Universität Duisburg-Essen

Fakultät für Bildungswissenschaften

Lehrstuhl für Lehr-Lernpsychologie

Arbeitsgedächtniskapazität und arithmetische Leistungsfähigkeit in Kindergarten und Grundschule

Dissertation zur Erlangung des Grades Dr. phil.

vorgelegt von Dominique Arndt

geboren am 07.11.1982 in Velbert

Erstgutachter: Prof. Dr. Annemarie Fritz-Stratmann, Universität Duisburg-Essen

Zweitgutachter: Prof. Dr. Detlev Leutner, Universität Duisburg-Essen

Tag der mündlichen Prüfung: 05. März 2013

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Danksagung

Mit großer Freude und vom Schreiben mehr oder weniger geschafft ist es nun gelungen, diese Arbeit fertigzustellen. An dieser Stelle möchte ich all denjenigen Danken, die durch ihre Worte, ihr Handeln und manchmal auch durch ihr gnädiges Ertragen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Ich danke meinem Doktorvater Prof. Dr. Detlev Leutner für seinen Mut einen Lehramtsstudenten aufgrund einer 45-minütigen Prüfung einzustellen, seine methodische und fachliche Beratung sowie eine Vielzahl von wertvollen Anregungen, die in diese Arbeit eingegangen sind. Ebenfalls danke ich Prof. Dr. Annemarie Fritz-Stratmann dafür, dass sie unergründlich scheinende statistische Befunde kritisch hinterfragte, sich stets die Zeit nahm, Artikel mit hilfreichen Anmerkungen zu versehen. Ihr Verständnis der Entwicklung frühkindlicher mathematischer Fähigkeiten ist einer der Grundpfeiler dieser Arbeit.

Dr. Maria Opfermann sei gedankt für ihre unermüdliche Hilfe bei der Durchführung von Projekten, für das Korrekturlesen von Konferenzbeiträgen und Fachartikeln, aber auch für zahlreiche andere Anregungen, die zur Erweiterung meines Allgemeinwissens sowie meiner Kegelfähigkeiten führten. Ohne deine Hilfe wäre diese Arbeit, insbesondere aber diese Danksagung, wohl nicht entstanden, und ich hätte heute noch nicht die Antwort auf Alles.

Mein besonderer Dank gilt Katleen Sahr, die über mehr als drei Jahre die beste Bürokollegin war, die ich mir vorstellen kann. Auch wenn ich damit lediglich ein erhaltenes Kompliment zurückgebe, hoffe ich doch, dass du es zu schätzen weißt und die letzten drei Jahre als andauernden Beweis großer Vorstellungskraft annimmst. Ohne dich wäre vieles in diesem Projekt deutlich schlechter gelaufen, die Arbeit spürbar langweiliger gewesen und in allen Konferenzbeiträgen und Artikeln deutlich mehr Fehler übrig geblieben. Darüber hinaus danke ich Olga Maurer und Theresa Dicke, die ebenfalls, wenn auch für kürzere Zeit, mit uns das Büro und die

Schokoladenvorräte teilten. Ohne euch alle wäre diese Zeit zwar auch, aber deutlich trostloser vergangen.

Ebenfalls danken möchte ich allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern an den Lehrstühlen von Prof. Leutner und Prof. Fritz-Stratmann, die durch ihre methodische Unterstützung, ihre Teilnahme an Schreibkolloquien oder ihre Gespräche in der Mensa oder auf Konferenzen die Möglichkeit schufen, in einem freundlichen und fachlich ansprechenden Umfeld zu arbeiten. Auch gedankt sei den studentischen Hilfskräften und Examenskandidaten, die mich bei der Datenerhebung und Dateneingabe unterstützt haben.

Ich danke meiner Freundin Mareen Schöppe, die mir in den letzten Wochen den Rücken freigehalten, sowie meinen Stress und die daraus resultierenden Launen ertragen hat. Zu guter Letzt möchte ich meiner Familie dafür danken, dass sie mich auf meinem Weg zu dieser Arbeit bestärkt oder vielmehr in jeder Hinsicht die Grundsteine dafür gelegt haben.

Einleitung

Lesen, Schreiben und Rechnen sind kulturelle Grundfertigkeiten, die jedes Kind am Ende der Grundschulzeit sicher erworben haben sollte, damit die wesentlichen Grundlagen für das weitere Leben und Lernen gewährleistet sind. Nicht in allen Fällen gelingt dies in gleicher Weise, und schon zu Beginn der Grundschulzeit besteht offensichtlich eine breite Leistungsstreuung zwischen den eingeschulten Kindern. Die pädagogisch-psychologische Forschung interessiert sich in diesem Zusammenhang für die Ursachen dieser Unterschiede. Eine kognitive Variable, die beim Erlernen des Rechnens eine wesentliche Rolle spielt, ist die Kapazität des Arbeitsgedächtnisses, wobei in der Forschung in den meisten Fällen das Dreikomponentenmodell nach Baddeley (1986) zugrundegelegt wird.

Die Befunde in Bezug auf den Zusammenhang zwischen Arbeitsgedächtniskapazität und Rechenleistung sind jedoch nicht immer eindeutig. Welche der drei Komponenten im Modell nach Baddeley bei welchen Kindern, in welchem Alter und auf welche Rechenaufgaben welchen Einfluss ausüben, ist noch weitgehend ungeklärt. Das Ziel der hier vorliegenden Arbeit ist es daher, die Auswirkungen dieser drei Variablen auf den Zusammenhang in drei Studien zu untersuchen. Die Arbeit gliedert sich dabei im Wesentlichen in drei Teile. In Kapitel 1 wird die aktuelle Forschungslage in Bezug auf das Arbeitsgedächtnis, die Rechenfertigkeiten in Vor- und Grundschule sowie deren Zusammenhang dargestellt. Daran anschließend werden offene Fragen formuliert, denen in den Kapiteln 2 bis 4 in drei empirischen Studien nachgegangen werden soll. Im abschließenden Kapitel 5 werden die Ergebnisse zusammenfassend dargestellt und sowohl theoretische als auch praktische Implikationen ausgeführt. Darüber hinaus wird ein Ausblick auf weitere Forschungsfragen gegeben.

1. Theoretischer Hintergrund

1.1 Das Arbeitsgedächtnis

1.1.1 Vorläufermodelle

Unsere heutigen theoretischen Annahmen über das menschliche Gedächtnis basieren in weiten Teilen auf Forschungsbefunden der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Miller (1956) folgerte unter Rückgriff auf verschiedene frühere Experimente (z. B. Hayes, 1952; Kaufman, Lord, Reese & Volkmann, 1949), dass das ‚unmittelbare Gedächtnis' (*immediate memory*) auf 7 ± 2 Elemente (*chunks*) beschränkt sei. Sperling (1960) wies experimentell nach, dass Probanden auch größere Informationenmengen wahrnehmen und Ausschnitte davon präzise wiedergeben können, wenn ihre Aufmerksamkeit innerhalb kürzester Zeit (bis zu 250ms) auf diese Ausschnitte gelenkt wird.

Auf Basis dieser Erkenntnisse entwickelten Atkinson und Shiffrin (1968) ein multimodales Gedächtnismodell (Abbildung 1), bestehend aus einem Sensorischen Register, einem Kurzzeitspeicher und einem Langzeitspeicher, die alle modalitätsspezifisch arbeiten, sich aber in Hinblick auf Speicherdauer und Speichergröße voneinander unterscheiden. Die Autoren weisen darauf hin, dass „This [short-term] store may be regarded as the subject's ‚working memory'" (Atkinson, Shiffrin, 1968, S. 92). Der Begriff des Arbeitsgedächtnisses wird dabei von Miller, Galanter und Pribram (1960, S. 65 ff.) übernommen, die damit den Teil des

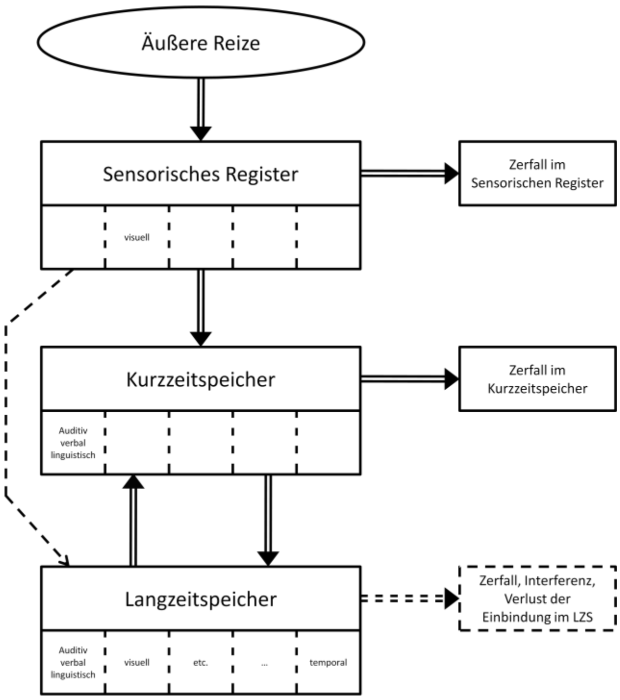

Abbildung 1: Gedächtnismodell nach Atkinson und Shiffrin (1968)

Gedächtnisses bezeichnen, der für den Zugriff auf, den Wechsel zwischen und die Durchführung von Plänen zuständig ist. Pläne werden hierbei als Handlungsabläufe im Sinne des TOTE-Konzepts (*test-operate-test-exit*; iterativer Problemlöseprozess) verstanden (Miller, Galanter & Pribram, 1960, S. 2).

Atkinson und Shiffrin (1968, S. 106 ff.) benennen drei wesentliche Prozesse im Kurzzeitspeicher, nämlich (1) Speicher-, Such- und Abrufprozesse, (2) Rehearsalprozesse sowie (3) Kodierungsprozesse und Transfer zwischen Kurzzeit- und Langzeitspeicher. Die Speicher-, Such- und Abrufprozesse bestimmen insbesondere die Art und Weise, wie Informationen im Kurzzeitspeicher so untergebracht werden, dass sie später wieder aufgefunden werden können. Die Autoren nehmen hier eine Registerstruktur an, in der Informationen innerhalb eines Registers nach und nach durch neue Informationen verdrängt werden und auf diese Weise bei Überschreitung der Speicherkapazität der Verfall einsetzt. Um diesem automatischen Verfall wichtiger Informationen entgegenwirken zu können, ermöglicht es der Rehearsalprozess (*rehearsal buffer*) durch stilles Wiederholen der entsprechenden Information, diese im Register wieder an den Anfang zu setzen und somit vor Verfall zu bewahren. In Bezug auf den Transferprozess zwischen Kurz- und Langzeitspeicher gehen Atkinson und Shiffrin (1968, S. 115 f.) davon aus, dass die meisten Informationen direkt aus dem Langzeitspeicher und nur indirekt aus dem sensorischen Register in den Kurzzeitspeicher gelangen, da beispielsweise ein gelesenes Wort zuerst im Langzeitgedächtnis mit der entsprechenden gesprochenen Repräsentation verknüpft werden muss, um möglichst platzsparend als auditive Information in den Kurzzeitspeicher aufgenommen zu werden.

Wie oben erwähnt und im letzten Beispiel angedeutet, gehen Atkinson und Shiffrin (1968) davon aus, dass die drei Komponenten ihres Modells modalitätsspezifisch arbeiten, was jedoch aufgrund der lückenhaften Forschungslage der Zeit nicht belegt werden konnte. Als Indiz wird darauf verwiesen, dass Informationen im auditiv-verbalen Bereich nach 15 Sekunden verfallen, jedoch mit Rehearsal aufrechterhalten werden können, während der Verfall im visuellen und taktilen Bereich bis zu 30 Sekunden dauert und sich in Hinblick auf die Störanfälligkeit durch Ablenkungen ebenfalls unterscheidet (Atkinson & Shiffrin, 1968, S. 98 ff.; Peterson & Peterson, 1959; Posner & Konick, 1966).

Die dem Kurzzeitspeicher inhärenten Kontrollprozesse formulierten Atkinson und Shiffrin (1971) in der Folgezeit genauer aus und konnten beispielsweise nachweisen, dass beim Behalten von Wortlisten die ersten (*primacy*) und letzten (*recency*) Worte durchschnittlich am sichersten wiederholt werden konnten. Dabei gehen sie davon aus, dass der Recency-Effekt stärker über das Kurzzeitgedächtnis, der Primacy-Effekt jedoch eher über das Langzeitgedächtnis vermittelt wird. Um diese Idee zu stützten wurde durch die gleichzeitige Lösung simpler arithmetischer Aufgaben (*dual task*) das Kurzzeitgedächtnis zusätzlich belastet. Bei diesem Versuch zeigte sich kein Recency-Effekt mehr, während der Primacy-Effekt erhalten blieb. Umgekehrt zeigte sich, dass bei immer länger werdenden Wortketten der Primacy-Effekt verblasste, während der Recency-Effekt nicht beeinträchtigt wurde.

1.1.2 Das Arbeitsgedächtnismodell nach Baddeley und Hitch

Baddeley und Hitch (1974) kritisierten am Modell von Atkinson und Shiffrin (1968) insbesondere die Rolle des Kurzzeitspeichers als Arbeitsgedächtnis. Der Kern der Kritik entzündet sich dabei an neuropsychologischen Beobachtungen von Shalice und Warrington (1970). Diese konnten zeigen, dass Patienten[1] mit unfallbedingten schweren Defiziten im verbalen Kurzzeitspeicher dennoch zu normalen verbalen Lernleistungen fähig waren, was mit der Hypothese, dass der Kurzzeitspeicher das

[1] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung männlicher und weiblicher Sprachformen verzichtet. Sämtliche Personenbezeichnungen gelten gleichwohl für beiderlei Geschlecht.

gesamte Arbeitsgedächtnis umfasse, unvereinbar war. Baddeley und Hitch (1974) kritisierten insbesondere, dass auf Basis einer eher spärlichen empirischen Befundlage – hauptsächlich im Bereich des Rehearsal – sehr genaue theoretische Annahmen über die Struktur des Arbeitsgedächtnisses gemacht worden waren.

Aufgrund ihrer eigenen Untersuchungen kamen sie zu dem Schluss, dass sich das Arbeitsgedächtnis in eine zentrale Exekutive (*central executive*) sowie eine phonemische Schleife (*phonemic loop*) aufteilen lässt, und vermuteten eine weitere, der phonemischen Schleife ähnliche Komponente im visuellen Bereich. Der Nachweis für diesen visuell-räumlichen Notizblock (*visuo-spatial scratchpad*) konnte in Ermangelung von Aufgaben zu dessen Erfassung erst später geführt werden (Baddeley & Lieberman, 1980).

Im Laufe der Zeit wurde das Modell wiederholt angepasst und bestand bis ins Jahr 2000 (Baddeley, 2000) aus drei Komponenten (s. Abb. 2). Die zentrale Exekutive nimmt hierbei die Rolle einer übergeordneten Steuer- und Kontrolleinheit ein, während die phonologische Schleife (*phonological loop*) und der visuell-räumliche Skizzenblock (*visuo-spatial sketchpad*) als untergeordnete Speichereinheiten fungieren (Baddeley, 1986). Im Jahr 2000 fügte Baddeley den episodischen Puffer (*episodic buffer*) als vierte Komponente für die integrierte, chronologische Speicherung kurzer Episoden sowohl phonologischen als auch visuell-räumlichen Inhalts hinzu.

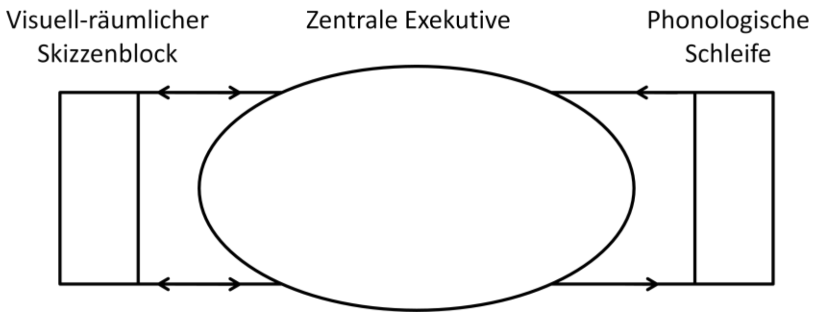

Abbildung 2: Arbeitsgedächtnismodell nach Baddeley (1983)

Die zentrale Exekutive

Die zentrale Exekutive wurde in der Frühzeit des Modells konzipiert, um im Arbeitsgedächtnis notwendige Prozesskapazität bereitzustellen, um die notwendigen Prozesse anzustoßen, wenn durch bestimmte Aufgaben die Kapazität der phonologischen Schleife[2] überschritten war (Baddeley, 2007, S. 7; Baddeley & Hitch, 1974). Baddeley (1996) selbst stellte klar, dass er die zentrale Exekutive in der Anfangszeit als buntes Durcheinander (*ragbag*; Baddeley, 1996) nutzte, um unterschiedlicher Auswahl-, Planungs- und Auffindestrategien zu erklären, wie sie benötigt werden, um selbst einfachste Gedächtnisanforderungen zu erfüllen. In der Folgezeit schrieb Baddeley der zentralen Exekutive insbesondere Aufgaben im Bereich der Aufmerksamkeitssteuerung und Kontrolle in Anlehnung an Norman & Shallice (1986) zu (Baddeley, 2007, S. 118). Damit wurde jedoch nicht das Problem gelöst, dass ein Arbeitsgedächtnismodell ohne klar definierte und empirisch überprüfte exekutive Funktionen zu einem reinen Speichermodell degradiert wurde (Baddeley, 2007, S. 7). Dieselbe Kritik hatten Baddeley & Hitch (1974) am Modell von Atkinson & Shiffrin (1968) geübt, indem sie feststellten, dass zwar eine Vielzahl von Behauptungen über die potentiellen Fähigkeiten des Kurzzeitspeichers aufgestellt worden waren, welche jedoch in der Folgezeit kaum überprüft wurden.

In den darauffolgenden Jahren wurde eine Vielzahl von Untersuchungen durchgeführt, um die zentrale Exekutive genauer zu erforschen, sodass Baddeley (1996) schließlich vier Kernaufgaben der zentralen Exekutive postulieren konnte, nämlich die Steuerung und Kontrolle (1) der gleichzeitigen Durchführung zweier Aufgaben (*divide attention*), (2) des schnellen Wechsels zwischen zwei unterschiedlichen Aufgaben (*switch attention*), (3) der Fokussierung auf

[2] Aus Gründen der Lesbarkeit werden ab sofort nur noch die Begriff Zentrale Exekutive (central executive), Phonologische Schleife (phonological loop) und Visuell-räumlicher Skizzenblock (visuo-spatial sketchpad) benutzt, auch wenn diese in den älteren Publikationen von Baddeley anders bezeichnet werden.

aufgabenrelevante Informationen, während irrelevante Informationen ignoriert werden (*focus attention*), und (4) des Austausches zwischen Arbeits- und Langzeitgedächtnis (*activation of long-term memory*) (Baddeley 1996; 2007, S. 117 f.). Zoelch, Seitz und Schumann-Hengsteler (2005) konnten empirisch nachweisen, dass diese Fraktionierung bereits bei Kindern im Alter zwischen fünf und acht Jahren vorhanden ist.

Um diese unterschiedlichen Aufgaben besser zu verstehen, werden im Folgenden Beispiele aus dem menschlichen Alltag dargestellt, in denen sie zum Einsatz kommen. So ergeben sich dort häufiger Situationen, in denen mehrere Aufgaben gleichzeitig durchgeführt werden müssen, wie beispielsweise Auto fahren, während man im Radio einen anderen Sender einstellt. Da beide Tätigkeiten situationsabhängig unterschiedlich viel Aufmerksamkeit und Speicher im Arbeitsgedächtnis bedürfen, ist es unabdingbar, dass die zentrale Exekutive beides angemessen auf die jeweiligen Aufgaben aufteilt (*divide*). Ein vollständiger Wechsel (*switch*) zwischen beiden Aufgaben ist aufgrund der potenziell negativen Folgen nicht sinnvoll. Die gleichzeitige Durchführung beider Aufgaben führt aufgrund von begrenztem Arbeitsgedächtnisspeicher und begrenzter zentralexekutiver Steuerungskapazität zu Leistungseinbußen in beiden Bereichen. In der Forschung wird diese Kapazität mit Aufgaben nach dem „*dual-task*"-Paradigma erfasst. So sollten Probanden beispielsweise mit einem Stift einen Punkt auf einem Monitor verfolgen, während sie gleichzeitig Zahlenspannenaufgaben beantworten mussten (Baddeley, 1996). Die Kapazität wird hierbei über die Leistungseinbuße in der Primäraufgabe bei gleichzeitig guter Durchführung der Sekundäraufgabe erfasst.

In Klassenarbeiten ergibt sich für Schüler häufig das Problem, dass vorher sicher funktionierende Strategien nicht mehr abgerufen oder fehlerhaft eingesetzt werden. Eine mögliche Ursache ist, dass in Übungssituationen Aufgaben mehrmals nacheinander durchgegangen werden, bis sie sicher ausgeführt werden können, während in der Testsituation Aufgaben nur einmal vorkommen und in der nächsten Aufgabe bereits andere Strategien genutzt werden müssen. Spector und Biederman (1976) konnten zeigen, dass es bei solchen Strategiewechseln zu Leistungseinbußen kommt, wenn aus der Aufgabenpräsentation nicht eindeutig auf einen notwendigen Strategiewechsel geschlossen werden kann, was von Baddeley (2007, S. 129) als Hinweis auf zentralexekutive Aktivität gedeutet wird. Eine mögliche Aufgabe zur Erfassung dieser Fähigkeit ist die „*trail-making*"-Aufgabe. Dabei werden den Probanden alternierende Folgen von Zahlen und Buchstaben (A-1-B-2-C-3-etc.) gegeben, die diese mit einer Linie verbinden sollen. Das Ziel der Testperson ist es, diese Aufgabe so schnell wie möglich abzuschließen, weshalb die Bearbeitungszeit üblicherweise als Leistungsmaß herangezogen wird.

In einer Vielzahl von Lernsituationen ist es notwendig, auf die Aufgabe fokussiert zu bleiben, um sich nicht von unwichtigen Reizen wie Straßenlärm, Musik oder Helligkeitsschwankungen ablenken zu lassen. Baddeley führte hierzu ein Experiment durch, bei dem Probanden auf einen Knopf drücken sollten, sobald auf einem Monitor ein visuelles Signal gegeben wurde. Gleichzeitig wurde entweder (1) kein akustisches Signal gegeben, (2) ein irrelevantes akustisches Signal gegeben, (3) ein akustisches Signal gegeben, auf das ebenfalls der Knopf gedrückt werden sollte, und (4) ein akustisches Signal gegeben und darüber hinaus regelmäßig gewechselt, ob auf das akustische oder visuelle Signal reagiert werden sollte. Erwartungsgemäß führten Bedingung 2 und 4 zu verzögerten Reaktionszeiten, ein Hinweis auf exekutive Beanspruchung (Baddeley, 1996). Eine Beispielaufgabe zur Erfassung dieser Fähigkeit liefert Stroop (1935). Dabei werden den Probanden mehrere Farbwörter in verschiedenen Farben vorgelegt, wobei Schriftfarbe und Wortbedeutung in der Hälfte der Fälle identisch, in der anderen Hälfte unterschiedlich sind. Die Aufgabe der Probanden ist es, die Schriftfarbe zu benennen, was bei nicht-identischer Information üblicherweise länger dauert (*Stroop effect*).

Dem Arbeitsgedächtnis wird bereits im Modell von Atkinson und Shiffrin (1968) die Aufgabe zugewiesen, einkommende Informationen so zu organisieren, zu strukturieren und mit bereits vorhandenen Informationen im Langzeitgedächtnis zu verknüpfen, dass sie mit möglichst geringem Speicherverbrauch, d.h. ohne unnötige oder redundante Informationen, im Arbeitsgedächtnis zwischengespeichert und später gegebenenfalls im Langzeitgedächtnis abgelegt werden können, was von Baddeley (1996) als Aktivierung des Langzeitgedächtnisses bezeichnet wird. Ein Beispiel hierfür ist die Fähigkeit, sich vollständige, grammatikalisch korrekte Sätze merken zu können, deren Phonem- und teilweise sogar Wortanzahl die Kapazität der phonologischen Schleife übersteigt (Baddeley, 2007, S. 143). Sich den Satz ‚Die Würfel sind gefallen' zu merken, kann für einen Menschen ohne Kenntnisse der deutschen Sprache eine herausfordernde Aufgabe darstellen, da er sich sieben Silben merken muss, während ein deutscher Muttersprachler mit vier im Langzeitgedächtnis verankerten sinnstiftenden Wörtern arbeiten kann. Kommen zusätzlich noch Kenntnisse der römischen Geschichte hinzu, wird der ganze Satz zu einer einzigen Informationseinheit, deren Speicherung völlig unproblematisch verlaufen kann. Eine weitere Möglichkeit zur Erfassung derselben Fähigkeit stellt die „*listening span*"-Aufgabe dar, bei der Personen auf Fragen antworten müssen und sich gleichzeitig innerhalb einer Spanne die Antworten merken sollen (obwohl bei dieser Aufgabe ebenfalls die „*switching*"-Fähigkeit der Zentralen Exekutive genutzt wird).

Die phonologische Schleife

Bei der phonologischen Schleife handelt es sich um den Teil des

Arbeitsgedächtnisses, der dem Kurzzeitspeicher von Atkinson und Shiffrin (1968) am nächsten kommt. Conrad & Hull (1964) zeigten, dass visuell präsentierte Folgen von Konsonanten besser behalten werden, wenn die Buchstaben klanglich unterschiedlich (X – F) anstatt klanglich ähnlich (D – T) sind. Darüber hinaus konnten Adams und Gathercole (1995) aufzeigen, dass die Gedächtnisspanne von Kunstwörtern, die in ihrer phonotaktischen Silbenstruktur der Sprache der Probanden (hier: englisch) ähnlich waren, besser behalten werden können als solche, die weiter von dieser Sprache entfernt waren. Beide Befunde können als Belege für die Ideen von Atkinson & Shiffrin (1968) gesehen werden, dass im Kurzzeitgedächtnis zum einen Informationen von einer Sinnesebene in eine andere übertragen (visuell – auditiv) und dort gespeichert werden können, als auch, dass auch der Kurzzeitspeicher bereits über einen Zugriff auf Informationen im Langzeitgedächtnis verfügt und zwar ohne den Umweg über die zentrale Exekutive. Daher führt Baddeley (1996) aus, dass auch die phonologische Schleife keine Tabula rasa sei, sondern vielmehr auf den phonologischen Erfahrungen des einzelnen Menschen aufbaue. Dies wird mit dem Befund von Adams & Gathercole (1995) begründet, die herausfanden, dass englische Muttersprachler sich Silbenspannen besser merken konnten, wenn die syntagmatischen Relationen der einzelnen Phoneme den zulässigen Bildungsregeln der englischen Sprache entsprachen (bspw. han, pel, wemb), als wenn dies nicht der Fall war (bspw. xek, krot, pnu).

Die phonologische Schleife verfügt darüber hinaus über zwei wesentliche Komponenten (s. Abb. 3): zum einen den phonologischen

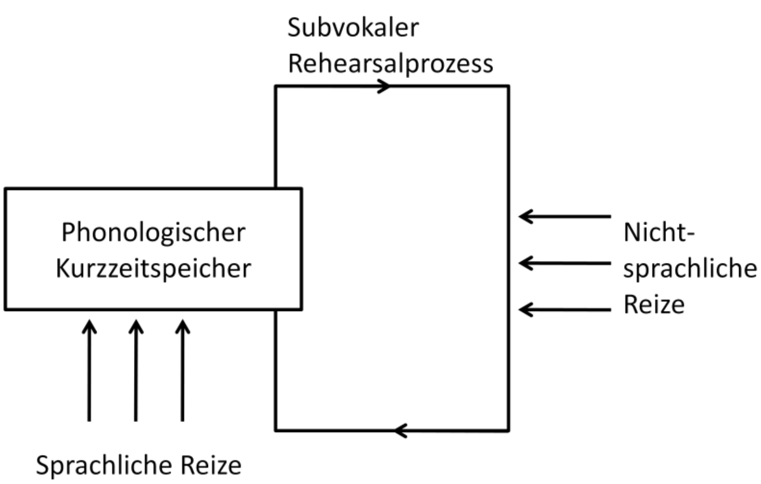

Abbildung 3: Die Phonologische Schleife nach Baddeley (1986)

Kurzzeitspeicher (*phonological short-term store*) und den subvokalen Rehearsalprozess (*subvocal rehearsal*). Sprachliche Informationen gelangen direkt in den phonologischen Speicher und können anschließend durch Rehearsal aufrechterhalten werde. Darüber hinaus können nicht-sprachliche Informationen durch Rekodieren ebenfalls in den Rehearsalprozess eintreten und so memoriert werden (Baddeley, 1986, Baddeley, 2007, S. 9).

