seien $\omega \in \mathbb{C}_{-,\hat{\omega}} \setminus \{0\}$ und $(F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}$. Dann ist

$$ {}_\sigma\mathcal{L}^j(F,G) \in \mathrm{Reg}_{s-j}^{q,0} \subset \mathrm{L}^{2,q}_{>\frac{1}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>\frac{1}{2}} \qquad \text{für} \qquad j = 0,\dots,\mathbf{J} \qquad . $$

Nach Satz 2.28 dürfen wir den Operator ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega$ auf das Element ${}_\sigma\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G)$ anwenden, und wegen $s - \mathbf{J} > 1/2 > 1 - N/2$ dürfen wir nach Satz 3.32 ebenfalls den Operator ${}_\sigma\mathcal{L}_0$ auf das Element ${}_\sigma\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G)$ anwenden. Damit ist

$$ \begin{aligned} (E,H) \quad &:= \quad \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1} (-\mathrm{i}\omega)^j {}_\sigma\mathcal{L}_0 {}_\sigma\mathcal{L}^j(F,G) + (-\mathrm{i}\omega)^{\mathbf{J}} {}_\sigma\mathcal{L}_\omega {}_\sigma\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G) \\ &= \quad \sum_{j=0}^{\mathbf{J}} (-\mathrm{i}\omega)^j {}_\sigma\mathcal{L}_0 {}_\sigma\mathcal{L}^j(F,G) + (-\mathrm{i}\omega)^{\mathbf{J}} ({}_\sigma\mathcal{L}_\omega - {}_\sigma\mathcal{L}_0) {}_\sigma\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G) \end{aligned} $$

ein wohldefiniertes Element von $\mathbf{R}^q_{<-\frac{1}{2}} \times \mathbf{D}^{q+1}_{<-\frac{1}{2}}$, welches die Einstrahlungsbedingung

$$ (r^{-1}S - \mathrm{Id})(E,H) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}} $$

erfüllt. Unter Zuhilfenahme der Identitäten

$$ (M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma}) {}_\sigma\mathcal{L}_\omega = \mathrm{Id} \qquad \text{und} \qquad (M + \hat{\sigma}) {}_\sigma\mathcal{L}_0 = \mathrm{Id} $$

lässt sich sehr leicht $(M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})(E,H) = (F,G)$ überprüfen, woraus schließlich $(E,H) = {}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ folgt.

Ist $s \in (\mathbf{J} + 1/2, \mathbf{J} + N/2) \setminus \mathbb{I}$, so können wir den Term $(-\mathrm{i}\omega)^{\mathbf{J}} {}_\sigma\mathcal{L}_\omega {}_\sigma\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G)$ mit Hilfe von Satz 4.5 abschätzen, denn ${}_\sigma\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G) \in \mathrm{Reg}_{s-\mathbf{J}}^{q,0}$ und $s - \mathbf{J} \in (1/2, N/2)$:

$$ \left\| (-\mathrm{i}\omega)^{\mathbf{J}} {}_\sigma\mathcal{L}_\omega {}_\sigma\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G) \right\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad \leq \quad c \cdot |\omega|^{\mathbf{J}} \cdot \left\| {}_\sigma\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G) \right\|_{\mathrm{L}^2_{s-\mathbf{J}}} \quad \leq \quad c \cdot |\omega|^{\mathbf{J}} \cdot \left\| (F,G) \right\|_{\mathrm{L}^2_s} \qquad . $$

Hierbei haben wir die in Satz 3.39 beschriebene Stetigkeit von ${}_\sigma\mathcal{L}^{\mathbf{J}}$ benutzt. Die obige Abschätzung gilt gleichmäßig für alle $\omega \in \mathbb{C}_{-,\hat{\omega}} \setminus \{0\}$ und alle $(F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}$, da die Konstante c ein Produkt der Konstante aus Satz 4.5 und der Stetigkeitskonstante aus Satz 3.39 ist, und somit unabhängig von ω und (F,G) ist. ■

Es wäre wünschenswert, die Räume $\mathrm{Reg}_s^{q,j}$ etwas greifbarer zu machen. Der Linie von Pauly in [11] folgend, wollen wir Elemente dieses Raums dadurch identifizieren, dass sie Elemente von $\mathrm{Reg}_s^{q,0}$ sind, welche bestimmte Orthogonalitätsbedingungen erfüllen. Um dies tun zu können, nutzen wir die in Lemma 3.17 beschriebene Orthogonalität der Turmformen bzgl. des Skalarprodukts mit $C := C_{\Delta,\eta}$. Allerdings müssen wir die Transformationen (ε,μ) zu diesem Zweck weiter einschränken, und zwar müssen wir Generalvoraussetzung (5) verstärken zu

(5') $\mathrm{supp}(\hat{\varepsilon}) \cup \mathrm{supp}(\hat{\mu})$ sei beschränkt. Dann wählen wir r_0 so groß, dass $\mathrm{supp}(\hat{\varepsilon}) \cup \mathrm{supp}(\hat{\mu}) \subset U(r_0)$. Dann ist $(\varepsilon,\mu) = \mathrm{Id}$ auf $\mathrm{supp}(\eta)$.

Wir konstruieren nun spezielle Felder $E_{\beta,m}$ und $H_{\gamma,n}$, welche Turmformenanteile nullter Stufe mit positiven Radiuspotenzen besitzen, mit denen wir die Orthogonalitätsbedingungen formulieren können. Dies tun wir in dem folgenden

Lemma 4.10
Für $\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0$, $m \in \{1,\dots,\mu_\beta^q\}$ und $n \in \{1,\dots,\mu_\gamma^{q+1}\}$ seien

$$ E_{\beta,m} := u + \eta^+ D^{q,0}_{\beta,m} \qquad \text{und} \qquad H_{\gamma,n} := v + \eta^+ R^{q+1,0}_{\gamma,n} \qquad , $$

wobei u die erste Komponente der Lösung des Problems $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,0,-\mathrm{div}(\varepsilon\eta^+ D^{q,0}_{\beta,m}),0,-\mathrm{rot}(\eta^+ D^{q,0}_{\beta,m}),0,0)$ *und v die zweite Komponente der Lösung des Problems* $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,0,0,-\mathrm{div}(\eta^+ R^{q+1,0}_{\gamma,n}),0,-\mathrm{rot}\mu(\eta^+ R^{q+1,0}_{\gamma,n}),0)$ *sind.*

$E_{\beta,m}$ und $H_{\gamma,n}$ sind wohldefiniert und die eindeutigen Lösungen der folgenden statischen Probleme:

- $E_{\beta,m}|_{\Omega_I} = 0 \quad , \quad E_{\beta,m}|_{\Omega_A} \in {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{<-\frac{N}{2}-\beta}(\Omega_A) \cap \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega_A)^{\perp_\varepsilon} \quad , \quad E_{\beta,m} - {}^+D^{q,0}_{\beta,m} \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{N}{2}} \quad ,$

- $H_{\gamma,n} \in \mu^{-1}{}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}_{<-\frac{N}{2}-\gamma} \quad , \quad H_{\gamma,n} - {}^{+}R^{q+1,0}_{\gamma,n} \in \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{N}{2}} \quad .$

Bemerkung 4.11

(i) *Lemma 4.10 bleibt auch richtig, wenn ε und μ mit einer Rate τ abklingen, für die gilt*

$$\tau > \max\{\beta, \gamma\} \qquad \textit{und} \qquad \tau \geq N/2 - 1 \qquad .$$

(ii) *$E_{\beta,m}|_{\Omega_A}$ bzw. $H_{\gamma,n}$ sind identisch mit den für $\Omega = \Omega_A$ bzw. $\Omega = \mathbb{R}^N$ entsprechenden Formen aus [11, Lemma 7.11].*

Beweis:
Wir beweisen Lemma 4.10 unter den allgemeineren Voraussetzungen (i) von Bemerkung 4.11. Es ist

$$(-\operatorname{div}(\varepsilon\eta^{+}D^{q,0}_{\beta,m}), 0, -\operatorname{rot}(\eta^{+}D^{q,0}_{\beta,m}), 0, 0) \quad = \quad (-C_{\operatorname{div},\eta}{}^{+}D^{q,0}_{\beta,m} - \operatorname{div}(\hat{\varepsilon}\eta^{+}D^{q,0}_{\beta,m}), 0, -C_{\operatorname{rot},\eta}{}^{+}D^{q,0}_{\beta,m}, 0, 0)$$

ein Element von

$$\left(\mathrm{L}^{2,q-1}_{<-\beta-\frac{N}{2}+\tau+1}(\Omega_A) \cap \mathcal{F}^{q-1}(\Omega_A)\right) \times \{0\} \times {}_0\mathrm{R}^{q+1}_{\mathrm{vox}} \times \{0\} \times \{0\}$$

Durch die Bedingungen $\tau > \beta$ und $\tau \geq N/2 - 1$ ist sichergestellt, dass es nach Satz 3.32 genau ein

$$(u, h) \in \left(\mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{N}{2}} \cap \mathrm{R}^{q}_{\mathrm{loc}}\right) \times \left(\mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{N}{2}} \cap \mu^{-1}\mathrm{R}^{q+1}_{\mathrm{loc}} \cap \mathrm{D}^{q+1}_{\mathrm{loc}}\right)$$

gibt, welches Lösung des statischen Maxwell–Problems $\operatorname{Max}(\sigma, \Lambda, 0, -\operatorname{div}(\varepsilon\eta^{+}D^{q,0}_{\beta,m}), 0, -\operatorname{rot}(\eta^{+}D^{q,0}_{\beta,m}), 0, 0)$ ist. Verfolgen wir den Beweis zu Satz 3.32, so bemerken wir, dass $u_I = 0$ gilt, denn die Daten des Innenraumproblems sind homogen, und die Nebenbedingungen für das Lösen des Aussenraumproblems ebenfalls, sodass auch alle Neumannkoeffizienten von u_I verschwinden. Folglich verschwindet dann h, da es eindeutige Lösung zu homogenen Daten ist.

Da u im gesamten Raum Rotation besitzt und auf Ω_I verschwindet, erfüllt es an $\partial\Omega_A$ die Randbedingung verschwindender Tangentialspur, sodass wir daran erkennen können, dass es sich bei $E_{\beta,m}|_{\Omega_A}$ in der Tat um die entsprechende Form bei Pauly aus [11, Lemma 7.11] handelt. Die Eindeutigkeit des entsprechenden statischen Problems für $E_{\beta,m}$ wird dort bewiesen. Die Integrierbarkeit von $E_{\beta,m}$ wird durch die Integrierbarkeit des Terms ${}^{+}D^{q,0}_{\beta,m}$ bestimmt, welche in Bemerkung 3.19 beschrieben wird.

Durch eine völlig analoge Argumentation finden wir nach Satz 3.32 ein eindeutiges

$$(e, v) \in \left(\mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{N}{2}} \cap \mathrm{R}^{q}_{\mathrm{loc}}\right) \times \left(\mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{N}{2}} \cap \mu^{-1}\mathrm{R}^{q+1}_{\mathrm{loc}} \cap \mathrm{D}^{q+1}_{\mathrm{loc}}\right) \qquad ,$$

welches Lösung des statischen Problems $\operatorname{Max}(\sigma, \Lambda, 0, 0, -\operatorname{div}(\eta^{+}R^{q+1,0}_{\gamma,n}), 0, -\operatorname{rot}\mu(\eta^{+}R^{q+1,0}_{\gamma,n}), 0)$ ist. Beim Verfolgen des Beweises erkennen wir $e = 0$, da die Daten für das Innen– und Aussenraumproblem von e homogen sind. Auch hier erkennen wir, dass die Integrierbarkeit von $H_{\gamma,n}$ durch die des Terms ${}^{+}R^{q+1,0}_{\gamma,n}$ bestimmt wird, und dass $H_{\gamma,n}$ das nach [11, Lemma 7.11] eindeutige statische Problem löst. ■

Lemma 4.12
Seien $\mathbf{J}, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$, $m \in \{1, \ldots, \mu^{q}_{\beta}\}$, $n \in \{1, \ldots, \mu^{q+1}_{\gamma}\}$, $s \in (\mathbf{J} + 1 - N/2, \infty)\backslash\mathbb{I}$ und $j \in \{0, \ldots, \mathbf{J}\}$. Dann sind $\mathbf{J}$ *Iterationen von ${}_{-\sigma}\mathcal{L}$ auf den Formen $\varepsilon E_{\beta,m}$ und $\mu H_{\gamma,n}$ wohldefiniert und es gelten für gerade j*

- ${}_{-\sigma}\mathcal{L}^{j}\Lambda(E_{\beta,m}, 0) - \eta({}^{+}D^{q,j}_{\beta,m}, 0) \in \tilde{\mathbf{F}}^{q}_{s-j-1}(\mathfrak{I}^{\leq j}_{s-j-1}) \times \mathbf{G}^{q+1}_{s-j-1}(\mathfrak{J}^{\leq j}_{s-j-1}) \qquad ,$
- ${}_{-\sigma}\mathcal{L}^{j}\Lambda(0, H_{\gamma,n}) - \eta(0, {}^{+}R^{q+1,j}_{\gamma,n}) \in \tilde{\mathbf{F}}^{q}_{s-j-1}(\mathfrak{I}^{\leq j}_{s-j-1}) \times \mathbf{G}^{q+1}_{s-j-1}(\mathfrak{J}^{\leq j}_{s-j-1}) \qquad ,$

und für ungerade j

- ${}_{-\sigma}\mathcal{L}^{j}\Lambda(E_{\beta,m}, 0) - \eta(0, {}^{+}R^{q+1,j}_{\beta,m}) \in \tilde{\mathbf{F}}^{q}_{s-j-1}(\mathfrak{I}^{\leq j}_{s-j-1}) \times \mathbf{G}^{q+1}_{s-j-1}(\mathfrak{J}^{\leq j}_{s-j-1}) \qquad ,$
- ${}_{-\sigma}\mathcal{L}^{j}\Lambda(0, H_{\gamma,n}) - \eta({}^{+}D^{q,j}_{\gamma,n}, 0) \in \tilde{\mathbf{F}}^{q}_{s-j-1}(\mathfrak{I}^{\leq j}_{s-j-1}) \times \mathbf{G}^{q+1}_{s-j-1}(\mathfrak{J}^{\leq j}_{s-j-1}) \qquad .$

Bezüglich der Integrierbarkeit gilt

$$ {}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\beta,m},0)\in \mathrm{L}^{2,q}_{<-\beta-j-\frac{N}{2}}\times \mathrm{L}^{2,q+1}_{<-\beta-j-\frac{N}{2}} \quad \textit{und} \quad {}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\gamma,n})\in \mathrm{L}^{2,q}_{<-\gamma-j-\frac{N}{2}}\times \mathrm{L}^{2,q+1}_{<-\gamma-j-\frac{N}{2}} $$

und folglich

$$ \begin{aligned} {}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\beta,m},0)\in \mathrm{L}^{2,q}_{-t}\times \mathrm{L}^{2,q+1}_{-t} &\iff t>\beta+j+N/2 \\ {}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\gamma,n})\in \mathrm{L}^{2,q}_{-t}\times \mathrm{L}^{2,q+1}_{-t} &\iff t>\gamma+j+N/2 \end{aligned} $$

Genauer: Es existieren eindeutige Konstanten $\mathtt{a}_{\cdot}^{j,\beta,m},\mathtt{b}_{\cdot}^{j,\beta,m},\mathtt{c}_{\cdot}^{j,\gamma,n},\mathtt{d}_{\cdot}^{j,\gamma,n}\in\mathbb{C}$ *und eindeutige Formen*

$$ e^j_{\beta,m},u^j_{\gamma,n}\in\varepsilon\mathbf{R}^q_{s-j-1}\cap\mathbf{D}^q_{s-j-1}(\Omega_A)\cap\mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega_A)^\perp \quad , \quad v^j_{\beta,m},h^j_{\gamma,n}\in\mathbf{R}^{q+1}_{s-j-1}\cap\mu\mathbf{D}^{q+1}_{s-j-1} \quad , $$

sodass für gerade j

$$ \begin{aligned} {}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\beta,m},0) &= \eta({}^+D^{q,j}_{\beta,m},0)+\sum_{I\in\mathfrak{I}^{\le j}_{s-j-1}}\mathtt{a}_I^{j,\beta,m}\cdot\eta(D^q_I,0)+\sum_{J\in\mathfrak{J}^{\le j}_{s-j-1}}\mathtt{b}_J^{j,\beta,m}\cdot\eta(0,R^{q+1}_J)+(e^j_{\beta,m},v^j_{\beta,m}) \quad , \\ {}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\gamma,n}) &= \eta(0,{}^+R^{q+1,j}_{\gamma,n})+\sum_{I\in\mathfrak{I}^{\le j}_{s-j-1}}\mathtt{c}_I^{j,\gamma,n}\cdot\eta(D^q_I,0)+\sum_{J\in\mathfrak{J}^{\le j}_{s-j-1}}\mathtt{d}_J^{j,\gamma,n}\cdot\eta(0,R^{q+1}_J)+(u^j_{\gamma,n},h^j_{\gamma,n}) \quad , \end{aligned} $$

und für ungerade j

$$ \begin{aligned} {}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\beta,m},0) &= \eta(0,{}^+R^{q+1,j}_{\beta,m})+\sum_{I\in\mathfrak{I}^{\le j}_{s-j-1}}\mathtt{a}_I^{j,\beta,m}\cdot\eta(D^q_I,0)+\sum_{J\in\mathfrak{J}^{\le j}_{s-j-1}}\mathtt{b}_J^{j,\beta,m}\cdot\eta(0,R^{q+1}_J)+(e^j_{\beta,m},v^j_{\beta,m}) \quad , \\ {}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\gamma,n}) &= \eta({}^+D^{q,j}_{\gamma,n},0)+\sum_{I\in\mathfrak{I}^{\le j}_{s-j-1}}\mathtt{c}_I^{j,\gamma,n}\cdot\eta(D^q_I,0)+\sum_{J\in\mathfrak{J}^{\le j}_{s-j-1}}\mathtt{d}_J^{j,\gamma,n}\cdot\eta(0,R^{q+1}_J)+(u^j_{\gamma,n},h^j_{\gamma,n}) \end{aligned} $$

gelten.