In Bezug auf diese beiden Komponenten konnten Baddeley, Thomson und Buchanan (1975) nachweisen, dass (1) die phonologische Gedächtnisspanne direkt abhängig von der Länge der zu merkenden Worte ist (Wortlängeneffekt), (2) der Wortlängeneffekt für längere Worte bestehen bleibt, wenn diese Worte gleich viele Silben und Phoneme haben, (3) die Gedächtnisspanne in Relation mit der Anzahl der Worte steht, die innerhalb von zwei Sekunden laut vorgelesen werden können (Kapazität des Rehearsalprozesses), (4) die Gedächtnisspanne mit der Lesegeschwindigkeit zusammenhängt und (5) der Wortlängeneffekt bei gleichzeitiger artikulatorischer Suppression (z.B. durch lautes Wiederholen einzelner Worte wie ‚the‘) verschwindet, wenn die Worte visuell präsentiert werden, nicht jedoch bei gesprochenen Worten (vgl. Abb. 3). Üblicherweise wird die Kapazität der phonologischen Schleife durch Aufgaben erfasst, in denen den Probanden Zahlen, Worte oder Silben vorgespielt oder durch einen Testleiter gesagt werden. Diese sollen anschließend in derselben Reihenfolge wieder reproduziert werden.

Der visuell-räumliche Skizzenblock

Bei ihrer vermuteten Aufteilung des Arbeitsgedächtnisses in eine auditive und eine visuell-räumliche Komponente griffen Baddeley & Hitch (1974) auf frühere Ideen zurück. So hatten Atkinson & Shiffrin (1968) die Aufteilung des Kurzzeitspeichers nach verschiedenen Modalitäten für theoretisch begründet gehalten, jedoch nur schwache empirische Belege dafür angeführt. Paivio (1971, S. 207 ff., 224 ff.) führte in seiner Theorie zum dualen Kodieren aus, dass Worte, die etwas Anschauliches präsentieren (z. B. Katze), besser behalten werden können als solche, die abstrakte Konzepte repräsentieren (z. B. Freiheit), was als weiterer Hinweis darauf gedeutet werden kann, dass im Gedächtnis unterschiedliche Modalitäten zur Speicherung genutzt werden können. Baddeley (1986) ließ die genauen Funktionen des visuell-räumlichen Skizzenblockes jedoch zunächst unspezifiziert und postulierte lediglich das Vorhandensein eines visuellen und eines räumlichen Speichers sowie eine nicht näher ausgeführte Funktion, um auch in diesen Speichern eine Art von Rehearsal durchzuführen.

Logie (1995, S. 2 f.) benannte zwei verschiedene Subsysteme des visuell-räumlichen Skizzenblockes, nämlich den visuellen Zwischenspeicher (*visual cache*) sowie den inneren Schreiber (*inner scribe*). Der visuelle Zwischenspeicher ist hierbei eine Art passiver Speicher und hauptsächlich zuständig für rein visuelle Informationen. Der innere Schreiber hingegen ist analog zum subvokalen Rehearsalprozess in der phonologischen Schleife für die Aufrechterhaltung von Informationen zuständig. Darüber hinaus werden durch ihn räumliche Informationen als Sequenzen visueller Wahrnehmung abgespeichert und aufrechterhalten. Ebenso wie der artikulatorische Kontrollprozess ist auch der innere Schreiber störanfällig. So reicht nach Johnson (1982) jede Form von räumlicher Bewegung oder bereits die Planung dieser Bewegung aus, um das Behalten visueller Information zu stören, was Logie (1995, S. 76) als Interferenzeffekt im inneren Schreiber deutet. Ferner geht Logie (1995, S. 42) davon aus, dass visuell-räumliche Repräsentationen im Arbeitsgedächtnis nicht ohne unterstützenden Zugriff durch das Langzeitgedächtnis entstehen können, das heißt, dass im Langzeitgedächtnis nach bereits bekannten Mustern und Formen gesucht wird, so dass der begrenzte Speicher das

Arbeitsgedächtnisses optimal ausgenutzt werden kann. Genauso wie die phonologische Schleife, kann also auch der visuell-räumliche Skizzenblock nicht als Tabula rasa angesehen werden.

Eine Beispielaufgabe zur Erfassung der visuellen Komponente des Skizzenblocks ist beispielsweise die Matrixaufgabe, bei der dem Probanden für wenige Sekunden eine Matrix aus 4x4 Quadraten präsentiert wird, von denen einige schwarz markiert sind. Anschließend müssen diese auf einer leeren Matrix angezeigt werden. Zur Erfassung der räumlichen Komponenten können beispielsweise Corsi Block-Aufgaben genutzt werden, bei denen auf einem Brett neun Würfel befestigt sind, auf denen der Testleiter dem Probanden eine bestimmte Abfolge von Würfeln (einen Weg über die Würfel) zeigt, der vom Probanden nachzuzeigen ist.

Der episodische Puffer

In der Folgezeit führte Baddeley (2007, S. 97 ff.) mehrere Studien zur mentalen Repräsentation von klanglichen und visuellen Informationen durch, die er in der phonologischen Schleife respektive im visuell-räumlichen Skizzenblock vermutete. Die Probanden wurden dabei aufgefordert, sich bestimmte Dinge (z. B. ein Telefongespräch, den Marktplatz von Cambridge) aus dem Langzeitgedächtnis heraus vorzustellen und anschließend auf einer Skala von 1–5 zu bestimmen, wie lebhaft diese Vorstellung war. In weiteren Experimenten mussten die Probanden gleichzeitig laut zählen (*articulatory suppression*) oder rhythmisch klopfen (*spatial tapping*). Beide Zusatzaufgaben beeinflußten die Lebhaftigkeit der Vorstellung zum einen generell negativ, was von Baddeley (2007, S.98) auf die Rolle der zentralen Exekutive zurückgeführt wird, zum anderen aber auch modalitätsspezifisch. So führte das laute Zählen dazu, dass die Tonqualität der Vorstellung weniger lebhaft wurde, während das Klopfen die Bildqualität beeinträchtigte.

Baddeley (2007, S. 100) schließt die phonologische Schleife und den visuell-räumlichen Skizzenblock als mögliche Speicherorte der vorgestellten Situationen aus, da die negative Beeinflussung durch Interferenzaufgaben eher generell als modalitätsspezifisch erfolgt. Die zentrale Exekutive wird ebenfalls ausgeschlossen, da diese in Baddeleys (1996) genauer spezifizierten Fassung nicht mehr als Speicherort, sondern als Aufmerksamkeitssteuerungssystem angesehen wird. Daraus folgt unmittelbar, dass diese Form der Speicherung entweder im Langzeitgedächtnis oder in einer vierten Komponente des Arbeitsgedächtnisses stattfinden müsse, die Baddeley (2000) als episodischen Puffer (*episodic buffer*) bezeichnete.

Der episodische Puffer ist als Nahtstelle zwischen der phonologischen Schleife und dem visuell-räumlichen Skizzenblock auf der einen und dem Langzeitgedächtnis auf der anderen Seite konzipiert. Er ist in der Lage, Informationen aus mehreren Quellen multimodal zusammenzufassen und in Episoden abzuspeichern, und wird wie die anderen beiden Speichersysteme von der zentralen Exekutive aktiviert und gesteuert. Da der Puffer nicht nur in der Lage ist, aktuell wahrgenommene oder aus dem Langzeitgedächtnis abgerufene Inhalte wiederzugeben, sondern diese dort aktiv zu neuen Repräsentationen umgearbeitet werden, wird vermutet, dass er von besonderer Wichtigkeit für Lern- und Problemlöseprozesse ist (Baddeley, 2000). Eine Möglichkeit zur Erfassung der Kapazität des episodischen Puffers stellen beispielsweise Aufgaben dar, in denen vorgelesene Geschichten kohärent und inhaltlich vollständig wiedergegeben werden sollen. Eine weitere Möglichkeit sind Aufgaben zum Lernen von Paarassoziationen. Bei diesen werden zur Hälfte nicht assoziierte Worte vorgegeben (beißen – Name) und zur anderen Hälfte üblicherweise bereits assoziierte (Herd – kochen). Diese müssen anschließend wiedergegeben werden und übersteigen von der Anzahl her die Kapazität der phonologischen Schleife bei Weitem. Bei dieser Aufgabe werden dennoch teilweise phonologische und zentralexekutive Maße miterfasst (Henry, 2010). Um den Einfluss der phonologischen Schleife und des visuell-räumlichen Skizzenblockes möglichst gering zu halten, sind die meisten Aufgaben zur Erfassung des episodischen Puffers so konzipiert, dass sie deren Aufnahmekapazität bei weitem übersteigen. Daraus resultierend ergibt sich zwangsläufig eine höhere Bearbeitungszeit für einzelne Aufgaben, so dass der episodische Puffer nur sehr zeitaufwendig erfasst werden kann, was die geringe Rezeption in der aktuellen Forschung erklären könnte.

1.1.3 Die Arbeitsgedächtnisstruktur bei Kindern

Die Drei-Komponenten-Struktur des Arbeitsgedächtnisses – bestehend aus zentraler Exekutive, visuell-räumlichem Skizzenblock und phonologischer Schleife – wurde bei Erwachsenen in einer Vielzahl von Studien nachgewiesen (siehe Baddeley & Logie, 1999). Darüber hinaus konnte diese Arbeitsgedächtnisstruktur bei Kindern bereits ab einem Alter von fünf Jahren faktoranalytisch nachgewiesen werden (Gathercole, Pickering, Ambridge & Wearing, 2004; Hornung, Brunner, Reuter & Martin, 2011). In diesen Untersuchungen zeigten sich zwar keine funktionellen Unterschiede im Vergleich zum erwachsenen Arbeitsgedächtnis, wohl aber eine bis zum Alter von 15 Jahren zunehmende Kapazität in allen drei Komponenten (Gathercole et al., 2004). Auch für Kinder im Grundschulalter mit diagnostizierten Lernstörungen konnte nachgewiesen werden, dass die dreifaktorielle Struktur des Arbeitsgedächtnisses besteht und sich nicht signifikant von der Struktur bei gleichaltrigen Kindern ohne Beeinträchtigung unterscheiden lässt (Schuchardt, Roick, Mähler & Hasselhorn, 2008). Somit kann das oben vorgestellte Modell als gültig für Kinder im späten Kindergarten- und frühen Grundschulalter angesehen werden.

1.2 Unterschiedliche Sichtweisen auf den Aufbau mathematischer Fähigkeiten

Die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten wird sowohl in der Psychologie als auch in der Mathematikdidaktik erforscht, die dazu jedoch unterschiedliche Herangehensweisen nutzen. Aktuelle Forschungsergebnisse zeigen, dass jeder Mensch über zwei numerische Kernsysteme (*core systems of number*) verfügt, die ihn dazu befähigen, bestimmte arithmetische Probleme zu lösen (Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004). Da es sich bei diesen Kernsystemen um angeborene Fähigkeiten handelt, können diese bereits von sehr jungen Kindern und sogar Säuglingen zur Lösung mathematischer Probleme eingesetzt werden. In der Entwicklungspsychologie gibt es eine lange Tradition, die sich mit der Entwicklung der mathematischen Fähigkeiten im Vor- und Grundschulalter befasst (vgl. Piaget & Szeminska, 1975). Ein aktueller entwicklungspsychologischer Ansatz, natürliche arithmetische Fähigkeiten zu beschreiben, ist das Kompetenzstufenmodell nach Fritz und Ricken (2008). Dieses beschreibt arithmetische Fähigkeiten als den sukzessiven Erwerb aufeinander aufbauender Konzepte. Schließlich ist es die ureigene Aufgabe der Mathematikdidaktik, an der Entwicklung von Richtlinien und Lehrplänen mitzuwirken. In diesen werden Kompetenzen festgelegt, die am Ende eines Schuljahres von allen Schülern erreicht sein sollen. Bei dieser Entwicklung wird anerkannt, dass Kinder bereits mit unterschiedlichen mathematischen Vorkenntnissen in die Schule gelangen und dass diese Vorkenntnisse genutzt werden können und sollen (Hasemann, 2007, S. viii).

Schlussendlich gibt es also – mindestens – drei Möglichkeiten, den Aufbau mathematischer Fähigkeiten zu beschreiben, nämlich erstens angeborene Fähigkeiten im Sinne der Kernsysteme, zweitens natürlich entwickelte und aufeinander aufbauende Konzepte im Sinne des Kompetenzstufenmodells nach Fritz und Ricken (2008) und drittens kulturell-schulisch erworbene und im Lehrplan festgelegte

Kompetenzen. Diese drei Aufbauten sind jedoch nicht eindeutig voneinander zu trennen, da beispielsweise in der Mathematikdidaktik auch Erkenntnisse der Entwicklungspsychologie (Hasemann, 2007, S. 3 ff.) und im Modell nach Fritz und Ricken (2008) auch Erkenntnisse in Bezug auf die Kernsysteme genutzt werden.

1.2.1 Numerische Kernsysteme nach Feigenson, Dehaene & Spelke

Die Theorie der beiden numerischen Kernsysteme (Feigenson et al., 2004) liegt wesentlich in der Idee begründet, dass Menschen über eine Art angeborenen Zahlensinn (*number sense*) verfügen (Dehaene, 1997). Dehaene (1997) führt dazu aus, dass alle Menschen und auch bestimmte Tiere dazu in der Lage sind, einige mathematische Aufgaben wie Mengenvergleiche und einfache Rechenoperationen durchzuführen. Feigenson et al. (2004) präzisierten diese Ausführungen, indem sie die angeborenen Fähigkeiten in zwei wesentliche numerische Kernsysteme aufteilten. Das erste, approximative Kernsystem ist zuständig für die schätzende Repräsentation großer Mengen (*approximate representation of numerical magnitudes*; in der neueren Forschung auch ANS – *approximate number system*; Cantlon, Platt & Brannon, 2009), während das zweite, präzise Kernsystem für die exakte Repräsentation kleiner Mengen (*precise representation of distinct individuals*) zuständig ist.

Mithilfe des approximativen Kernsystems sind Probanden in der Lage, zwei vorgegebene unterschiedlich große Punktmengen als unterschiedlich zu erfassen und zu erkennen, welche der beiden Mengen die größere ist. Die Präzision dieser Unterscheidungsfähigkeit hängt dabei im Wesentlichen vom Verhältnis der Mächtigkeit der beiden Mengen ab und genügt damit dem Weber-Fechner-Gesetz[3]. Wenn jemand den Unterschied zwischen 20 und 24 Punkten gerade noch

[3] Die differentielle Wahrnehmbarkeitsschwelle zweier Stimuli ist proportional zur Größe der beiden Stimuli (Fechner, 1859).

unterscheiden kann, kann er auch 40 Punkte noch von 48 unterscheiden, nicht aber von 44 (Cantlon & Brannon, 2006).

Eine weitere Determinante für die Präzision des approximativen Kernsystems ist das Alter der Probanden. In Habituationsstudien wurden Kindern zunächst immer wieder Punktmengen einer bestimmten gleichbleibenden Anzahl präsentiert, bis diese nicht mehr als neuer Reiz erkannt wurden. Anschließend wurde eine Menge mit anderer Anzahl präsentiert. Es wurde anhand der Betrachtungsdauer überprüft, ob die neue Menge als neuer Reiz – Unterscheidung gelungen – oder als alter Reiz – Unterscheidung fehlgeschlagen – wahrgenommen wurde. Dabei zeigten sechs Monate alte Kinder, dass sie in der Lage sind, zwischen 8 und 16 Punkten (Verhältnis 1:2) zu unterscheiden, nicht jedoch zwischen 16 und 24 (Verhältnis 2:3) (Xu & Spelke, 2000). Mengen dieses Verhältnisses konnten erst ab einem Alter von 10 Monaten unterschieden werden (Xu & Arriaga, 2007). Diese Fähigkeit verbessert sich bis zum Erwachsenenalter stetig weiter, sodass Erwachsene schließlich in der Lage sind, Mengen in Verhältnissen von 7:8 recht sicher unterscheiden zu können (Barth, Kanwisher & Spelke, 2003). Halberda und Feigenson (2008) konnten für Kinder von drei bis sechs Jahren und Erwachsene zeigen, dass sich die differenzielle Wahrnehmbarkeitsschwelle logarithmisch mit dem Alter verbessert. So können im Alter von 3 Jahren Verhältnisse von 2:3 unterschieden werden, im Alter von 4 Jahren schon Verhältnisse von 3:4, mit 5 Jahren von 4:5, mit 6 Jahren von 6:7 und von Erwachsenen sogar Unterschiede im Verhältnis von 9:10 wahrgenommen werden.

Unter Verwendung des approximativen Kernsystems können nicht nur direkte Vergleiche zwischen zwei präsentierten Mengen vorgenommen werden, sondern auch solche Vergleichsaufgaben gelöst werden, die die gleichzeitige Anwendung einer der vier Grundrechenarten verlangen. Barth, La Mont, Lipton und Spelke (2005) konnten zeigen, dass Kinder im Vorschulalter in der Lage sind, direkte

Vergleichsprobleme im Zahlenraum bis 60 sowohl unimodal (beide Mengen visuell repräsentiert) als auch kreuzmodal (eine Menge visuell, die andere Menge auditiv, als Abfolge einer bestimmten Anzahl von Tönen, repräsentiert) über Ratewahrscheinlichkeit zu lösen (unimodal: 67 %, kreuzmodal: 66 %). Aufgaben zur nicht-symbolischen Addition (vgl. Abb. 4) konnten ebenfalls sowohl unimodal (66 %) als auch kreuzmodal (66 %) über Ratewahrscheinlichkeit gelöst werden. Aufgaben zur symbolischen Addition im selben Zahlenraum und mit denselben umformulierten Aufgaben konnten nicht überzufällig häufig gelöst werden (zum kreuzmodalen Rechnen siehe auch Barth, Beckmann & Spelke, 2008). Des Weiteren konnte gezeigt werden, dass fünf Jahre alte Kinder bereits in der Lage sind, Aufgaben zur nicht-symbolischen Subtraktion zu lösen (Barth, La Mont, Lipton, Dehaene, Kanwisher & Spelke, 2006).

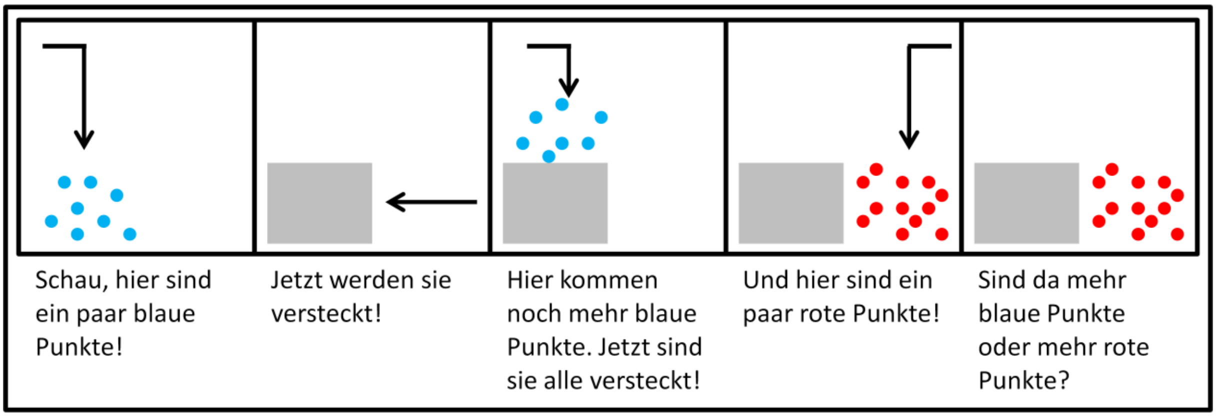

Abbildung 4: Nicht-symbolischen Addition nach Barth, La Mont, Lipton und Spelke (2005)

In weiteren Studien konnten Barth, Baron, Spelke und Carey (2009) nachweisen, dass Kindergartenkinder und Erstklässler in der Lage sind, Aufgaben zum Verdoppeln und Halbieren zu lösen. Während das Verdoppeln noch als Additionsaufgabe mit gleichen Summanden gelöst werden kann, gibt es keine ähnliche Möglichkeit, das Halbieren additiv zu bewältigen, da nur die Gesamtheit, nicht aber die abzuziehende Hälfte bekannt ist. Beide Operationen wurden sowohl mit diskreten Punktmengen als auch mit stetigen Längen vorgegeben. In allen vier Bedingungen (Halbieren/Verdoppeln x diskret/stetig) konnten die Aufgaben überzufällig häufig gelöst werden. McCrink und Spelke (2010) konnten zeigen, dass fünf bis sieben Jahre alte Kinder auch Multiplikationsaufgaben mit den Faktoren x4 und x2.5 überzufällig häufig lösen konnten, wenn Produkt und Vergleichsmenge höchstens im Verhältnis 2:3 standen. In allen Studien zeigte sich, dass auch bei Aufgaben mit arithmetischen Operationen vor dem Vergleich das Verhältnis zwischen dem Ergebnis der Operation und der Vergleichsmenge eine wesentliche Variable zur Vorhersage der Lösungshäufigkeit ist (z. B. Barth et al., 2005; McCrink & Spelke, 2010).

Im Gegensatz zu Barth et al. (2005) konnten Gilmore, McCarthy und Spelke (2007) zeigen, dass fünf- und sechsjährige Kinder auch symbolische Vergleichs-, Additions-, und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 überzufällig häufig lösen können. Insgesamt gibt es jedoch wenig Forschung im Bereich des symbolisch präsentierten approximativen Rechnens.

Es gibt hinreichend Belege für die Annahme, dass Kinder aufgrund eines angeborenen und sich mit dem Alter weiter entwickelnden Kernsystems in der Lage sind, bestimmte arithmetische Anforderungen approximativ lösen zu können. Gilmore et al. (2007) konnten nachweisen, dass die Fähigkeit, symbolische Additionsaufgaben approximativ lösen zu können, signifikant mit der Leistung in einem Test zu mathematischen Fertigkeiten im Kindergarten korreliert. Ähnliche Ergebnisse zeigten sich in Bezug auf nicht-symbolische Additionsaufgaben in der ersten Klasse, selbst unter Kontrolle von Alter, verbaler Intelligenz und Lesefähigkeiten (Gilmore, McCarthy & Spelke, 2010). Libertus, Feigenson und Halberda (2011) konnten nachweisen, dass sowohl die Präzision, die individuelle Wahrnehmungsschwelle als auch die Reaktionszeit signifikant mit der Leistung in Tests zur vorschulischen Mathematik korrelieren, auch unter Kontrolle von Alter und sprachlichen Fähigkeiten (Vokabular). In einer retroaktiven Studie erhoben

Halberda, Mazzocco und Feigenson (2008) die Fähigkeiten von Neuntklässlern im approximativen Kernsystem (ANS), deren mathematische Fähigkeiten seit der Beginn der Schulzeit jährlich mit verschiedenen standardisierten Messverfahren erfasst worden waren. Die ANS Fähigkeiten erklärten je nach eingesetztem Messverfahren zwischen 28 und 32% der Varianz in der mathematischen Leistung in der dritten Klasse. Die Autoren argumentieren dafür, dass eine solche rückwärtsgewandte Korrelation (der vorherzusagende Wert wurde sechs Jahre vor dem vorhersagenden Wert erhoben) zulässig sei, da das approximative Kernsystem als angeborenes Kernsystem eher als Voraussetzung für spätere mathematische Leistungen gelten müsse als umgekehrt. Alternativ ziehen sie jedoch in Betracht, dass intensive Beschäftigung mit mathematischen Inhalten gleichsam als Training für das approximative System wirken und so nachträglich zu einer Verbesserung führen könnte.

In einem querschnittlichen Design fanden Holloway und Ansari (2009) Hinweise darauf, dass die individuelle Ausprägung des „*numerical distance effect*“ (NDE) ein signifikanter Prädiktor für mathematische Schulleistung ist. Der NDE zeigt sich darin, dass die Entscheidung, welche von zwei Zahlen oder Mengen größer ist, umso schneller gelingt, je weiter der numerische Abstand zwischen den beiden Zahlen, bzw. der Kardinalität der Mengen ist, bei einem Abstand von 6 (bspw. 2 und 8) also schneller gelingt als bei einem Abstand von 1 (bspw. 5 und 6). Erfasst wurde der NDE in dieser Studie sowohl bei der symbolischen als auch bei der nicht-symbolischen Präsentation von Zahlen, bzw. Mengen. Dabei zeigte sich, dass der NDE bei symbolischen Zahlen unter Kontrolle von Alter, Lesefähigkeit, Verarbeitungsgeschwindigkeit symbolisch präsentierter Zahlen und nicht-symbolischem NDE ein signifikanter Prädiktor für schulische Mathematikleistung ist. Der NDE bei nicht-symbolischen Mengen hatte unter Kontrolle derselben

Variablen sowie dem symbolischen NDE keinen signifikanten Prädiktionswert.
De Smedt, Verschaffel und Ghesquiere (2009b) konnten in einer Längsschnittstudie zeigen, dass die individuelle Ausprägung des NDE zu Beginn der Beschulung ein Prädiktor für die schulische Mathematikleistung zu Beginn des zweiten Schuljahres ist. Diese Prädiktionsleistung blieb auch unter Kontrolle von Alter, Intelligenz und der Benenngeschwindigkeit arabischer Ziffern konstant.

Insgesamt kann also festgehalten werden, dass Fähigkeiten, die auf dem approximativen Kernsystem basieren, wichtige Prädiktoren für mathematische Leistung in der Schule sind. Dies gilt für unterschiedliche Aufgaben, die mithilfe des approximativen Kernsystems erledigt werden (Vergleich, Grundrechenarten [approximative Lösung]), für unterschiedliche Erfassungsmöglichkeiten der Leistungsfähigkeit (Präzision, Reaktionszeit, NDE) und für unterschiedliche Präsentationsformen der Aufgaben (symbolisch, nicht-symbolisch).

Das zweite, präzise Kernsystem ermöglicht es Menschen, Mengen mit einer geringen Anzahl von Objekten zu unterscheiden. Kaufmann, Lord, Reese und Volkmann (1949) prägten für diese Art der schnellen Benennung von Mengen bis zu sechs Objekten den Begriff „Subitizing“. Die genaue Anzahl der Objekte, für die ein Subitizing möglich ist, ist ein Streitpunkt in der Forschung. Feigenson, Carey und Hauser (2002) zeigten, dass zehn Monate alte Kinder in Habituationsstudien ein bis drei Objekte auseinanderhalten können, bei mehr Objekten jedoch scheitern. Chi und Klahr (1975) konnten zeigen, dass sich der Zählprozess sowohl für Erwachsene als auch für sechs Jahre alte Kinder in zwei Teilbereiche untergliedern lässt. Bis zu drei Objekte können mit hoher Präzision und geringer Reaktionszeit erkannt und benannt werden, was von den Autoren dem Subitizing zugeordnet wird. Ab vier Objekten steigen sowohl Fehlerrate als auch Reaktionszeit deutlich stärker an. Balakrishnan und Ashby (1992) fanden keine Hinweise für eine vor sechs Elementen liegende

Grenze und führen Millers (1956) „magical number 7“ als Begrenzung der Aufmerksamkeitskapazität als mögliche Ursache für die bisherigen Befunde an.

Bisher gibt es nur wenige Studien, die sich mit dem Einfluss des Subitizing auf die spätere Mathematikleistung in der Schule beschäftigen. So konnten Desoete und Grégoire (2006) in einer Längsschnittstudie nachweisen, dass Kinder, die ein Jahr vor Schuleintritt Schwächen im Subitizing zeigten, im ersten Schuljahr überdurchschnittlich häufig für schwache Leistungen in der Schulmathematik anfällig waren. In einer weiteren Studie konnten Kroesbergen, van Luit, van Lieshout, van Loosbroek und van de Rijt (2009) zeigen, dass Subitizing auch unter Kontrolle der Sprachfähigkeiten und der exekutiven Funktionen ein wichtiger Prädiktor für vorschulische mathematische Leistung sei. Nachfolgend soll nun ein Modell vorgestellt werden, in dem die Befunde zu den Kernsystemen, zusammen mit anderen Befunden, zu einem vollständigen Modell der Entwicklung arithmetischer Kompetenzen im Vor- und Grundschulalter zusammengefasst wurden.

1.2.2 Kompetenzstufenmodell nach Fritz & Ricken

Fritz und Ricken (2008) beschreiben arithmetische Kompetenzen in einem fünfstufigen Modell des sukzessiven Erwerbs einzelner Teilkonzepte. Das Modell basiert auf entwicklungspsychologischen Erkenntnissen zu mathematischen Fertigkeiten von Kindern von der Geburt bis zur Einschulung, die im Folgenden nach Alter der Kinder beim Erwerb dieser Fertigkeiten dargestellt werden sollen. Anschließend sollen die fünf Stufen des Modells näher erläutert und empirische Befunde zum Modell vorgestellt werden.

Das Kompetenzstufenmodell (Fritz & Ricken, 2008; Fritz, Ricken & Balzer, 2009) baut unter anderem auf den Ergebnissen Dehaenes (1997) auf, nach denen bereits Säuglinge über einen angeborenen Zahlensinn verfügen, der ihnen hilft, mit numerischen Quantitäten umzugehen. Dieser Zahlensinn lässt sich in die zwei in

Kapitel 1.2.1 beschriebenen Kernsysteme aufgliedern. Für Säuglinge ebenfalls belegt ist die Fähigkeit, einfache Additions- und Subtraktionshandlungen auf ihre Plausibilität hin zu prüfen. Wird Säuglingen auf die mit Mengen dargestellte Aufgabe 2 - 1 hin das Ergebnis 3 präsentiert, so betrachten sie dies signifikant länger, als wenn das ‚erwartete' korrekte Ergebnis dargeboten wird (Wynn, 1992). Brannon und van de Walle (2001) zeigten, dass Zweijährige ohne Kenntnisse der Zahlwortreihe die ordinalen Relationen von „größer" und „kleiner" im Zahlenraum bis 5 begreifen und danach handeln können. Anschließend entwickelt sich bis zum Alter von drei Jahren ein erstes kardinales Verständnis dafür, dass aufeinander folgende Zahlwörter größer werdende Mengen beschreiben (Le Corre et al., 2006; Wynn, 1990). Üblicherweise wird dieses Verständnis auch auf größere Mengen generalisiert, sobald es für die Zahl 4 erworben wurde, was im Allgemeinen mit dreieinhalb Jahren der Fall ist (Wynn, 1990).

Wenn sowohl Addition und Subtraktion als auch das Prinzip der Kardinalität sicher beherrscht werden, sind Kinder in der Lage, ein Verständnis vom Teil-Teil-Ganzes Konzept zu entwickeln, welches als besonders wichtig für die weitere mathematische Entwicklung angesehen wird (Fuson, 1988; Resnick, 1989). Hunting (2003) konnte nachweisen, dass Kinder bereits im Alter von vier Jahren einfache Teil-Teil-Ganzes-Aufgaben lösen können. Auf dem Verständnis aufbauend, dass jede Zahl für eine Menge steht und sich jede Menge wiederrum aus kleineren Teilmengen zusammensetzt (vgl. auch Piaget & Szeminska, 1975, zur Inklusionsbeziehung), entwickelt sich durch Integration der vorgenannten Fähigkeiten die Möglichkeit zu verstehen, dass jede durch ein Zahlwort repräsentierte Zahl sich von ihrem Vorgänger exakt um dieselbe Mächtigkeit unterscheidet. Dieses Verständnis ermöglicht es, die 4 als Abstand zwischen 1 und 5, aber auch zwischen 12 und 16 zu betrachten, also ein relationales Zahlverständnis

(Stern, 2003) zu entwickeln. Entsprechende Aufgaben können üblicherweise ab der zweiten Klasse sicher gelöst werden (Riley et al., 1983; Stern, 1992).

Fritz und Ricken (2008, S. 33 ff.) integrierten diese arithmetischen Konzepte in ein fünfstufiges Modell. Dieses Modell ermöglicht die Zuordnung, wann und in welcher Reihenfolge einzelne Konzepte erworben werden, und hilft zu erklären, in welcher Abhängigkeit sie voneinander stehen. Die Stufen des Modells werden im Normalfall im Alter zwischen vier und acht Jahren durchlaufen und ermöglichen somit in diesem Bereich eine altersunabhängige Fähigkeitseinschätzung. Das Modell lässt sich wie folgt zusammenfassen:

- *Stufe I:* Kleine Mengen können aus- und abgezählt werden und über 1–zu-1–Zuordnung miteinander verglichen werden.

  Beispielaufgabe: Gib mir fünf Plättchen.
- *Stufe II:* Es besteht ein Verständnis des Prinzips der Ordinalzahl, das heißt, Zahlen stehen für eine bestimmte Position in der Zahlwortreihe und haben somit einen Vorgänger und Nachfolger, die benannt werden können. Additions- und Subtraktionsaufgaben können durch Vor- und Rückwärtsbewegungen auf dem mentalen Zahlenstrahl gelöst werden.

  Beispielaufgabe: Wie heißt die Zahl, die vor der 6 kommt?
- *Stufe III:* Das Kardinalzahlprinzip wird verstanden, das heißt, Zahlen stehen nicht nur für eine bestimmte Position, sondern für eine bestimmte Anzahl. Additions- und Subtraktionsaufgaben können durch Weiterzählen gelöst werden, wobei sich ein sehr basales Teilmengen/Gesamtmengen-Konzept entwickelt

  Beispielaufgabe: Hier vor dir liegen 4 Plättchen. Unter meiner Hand sind noch 3 Plättchen versteckt. Wie viele Plättchen sind das zusammen?
- *Stufe IV:* Dies betrifft ein vertieftes Verständnis des Teil-Teil-Ganzes-

Konzepts, inklusive des Inklusionsprinzips, welches besagt, dass jede durch eine Zahl repräsentierte Menge die Mengen enthält, die durch die vorangegangenen Zahlen repräsentiert werden und so der Zusammenhang zwischen Teilmenge, Teilmenge und Gesamtmenge determiniert ist. Darum können nun auch Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Fragen nach der Ausgangs- oder Austauschmenge beantwortet werden.

Beispielaufgabe: [Vor dem Kind liegen blaue und rote Plättchen.] Gib mir bitte 5 Plättchen. 3 davon sollen rot sein.

- *Stufe V* umfasst das Verständnis, dass kongruente Intervalle zwischen bestimmten Zahlen der Zahlwortreihe bestehen. Das heißt, die Zahl 2 kann sowohl für den Abstand zwischen 4 und 6 stehen als auch für den zwischen 7 und 9.
- Verständnis der Beziehungen zwischen den Zahlen, denen das Verständnis des gleichmächtigen Abstands zugrunde liegt

  Beispielaufgabe: Wie heißt die Zahl, die um 3 kleiner ist als 6?

1.2.3 Mathematische Kompetenzen in der Grundschule: Bildungsstandards und Lehrplan

Während der Fokus in den vorangegangenen Kapiteln auf den psychologischen Erklärungsansätzen für frühe arithmetische Fähigkeiten lag, sollen in diesem Kapitel die mathematikdidaktisch begründeten Kompetenzerwartungen in der Grundschulzeit dargestellt werden. Infolge der internationalen Schulleistungsstudien wie beispielsweise PISA (Baumert et al., 2001) und IGLU (Bos et al., 2003) wurden durch die Kultusministerkonferenz (KMK) verpflichtende Bildungsstandards für die einzelnen Schulformen und Fächer festgelegt (KMK, 2005). Im Grundschulbereich legen die Bildungsstandards fest, welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler am Ende der Klasse 4 erworben haben sollen. Diese müssen von den Ländern als Grundlage für die fachspezifischen Anforderungen in die Lehrpläne übernommen werden. Damit sind sie nicht mehr input-, sondern outputorientiert, im Gegensatz zu älteren Lehrplänen, die festlegten, welche Inhalte behandelt werden sollten.

Durch die KMK (2005) wurden für das Fach Mathematik in der Grundschule fünf allgemeine Kompetenzen sowie fünf weitere inhaltsbezogene Kompetenzen festgelegt (Abb. 5). Die beiden Kompetenzbereiche sind hierbei nicht unabhängig. Beispielsweise können allgemeine Kompetenzen immer nur im Umgang mit konkreten Inhalten angewandt und erlernt werden. Dabei unterstützen sie gleichzeitig auch den verständigen Erwerb inhaltsbezogener Kompetenzen (MSW NRW, 2008). Auf Basis dieser Kompetenzen wurde ein fünfstufiges Kompetenzmodell entwickelt, um eine Definition von Mindest-, Regel- und Optimalstandards am Ende der Grundschulzeit (Jahrgangsstufe 4) zu ermöglichen (IQB, 2008). Dieses Modell lässt sich wie folgt zusammenfassen (dabei beziehen sich aus Gründen der Vergleichbarkeit alle Beispiele auf den Bereich Zahlen und Operationen):

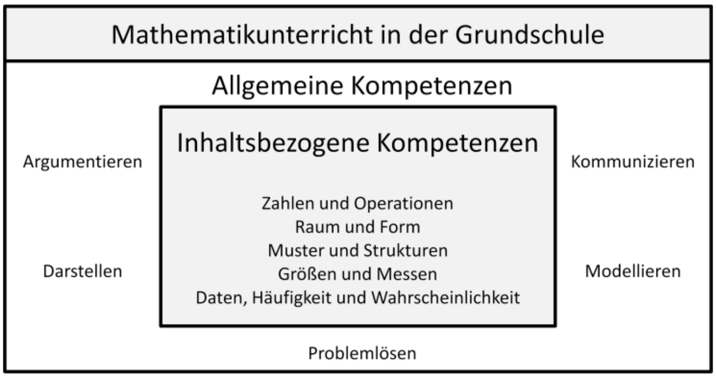

Abbildung 5: Bildungsstandards für das Fach Mathematik im Primarbereich (KMK, 2005)

- *Stufe I:* Routineprozeduren auf Grundlage einfachen begrifflichen Wissens
  Beispiele: Aufgaben zum kleinen Einmaleins werden beherrscht, Aufgaben zur Addition und Subtraktion können halbschriftlich gelöst werden.
- *Stufe II:* Einfache Anwendungen von Grundlagenwissen
  Beispiele: Addition, Subtraktion und Multiplikation können halbschriftlich und schriftlich gelöst werden, die Grundrechenarten können in einfachen

Sachaufgaben zielführend eingesetzt werden.

- *Stufe III:* Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen in einem vertrauten Kontext

  Beispiele: Alle halbschriftlichen und schriftlichen Rechenverfahren werden beherrscht (Division mit einstelligem Divisor), Verständnis der Beziehung zwischen Addition und Subtraktion bzw. Multiplikation und Division.

- *Stufe IV:* Sicheres und flexibles Anwenden von begrifflichem Wissen und Prozeduren im curricularen Umfang

  Beispiele: Rechenverfahren können flexibel in mehrschrittigen Rechnungen eingesetzt werden, komplexe Sachsituationen können angemessen modelliert, bearbeitet und dargestellt werden.

- *Stufe V:* Modellierung komplexer Probleme unter selbständiger Entwicklung geeigneter Strategien

  Beispiele: Mathematische Eigenschaften können für Problemlösungen genutzt werden (Faktorzerlegung natürlicher Zahlen), das Rechnen mit Bruchzahlen oder Dezimalzahlen stellt keine Hürde dar.

Ziel dieses Kompetenzmodells ist es somit, zum einen die Kompetenz von Schülern zu einem bestimmten Zeitpunkt präzise erfassen zu können (Evaluation). Auf der anderen Seite sollen Lehrer durch die detaillierte Beschreibung von Prozessen und mathematischen Inhalten befähigt werden, Lernfortschritte zu diagnostizieren und den Unterricht dementsprechend anpassen zu können (Reiss, Heinze & Pekrun, 2007). Die definierten Kompetenzbereiche wurden mit zwei Änderungen in die Grundschulehrpläne des Landes Nordrhein-Westfalen übernommen. Der inhaltliche Bereich Muster und Strukturen wurde nicht gesondert aufgeführt, sondern als integraler Bestandteil der anderen vier Bereiche verstanden.

Die beiden allgemeinen Bereiche Darstellen und Kommunizieren wurden zu einem einzigen zusammengefasst (MSW NRW, 2008). Darüber hinaus wurden für die Lehrkräfte im Bereich der inhaltsbezogenen Kompetenzen Zwischenziele genannt, die bis zum Ende der Schuleingangsphase (Ende der 2. Klasse) erreicht sein sollten.

In den vorangegangenen Kapiteln wurden drei unterschiedliche Möglichkeiten aufgezeigt, wie mathematische Leistung konzeptualisiert werden können. Feigenson et al. (2004) gehen von angeborenen mathematischen Kernsystemen aus, die sich mit der Entwicklung immer weiter verbessern und auf deren Basis sich die spätere Schulmathematik entfalten kann. Dem gegenüber stehen die kompetenzbasierten Ansätze von Fritz und Ricken (2008) sowie des IQB (2008). Im deduktiven Kompetenzmodell nach Fritz und Ricken (2008) liegt der Fokus auf den Konzepten, welche erworben werden müssen, um bestimmte Typen von Aufgaben mit einem bestimmten Verständnis lösen zu können. Der umgekehrte Weg wird im den Bildungsstandards zugrunde liegenden induktiven Kompetenzmodell (IQB, 2008) gewählt, das die Aufgaben fokussiert, die beim Erreichen einer bestimmten Kompetenzstufe gelöst werden können.

1.3 Zusammenhang von Arbeitsgedächtniskapazität und mathematischer Leistung

Es erscheint unmittelbar einsichtig, dass für die Lösung einer Vielzahl von Rechenaufgaben bestimmte Gedächtnisprozesse notwendig sind. So müssen beispielsweise bei einer mündlichen Sachaufgabe alle für die Rechnung notwendigen Elemente im Arbeitsgedächtnis abgelegt, in Verbindung mit dem Langzeitgedächtnis ein geeigneter Lösungsalgorithmus ausgewählt und gegebenenfalls Zwischenschritte im Arbeitsgedächtnis behalten werden, bis die endgültige Lösung präsentiert werden kann. Ebenso einsichtig erscheint, dass die notwendige Arbeitsgedächtniskapazität drastisch reduziert werden kann, wenn Algorithmen und Zwischenschritte auf einem Blatt Papier ‚zwischengespeichert' werden.

In einer der ersten Studien zum Zusammenhang von Arbeitsgedächtnis und Rechenleistung konnte Hitch (1978) für die mündliche Addition im Zahlenraum bis 1000 mit und ohne Zehner- und Hunderterübergang zeigen, dass Verzögerungen in der Verbalisierung der Ergebnisse dazu führen, dass Zwischenergebnisse wieder vergessen werden und auf diese Weise die Fehlerhäufigkeit steigt. Hitch (1978) konnte im Rahmen weiterer Experimente ebenfalls nachweisen, dass die Fehlerrate niedriger ausfiel, wenn den Probanden die Aufgabe zusätzlich zur mündlichen Darbietung teilweise oder vollständig visuell präsentiert wurde. Ein genereller Einfluss der Arbeitsgedächtniskapazität auf die mathematische Leistung gilt in der Forschung als unbestritten (vgl. DeStefano & LeFevre, 2004; Swanson & Jerman, 2006). Die Frage, welche Rolle die jeweils einzelnen Komponenten des Arbeitsgedächtnisses für mathematische Leistungen spielen, konnte noch nicht eindeutig beantwortet werden. Es gibt jedoch Hinweise darauf, dass bestimmte mathematische Aufgabenstellungen unterschiedliche Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis stellen (DeStefano & LeFevre, 2004).

Obwohl der Zusammenhang zwischen Arbeitsgedächtniskapazität und Rechenleistung als gesichert gelten kann, ergaben sich in Untersuchungen zum selben immer wieder bestimmte Probleme. So könnte es bei der Erfassung der Kapazität der phonologischen Schleife möglicherweise eine Rolle spielen, ob Aufgaben eingesetzt werden, die numerisches Wissen nutzen oder nicht, beispielsweise Ziffernspannen- und Silbenspannenaufgaben (Siegel & Ryan, 1989; McLean & Hitch, 1999). Darüber hinaus unterscheiden sich viele Untersuchungen in der Stichprobenzusammensetzung. So gibt es eine breite Forschungslinie, die sich mit der Frage beschäftigt, ob rechenschwache Kinder Probleme in bestimmten Komponenten des Arbeitsgedächtnisses haben, und wenn ja, ob diese ursächlich für das Vorhandensein der Rechenstörung sein könnten (Swanson & Jerman, 2006).

Darüber hinaus gibt es, wenn auch weniger, einige Befunde zum Zusammenhang von Arbeitsgedächtniskapazität und Mathematikleistung bei altersgemäß entwickelten Kindern. Diese deuten darauf hin, dass das Alter der Kinder ein wesentlicher Faktor dafür ist, welche Arbeitsgedächtniskomponenten für die Mathematik benötigt werden (de Smedt et al., 2009a; Meyer, Salimpoor, Wu, Geary & Menon, 2009). In den folgenden drei Unterkapiteln werden Befunde zum Zusammenhang von Arbeitsgedächtniskapazität und Rechenleistung getrennt nach den Komponenten des Arbeitsgedächtnisses dargestellt. Dabei wird ein besonderer Fokus darauf gelegt, mit welchen Materialien und Stichproben gearbeitet wurde.

1.3.1 Rechenleistung und Zentrale Exekutive

McLean & Hitch (1999) untersuchten in einer querschnittlichen Studie mit Dritt- und Viertklässlern, ob sich Kinder mit Problemen im mathematischen Bereich von solchen ohne Probleme unterscheiden. Zur Identifikation dieser Kinder wurde ein Test zur Schularithmetik eingesetzt. Zu jedem Kind mit Problemen im arithmetischen Bereich wurden je ein Kind gleichen Alters (und besserer mathematischer Leistung) und ein Kind gleicher Leistung (und jüngerem Alter) parallelisiert. Beim Vergleich mit den altersparallelisierten Kindern zeigten sich deutliche Defizite in fast allen zentralexekutiven Bereichen, vor allem jedoch im Bereich des schnellen Wechsels zwischen verschiedenen Aufgaben und der Verknüpfung mit Informationen aus dem Langzeitgedächtnis. Im letztgenannten Bereich zeigten sich auch signifikante Nachteile gegenüber den leistungsparallelisierten Kindern. Die Autoren sehen dies als Hinweis darauf an, dass Kinder mit Problemen im arithmetischen Bereich kaum Wissen über basales arithmetisches Wissen (kleines 1+1, etc.) im Langzeitgedächtnis abspeichern, da der Verfall im Arbeitsgedächtnis teilweise bereits einsetzt, bevor eine solche Speicherung stattfinden kann.

Andersson (2008) konnte diese Befunde im Wesentlichen replizieren. In einer Studie, in der Dritt- und Viertklässler Aufgaben zur Schularithmetik bearbeiteten, konnte er nachweisen, dass arithmetisches Faktenwissen im Wesentlichen durch die beiden zentralexekutiven Bereiche des schnellen Wechsels zwischen Aufgaben und der Langzeitgedächtnisaktivierung positiv beeinflusst wird. Darüber hinaus konnte nachgewiesen werden, dass bei komplexeren arithmetischen Aufgaben auch die Fähigkeit, zwei Aufgaben gleichzeitig auszuführen, ein wichtiger Prädiktor für die Leistung ist. Komplexe Aufgaben, so der Autor, erfordern stetige Überwachung und Koordination der einzelnen Teilschritte, um schlussendlich zu einem korrekten Ergebnis zu gelangen.

Für Textaufgaben konnte Andersson (2007) bei Zehnjährigen nachweisen, dass die Fähigkeit diese zu lösen wesentlich durch die Fähigkeit zum schnellen Wechsel zwischen Aufgaben beeinflusst werden. Demgegenüber stehen Befunde von Espy et al. (2004), die zeigen konnten, dass im Alter von zwei bis fünf Jahren diese Fähigkeit keinen Einfluss auf einfachere arithmetische Fähigkeiten wie das Subitizing, Zählen oder einstellige Additions- und Subtraktionsaufgaben hat. Aufgaben scheinen also eine gewisse Komplexität zu benötigen, damit zentralexekutive Komponenten zum Einsatz kommen, wenn Lösungsstrategien für bestimmte Aufgabenteile generiert oder gewechselt werden müssen. Ähnliche Befunde zeigten Krajewski, Schneider und Nieding (2008) in einer Längsschnittstudie, in der bei Kindergartenkindern der Einfluss der zentralen Exekutive auf die mathematischen Vorläuferfertigkeiten über die phonologische Bewusstheit, also die Lesevorläuferfertigkeiten mediiert wurde. Direkte Effekte sowohl auf Vorläuferfertigkeiten als auch auf schulmathematische Leistungen zum Ende der ersten Klasse konnten nicht nachgewiesen werden.

Bull & Scerif (2001) kamen in einer Querschnittsstudie mit Drittklässlern zu dem Schluss, dass die Generierung von Strategien für Kinder mit Schwächen im mathematischen Bereich kein Problem sei, da es keinen Zusammenhang zwischen der Lösungshäufigkeit bei Aufgaben zur Strategiegenerierung und der Leistung bei schulischen Mathematikaufgaben gab. Vielmehr scheint es so, als ob die Inhibition bisher erfolgreicher Strategien und der Wechsel auf andere, erfolgversprechendere Strategien für diese Kinder Probleme darstellen. Ähnliche Befunde fanden Passolunghi & Siegel (2004) auch bei Fünftklässlern, bei denen ebenfalls die schwächer ausgeprägte Inhibitionsfähigkeit bei rechenschwachen Kindern einen wichtigen Erklärungsansatz darstellt.

In einer Längsschnittstudie mit Kindern der ersten bis dritten Klasse wurde gezeigt, dass die Kapazität der zentralen Exekutive ein wichtiger Prädiktor für die Leistung bei reinen Rechenaufgaben und Textaufgaben ist, und das auch über andere Arbeitsgedächtnismaße, Intelligenz, Alter sowie Lese- und Sprachfertigkeiten hinaus (Swanson & Beebe-Frankenberger, 2004). Mathematische Leistungen ein Jahr später konnten durch die Kapazität der zentralen Exekutive ebenfalls noch erklärt werden, wenngleich sich hier ein stärkerer Effekt bei den Textaufgaben als bei den reinen Rechenaufgaben zeigte (Swanson, 2006). Der genaue Einfluss der zentralen Exekutive kann laut dem Autor nicht eindeutig bestimmt werden. Swanson (2006) vermutet, dass die Fähigkeit der zentralen Exekutive, Gedächtnisinhalte zu manipulieren oder mit Inhalten aus dem Langzeitgedächtnis zusammenzufügen, für mathematisches Problemlösen eine zentrale Rolle spielt. Drei Jahre nach der ersten Erhebungswelle zeigte sich, dass der Kapazitätszuwachs der Zentralen Exekutive der wesentliche Prädiktor für den Zuwachs der arithmetischen Leistung ist (Swanson, Jerman & Zheng, 2008). Darüber hinaus zeigte sich, dass die zentralexekutive Kapazität zum ersten Erhebungszeitpunkt sowohl ein wichtiger Prädiktor für das Wissen über mathematisches Problemlösen als auch für die Präzision bei der

Problemlösung selbst ist. Lediglich in Bezug auf reine Rechenaufgaben zeigte sich kein Prädiktionswert der Zentralen Exekutive.

In eine ähnliche Richtung gehen die Befunde von Grube und Barth (2004), die nachweisen konnten, dass die zentrale Exekutive bei Drittklässlern sowohl einen Einfluss auf die Präzision beim Lösen einfacher Rechenaufgaben im Zahlenraum bis 20 hat als auch auf die schulisch-arithmetische Leistung, auch unter Kontrolle des numerischen Basiswissens. Auch Bull, Espy & Wiebe (2008) fanden ähnliche Ergebnisse in einer zweijährigen Längsschnittstudie vom Kindergarten bis zur 2. Klasse, bei der zusätzlich die Prädiktion sprachlicher Variablen geprüft wurde. Dabei zeigte sich, dass eine hohe zentralexekutive Kapazität sowohl ein wichtiger Prädiktor für die momentane Leistung als auch für den späteren Lernzuwachs ist, und zwar nicht nur domänenspezifisch für Mathematik, sondern auch für andere Formen des Lernens, hier erfasst durch das Lesen.

Dem entgegengesetzt sind Befunde von de Smedt et al. (2009a), die in einer einjährigen Längsschnittstudie an Erstklässlern zeigen konnten, dass der Einfluss der zentralen Exekutive auf die schulmathematische Leistung von der ersten zur zweiten Klasse abnimmt und sich in die Subkomponenten, hier vornehmlich die phonologische Schleife, verlagert. Ehlert (2007, S. 244) fand in einem querschnittlichen Design mit Kindergartenkindern entsprechende Befunde im Bezug auf arithmetische Vorläuferfertigkeiten. Ähnliche Befunde mit einer Verlagerung in Richtung des visuell-räumlichen Skizzenblocks fanden Meyer et al. (2009) in Bezug auf mathematische Subtests des WIAT-II bei Kindern der zweiten und dritten Klasse. Eine mögliche Erklärung für diese Befunde ist eine stärkere Automatisierung und schnellere Durchführung von Standardaufgaben, die ein Eingreifen der zentralen Exekutive nicht mehr notwendig erscheinen lassen (Ehlert, 2007, S. 262; Meyer et al., 2009).

1.3.2 Rechenleistung und visuell-räumlicher Skizzenblock

In einer der ersten Studien zum Zusammenhang von Rechenleistung und visuell-räumlichem Arbeitsgedächtnis konnten McLean & Hitch (1999) zeigen, dass schwache Rechner im Vergleich zu gleich alten durchschnittlichen Rechnern deutlich schwächere Leistungen im räumlichen Arbeitsgedächtnis (Corsi Block), nicht aber im visuellen Arbeitsgedächtnis aufwiesen. Schuchardt und Mähler (2010) fanden heraus, dass rechenschwache Kinder der zweiten bis vierten Klassen im Vergleich zu durchschnittlichen Rechnern in beiden Bereichen des visuell-räumlichen Skizzenblocks Defizite aufwiesen. Kinder, die über die Rechenschwäche hinaus auch noch Defizite im Bereich der Lese-/Rechtschreibleistung (kombinierte Störung) aufwiesen, hatten dagegen Defizite in allen drei Bereichen des Arbeitsgedächtnisses. Im Gegensatz dazu konnten Bull und Johnston (1999) diese Effekte im visuell-räumlichen Bereich bei Kindern der dritten Klasse nicht finden, was von ihnen im Wesentlichen auf eine Verlagerung visueller Lösungsstrategien auf Faktenabrufstrategien zurückgeführt wird, die mit dem Alter immer wichtiger für die Lösung arithmetischer Probleme werden. Auch Schuchardt, Kunze, Grube und Hasselhorn (2006) konnten bei rechenschwachen Kindern der dritten Klasse keine Defizite im visuell-räumlichen Arbeitsgedächtnis nachweisen.

De Smedt et al. (2009a) fanden heraus, dass der Einfluss des visuell-räumlichen Skizzenblocks in der ersten Klasse, nicht mehr aber in der zweiten Klasse vorhanden ist. Dieser Befund wird so interpretiert, dass beim Erlernen früher Rechenfertigkeiten häufig noch anschauliche Repräsentationen wie zum Beispiel Plättchen, Figuren oder die Finger genutzt werden. Mit andauernder Beschulung wird dann jedoch üblicherweise auf andere Strategien zurückgegriffen, sodass auf den Einsatz dieser Strategien und damit die Nutzung des visuell-räumlichen Skizzenblocks verzichtet wird. Genau gegensätzliche Befunde finden Meyer et al.

(2009). In ihrer Untersuchung war der visuell-räumliche Skizzenblock in der zweiten Klasse noch bedeutungslos für mathematische Leistungen, während er in der dritten Klasse signifikant damit korrelierte. Die Autoren führen diese vermehrte Nutzung visuell-räumlicher Ressourcen darauf zurück, dass die Kinder numerische Repräsentationen schneller in geeignete Bilder umsetzen können und allgemein beim mathematischen Problemlösen geübter werden.