Bemerkung 4.13

(i) *Lemma 4.12 bleibt auch richtig, wenn* ε *und* μ *mit einer Rate* τ *abklingen, für die gilt*

$$ \tau>\max\{\beta,\gamma\}+s+N/2-1 \qquad \textit{und} \qquad \tau\ge\mathbf{J}-s \quad . $$

(ii) *Die Koeffizienten genügen den folgenden Rekursionen*

- $\mathtt{a}_I^{j,\beta,m}=\mathtt{b}_{I_+}^{j+1,\beta,m}$, $\mathtt{c}_I^{j,\gamma,n}=\mathtt{d}_{I_+}^{j+1,\gamma,n}$ *für* $I\in\mathfrak{I}^{\le j}_{s-j-1}$,
- $\mathtt{b}_J^{j,\beta,m}=\mathtt{a}_{J_+}^{j+1,\beta,m}$, $\mathtt{d}_J^{j,\gamma,n}=\mathtt{c}_{J_+}^{j+1,\gamma,n}$ *für* $J\in\mathfrak{J}^{\le j}_{s-j-1}$.

Beweis:
Wir beweisen Lemma 4.12 unter den allgemeineren Voraussetzungen (i) von Bemerkung 4.13. Nach Pauly [11, Lemma 7.13] enthalten weder $\varepsilon E_{\beta,m}$ noch $\mu H_{\gamma,n}$ Anteile der Form $\eta\mathcal{A}^q_{s-1}$ bzw. $\eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1}$, sodass wir nach Satz 3.39 unter Berücksichtigung von Bemerkung 3.41 bis zu $\mathbf{J}$ Iterationen von ${}_{-\sigma}\mathcal{L}$ auf $\varepsilon E_{\beta,m}$ und $\mu H_{\gamma,n}$ ausführen können.

Die Integrierbarkeit von ${}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\beta,m},0)$ und ${}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\gamma,n})$ hängt von der Integrierbarkeit der Terme ${}^+D^{q,j}_{\beta,m}$, ${}^+D^{q,j}_{\gamma,n}$, ${}^+R^{q+1,j}_{\beta,m}$ und ${}^+R^{q+1,j}_{\gamma,n}$ ab, welche in Bemerkung 3.19 beschrieben wird. Die in Bemerkung 4.13 (ii) erläuterte Rekursion ist direkt aus Bemerkung 3.40 abzulesen. ■

Wir werden nun zeigen, dass auf dem Träger der Funktion η die Formen ${}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\beta,m},0)$ und ${}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\gamma,n})$ Reihen über Turmformen sind. Dies wird uns dabei helfen, die Orthogonalitätsbedingungen an die Elemente aus $\mathrm{Reg}^{q,j}_s$ zu formulieren.

Korollar 4.14
Seien $\mathbf{J},\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0$, $m\in\{1,\dots,\mu^q_\beta\}$, $n\in\{1,\dots,\mu^{q+1}_\gamma\}$ *und* $j\in\{0,\dots,\mathbf{J}\}$. *Dann existieren eindeutige Konstanten* $\mathtt{a}_{\cdot}^{j,\beta,m},\mathtt{b}_{\cdot}^{j,\beta,m},\mathtt{c}_{\cdot}^{j,\gamma,n},\mathtt{d}_{\cdot}^{j,\gamma,n}\in\mathbb{C}$, *sodass auf* $\operatorname{supp}(\eta)$ *für gerade j*

$$ \begin{aligned} {}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\beta,m},0) &= ({}^+D^{q,j}_{\beta,m},0)+\sum_{I\in\mathfrak{I}^{\le j}_\infty}\mathtt{a}_I^{j,\beta,m}\cdot(D^q_I,0)+\sum_{J\in\mathfrak{J}^{\le j}_\infty}\mathtt{b}_J^{j,\beta,m}\cdot(0,R^{q+1}_J) \quad , \\ {}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\gamma,n}) &= (0,{}^+R^{q+1,j}_{\gamma,n})+\sum_{I\in\mathfrak{I}^{\le j}_\infty}\mathtt{c}_I^{j,\gamma,n}\cdot(D^q_I,0)+\sum_{J\in\mathfrak{J}^{\le j}_\infty}\mathtt{d}_J^{j,\gamma,n}\cdot(0,R^{q+1}_J) \quad , \end{aligned} $$

und für ungerade j

$$\begin{aligned}
{}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\beta,m},0) &= (0,{}^+R^{q+1,j}_{\beta,m}) + \sum_{I\in\mathfrak{I}^{\leq j}_{\infty}} \mathtt{a}_I^{j,\beta,m}\cdot(D^q_I,0) + \sum_{J\in\mathfrak{J}^{\leq j}_{\infty}} \mathtt{b}_J^{j,\beta,m}\cdot(0,R^{q+1}_J) \quad ,\\
{}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\gamma,n}) &= ({}^+D^{q,j}_{\gamma,n},0) + \sum_{I\in\mathfrak{I}^{\leq j}_{\infty}} \mathtt{c}_I^{j,\gamma,n}\cdot(D^q_I,0) + \sum_{J\in\mathfrak{J}^{\leq j}_{\infty}} \mathtt{d}_J^{j,\gamma,n}\cdot(0,R^{q+1}_J) \quad .
\end{aligned}$$

Diese Reihen konvergieren gleichmäßig auf $\mathrm{supp}(\eta)$*, auch nach Multiplikation mit beliebigen r–Potenzen. Gleiches gilt für ihre Ableitungen. Die Konstanten* $\mathtt{a}_{\cdot}^{j,\beta,m},\mathtt{b}_{\cdot}^{j,\beta,m},\mathtt{c}_{\cdot}^{j,\gamma,n},\mathtt{d}_{\cdot}^{j,\gamma,n}\in\mathbb{C}$ *stimmen mit denen aus Lemma 4.12 überein, sofern sie gemeinsam auftreten.*

Beweis:
Sei j gerade und $(E,H) := {}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\beta,m},0)$. Dann gelten

$$((M-\hat{\sigma})\Lambda^{-1})^{j+1}(E,H) = (0,0) \qquad , \qquad \mathrm{rot}\mu H = 0 \qquad , \qquad \mathrm{div}\varepsilon E_A = 0 \qquad .$$

Auf $\mathrm{supp}(\eta)$ erhalten wir wegen $\Lambda|_{\mathrm{supp}(\eta)} = \mathrm{Id}$ und $\hat{\sigma}|_{\mathrm{supp}(\eta)} = 0$

$$M^{j+1}(E,0) = (0,0) \qquad , \qquad \mathrm{div}E = 0 \qquad , \qquad M^{j+1}(0,H) = (0,0) \qquad , \qquad \mathrm{rot}H = 0 \qquad .$$

Ist $s > j + N/2$ und $s \notin \mathbb{I}$, so sind nach Lemma 4.12

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &:= E - {}^+D^{q,j}_{\beta,m} - \sum_{I\in\mathfrak{I}^{\leq j}_{s-j-1}} \mathtt{a}_I^{j,\beta,m}\cdot D^q_I \quad \in \quad \mathrm{L}^{2,q}_{s-j-1}(\mathrm{supp}(\eta)) \qquad ,\\
\tilde{H} &:= H - \sum_{J\in\mathfrak{J}^{\leq j}_{s-j-1}} \mathtt{b}_J^{j,\beta,m}\cdot R^{q+1}_J \quad \in \quad \mathrm{L}^{2,q+1}_{s-j-1}(\mathrm{supp}(\eta))
\end{aligned}$$

und $(\tilde{E},\tilde{H})$ erfüllt auf $\mathrm{supp}(\eta)$ die Gleichungen

$$M^{j+1}(\tilde{E},0) = (0,0) \qquad , \qquad \mathrm{div}\tilde{E} = 0 \qquad , \qquad M^{j+1}(0,\tilde{H}) = (0,0) \qquad , \qquad \mathrm{rot}\tilde{H} = 0 \qquad .$$

Folglich gibt es laut Pauly [11, Satz 5.22] eindeutige Konstanten $\mathtt{a}_{\cdot}^{j,\beta,m},\mathtt{b}_{\cdot}^{j,\beta,m}\in\mathbb{C}$ mit

$$\tilde{E}\Big|_{\mathrm{supp}(\eta)} = \sum_{I\in\mathfrak{I}^{\leq j}_{\infty}\setminus\mathfrak{I}^{\leq j}_{s-j-1}} \mathtt{a}_I^{j,\beta,m}\cdot D^q_I \qquad , \qquad \tilde{H}\Big|_{\mathrm{supp}(\eta)} = \sum_{J\in\mathfrak{J}^{\leq j}_{\infty}\setminus\mathfrak{J}^{\leq j}_{s-j-1}} \mathtt{b}_J^{j,\beta,m}\cdot R^{q+1}_J \qquad .$$

Eine analoge Argumentation für ${}_{-\sigma}\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\gamma,n})$ sowie für ungerades j liefert die Behauptung. Das Konvergenzverhalten dieser Reihen wird von Pauly in [11, Satz 5.22] bewiesen. ∎

Lemma 4.15
Sei $s\in(2-N/2,\infty)\setminus\mathbb{I}$ und für $(F,G)\in\mathrm{Reg}^{q,0}_s$ gelte die Darstellung

$${}_{\sigma}\mathcal{L}_0(F,G) = (E,H) + \sum_{I\in\mathfrak{I}^0_{s-1}} \mathtt{e}_I\cdot\eta(D^q_I,0) + \sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}} \mathtt{h}_J\cdot\eta(0,R^{q+1}_J)$$

mit $(E,H)\in\big(\mathrm{R}^q_{s-1}\cap\varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega_A)\big)\times\big(\mu^{-1}\mathrm{R}^{q+1}_{s-1}\cap\mathrm{D}^{q+1}_{s-1}\big)$ *und* $\mathtt{e}_I,\mathtt{h}_J\in\mathbb{C}$.
Dann gelten für alle $I=(0,\beta,m,-)\in\mathfrak{I}^0_{s-1}$ *und* $J=(0,\gamma,n,-)\in\mathfrak{J}^0_{s-1}$

(i) $\langle(F,G),(E_{\beta,m},0)\rangle = 0$,

(ii) $\langle(F,G),(0,H_{\gamma,n})\rangle = 0$,

(iii) $\langle(F,G),{}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle = \mathtt{e}_I$,

(iv) $\langle(F,G),{}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle = \mathtt{h}_J$.

Bemerkung 4.16
Es genügt hierbei, $\hat{j}\geq 2s+2$ *in (1.18) zu wählen.*

Beweis:
Wegen

$$(0,\beta,m,-)\in\mathfrak{I}^0_{s-1}\ \wedge\ s\notin\mathbb{I}\ \Leftrightarrow\ s>\beta+1+N/2\quad\text{und}\quad(0,\gamma,n,-)\in\mathfrak{J}^0_{s-1}\ \wedge\ s\notin\mathbb{I}\ \Leftrightarrow\ s>\gamma+1+N/2$$

folgen nach Lemmata 4.10 und 4.12

$$E_{\beta,m}|_{\Omega_A}\in{}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{-s+1}(\Omega_A)\quad,\quad H_{\gamma,n}\in\mu^{-1}{}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}_{-s+1}\quad,\quad{}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\beta,m},0),{}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(0,H_{\gamma,n})\in\mathrm{L}^{2,q}_{-s}\times\mathrm{L}^{2,q+1}_{-s}\quad.$$

Die in (i) – (iv) auftretenden Skalarprodukte sind also wohldefiniert. Bemerkung 2.24 erlaubt es uns, in den folgenden Fällen partiell zu integrieren

$$\langle(M+\hat{\sigma})(E,H),(E_{\beta,m},0)\rangle\quad=\quad0\quad=\quad\langle(M+\hat{\sigma})(E,H),(0,H_{\gamma,n})\rangle\qquad.$$

Wir errechnen weiter mit Hilfe der Darstellung von ${}_\sigma\mathcal{L}_0(F,G)$

$$\begin{aligned}\langle(F,G),(E_{\beta,m},0)\rangle&=\langle(M+\hat{\sigma}){}_\sigma\mathcal{L}_0(F,G),(E_{\beta,m},0)\rangle\\&=\sum_{I\in\mathfrak{I}^0_{s-1}}\mathtt{e}_I\cdot\underbrace{\langle(M+\hat{\sigma})\eta(D^q_I,0),(E_{\beta,m},0)\rangle}_{=0}+\sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}}\mathtt{h}_J\cdot\langle(M+\hat{\sigma})\eta(0,R^{q+1}_J),(E_{\beta,m},0)\rangle\\&=\sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}}\mathtt{h}_J\cdot\big(\langle M^2\eta(D^q_{J_+},0),(E_{\beta,m},0)\rangle-\underbrace{\langle MC_{M,\eta}(D^q_{J_+},0),(E_{\beta,m},0)\rangle}_{=0\text{ nach partieller Integration}}\big)\\&=\sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}}\mathtt{h}_J\cdot\langle C_{\Delta,\eta}(D^q_{J_+},0),(E_{\beta,m},0)\rangle\qquad,\end{aligned}$$

denn nach Bemerkung 3.16 ist $\mathrm{div}\eta D^q_{J_+}=0$ und somit $M^2\eta(D^q_{J_+},0)=\Delta\eta(D^q_{J_+},0)=C_{\Delta,\eta}(D^q_{J_+},0)$ für $J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}$. Ganz analog errechnen wir

$$\begin{aligned}\langle(F,G),(0,H_{\gamma,n})\rangle&=\langle(M+\hat{\sigma}){}_\sigma\mathcal{L}_0(F,G),(0,H_{\gamma,n})\rangle\\&=\sum_{I\in\mathfrak{I}^0_{s-1}}\mathtt{e}_I\cdot\langle(M+\hat{\sigma})\eta(D^q_I,0),(0,H_{\gamma,n})\rangle+\sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}}\mathtt{h}_J\cdot\underbrace{\langle(M+\hat{\sigma})\eta(0,R^{q+1}_J),(0,H_{\gamma,n})\rangle}_{=0}\\&=\sum_{I\in\mathfrak{I}^0_{s-1}}\mathtt{e}_I\cdot\big(\langle M^2\eta(0,R^{q+1}_{I_+}),(0,H_{\gamma,n})\rangle-\underbrace{\langle MC_{M,\eta}(0,R^{q+1}_{I_+}),(0,H_{\gamma,n})\rangle}_{=0\text{ nach partieller Integration}}\big)\\&=\sum_{I\in\mathfrak{I}^0_{s-1}}\mathtt{e}_I\cdot\langle C_{\Delta,\eta}(0,R^{q+1}_{I_+}),(0,H_{\gamma,n})\rangle\qquad,\end{aligned}$$

denn nach Bemerkung 3.16 ist $\mathrm{rot}\eta R^{q+1}_{I_+}=0$ und somit $M^2\eta(0,R^{q+1}_{I_+})=\Delta\eta(0,R^{q+1}_{I_+})=C_{\Delta,\eta}(0,R^{q+1}_{I_+})$ für $I\in\mathfrak{I}^0_{s-1}$.