Krajewski, Schneider und Nieding (2008) konnten in ihrer Längsschnittstudie zeigen, dass sich hohe Kapazitäten im visuell-räumlichen Arbeitsgedächtnis direkt auf basale und höhere mathematische Vorläuferfertigkeiten auswirken, die den Einfluss auf die schulmathematische Leistung ein Jahr später mediieren. Auch Swanson (2006) konnte zeigen, dass das visuell-räumliche Arbeitsgedächtnis vor allem einen Einfluss auf einfache mathematische Problemstellungen wie reine Rechenaufgaben hat, nicht aber auf komplexere Problemlöseaufgaben. Die Befunde in Bezug auf reine Rechenaufgaben konnten auch zwei Jahre später repliziert werden (Swanson, Jerman & Zheng, 2008), allerdings war hier die ursprüngliche Kapazität im visuell-räumlichen Skizzenblock der wichtigste Prädiktor für die Präzision beim mathematischen Problemlösen. Auch in Bezug auf diese Entwicklungsrichtung gibt es widersprüchliche Befunde. So konnten beispielsweise Bull et al. (2008) in ihrer Längsschnittstudie zeigen, dass die Kapazität des visuell-räumlichen Skizzenblockes zu Beginn der Beschulung sowohl zu Beginn als auch zum Ende der ersten Klasse der wichtigste Prädiktor für mathematische Leistungen ist, während dies in der dritten Klasse nicht mehr der Fall ist.

Eine mögliche Erklärung für diese Entwicklung liefern Rasmussen & Bisanz (2005) in ihrer querschnittlichen Untersuchung von Kindergartenkindern und Erstklässlern. Beiden Gruppen wurden arithmetische Aufgaben zum einen verbal, zum anderen nonverbal (bildhaft, anschauliche Darstellung) präsentiert. Es zeigte sich, dass die Kindergartenkinder bei den nonverbalen Aufgaben signifikant bessere Leistungen erbrachten als bei den verbalen Aufgaben und dass der visuell-räumliche Skizzenblock der beste Prädiktor für diese Leistung war. Bei den Grundschülern hingegen war die Leistung bei beiden Aufgabentypen in etwa gleich gut und bei den verbalen Aufgaben die phonologische Schleife der wichtigste Prädiktor. Grundschüler scheinen also zum einen wesentlich geübter im Umgang mit verbalen mathematischen Problemstellungen zu sein und zum anderen durch diese Übung darauf trainiert, mathematische Probleme verbal zu repräsentieren, sodass auch im Arbeitsgedächtnis ein Repräsentationswechsel vom visuell-räumlichen Skizzenblock hin zur phonologischen Schleife vorzuliegen scheint.

1.3.3 Rechenleistung und phonologische Schleife

Andersson (2007) zeigte, dass die phonologische Schleife bei Kindern im Grundschulalter einen wichtigen Prädiktor für das Lösen von Textaufgaben darstellt. Kinder in diesem Alter scheinen stark auf phonologische Strategien zur Speicherung zurückzugreifen und nutzen die phonologische Schleife dabei als Speicher für die Problemrepräsentation und für die Speicherung von Aufgabenstellung und Zwischenergebnissen (Andersson, 2008).

De Smedt et al. (2009) zeigten in ihrer Längsschnittstudie, dass die phonologische Schleife mit andauernder Beschulung an Bedeutung gewinnt und zu einem signifikanten Prädiktor für die Rechenleistung wird. Eine mögliche Ursache für diese Hinwendung zu verbalen Strategien könnte sein, dass die Kinder in der Schule lernen, die visuell präsentierten Aufgabeninformationen (Zahlen, Rechenzeichen, Mengen) verbal zu rekodieren und damit zu arbeiten. Krajewski et al. (2008) konnten zeigen, dass der Einfluss der phonologischen Schleife auf frühe mathematische Fertigkeiten durch die phonologische Bewusstheit mediiert wird und keinen direkten Einfluss hat, sodass solche sprachlichen Fertigkeiten ebenfalls überprüft werden sollten.

Swanson und Beebe-Frankenberger (2004) konnten zeigen, dass die phonologische Schleife vor allem bei komplexeren Textaufgaben benötigt wird, während sie für einfache Rechenaufgaben nicht erforderlich ist. Eine mögliche Ursache hierfür könnte sein, dass die Kapazität der phonologischen Schleife bei simplen Aufgaben nicht annähernd ausgeschöpft wird und somit ein gegebenenfalls vorhandener Einfluss nicht sichtbar werden kann.

In einer Studie mit durchschnittlich rechnenden und rechenschwachen Kindern konnten Schuchardt, Kunze, Grube und Hasselhorn (2006) zeigen, dass die rechenschwachen Kinder allein in der phonologischen Schleife Defizite aufwiesen. Diese Defizite erschweren anscheinend den Aufbau von mathematischem Faktenwissen, da der Rechenprozess selbst gestört wird durch die fehlerhafte Speicherung der Aufgabenstellung und gegebenenfalls notwendiger Zwischenschritte.

1.3.4 Zusammenfassung

Rechenleistung steht in einem offenkundigen Zusammenhang mit der Arbeitsgedächtniskapazität. Jedoch offenbaren die dargestellten Befunde einige Unklarheiten – insbesondere, was den spezifischen Einfluss der einzelnen Komponenten im Modell nach Baddeley (1986) angeht.

Dieser Einfluss scheint in gewissem Maße vom Alter der untersuchten Probanden abhängig zu sein. Einige Befunde zum Einfluss der zentralen Exekutive deuten etwa darauf hin, dass die mathematischen Problemstellungen, die üblicherweise im frühen Kindergartenalter vorgelegt werden, nicht hinreichend komplex sind, um zentralexekutive Ressourcen zu aktivieren (Espy et al., 2004; Krajewski et al., 2008). Auf der anderen Seite gibt es Studien, die Belege dafür liefern, dass mit steigendem Alter die Bearbeitung bestimmter komplexer Aufgaben immer weiter automatisiert wird, sodass hierfür die Kapazität der Speichersysteme als Prädiktor ausreicht und nicht mehr auf zentralexekutive Ressourcen zurückgegriffen werden muss (de Smedt et al., 2009; Ehlert, 2007; Meyer et al., 2009). Zentralexekutive Kapazitäten werden also anscheinend vor allem bei komplexen und noch nicht automatisierten Problemstellungen benötigt. In diesem Zusammenhang lassen sich auch Befunde für die beiden Subsysteme finden. So konnten de Smedt et al. (2009) zeigen, dass sich der Einfluss des visuell-räumlichen Skizzenblocks von der ersten zur zweiten Klasse verringert, während der Einfluss der phonologischen Schleife zunimmt. Meyer et al. (2009) fanden die genau gegenläufige Entwicklung mit abnehmendem Einfluss im phonologischen und einer Zunahme im visuell-räumlichen Bereich.

Auch die Art der Aufgabenstellung scheint eine wichtige Variable dafür zu sein, welche Komponente des Arbeitsgedächtnisses Einfluss ausübt (vgl. DeStefano & LeFevre, 2004). So konnte etwa Andersson (2008) nachweisen, dass für Teil-Teil-Ganzes-Aufgaben wie 61 + __ = 73 eher visuell-räumliche Ressourcen benötigt werden. Dies wird damit begründet, dass zur Lösung der Aufgabe eine mentale Umstrukturierung der visuell präsentierten Aufgabenstellung vorgenommen werden muss (73 - 61 = __), die im visuell-räumlichen Arbeitsgedächtnis stattfindet. Auf der anderen Seite erfordern ‚normale' Additionsaufgaben (61 + 12 = __) keine visuell-räumliche Umstrukturierung, sondern werden verbal rekodiert und so in die phonologische Schleife übernommen und dort bearbeitet.

Eine dritte potenzielle Ursache für den differentiellen Einfluss einzelner Arbeitsgedächtniskomponenten stellt die Klassifikation von Kindern in verschiedene mathematische Leistungsgruppen dar, die nicht nach einheitlichen Kriterien erfolgt (ICD-10 F81.2, Prozentrang < x, etc.) und daher ebenfalls zu unterschiedlichen Kriterien führt. So fanden Schuchardt et al. (2006) bei Kindern mit einem

Prozentrang < 20 in einem standardisierten Rechentest heraus, dass sich diese von durchschnittlichen Kindern ausschließlich in Maßen der phonologischen Schleife unterschieden. Auf der anderen Seite fanden Schuchardt und Mähler (2010) bei nach ICD-10 als rechenschwach klassifizierten Kindern heraus, dass diese sich von durchschnittlichen Kindern nur in Maßen des visuell-räumlichen Skizzenblocks unterschieden.

1.4 Struktur der Arbeit und zentrale Forschungsfragen

Im weiteren Verlauf werden drei empirische Studien zum Zusammenhang von Arbeitsgedächtniskapazität und arithmetischer Leistungsfähigkeit vorgestellt und daran anschließend zusammenfassend diskutiert. In Kapitel 2 wird eine querschnittliche Studie zu Arbeitsgedächtnisunterschieden bei Kindern mit durchschnittlichen und Kindern mit unterdurchschnittlichen frühen arithmetischen Kompetenzen nach Fritz und Ricken (2008) vorgestellt. Dazu wurden in einem Screening Kinder ermittelt, die zu den oben genannten Gruppen gehören. In einem zweiten Schritt wurden diese in Bezug auf ihre Arbeitsgedächtniskapazität sowie ihre arithmetischen Kompetenzen und einige Kontrollvariablen hin untersucht. In dieser Studie wurden die folgenden Fragen untersucht:

1.) Unterscheiden sich Kinder mit durchschnittlicher arithmetischer Kompetenz von Kindern mit unterdurchschnittlicher arithmetischer Kompetenz in Bezug auf ihre Arbeitsgedächtniskapazität? Und wenn ja: In welchen Komponenten des Arbeitsgedächtnisses besteht dieser Unterschied?

   Hier wird in Rückgriff auf die bestehende Forschungslage (Bull & Scerif, 2001; McLean & Hitch, 1999, Passolunghi & Siegel, 2004) erwartet, dass sich Unterschiede insbesondere im Bereich der zentralen Exekutive und des visuell-räumlichen Skizzenblocks zeigen, während diese für die phonologische Schleife, wenn überhaupt, geringer ausfallen sollten.

2.) Ist die Arbeitsgedächtniskapazität unter Einbezug weiterer Kontrollvariablen und über alle Gruppen hinweg ein Prädiktor für arithmetische Leistungsfähigkeit?
Hier wird in Rückgriff auf die bestehende Forschungslage (Andersson, 2007; 2008; de Smedt et al., 2009a; Ehlert, 2007; Meyer et al., 2009) erwartet, dass vor allem die zentrale Exekutive ein wichtiger Prädiktor für arithmetische Kompetenz ist, während die beiden Subsysteme in dieser frühen Phase der mathematischen Entwicklung wesentlich schwächer in Erscheinung treten sollten.

3.) Unterscheidet sich der Prädiktionswert der einzelnen Arbeitsgedächtniskomponenten in Abhängigkeit von der Gruppenzugehörigkeit?
Diese Frage wurde in der Literatur bisher noch nicht direkt bearbeitet. Dennoch kann vermutet werden, dass die zentrale Exekutive in der altersadäquat rechnenden Gruppe einen geringeren Einfluss haben könnte als bei den altersinadäquat rechnenden Kindern, während der Einfluss der beiden anderen Subsysteme zunimmt.

In Kapitel 3 wird eine längsschnittliche Studie zum Zusammenhang von Arbeitsgedächtniskapazität und Fähigkeiten in Bezug auf die beiden Kernsysteme nach Feigenson et al. (2004) vorgestellt. In einer Vorstudie wurden hierbei geeignete Aufgaben zur Erfassung der Ausprägung der beiden Kernsysteme erstellt und auf ihre Tauglichkeit geprüft. Anschließend wurden zu Beginn des ersten Schuljahres die Fähigkeiten in den beiden Kernsystemen sowie die Arbeitsgedächtniskapazität und weitere Kontrollvariablen erhoben. Zum Ende des Schuljahres wurde dann die curriculare mathematische Leistung erfasst. In dieser Studie wurden die folgenden Fragen untersucht:

1.) Wie ausgeprägt sind die Fähigkeiten in den beiden Kernsystemen zu Beginn der Beschulung in Bezug auf die vier Grundrechenarten?
    Hier wird in Rückgriff auf die Forschung (Barth et al., 2005; 2009; Gilmore et al., 2007; 2010) erwartet, dass Kinder nicht-symbolisch präsentierte Probleme im Zahlenraum bis 100 in allen vier Grundrechenarten überzufällig häufig lösen können. Bei symbolisch präsentierten Aufgaben wird erwartet, dass dies für Aufgaben zur Addition und Subtraktion gelingt, nicht aber bei Division und Multiplikation.
2.) In welchem Zusammenhang stehen die beiden Kernsysteme mit dem Arbeitsgedächtnis?
    Diese Frage wurde bisher in der Literatur nicht bearbeitet. Es wird erwartet, dass vor allem der visuell-räumliche Skizzenblock eine Rolle spielt, da alle Probleme visuell präsentiert werden. Die niedrige Komplexität der Aufgaben spricht gegen die Nutzung der zentralen Exekutive und der fehlende sprachliche Anteil gegen die Nutzung der phonologischen Schleife.
3.) Haben die beiden Kernsysteme unter Kontrolle der Arbeitsgedächtniskapazität und anderer Variablen Einfluss auf curricular-mathematische Leistungen ein Jahr später?
    Mit Bezug auf die bisherige Forschung (Gilmore et al., 2010; Halberda et al, 2008; Libertus et al., 2011) wird erwartet, dass beide Kernsysteme einen signifikanten Einfluss auf curricular-mathematische Leistungen haben. Weiterhin sollte die Zentrale Exekutive ebenfalls signifikanten

Prädiktionswert haben (siehe Frage 2), während dies für den visuell-räumlichen Skizzenblock und die phonologische Schleife nicht oder nur in geringerem Umfang erwartet wird.

In Kapitel 4 wird eine querschnittliche Studie vorgestellt, in der überprüft wird, ob der Zusammenhang zwischen Arbeitsgedächtniskapazität und curricular-mathematischer Leistung als Funktion des Alters variiert. Zu diesem Zweck wurden Kinder der zweiten bis vierten Klassen auf ihre mathematische Leistungsfähigkeit, Leseleistung und Arbeitsgedächtniskapazität hin untersucht. In dieser Studie wurden die folgenden Fragen untersucht:

1.) Lässt sich die dreifaktorielle Struktur des Arbeitsgedächtnisses nachweisen, und zeigt sich ein signifikanter Zuwachs in den einzelnen Arbeitsgedächtniskomponenten über die Schuljahre hinweg?
    Mit Bezug auf die bisherige Forschung (de Smedt et al., 2009a; Gathercole et al, 2004; Hornung et al., 2011) wird erwartet, dass sich in der zweiten Klasse ein dreifaktorielles Arbeitsgedächtnis nachweisen lässt. Darüber hinaus werden signifikante Zuwächse in allen Komponenten über alle Jahrgangsstufen hinweg erwartet.
2.) Variiert der Einfluss der Arbeitsgedächtniskapazität auf die Mathematikleistung als Funktion der Jahrgangsstufe?
    Es wird mit Bezug auf die bisherige Forschung (de Smedt et al, 2009a; Meyer et al., 2009) erwartet, dass der Einfluss der zentralen Exekutive auf die Mathematikleistung zurückgeht. In Bezug auf die beiden Subkomponenten gibt es in der Forschung widersprüchliche Befunde. Tendenziell wird jedoch erwartet, dass dieser Einfluss stärker werden sollte.

Im abschließenden Kapitel 5 werden die Ergebnisse der drei Studien zusammenfassend diskutiert. Zu diesem Zweck werden zuerst die zentralen Befunde der einzelnen Studien zusammengefasst. Daran anschließend werden theoretische und praktische Implikationen dargelegt, die sich aus diesen Befunden ergeben.

Zusammenfassend werden in dieser Arbeit die folgenden Fragestellungen bearbeitet: Gibt es Unterschiede im Zusammenhang zwischen Arbeitsgedächtniskapazität und mathematischer Leistung als Funktion der:

1.) Gruppenzugehörigkeit zu bestimmten arithmetischen Leistungsgruppen?

2.) Jahrgangstufe / des Alters?

3.) Art der Aufgaben zur Erfassung der mathematischen Leistungsfähigkeit?

2. Working memory impact on children's arithmetic skills – a usage-deficit hypothesis

Abstract

We conducted a cross-sectional study regarding the relation between working memory capacity and early arithmetic skills. In a first screening with *N* =1,362 kindergarten and early primary school students we identified children with age-delayed arithmetic skills and matched children with age-adequate skills. These *n* = 170 children were then tested in more detail for their working memory capacity, arithmetic skills, and further variables like intelligence, naming speed and early reading and writing skills. We found that there were no differences between the two groups in terms of working memory capacity. However, linear regression analysis revealed that central executive, as well as visuo-spatial sketchpad capacity, were important predictors of arithmetic skills, even when controlling for several other variables. The novel finding of this study is that group membership moderates the correlation of visuo-spatial sketchpad capacity and arithmetic skills. This means that although both groups have similar cognitive capabilities, children with arithmetic difficulties make improper use of their visuo-spatial working memory. There are several implications of this usage-deficit hypothesis for research and math education.

Keywords: working memory, early math education, math problems

2.1 Theoretical background

One of the big challenges in primary school is the acquisition of elementary mathematics. However, a lot of children do not manage to achieve this knowledge. The Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS; Gonzales et al., 2008) showed that 33 % of all primary school students only have a very rudimentary mathematical understanding at the end of fourth grade. 10 % of all students do not even reach the low benchmark compared to international standards. As algebra and calculus are based on this elementary knowledge, these children are at a high risk for their later school career. Another five to eight percent of all children suffer from dyscalculia (Geary & Hoard, 2003; Hein, Bzufka, Neumärler, 2000; Shalev et al., 2000). These children also struggle with elementary mathematical knowledge, although, of course, there is some kind of overlap between both groups for sure. A common explanation for low achievement in the mathematical domain is that children have deficits in working memory (Baddeley, 1986) and its components (see Swanson & Jerman, 2006, for a review).

2.1.1 Working memory

Most research on the relation between working memory and math achievement uses the working memory model of Baddeley & Hitch (1974; see also Baddeley, 1986) as a theoretical framework. This model originally assumed three components, with the central executive as a control unit alongside the phonological loop and the visuo-spatial sketchpad as two subsidiary modal storage units. Empirical evidence for this three factor model can already be found in children at the age of six years (Gathercole, Pickering, Ambridge & Wearing, 2004). Baddeley (2000) extended his original model with a fourth component, the episodic buffer, as a multimodal storage unit for sequential and contextual episodes. There exists only limited research on this component and its relevance for achievement domains like mathematics. As such we excluded it from our current study.

The central executive works as a control unit, controlling the allocation of attention and the activities of the two subsidiary systems. Baddeley (1996) named four main separable abilities of the central executive: dual-task performance (the concurrent conduction of two different tasks), random generation (which allows to rapidly and repeatedly switch between two tasks), selective attention (which allows to focus on and remember task relevant information), and activation of long term memory (which allows to combine new sensory input with existing knowledge). The phonological loop and the visuo-spatial sketchpad are responsible for the storage of auditory and visuo-spatial information, respectively. Both components have limited storage capacities and, in some way, resemble short-term memory (Atkinson & Shiffrin, 1968). The phonological loop divides into a passive phonological store and an active subvocal rehearsal system, which also allows the recoding of non-auditory input into auditory code (see Gathercole & Baddeley, 1993, for a review). The visuo-spatial sketchpad can be divided in two different ways. On the one hand it has different systems for visual ("How does a book look?") and spatial ("Where on the desk is it?") information (see Baddeley & Logie, 1999, for a review). On the other hand there are also distinguishable parts responsible for static and dynamic information (Pickering, Gathercole, Hall & Lloyd, 2001).

It has been shown, that all three components of working memory are fragmented into several subcomponents. This fragmentation becomes a problem in the assessment of working memory, as most studies do not assess all subcomponents in detail as a matter of economy. This might lead to conflicting, however not comparable results, which is the case in many papers studying the relation of working memory and math achievement.

2.1.2 Working memory and math achievement

A general relevance of working memory capacity for math achievement is beyond controversy (see DeStefano & LeFevre, 2004; Swanson & Jerman, 2006; for a review). The particular relevance of the three components of working memory, however, is less clear cut.

Predicting math achievement by working memory capacity. De Stefano and LeFevre (2004) assumed that the influence of different working memory components varies as a function of the math domain assessed. Fürst & Hitch (2000) found that calculation requires fast access to long-term memory (central executive). This long-term memory activation might be a reason why central executive capacity is usually found to be a good predictor of math achievement. Additionally, phonological loop and central executive capacity is required when children solve problems and have to keep intermediate results in mind while calculating.

Bull, Espy and Wiebe (2008) found that children below the age of seven make heavy use of the visuo-spatial sketchpad when solving math problems. The authors attribute this to the fact, that the understanding of spatial relations and the ability to mentally manipulate visuo-spatial information are important for later math development. Similarly, Krajewski & Schneider (2009) found that early arithmetic skills are influenced by visuo-spatial sketchpad capacity as well, while on the other hand visuo-spatial sketchpad capacity had no direct effect on later math achievement at school, as it was completely mediated by early arithmetic skills. Rasmussen & Bisanz (2005) found that kindergarten children were better when solving non-verbal problems compared to verbal problems and that they heavily relied on the visuo-spatial sketchpad when doing so. First grade students, however, solved both types equally well and relied on the phonological loop when solving verbal problems. The authors attributed this change to increased practice with verbal problems as those are usually used in primary school.

Swanson (2006) showed that in grade one to three at primary school the influence of working memory differed depending on the type of math problems. Pure calculation was best predicted by visuo-spatial sketchpad capacity – alongside other cognitive variables. Word-problem solving, on the other hand, was best predicted by central executive capacity and reading achievement, which mediated phonological loop influence. In a longitudinal study with the same sample Swanson, Jerman and Zheng (2008) verified that visuo-spatial sketchpad and central executive capacity measured during first grade are highly predictive for math problem solving two years later.

De Smedt et al. (2009) showed in a longitudinal study that visuo-spatial sketchpad and central executive capacity as well as intelligence were highly predictive for first grade math achievement, while this influence switched over to phonological loop capacity at the beginning of second grade, when assessing curricular mathematics at both points. Meyer et al. (2009) found contradicting results, in the sense that in second grade phonological loop and central executive were highly predictive for math achievement, while in third grade visuo-spatial sketchpad took this role. The authors attributed this higher reliance on visuo-spatial resources to the hypothesis that older children were more capable of translating numerical representations into mental images and were more skilled at math problem solving overall.

Older primary school students seem to rely more on central executive capacity as indicated by many studies. Andersson (2007, 2008) showed that central executive and phonological loop measures are predictive for word problem solving, while visuo-spatial sketchpad measures were predictive for solving certain part-part-whole problems (i.e. 63 + __ = 71). Bull and Scerif (2001) found that students with low central executive capacity had few problems when learning new strategies, but tended to use these strategies in every situation, even if they were not appropriate for new types of problems. Thus it seemed that inhibition of learned strategies and switching to more appropriate strategies only work in a very limited way. Grube & Barth (2004) showed that in third grade central executive capacity, assessed with span backwards tasks, was more predictive for school achievement than prior knowledge in terms of solving simple addition and subtraction problems.

Working memory and dyscalculia. There is evidence that children with and without problems in mathematics differ in their working memory components' capacities (see McLean & Hitch, 1999). Geary et al. (2007) conducted a longitudinal study and found that dyscalculic kindergarten children had deficits in all components of working memory. The authors assume that the three components of working memory might affect different aspects of math learning. This could have led to the many inconsistent findings in the research literature.

Schuchardt, Mähler and Hasselhorn (2008) conducted a cross-sectional study with second to fourth grade students and showed that low achieving children had deficits in the visuo-spatial sketchpad compared to average-achieving children. The authors were struck by not having found deficits in the central executive. However, in their study low-achieving children were defined as being dyscalculic, that is, when meeting the criteria of ICD-10 F81.2. This led to the exclusion of many low-achieving children with low intelligence. In another study Schuchardt et al. (2006) found that low achieving third graders with deficits in mathematics had deficits in the phonological loop as well, while the other components were unspoiled. These findings might indicate that working memory deficits differ as a function of intelligence in children with low math achievement. Several studies (Gonzalez & Espinel 1999; Schuchardt & Mähler, 2009; Schuchardt, Mähler & Hasselhorn, 2010) showed that this is not the case, however. These studies rather indicated that children with low math achievement and low intelligence have the same working memory deficits as children with low math achievement and average intelligence. Swanson & Jerman (2006) conducted a meta-analysis and found that especially low verbal working memory predisposes children toward dyscalculia.

Most of the above mentioned studies compared average-achieving with low-achieving children of the same age. McLean & Hitch (1999) took a different approach and compared low-achieving fourth graders with normal-achieving fourth graders as well as younger children of lower grades who showed the same math achievement. They found differences in visuo-spatial and central executive capacity when comparing children matched according to age. These differences were smaller though still significant, especially with regard to long-term memory activation in the central executive, when comparing children who differed in age but were matched according to math achievement.

2.1.3 Research hypotheses

Most of the current research matches children with and without arithmetic deficits by age, when looking for differences in working memory capacity. This seems to be questionable as the question whether children with arithmetic deficits just have age-inadequate cognitive abilities or whether they have specific cognitive deficits is left unanswered. In this regard, achievement matching as conducted by McLean & Hitch (1999) needs to get more into the focus of research.

Additionally and as indicated by the literature, there is no concluding answer to the question of how early arithmetic skills are affected by different working memory components. This is partially due to the fact, that some working memory components got more attention (e.g., phonological loop) than others (e.g., visuo-spatial sketchpad). In this regard studies should test all three components to get a more comprehensive picture.

To our knowledge, there has been no study so far which investigated in how far children with arithmetic deficits make differential use of their low working memory component resources they have left (indicated by a moderation effect of group membership on the correlation of working memory components' capacity and math achievement).

On this behalf we conducted a study regarding the following hypotheses:

1.) Children with and without age-adequate arithmetic skills, differing in age but matched by math achievement, differ in terms of working memory capacity in the central executive as found by McLean & Hitch (1999).
2.) The capacities of all three working memory components are significant predictors of early arithmetic skills, even when controlling for other variables related to early arithmetic skills like age, naming speed, early reading and writing abilities as well as intelligence.
3.) Children with arithmetic deficits do not only have lower mean working memory component capacities, they also make worse use of it in solving math problems.

2.2 Method

We conducted a study with kindergarten children as well as first and second grade primary school students aged four to nine years. In this study we investigated early arithmetic skills and working memory capacity, as well as other cognitive variables. In a first step, we screened *N* = 1,362 (Age: *M* = 80.99 months, *SD* = 14.70; 677 boys, 685 girls) children from kindergartens and schools from urban areas in Northrhine-Westphalia (Germany). Children were tested for their arithmetic skills and intelligence in groups of up to five children in quiet rooms in their respective institution for 30 up to 40 minutes. Intelligence was assessed with the Coloured Progressive Matrices (Bulheller & Häcker, 2002). Arithmetic skills were assessed with a screening test based on a developmental model proposed by Fritz, Ricken &

Balzer (2009). This model allows the distinction of five different developmental levels. The arithmetical skills based on these levels are usually acquired during an age of four to nine years. Accordingly, the model was applicable for all tested children and allowed, in contrast to most curricular tests, for an age-independent assessment of arithmetic skills. The developmental model can be summarized as follows:

- Level I: The ability to distinguish small sets and to count and enumerate them.
- Level II: The ability to name predecessor and successor of a given number on some kind of mental number line and to solve small addition tasks by counting or use of the number word sequence.
- Level III: Understanding the coherence of number and set in a cardinal number concept.
- Level: Understanding the Part-part-whole concept, improving the ability to decompose and assemble sets.
- Level V: Understanding of congruent intervals between the numbers of the number line (relational numbers).

Based on this model an item pool of 32 items was constructed. Each grade (kindergarten, first, and second grade) had its own subtest of 18 items (anchor items linking the three subtests included). Subtest items were selected from all five stages, but had a focus on the stages children should have reached during that grade. All subtests had good reliabilities (Kindergarten, α =.819; first grade, α =.830; second grade, α =.788). We conducted a Rasch analysis for all 32 items to get comparable scores for all children. The test was scalable according to the two-parameter Rasch model with a person-separation reliability of .864.

On the basis of our screening results we selected children for two different groups. Group 1 included children with age-adequate achievement in both arithmetic and intelligence (40 ≤ age-adjusted percentile rank ≤ 80). Group 2 children were matched to Group 1 based on their arithmetic performance in the screening test, but they also had to fulfill two other conditions, namely age-adequate intelligence (40 ≤ age-adjusted percentile rank ≤ 80) and low arithmetic skills compared to age-adequate standards (age-adjusted percentile rank < 20).

With this sampling procedure, we identified two groups of children with similar arithmetic proficiency, but of different ages. Two months later both groups were tested again in more detail. All data analyses reported in the results section are based on this detailed data.

2.2.1 Main study

Sample and Procedure. From the initial sample of 1,362 children, *n* = 170 children (age: *M* = 82.41 months, *SD* = 15.42; Table 1) were selected into the two groups described above. The main study was conducted two months after the initial screening with two test sessions of about 30-40 minutes each in the respective institutions. All children were tested individually.

Table 1
Sample Size and Age (M and SD) for Full Sample and by Gender and Achievement Group (Group 1: Average Intelligence and Average Arithmetic Skills; Group 2: Average Intelligence and Below-Average Arithmetic Skills, Percentile Rank < 20).

Sample	Variable	Full Sample	Group 1	Group 2
Full sample	*n*	170	80	90
	Age	82.41 (15.42)	76.65 (15.75)	87.52 (13.22)
Boys	*n*	85	42	43
	Age	82.72 (16.56)	75.60 (16.06)	89.67 (14.02)
Girls	*N*	85	38	47
	Age	82.09 (14.27)	77.82 (15.53)	85.55 (12.26)

Material. During the first test session a preliminary version of the MARKO-D test (Fritz, Ricken & Balzer, in press) was administered. This test is based on the developmental model introduced above and assesses arithmetic skills in more detail than the screening test. The school version had 61 items with $\alpha = .916$, while the kindergarten version had 45 items with $\alpha = .867$. The school version included all items of the kindergarten version. All 61 items were scalable according to the two-parameter Rasch model with a person-separation reliability of 0.945 and a test-retest correlation (of the person parameters) with the screening test of $r = .825$, $p < .001$. After the arithmetic test the matrices subscale of CFT-1 (Cattell, Weiß & Osterland, 1997) was administered to measure cognitive ability. Reliability of this subscale was $\alpha = .792$.

In a second test session, we assessed working memory and naming speed as well as early reading and writing abilities. For further analysis we calculated factor scores for each of the three components of working memory and for early reading and writing abilities as well. All factor scores and reliabilities were calculated without example and warming up items.

Phonological loop capacity was assessed with the tasks 'digit span forward' and 'syllable span forward'. During the digit span forward task the instructor spoke single digits to children which these had to repeat. The task started with a span size of two digits and was continued until the child failed to answer the two tasks of a given span correctly or span nine tasks were administered (span size 2-9, 2 items per span, 16 tasks overall). Syllable span forward worked in a similar way. Children were given a span of senseless syllables which had to be repeated. We started with a span size of one syllable and continued until the child failed to answer two out of three items per span or span seven tasks were conducted (span size 1-7, 3 items per span, 21 tasks overall). Reliability of all tasks in the phonological loop factor was satisfactory (α = .750), test-retest reliability over 3 months was .609.

Visuo-spatial sketchpad capacity was assessed with the ‘corsi blocks’ and ‘matrix span’ tasks. During the corsi blocks task, the instructor presented a wooden plate (210x297mm) with nine red wooden blocks on it. The instructor tapped a given span of blocks in front of the child, which it had to immediately tap again after the instructor had finished the span. Tasks were continued until a child answered three out of four tasks wrong or finished all tasks of span eight (span size 2-8, four items per span, 28 tasks overall). During the matrices tasks children were shown a 4x4 matrix with certain squares marked in grey for five seconds. Afterwards children had to show which squares were marked on an empty 4x4 matrix. Tasks were continued until the child answered both tasks of a span wrong or both tasks of span eight were administered (span size 2-8, 2 items per span, 14 tasks overall + 4 sample tasks). All tasks of the visuo-spatial sketchpad factor had good reliability (α = .881), as well as sufficient three month test-retest reliability of .626.

Central executive capacity was assessed with the tasks ‘color span backward’, ‘digit span backward’ and ‘listening span’. Color span backward was used as an expanded example task to explain the meaning of ‘backward’ to younger children. During the instruction the instructor showed a toy pirate walking along several colored treasure chests (forward), while loudly announcing the chest’s colors (i.e. green – blue). Afterwards the child had to name what chests the pirate would walk by when going the same way back (blue – green). Two examples with a span size of two and two with a span size of three were shown to the child, before taking chests and pirate away and starting with the assessment tasks. Children were told the colors only, which had to be repeated backward. There was no stop criterion for this task (3 tasks with span size 2, 2 tasks with span size 3, 5 tasks overall + 4 sample tasks). Digit span backward tasks were conducted directly afterward. Children had to repeat given digits backward. Tasks were continued until a child answered both of a span wrong or both tasks of span eight were administered (span size 2-8, 2 items per span, 14 tasks overall). During the listening span tasks, children had to answer a given span of simple yes/no questions (e.g., “Is a mouse grey? […] Is a crocodile red? […]”). At the end of each span they had to repeat the given colors in the correct order. Tasks started with a span of two questions. Once a child answered two questions of a span correctly, there was a jump condition into the next span. If a child was unable to solve any of these tasks, the missed tasks of the earlier span were administered before ending the test. Tasks were continued until a child answered three out of four in a span wrong or sufficient tasks of span five were conducted (span size 2-5, 4 items per span, 16 tasks overall). All tasks of the central executive factor had good reliability (α = .765) and sufficient test-retest reliability over the course of three months (.707).

Naming speed was assessed with the fast naming of images. Children were shown two sheets of paper, each containing 16 images in a 4x4 matrix. Each image was meant to be named out aloud by each child with a one-syllable word. We assessed correct answers and solution time for each sheet and calculated the efficiency score introduced by Paas & van Merriënboer (1993): Efficiency = [z(correct) – z(time)]/square root(2). Correlation of both sheets was .704 and test retest-reliability over the course of three month was .581.

Early reading and writing abilities were assessed with rhyme detection, syllable segmentation and grammatical imitation tasks. During the rhyme detection tasks children had to tell whether two words rhyme or do not rhyme (10 tasks +4 example tasks). During syllable segmentation children had to clap their hands for each syllable in a given word (10 tasks + 4 example tasks). Grammatical imitation was tested with the grammatically correct reproduction of 12 sentences, which were clearly too long to memorize them within the phonological loop (12 tasks). All tasks included in the early reading and writing abilities factor had good reliability (α = .849) and a three month test-retest reliability of .532.

2.3 Results

In a first step of analysis means, standard deviations, and mean differences between the two groups of children with average intelligence but differences in age-adequate arithmetic skills are reported. In a second step correlation and regression analyses are conducted to find out what cognitive variables predict early arithmetic skills when controlling for other cognitive variables. In a final third step we look whether correlations within group are moderated by type of group, that is, whether the prediction of early arithmetic skills is moderated by group membership. All analyses are based on the data from the main study.

2.3.1 Descriptive statistics

Means and standard deviations for age, arithmetic, intelligence, working memory, naming speed as well as early reading and writing abilities are given in Table 2. All scores but age are z-standardized to allow easier comparison between groups and variables on a common metric.

With regard to the sampling variables (arithmetic, intelligence and age) the children only differed for age as intended. However, there were no statistically significant mean differences in any of the other variables as well.

Table 2

Means and Standard Deviations of Age, Measures of Arithmetic Skills, Intelligence, Working Memory, Naming Speed and Language by Achievement Group (Group 1: Average Intelligence and Average Arithmetic Skills; Group 2: Average Intelligence and Below-Average Arithmetic Skills, Percentile Rank < 20).

Group	Group 1 (n = 80)		Group 2 (n = 90)		Mean difference
Variable	*M*	*SD*	*M*	*SD*	(Cohen's d)
Age in month	76.65	15.75	87.52	13.22	-0.75***
Arithmetic	0.13	1.12	-0.11	0.87	0.24
Intelligence	0.06	1.13	-0.06	0.87	0.12
Central executive	-0.01	1.07	0.01	0.94	-0.02
Visuo-spatial sketchpad	-0.02	1.12	0.02	0.89	-0.04
Phonological loop	0.10	0.97	-0.09	1.02	0.19
Naming speed	0.03	1.20	-0.02	0.78	0.05
Early reading and writing	0.15	1.07	-0.13	0.92	0.28

Note: *** Difference is significant at the .001 level (2-tailed).

2.3.2 Correlation and regression analyses

Table 3

Pearson Correlations of Arithmetic Skills, Age, Working Memory Components, and Cognitive Variables

Variables	1	2	3	4	5	6	7	8
1 Arithmetic								
2 Age	.692							
3 Phonological loop	.457	.301						
4 Visuo-spatial sketchpad	.655	.613	.434					
5 Central executive	.757	.646	.508	.635				
6 Intelligence	.608	.534	.321	.546	.536			
7 Early reading and writing	.677	.466	.587	.420	.607	.397		
8 Naming speed	.502	.403	.403	.446	.463	.346	.552	

Note: All correlations are statistically significant, $p < .001$.

The following analyses were computed disregarding group membership. Correlation analyses (Table 3) revealed that working memory, as well as all other predictors, correlated significantly with arithmetic skills. To examine the specific weight of each predictor we conducted hierarchical regression analyses (Table 4). We entered working memory components first, to find out how other variables would affect their unique influence and age directly afterwards to rule out age-induced effects. All other variables were entered in the order in which they arise developmentally.

Table 4

Hierarchical Regression Analyses with Arithmetic Skills as Criterion Variable and Working Memory Component Capacities, Age, Intelligence, Naming Speed, and Early Reading and Writing as Predictors

Model	Variables & Model summary	*B*	*SE*	Β	*t*	*p*
Model	*F*(3, 166) = 92.705., $p < .001$, R^2 =					
	Phonological loop	.055	.056	.055	0.982	.327
	Visuo-spatial sketchpad	.282	.062	.282	4.527	<
	Central executive	.550	.065	.550	8.432	<
Model 2	*F*(4, 165) = 83.325, $p < .001$, R^2 = .669					
	Phonological loop	.081	.053	.081	1.529	.128
	Visuo-spatial sketchpad	.179	.063	.179	2.843	.005
	Central executive	.415	.068	.415	6.086	<
	Age	.019	.004	.290	4.610	<
Model 3	*F*(5, 164) = 72.206, $p < .001$, R^2 = .688					
	Phonological loop	.075	.052	.075	1.447	.150
	Visuo-spatial sketchpad	.134	.063	.134	2.125	.035
	Central executive	.379	.067	.379	5.632	<
	Age	.016	.004	.249	3.977	<
	Intelligence	.175	.056	.175	3.138	.002
Model 4	*F*(6, 163) = 62.083, $p < .001$, R^2 = .696					
	Phonological loop	.053	.052	.053	1.019	.309
	Visuo-spatial sketchpad	.117	.063	.117	1.856	.065
	Central executive	.363	.067	.363	5.398	<
	Age	.015	.004	.237	3.801	<
	Intelligence	.170	.055	.170	3.078	.002
	Naming speed	.106	.051	.106	2.067	.040
Model 5	*F*(7, 162) = 65.588, $p < .001$, R^2 = .739					
	Phonological loop	-	.052	-	-	.338
	Visuo-spatial sketchpad	.158	.059	.158	2.681	.008
	Central executive	.274	.065	.274	4.234	<
	Age	.013	.004	.198	3.393	.001
	Intelligence	.156	.051	.156	3.037	.003
	Naming speed	.020	.050	.020	0.401	.689
	Early reading and writing	.309	.059	.309	5.202	<

In a first step of analyses we determined the amount of unique variance in early arithmetic skills that was accounted for by the three components of working memory. As shown in Model 1, working memory accounted for nearly 63% of the variance, but only the central executive and the visuo-spatial sketchpad emerged as significant predictors. In Model 2 age was entered, as it was expected to be a significant predictor (due to the large age range in our sample). Entering this variable into the model significantly improved its predictive power by more than 4%. In a third step (Model 3) intelligence was entered and emerged as a significant predictor, while also improving model prediction significantly by nearly 2%. In Model 4 naming speed as a measure of long-term memory activation speed was entered into the model, which accounted for another 1% of variance. In this model visuo-spatial sketchpad capacity was no more a significant predictor of early arithmetic skills (p = .065). In Model 5 early reading and writing abilities were entered into the model, as a precursor of other school-relevant skills, and these abilities proved to be a significant predictor of early arithmetic as well. This model accounted for 74% of the variance of early arithmetic skills. Central executive, visuo-spatial sketchpad, age, intelligence and early reading and writing abilities emerged as significant predictors of early arithmetic skills in this final model.

2.3.3 Correlations moderated by group membership

The following analyses were conducted to find out whether the correlations of working memory component capacities and arithmetic skills differed as a function of group membership (children with versus without age-adequate arithmetic skills). In a first step we conducted separate correlation analyses for each of the two groups regarding the correlation of early arithmetic skills and working memory component capacities. Results are presented in Figure 6. All correlations were significant, $p <$ .001. We conducted z-tests to test for correlation differences between groups. We found significantly different correlations for the central executive (z = 2.009, p = .045) and the visuo-spatial sketchpad (z = 3.130, p = .002), but not for the phonological loop (z = 0.726, p = .468).

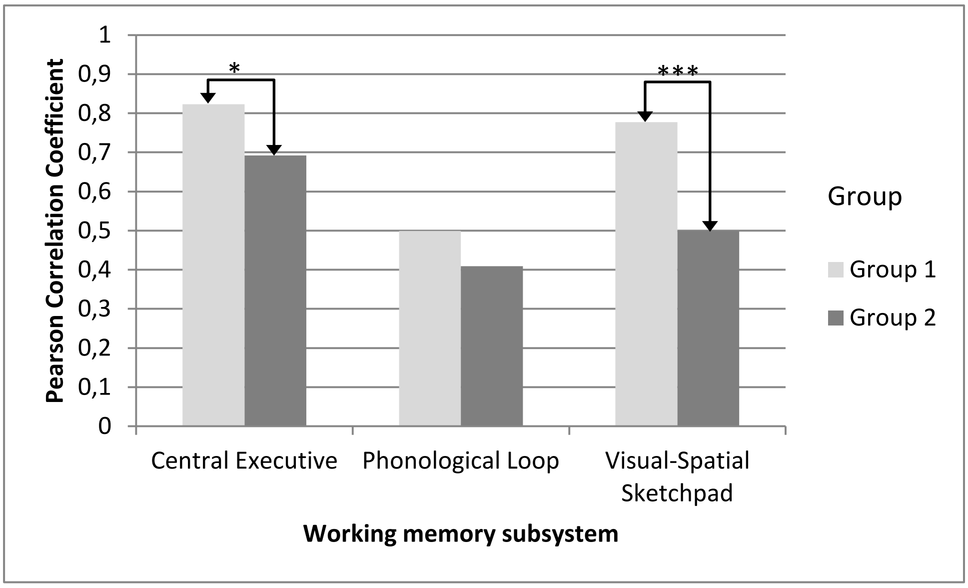

Figure 6: Correlations of arithmetic skills and working memory component capacities by achievement group (group 1: average intelligence and average arithmetic skills; group 2: average intelligence and below-average arithmetic skills, percentile rank < 20).

Note. * Difference is significant at the .05 level (2-tailed)

*** Difference is significant at the .001 level (2-tailed)

Finally, we ruled out that our correlation findings might be influenced by a reduction-of-range effect due to different variances across groups. Indeed, Levene tests for equality of variances revealed, for working memory component capacities and arithmetic skills, significant differences (Table 5). As a consequence, the same analyses were conducted with age-residuals of all four variables. Age residuals were used because age was the only variable that was varied by design, as we matched children of different age by arithmetic skills. As expected, for age-residuals Levene tests revealed that the differences in variance disappeared (Table 5). Computing the correlations on age-residuals led to lower correlations because of lower within-group variances (Figure 7). Nevertheless, the correlations within the two groups differed significantly for the visuo-spatial sketchpad (z = 1.963, p = .050), but neither for the central executive (z = 0.824, p = .410) nor for the phonological loop (z = -0.338, p = .735).

Table 5

Levene Tests for Equality of Variances between Groups for Arithmetic Skills and Working Memory Components (F and p values)

	z-scores		age residuals	
Variables	*F*	*p*	*F*	*P*
Arithmetic	8.348	.004	0.012	.911
Central executive	3.886	.050	0.165	.685
Phonological loop	0.169	.681	1.075	.301
Visuo-spatial sketchpad	6.443	.012	0.283	.595

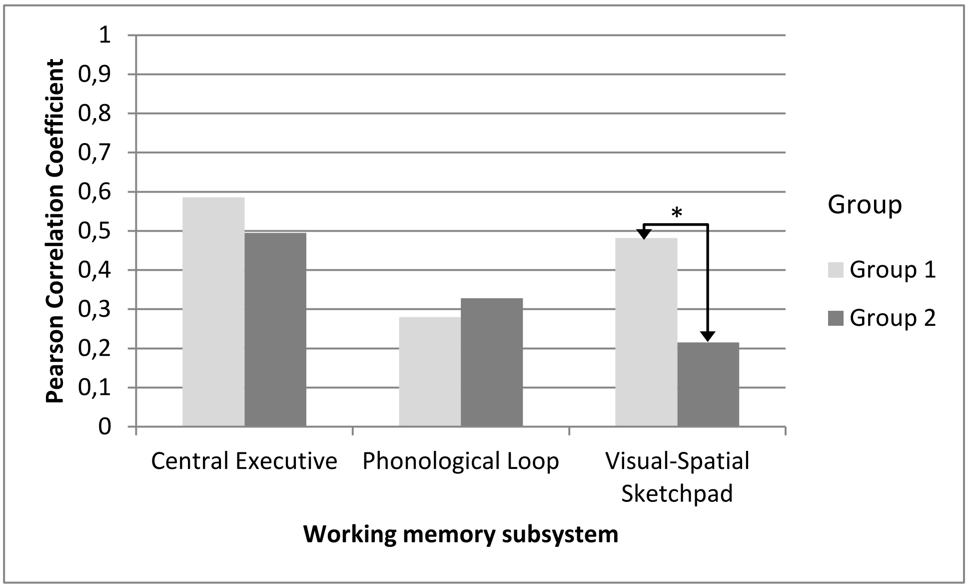

Figure 7: Correlation of arithmetic skills and working memory component capacities by achievement group, controlling for age (group 1: average intelligence and average arithmetic skills; group 2: average intelligence and below-average arithmetic skills, percentile rank < 20).

Note. * Difference is significant at the .05 level (2-tailed)

2.4 Discussion

By means of the present study we wanted to investigate three research hypotheses regarding the relevance of working memory capacity for early arithmetic skills in kindergarten children and first and second grade students. With regard to Hypothesis 1, we did not find any significant differences between a group of children with age-adequate average arithmetic skills and another group of children with age-delayed arithmetic skills when both groups were parallelized by arithmetic skills rather than age. This finding is inconsistent with the findings of McLean & Hitch (1999) who found that these two groups differed in long-term memory activation (central executive) with a large effect size (d = 1.11). In our study neither the central executive component of working memory (including listening span, which also taps this central executive function) nor naming speed as a measure of access speed to long-term memory differed significantly by group. Additionally we did not find any mean differences of cognitive variables between the two groups. The main aim of performance-matching is usually to find out whether below average older children differ from average younger children (1) only in terms of age-adequate performance, (2) in terms of a general delay of cognitive measures or (3) additionally to 2 have specific cognitive deficits. In our study we found evidence for the second idea and thus have to reject Hypothesis 1.

To test Hypothesis 2, we conducted hierarchical regression analyses to reveal the specific weight of each working memory component for predicting early arithmetic skills under control of other variables. The arithmetic skills test, based on the stage model of Fritz, Ricken & Balzer (2009), included verbal and non-verbal problems as well as rather complex and rather simple problems which could be solved in a very automatic way by older children. Accordingly, we expected the test to tap each component of working memory. It is generally accepted that the visuo-spatial sketchpad is especially important for early arithmetic skills, while the phonological loop is more involved in verbal and word problems (Andersson, 2007; Rasmussen & Bisanz, 2005; Swanson, 2006). Furthermore, it is assumed that the central executive plays a role when solving complex problems the solution of which is not fully automatized (de Smedt et al., 2009; Meyer et al., 2009). In this regard, we expected that all three working memory components would account for unique variance of arithmetic skills.

Analyses revealed that central executive and visuo-spatial sketchpad capacities, but not phonological loop capacities, are predictive for early arithmetic skills, when controlling for other predictors like age and further cognitive variables. A possible explanation could be that our children were just too young and untrained when dealing with verbal arithmetic problems. Our sample included children from kindergarten to second grade of two different groups. Group 1 children with age-adequate arithmetic skills were, on average, one year younger than Group 2 children with non age-adequate, delayed arithmetic skills. This idea is in line with Rasmussen & Bisanz (2005) who found that there is a shift in the usage of working memory slave systems from kindergarten to primary school, which might be based on training provided at school. It seems that some, especially weak children are rather resistant against using new (verbal) strategies taught at school – which is a novel finding of our study. This finding remains stable in all regression models and under control of several important known predictors of early arithmetic skills. Thus, Hypothesis 2 could be largely confirmed as both central executive as well as visuo-spatial sketchpad capacities predicted arithmetic skills in this early stage of math learning.

Hypothesis 3 stated that children with arithmetic deficits would not only have lower working memory capacities, but that they also would make worse use of it in solving arithmetic math problems. Because we had to reject Hypothesis 1, we have to reformulate Hypothesis 3 to a certain amount: Children with arithmetic deficits make worse use of their working memory capacities compared to younger children who are matched according to their math achievement. To our knowledge there has been no research regarding this question yet, though it would be of importance for the understanding of arithmetic difficulties of young children.

To our understanding, it is a premise of most researchers that the correlation between achievement and working memory capacity is not moderated by achievement group membership. This premise results from the point of view that correlations display linear relations. With respect to our results, there is reasonable doubt that this premise is true. There have been similar findings regarding age as a moderator of these correlations by de Smedt et al. (2009) and Meyer et al. (2009). One major difference between these findings and ours is, that they found a decreasing correlation of one component with math achievement, while the correlation for another component increased with age. In contrast we found a decrease in the visuo-spatial sketchpad correlation, a decrease in the central executive correlation – which might however result from reduction of range effects – and no change with regard to the phonological loop. Thus, while increasing age leads to different strategies being used (Rasmussen & Bisanz, 2005), which require different aspects of working memory, math problems lead to a deficit in working memory usage, which possibly relies on low (visuo-spatial) strategy use. We would like to introduce the term usage-deficit hypothesis for this phenomenon.

Kindergarten children and early primary school students who perform at average usually rely heavily on the visuo-spatial sketchpad to solve math problems (Bull et al., 2005; Krajewski et al., 2008; Rasmussen & Bisanz, 2005), which is often attributed to the use of visual strategies like imaging strategies or spatial strategies like finger counting. It could be that these children are unable to connect their counting abilities with the visualization of the represented sets. Further research with this age group should focus the question whether or not children at risk for math problem struggle at using these strategies, do not use them at all or start to use them later in their life, when they are of little or no help solving the math problems they are facing at that given time. Another explanation offered by the literature is that these children are not able to visually link abstract numbers with concrete sets and understand that both represent the same quantity (Fritz et al., 2009), a problem which is already tackled in current trainings by showing children different ways to connect numbers with sets (i.e. Marko-T, Gerlach, Fritz & Leutner, in press)

Thus on the practical side, our findings suggest that if children with arithmetic difficulties do have the necessary cognitive capacities but just fail to make proper use of them (as implicated by low correlations), this usage deficit could be remedied by proper strategy training. Marko-T focuses the relation between numbers and sets and helps children to visualize these. Another idea could be to implement a training program on how to use visuo-spatial memory strategies in an arithmetic context, like visualizing an abstract arithmetic problem like 8 divided by 2 into the concrete idea of equally sharing 8 candies with a friend. In a next step it seems very helpful to implement such a training on visualizing abstract arithmetic problems and manipulate these visualizations in ways that helps solving the problem.

So far, our findings on the usage-deficit hypothesis and its implications are limited to preschool and early primary school age as well as the arithmetic domain. To generalize these findings further research should conduct related analyses with children of different age groups and with problems from other math domains like geometry or probability theory. Furthermore our findings are limited as we only compared average achieving children with children of equal arithmetic skill but older age, because we were interested in the question whether or not children of the same achievement level differed in terms of working memory. However, to generalize our findings it seems necessary to find out whether our proposed usage-deficit exists between children of the same age, but with average and low math achievement. Our last impulse for further research is the idea to train young children on how to use, for example, visuo-spatial memory strategies in arithmetic and see if this training has generalized effects on other domains, which might be more effective for school success then a pure math training.

2.5 References

Andersson, U. (2007). The contribution of working memory to children's mathematical word problem solving. *Applied Cognitive Psychology, 21*, 1201-1216.

Andersson, U. (2008). Working memory as a predictor of written arithmetic skills in children: The importance of central executive functions. *British Journal of Educational Psychology, 78*, 181-203.

Ashcraft, M.H., & Faust, M.W. (1994). Mathematics anxiety and mental arithmetic performance: An exploratory investigation. *Cognition and Emotion, 8,* 97–125.

Baddeley, A.D. (1986). *Working memory.* Oxford: Clarendon Press.

Baddeley, A.D. (1996). Exploring the central executive. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 49A*, 5-28.

Baddeley, A.D. (2000). The episodic buffer: A new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences, 4,* 417‑423.

Baddeley, A.D., & Hitch, G.J. (1974). Working memory. In G. H. Bower (ed.), *The psychology of learning and motivation: Advances in research and theory* (Vol. 8, pp. 47‑90). New York: Academic Press.

Baddeley, A.D., & Logie, R.H. (1999). The multiple-component model. In A. Miyake & P. Shah (Eds.), *Models of working memory: Mechanisms of active maintenance and executive control* (pp. 28–61). Cambridge, England: Cambridge University Press.

Barth, H., La Mont, K., Lipton, J., Dehaene, S., Kanwisher, N., & Spelke, E.S.

(2006). Non-symbolic arithmetic in adults and young children. *Cognition, 98*, 199-222.

Barth, H., La Mont, K., Lipton, J., & Spelke, E.S. (2005). Abstract number and arithmetic in preschool children. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 102*, 14116-14121.

Bos, W., Bonsen, M., Baumert, J., Prenzel, M., Selter, C., & Walther, G. (Hrsg.). (2008). *TIMSS 2007. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich* [Math and science skills of elementary students in Germany in an international comparison]. Münster: Waxmann.

Brannon, E.M., & Van de Walle, G.A. (2001): The development of ordinal numerical competence in young children. C*ognitive Psychology, 43*, 53–81.

Bulheller, S. & Häcker H.O. (Hrsg.) (2002). *Coloured Progressive Matrices (CPM). Deutsche Bearbeitung und Normierung nach J. C. Raven.* Frankfurt: Pearson Assessment.

Bull, R., Espy, K., & Wiebe, S. A. (2008). Short-term memory, working memory, and executive functioning in preschoolers: Longitudinal predictors of mathematical achievement at age 7 years. *Developmental Neuropsychology, 33*, 205-228.

Bull, R., Johnston, R., & Roy, J. A. (1999). Exploring the roles of the visual-spatial sketchpad and central executive in children's arithmetical skills: Views from cognition and developmental neuropsychology. *Developmental Neuropsychology, 15*, 421–442.

Bull, R., & Scerif, G. (2001). Executive functioning as a predictor of children's mathematics ability: Inhibition, switching, and working memory. *Developmental Neuropsychology*, *19*, 273–293.

Cattell, R.B., Weiß, R.H., & Osterland, J. (1997). *CFT 1. Grundintelligenztest Skala 1. 5. Revidierte Auflage* (Culture Fair Intelligence Test, Scale 1 – 5th edition revised). Göttingen: Hogrefe.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

De Smedt, B., Janssen, R., Bouwens, K., Verschaffel, L., Boets, B., & Ghesquière, P. (2009). Working memory and individual differences in mathematics achievement: A longitudinal study from first grade to second grade. *Journal of Experimental Child Psychology*, *103*, 186-201.

DeStefano, D., & LeFevre, J.A. (2004). The role of working memory in mental arithmetic. *European Journal of Cognitive Psychology, 16,* 353-386.