Nach Satz 3.39 ist ${}_\sigma\mathcal{L}_{0\sigma}\mathcal{L}(F,G)$ wohldefiniert und hat die Gestalt

$${}_\sigma\mathcal{L}_{0\sigma}\mathcal{L}(F,G)=(E^2,H^2)+\sum_{I\in\mathfrak{I}^{\le1}_{s-2}}\mathtt{e}^2_I\cdot\eta(D^q_I,0)+\sum_{J\in\mathfrak{J}^{\le1}_{s-2}}\mathtt{h}^2_J\cdot\eta(0,R^{q+1}_J)$$

mit $(E,H)\in\big(\mathrm{R}^q_{s-2}\cap\varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{s-2}(\Omega_A)\big)\times\big(\mu^{-1}\mathrm{R}^{q+1}_{s-2}\cap\mathrm{D}^{q+1}_{s-2}\big)$ und $\mathtt{e}^2_I,\mathtt{h}^2_J\in\mathbb{C}$. Bemerkung 3.40 liefert die Gleichungen

$$\mathtt{e}^2_{J_+}=\mathtt{h}_J\quad\text{für}\quad J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}\qquad\text{und}\qquad\mathtt{h}^2_{I_+}=\mathtt{e}_I\quad\text{für}\quad I\in\mathfrak{I}^0_{s-1}\qquad.$$

Durch zweifache partielle Integration, welche nach Bemerkung 2.24 erlaubt ist, ergeben sich

$$\langle(M+\hat{\sigma})\Lambda^{-1}(M+\hat{\sigma})(E^2,H^2),{}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle\quad=\quad0\quad=\quad\langle(M+\hat{\sigma})\Lambda^{-1}(M+\hat{\sigma})(E^2,H^2),{}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle\quad.$$

und dadurch für $(\Phi,\Psi)\in\{{}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\beta,m},0),{}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(0,H_{\gamma,n})\}$ mit Hilfe der Darstellung von ${}_\sigma\mathcal{L}_{0\sigma}\mathcal{L}(F,G)$

$$\begin{aligned}\langle(F,G),(\Phi,\Psi)\rangle&=\langle(M+\hat{\sigma})\Lambda^{-1}(M+\hat{\sigma}){}_\sigma\mathcal{L}_{0\sigma}\mathcal{L}(F,G),(\Phi,\Psi)\rangle\\&=\sum_{I\in\mathfrak{I}^{\le1}_{s-2}}\mathtt{e}^2_I\cdot\langle(M^2\eta(D^q_I,0),(\Phi,\Psi)\rangle+\sum_{J\in\mathfrak{J}^{\le1}_{s-2}}\mathtt{h}^2_J\cdot\langle M^2\eta(0,R^{q+1}_J),(\Phi,\Psi)\rangle\\&=\sum_{I\in\mathfrak{I}^0_{s-2}}\mathtt{e}^2_I\cdot\langle(M^2\eta(D^q_I,0),(\Phi,\Psi)\rangle+\sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}}\mathtt{e}^2_{J_+}\cdot\langle(M^2\eta(D^q_{J_+},0),(\Phi,\Psi)\rangle\\&\quad+\sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-2}}\mathtt{h}^2_J\cdot\langle M^2\eta(0,R^{q+1}_J),(\Phi,\Psi)\rangle+\sum_{I\in\mathfrak{I}^0_{s-1}}\mathtt{h}^2_{I_+}\cdot\langle M^2\eta(0,R^{q+1}_{I_+}),(\Phi,\Psi)\rangle\qquad.\end{aligned}$$

Wie oben bereits erwähnt, sind für $I \in \mathfrak{I}^0_{s-1}$ und $J \in \mathfrak{J}^0_{s-1}$

$$M^2\eta(D^q_{J_+},0) = \Delta\eta(D^q_{J_+},0) = C_{\Delta,\eta}(D^q_{J_+},0) \qquad \text{und} \qquad M^2\eta(0,R^{q+1}_{I_+}) = \Delta\eta(0,R^{q+1}_{I_+}) = C_{\Delta,\eta}(0,R^{q+1}_{I_+}) \qquad .$$

Mit denselben Argumenten gilt für $I \in \mathfrak{I}^0_{s-2}$ und $J \in \mathfrak{J}^0_{s-2}$

$$\begin{aligned}
M^2\eta(D^q_I,0) &= M^2\eta M(0,R^{q+1}_{I_+}) \quad = \quad MM^2\eta(0,R^{q+1}_{I_+}) - M^2C_{M,\eta}(0,R^{q+1}_{I_+}) \\
&= MC_{\Delta,\eta}(0,R^{q+1}_{I_+}) - M^2C_{M,\eta}(0,R^{q+1}_{I_+}) \qquad , \\
M^2\eta(0,R^{q+1}_J) &= M^2\eta M(D^q_{J_+},0) \quad = \quad MM^2\eta(D^q_{J_+},0) - M^2C_{M,\eta}(D^q_{J_+},0) \\
&= MC_{\Delta,\eta}(D^q_{J_+},0) - M^2C_{M,\eta}(D^q_{J_+},0) \qquad ,
\end{aligned}$$

wodurch wir schließlich

$$\begin{aligned}
\langle M^2\eta(D^q_I,0),(\Phi,\Psi)\rangle &= \langle MC_{\Delta,\eta}(0,R^{q+1}_{I_+}),(\Phi,\Psi)\rangle - \underbrace{\langle M^2C_{M,\eta}(0,R^{q+1}_{I_+}),(\Phi,\Psi)\rangle}_{=0 \text{ nach zweifacher partieller Integration}} \\
&= -\langle C_{\Delta,\eta}(0,R^{q+1}_{I_+}),\Lambda^{-1}(M-\hat\sigma)(\Phi,\Psi)\rangle \qquad , \\
\langle M^2\eta(0,R^{q+1}_J),(\Phi,\Psi)\rangle &= \langle MC_{\Delta,\eta}(D^q_{J_+},0),(\Phi,\Psi)\rangle - \underbrace{\langle M^2C_{M,\eta}(D^q_{J_+},0),(\Phi,\Psi)\rangle}_{=0 \text{ nach zweifacher partieller Integration}} \\
&= -\langle C_{\Delta,\eta}(D^q_{J_+},0),\Lambda^{-1}(M-\hat\sigma)(\Phi,\Psi)\rangle
\end{aligned}$$

erreichen. Die partielle Integration ist uns nach Bemerkung 2.24 gestattet, und da der Operator $C_{\Delta,\eta}$ dafür sorgt, dass sich die Skalarprodukte nur über $\mathrm{supp}(\nabla\eta)$ erstrecken, können wir wegen $\Lambda|_{\mathrm{supp}(\eta)} = \mathrm{Id}$ und $\hat\sigma|_{\mathrm{supp}(\eta)} = 0$ die entsprechenden Terme einfügen. Folglich sind

$$\begin{aligned}
&\langle (F,G), {}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle \\
= &-\sum_{I\in\mathfrak{I}^0_{s-2}} \mathtt{e}_I^2 \cdot \langle C_{\Delta,\eta}(0,R^{q+1}_{I_+}),(E_{\beta,m},0)\rangle + \sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}} \mathtt{e}^2_{J_+} \cdot \langle C_{\Delta,\eta}(D^q_{J_+},0), {}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle \\
&- \sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-2}} \mathtt{h}_J^2 \cdot \langle C_{\Delta,\eta}(D^q_{J_+},0),(E_{\beta,m},0)\rangle + \sum_{I\in\mathfrak{I}^0_{s-1}} \mathtt{h}^2_{I_+} \cdot \langle C_{\Delta,\eta}(0,R^{q+1}_{I_+}), {}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\langle (F,G), {}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle \\
= &-\sum_{I\in\mathfrak{I}^0_{s-2}} \mathtt{e}_I^2 \cdot \langle C_{\Delta,\eta}(0,R^{q+1}_{I_+}),(0,H_{\gamma,n})\rangle + \sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}} \mathtt{e}^2_{J_+} \cdot \langle C_{\Delta,\eta}(D^q_{J_+},0), {}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle \\
&- \sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-2}} \mathtt{h}_J^2 \cdot \langle C_{\Delta,\eta}(D^q_{J_+},0),(0,H_{\gamma,n})\rangle + \sum_{I\in\mathfrak{I}^0_{s-1}} \mathtt{h}^2_{I_+} \cdot \langle C_{\Delta,\eta}(0,R^{q+1}_{I_+}), {}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle \qquad .
\end{aligned}$$

Die auftretenden Skalarprodukte erstrecken sich nur über $\mathrm{supp}(\nabla\eta)$. Also können wir die in Korollar 4.14 bewiesenen Entwicklungen nach Turmformen für

$$(E_{\beta,m},0) \quad , \quad (0,H_{\gamma,n}) \quad , \quad {}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\beta,m},0) \quad \text{und} \quad {}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(0,H_{\gamma,n})$$

einsetzen. Lemma 3.17 gibt über Skalarprodukte der Form $\langle C_{\Delta,\eta}u,v\rangle$ mit Turmformen u,v Aufschluss und wir erkennen

- $\langle (F,G),(E_{\beta,m},0)\rangle = 0 \qquad ,$
- $\langle (F,G),(0,H_{\gamma,n})\rangle = 0 \qquad ,$
- $\langle (F,G), {}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle = \mathtt{h}^2_{I_+} = \mathtt{e}_I$ für $I = (0,\beta,m,-) \in \mathfrak{I}^0_{s-1} \qquad ,$
- $\langle (F,G), {}_{-\sigma}\mathcal{L}_0\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle = \mathtt{e}^2_{J_+} = \mathtt{h}_J$ für $J = (0,\gamma,n,-) \in \mathfrak{J}^0_{s-1} \qquad .$

■

Lemma 4.15 stellt uns nun die nötigen Hilfsmittel bereit, um die Räume $\mathrm{Reg}^{q,j}_s$ durch Orthogonalitätsbedingungen an $\mathrm{Reg}^{q,0}_s$ zu charakterisieren. Diese Charakterisierung geben wir in

Lemma 4.17
Seien $\mathbf{J} \in \mathbb{N}$ *und* $s \in (\mathbf{J}+1-N/2,\infty)\setminus\mathbb{I}$. *Dann gilt für* $(F,G)\in \mathrm{Reg}_s^{q,0}$

$$\begin{aligned}(F,G)\in\mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}} \quad\Longleftrightarrow\quad & \bigwedge_{(k,\beta,m)\in\Theta_s^{q,\mathbf{J}}} \langle (F,G),\Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle = 0\\ \wedge\; & \bigwedge_{(l,\gamma,n)\in\Theta_s^{q+1,\mathbf{J}}} \langle (F,G),\Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{l+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle = 0 \qquad .\end{aligned}$$

Hierbei definieren wir die Indexmenge

$$\Theta_s^{q,\mathbf{J}} \quad := \quad \big\{(k,\beta,m)\in\mathbb{N}_0^3 : k\le J-1 \wedge \beta < s-N/2-k-1\wedge 1\le m\le \mu_\beta^q\big\} \qquad .$$

Bemerkung 4.18

(i) *Da* $\mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}$ *durch Orthogonalitätsbedingungen charakterisiert werden kann, ist er ein abgeschlossener Unterraum von* $\mathrm{Reg}_s^{q,0}$ *und* $\mathrm{L}_s^{2,q}\times\mathrm{L}_s^{2,q+1}$.

(ii) *Die Indexmengen lassen sich nach Lemma 4.12 auch beschreiben durch*

$$\begin{aligned}\Theta_s^{q,\mathbf{J}} &= \big\{(k,\beta,m)\in\{0,\dots,\mathbf{J}-1\}\times\mathbb{N}_0\times\mathbb{N} : {}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\in \mathrm{L}_{-s}^{2,q}\times\mathrm{L}_{-s}^{2,q+1}\big\}\\ \Theta_s^{q+1,\mathbf{J}} &= \big\{(l,\gamma,n)\in\{0,\dots,\mathbf{J}-1\}\times\mathbb{N}_0\times\mathbb{N} : {}_{-\sigma}\mathcal{L}^{l+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\in \mathrm{L}_{-s}^{2,q}\times\mathrm{L}_{-s}^{2,q+1}\big\} \qquad .\end{aligned}$$

Beweis:
Wir werden Lemma 4.17 durch vollständige Induktion beweisen.
`Induktionsanfang` ($\mathbf{J}=1$): Für $(F,G)\in\mathrm{Reg}_s^{q,0}$ liefert Lemma 4.15

$$\begin{aligned}(F,G)\in\mathrm{Reg}_s^{q,1} \quad\Longleftrightarrow\quad & \bigwedge_{I\in\mathfrak{I}_{s-1}^0,\,J\in\mathfrak{J}_{s-1}^0} \mathtt{e}_I = \mathtt{h}_J = 0\\ \Longleftrightarrow\quad & \bigwedge_{(k,\beta,m)\in\Theta_s^{q,1}} \langle (F,G),\Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle = 0\\ \wedge\; & \bigwedge_{(l,\gamma,n)\in\Theta_s^{q+1,1}} \langle (F,G),\Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{l+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle = 0 \qquad ,\end{aligned}$$

denn es sind $\Theta_s^{q,1} = \big\{(0,\beta,m) : (0,\beta,m,-)\in\mathfrak{I}_{s-1}^0\big\}$ und $\Theta_s^{q+1,1} = \big\{(0,\gamma,n) : (0,\gamma,n,-)\in\mathfrak{J}_{s-1}^0\big\}$.
`Induktionsschritt` ($\mathbf{J}\to\mathbf{J}+1$): Es sind äquivalent

$$(F,G)\in\mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}+1} \quad\Longleftrightarrow\quad (F,G)\in\mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}} \quad\wedge\quad {}_{\sigma}\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G)\in\mathrm{Reg}_{s-\mathbf{J}}^{q,1} \qquad ,$$

und nach Induktionsanfang können wir schließen

$$\begin{aligned}{}_{\sigma}\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G)\in\mathrm{Reg}_{s-\mathbf{J}}^{q,1} \quad\Longleftrightarrow\quad & \bigwedge_{(0,\beta,m)\in\Theta_{s-\mathbf{J}}^{q,1}} \langle {}_{\sigma}\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G),\Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle = 0\\ \wedge\; & \bigwedge_{(0,\gamma,n)\in\Theta_{s-\mathbf{J}}^{q+1,1}} \langle {}_{\sigma}\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G),\Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle = 0 \qquad .\end{aligned}$$

Durch geschicktes Einschieben von $\mathrm{Id}=\Lambda^{-1}\Lambda$ und $\mathrm{Id}=(M-\hat\sigma)_{-\sigma}\mathcal{L}_0$, sowie partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle {}_{\sigma}\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G),\Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle &= \langle {}_{\sigma}\mathcal{L}_{0\,\sigma}\mathcal{L}^{\mathbf{J}-1}(F,G),(M-\hat\sigma)_{-\sigma}\mathcal{L}_{0\,-\sigma}\mathcal{L}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle\\ &= -\langle {}_{\sigma}\mathcal{L}^{\mathbf{J}-1}(F,G),{}_{-\sigma}\mathcal{L}_{0\,-\sigma}\mathcal{L}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle\\ &= \dots\\ &= (-1)^{\mathbf{J}}\cdot\langle (F,G),\Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{\mathbf{J}+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle \qquad .\end{aligned}$$

Die partielle Integration ist nach Bemerkung 2.24 erlaubt, da nach Lemma 4.12

$${}_{\sigma}\mathcal{L}_{0\,\sigma}\mathcal{L}^{\mathbf{J}-k}(F,G)\in\mathrm{R}_{s-\mathbf{J}+k-1}^{q}\times\mathrm{D}_{s-\mathbf{J}+k-1}^{q+1} \quad\text{und}\quad \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k}\Lambda(E_{\beta,m},0)\in\mathrm{R}_{-s+\mathbf{J}-k+1}^{q}\times\mathrm{D}_{-s+\mathbf{J}-k+1}^{q+1} \qquad .$$

$(0,\beta,m)\in\Theta_{s-\mathbf{J}}^{q,1}$ impliziert nämlich $\beta < s-1-\mathbf{J}-N/2$, und somit $\beta+k+N/2 < s-1-\mathbf{J}+k$. Eine analoge Rechnung führt zu

$$\langle {}_{\sigma}\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G),\Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle \quad=\quad (-1)^{\mathbf{J}}\cdot\langle (F,G),\Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{\mathbf{J}+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle \qquad .$$

Folglich sind äquivalent

$$\begin{array}{rclll} (F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}+1} & \Longleftrightarrow & & (F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}} & \\ & & \wedge \bigwedge_{(0,\beta,m)\in\Theta_{s-\mathbf{J}}^{q,1}} & \langle (F,G), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{\mathbf{J}+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle = 0 & \\ & & \wedge \bigwedge_{(0,\gamma,n)\in\Theta_{s-\mathbf{J}}^{q+1,1}} & \langle (F,G), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{\mathbf{J}+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle = 0 & . \end{array}$$

Setzen wir nun die Induktionsvoraussetzung ein, so ist die Behauptung bewiesen. ■

Um Projektoren auf $\mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}$ konstruieren zu können, benötigen wir eine duale Basis zu den Formen ${}_{-\sigma}\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\beta,m},0)$ und ${}_{\sigma}\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\gamma,n})$. Dazu benötigen wir den Operator

$${}_{\sigma}\mathcal{M} := (M+\hat{\sigma})\Lambda^{-1} \qquad ,$$

welcher die Linksinverse zu ${}_{\sigma}\mathcal{L}$ darstellt, sowie den Datenraum

$$\mathrm{Reg}_{\mathrm{vox}}^{q,0} := (\mathrm{L}_{\mathrm{vox}}^{2,q} \cap \tilde{\mathcal{F}}^q) \times {}_0\mathbf{R}_{\mathrm{vox}}^{q+1} \qquad .$$

Lemma 4.19
Für $\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0$, $m \in \{1,\ldots,\mu_\beta^{q+1}\}$ und $n \in \{1,\ldots,\mu_\gamma^q\}$ setzen wir

$$e_{\gamma,n} := \eta^- D_{\gamma,n}^{q,1} \qquad , \qquad h_{\beta,m} := \eta^- R_{\beta,m}^{q+1,1} \qquad .$$

Diese Formen sind C^∞ und erfüllen für $k,l \in \mathbb{N}_0$

- ${}_{\sigma}\mathcal{L}^k{}_{\sigma}\mathcal{M}^{k+l}(e_{\gamma,n},0) = {}_{\sigma}\mathcal{M}^l(e_{\gamma,n},0) \in \mathrm{Reg}_{<\frac{N}{2}+\gamma-1}^{q,0}$,
- ${}_{\sigma}\mathcal{L}^k{}_{\sigma}\mathcal{M}^{k+l}(0,h_{\beta,m}) = {}_{\sigma}\mathcal{M}^l(0,h_{\beta,m}) \in \mathrm{Reg}_{<\frac{N}{2}+\beta-1}^{q,0}$,
- ${}_{\sigma}\mathcal{M}^{l+2}(e_{\gamma,n},0), {}_{\sigma}\mathcal{M}^{l+2}(0,h_{\beta,m}) \in \mathrm{Reg}_{\mathrm{vox}}^{q,0}$,
- ${}_{\sigma}\mathcal{M}^{l+2}(e_{\gamma,n},0), {}_{\sigma}\mathcal{M}^{l+2}(0,h_{\beta,m}) \in \mathrm{Reg}_s^{q,l}$ *für* $s \in (l-N/2,\infty)\setminus\mathbb{I}$.

Beweis:
Bemerkung 3.16 liefert $\mathrm{div} e_{\gamma,n} = 0$ und $\mathrm{rot} h_{\beta,m} = 0$, sodass mit Bemerkung 3.19 direkt

$$(e_{\gamma,n},0) \in \mathrm{Reg}_{<\frac{N}{2}+\gamma-1}^{q,0} \qquad \text{und} \qquad (0,h_{\beta,m}) \in \mathrm{Reg}_{<\frac{N}{2}+\beta-1}^{q,0}$$

folgt. Desweiteren sind

- ${}_{\sigma}\mathcal{M}(e_{\gamma,n},0) = M(e_{\gamma,n},0) = \eta(0,{}^-R_{\gamma,n}^{q+1,0}) + C_{M,\eta}({}^-D_{\gamma,n}^{q,1},0) \in \mathrm{Reg}_{<\frac{N}{2}+\gamma}^{q,0}$,
- ${}_{\sigma}\mathcal{M}(0,h_{\beta,m}) = M(0,h_{\beta,m}) = \eta({}^-D_{\beta,m}^{q,0},0) + C_{M,\eta}(0,{}^-R_{\beta,m}^{q+1,1}) \in \mathrm{Reg}_{<\frac{N}{2}+\beta}^{q,0}$,
- ${}_{\sigma}\mathcal{M}^2(e_{\gamma,n},0) = M^2(e_{\gamma,n},0) = C_{\Delta,\eta}({}^-D_{\gamma,n}^{q,1},0) = C_{M,\eta}(0,{}^-R_{\gamma,n}^{q+1,0}) + MC_{M,\eta}({}^-D_{\gamma,n}^{q,1},0)$,
- ${}_{\sigma}\mathcal{M}^2(0,h_{\beta,m}) = M^2(0,h_{\beta,m}) = C_{\Delta,\eta}(0,{}^-R_{\beta,m}^{q+1,1}) = C_{M,\eta}({}^-D_{\beta,m}^{q,0},0) + MC_{M,\eta}(0,{}^-R_{\beta,m}^{q+1,1})$.