Feigenson, L., Carey, S., & Hauser, M. (2002): The representations underlying infants´ choice of more: object file versus analog magnitudes. *Psychological Science*, *13,* 150–156.

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. S. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences, 8,* 307-314.

Francis, D.J., Fletcher, J.M., Stuebing, K.K., Lyon, G.R., Shaywitz, B.A., & Shaywitz, S.E. (2005). Psychometric approaches to the identification of LD: IQ and achievement scores are not sufficient. *Journal of Learning Disabilities*, *28,* 98-108.

Fritz, A., Ricken, G., & Balzer, L. (2009). Warum fällt manchen Schülerinnen und

Schülern das Rechnen schwer? – Entwicklung arithmetischer Kompetenzen im Vor- und frühen Grundschulalter [Why do some students have difficulties with calculating? – Development of arithmetical skills in pre- and primary school ages]. In A. Fritz & S. Schmidt, *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (pp. 12-29). Weinheim: Beltz.

Fritz, A., Ricken, G. & Balzer, L. (in press). *Marko – D. Testverfahren zur Erfassung mathematischer und rechnerischer Konzepte im Vorschulalter* [MARKO-D. Test for the measurement of mathematical concepts in kindergarten]. Göttingen: Hogrefe.

Fuchs, L.S., Compton, D.L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J.D., & Hamlett, C.L. (2005). The prevention, identification and cognitive determinants of math difficulties. *Journal of Educational Psychology, 97,* 493-513.

Fuchs, D., Mock, D., Morgan, P.L., & Young, C.L. (2003). Responsiveness-to-intervention: Definitions, evidence, and implications for the learning disabilities construct. *Learning Disabilities Research & Practice, 18,* 157-171.

Fuson, K.C. (1988): *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer.

Gathercole, S., & Baddeley, A.D. (1993). *Working memory and language. Essays in cognitive psychology*. Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates.

Gathercole, S.E., & Pickering, S.J. (2000). Working memory deficits in children with low achievements in the national curriculum at 7 years of age. *British Journal of Educational Psychology, 70*, 177–194.

Gathercole, S. E., Pickering, S. J., Ambridge, B., & Wearing, H. (2004). The structure of working memory from 4 to 15 years of age. *Developmental Psychology, 40*, 177–190.

Gathercole, S.E., Pickering, S.J., Knight, C., & Stegmann, Z. (2004). Working memory skills and educational attainment: Evidence from national curriculum assessments at 7 and 14 years of age. *Applied Cognitive Psychology, 18*, 1–16.

Gaupp, N. (2003). Dyskalkulie – *Arbeitsgedächtnisdefizite und Defizite numerischer Basiskompetenzen rechenschwacher Kinder* [Working memory impairments and impairments of numerical core competencies within children with dyscalculia]. Berlin: Logos.

Geary, D.C., Hamson, C.O., & Hoard, M.K. (2000). Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability. *Journal of Experimental Child Psychology, 77*, 236–263.

Geary, D.C., & Hoard, M.K. (2005). Learning disabilities in arithmetic and mathematics. Theoretical and empirical perspectives. In J.I.D. Campbell (Ed.). *Handbook of mathematical cognition* (pp. 253-267). Psychology Press. New York, NY.

Gerlach, M., Fritz, A. & Leutner, D. (in press). Marko – T. Trainingsverfahren für mathematische und rechnerische Konzepte im Vorschulalter [Marko – T. A training of mathematical and arithmetical concepts for preschoolers]. Göttingen: Hogrefe.

González, J.E.J., & Espínel, A.I.G. (1999). Is IQ-achievement discrepancy relevant in the definition of arithmetic learning disabilities? *Learning Disability Quarterly, 22,* 291-301.

Grube, D., & Barth, U. (2004). Rechenleistung bei Grundschülern. Zur Rolle von Arbeitsgedächtnis und basalem Faktenwissen [Arithmetic achievement of primary school students. The role of working memory and basic factual knowledge]. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 18,* 245–248.

Hasselhorn, M., Grube, D., & Mähler, C. (2000). Theoretisches Rahmenmodell für ein Diagnostikum zur differentiellen Funktionsanalyse des phonologischen Arbeitsgedächtnisses [Theoretical framework for diagnostics of differential functional analyses of phonological working memory]. In M. Hasselhorn, W. Schneider & H. Marx (Hrsg.), *Diagnostik von Lese-Rechtschreibschwierigkeiten. Tests und Trends – Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik* (Vol. 1, pp. 167-181). Göttingen: Hogrefe.

Hein, J., Bzufka, M.W., & Neumärler, K.J. (2000). The specific disorders of arithmetic skills. Prevalence studies in a rural and an urban population sample and their clinic-neuropsychological validation. *European Child/Adolescent Psychiatry, 9, Supplement 2,* 87-101.

Holmes, J., & Adams, J. W. (2006). Working memory and children's mathematical skills: Implications for mathematical development and mathematics curricula. *Educational Psychology, 26,* 339–366.

Holmes, J., Adams, J. W., & Hamilton, C. J. (2008). The relationship between visuospatial sketchpad capacity and children's mathematical skills. *European Journal of Cognitive Psychology, 20,* 272–289.

Hunting, R.P. (2003). Part-whole number knowledge in preschool children. *Journal* *of Mathematical Behavior, 22*, 217–235.

Klauer, K.J. (1992). In Mathematik mehr leistungsschwache Mädchen, im Lesen und Rechtschreiben mehr leistungsschwache Jungen? Zur Diagnostik von Teilleistungsschwächen [Mathematics has more low-achieving girls, reading and writing have more low-achieving boys? The assessment of specific learning disabilities]. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 24,* 48-65.

Krajewski, K., Schneider, W., & Nieding, G. (2008). Zur Bedeutung von Arbeitsgedächtnis, Intelligenz, phonologischer Bewusstheit und früher Mengen-Zahlen-Kompetenz beim Übergang vom Kindergarten in die Grundschule [The relevance of working memory, intelligence, phonological awareness and early set-number-competence during the transition from kindergarten to primary school). *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 55*, 100 – 113.

Le Corre, M., van de Walle, G., Brannon, E.M., & Carey, S. (2006). Re-visiting the competence/performance debate in the acquisition of the counting principles. *Cognitive Psychology, 52,* 130–169.

Lipton, J., & Spelke, E.S. (2003): Origins of number sense: Large-number discrimination in human infants. *Psychological Science*, *14,* 396-401.

McLean, J.F., & Hitch, G.J. (1999). Working memory impairments in children with specific arithmetic learning difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, *74,* 240-260.

Meyer, M.L., Salimpoor, V.N., Wu, S.S., Geary, D.C., Menon, V. (2009). Differential contribution of specific working memory components to mathematics achievement in 2nd and 3rd graders. *Learning and Individual Differences, 20*, 101-109.

Muth, K. D. (1984). Solving arithmetic word problems: Role of reading and computational skills. *Journal of Educational Psychology, 76,* 205–210.

Paas, F., & Van Merriënboer, J.J.G. (1993). The efficiency of instructional conditions: An approach to combine mental-effort and performance measures. *Human Factors, 35,* 737-743.

Piaget, J. (1965). *The child´s conception of number*. New York: Norton (first published in French, 1941).

Pickering, S.J., Gathercole, S.E., Hall, M., & Lloyd, S.A. (2001). Development of memory for pattern and path: Further evidence for the fractionation of visuo-spatial memory. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 54,* 397–420.

Rasmussen, C., & Bisanz, J. (2005). Representations and working memory in early arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology, 91*, 137-157.

Resnick, L.-B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44*, 162–169.

Riley, M.S., Greeno, J.G., & Heller, J.H. (1983): Development of children´s problem-solving ability in arithmetic. In Ginsburg, H.P. (ed.): *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York: Academic Press.

Schuchardt, K., Kunze, J., Grube, D., & Hasselhorn, M. (2006). Arbeitsgedächtnisdefizite bei Kindern mit schwachen Rechen- und

Schriftsprachleistungen [Working memory deficits in children with low math and writing achievement]. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 20,* 261-268.

Schuchardt, K., Mähler, C., & Hasselhorn, M. (2008). Working memory deficits in children with specific learning disorders. *Journal of Learning Disabilities, 41,* 514-523.

Schuchardt, K., & Mähler, C. (2009). Working memory functioning in children with learning disabilities: Does intelligence make a difference? *Journal of Intellectual Disability Research, 53,* 3-10.

Schuchardt, K., Mähler, C., & Hasselhorn, M. (2010). Arbeitsgedächtnisfunktionen bei rechenschwachen Kindern mit und ohne Dyskalkuliediagnose [Working memory deficits in children with poor math achievement with or without dyscalculia diagnosis]. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 57,* 290-298.

Siegler, R.S., & Opfer, J. (2003): The development of numerical estimation: evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science, 14,* 237–243.

Spelke, E.S., & Kinzler, K.D. (2007): Core knowledge. *Developmental Science, 10,* 89–96.

Starkey, P., Spelke, E.S., & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition*, *36,* 97-127.

Stern, E. (1992): Spontaneous use of conceptual mathematical knowledge in elementary school children. *Contemporary Educational Psychology, 17,* 266–277.

Stern, E. (2003): Früh übt sich – Neuere Ergebnisse aus der LOGIK-Studie zum Lösen mathematischer Textaufgaben [It is early practice – New results from the LOGIK-study regarding mathematical word problems]. In Fritz, A./Ricken, G./Schmidt, S. (Eds.), *Handbuch Rechenschwäche* (pp. 116-130). Weinheim: Beltz.

Swanson, H.L. (2006). Cross-sectional and incremental changes in working memory and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 98,* 265–281.

Swanson, H.L., & Beebe-Frankenberger, M. (2004). The relationship between working memory and mathematical problem solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties. *Journal of Educational Psychology, 96*, 471–491.

Swanson, H.L., & Jerman, O. (2006). Math disabilities: A selective meta-analysis of the literature. *Review of Educational Research, 76*, 249-274.

Swanson, H.L., Jerman, O., & Zheng, X. (2008). Growth in working memory and mathematical problem solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties. *Journal of Educational Psychology, 100*, 343-379.

Von Aster, M. (1993). Neurowissenschaftliche Ergebnisse und Erklärungsansätze zu Rechenstörungen [Neuroscientific results and explanations on dyscalculia]. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Eds.), *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie (pp. 163-178). Ein Handbuch.* Weinheim: Beltz.

Wilson, K.M., & Swanson, H.L. (2001). Are mathematics disabilities due to a domain-general or a domain-specific working memory deficit? *Journal of*

Learning Disabilities, 34, 237–248.

World Health Organization - WHO (2007). ICD-10: International Statistical Classification of diseases and related health problems: tenth revision (3rd Edition). Geneva, Switzerland.

Wynn, K. (1990). Children´s understanding of counting. *Cognition*, *36*, 155–193.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, *358*, 749–750.

Xu, F., & Spelke, E.S. (2000): Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition, 74*, B1–B11.

Xu, F. (2003): Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representations. *Cognition, 89*, B15–B25.

3. Approximate arithmetic and working memory as prerequisites of early school arithmetic

Abstract

Recent studies showed that kindergarten children can solve addition, subtraction, doubling and halving problems using a core system for the approximate representation of numerical magnitude. In Study 1, 34 first-grade students in their first week of schooling solved approximate arithmetic problems in a number range up to 100 regarding all four basic operations. Problems were presented non-symbolically and symbolically. Students solved all non-symbolic problems above chance. However, they could only solve symbolic addition problems above chance and without relying on non-arithmetic strategies.

In study 2, 66 first graders were tested for their approximate arithmetic achievement, working memory capacity, subitizing, phonological awareness, naming speed and early arithmetic concepts at the beginning of first grade and again at the beginning of second grade. Non-symbolic arithmetic achievement seems to be largely independent from other cognitive systems other than subitizing. Symbolic arithmetic achievement, however, was also highly influenced by early arithmetic concepts. Only non-symbolic arithmetic achievement was a significant predictor of later school success when controlling for all other variables.

Keywords: core systems of number, early math education, working memory

3.1 Theoretical background

Understanding formal arithmetic is very difficult for primary school students. At least one third of all fourth graders in the TIMS study did not reach the intermediate benchmark they were expected to reach with proper formal schooling (Gonzales et al., 2008). However, studies showed that even kindergarten children can solve certain approximate arithmetic problems in a number range up to 100 (Barth et al., 2006; Barth, Baron, Spelke & Carey, 2009; Gilmore, McCarthy & Spelke, 2007, 2010; McCrink & Spelke, 2010). This ability has been described in the theory of numerical core systems (Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004; Xu, 2003), which is based on the idea of an innate number sense (Dehaene, 1997). Gilmore et al. (2010) showed that these early approximate abilities predict later precise arithmetic achievement. Other studies showed that working memory (Baddeley, 1986) is another important predictor of precise arithmetic achievement in kindergarten and early primary school (Bull, Espy & Wiebe, 2008; Krajewski & Schneider, 2009). However, there has been no longitudinal study so far which investigated how working memory capacity and approximate arithmetic achievement predict later arithmetic school success and what the unique contribution of each of them is.

3.1.1 Core systems of number and arithmetic

Feigenson et al. (2004) named two core systems based on the number sense theory of Dehaene (1997). Core system 1 allows the approximate representation of numerical magnitudes, while core system 2 is used for the precise representation of distinct individuals.

Core system 1 helps when solving comparison problems with two given sets. The distinction is rather imprecise and its precision is based on the ratio of the magnitudes of the two sets. This means that while a person might be able to distinguish two sets of 40 and 80 objects (ratio 4:8), there may be problems when doing the same for two sets of 70 vs. 80 objects (ratio 7:8). Thus this just-noticeable-difference in ratio follows the Weber-Fechner law, which states that this difference is proportional to the magnitude of the stimuli. Furthermore, this ratio increases with age. Xu and Spelke (2000) found by means of habituation studies that six-month-old children are able to distinguish sets at a 1:2 ratio. Xu & Arrigia (2007) showed that ten-month-old children can already distinguish sets at a 2:3 ratio. Adults can even handle ratios up to 7:8, though performance still gets worse the closer the ratio approaches 1 (Barth, Kanwisher & Spelke, 2003).

Core system 2 helps people to quickly keep track of small amounts. The exact number of objects that can be tracked by this system is a controversial issue. Antell and Keating (1983) showed that neonates up to an age of one week can distinguish sets of two and three items, but were unable to do so with bigger sets like four and six. Similarly, Feigenson, Carey and Hauser (2002) showed that ten- and twelve-month-old children can do this for sets up to three items, but not for any larger sets. Balakrishnan and Ashby (1992) reanalyzed data from various studies and found no evidence for the claim that a subitizing limit exists for at least up to six items. They conclude that other findings claiming the finding of such a limit just measure limited attention, similar to the findings of Miller (1956) regarding the ‘magical number seven’.

Current research showed that during development children learn to use core system 1 based abilities not only to solve simple comparison problems, but to solve approximate basic arithmetic operation problems as well. Barth, LaMont, Lipton and Spelke (2005; Barth et al., 2006) showed that preschool children can solve addition problems in a number range up to 60 above chance, when those problems were embedded in comparison tasks. This means children solved the addition of two given sets, compared this sum to another given set and indicated which one was larger.

Gilmore et al. (2007) found that five- and six-year-old kindergarten children solved comparison, addition and subtraction problems in a number range up to 100, even when problems were presented with Arabic numerals (symbolic) instead of sets (non-symbolic), although these findings lack replication. Furthermore, Barth et al. (2009) showed that kindergarten children and first grade students can solve non-symbolic doubling (multiplication) and halving (division) problems with given sets. McCrink and Spelke (2010) expanded these results and showed that children solved problems like ‘multiply by 2.5’ or ‘multiply by 4’. In all these studies the ratio of the two sets was crucial for solution probabilities, which indicates involvement of core system 1.

There have been several studies dealing with abilities based on core system 1. Common names for phenomena based on this core system are based on the way they are presented to subjects like ‘non-symbolic arithmetic’ or ‘symbolic arithmetic without instruction’. As both presentation types rely on the approximate number system, we will use the term ‘approximate arithmetic’ in this paper to deal with problems that include (a) a basic arithmetic operation on two given sets and (b) the comparison of the result with another given set (c) without relying on counting but on the core system for the approximate representation of numerical magnitudes.

Many researchers showed that children have some understanding of the four basic arithmetic operations prior to schooling. The more important question for education is whether this understanding is helpful for the learning of formal arithmetic. Gilmore et al. (2007, supplemental information) showed that it is correlated with arithmetic achievement in kindergarten, assessed with counting, ordinal number knowledge, number lines, measurement, sets and graphs. Even more, it is also an important predictor of first grade mathematic success, even when controlling for age, verbal intelligence and reading literacy (Gilmore et al., 2010). Halberda, Mazzocco and Feigenson (2008) found that ninth grade approximate number system (ANS) acuity retrospectively correlated with math performance back in kindergarten. De Smedt, Verschaffel and Ghesquiere (2009b) found significant correlations between symbolic number comparison and school mathematics. On the other hand Holloway and Ansari (2009) found no significant correlation of either symbolic or non-symbolic distance effect or reaction time – when solving comparison tasks – with school mathematics. Up to now it is not fully understood how core system 1 influences school mathematics, as the current findings inconclusive. It could be that core system 1 is more important for early school arithmetic, than it is for later years.

There are only few studies regarding core system 2 and its influence on school success. Desoete and Grégoire (2006) conducted a longitudinal study which showed that weak subitizing one year before school predicts weak school arithmetic in first grade. Furthermore, Kroesbergen, van Luit, van Lieshout, van Loosbroek and van de Rijt (2009) showed that subitizing predicts preschool arithmetic achievement, even when controlling for language and executive functioning.

3.1.2 Predictors of arithmetic achievement in kindergarten and primary school

Reflecting upon the results of the studies discussed above, the question arises whether approximate arithmetic relies solely on core system 1 or if it is influenced by other cognitive variables as well. The capacities of the three components of working memory (Baddeley, 1986) are possible candidates for this, as high capacity usually contributes to better math achievement (see De Stefano & LeFevre, 2004, for a review). Working memory as described by Baddeley consists of three major components. The central executive is an attention control unit (Baddeley, 1996) and is involved in complex mathematical tasks that are not fully automatized yet (Meyer et al., 2009). As approximate arithmetic always involves two tasks (arithmetic operation and comparison) it seems likely that the central executive may be involved in these problems. However, if these tasks are already automatized they could be worked upon solely in the subsidiary storage units. The phonological loop is the storage unit for auditory information and is involved in word problems (Andersson, 2007) and keeping track of accurate intermediary results (Andersson, 2008). As there is not much auditory information involved in current core system 1 problems, phonological loop influence seems highly unlikely. The visuo-spatial sketchpad is the storage system for visual and spatial information and very important for early arithmetic (de Smedt et al., 2009a; Krajewski, Schneider & Nieding, 2008). As all problem relevant information is presented visually it seems reasonable that this subsystem is involved.

We want to test whether approximate arithmetic abilities predict early school arithmetic. However, such a prediction would be of little use, when not checking for other variables influencing early school arithmetic. The literature indicated that a major contribution should be expected from working memory capacity. Other possible variables that predict early school arithmetic are subitizing (Kaufman, Lord, Reese & Volkmann, 1949) as a measure of core system 2, rapid naming speed (Denckla & Rudel, 1974; Swanson & Kim, 2007), phonological awareness (Wagner & Torgesen, 1987) and preschool arithmetic skills based on the model of early arithmetic concepts by Fritz, Ricken and Balzer (2009). As approximate arithmetic and subitizing are both based on the same innate number sense, we expected them to be highly correlated and wanted to find out which one is more important for early school arithmetic. Rapid naming speed is a measure of fast fact retrieval from long-term memory which is very important for early school arithmetic, keeping in mind that children are asked to learn addition and multiplication tables, which is mainly fact retrieval. Phonological awareness is a predecessor of reading and writing skills, which correlates highly with school mathematics, like most other school subjects.

Last but not least, early arithmetic concepts should be taken into account as a measure of precise arithmetic preschool knowledge, to find out if school success is based on the innate number sense or on early arithmetic concepts achieved at home or in preschool – although these may have their base in number sense skills as well.

3.1.3 Research questions

In sum, there are four major issues addressed in the presented studies. First, all four basic operations (addition, subtraction, multiplication, division) are implemented in one study to test whether there is an understanding of all four basic arithmetic operations, before they are trained in school. Second, there is little research on the exact influence of presentation format – symbolic or non-symbolic – on approximate arithmetic. Thus both formats are tested to find out if there are fundamental differences between them. Third, it is still unclear how approximate arithmetic abilities are correlated with other cognitive variables like working memory. Fourth, results on the predictive value of approximate arithmetic abilities and subitizing for later school success are still ambiguous and it has to be validated if these abilities remain influential when controlling for other known predictors of early mathematic achievement.

We conducted two studies to shed some light on these issues. We carried out a cross-sectional piloting Study 1 to investigate to what extent children at school entrance age can solve approximate arithmetic problems of all four basic arithmetic operations and of both presentation types. In study 2, we conducted a one-year longitudinal study to investigate two questions. In a first step we analyzed how approximate arithmetic achievement is influenced by working memory capacity, subitizing, naming speed, phonological awareness and early arithmetic concepts. In a second step we analyzed which of these variables predict school success one year later. By means of these studies we wanted to test the following hypotheses:

(1) Study 1: (a) Children at school entrance age can solve problems of all basic arithmetic operations approximately in a number range up to 100; (b) however addition and subtraction are easier than multiplication and division.

(2) Study 1: Children at school entrance age solve non-symbolic problems better than symbolic ones.

(3) Study 2: Different approximate arithmetic variables (non-symbolic – symbolic; different arithmetic operations) are correlated with each other and furthermore with subitizing, visuo-spatial sketchpad capacity and early arithmetic concepts, but not with naming speed, phonological loop or central executive capacity or phonological awareness.

(4) Study 2: Approximate arithmetic achievement predicts school success one year later, even when controlling for other variables (working memory, core system 2, naming speed, phonological awareness, early arithmetic concepts).

3.2 Study 1

In our first study we investigated whether children at school entrance age can solve approximate arithmetic problems of all basic operations above chance. In addition, we wanted to find out whether there is an impact of presentation type (non-symbolic/symbolic).

3.2.1 Method

Sample & Procedure. N = 34 first-grade students (17 boys, 17 girls) aged 70 to 90 months (M = 79.3, SD = 4.1) from a German primary school were tested within three weeks after their first day in school. Testing was conducted in individual settings for about 30-40 minutes, respectively. All problems were presented on a laptop with a screen size of 10 inches and a resolution of 1024x600 pixels using Microsoft PowerPoint.

Material. We used problems of all four basic arithmetic operations and both presentation types in a number range up to 100. Non-symbolic multiplication and division problems were preceded by two example problems to help children understand what they were expected to do.

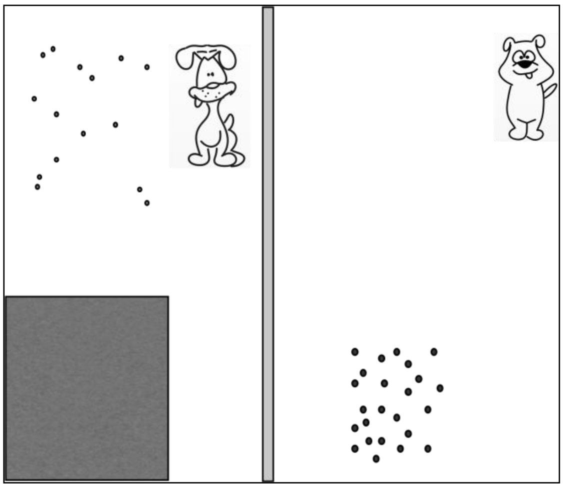

Figure 8: Example problem for non-symbolic addition.

Children received 24 non-symbolic addition problems, 21 non-symbolic subtraction problems, 16 non-symbolic multiplication problems, and 16 non-symbolic division problems. On each trial children saw an animated arithmetic episode with two cartoon characters having different amounts of dots and they had to decide which character had more (Figure 8).

During non-symbolic addition problems children saw two sets of blue dots falling behind an occluder on the left side, afterwards they were shown a set of red dots on the right side and had to decide which character had more dots now. Non-symbolic addition problems were the same Gilmore et al. (2010) used. Non-symbolic subtraction worked similarly. A blue set of dots fell behind an occluder; afterwards some blue dots moved out of the occlusion and were taken away. Now children were presented a red set for the other character and had to decide who had more. During non-symbolic multiplication there were two (or three) cartoon characters on the left side of the screen and children were shown they all had the same amount of dots. However, they could only see one character's blue set of dots, because the other sets were hidden behind an occluder from the very beginning. Afterwards the character to the right got a red set of dots and children had to compare who had more, the two (three) characters to the left or the one character to the right. During non-symbolic division problems there were also two (or three) characters on the left side of the screen. These characters had a set of blue dots which they wanted to share equally. On the right side of the screen was a single character with a set of red dots. Children were asked (example for two characters to the left): 'If this one [pointing to the leftmost character] leaves the scene and takes his dots with him, who has more: This one [pointing on remaining character on the left side] or this one [pointing on the character to the right]?'

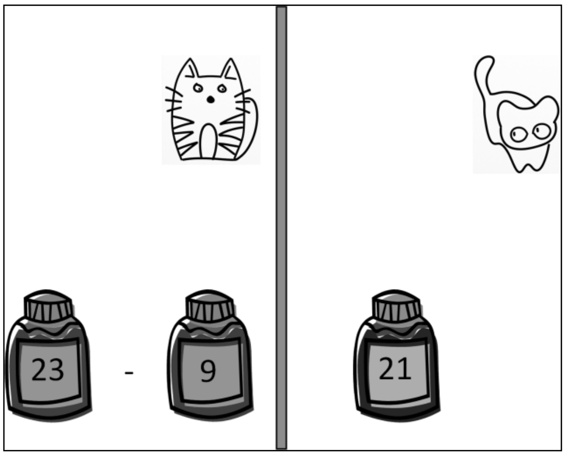

Figure 9: Example problem for symbolic subtraction.

Furthermore we used 24 symbolic addition, 24 symbolic subtraction, 8 symbolic multiplication and 8 symbolic division problems. Our symbolic addition problems were the same Gilmore et al. (2010) used for non-symbolic addition, while the symbolic subtraction problems were the same Gilmore et al. (2007) used. Problems were read out aloud to children, while presenting a computer-animated cartoon story on screen (Figure 9). An example for such a problem (symbolic subtraction) would be: ‘Tigercat has 23 marbles and gives 9 of them away. Kitty has 12 marbles. Who has more?’

As can be seen easily the number of approximate arithmetic problems is not very balanced across different operations and presentation types. As said above we used the 24 addition problems of Gilmore et al. (2010) and the 24 subtraction problems of Gilmore et al. (2007). There was good theoretical support that children at this age could solve non-symbolic division and multiplication problems as well. We used 16 (8 by 2 and 8 by 3) problems of each operation, because this was enough to show that this is the case. From a theoretical point of view it was least likely that children can solve symbolic multiplication and division problems at that age, so we used 8 problems for economic reasons. 8 items would not be enough to make reliable statements on an individual level, but enough to show whether the sample mean solution probability was above chance.

All approximate arithmetic problems can be found in Appendix A.1. Across trials the dot arrays differed by ratio (4:5, 4:6, 4:7). Children had to indicate the correct solution by pointing on a character to the left or to the right. Within each problem category for 50% of the problems the correct response was left and vice versa, the sequence of correct left/right responses following a random order. We also tested for several alternative, non-arithmetic strategies in Appendix A.1 similarly to Gilmore et al. (2010).

3.2.2 Results and discussion

We obtained achievement scores for each participant for approximate arithmetic problems by computing relative frequencies of correct solutions within problem categories. Average achievement for all problem categories is presented in Table 6. T-tests were conducted to test whether means differed significantly from guessing probability (50%). Children solved all problems above chance and without relying on non-arithmetic strategies (see Appendix A.1), except for symbolic subtraction and division. As children solved all non-symbolic problems above chance, our data are in line with Hypothesis 1a for non-symbolic problems.

The findings regarding symbolic subtraction contradict the results of Gilmore et al. (2007). Our children were of older age than the ones in the sample of Gilmore et al. (2007) and we used exactly the same problems. In our view, there are two possible reasons why this happened. First, German kindergarten does not have any sort of curriculum and usually does not teach any early mathematic contents to kindergarten children, which may lead to lower mathematical skills. This would, however, indicate that approximate arithmetic skills, which are based on core system 1, are not subject to development, but rather to training. Second, Gilmore et al. (2007) did not give any standardized scores of early mathematical skills to classify the sample's proficiency in this domain. Both points indicate that approximate arithmetic skills can be trained, although this must not happen in school situations, but rather in preschool or family settings. Another reason could be, that children have early arithmetic skills in the number range up to 10 and use it to solve problems in a number range up to 100 (see Appendix A.2 for details).

Table 6
Achievement (Relative Frequencies of Correct Solutions) Within Problem Categories in Study 1: Means, Standard Deviations, t Values and Significances (One-sample t-Test against M = .500, df = 33)

Task	***M***	***SD***	***t***	***p***
Non-symbolic addition	.714	.108	11.595	< .001
Non-symbolic subtraction	.610	.100	8.199	< .001
Non-symbolic multiplication	.686	.141	7.700	< .001
by 2	.721	.160	8.035	< .001
by 3	.651	.156	5.625	< .001
Non-symbolic division	.704	.140	8.523	< .001
by 2	.695	.177	6.409	< .001
by 3	.713	.183	6.779	< .001
Symbolic addition	.675	.154	6.644	< .001
Symbolic subtraction	.532	.126	1.479	.149
Symbolic multiplication	.570	.138	2.946	.006
Symbolic division	.511	.135	0.475	.638

In a next step of analyses we wanted to test whether there were differences between the arithmetic operations (Hypothesis 1b) and presentation formats (Hypothesis 2). Thus we conducted a 4 (operation) x 2 (presentation) x 2 (gender) repeated measures ANOVA with operation and presentation as within-subject factors and gender as a between-subject factor. There was a significant main effect for operation $F(3, 96) = 11.915$; $p < .001$; *partial* $\eta^2 = .271$ (difficulty order from easy to hard: addition, multiplication, division, subtraction), presentation $F(1, 32) = 58.578$; $p < .001$; *partial* $\eta^2 = .647$ (non-symbolic easier than symbolic) and gender $F(1, 32) = 4.732$; $p = .037$; *partial* $\eta^2 = .129$ (boys 65.7%, girls 60.1%). Furthermore, there was a significant operation x presentation interaction $F(3, 96) = 5.602$; $p = .001$; *partial* $\eta^2 = .149$ (see Figure 10).

Data are in line with Hypothesis 2, as the main effect for presentation was substantial and in the expected direction. Data are not in line, however, with Hypothesis 1b, as on the one hand the main effect went into an unexpected direction and there was an operation x presentation interaction. For symbolic presentation addition is much easier than the other three arithmetic operations. It seems that children are only able to solve symbolic addition problems, while the other problems are solved purely by guessing or relying on non-arithmetic strategies for multiplication (see Appendix A.1). However, in the non-symbolic domain all problems were solved significantly above chance. Addition problems are easier to solve than multiplication and division problems, while subtraction problems are the hardest.

The finding of gender differences was rather unexpected, because there were no similar findings in the literature (Spelke, 2005, Gilmore et al., 2010). This could possibly be a culturally induced effect, as Germany is one of the countries with the highest gender differences in international student assessment studies even in primary school (TIMSS; Bos et al., 2008).

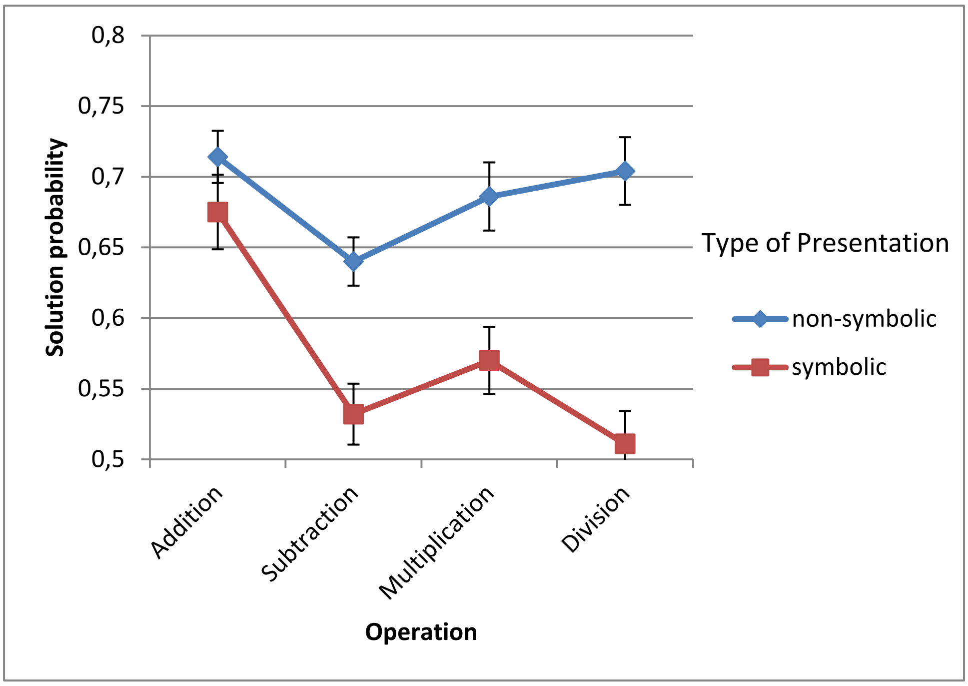

Figure 10: Solution probabilities of approximate arithmetic problems in Study 1: Type of operation x type of presentation.

Study 1 was conducted as a pilot study to find out which approximate arithmetic operation might possibly have predictive value for later mathematical school success. We decided to omit non-symbolic subtraction as well as symbolic subtraction, multiplication and division from Study 2 with regard to low solution probabilities and non-arithmetic strategy analyses (Appendix A.1)

3.3 Study 2

Study 2 was conducted to shed light on the potential determinants of approximate arithmetic achievement and its predictive value for later school mathematics achievement compared to other known determinants of individual differences in mathematics achievement.

3.3.1 Method

Sample & Procedure. N = 71 first-graders (38 boys, 33 girls) aged 65 to 84 months

(M = 76.5; SD = 4.3) from German primary schools were tested during the initial four weeks of schooling. The testing took place in two individual sessions of 30-40 minutes each. Problems were presented computer-based or using paper and pencil (see below). n = 66 (34 boys, 32, girls) of these children were tested again for their curriculum-based mathematic achievement at the beginning of second grade, exactly one year after the first testing. Five children from the initial sample could not be tested again because they left their respective schools. All statistics were computed with the sample of 66 persons. We computed factor scores from the respective subtests for phonological awareness, as well as phonological loop, visuo-spatial sketchpad, and central executive capacity.

Material. Children received the same computer-based non-symbolic addition (24 items, α = .630), multiplication (16 items, α = .242) and division (16 items, α = .560) as well as symbolic addition (24 items, α = .661) problems that were used in Study 1. Furthermore, subitizing as a measure of core system 2, was assessed computer-based too (21 items, α = .763): We computed a mean precision score and did not assess reaction time. Up to seven unsorted dots were presented on the computer screen for exactly one second. Afterwards children had to indicate the amount they had just seen. With regard to Kaufman et al. (1949) and Balakrishnan and Ashby (1992) we decided to test subitizing in a range of up to seven items to get more variance into our precision score. However, we kept in mind that children may use addition or ‘groupitizing’ (McCandliss et al., 2010) to solve those problems, but at last groupitizing would be reliant on core system 2 as well. All children were able to operate in a number range up to 10, thus number knowledge was not a problem.

Working memory capacity was assessed with its three components as described by Baddeley. Phonological loop capacity was assessed by two different tasks, digit span forward and repeating of artificial words. During the digit span tasks, children are told increasing spans of numbers (1 to 9) which they have to repeat immediately afterwards. The same applies for the artificial words which consist of meaningless syllables (i.e. rub-loh-piz). Altogether, the phonological loop scale had 37 items. Reliability was satisfactory (α = .78). The visuo-spatial sketchpad capacity was assessed with Corsi blocks and matrices tasks. Corsi blocks are nine red wooden blocks presented on a 210x297 mm wooden plate. Blocks are tapped by the instructor with increasing span length, and children have to repeat the tapping immediately afterwards. During the matrices tasks children are given an empty 4x4 matrix on a sheet of paper. Then different 4x4 matrices are presented to the child, with some fields colored in grey. These have to be indicated on the empty matrix after presentation. Altogether, the visuo-spatial sketchpad was assessed with 42 items with good reliability (α = .79).

Central executive capacity was assessed with three tasks, color span backward, digit span backward and listening span. Color span backward tasks show a pirate walking past two (or three) colored treasure chests. Children are instructed "Here is a yellow chest and afterwards he passes the blue one. Yellow – blue" and asked "Now how is he going back?", which requires the answer "blue – yellow". The colored chests are used for exemplification reasons only and are not shown during the assessment. Digit span backward works like digit span forward (digits 1 to 9), but children have to repeat the digits backward. During the listening span tasks children are asked – with increasing span – two up to five simple questions, which they have to answer with "yes" or "no" (i.e. "Is a mouse grey? […] Is a crocodile red? […]"). After each span, children have to repeat the colors of all sentences included in this span in the correct order (i.e. "grey – red"). The central executive scale had 35 items with a reliability of α = .73.

During the naming speed tasks children were presented two 4x4 picture sheets with 16 pictures. Each picture represents a one-syllable word, which children have to name as fast as possible. The number of correct answers and solution time are assessed and combined into one efficiency score according to Paas & van Merriënboer (1993).

Phonological awareness was tested with two subtests. The first subtest was to partition words into their syllables and consisted of 10 items ($\alpha = .71$). Children are told a word and have to repeat it clapping their hands for each syllable of the word. The second subtest tested their ability to determine whether two words rhyme or do not. This test consisted of 10 items as well ($\alpha = .67$).

Early arithmetic concepts were assessed with a screening test based on a five-level model proposed by Fritz, Ricken and Balzer (2009). The test consists of 18 items and assesses precise arithmetic problem solving (see Appendix A.3). It is scalable according to the Rasch model with a WLE person separation reliability of .86. School arithmetic achievement at the beginning of second grade was tested with the Demat 1+ test (Krajewski, Küspert & Schneider, 2002). The test includes math problems for most curriculum topics of German first grade mathematics (36 items, $\alpha = .88$).

3.3.2 Results and discussion

Average achievement scores for approximate arithmetic problem categories, as well as means and standard deviations of all other non-standardized variables are presented in Table 7. Subitizing is a percent correct score. Early arithmetic concepts and 2nd grade arithmetic achievement are raw scores of the respective tests. Central executive, visuo-spatial sketchpad, phonological loop, naming speed and phonological awareness were z-standardized for the sample of 71 children. We calculated correlation coefficients to explore the association between the different task and problem categories (see Table 8). As expected all approximate arithmetic variables correlated significantly with each other. We interpret this as a sign of inner coherence within the approximate number system above problem categories.

Table 7

Mean Performance and Standard Deviation on Measures of Approximate Arithmetic, Subitizing,Early Arithmetic Concepts and Later School Achievement in Study 2; Additional t Values and Significances for Approximate Arithmetic Problems (One-sample t-Test against M = .500, df = 65)

Task	***M***	***SD***	***t***	***P***
Non-symbolic addition	.603	.185	4.497	<.001
Non-symbolic multiplication	.699	.129	12.503	<.001
by 2	.777	.168	13.393	<.001
by 3	.621	.149	6.624	<.001
Non-symbolic division	.673	.138	10.191	<.001
by 2	.686	.155	9.702	<.001
by 3	.661	.158	8.290	<.001
Symbolic addition	.701	.144	11.327	<.001
Subitizing	0.763	0.141		
Early arithmetic concepts	11.610	2.887		
2^{nd} grade arithmetic achievement	30.290	6.012		

Table 8

Correlations among Approximate Arithmetic, Working Memory and Other Cognitive Measures Assessed in Study 3

Tasks	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1 Non-symbolic addition		.315**	.319**	.461**	.428**	.265*	.252*	.122	.123	.066	.353**	.418**
2 Non-symbolic multiplication			.275*	.425**	.186	.248*	.253*	.214	.066	.024	.262*	.180
3 Non-symbolic division				.473**	.191	.211	.334**	.146	.188	.071	.193	.198
4 Symbolic addition					.489**	.421**	.413**	.172	.265*	.252*	.442**	.410**
5 Subitizing						.497**	.309*	.299*	.258*	.262*	.314*	.582**
6 Central Executive							.332**	.441**	.334**	.323**	.247*	.569**
7 Visuo-spatial Sketchpad								.312*	.029	.216	.353**	.154
8 Phonological Loop									.177	.127	.037	.356**
9 Naming Speed										.306*	.209	.292*
10 Phonological Awareness											.039	.288*
11 Early arithmetic concepts												.307*
12 2nd grade arithmetic achievement (Demat 1+)												

Note. $N = 66$; * $p < .05$; ** $p < .01$

In terms of cognitive variables our expectations were met, as the approximate measures correlated with visuo-spatial sketchpad (high overall) and central executive (low overall) capacity. Our subitizing measure only correlated with the addition, but not the division and multiplication problems. We interpret this as a matter of training, because a helpful procedure when subitizing larger sets could be to subitize smaller subsets and add those (groupitizing as introduced by McCandliss et al., 2010), but there is hardly any other arithmetic operation involved. The early arithmetic concepts variable correlates with addition problems only, which might reflect the fact that this test does not include any multiplicative problems. We did not expect any correlation between approximate arithmetic variables and naming speed as well as phonological awareness. However, we found some in terms of symbolic addition. As these problems involved written numbers it seems plausible that some children might rely on fact retrieval to identify and actually read them. The specific influence of the central executive on approximate arithmetic problems remains unclear from these correlation analyses, as it correlated on a medium level with symbolic addition, which might indicate that this problem is more complex than the other ones, but it also correlated, on a lower level, with non-symbolic addition and multiplication.

We conducted a total of four hierarchical regression analyses to explore the specific influence of the variables in more detail. In a first step we conducted two hierarchical regression analyses to explore in what way subitizing, working memory capacity, naming speed, phonological awareness and early arithmetic concepts predict approximate non-symbolic as well as symbolic addition. We chose to stick with the addition problems for three reasons. In our view addition problems are a more age-appropriate measure for children of that age and in terms of school curricula. Furthermore, addition problems had higher reliabilities (and thus correlation) then multiplication and division problems. Last but not least, we wanted to analyze if there is a specific difference between non-symbolic and symbolic measures, which was only possible when using addition problems. We chose to enter our measured constructs into the model in the order in which they arise developmentally. As both working memory and the core systems are considered innate – although both are of course developing with age – we decided to give priority to the abilities based on the core systems to get any innate mathematical abilities out of the way first.

Model 1 revealed that only subitizing accounted for unique variance of non-symbolic arithmetic, even when controlling for all other variables (Table 9). However, Model 1 accounted for 24.4% of the variance of non-symbolic arithmetic achievement only. Model 2 revealed that subitizing and visuo-spatial sketchpad capacity were significant predictors of symbolic arithmetic achievement, when controlling for central executive, phonological loop, naming speed and phonological awareness. When entering early arithmetic concepts into the model, the influence of the visuo-spatial sketchpad vanished and subitizing and early arithmetic concepts remained significant predictors. This model accounted for 40.5% of the variance of symbolic arithmetic achievement.

Non-symbolic addition seems to be largely independent from any influences outside the core systems shown by both the low coefficient of determination and the unique influence of all other variables. However, this is not the case for symbolic addition which seems to be related to early arithmetic concepts. What remains is the question of causality, which cannot be answered by our study. There is obviously some core system 1 involvement in the symbolic addition problems, which would result in the idea that good early arithmetic concepts are a consequence of high performance in symbolic addition problems. However, there are two main points that lead us to the opinion that it works rather the other way round. First, it seems rather strange that only symbolic presentation is correlated with early arithmetic concepts. Second, we have some evidence from Study 1 that symbolic addition might rely on exact addition in a number range up to ten (see Appendix A.2), which is clearly a matter of training and not innate core system ability.

Table 9
Regression Analyses of Approximate Arithmetic: Unique Contribution of Subitizing, Working Memory, Naming Speed, Phonological Awareness and Early Arithmetic Concepts

		Model 1: Non-symbolic					Model 2: Symbolic				
Step	Variables & Model	*B*	*SE*	β	*t*		*B*	*SE*	β	*t*	
Step											
	Subitizing	.563	.149	.428	3.768	**	.502	.11	.489	4.488	**
Step											
	Subitizing	.492	.177	.374	2.785	**	.437	.09	.331	2.722	**
	Central executive	.011	.026	.060	0.421		.030	.01	.211	1.641	
	Visuo-spatial sketchpad	.025	.023	.135	1.075		.039	.01	.274	2.416	*
	Phonological loop	-.012	.026	-.058	-0.448		-	.01	-	-	
Step											
	Subitizing	.489	.179	.372	2.724	**	.319	.12	.311	2.553	*
	Central executive	.010	.027	.055	0.375		.025	.01	.172	1.303	
	Visuo-spatial sketchpad	.025	.023	.137	1.074		.042	.01	.291	2.561	*
	Phonological loop	-.012	.026	-.059	-0.449		-	.01	-	-	
	Naming Speed	.003	.022	.016	0.126		.020	.01	.139	1.252	
Step											
	Subitizing	.499	.181	.380	2.762	**	.317	.12	.309	2.504	*
	Central executive	.013	.028	.072	0.483		.024	.01	.167	1.237	
	Visuo-spatial sketchpad	.028	.024	.150	1.160		.041	.01	.287	2.480	*
	Phonological loop	-.013	.027	-.065	-0.492		-	.01	-	-	
	Naming speed	.007	.023	.037	0.287		.019	.01	.132	1.151	
	Phonological awareness	-.017	.024	-.092	-0.721		.004	.01	.029	0.254	
Step											
	Subitizing	.442	.182	.336	2.430	*	.267	.12	.261	2.127	*
	Central executive	.009	.027	.051	0.344		.021	.01	.143	1.086	
	Visuo-spatial sketchpad	.014	.025	.077	0.567		.030	.01	.207	1.725	
	Phonological loop	-.005	.027	-.025	-0.186		-	.01	-	-	
	Naming speed	-.001	.023	-.005	-0.035		.012	.01	.087	0.760	
	Phonological awareness	-.011	.024	-.058	-0.459		.010	.01	.066	0.582	
	Early Arithmetic	0.14	.008	.212	1.621		.012	.00	.234	2.013	*

Note. * $p < .05$ ** $p < .01$ *** $p < .001$
Non-symbolic addition: Step 1: $F(1, 64) = 14.334$, $p < .001$, $R^2 = .183$; Step 2: $F(4, 61) = 3.874$, $p = .007$, $R^2 = .203$, R^2 Change = .020, $p = .684$; Step 3: $F(5, 60) = 3.052$, $p = .016$, $R^2 = .203$, R^2 Change < .001, $p = .900$; Step 4: $F(6, 59) = 2.610$, $p = .026$, $R^2 = .210$, R^2 Change = .007, $p = .474$; Step 5: $F(7, 58) = 2.674$, $p = .018$, $R^2 = .244$, R^2 Change = .034, $p = .110$; Symbolic addition: Step 1: $F(1, 64) = 20.139$, $p < .001$, $R^2 = .239$; Step 2: $F(4, 61) = 8.066$, $p < .001$, $R^2 = .346$, R^2 Change = .107, $p = .026$; Step 3: $F(5, 60) = 6.526$, $p < .001$, $R^2 = .363$, R^2 Change = .017, $p = .216$; Step 4: $F(6, 59) = 5.610$, $p < .001$, $R^2 = .363$, R^2 Change < .001, $p = .801$; Step 5: $F(7, 58) = 5.636$, $p < .001$, $R^2 = .405$, R^2 Change = .042, $p = .049$

In a second step, we conducted another two hierarchical regression analyses to explore the unique influence of approximate arithmetic on school mathematics assessed one year later, controlling for other variables like subitizing, working memory, naming speed, phonological awareness and early arithmetic concepts

(Table 10). We decided to conduct two separate regression analyses. Entering non-symbolic and symbolic addition into one regression analyses would have left no unique variance for both of them, because of their shared core system foundation and therefore shared variance.

Table 10

Regression Analyses of 2nd Grade Math Achievement: Unique Contribution of Subitizing, Non-Symbolic Addition (NSA – left column) or Symbolic Addition (SA – right column), Working Memory, Naming Speed, Phonological Awareness and Early Arithmetic Concepts

		Model 3: Math					Model 4: Math				
Step	Variables & Model	*B*	*SE*	β	*t*		*B*	*SE*	β	*t*	
Step											
	Subitizing	21.05	4.70	.493	4.472	**	21.39	4.93	.501	4.335	**
	NSA (left) / SA (right)	6.702	3.58	.207	1.872		6.848	4.81	.165	1.423	
Step											
	Subitizing	14.12	4.86	.331	2.902	**	15.45	4.95	.362	3.117	**
	NSA (left) / SA (right)	6.761	3.32	.208	2.034	*	5.875	4.80	.141	1.222	
	Central executive	2.060	0.68	.345	3.022	**	1.956	0.71	.327	2.754	**
	Visuo-spatial sketchpad	-	0.60	-	-		-	0.64	-	-	
	Phonological loop	0.838	0.68	.129	1.233		0.856	0.69	.131	.1227	
Step											
	Subitizing	13.80	4.92	.323	2.801	**	15.31	5.00	.359	3.060	**
	NSA (left) / SA (right)	6.731	3.34	.207	2.013	*	5.567	4.90	.134	1.135	
	Central executive	1.966	0.70	.329	2.786	**	1.897	0.73	.317	2.595	*
	Visuo-spatial sketchpad	-	0.61	-	-		-	0.65	-	-	
	Phonological loop	0.820	0.68	.126	1.199		0.838	0.70	.129	1.191	
	Naming Speed	0.327	0.58	.056	0.563		0.237	0.60	.040	0.394	
Step											
	Subitizing	13.28	4.95	.311	2.680	*	15.07	5.03	.353	2.993	**
	NSA (left) / SA (right)	7.040	3.35	.217	2.095	*	5.448	4.92	.131	1.105	
	Central executive	1.851	0.71	.310	2.588	*	1.815	0.74	.304	2.445	*
	Visuo-spatial sketchpad	-	0.62	-	-		-	0.66	-	-	
	Phonological loop	0.867	0.68	.133	1.263		0.869	0.70	.133	1.227	
	Naming speed	0.192	0.59	.033	0.320		0.137	0.62	.023	0.221	
	Phonological awareness	0.608	0.61	.100	0.985		0.464	0.63	.077	0.735	
Step											
	Subitizing	12.54	4.96	.294	2.525	*	14.28	5.02	.335	2.841	**
	NSA (left) / SA (right)	6.142	3.41	.189	1.797		3.645	5.05	.088	0.721	
	Central executive	1.782	0.71	.298	2.496	*	1.765	0.73	.295	2.395	*
	Visuo-spatial sketchpad	-	0.65	-	-		-	0.68	-	-	
	Phonological loop	1.023	0.69	.157	1.474		1.030	0.71	.158	1.447	
	Naming speed	0.043	.606	.007	0.071		-	0.62	-	-	
	Phonological awareness	0.722	.062	.119	1.163		0.620	0.63	.102	0.975	
	Early Arithmetic	0.282	.223	.135	1.261		0.323	0.23	.155	1.396	

Note. * $p < .05$ ** $p < .01$ *** $p < .001$

Non-symbolic addition: Step 1: $F(2, 63) = 18.769$, $p < .001$, $R^2 = .373$; Step 2: $F(5, 60) = 11.892$, $p < .001$, $R^2 = .498$, R^2 Change = .124, $p = .004$; Step 3: $F(6, 59) = 9.580$, $p < .001$, $R^2 = .500$, R^2 Change = .003, $p = .576$; Step 4: $F(7, 58) = 8.577$, $p < .001$, $R^2 = .509$, R^2 Change = .008, $p = .329$; Step 5: $F(8, 57) = 7.780$, $p < .001$, $R^2 = .522$, R^2 Change = .013, $p = .212$; Symbolic addition: Step 1: $F(2, 63) = 17.650$, $p < .001$, $R^2 = .359$; Step 2: $F(5, 60) = 10.907$, $p < .001$, $R^2 = .476$, R^2 Change = .117, $p = .007$; Step 3: $F(6, 59) = 8.987$, $p < .001$, $R^2 = .478$, R^2 Change = .001, $p = .695$; Step 4: $F(7, 58) = 7.721$, $p < .001$, $R^2 = .482$, R^2 Change = .005, $p = .465$; Step 5: $F(8, 57) = 7.109$, $p < .001$, $R^2 = .499$, R^2 Change = .017, $p = .168$

Model 3 revealed that subitizing, non-symbolic addition and the central executive were the main predictors of later school success in mathematics. When early arithmetic concepts were included into the model (Step 5), non-symbolic addition performance was no longer a predictor for later school success. The final model accounted for 52.2% of the variance. Model 4 revealed that symbolic addition contributed no unique variance under any controlling circumstances.

3.4 General discussion

We conducted two studies to research the approximate arithmetic abilities of children at school entrance age, how these abilities are influenced by other variables and whether these abilities predict later school mathematics achievement. We formulated four main research hypotheses based on the literature.

Hypothesis 1a stated that children at school entrance age can solve approximate arithmetic problems of all basic operations. We found evidence for this hypothesis with regard to non-symbolic problems, which is in line with previous research (Barth et al., 2005; 2006; 2009). This also means that these children understood the fundamental concepts of all basic arithmetic operations even before formal schooling. Hypothesis 1b had to be rejected, because we did not find that addition and subtraction are easier than multiplication and division, but that the sequence of difficulty was addition → multiplication and division → subtraction from easiest to hardest. It may be that the concept of sharing and the concept of repeated addition for easy multiplication problems – as we only assessed 'by 2' and 'by 3' – is more natural to many children than the concept of subtraction. However, a more qualitative approach might be more fruitful here to shed some light on the reasons of these findings.

With regard to symbolic problems we showed that our sample could solve symbolic addition problems above chance, which is in line with Gilmore et al. (2007). We were not able to replicate the finding that children at the beginning of formal schooling can solve symbolic subtraction problems, which contradicts the findings of Gilmore et al. (2007). Our strategy analyses (Appendix A.1, similar to Gilmore et al., 2010) revealed that children relied heavily on non-arithmetic strategies to solve these tasks. It seems unlikely to us that a mainly innate ability – although subject to developmental changes – does not work the same way for children of different languages. We rather suspect that our sample was weaker in terms of cultural arithmetic, taught in preschool or family settings. In this regard we conducted another analyses of the symbolic arithmetic problems used (Appendix A.2) and found that most of these problems could be easily solved with very rudimentary knowledge of the decimal number system, alongside addition and subtraction skills in a number range up to 10. Further research should have a much closer look on problem design, when testing for symbolic arithmetic knowledge prior to school instruction. Reflecting upon these results we could also find evidence for Hypothesis 2 which stated that children at school entrance age are better of solving problems presented non-symbolically than those presented symbolically.

Hypothesis 3 concentrated of the cognitive fundamentals of approximate arithmetic and its correlation to other variables and stated that it would be correlated with subitizing, visuo-spatial sketchpad capacity and early arithmetic concepts. Feigenson et al. (2004) stated that there are two mathematical core systems. Correlation analyses revealed that all approximate arithmetic problem categories correlated with each other, some correlations might even be underestimated because of the poor reliability of the non-symbolic multiplication and division problems. Additionally, regression analyses revealed that the main predictor for both non-symbolic and symbolic addition was subitizing, our measure of core system 2. These analyses also revealed that the non-symbolic abilities are largely independent from any other cognitive functioning. This is kind of surprising as mathematical achievement is usually highly correlated with working memory capacity (see DeStefano & LeFevre, 2004, for a review). There is need of further research to investigate whether this independence relies on low working memory load when solving approximate arithmetic problems or if this independence originates from the fact that even developed approximate arithmetic performance relies mainly on the innate number sense (Dehaene, 1997) and by this on its own cognitive resources.

On the other hand symbolic addition relied heavily on early arithmetic concepts, although we have to be very careful with causal directions. Future research should take standardized measures of preschool arithmetic into account to give better information about the sample's general mathematical abilities. We only used a standardized measure for school arithmetic at the beginning of 2nd grade and our sample turned out to be significantly better than average with a percentile rank of 67 on a norm-referenced test, $t(65) = 5.115$, $p < .001$. Thus, we have to be very careful not to overestimate results attained from samples that are far from any norm. Furthermore, it would be more than helpful to conduct longitudinal studies to find out what really comes first: Certain early arithmetic concepts or the ability to solve approximate symbolic arithmetic problems? In this regard, Hypothesis 3 was largely confirmed for non-symbolic problems, but there is need for further research in the symbolic domain, especially to understand the causal series of events that lead to good symbolic arithmetic achievement in school.