Folglich erhalten wir für alle $l \in \mathbb{N}_0$

$$\mathrm{supp}{}_{\sigma}\mathcal{M}^{l+2}(e_{\gamma,n},0) \cup \mathrm{supp}{}_{\sigma}\mathcal{M}^{l+2}(0,h_{\beta,m}) \subset \mathrm{supp}(\nabla\eta)$$

und daher

$${}_{\sigma}\mathcal{M}^{l+2}(e_{\gamma,n},0), {}_{\sigma}\mathcal{M}^{l+2}(0,h_{\beta,m}) \in \mathrm{Reg}_{\mathrm{vox}}^{q,0} \qquad .$$

Somit können wir mit Satz 3.39 beliebig viele Iterationen von ${}_{\sigma}\mathcal{L}$ auf diese Formen anwenden und sehen sofort für alle $l \geq 2$

$${}_{\sigma}\mathcal{L}{}_{\sigma}\mathcal{M}^{1+l}(e_{\gamma,n},0) = {}_{\sigma}\mathcal{M}^l(e_{\gamma,n},0) \qquad , \qquad {}_{\sigma}\mathcal{L}{}_{\sigma}\mathcal{M}^{1+l}(0,h_{\beta,m}) = {}_{\sigma}\mathcal{M}^l(0,h_{\beta,m}) \qquad . \tag{4.1}$$

Auch

$$(e_{\gamma,n},0) \quad , \quad (0,h_{\beta,m}) \quad , \quad {}_{\sigma}\mathcal{M}(e_{\gamma,n},0) \quad , \quad {}_{\sigma}\mathcal{M}(0,h_{\beta,m})$$

besitzen die richtige Gestalt, sodass Satz 3.39 die Gleichung (4.1) auch für $l = 0, 1$ liefert. Per Induktion über $k \in \mathbb{N}$ folgt dann schließlich für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$

$$ {}_\sigma\mathcal{L}^k{}_\sigma\mathcal{M}^{k+l}(e_{\gamma,n}, 0) = {}_\sigma\mathcal{M}^l(e_{\gamma,n}, 0) \qquad \text{und} \qquad {}_\sigma\mathcal{L}^k{}_\sigma\mathcal{M}^{k+l}(0, h_{\beta,m}) = {}_\sigma\mathcal{M}^l(0, h_{\beta,m}) \qquad . $$

Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung der kompakten Träger von ${}_\sigma\mathcal{M}^2(e_{\gamma,n}, 0)$ und ${}_\sigma\mathcal{M}^2(0, h_{\beta,m})$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$ und $s \in (l - N/2, \infty)\backslash\mathbb{I}$

$$ {}_\sigma\mathcal{M}^{l+2}(e_{\gamma,n}, 0) \in \mathrm{Reg}_s^{q,l} \qquad \text{und} \qquad {}_\sigma\mathcal{M}^{l+2}(0, h_{\beta,m}) \in \mathrm{Reg}_s^{q,l} \qquad . $$

■

Lemma 4.20
Seien $K, Z \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten für alle $\beta \in \{0, \dots, Z\}$ und $k \in \{-1, \dots, K\}$, sowie alle $l, \gamma \in \mathbb{N}_0$ und geeigneten Indizes m, n

- $\langle {}_\sigma\mathcal{M}^{l+2}(e_{\gamma,n}, 0), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\beta,m}, 0)\rangle = 0 \qquad ,$
- $\langle {}_\sigma\mathcal{M}^{l+2}(e_{\gamma,n}, 0), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(0, H_{\beta,m})\rangle = (-1)^l \cdot \delta_{k,l} \cdot \delta_{\beta,\gamma} \cdot \delta_{m,n} \qquad ,$
- $\langle {}_\sigma\mathcal{M}^{l+2}(0, h_{\gamma,n}), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\beta,m}, 0)\rangle = (-1)^l \cdot \delta_{k,l} \cdot \delta_{\beta,\gamma} \cdot \delta_{m,n} \qquad ,$
- $\langle {}_\sigma\mathcal{M}^{l+2}(0, h_{\gamma,n}), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(0, H_{\beta,m})\rangle = 0 \qquad .$

Bemerkung 4.21
Es genügt, $\hat{j} \geq N + 4 + 2(K + Z)$ in (1.18) zu wählen.

Beweis:
Da ${}_\sigma\mathcal{M}^2(e_{\gamma,n}, 0)$ kompakten Träger besitzt, können wir nach Bemerkung 2.24 l–mal partiell integrieren, und erhalten

$$ \begin{aligned} S_{\beta,\gamma}^{k,l} \;&:=\; \langle {}_\sigma\mathcal{M}^{l+2}(e_{\gamma,n}, 0), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\beta,m}, 0)\rangle \;=\; \langle (\Lambda^{-1}M)^l\Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{M}^2(e_{\gamma,n}, 0), {}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\beta,m}, 0)\rangle \\ &=\; (-1)^l \cdot \langle C_{\Delta,\eta}({}^-D_{\gamma,n}^{q,1}, 0), \Lambda^{-1}((M - \hat{\sigma})\Lambda^{-1})^l{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\beta,m}, 0)\rangle \qquad . \end{aligned} $$

Hierbei haben wir benutzt, dass $\sigma = 0$ und $\Lambda = \mathrm{Id}$ auf $\mathrm{supp}(\eta)$ gilt. Aufgrund von $(M - \hat{\sigma})\Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L} = \mathrm{Id}$ und $(M - \hat{\sigma})(E_{\beta,m}, 0) = (0, 0)$ verschwindet der rechte Eintrag im Skalarprodukt für $l \geq k + 2$. Für $l \leq k + 1$ ergibt sich

$$ S_{\beta,\gamma}^{k,l} \;=\; (-1)^l \cdot \langle C_{\Delta,\eta}({}^-D_{\gamma,n}^{q,1}, 0), {}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1-l}\Lambda(E_{\beta,m}, 0)\rangle \qquad . $$

Dieses Integral erstreckt sich nur über $\mathrm{supp}(\nabla\eta)$, sodass wir die in Korollar 4.14 aufgeführte Entwicklung von ${}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1-l}\Lambda(E_{\beta,m}, 0)$ einsetzen können. Ein Vergleich mit Lemma 3.17 zeigt schließlich $S_{\beta,\gamma}^{k,l} = 0$.

Ganz analog mit l–facher partieller Integration verschwindet

$$ \tilde{S}_{\beta,\gamma}^{k,l} \;:=\; \langle {}_\sigma\mathcal{M}^{l+2}(e_{\gamma,n}, 0), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(0, H_{\beta,m})\rangle $$

für $l \geq k + 2$ und für $l \leq k + 1$ erhalten wir wieder

$$ \tilde{S}_{\beta,\gamma}^{k,l} \;=\; (-1)^l \cdot \langle C_{\Delta,\eta}({}^-D_{\gamma,n}^{q,1}, 0), {}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1-l}\Lambda(0, H_{\beta,m})\rangle \qquad . $$

Unter Benutzung von Korollar 4.14 ergibt ein Vergleich mit Lemma 3.17, dass $\tilde{S}_{\beta,\gamma}^{k,l}$ nur für $k = l$ nicht verschwindet, und dass im Fall $k = l$

$$ \tilde{S}_{\beta,\gamma}^{k,l} = (-1)^l \cdot \langle C_{\Delta,\eta}({}^-D_{\gamma,n}^{q,1}, 0), ({}^+D_{\beta,m}^{q,1}, 0)\rangle = (-1)^l \cdot \delta_{k,l} \cdot \delta_{\beta,\gamma} \cdot \delta_{m,n} $$

gilt. Analog erhalten wir die Aussagen über die anderen beiden Skalarprodukte. ■

Satz 4.22
Seien $\mathbf{J} \in \mathbb{N}$ und $s \in (\mathbf{J} + 1 - N/2, \infty)\backslash\mathbb{I}$. Dann gilt die Zerlegung

$$ \mathrm{Reg}_s^{q,0} \;=\; \mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}} \dot{+} \Upsilon_s^{q,\mathbf{J}} \qquad . $$

Hierbei ist

$$\Upsilon_s^{q,\mathbf{J}} \quad := \quad \operatorname{Lin}\left\{ {}_\sigma\mathcal{M}^{l+2}(e_{\gamma,n},0), {}_\sigma\mathcal{M}^{k+2}(0,h_{\beta,m}) : (k,\beta,m) \in \Theta_s^{q,\mathbf{J}} \wedge (l,\gamma,n) \in \Theta_s^{q+1,\mathbf{J}} \right\} \qquad .$$

Jedes $(F,G) \in \operatorname{Reg}_s^{q,0}$ *läßt sich in eindeutiger Weise zerlegen in*

$$(F,G) = (F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}) + (F_\Upsilon, G_\Upsilon) \qquad , \qquad (F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}) \in \operatorname{Reg}_s^{q,\mathbf{J}} \qquad , \qquad (F_\Upsilon, G_\Upsilon) \in \Upsilon_s^{q,\mathbf{J}} \qquad ,$$

und zwar sind

$$\begin{aligned} (F_\Upsilon, G_\Upsilon) \quad := \quad & \sum_{(k,\beta,m)\in\Theta_s^{q,\mathbf{J}}} (-1)^k \langle (F,G), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle \cdot {}_\sigma\mathcal{M}^{k+2}(0,h_{\beta,m}) \\ + \quad & \sum_{(l,\gamma,n)\in\Theta_s^{q+1,\mathbf{J}}} (-1)^l \langle (F,G), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{l+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle \cdot {}_\sigma\mathcal{M}^{l+2}(e_{\gamma,n},0) \end{aligned}$$

und $(F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}) := (F,G) - (F_\Upsilon, G_\Upsilon)$.

Bemerkung 4.23

(i) *Die Räume* $\Upsilon_s^{q,\mathbf{J}}$ *sind endlichdimensionale Teilräume von* $(\mathrm{C}_0^{\infty,q} \times \mathrm{C}_0^{\infty,q+1}) \cap \operatorname{Reg}_{\mathrm{vox}}^{q,0}$ *und die Projektoren* $(F,G) \mapsto (F_\Upsilon, G_\Upsilon)$ *und* $(F,G) \mapsto (F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}})$ *sind stetig.*

(ii) *Es genügt* $\hat{j} \geq 2(s + \mathbf{J} + 1)$ *in (1.18) zu wählen.*

Beweis:
In Lemma 4.19 haben wir schon

$$\Upsilon_s^{q,\mathbf{J}} \subset \operatorname{Reg}_{\mathrm{vox}}^{q,0}$$

gezeigt. Für $(F,G) \in \operatorname{Reg}_s^{q,0}$ sind somit auch $(F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}), (F_\Upsilon, G_\Upsilon) \in \operatorname{Reg}_s^{q,0}$. Lemma 4.20 liefert für alle $(k,\beta,m) \in \Theta_s^{q,\mathbf{J}}$ und $(l,\gamma,n) \in \Theta_s^{q+1,\mathbf{J}}$

$$\begin{aligned} \langle (F_\Upsilon, G_\Upsilon), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle &= \langle (F,G), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle \qquad , \\ \langle (F_\Upsilon, G_\Upsilon), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{l+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle &= \langle (F,G), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{l+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle \qquad , \end{aligned}$$

was

$$\langle (F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle \quad = \quad \langle (F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{l+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle \quad = \quad 0$$

für alle $(k,\beta,m) \in \Theta_s^{q,\mathbf{J}}$ und $(l,\gamma,n) \in \Theta_s^{q+1,\mathbf{J}}$ impliziert. Nach Lemma 4.17 ist also $(F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}) \in \operatorname{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}$. Also gilt

$$\operatorname{Reg}_s^{q,0} \subset \operatorname{Reg}_s^{q,\mathbf{J}} + \Upsilon_s^{q,\mathbf{J}} \subset \operatorname{Reg}_s^{q,0} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{Reg}_s^{q,0} = \operatorname{Reg}_s^{q,\mathbf{J}} + \Upsilon_s^{q,\mathbf{J}}$$

Um die Direktheit der Summe zu überprüfen sei

$$(F,G) = \sum_{(k,\beta,m)\in\Theta_s^{q,\mathbf{J}}} \mathtt{g}_{k,\beta,m} \cdot {}_\sigma\mathcal{M}^{k+2}(0,h_{\beta,m}) + \sum_{(l,\gamma,n)\in\Theta_s^{q+1,\mathbf{J}}} \mathtt{f}_{l,\gamma,n} \cdot {}_\sigma\mathcal{M}^{l+2}(e_{\gamma,n},0) \in \operatorname{Reg}_s^{q,\mathbf{J}} \cap \Upsilon_s^{q,\mathbf{J}} \qquad .$$

Setzen wir $(F,G) \in \operatorname{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}$ in die in Lemma 4.17 aufgeführten Skalarprodukte ein, so müssen diese einerseits verschwinden, andererseits ergeben sie — abgesehen von einem Vorzeichen — nach Lemma 4.20 die einzelnen Koeffizienten $\mathtt{g}_{k,\beta,m}$ und $\mathtt{f}_{l,\gamma,n}$. Somit gilt für alle $(k,\beta,m) \in \Theta_s^{q,\mathbf{J}}$ und alle $(l,\gamma,n) \in \Theta_s^{q+1,\mathbf{J}}$

$$\mathtt{f}_{l,\gamma,n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathtt{g}_{k,\beta,m} = 0 \qquad ,$$

was uns $\operatorname{Reg}_s^{q,\mathbf{J}} \cap \Upsilon_s^{q,\mathbf{J}} = \{(0,0)\}$ liefert. ■

4.3 Niederfrequenzasymptotik in lokalen Normen

Unser nächstes Ziel ist es, für Daten $(F,G) \in \operatorname{Reg}_s^{q,0}$ eine asymptotische Entwicklung von ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ bis zur Ordnung $\mathbf{J} - 1$ zu erhalten. Hierbei benutzen wir die im vorigen Satz beschriebene Zerlegung $\operatorname{Reg}_s^{q,0} = \operatorname{Reg}_s^{q,\mathbf{J}} \dot{+} \Upsilon_s^{q,\mathbf{J}}$, sodass wir nur noch die Asymptotik von Elementen aus $\Upsilon_s^{q,\mathbf{J}}$ zu bestimmen haben. Wir gehen in diesem Abschnitt wieder ganz analog zu Pauly [11, Sek. 7.3] vor.

Definition 4.24
Für $K \in \mathbb{N}_0$ definieren wir uns die Differenz aus ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega$ und asymptotischer Entwicklung bis zur Ordnung K als

$$ {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,K} := {}_\sigma\mathcal{L}_\omega - \sum_{k=0}^{K}(-\mathrm{i}\omega)^k {}_\sigma\mathcal{L}_0 {}_\sigma\mathcal{L}^k \qquad , \qquad {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,-1} := {}_\sigma\mathcal{L}_\omega \qquad . $$

Lemma 4.25
Seien $\mathbf{J} \in \mathbb{N}_0$, $s \in (\mathbf{J}+1/2, \mathbf{J}+N/2)\setminus\mathbb{I}$ und $t := s - \mathbf{J} - (N+1)/2$. Dann gilt die bezüglich $\omega \in \mathbb{C}_{-,\hat{\omega}}\setminus\{0\}$ und $(F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,0}$ gleichmäßige Abschätzung

$$ \begin{aligned} ||{}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-1}(F,G) \quad &- \sum_{(k,\beta,m)\in\Theta_s^{q,\mathbf{J}}} (\mathrm{i}\omega)^k \langle (F,G), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle \cdot {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-k-1}{}_\sigma\mathcal{M}^2(0,h_{\beta,m}) \\ &- \sum_{(l,\gamma,n)\in\Theta_s^{q+1,\mathbf{J}}} (\mathrm{i}\omega)^l \langle (F,G), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{l+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle \cdot {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-l-1}{}_\sigma\mathcal{M}^2(e_{\gamma,n},0)||_{\mathrm{L}^2_t} \\ &= \mathcal{O}(|\omega|^{\mathbf{J}}) \cdot \left\|(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} \qquad . \end{aligned} $$

Beweis:
Wir können $(F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,0}$ mit Hilfe des Satzes 4.22 zerlegen in

$$ (F,G) = (F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}) + (F_\Upsilon, G_\Upsilon) \qquad , \qquad (F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}) \in \mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}} \qquad , \qquad (F_\Upsilon, G_\Upsilon) \in \Upsilon_s^{q,\mathbf{J}} \qquad . $$

Satz 4.9 und Bemerkung 4.23 liefern dann

$$ \left\|{}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-1}(F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}})\right\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad = \quad \mathcal{O}(|\omega|^{\mathbf{J}}) \cdot \left\|(F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}})\right\|_{\mathrm{L}^2_s} \quad = \quad \mathcal{O}(|\omega|^{\mathbf{J}}) \cdot \left\|(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} \qquad . $$

Daher müssen wir nur noch den Ausdruck ${}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-1}(F_\Upsilon, G_\Upsilon)$ untersuchen, also für $0 \le k \le \mathbf{J}-1$ die Ausdrücke

$$ {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-1}{}_\sigma\mathcal{M}^{k+2}(e_{\gamma,n},0) \qquad \text{und} \qquad {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-1}{}_\sigma\mathcal{M}^{k+2}(0,h_{\beta,m}) \qquad . $$

Lemma 4.19 besagt ${}_\sigma\mathcal{M}^{k+2}(e_{\gamma,n},0), {}_\sigma\mathcal{M}^{k+2}(0,h_{\beta,m}) \in \mathrm{Reg}_s^{q,k}$, sodass Satz 4.9 und Lemma 4.19 für $0 \le k \le \mathbf{J}-1$

$$ \begin{aligned} {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-1}{}_\sigma\mathcal{M}^{k+2}(e_{\gamma,n},0) \quad &= \quad {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,k-1}{}_\sigma\mathcal{M}^{k+2}(e_{\gamma,n},0) - \sum_{j=k}^{\mathbf{J}-1}(-\mathrm{i}\omega)^j {}_\sigma\mathcal{L}_0 {}_\sigma\mathcal{L}^j {}_\sigma\mathcal{M}^{k+2}(e_{\gamma,n},0) \\ &= \quad (-\mathrm{i}\omega)^k {}_\sigma\mathcal{L}_\omega {}_\sigma\mathcal{L}^k {}_\sigma\mathcal{M}^{k+2}(e_{\gamma,n},0) - \sum_{j=k}^{\mathbf{J}-1}(-\mathrm{i}\omega)^j {}_\sigma\mathcal{L}_0 {}_\sigma\mathcal{L}^{j-k} {}_\sigma\mathcal{M}^2(e_{\gamma,n},0) \\ &= \quad (-\mathrm{i}\omega)^k {}_\sigma\mathcal{L}_\omega {}_\sigma\mathcal{M}^2(e_{\gamma,n},0) - (-\mathrm{i}\omega)^k \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-k-1}(-\mathrm{i}\omega)^j {}_\sigma\mathcal{L}_0 {}_\sigma\mathcal{L}^j {}_\sigma\mathcal{M}^2(e_{\gamma,n},0) \\ &= \quad (-\mathrm{i}\omega)^k {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-k-1}{}_\sigma\mathcal{M}^2(e_{\gamma,n},0) \end{aligned} $$

liefern. Völlig analog erhalten wir

$$ {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-1}{}_\sigma\mathcal{M}^{k+2}(0,h_{\beta,m}) \quad = \quad (-\mathrm{i}\omega)^k {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-k-1}{}_\sigma\mathcal{M}^2(0,h_{\beta,m}) \qquad . $$

■

Es steht also nur noch aus, die Asymptotik der Formen

$$ {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-k-1}{}_\sigma\mathcal{M}^2(e_{\gamma,n},0) \qquad \text{und} \qquad {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-k-1}{}_\sigma\mathcal{M}^2(0,h_{\beta,m}) $$

für $\omega \in \mathbb{C}_{-,\hat{\omega}}\setminus\{0\}$, $0 \le k \le \mathbf{J}-1$ und $\beta, \gamma < s - N/2 - 1$ zu untersuchen. Hierbei können wir sehr einfach auf die entsprechende von Pauly in [11, Sek. 7.3] über mehrere Seiten geführte Asymptotikuntersuchung zurückgreifen, denn die Terme, auf die die Operatoren ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega$, ${}_\sigma\mathcal{M}$, ${}_\sigma\mathcal{L}_0$, $(M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})$, o.ä. angewandt werden (bei Pauly für $\sigma = 0$), sind alle von der Form

$$ \eta(\Phi,\Psi) \qquad , \qquad C_{M,\eta}(\Phi,\Psi) \qquad , \qquad C_{\Delta,\eta}(\Phi,\Psi) \qquad , \qquad \text{o.ä.} \qquad , $$

haben also insbesondere ihren Träger in $\mathrm{supp}(\eta)$, sodass alle Argumente gültig bleiben, wenn wir die in [11] auftretenden Operatoren $\mathcal{L}_\omega$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}_0$, $(M + \mathrm{i}\omega\Lambda)$, etc. durch die entsprechenden Operatoren ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega$, ${}_\sigma\mathcal{M}$, ${}_\sigma\mathcal{L}_0$, $(M + \mathrm{i}\omega\Lambda + \hat{\sigma})$, etc. ersetzen.

Mit diesen Ersetzungen erreichen wir die Lemmata

Lemma 4.26
Für alle $j \in \{1,\dots,\mathbf{J}\}$ und alle geeigneten Indizes β, m, γ, n sowie alle beschränkten Gebiete Ω_b gelten die folgenden Asymptotiken:

$$\begin{aligned}
&{}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,j-1\sigma}\mathcal{M}^2(e_{\gamma,n},0)\\
\overset{j}{\sim}\quad & \kappa_\gamma \omega^{N+2\gamma}\left(\sum_{k=0}^{j-N-2\gamma-1}(-\mathrm{i}\omega)^k\Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\gamma,n}) - {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,j-N-2\gamma-1}C_{\Delta,\eta}({}^+D^{q,1}_{\gamma,n},0)\right)\\
=:\quad & \kappa_\gamma\omega^{N+2\gamma}\cdot\mathcal{A}^{j-N-2\gamma-1}_{\omega,\gamma,n}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&{}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,j-1\sigma}\mathcal{M}^2(0,h_{\beta,m})\\
\overset{j}{\sim}\quad & \kappa_\beta \omega^{N+2\beta}\left(\sum_{k=0}^{j-N-2\beta-1}(-\mathrm{i}\omega)^k\Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\beta,m},0) - {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,j-N-2\beta-1}C_{\Delta,\eta}(0,{}^+R^{q+1,1}_{\beta,m})\right)\\
=:\quad & \kappa_\beta\omega^{N+2\beta}\cdot\mathcal{B}^{j-N-2\beta-1}_{\omega,\beta,m} \qquad .
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\kappa_\beta := \mathrm{i}2\nu_\beta 4^{-\nu_\beta}\frac{\Gamma(1-\nu_\beta)}{\Gamma(1+\nu_\beta)}(-1)^{\nu_\beta+1/2}$ mit $\nu_\beta := N/2+\beta$. Mit der Asymptotikschreibweise meinen wir

$$u \overset{j}{\sim} v \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \left\|u-v\right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_b)} \le c\cdot|w|^j \quad \textit{gleichmäßig bzgl.} \quad \omega\in\mathbb{C}_{-,\hat\omega}\setminus\{0\} \qquad .$$

Lemma 4.27
Seien $\mathbf{J}\in\mathbb{N}_0$ und $s\in(\mathbf{J}+1/2,\mathbf{J}+N/2)\setminus\mathbb{I}$. Dann gilt für alle beschränkten Gebiete Ω_b gleichmäßig bzgl. $\omega\in\mathbb{C}_{-,\hat\omega}\setminus\{0\}$ und $(F,G)\in\mathrm{Reg}^{q,0}_s$

$$\begin{aligned}
||{}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-1}(F,G) \quad &- \sum_{(k,\beta,m)\in\tilde\Theta^q_{\mathbf{J}-N-1}}(-\mathrm{i}\omega)^{N+k}\kappa_{k,\beta}\langle(F,G),\Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k-2\beta+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle\cdot\mathcal{B}^{\mathbf{J}-N-k-1}_{\omega,\beta,m}\\
&- \sum_{(l,\gamma,n)\in\tilde\Theta^{q+1}_{\mathbf{J}-N-1}}(-\mathrm{i}\omega)^{N+l}\kappa_{l,\gamma}\langle(F,G),\Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{l-2\gamma+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle\cdot\mathcal{A}^{\mathbf{J}-N-l-1}_{\omega,\gamma,n}||_{\mathrm{L}^2(\Omega_b)}\\
&= \mathcal{O}(|\omega|^{\mathbf{J}})\cdot\left\|(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_s}
\end{aligned}$$

mit $\kappa_{k,\beta} := \mathrm{i}^{2k-2\beta+N}\kappa_\beta$ und $\tilde\Theta^q_j := \{(k,\beta,m)\in\mathbb{N}_0^3 : 2\beta\le k\le j\wedge 1\le m\le\mu^q_\beta\}$.
Insbesondere gilt für $j\le\min\{\mathbf{J},N\}$

$$\left\|{}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,j-1}(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_b)} \quad = \quad \mathcal{O}(|\omega|^j)\cdot\left\|(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} \qquad .$$

Beweis:
Wir benutzen die Asymptotiken aus Lemma 4.26 für $j=\mathbf{J}-k$ bzw. $j=\mathbf{J}-l$ und setzen sie in die Abschätzung aus Lemma 4.25 ein. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
||{}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-1}(F,G) \quad &- \sum_{(k,\beta,m)\in\Theta^{q,\mathbf{J}}_s}(\mathrm{i}\omega)^k\kappa_\beta\omega^{N+2\beta}\langle(F,G),\Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle\cdot\mathcal{B}^{\mathbf{J}-N-2\beta-k-1}_{\omega,\beta,m}\\
&- \sum_{(l,\gamma,n)\in\Theta^{q+1,\mathbf{J}}_s}(\mathrm{i}\omega)^l\kappa_\gamma\omega^{N+2\gamma}\langle(F,G),\Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{l+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\rangle\cdot\mathcal{A}^{\mathbf{J}-N-2\gamma-l-1}_{\omega,\gamma,n}||_{\mathrm{L}^2(\Omega_b)}\\
&= \mathcal{O}(|\omega|^{\mathbf{J}})\cdot\left\|(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} \qquad .
\end{aligned}$$

Weiterhin können wir $(\mathrm{i}\omega)^k\kappa_\beta\omega^{N+2\beta} = \mathrm{i}^{N+2\beta+2k}\kappa_\beta(-\mathrm{i}\omega)^{N+2\beta+k}$ schreiben. Die erste Summe läuft über

$$0\le k\le\mathbf{J}-1 \qquad , \qquad 0\le\beta<s-N/2-k-1 \qquad , \qquad 1\le m\le\mu^q_\beta \qquad .$$

Wir können dies sogar weiter einschränken durch $N+2\beta+k\le\mathbf{J}-1$, denn Terme mit höherer ω–Potenz werden durch die rechte Seite abgeschätzt. Also braucht die Summe nur über

$$0\le k\le\mathbf{J}-N-1 \qquad , \qquad 0\le\beta\le\frac{\mathbf{J}-N-k-1}{2} \qquad , \qquad 1\le m\le\mu^q_\beta$$

zu laufen. Analoges gilt für die zweite Summe. Durch Vertauschen der Summationsreihenfolge zu

$$0\le 2\beta\le\mathbf{J}-N-1 \qquad , \qquad 0\le k\le\mathbf{J}-N-2\beta-1 \qquad , \qquad 1\le m\le\mu^q_\beta \qquad ,$$

Ersetzung von $k' := k + 2\beta$, erneuter Summationsvertauschung und Rückbenennung $k' \to k$ beenden wir den Beweis der ersten Behauptung. Nach Satz 4.5 ist

$$ {}_\sigma\mathcal{L}_\omega C_{\Delta,\eta}({}^+D^{q,1}_{\gamma,n},0), {}_\sigma\mathcal{L}_\omega C_{\Delta,\eta}(0,{}^+R^{q+1,1}_{\beta,m}) \overset{0}{\sim} (0,0) \qquad \text{, und somit} \qquad \mathcal{A}^l_{\omega,\gamma,n}, \mathcal{B}^l_{\omega,\beta,m} \overset{0}{\sim} (0,0) \qquad . $$

Daher folgt die zweite Behauptung des Lemmas direkt aus der ersten. ■

Durch Anwendung des Lemmas 4.27 auf

$$ (F,G) := C_{\Delta,\eta}({}^+D^{q,1}_{\gamma,n},0) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_{\mathrm{vox}} \qquad \text{und} \qquad (F,G) := C_{\Delta,\eta}(0,{}^+R^{q+1,1}_{\gamma,\nu}) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_{\mathrm{vox}} $$

für beliebiges $\mathbf{J} = j$ erhalten wir Formen-Tupel

$$ X^l_{\gamma,n}, \mathrm{Y}^l_{\gamma,\nu} \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}} $$

mit

$$ \mathcal{A}^{j-1}_{\omega,\gamma,n} \overset{j}{\sim} \sum_{l=0}^{j-1} (-\mathrm{i}\omega)^l \cdot X^l_{\gamma,n} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B}^{j-1}_{\omega,\gamma,\nu} \overset{j}{\sim} \sum_{l=0}^{j-1} (-\mathrm{i}\omega)^l \cdot Y^l_{\gamma,\nu} \tag{4.2} $$

Durch Koeffizientenvergleich bei den Asymptotiken erhalten wir für diese Formen–Tupel die Rekursionsformeln

$$ X^l_{\gamma,n} = \Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^l\Lambda(0,H_{\gamma,n}) - \sum_{(k,\beta,m)\in\tilde{\Theta}^q_{l-N}} y^{k,\beta,m}_{D,\gamma,n} \cdot Y^{l-N-k}_{\beta,m} - \sum_{(k,\beta,m)\in\tilde{\Theta}^{q+1}_{l-N}} x^{k,\beta,m}_{D,\gamma,n} \cdot X^{l-N-k}_{\beta,m} \quad , \tag{4.3} $$

$$ Y^l_{\gamma,\nu} = \Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^l\Lambda(E_{\gamma,\nu},0) - \sum_{(k,\beta,m)\in\tilde{\Theta}^q_{l-N}} y^{k,\beta,m}_{R,\gamma,\nu} \cdot Y^{l-N-k}_{\beta,m} - \sum_{(k,\beta,m)\in\tilde{\Theta}^{q+1}_{l-N}} x^{k,\beta,m}_{R,\gamma,\nu} \cdot X^{l-N-k}_{\beta,m} \quad , \tag{4.4} $$

mit den skalaren Koeffizienten

- $x^{k,\beta,m}_{D,\gamma,n} := \kappa_{k,\beta} \cdot \langle C_{\Delta,\eta}({}^+D^{q,1}_{\gamma,n},0), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k-2\beta+1}\Lambda(0,H_{\beta,m})\rangle \quad ,$
- $y^{k,\beta,m}_{D,\gamma,n} := \kappa_{k,\beta} \cdot \langle C_{\Delta,\eta}({}^+D^{q,1}_{\gamma,n},0), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k-2\beta+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle \quad ,$
- $x^{k,\beta,m}_{R,\gamma,\nu} := \kappa_{k,\beta} \cdot \langle C_{\Delta,\eta}(0,{}^+R^{q+1,1}_{\gamma,\nu}), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k-2\beta+1}\Lambda(0,H_{\beta,m})\rangle \quad ,$
- $y^{k,\beta,m}_{R,\gamma,\nu} := \kappa_{k,\beta} \cdot \langle C_{\Delta,\eta}(0,{}^+R^{q+1,1}_{\gamma,\nu}), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k-2\beta+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle \quad .$

Per Induktion zeigt man

$$ \begin{aligned} X^l_{\gamma,n}, Y^l_{\gamma,\nu} \in\ & \mathrm{Lin}\,\{\Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^l\Lambda(E_{\gamma,\nu},0), \Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^l\Lambda(0,H_{\gamma,n})\} \\ +\ & \mathrm{Lin}\,\big\{\Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\beta,m},0), \Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\beta,\tilde{m}}) : k+2\beta \le l-N\big\} \quad , \end{aligned} \tag{4.5} $$

sowie

$$ \bigwedge_{l\in\mathbb{N}} \Lambda^{-1}(M+\hat{\sigma})X^l_{\gamma,n} = X^{l-1}_{\gamma,n} \qquad \text{und} \qquad \bigwedge_{l\in\mathbb{N}} \Lambda^{-1}(M+\hat{\sigma})Y^l_{\gamma,\nu} = Y^{l-1}_{\gamma,\nu} \quad . \tag{4.6} $$

Damit können wir den folgenden Satz formulieren:

Satz 4.28
Seien $\mathbf{J} \in \mathbb{N}_0$, $s \in (\mathbf{J}+1/2,\infty)\backslash\mathbb{I}$, sowie die Koeffizienten–Formen $X^l_{\gamma,n}$, $Y^l_{\gamma,\nu}$ für $l, 2\gamma \le \mathbf{J}-N$, $n = 1,\ldots,\mu^{q+1}_\gamma$ und $\nu = 1,\ldots,\mu^q_\gamma$ rekursiv durch (4.3) und (4.4) bestimmt. Mit Hilfe dieser Koeffizienten–Formen definieren wir für $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s$ und $j = 0,\ldots,\mathbf{J}-N$ die Korrekturoperatoren

$$ \begin{aligned} \Gamma_j(F,G) := & \sum_{(k,\beta,m)\in\tilde{\Theta}^q_j} \kappa_{k,\beta} \cdot \langle (F,G), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k-2\beta+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle \cdot Y^{j-k}_{\beta,m} \\ + & \sum_{(k,\beta,m)\in\tilde{\Theta}^{q+1}_j} \kappa_{k,\beta} \cdot \langle (F,G), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k-2\beta+1}\Lambda(0,H_{\beta,m})\rangle \cdot X^{j-k}_{\beta,m} \quad . \end{aligned} $$

Dann gilt für alle beschränkten Gebiete Ω_b gleichmäßig bzgl. $\omega \in \mathbb{C}_{-,\hat{\omega}}\backslash\{0\}$ und $(F,G) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_s$

$$ \Big\| {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-1}(F,G) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-N-1} (-\mathrm{i}\omega)^{N+j} \cdot \Gamma_j(F,G) \Big\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_b)} = \mathcal{O}(|\omega|^{\mathbf{J}}) \cdot \big\|(F,G)\big\|_{\mathrm{L}^2_s} \quad . $$

Bemerkung 4.29
(4.6) liefert zwischen den Korrekturoperatoren die Beziehung

$$\Lambda^{-1}(M+\hat{\sigma})\Gamma_j(F,G) = \Gamma_{j-1}(F,G) \qquad \text{, wobei} \qquad \Gamma_{-1}(F,G) := (0,0) \qquad ,$$

und (4.5) impliziert

$$\Gamma_j(F,G) \in \operatorname{Lin}\left\{\Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\beta,m},0), \Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\beta,\tilde{m}}) : k+2\beta \leq j\right\} \qquad .$$

Folglich sind die Korrekturoperatoren

$$\Gamma_j \;:\; \mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s \longrightarrow \operatorname{Lin}\left\{\Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\beta,m},0), \Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\beta,\tilde{m}}) : k+2\beta \leq j\right\}$$

stetig und degeneriert.

Beweis:
Wir können o. B. d. A. $s \in (\mathbf{J}+1/2, \mathbf{J}+N/2)\backslash\mathbb{I}$ annehmen. Durch Einsetzen der Asymptotiken (4.2) in die Abschätzung aus Lemma 4.27 erhalten wir die neue Abschätzung

$$\begin{aligned}
||{}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}-1}(F,G) \quad &- \sum_{(k,\beta,m)\in\tilde{\Theta}^q_{\mathbf{J}-N-1}} \sum_{l=0}^{\mathbf{J}-N-k-1} (-\mathrm{i}\omega)^{N+k+l}\kappa_{k,\beta}\langle(F,G), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k-2\beta+1}\Lambda(E_{\beta,m},0)\rangle \cdot Y^l_{\beta,m} \\
&- \sum_{(k,\beta,m)\in\tilde{\Theta}^{q+1}_{\mathbf{J}-N-1}} \sum_{l=0}^{\mathbf{J}-N-k-1} (-\mathrm{i}\omega)^{N+k+l}\kappa_{k,\beta}\langle(F,G), \Lambda^{-1}{}_{-\sigma}\mathcal{L}^{k-2\beta+1}\Lambda(0,H_{\beta,m})\rangle \cdot X^l_{\beta,m}||_{\mathrm{L}^2(\Omega_b)} \\
&= \mathcal{O}(|\omega|^{\mathbf{J}}) \cdot \left\|(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} \qquad .
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des neuen Index $j := l+k$ und der Summationsreihenfolge j, k, β, m folgt die Behauptung des Satzes. Per Definition ist

$$\begin{aligned}
\Gamma_j(F,G) \quad &\in \quad \operatorname{Lin}\left\{X^{j-k}_{\beta,\tilde{m}}, Y^{j-l}_{\gamma,m} : (k,\beta,\tilde{m}) \in \tilde{\Theta}^{q+1}_j \wedge (l,\gamma,m) \in \tilde{\Theta}^q_j\right\} \\
&\subset \quad \operatorname{Lin}\left\{X^k_{\beta,\tilde{m}}, Y^k_{\beta,m} : k+2\beta \leq j\right\} \\
&\subset \quad \operatorname{Lin}\left\{\Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\beta,\tilde{m}}), \Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\beta,m},0) : k+2\beta \leq j\right\} \\
&+ \quad \operatorname{Lin}\left\{\Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^l\Lambda(E_{\gamma,n},0), \Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^l\Lambda(0,H_{\gamma,\tilde{n}}) : k+2\beta \leq j \wedge l+2\gamma \leq k-N\right\} \\
&\subset \quad \operatorname{Lin}\left\{\Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\beta,m},0), \Lambda^{-1}{}_\sigma\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\beta,\tilde{m}}) : k+2\beta \leq j\right\} \qquad .
\end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\Lambda^{-1}(M+\hat{\sigma})\Gamma_j(F,G) = \Gamma_{j-1}(F,G) \qquad \text{, wobei} \qquad \Gamma_{-1}(F,G) := (0,0) \qquad ,$$

ist wegen $(M+\hat{\sigma})_\sigma\mathcal{L}_0 = \mathrm{Id}$ direkt ersichtlich. ■

4.4 Niederfrequenzasymptotik in gewichteten Normen

Satz 4.30
Seien $\mathbf{J} \in \mathbb{N}$, $s \in (\mathbf{J}+1/2, \infty)\backslash\mathbb{I}$, sowie $t < \min\{s, N/2\} - \mathbf{J} - 2$. Dann gilt die bezüglich $\omega \in \mathbb{C}_{-,\hat{\omega}}\backslash\{0\}$ und $(F,G) \in \operatorname{Reg}^{q,0}_s$ gleichmäßige Abschätzung

$$\left\|{}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1}(-\mathrm{i}\omega)^j \cdot {}_\sigma\mathcal{L}_{0\sigma}\mathcal{L}^j(F,G) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-N-1}(-\mathrm{i}\omega)^{N+j} \cdot \Gamma_j(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad = \quad \mathcal{O}(|\omega|^{\mathbf{J}}) \cdot \left\|(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} \qquad .$$

Beweis:
Der Beweis verläuft komplett analog zum Beweis von Pauly [11, Satz 7.32]. Es seien $\omega \in \mathbb{C}_{-,\hat{\omega}}\backslash\{0\}$ und $(F,G) \in \operatorname{Reg}^{q,0}_s$, sowie $(E,H) := {}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$.

$$\eta(E,H) \in \mathbf{R}^q_{<-\frac{1}{2}} \times \mathbf{D}^{q+1}_{<-\frac{1}{2}}$$

erfüllt die Strahlungsbedingung und löst

$$(M+\mathrm{i}\omega)\eta(E,H) = (M+\mathrm{i}\omega\Lambda)\eta(E,H) = \eta(F,G) + C_{M,\eta}(E,H) = (\eta + C_{M,\eta\sigma}\mathcal{L}_\omega)(F,G) =: (f,g) \qquad .$$

Desweiteren ist

- $\operatorname{div}E|_{\operatorname{supp}(\eta)} \quad = \quad \operatorname{div}\varepsilon E|_{\operatorname{supp}(\eta)} \quad = \quad (\mathrm{i}\omega)^{-1}\operatorname{div}F|_{\operatorname{supp}(\eta)} \quad = \quad 0 \quad .$
- $\operatorname{rot}H|_{\operatorname{supp}(\eta)} \quad = \quad \operatorname{rot}\mu H|_{\operatorname{supp}(\eta)} \quad = \quad (\mathrm{i}\omega)^{-1}\operatorname{rot}G|_{\operatorname{supp}(\eta)} \quad = \quad 0 \quad .$

Daraus ergibt sich $(f,g) \in \mathrm{D}^q_s \times \mathrm{R}^{q+1}_s$ und

$$(\operatorname{div}f, \operatorname{rot}g) \quad = \quad \mathrm{i}\omega \cdot (\operatorname{div}\eta E, \operatorname{rot}\eta H) \quad = \quad \mathrm{i}\omega \cdot (C_{\operatorname{div},\eta}E, C_{\operatorname{rot},\eta}H) \quad =: \quad -\mathrm{i}\omega Z_\eta(E,H) \quad .$$

Mit den bei Pauly in [11, Lemma 5.6] auftretenden Operatoren Φ_j und Ψ_j für $j = 0,\ldots,\mathbf{J}-1$, sowie dem Maxwellschen Lösungsoperator L_ω für den nicht–dissipativen Ganzraumfall mit $\Lambda = \mathrm{Id}$ definieren wir die Operatoren

$$L_{\omega,\mathbf{J}-1}(f,g) := L_\omega(f,g) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1}(-\mathrm{i}\omega)^j\big(\Phi_j(f,g) + \frac{\mathrm{i}}{\omega}\Psi_j(\operatorname{div}f, \operatorname{rot}g)\big) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{S}_j := \Phi_j C_{M,\eta} + \Psi_j Z_\eta \quad .$$

Dadurch erhalten wir die Gleichung

$$\eta_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G) \quad = \quad L_{\omega,\mathbf{J}-1}(f,g) + \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1}(-\mathrm{i}\omega)^j\Phi_j\eta(F,G) + \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1}(-\mathrm{i}\omega)^j\mathcal{S}_{j\,\sigma}\mathcal{L}_\omega(F,G) \quad .$$

Erklären wir die Operatoren $\mathcal{K}_j$ durch

$$\sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1}(-\mathrm{i}\omega)^j \cdot \mathcal{K}_j \quad := \quad \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1}(-\mathrm{i}\omega)^j \cdot {}_\sigma\mathcal{L}_{0\sigma}\mathcal{L}^j + \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-N-1}(-\mathrm{i}\omega)^{N+j}\cdot\Gamma_j$$

und schließlich noch für $J \leq \mathbf{J}-1$

$${}_\sigma\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,J} \quad := \quad {}_\sigma\mathcal{L}_\omega - \sum_{j=0}^{J}(-\mathrm{i}\omega)^j\cdot\mathcal{K}_j \quad = \quad {}_\sigma\mathcal{L}_{\omega,J} - \sum_{j=0}^{J-N}(-\mathrm{i}\omega)^{N+j}\cdot\Gamma_j \qquad ,$$

so können wir die obige Gleichung umstellen zu

$$\begin{aligned} &\eta_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1}(-\mathrm{i}\omega)^j\Phi_j\eta(F,G) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1}\sum_{k=0}^{\mathbf{J}-1-j}(-\mathrm{i}\omega)^{j+k}\mathcal{S}_j\mathcal{K}_k(F,G) \\ = \quad &L_{\omega,\mathbf{J}-1}(f,g) + \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1}(-\mathrm{i}\omega)^j\mathcal{S}_{j\,\sigma}\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}-1-j}(F,G) \quad . \end{aligned}$$

Nach Pauly [11, Satz 7.32] gilt gleichmäßig bezüglich ω und (F,G)

$$\big\|L_{\omega,\mathbf{J}-1}(f,g)\big\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad = \quad \mathcal{O}(|\omega|^{\mathbf{J}})\cdot\big\|(F,G)\big\|_{\mathrm{L}^2_s} \quad .$$

Durch die Stetigkeit der Operatoren Φ_j und Ψ_j von L^2_s nach L^2_t und die Abschätzung aus Satz 4.28 erhalten wir ebenfalls gleichmäßig bezüglich ω und (F,G)

$$\big\|\mathcal{S}_{j\,\sigma}\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}-1-j}(F,G)\big\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad \leq \quad c\cdot\big\|{}_\sigma\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}-1-j}(F,G)\big\|_{\mathrm{L}^2(\operatorname{supp}(\nabla\eta))} \quad = \quad \mathcal{O}(|\omega|^{\mathbf{J}-j})\cdot\big\|(F,G)\big\|_{\mathrm{L}^2_s} \quad .$$

Folglich erhalten wir per Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\Big\|\eta_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1}(-\mathrm{i}\omega)^j\Big(\Phi_j\eta(F,G) + \sum_{k=0}^{j}\mathcal{S}_k\mathcal{K}_{j-k}(F,G)\Big)\Big\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad = \quad \mathcal{O}(|\omega|^{\mathbf{J}})\cdot\big\|(F,G)\big\|_{\mathrm{L}^2_s} \quad .$$

Satz 4.28 liefert für beschränkte Gebiete Ω_b die bezüglich ω und (F,G) gleichmäßige Abschätzung

$$\big\|\eta_\sigma\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}-1}(F,G)\big\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_b)} \quad = \quad \mathcal{O}(|\omega|^{\mathbf{J}})\cdot\big\|(F,G)\big\|_{\mathrm{L}^2_s} \qquad ,$$

woraus wir auf $\operatorname{Reg}^{q,0}_s$ die Gleichung

$$\eta\mathcal{K}_j \quad = \Phi_j\eta + \sum_{k=0}^{j}\mathcal{S}_k\mathcal{K}_{j-k} \quad \text{für} \quad j = 0,\ldots,\mathbf{J}-1$$

folgern können. Dies impliziert also

$$\big\|\eta_\sigma\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}-1}(F,G)\big\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad = \quad \mathcal{O}(|\omega|^{\mathbf{J}})\cdot\big\|(F,G)\big\|_{\mathrm{L}^2_s}$$

gleichmäßig bezüglich ω und (F,G). Da wir mit Satz 4.28 ebenfalls $\big\|(1-\eta)_\sigma\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}-1}(F,G)\big\|_{\mathrm{L}^2_t}$ in dieser Weise abschätzen können, ist die Behauptung bewiesen. ■

5 Das Wirbelstrom–Problem

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit einer Approximation für das dissipative Maxwell–Problem, nämlich mit einem Wirbelstrom–Problem. Dieses entsteht aus dem dissipativen Maxwell–Problem, indem man in der zweiten Maxwell–Gleichung den Verschiebungsstrom weglässt, welcher durch den Term $\mathrm{i}\omega\varepsilon E$ gegeben wird. Das Wirbelstrom–Modell, welches in der englischen Literatur auch unter dem Begriff „eddy currents problem“ zu finden ist, erhält seinen Namen dadurch, dass durch das Weglassen des oben genannten Terms der Strom F im Aussengebiet Ω_A komplett durch $\mathrm{div}H$ gegeben wird. Im klassischen Fall ist der Strom also eine Rotation, sprich ein Wirbel. Das Wirbelstrom–Problem ist kein reell auftretendes Problem, sondern soll für kleine Frequenzen als Approximation für das dissipative Maxwell–Problem herangezogen werden, da zum Beispiel der numerische Rechenaufwand zum Lösen des Wirbelstrom–Problems geringer ist als der für das dissipative Maxwell–Problem selbst. Damit wir aber wirklich von einer vernünftigen Approximation reden können, müssen wir die entsprechenden Niederfrequenzasymptotiken miteinander vergleichen.

Ammari, Buffa und Nédélec betrachten in [1] die Niederfrequenzasymptotik für das Wirbelstrom–Problem im klassischen Fall und vergleichen diese mit der für das dissipative Maxwell–Problem im klassischen Fall, wobei jedoch einige Fehler auftreten. Dabei setzen sie $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \mathrm{Id}$ und $\mu = \mu_0 \cdot \mathrm{Id}$ nahe bei Unendlich voraus, was wir abschwächen können. Unsere Zielsetzung ist es, diese Niederfrequenzasymptotiken im verallgemeinerten Fall mit q–Formen zu entwickeln und miteinander zu vergleichen. Da wir in den vorigen Kapiteln unsere Betrachtungen des dissipativen Maxwell–Problems abgeschlossen haben, steht nun noch die Betrachtung des Wirbelstrom–Problems aus.

In diesem Kapitel wollen wir dieselben Generalvoraussetzungen treffen wie in Kapitel 3:

(1) Die Raumdimension $N \geq 3$ sei <u>ungerade</u> und der Rang der Differentialformen sei $q \in \{0, \ldots, N\}$.

(2) $\Omega_I \subset \mathbb{R}^N$ sei ein Innengebiet der Klasse C^3. Dann ist $\Omega_A := \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}_I$ ein Außengebiet mit C^3–Rand.

(3) Der Radius r_0 sei so groß, dass $\Omega_I \subset U(r_0)$ und für alle q die Träger der Formen aus $\mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega_A)$ und $\mathrm{B}^q(\Omega_A)$ (letztere nur im Falle $q \neq 1$) in $U(r_0)$ liegen.

(4) Die Radien r_1, r_2 in der Definition (1.17) der Ausschneidefunktion η setzen wir durch die Formel $r_n := 2^n \cdot r_0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ fest.

(5) Die Transformationen $(\varepsilon, \mu) = \mathrm{Id} + (\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}) \in \mathrm{V}_\tau^{q,0} \times \mathrm{V}_\tau^{q+1,0}$ mit $\tau \geq 0$ seien einmal stetig differenzierbar mit

$$\partial_n \hat{\varepsilon}, \partial_n \hat{\mu} = \mathcal{O}(r^{-1-\tau}) \quad \text{für} \quad r \to \infty \quad \text{und} \quad n = 1, \ldots, N \qquad .$$

Die Abklingrate τ von $(\hat{\varepsilon}, \hat{\mu})$ wird dabei später noch näher spezifiziert.

(6) Die Transformation σ erfülle $\sigma \in \mathrm{V}_0^{q,0}(\Omega_I)$ und $\mathrm{supp}(\sigma) \cap \Omega_A = \emptyset$.

5.1 Der Lösungsbegriff

Zunächst müssen wir wieder einmal definieren, was wir unter der Lösung des Wirbelstrom–Problems verstehen. Es ist klar, dass wir nicht einfach dieselbe Definition benutzen können, wie für das dissipative Maxwell–Problem, bei dem wir einfach einen Term weglassen, denn durch das Weglassen dieses Terms verlieren wir weitere implizite Bedingungen, die somit zusätzlich gefordert werden müssen. Weiterhin werden wir sehen, dass wir die Lösungstheorie für reelle Frequenzen gar nicht durch Grenzabsorption durchführen müssen, sondern durch die Struktur des Wirbelstrom–Problems direkt angehen können.

Definition 5.1
Seien $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $(F, G) \in \mathrm{L}^{2,q} \times \mathrm{L}^{2,q+1}$. Dann löst (E, H) das Wirbelstrom–Problem $\mathrm{EC}(\sigma, \Lambda, \omega, F, G)$, falls

(i) $\quad (E, H) \in \mathrm{R}_{-1}^q \times \mathrm{D}_{-1}^{q+1} \qquad ,$

(ii) $\quad \mathrm{rot}E + \mathrm{i}\omega\mu H = G \quad$ *und* $\quad \mathrm{div}H + \sigma E = F \qquad ,$

(iii) $\quad \mathrm{div}\varepsilon E_A = 0 \quad$ *und* $\quad \langle \varepsilon E_A, \mathring{b}_l^q \rangle_{\Omega_A} = 0 \quad$ *für* $\quad l = 1, \ldots, d_A^q \qquad .$

Hierbei sei $\{\mathring{b}_l^q : l = 1, \ldots, d_A^q\} = \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega_A)$.

Bemerkung 5.2
Die zweite Gleichung in Definition 5.1 (ii) impliziert $\mathrm{div}H_A = F_A$, *sodass wir das Problem* $\mathrm{EC}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G)$ *sowieso nur für* $F \in \tilde{\mathcal{F}}^q$ *lösen können. Die Bedingung (iii) ist notwendig, um sowohl die Eindeutigkeit des Lösungsbegriffs zu garantieren, als auch, um die Lösung analog zu der des dissipativen Maxwell–Problems zu halten, denn für* $F \in \tilde{\mathcal{F}}^q$ *erfüllt die Lösung von* $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G)$ *die Bedingung (iii).*

5.2 Lösungstheorie

Wie bereits gesagt, können wir die Lösungstheorie direkt für reelle Frequenzen aufstellen. Wir folgen bei der Lösungstheorie der Idee von Ammari, Buffa und Nédélec in [1], wobei wir jedoch gewichtete Räume benutzen, was auch notwendig ist, wie wir später noch genauer erläutern werden. Die Lösungstheorie wird analog zum dissipativen Maxwell–Problem mit Hilfe der variationellen Formulierung und dem Satz von Lax–Milgram erreicht.

Satz 5.3
Seien $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *und* $(F,G) \in \left(\mathrm{L}^{2,q}_1 \cap \tilde{\mathcal{F}}^q\right) \times \mathrm{L}^{2,q+1}$. *Dann ist das Problem* $\mathrm{EC}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G)$ *eindeutig lösbar und der Lösungsoperator*

$$\begin{array}{rcccl} {}^{e}_{\sigma}\mathcal{L}_\omega & : & \left(\mathrm{L}^{2,q}_1 \cap \tilde{\mathcal{F}}^q\right) \times \mathrm{L}^{2,q+1} & \longrightarrow & \mathrm{R}^q_{-1} \times \mathrm{D}^{q+1} \\ & & (F,G) & \longmapsto & (E,H) \quad \textit{Lösung zu } \mathrm{EC}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G) \end{array}$$

ist stetig.

Beweis:
Um unser Problem variationell zu formulieren, betrachten wir folgende Äquivalenzen:

$$\begin{array}{ll} & (E,H) \text{ löst } \mathrm{EC}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G) \\ \Leftrightarrow & E \in \mathrm{R}^q_{-1} \quad , \quad \mathrm{div}\varepsilon E_A = 0 \quad , \quad \langle \varepsilon E_A, \mathring{b}^q_l \rangle_{\Omega_A} = 0 \quad \text{für} \quad l = 1,\dots,d^q_A \quad , \quad H = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mu^{-1}(G - \mathrm{rot}E) \quad \text{und} \\ \bigwedge_{\Phi \in \mathrm{R}^q_{-1}} & \frac{1}{\mathrm{i}\omega} \cdot \langle \mu^{-1}(G-\mathrm{rot}E), \mathrm{rot}\Phi \rangle = \langle \sigma E - F, \Phi \rangle \\ \Leftrightarrow & E \in \mathrm{R}^q_{-1} \quad , \quad \mathrm{div}\varepsilon E_A = 0 \quad , \quad \langle \varepsilon E_A, \mathring{b}^q_l \rangle_{\Omega_A} = 0 \quad \text{für} \quad l = 1,\dots,d^q_A \quad , \quad H = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mu^{-1}(G - \mathrm{rot}E) \quad \text{und} \\ \bigwedge_{\Phi \in \mathrm{R}^q_{-1}} & \langle \mu^{-1}\mathrm{rot}E, \mathrm{rot}\Phi \rangle + \mathrm{i}\omega\langle \sigma E, \Phi \rangle = \mathrm{i}\omega\langle F, \Phi \rangle + \langle \mu^{-1}G, \mathrm{rot}\Phi \rangle \qquad . \end{array}$$

Wir setzen nun

$$V := \mathrm{R}^q_{-1} \cap \left\{ \Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_{-1} : \Phi_A \in \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega_A) \cap \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega_A)^{\perp_\varepsilon} \right\} \quad , \quad \left\|\Phi\right\|^2_V := \left\|\Phi\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}(\Omega_I)} + \left\|\mathrm{rot}\Phi\right\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}} \quad ,$$

sowie die Sesquilinearform und das antilineare Funktional

$$\begin{array}{rcccl} b & : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & (\Psi,\Phi) & \longmapsto & \langle \mu^{-1}\mathrm{rot}\Psi, \mathrm{rot}\Phi \rangle + \mathrm{i}\omega\langle \sigma\Psi, \Phi \rangle \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} f & : & V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & \Phi & \longmapsto & \mathrm{i}\omega\langle F, \Phi \rangle + \langle \mu^{-1}G, \mathrm{rot}\Phi \rangle \end{array}$$

Nun wollen wir zeigen, dass es sich bei $(V, \left\|\cdot\right\|_V)$ um einen Hilbertraum handelt, sowie bei b um eine stetige, streng koerzitive Sesquilinearform auf V und bei f um ein stetiges, antilineares Funktional auf V.

Da V ein abgeschlossener Unterraum von R^q_{-1} bezüglich der natürlichen Metrik ist, müssen wir nur zeigen, dass wir die $\left\|\cdot\right\|_{\mathrm{R}^q_{-1}}$–Norm nach oben durch ein Vielfaches der $\left\|\cdot\right\|_V$–Norm abschätzen können. Die Abschätzung der $\left\|\cdot\right\|_V$–Norm nach oben durch die $\left\|\cdot\right\|_{\mathrm{R}^q_{-1}}$–Norm ist trivial.
Dazu betrachten wir den Operator

$$\begin{array}{rcccl} Z & : & \mathbf{R}^q(\Omega_I) & \longrightarrow & \mathrm{R}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega_A) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega_A) \cap \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega_A)^{\perp_\varepsilon} \\ & & \varphi & \longmapsto & \check{\Gamma}_t\gamma_t\varphi \end{array}$$

Nach den Sätzen 3.1 und 3.7 ist dieser Operator stetig. Mit Hilfe dieses Operators erhalten wir für $\Phi \in V$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{\mathrm{R}^q_{-1}} &\leq c \cdot \Big(\|\Phi\|_V + \|\Phi_A - Z\Phi_I\|_{\mathrm{L}^{2,q}_{-1}(\Omega_A)} + \|Z\Phi_I\|_{\mathrm{L}^{2,q}_{-1}(\Omega_A)} \Big) \\ &\leq c \cdot \Big(\|\Phi\|_V + \|\mathrm{rot}(\Phi_A - Z\Phi_I)\|_{\mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega_A)} + \|\Phi_I\|_{\mathbf{R}^q(\Omega_I)} \Big) \\ &\leq c \cdot \|\Phi\|_V \quad , \end{aligned}$$

wobei die Konstante c sich von Schritt zu Schritt vergrössern kann. Hierbei haben wir benutzt, dass nach Konstruktion

$$\Phi_A - Z\Phi_I \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{-1}(\Omega_A) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega_A) \cap \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega_A)^{\perp_\varepsilon} \quad \text{und somit} \quad \|\Phi_A - Z\Phi_I\|_{\mathrm{L}^{2,q}_{-1}(\Omega_A)} \leq c \cdot \|\mathrm{rot}(\Phi_A - Z\Phi_I)\|_{\mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega_A)} \quad .$$

Der Beweis dazu wurde von Picard in [16, Lemma 8] geliefert. Damit sind die Normen $\|\cdot\|_{\mathrm{R}^q_{-1}}$ und $\|\cdot\|_V$ auf V äquivalent, also ist $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Hilbertraum.

Die strenge Koerzitivität von b folgt aus der Beschränktheit von μ^{-1} und aus $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$|b(\Phi,\Phi)| \quad = \quad |\langle \mu^{-1}\mathrm{rot}\Phi, \mathrm{rot}\Phi \rangle + \mathrm{i}\omega\langle \sigma\Phi, \Phi\rangle| \quad \geq \quad \gamma_1 \cdot \|\mathrm{rot}\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q+1}} + \gamma_2 \cdot \|\Phi\|^2_{\mathrm{L}^{2,q}(\Omega_I)} \quad \geq \quad \gamma \cdot \|\Phi\|^2_V \quad .$$

mit von μ abhängiger Konstante γ_1 und von ω und σ abhängiger Konstante γ_2. Die Stetigkeit von b ist direkt ersichtlich aus

$$\begin{aligned} b(\Psi,\Phi) \quad = \quad \langle \mu^{-1}\mathrm{rot}\Psi, \mathrm{rot}\Phi\rangle + \mathrm{i}\omega\langle\sigma\Psi,\Phi\rangle \quad &\leq \quad c_1 \cdot \|\mathrm{rot}\Psi\|_{\mathrm{L}^{2,q+1}} \cdot \|\mathrm{rot}\Phi\|_{\mathrm{L}^{2,q+1}} + c_2 \cdot \|\Psi\|_{\mathrm{L}^{2,q}(\Omega_I)} \cdot \|\Phi\|_{\mathrm{L}^{2,q}(\Omega_I)} \\ &\leq \quad c \cdot \|\Psi\|_V \cdot \|\Phi\|_V \quad . \end{aligned}$$

mit von μ abhängiger Konstante c_1 und von ω und σ abhängiger Konstante c_2. Ganz analog erhält man mit

$$\begin{aligned} |f(\Phi)| \quad = \quad \left|\mathrm{i}\omega\langle F,\Phi\rangle + \langle\mu^{-1}G, \mathrm{rot}\Phi\rangle\right| \quad &\leq \quad |\omega| \cdot \|F\|_{\mathrm{L}^{2,q}_1} \cdot \|\Phi\|_{\mathrm{L}^{2,q}_{-1}} + \|\mu^{-1}G\|_{\mathrm{L}^{2,q+1}} \cdot \|\mathrm{rot}\Phi\|_{\mathrm{L}^{2,q+1}} \\ &\leq \quad d \cdot \|\Phi\|_V \end{aligned}$$

die Stetigkeit von f.

Nach dem Satz von Lax–Milgram gibt es also genau ein $E \in V$, sodass für alle $\Phi \in V$ gilt

$$\langle \mu^{-1}\mathrm{rot}E, \mathrm{rot}\Phi\rangle + \mathrm{i}\omega\langle\sigma E,\Phi\rangle \quad = \quad \mathrm{i}\omega\langle F,\Phi\rangle + \langle\mu^{-1}G,\mathrm{rot}\Phi\rangle \quad .$$

Wir werden nun zeigen, dass diese Gleichung auch für alle $\Phi \in \mathrm{R}^q_{-1}$ gilt. Ist nämlich $\Phi \in \mathrm{R}^q_{-1}$, so können wir Φ_A aufspalten in der Form

$$\Phi_A = \Psi_A + \chi_A \quad \text{mit} \quad \Psi_A \in \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega_A) \cap \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega_A)^{\perp_\varepsilon} \quad \text{und} \quad \chi_A \in {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{-1}(\Omega_A) \quad .$$

Indem wir χ_A nach Ω_I hinein durch Null fortsetzen, erhalten wir ein Element $\chi \in {}_0\mathrm{R}^q_{-1}$, welches nach Weck und Witsch [23, The. 5] selbst eine Rotation ist, und somit die Zerlegung

$$\Phi = \Psi + \chi \quad \text{mit} \quad \Psi \in V \quad \text{und} \quad \chi \in {}_0\mathrm{R}^q_{-1} \quad , \quad \chi|_{\Omega_I} = 0 \quad .$$

Dass die obige Gleichung für $\Phi = \Psi \in V$ gilt, haben wir ja schon gesehen. Sie gilt aber auch für $\Phi = \chi \in {}_0\mathrm{R}^q_{-1}$ mit $\chi|_{\Omega_I} = 0$: Die beiden Skalarprodukte mit rotχ verschwinden, ebenso verschwindet das Skalarprodukt, welches sich über Ω_I erstreckt. Schliesslich verschwindet auch das Skalarprodukt $\langle F,\chi\rangle$, denn der Anteil über Ω_I verschwindet, und weiterhin ist $\chi_A \in {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{-1}(\Omega_A)$, sowie F nach Voraussetzung auf Ω_A eine Divergenz. Folglich gilt die obige Gleichung für alle $\Phi \in \mathrm{R}^q_{-1}$.

Damit haben wir schließlich nach unserer obigen Äquivalenzumformung das eindeutige (E, H) gefunden, welches das Wirbelstrom–Problem $\mathrm{EC}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G)$ löst.

Als Letztes wollen wir die Stetigkeit des Lösungsoperators ${}^{e}_{\sigma}\mathcal{L}_\omega$ nachprüfen. Die Konstante c setzt sich dabei aus den bisher aufgetretenen Konstanten zusammen und kann sich wie immer von Schritt zu Schritt ändern. Es ist

$$\begin{aligned} \|E\|^2_{\mathrm{R}^q_{-1}} \quad &\leq \quad c \cdot \|E\|^2_V \quad \leq \quad c \cdot |b(E,E)| \quad = \quad c \cdot |f(E)| \quad = \quad c \cdot \left|\mathrm{i}\omega\langle F,E\rangle + \langle\mu^{-1}G,\mathrm{rot}E\rangle\right| \\ &\leq \quad c \cdot \|(F,G)\|_{\mathrm{L}^{2,q}_1 \times \mathrm{L}^{2,q+1}} \cdot \|E\|_{\mathrm{R}^q_{-1}} \quad . \end{aligned}$$

Division durch $\|E\|_{\mathrm{R}^q_{-1}}$ liefert die Abschätzung für $\|E\|_{\mathrm{R}^q_{-1}}$. Die Abschätzung für $\|H\|_{\mathrm{D}^{q+1}}$ erhalten wir durch die Gleichungen für H und div$H$ und die Abschätzung für $\|E\|_{\mathrm{R}^q_{-1}}$. Damit ist die Stetigkeit des Lösungsoperators bewiesen. ■

Bemerkung 5.4
Wie schon erwähnt, folgen wir beim Beweis des Satzes 5.3 der Arbeit [1] von Ammari, Buffa *und* Nédélec, *wobei diese auf die gewichteten* L^2 *– Räume verzichten und den Raum* V *definieren als*

$$V := \mathrm{R}^q \cap \left\{ \Phi \in \mathrm{L}^{2,q} : \Phi_A \in \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q(\Omega_A) \cap {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega_A)^\perp \right\} \quad , \quad \|\Phi\|_V^2 := \|\Phi\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_I)} + \|\mathrm{rot}\Phi\|^2_{\mathrm{L}^2} \quad .$$

Es ist jedoch leicht nachzuweisen, dass dieser Raum kein Hilbertraum ist, da es einem nicht möglich ist, die $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2}$*–Norm nach oben durch ein Vielfaches der* $\|\cdot\|_V$*–Norm abzuschätzen. Somit kann die Vollständigkeit des Raums nicht gefolgert werden, welche auch nicht gegeben sein muss, wie das folgende Beispiel demonstrieren soll.*

Wir betrachten den Fall $\Omega_I := U(1)$ und $\varepsilon := \mathrm{Id}$. Dann ist $\Omega_A = A(1)$. Auf 1–Formen entsprechen die Operatoren rot und div der klassischen Rotation und Divergenz, welche wir in den folgenden Rechnungen benutzen. Mit einer Ausschneidefunktion

$$\varphi \in \mathrm{C}^\infty \quad , \quad \varphi|_{U(1/2)} = 0 \quad , \quad \varphi|_{A(3/4)} = 1$$

definieren wir

$$E := \mathrm{rot}\varphi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ln|x| \end{bmatrix} = \varphi|x|^{-2} \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \nabla\varphi \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ln|x| \end{bmatrix} \in \mathrm{L}^2_{-1}(\mathbb{R}^3) \backslash \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3) \quad .$$

Es gilt

$$\mathrm{rot}E \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3) \quad , \quad \mathrm{div}E = 0 \quad , \quad E_A \perp \mathcal{H}(A(1)) \quad .$$

Sei nun $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ eine Abschneidefunktion mit

$$0 \le \chi \le 1 \quad , \quad \chi|_{[0,1]} = 1 \quad , \quad \chi|_{[2,\infty)} = 0 \quad .$$

Damit setzen wir

$$E_n := \chi_n \cdot E \quad , \text{wobei} \quad \chi_n(x) := \chi\left(\frac{|x|}{n}\right) \quad .$$

Dann ist $E_n \in V$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}E_n &= \nabla\chi_n \times E + \chi_n \cdot \mathrm{rot}E \xrightarrow{n\to\infty} 0 + \mathrm{rot}E = \mathrm{rot}E \quad , \\ \mathrm{div}E_n &= \nabla\chi_n \cdot E + \chi_n \cdot \underbrace{\mathrm{div}E}_{=0} = \frac{1}{n}\chi'\left(\frac{|x|}{n}\right) \cdot \nabla|x| \cdot E = 0 \quad \text{auf } A(1) \quad , \\ E_n|_{A(1)} &\perp \mathcal{H}(A(1)) \quad . \end{aligned}$$

Folglich ist $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in V, deren Grenzwert E aber nicht in V liegt. Somit kann V nicht vollständig sein.

5.3 Niederfrequenzasymptotik

Da die statische Lösungstheorie für das Wirbelstrom–Problem nicht anders aussieht als die des statischen dissipativen Maxwell–Problems, können wir direkt zur Niederfrequenzasymptotik des Wirbelstrom–Problems übergehen. Dabei ist interessant zu beobachten, dass das Weglassen des Terms $\mathrm{i}\omega\varepsilon E$ die Sache stark vereinfacht: wie wir im Abschnitt 3.3 im Beweis des Satzes 3.32 bemerken können, ist für Daten $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_1 \times \mathrm{L}^{2,q+1}$ die Lösung des statischen dissipativen Maxwell-Problems $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,0,0,F,G,0,0)$ ein Element von $\mathrm{L}^{2,q}_{-1} \times \mathrm{L}^{2,q+1}$. Die Turmformen tauchen bei diesen Gewichten nicht explizit auf, und da wir beim Iterieren anstelle von $(\varepsilon E, \mu H)$ die Daten $(0, \mu H)$ einsetzen müssen, wie wir noch sehen werden, haben Iterationen des statischen Lösungsoperators keine Verschlechterung der Integrabilität der Lösungen zur Folge. Dies bewirkt, dass wir eine echte Potenzreihe als Lösung für unser Problem erhalten, anstatt nur bis zu einer gewissen Ordnung entwickeln zu können, die von der Integrabilität der Daten (F,G) abhängt.

Satz 5.5
Sei $\tau \geq N/2-1$. Dann gibt es ein $\hat{\omega} > 0$, sodass für alle $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|\omega| \leq \hat{\omega}$ und alle Daten

$$(F,G) \in \left(\mathrm{L}^{2,q}_1 \cap \tilde{\mathcal{F}}^q\right) \times {}_0\mathrm{R}^{q+1}$$

die Lösung des Problems $\mathrm{EC}(\sigma,\Lambda,\omega,F,G)$ durch die Potenzreihe

$${}^{e}_{\sigma}\mathcal{L}_\omega(F,G) = \sum_{j=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\omega)^j {}_\sigma\mathcal{L}_0 (P_\sigma\mathcal{L})^j (F,G)$$

gegeben wird, wobei P die Projektion auf die zweite Komponente $P(\Phi,\Psi) := (0,\Psi)$ darstellt.

Beweis:
Setzen wir $(E,H) := {}^{e}_{\sigma}\mathcal{L}_\omega(F,G)$, so folgt direkt, dass (E,H) die nach Satz 3.32 eindeutige Lösung des statischen dissipativen Maxwell–Problems $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,0,0,F,G-\mathrm{i}\omega\mu H,0,0)$ sein muss, mit anderen Worten

$$(E,H) \;=\; {}_\sigma\mathcal{L}_0(F, G-\mathrm{i}\omega\mu H) \;=\; {}_\sigma\mathcal{L}_0(F,G) - \mathrm{i}\omega {}_\sigma\mathcal{L}_0(0,\mu H) \;=\; {}_\sigma\mathcal{L}_0(F,G) - \mathrm{i}\omega {}_\sigma\mathcal{L}_0 P\Lambda(E,H) \;=:\; K(E,H) \quad .$$

Die Umkehrung gilt aber auch: Verfolgen wir den Beweis des Satzes 3.32 mit $s=0$, so sehen wir, dass die Turmformenanteile bei (E,H) nicht explizit auftreten, da nach Bemerkung 3.21 $\mathcal{R}^{q+1}_s = \{0\}$, $\mathcal{D}^q_s = \{0\}$ und $\mathcal{A}^q_{s-1} = \{0\}$ für $s < N/2$ gelten.
Wir sehen weiterhin, dass die Integrierbarkeit von H im Beweis zu Satz 3.32 einzig von der Integrierbarkeit von F abhängt, da $g=0$ ist. Wegen $F \in \mathrm{L}^{2,q}_1$ folgt dann $H \in \mathrm{D}^{q+1} \cap \mu^{-1}{}_0\mathrm{R}^{q+1}$. Die Abbildung

$$\begin{array}{cccccc} K & : & \mathrm{R}^q_{-1} \times \mathrm{D}^{q+1} & \longrightarrow & \mathrm{R}^q_{-1} \times \mathrm{D}^{q+1} \\ & & (\Phi,\Psi) & \longmapsto & {}_\sigma\mathcal{L}_0(F,G) - \mathrm{i}\omega {}_\sigma\mathcal{L}_0 P\Lambda(\Phi,\Psi) \end{array}$$

ist stetig, da die Operatoren ${}_\sigma\mathcal{L}_0$, P und Λ auf den entsprechenden Räumen stetig sind. Für $|\omega| \leq \hat{\omega}$ mit hinreichend kleinem $\hat{\omega} > 0$ ist K eine Kontraktion, sodass nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau ein Fixpunkt existiert. Dieser muss nach unser obigen Argumentation aber gerade ${}^{e}_{\sigma}\mathcal{L}_\omega(F,G)$ sein. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gilt

$${}^{e}_{\sigma}\mathcal{L}_\omega(F,G) \;=\; \lim_{n\to\infty} K^n {}_\sigma\mathcal{L}_0(F,G) \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} (-\mathrm{i}\omega)^j {}_\sigma\mathcal{L}_0(P_\sigma\mathcal{L})^j(F,G) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\omega)^j {}_\sigma\mathcal{L}_0(P_\sigma\mathcal{L})^j(F,G) \quad .$$

■

Korollar 5.6
Seien $\tau \geq N/2-1$, $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Nullfolge und

$$(F,G) \in \left(\mathrm{L}^{2,q}_1 \cap \tilde{\mathcal{F}}^q\right) \times {}_0\mathrm{R}^{q+1} \quad .$$

Dann konvergiert $(E_n,H_n) := {}^{e}_{\sigma}\mathcal{L}_{\omega_n}(F,G)$ in $\mathrm{R}^q_{-1} \times \mathrm{D}^{q+1}$ für $n \to \infty$ gegen die nach Satz 3.32 eindeutige Lösung des Problems $\mathrm{Max}(\sigma,\Lambda,0,0,F,G,0,0)$.

5.4 Approximationsgüte der Wirbelstrom–Lösung

Da wir nun die Niederfrequenzasymptotik sowohl des dissipativen Maxwell–Problems, als auch des Wirbelstrom–Problems kennen, können wir diese miteinander vergleichen, um zu bestimmen, wie gut das Wirbelstrom–Modell das Maxwell–Problem wirklich approximiert. Wir werden sehen, dass wir hierbei genauere Ergebnisse erlangen als AMMARI, BUFFA und NÉDÉLEC in [1]. Unsere Ergebnisse fassen wir zusammen in dem folgenden

Satz 5.7
Seien $\tau > (N+1)/2$ und $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(i) *Für $(F,G) \in \mathrm{Reg}_1^{q,0}$ ist ${}^e_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ eine Approximation von ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ in $\mathrm{L}^{2,q}_{<\frac{1-N}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{<\frac{1-N}{2}}$ für $\omega \to 0$, d.h.*

$$\left\|{}^e_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G) - {}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_t} \xrightarrow{\omega\to 0} 0 \qquad \text{für alle} \qquad t < \frac{1-N}{2} \qquad .$$

Ist sogar $(F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,1}$ mit $s \in (3/2, 1+N/2)\backslash\mathbb{I}$, so können wir diese Aussage dahingehend verschärfen, dass ${}^e_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ eine Approximation bis auf Terme erster Ordnung von ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ in $\mathrm{L}^{2,q}_{s-\frac{N+3}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{s-\frac{N+3}{2}}$ für $\omega \to 0$ ist, d.h.

$$\left\|{}^e_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G) - {}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad = \quad \mathcal{O}(|\omega|) \cdot \left\|(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} \qquad \text{für} \qquad t = s - \frac{N+3}{2} \qquad .$$

(ii) *Für $s \in (5/2, 2+N/2)\backslash\mathbb{I}$ und $(F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,2}$ ist ${}^e_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ genau dann eine Approximation bis auf Terme zweiter Ordnung von ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ in $\mathrm{L}^{2,q}_{s-\frac{N+5}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{s-\frac{N+5}{2}}$ für $\omega \to 0$, d.h.*

$$\left\|{}^e_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G) - {}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_t} \quad = \quad \mathcal{O}(|\omega|^2) \cdot \left\|(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} \qquad \text{für} \qquad t = s - \frac{N+5}{2} \qquad ,$$

wenn $F \in {}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}$ und $G = 0$ gelten.

(iii) *Für $(F,G) \neq (0,0)$ kann ${}^e_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ niemals eine bessere Approximation als bis auf Terme zweiter Ordnung von ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ für $\omega \to 0$ sein, egal in welchem gewichteten $\mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s$.*

Beweis:
Zu (i): Sei $(F,G) \in \mathrm{Reg}_1^{q,0}$. Nach Satz 4.5 (ii) mit $s = 1$ konvergiert ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ für $\omega \to 0$ in $\mathrm{L}^{2,q}_t \times \mathrm{L}^{2,q+1}_t$ für alle $t < s - \frac{N+1}{2} = \frac{1-N}{2}$ gegen ${}_\sigma\mathcal{L}_0(F,G)$. Wegen $\mathrm{Reg}_1^{q,0} \subset \left(\mathrm{L}^{2,q}_1 \cap \tilde{\mathcal{F}}^q\right) \times {}_0\mathrm{R}^{q+1}$, konvergiert ${}^e_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ nach Korollar 5.6 für $\omega \to 0$ in $\mathrm{L}^{2,q}_{-1} \times \mathrm{L}^{2,q+1}$ gegen ${}_\sigma\mathcal{L}_0(F,G)$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir unsere Aussage. Im Falle $s \in (3/2, 1+N/2)\backslash\mathbb{I}$ und $(F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,1}$ liefern Satz 4.9 mit $\mathbf{J} = 1$ und Satz 5.5 die gewünschte Aussage. □

Zu (ii): Seien $s \in (5/2, 2+N/2)\backslash\mathbb{I}$ und $(F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,2}$. Satz 4.9 mit $\mathbf{J} = 2$ und Satz 5.5 liefern die Asymptotiken von ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ und ${}^e_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ für $\omega \to 0$, und wir erkennen an den Potenzreihendarstellungen für $t = s - (N+5)/2$:

$$\left\|{}^e_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G) - {}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_t} = \mathcal{O}(|\omega|^2) \cdot \left\|(F,G)\right\|_{\mathrm{L}^2_s} \qquad \Longleftrightarrow \qquad {}_\sigma\mathcal{L}_0\Lambda_\sigma\mathcal{L}_0(F,G) = {}_\sigma\mathcal{L}_0P\Lambda_\sigma\mathcal{L}_0(F,G) \qquad .$$

Bezeichnen wir mit $(E_0, H_0) := {}_\sigma\mathcal{L}_0(F,G)$, so sehen wir, dass dies genau dann erfüllt ist, wenn $E_0 = 0$ ist. Da (E_0, H_0) aber die Lösung zu $\mathrm{Max}(\sigma, \Lambda, 0, 0, F, G, 0, 0)$ ist, liefert ein Blick auf die Konstruktion von E_0 im Beweis des Satzes 3.32, dass dies genau dann erfüllt ist, wenn $G = 0$ und $F \in {}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}$ gelten. □

Zu (iii): Analog zu (ii) sehen wir, dass die Potenzreihenentwicklungen für ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ und ${}^e_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G)$ genau dann bis zur zweiten Ordnung übereinstimmen, wenn zusätzlich zur Bedingung aus (ii) auch noch

$${}_\sigma\mathcal{L}_0\Lambda_\sigma\mathcal{L}_0\Lambda_\sigma\mathcal{L}_0(F,G) = {}_\sigma\mathcal{L}_0P\Lambda_\sigma\mathcal{L}_0P\Lambda_\sigma\mathcal{L}_0(F,G)$$

gilt. Setzen wir $(E_0, H_0) := {}_\sigma\mathcal{L}_0(F,G)$ und $(E_1, H_1) := {}_\sigma\mathcal{L}_0\Lambda_\sigma\mathcal{L}_0(F,G)$, so sehen wir analog zu (ii), dass dies genau dann erfüllt ist, wenn $E_1 = 0$ ist, was äquivalent zu $\varepsilon E_0 \in {}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}$ und $\mu H_0 = 0$ ist. Also ist die Bedingung $(E_0, H_0) = (0,0)$ notwendig für die Übereinstimmung der Potenzreihenentwicklungen bis einschließlich zur zweiten Ordnung. Dies ist aber nur für $(F,G) = (0,0)$ erfüllt, und in diesem Fall gilt sowieso ${}_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G) = {}^e_\sigma\mathcal{L}_\omega(F,G) = (0,0)$. ■

Bemerkung 5.8
Die Bedingung $F \in {}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}$ *für die Approximation in erster Ordnung ist die einfachstmögliche Form, die Bedingung auszudrücken.* Ammari, Buffa *und* Nédélec *stellen in [1] die um einiges komplizierteren Bedingungen*

- $\operatorname{div} F|_{\Omega_I} = 0 \quad , \quad \operatorname{div} F|_{\Omega_A} = 0 \quad ,$
- $\int_{\Gamma_i} F \cdot \mathbf{n} = 0$ *für alle* $i = 1, \ldots, p \quad ,$
- $\int_\Gamma \Delta_\Gamma^{-1}(F_A \cdot \mathbf{n})\Delta_\Gamma q_j - \int_{\Omega_I} F \cdot \nabla q_j = 0$ *für alle* $j = 1, \ldots, \hat{q} \quad .$

Hierbei sind $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ *die Zusammenhangskomponenten des Randes* $\Gamma := \partial\Omega_I$, $\mathbf{n}$ *der Normaleneinheitsvektor,* Δ_Γ *der Laplace–Operator auf dem Rand, sowie* $\{\nabla q_1, \ldots, \nabla q_{\hat{q}}\}$ *eine Basis der Neumannfelder*
${}_0\mathrm{R}^1(\Omega_I) \cap \sigma^{-1}{}_0\mathring{\mathbf{D}}^1(\Omega_I)$.

Bemerkung 5.9
Unter den stärkeren Voraussetzungen

- $q \in \{1, \ldots, N-2\} \quad ,$
- $\operatorname{supp}(\hat{\varepsilon}) \cup \operatorname{supp}(\hat{\mu}) \Subset \mathbb{R}^N$

können wir Satz 4.30 benutzen, um in Satz 5.7 die Voraussetzung $(F,G) \in \mathrm{Reg}^{q,1}_s$ *bzw.* $(F,G) \in \mathrm{Reg}^{q,2}_s$ *auf* $(F,G) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_s$ *abzuschwächen. Da die Korrekturoperatoren* Γ_j *die Asymptotik erst ab der Ordnung* N *verändern und* $N \geq 3$ *gilt, ändert dies nichts an der Approximationsgüte der Wirbelstrom–Lösung in diesem Fall.*

Literatur

[1] Ammari, H., Buffa, A., Nédélec, J.-C., „A Justification of Eddy Currents Model for the Maxwell Equations“, *SIAM Journal Appl. Math.*, 60 (5), (2000), 1805–1823.

[2] Bachman, G., Narici, L., *Functional analysis*, Academic Press, New York, (1966).

[3] Bauer, S., „Eine Helmholtzzerlegung gewichteter L^2–Räume von q–Formen in Außengebieten des $\mathbb{R}^N$“, *Diplomarbeit*, Essen, (2000).

[4] Bauer, S., „Eindeutigkeitssätze zu Außenraumproblemen für Maxwell–, Lamé– und verallgemeinerte Helmholtz–Systeme mit räumlich unbegrenzten Störungen — ein einheitlicher Zugang“, *Dissertation*, Essen, (2003).

[5] Bishop, R. L., Goldberg, S. I., *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover Publications, New York, (1968).

[6] Jänich, K., *Vektoranalysis*, Springer, Heidelberg, (1993).

[7] Kuhn, P., „Niederfrequenzasymptotik für ein dissipatives Ganzraumproblem zu den Maxwell–Gleichungen“, *Diplomarbeit*, Essen, (1994).

[8] Kuhn, P., „Die Maxwellgleichung mit wechselnden Randbedingungen“, *Dissertation*, Essen, (1999).

[9] Kuhn, P., Pauly, D., „Regularity results, trace theorems and static solution theory for the Generalized Maxwell's Equations“, (wird noch erscheinen).

[10] Leis, R., *Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics*, Teubner, Stuttgart, (1986).

[11] Pauly, D., „Niederfrequenzasymptotik der Maxwell–Gleichung im inhomogenen und anisotropen Außengebiet“, *Dissertation*, Essen, (2003).

[12] Peter, B., „Die Lösungen der Helmholtzschen Schwingungsgleichung in Außengebieten und die Asymptotik ihrer Frequenzableitungen bei hohen und niedrigen Frequenzen“, *Dissertation*, Essen, (1998).

[13] Picard, R., „Zur Theorie der harmonischen Differentialformen“ , *manuscripta math.*, 27, (1979), 31–45.

[14] Picard, R., „An Elementary Proof for a Compact Imbedding Result in Generalized Electromagnetic Theory“, *Math. Z.*, 187, (1984), 151–164.

[15] Picard, R., „On the low frequency asymptotics in electromagnetic theory“ , *J. Reine Angew. Math.*, 354, (1984), 50–73.

[16] Picard, R., „Some Decomposition Theorems and their Application to Non–linear Potential Theory and Hodge Theory“, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 12, (1990), 35–53.

[17] Picard, R., Weck, N., Witsch, K. J., „Time-Harmonic Maxwell Equations in the Exterior of Perfectly Conducting, Irregular Obstacles“, *Analysis*, 21, (2001), 231–263.

[18] Ramm, A. G., Weaver O. L., Weck, N., Witsch, K. J., „Dissipative Maxwell's Equations at Low Frequencies“, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 13, (1990), 305–322.

[19] Weck, N., „Eine Lösungstheorie für die Maxwellschen Gleichungen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nicht–glattem Rand“, *Habilitationsschrift*, Bonn, (1972).

[20] Weck, N., „Maxwell's boundary value problems on Riemannian manifolds with nonsmooth boundaries“, *J. Math. Anal. Appl.*, 46, (1974), 410–437.

[21] Weck, N., „Traces of differential forms on Lipschitz boundaries“, *Analysis*, 24, (2004), 147–169. wave of for for

[22] Weck, N., Witsch, K. J., „Complete Low Frequency Analysis for the Reduced Wave Equation with Variable Coefficients in Three Dimensions“, *Comm. PDE*, 17, (1992), 1619–1663.

[23] Weck, N., Witsch, K. J., „Generalized Spherical Harmonics and Exterior Differentiation in Weighted Sobolev Spaces“, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 17, (1994), 1017–1043. Appl.

[24] Weck, N., Witsch, K. J., „Generalized Linear Elasticity in Exterior Domains II“, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 20, (1997), 1501–1530.

[25] Weyl, H., „Die natürlichen Randwertaufgaben im Außenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimension und beliebigen Ranges“, *Math. Z.*, 56, (1952), 105–119.