Hypotheses 4 stated that approximate arithmetic abilities predict later school success even when controlling for other variables like working memory or subitizing. Gilmore et al. (2007) showed that these abilities are correlated with mathematical achievement measured at the end of kindergarten. Furthermore, Gilmore et al. (2010) even showed that they are predictive for first grade school mathematics when controlling for age, intelligence and literacy. To our knowledge there have been no studies investigating the specific influence of approximate arithmetic when controlling for subitizing or working memory in a longitudinal design whatsoever. We found that non-symbolic addition is a significant predictor of later school success alongside subitizing and central executive capacity, which is in line with current research regarding working memory, the approximate number system and subitizing (Bull et al., 2008; Desoete & Grégoire, 2006, Gilmore et al., 2010). Still, the influence of non-symbolic addition vanished when controlling for early arithmetic concepts – Gilmore et al. (2010) encountered a similar issue. This could be due to the fact that our sample was rather small for the regression analyses conducted and due to possible multicollinearity because non-symbolic addition and early arithmetic concepts are constructs from a very similar field. Again, Hypothesis 4 could be largely confirmed for non-symbolic addition, but not for symbolic addition, which did not account for unique variance in any regression model.

A possible objection against our findings could be that we did not include an intelligence measure in Study 2 and that all correlations and regressions might simply reflect the role of intelligence. We did not do so because we did not get parental consent on assessing intelligence from all participating schools. However, there is good reason that such a measure is not needed, because of the very extensive inclusion of working memory, which is another good predictor of school learning outcomes, in some research even on par with general intelligence (Alloway & Alloway, 2008). For further research it might be helpful to include working memory capacity alongside spatial and logical intelligence measures to investigate the specific impact of each of them.

Apart from rather theoretical implications, there are also several practical implications of both studies. We showed that children at school entrance age in the mean are able to solve problems of all four basic arithmetic operations above chance.

This means that these children obviously have at least some conceptual understanding of arithmetic operations. Children could benefit from this finding in two different ways. First, this knowledge should be employed when teaching exact arithmetic, so children do not have to start from the bottom line of understanding, but can make use of the conceptual knowledge they have already gathered. However, it should also be taken into account that there are large individual differences regarding approximate arithmetic proficiency. While it really sounds nice to say that "children can solve these problems above chance", actually only half of them does so, when analyzing individual achievement (see Appendix A.4). This is a major issue, which has to be taken into account, before trying to implement the use of these abilities into school curricula. The second possible benefit comes in terms of preschool intervention. Children usually enjoy solving this kind of approximate problems. Additionally approximate arithmetic abilities seem to be a great way to identify children at risk of later mathematical difficulties. Training studies should be conducted to find out whether approximate arithmetic abilities can be trained and if such training is able to support at-risk-children's learning of mathematics.

3.5 References

Alloway, T. P., & Alloway, R. (2008). Working memory: Is it the new IQ? *Nature Precedings*. Available from: http://hdl.handle.net/10101/npre.2008.2343.1

Andersson, U. (2007). The contribution of working memory to children's mathematical word problem solving. *Applied Cognitive Psychology, 21,* 1201-1216.

Andersson, U. (2008). Working memory as a predictor of written arithmetic skills in children: The importance of central executive functions. *British Journal of Educational Psychology, 78,* 181-203.

Antell, S. & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development, 54,* 695–701.

Baddeley, A. D. (1986). *Working memory.* New York: Clarendon.

Baddeley, A. D. (1996). Exploring the central executive. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 49A,* 5–28.

Balakrishnan, J. D., & Ashby, F. G. (1992). Subitizing: Magical numbers or mere superstition? *Psychological Research, 54,* 80-90.

Barth, H., Baron, A., Spelke, E. & Carey, S. (2009). Children's multiplicative transformations of discrete and continuous quantities. *Journal of Experimental Child Psychology, 103,* 441-454.

Barth, H., Kanwisher, N. & Spelke, E. (2003). The construction of large number representations in adults. *Cognition, 86,* 201-221.

Barth, H., La Mont, K., Lipton, J., Dehaene, S., Kanwisher, N., & Spelke, E. (2006). Non-symbolic arithmetic in adults and young children. *Cognition, 98,* 199-222.

Barth, H., La Mont, K., Lipton, J., & Spelke, E. S. (2005). Abstract number and arithmetic in preschool children. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 102,* 14116-14121.

Bos, W., Bonsen, M., Baumert, J., Prenzel, M., Selter, C. & Walther, G. (Hrsg.). (2008). *TIMSS 2007. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen*

Vergleich [TIMSS 2007. Mathematical and scientific competencies of primary school students in Germany compared to international results]. Münster: Waxmann.

Bull, R., Espy, K., Wiebe, S. (2008). Short-term memory, working memory and executive functioning in preschoolers: Longitudinal predictors of mathematical achievement at age 7 years. *Developmental Neuropsychology, 33,* 205-228.

Dehaene, S. (1997). The number sense: How the mind creates mathematics. Oxford: Oxford University Press.

Denckla, M.B., & Rudel, R.G. (1974). Rapid "automatized" naming of pictured objects, colors, letters, and numbers by normal children. *Cortex, 10,* 186-202.

De Smedt, B., Janssen, R., Bouwens, K., Verschaffel, L., Boets, B., & Ghesquière, P. (2009a). Working memory and individual differences in mathematics achievement: A longitudinal study from first grade to second grade. *Journal of Experimental Child Psychology, 103,* 186-201.

De Smedt, B., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2009b). The predictive value of numerical magnitude comparison for individual differences in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 103,* 469-479.

Desoete, A., & Grégoire, J. (2006). Numerical competence in young children and in children with mathematics learning disabilities. *Learning and Individual Differences, 16,* 351-367.

DeStefano, D., LeFevre, J. A. (2004). The role of working memory in mental arithmetic. *European Journal of Cognitive Psychology, 16,* 353-386.

Feigenson, L., Carey, S. & Hauser, M. (2002): The representations underlying infants´ choice of more: object file versus analog magnitudes. *Psychological Science, 13,* 150–156.

Feigenson, L., Dehaene, S. & Spelke, E. S. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences, 8,* 307-314.

Fritz, A., Ricken, G. & Balzer, L. (2009). Warum fällt manchen Schülerinnen und Schülern das Rechnen schwer? – Entwicklung arithmetischer Kompetenzen im Vor- und frühen Grundschulalter [Why do some students have difficulties with calculating? – Development of arithmetical skills in pre- and primary school ages]. In A. Fritz & S. Schmidt, *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (pp.12-29). Weinheim: Beltz.

Gilmore, C. K., McCarthy, S. E., & Spelke, E. S. (2007). Symbolic arithmetic knowledge without instruction. *Nature, 447,* 589-591.

Gilmore, C. K., McCarthy, S. E., & Spelke, E. S. (2010). Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. *Cognition, 115,* 394-406.

Gonzales, P., Williams, T., Jocelyn, L., Roey, S., Kastberg, D., and Brenwald, S. (2008). *Highlights From TIMSS 2007: Mathematics and Science Achievement of U.S. Fourth- and Eighth-Grade Students in an International Context* (NCES 2009–001 Revised). National Center for Education Statistics, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Washington, DC.

Halberda, J., Mazzocco, M.M.M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature, 455,* 665-668.

Holloway, I.D., & Ansari, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: The numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology,* 103, 17-29.

Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W. & Volkmann, J. (1949): The discrimination of visual number. *The American Journal of Psychology, 62,* 498-525.

Krajewski, K., Küspert, P., & Schneider, W. (2002). *Deutscher Mathematiktest für erste Klassen* (DEMAT 1+) [German Test for mathematics assessment]. Göttingen: Hogrefe.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2009). Exploring the impact of phonological awareness, visual–spatial working memory, and preschool quantity–number competencies on mathematics achievement in elementary school: Findings from a 3-year longitudinal study. *Journal of Experimental Child Psychology, 103,* 516-531.

Krajewski, K., Schneider, W., Nieding, G. (2008). Zur Bedeutung von Arbeitsgedächtnis, Intelligenz, phonologischer Bewusstheit und früher Mengen-Zahlen-Kompetenz beim Übergang vom Kindergarten in die Grundschule [Regarding the relevance of working memory, intelligence, phonological awareness and early set-number-competence during the change from kindergarten into primary school]. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 55,* 100 – 113.

Kroesbergen, E. H., Van Luit, J. E. H., Van Lieshout, E. C. D. M., Van Loosbroek, E., & Van de Rijt, B. A. M. (2009). Individual differences in early numeracy: The role of executive functions and subitizing. *Journal of Psychoeducational Assessment, 27,* 226-236.

McCandliss, B.D., Yun, C., Hannula, M., Hubbard, E.M., Vitale, J., & Schwartz, D. (2010, April*). "Quick, how many?" Fluency in Subitizing and 'Groupitizing' Link to Arithmetic Skills.* American Educational Research Association, Denver, CO.

McCrink, K., & Spelke, E.S. (2010). Core multiplication in childhood. *Cognition, 116,* 204-216.

Meyer, M. L., Salimpoor, V. N., Wu, S. S., Geary, D. C., & Menon, V. (2009). Differential contribution of specific working memory components to mathematics achievement in 2nd and 3rd graders. *Learning and Individual Differences, 20,* 101-109.

Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review, 63,* 81–97.

Paas, F. & Van Merriënboer, J. J. G. (1993). The efficiency of instructional conditions: An approach to combine mental-effort and performance measures. *Human Factors, 35,* 737-743.

Spelke, E. (2005). Sex differences in intrinsic aptitude for mathematics and science? A critical review. *American Psychologist, 60,* 950-958.

Swanson, H. L., & Kim, K. (2007). Working memory, short-term memory, and naming speed as predictors of children's mathematical performance. *Intelligence*, *35,* 151-168.

Wagner, R. & Torgesen, J. (1987): The nature of phonological processing and its causal role in the acquisition of reading skills. *Psychological Bulletin, 101,* 192-212.

Xu, F. (2003): Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representations. *Cognition, 89,* B15-B25.

Xu, F. & Arriaga, R. (2007): Number discrimination in 10-month-old-infants. *British Journal of Developmental Psychology*, *25,* 103-108.

Xu, F. & Spelke, E. S. (2000): Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition, 74,* B1-B11.

3.6 Appendix

Table 11

Approximate Arithmetic Problems Used in the Studies

NS Addition	S Addition	NS Subtraction	S Subtraction	NS Multiplication	S Multiplication	NS Division	S Division
5 + 3 = 8 vs. 24	5 + 5 = 10 vs. 50	25 - 13 = 12 vs. 9	30 – 9 = 21 vs. 12	2 * 3 = 6 vs. 4	2 * 4 = 8 vs. 10	6 / 2 = 3 vs. 5	4 / 2 = 2 vs. 3
30 + 30 = 60 vs. 10	30 + 30 = 60 vs. 10	40 - 25 = 15 vs. 29	20 – 8 = 12 vs. 15	2 * 2 = 4 vs. 5	4 * 8 = 32 vs. 22	4 / 2 = 2 vs. 1	39 / 3 = 13 vs. 22
10 + 8 = 18 vs. 13	10 + 8 = 18 vs. 13	13 - 6 = 7 vs. 11	17 – 7 = 10 vs. 15	2 * 8 = 16 vs. 28	3 * 4 = 12 vs. 21	30 / 2 = 15 vs. 9	25 / 5 = 5 vs. 4
17 + 18 = 35 vs. 56	17 + 18 = 35 vs. 56	48 - 15 = 33 vs. 27	24 – 9 = 15 vs. 12	2 * 6 = 12 vs. 7	5 * 7 = 35 vs.21	26 / 2 = 13 vs. 17	38 / 2 = 19 vs. 11
5 + 8 = 13 vs. 21	5 + 8 = 13 vs. 21	12 - 4 = 8 vs. 10	21 – 6 = 15 vs. 10	2 * 20 = 40 vs. 61	3 * 5 = 15 vs. 23	16 / 2 = 8 vs. 5	51 / 3 = 17 vs. 13
34 + 31 = 65 vs. 36	34 + 31 = 65 vs. 36	36 - 17 = 19 vs. 29	31 – 8 = 23 vs. 13	2 * 11 = 22 vs.38	4 * 5 = 20 vs. 30	34 / 2 = 17 vs. 21	35 / 5 = 7 vs. 9
11 + 11 = 22 vs. 12	11 + 11 = 22 vs. 12	50 - 12 = 38 vs. 25	25 – 5 = 20 vs. 16	2 * 12 = 24 vs. 20	2 * 8 = 16 vs. 12	16 / 2 = 8 vs. 14	12 / 4 = 3 vs. 5
21 + 16 = 37 vs. 52	21 + 16 = 37 vs. 52	43 - 16 = 27 vs. 21	23 – 9 = 14 vs. 21	2 * 8 = 16 vs. 12	3 * 9 = 27 vs. 15	20 / 2 = 10 vs. 12	44 / 4 = 11 vs. 7
30 + 26 = 56 vs. 35	30 + 26 = 56 vs. 35	21 - 13 = 8 vs. 5	23 – 11 = 12 vs. 21	2 * 15 = 30 vs. 45		60 / 2 = 30 vs. 20	
18 + 18 = 35 vs. 65	18 + 18 = 36 vs. 65	38 - 29 = 9 vs. 18	27 – 6 = 21 vs. 14	2 * 17 = 34 vs. 22		52 / 2 = 26 vs. 15	
30 + 20 = 50 vs. 15	30 + 20 = 50 vs. 5	30 - 7 = 23 vs. 18	23 – 7 = 16 vs. 20	3 * 6 = 18 vs. 11		21 / 3 = 7 vs. 13	
33 + 28 = 61 vs. 38	33 + 28 = 61 vs. 38	36 - 19 = 17 vs. 26	65 – 33 = 32 vs. 56	3 * 4 = 12 vs. 15		27 / 3 = 9 vs. 6	
18 + 24 = 42 vs. 59	18 + 24 = 42 vs. 59	60 - 40 = 20 vs. 35	58 – 13 = 45 vs. 36	3 * 8 = 24 vs. 36		60 / 3 = 20 vs. 11	
5 + 7 = 12 vs. 22	5 + 7 = 12 vs. 22	59 - 19 = 40 vs. 50	70 – 14 = 56 vs. 32	3 * 5 = 15 vs. 8		75 / 3 = 25 vs. 16	
11 + 13 = 24 vs. 15	11 + 13 = 24 vs. 15	60 - 31 = 29 vs. 51	57 – 12 = 45 vs. 30	3 * 9 = 27 vs. 22		93 / 3 = 31 vs. 56	
8 + 9 = 17 vs. 24	8 + 9 = 17 vs. 24	71 - 9 = 62 vs. 41	61 – 25 = 36 vs. 45	3 * 7 = 21 vs. 29		39 / 3 = 13 vs. 10	
12 + 13 = 25 vs. 14	12 + 13 = 25 vs. 14	91 - 30 = 61 vs. 35	24 – 11 = 13 vs. 23	3 * 11 = 33 vs. 23		51 / 3 = 17 vs. 22	
20 + 18 = 38 vs. 61	20 + 18 = 38 vs. 61	45 - 28 = 17 vs. 30	66 – 26 = 40 vs. 50	3 * 7 = 21 vs. 39		18 / 3 = 6 vs. 9	
27 + 25 = 52 vs. 37	27 + 25 = 52 vs. 37	58 - 37 = 21 vs. 16	70 – 37 = 33 vs. 58				
5 + 6 = 11 vs. 40	2 + 2 = 4 vs. 20	80 - 13 = 67 vs. 38	48 – 18 = 30 vs. 45				
8 + 7 = 15 vs. 24	8 + 7 = 15 vs. 24	28 - 16 = 12 vs. 24	71 – 13 = 58 vs. 33				
28 + 31 = 59 vs. 42	28 + 31 = 59 vs. 42		64 – 13 = 51 vs. 34				
12 + 12 = 24 vs. 17	12 + 12 = 24 vs. 17		63 – 14 = 49 vs. 40				
16 + 17 = 33 vs. 60	16 + 17 = 33 vs. 60		55 – 21 = 34 vs. 51				
31 + 29 = 60 vs. 33	31 + 29 = 60 vs. 33						
7 + 6 = 13 vs. 18	7 + 6 = 13 vs. 18						
10 + 11 = 21 vs. 13	10 + 11 = 21 vs. 13						
9 + 5 = 14 vs. 25	9 + 5 = 14 vs. 25						

Note. NS means non-symbolic problems, S means symbolic problems

A.1 Alternative Strategies

All approximate arithmetic problems used in the studies are presented in Table 11. We used the same non-symbolic addition problems Gilmore et al. (2010) used. Furthermore we used the same numbers for the symbolic addition problems, except some example problems. We also used the same symbolic subtraction problems Gilmore et al. (2007) used. We examined all problems for evidence that children used other than arithmetic strategies to solve them. Our analyses were conducted similarly to Gilmore et al. (2010).

Table 12
Testing for Strategy 1: Response Bias - One-sample t-Test Against M = .500, df = 33

Task	**Solution**	***M***	***p***
Non-symbolic addition	Left	.694	< .001
	Right	.735	< .001
Non-symbolic subtraction	Left	.624	.001
	Right	.655	.001
Non-symbolic multiplication	Left	.728	< .001
	Right	.643	.002
Non-symbolic division	Left	.842	< .001
	Right	.566	.155
Symbolic addition	Left	.677	< .001
	Right	.674	.001
Symbolic subtraction	Left	.400	.043
	Right	.664	< .001
Symbolic multiplication	Left	.250	< .001
	Right	.890	< .001
Symbolic division	Left	.544	.468
	Right	.478	.728

In a first step of analyses we examined whether children based their solution on choosing one side on the screen (left or right) over and over again. Children using this strategy would score 50% correct overall, as problems were designed to counterbalance this strategy. As shown in Table 12 children performed above chance for non-symbolic addition, subtraction and multiplication problems. However for non-symbolic division problems children only solved those problems significantly above chance where the correct solution was on the left, that is where the dividend side was larger, but not the other way around. Children performed significantly above chance for symbolic addition problems as well. However, for the other three symbolic problem types this strategy analysis reveals that children were either unable to solve any of the problems (division) or relied heavily on choosing the number presented to the right.

Table 13

Testing for Strategy 2: Difference Bias in Addition and Subtraction Problems - One-sample t-Test Against M = .500, df = 33

Task	**Difference**	***M***	***p***
Non-symbolic addition	Small	.691	< .001
	Medium	.713	< .001
	Large	.754	< .001
Non-symbolic subtraction	Small	.672	< .001
	Medium	.706	< .001
	Large	.563	.108
Symbolic addition	Small	.680	< .001
	Medium	.810	< .001
	Large	.490	.879
Symbolic subtraction	Small	.611	.006
	Medium	.588	.022
	Large	.328	.002

Note. Difference refers to the difference between the larger addend and the sum for addition problems or between the minuend and the difference for subtraction problems. Small indicates a difference up to 10, medium indicates differences between 11 and 20, while large indicates even larger differences.

In a second step of analyses we examined whether children based their answer on the difference between the larger addend and the sum for addition problems (or between the minuend and the difference for subtraction problems). We conducted these analyses because they are used regularly in the literature. However their practical value seems arguable as this strategy is a mathematical one, to solve arithmetic problems with appliance of probabilistic theory. If the difference between the larger addend and the sum is very small it is a probabilistic consideration to say the addend size would most possibly be the larger one. Similarly, a small difference between the minuend and the difference in subtraction questions is a good indicator to choose the difference side when asked which side is bigger. As can be seen from Table 13 this only worked out well for non-symbolic addition problems, but not for all other problem types, where a large difference indicates bad performance.

Table 14
Testing for Strategy 3: Continuous Quantity Bias in Non-Symbolic Problems - One-sample t-Test Against M = .500, df = 33

Task	**CQ level**	***M***	***p***
Non-symbolic addition	A	.512	.607
	B	.901	< .001
Non-symbolic subtraction	1	.517	.658
	2	.748	< .001
	3	.656	< .001
Non-symbolic multiplication	1	.652	< .001
	2	.623	.001
	3	.782	< .001
Non-symbolic division	1	.612	.003
	2	.730	< .001
	3	.765	< .001

Note. CQ level: (A) Dot size, summed dot area, total contour length, and density are positively correlated with number while array size is correlated negatively with number. (B) Dot size, summed dot area, total contour length, and density are negatively correlated with number while array size is positively correlated with number. (1) Dot size is bigger on the side with the smaller amount, otherwise same as (A). (2) Dot size is equal on both sides. (3) Dot size is bigger on the side with the larger amount, otherwise same as (B).

A third step of analyses examined whether children based their answers for non-symbolic problems on continuous quantity information to solve the problems. As we used the non-symbolic addition problems Gilmore et al. (2010) used, we also applied their classification for Continuous quantity type. However, for our newly designed tasks we applied a three levels classification and added a ‘neutral’ condition to see if it makes any difference. It seems children take continuous quantity information into account for addition and subtraction problems, but not for division and multiplication problems (Table 14). This however, is another indication that children use mathematic strategies to solve these problems. In nature continuous variables like area or volume are usually a good indicator to answer the question what is more when solving subtraction and addition problems with appliance of geometrical knowledge. However it seems useless to rely on this for solving multiplication and division problems, an idea which is supported by our findings.

Table 15
Testing for Strategy 4: Range Value Bias in Addition and Subtraction Problems - One-sample t-Test Against M = .500, df = 33

Task	**Range value**	***M***	***p***
Non-symbolic addition	Left	.720	< .001
	Right	.708	< .001
Non-symbolic subtraction	Left	.485	.640
	Right	.735	< .001
Symbolic addition	Left	.581	.055
	Right	.770	< .001
Symbolic subtraction	Left	.480	.412
	Right	.583	.018

Note. Range value refers to the side children would choose when applying the numerical range strategy.

In a fourth step of analyses we examined whether children based their answers for non-symbolic addition or subtraction problems on the range of values tested across one set. For addition problems children using this strategy would say the left side is correct when the sum size is smaller than the mean of all sums in the given problem set. This strategy on the one hand involves high working memory demands and on the other hand requires prior knowledge, which would render it useless during the first tasks. Results of these analyses are presented in Table 15. It seems children do not take this strategy into account for addition problems, although one part for symbolic addition was not significant in our study. However, this strategy seems to play a key role for subtraction problems, as children relied heavily on this strategy.

Based on this strategy analyses for Study 1 we chose to omit or keep problems for Study 2. We chose to omit non-symbolic subtraction problems, as they were problematic with regards to Strategies 2-4. We also omitted all symbolic problems but addition, because of massive problems with regard to Strategy 1 and overall performance which was not significantly above chance for subtraction and division. Although non-symbolic division problems were problematic with regard to Strategy 1, we chose to keep them. Children were significantly above chance overall and above chance, though not significantly, for both options of Strategy 1. Furthermore the problems were unproblematic with regard to Strategy 3.

A.2 Solving problems in a number range up to 100 with skills for a number range up to 10

Table 16
Symbolic Addition and Subtraction Problems Revised: Just Using the Ten Unit

S Addition	Correc	S Addition	Correct	S Subtraction	Correc	S Subtraction	Correct
10 + 8 = 18 vs. 13	Left	1 + 0 = 1 vs. 1	Undecide	30 – 9 = 21 vs. 12	Left	3 – 0 = 3 vs. 1	Left
17 + 18 = 35 vs.	Right	1 + 1 = 2 vs. 5	Right	20 – 8 = 12 vs. 15	Right	2 – 0 = 2 vs. 1	Left
5 + 8 = 13 vs. 21	Right	0 + 0 = 0 vs. 2	Right	17 – 7 = 10 vs. 15	Right	1 – 0 = 1 vs. 1	Undecide
34 + 31 = 65 vs.	Left	3 + 3 = 6 vs. 3	Left	24 – 9 = 15 vs. 12	Left	2 – 0 = 2 vs. 1	Left
11 + 11 = 22 vs.	Left	1 + 1 = 2 vs. 1	Left	21 – 6 = 15 vs. 10	Left	2 – 0 = 2 vs. 1	Left
21 + 16 = 37 vs.	Right	2 + 1 = 3 vs. 5	Right	31 – 8 = 23 vs. 13	Left	3 – 0 = 3 vs. 1	Left
30 + 26 = 56 vs.	Left	3 + 2 = 5 vs. 3	Left	25 – 5 = 20 vs. 16	Left	2 – 0 = 2 vs. 1	Left
18 + 18 = 36 vs.	Right	1 + 1 = 2 vs. 6	Right	23 – 9 = 14 vs. 21	Right	2 – 0 = 2 vs. 2	Undecide
33 + 28 = 61 vs.	Left	3 + 2 = 5 vs. 3	Left	23 – 11 = 12 vs.	Right	2 – 1 = 1 vs. 2	Right
18 + 24 = 42 vs.	Right	1 + 2 = 3 vs. 5	Right	27 – 6 = 21 vs. 14	Left	2 – 0 = 2 vs. 1	Left
5 + 7 = 12 vs. 22	Right	0 + 0 = 0 vs. 2	Right	23 – 7 = 16 vs. 20	Right	2 – 0 = 2 vs. 2	Undecide
11 + 13 = 24 vs.	Left	1 + 1 = 2 vs. 1	Left	65 – 33 = 32 vs.	Right	6 – 3 = 3 vs. 5	Right
8 + 9 = 17 vs. 24	Right	0 + 0 = 0 vs. 2	Right	58 – 13 = 45 vs.	Left	5 – 1 = 4 vs. 3	Left
12 + 13 = 25 vs.	Left	1 + 1 = 2 vs. 1	Left	70 – 14 = 56 vs.	Left	7 – 1 = 6 vs. 3	Left
20 + 18 = 38 vs.	Right	2 + 1 = 3 vs. 6	Right	57 – 12 = 45 vs.	Left	5 – 1 = 4 vs. 3	Left
27 + 25 = 52 vs.	Left	2 + 2 = 4 vs. 3	Left	61 – 25 = 36 vs.	Right	6 – 2 = 4 vs. 4	Undecide
8 + 7 = 15 vs. 24	Right	0 + 0 = 0 vs. 2	Right	24 – 11 = 13 vs.	Right	2 – 1 = 1 vs. 2	Right
28 + 31 = 59 vs.	Left	2 + 3 = 5 vs. 4	Left	66 – 26 = 40 vs.	Right	6 – 2 = 4 vs. 5	Right
12 + 12 = 24 vs.	Left	1 + 1 = 2 vs. 1	Left	70 – 37 = 33 vs.	Right	7 – 3 = 4 vs. 5	Right
16 + 17 = 33 vs.	Right	1 + 1 = 2 vs. 6	Right	48 – 18 = 30 vs.	Right	4 – 1 = 3 vs. 4	Right
31 + 29 = 60 vs.	Left	3 + 2 = 5 vs. 3	Left	71 – 13 = 58 vs.	Left	7 – 1 = 6 vs. 3	Left
7 + 6 = 13 vs. 18	Right	0 + 0 = 0 vs. 1	Right	64 – 13 = 51 vs.	Left	6 – 1 = 5 vs. 3	Left
10 + 11 = 21 vs.	Left	1 + 1 = 2 vs. 1	Left	63 – 14 = 49 vs.	Left	6 – 1 = 5 vs. 4	Left
9 + 5 = 14 vs. 25	Right	0 + 0 = 0 vs. 2	Right	55 – 21 = 34 vs.	Right	5 – 2 = 3 vs. 5	Right

Many problems in a number range up to 100 can be solved roughly by estimation. Most adults could easily see that 93 – 27 > 12 is obviously correct, without doing the entire calculation. This is done by roughly estimating and rounding like 90 – 30 > 10.

It seems unlikely that first graders at the beginning of primary school are that prone in estimating or even rounding. However, an even easier strategy would be to just solve 9 – 2 > 1 which requires some very rudimentary understanding of the decimal number system alongside addition and subtraction skills in a number range up to 10. If children use this strategy, they would correctly say that 33 + 28 is more than 38, but they couldn't decide whether 61 – 25 is more than 45 or would even go wrong deciding 30 – 18 vs. 15. To test this hypothesis we correlated arithmetically correct answers (left = 1, right = 2) with predicted answers using this strategy (left = 1, undecided = 2, right = 3). For the 24 symbolic addition problems, there is only one problem which would be undecided, while the rest would be answered correctly using this strategy, $r(24) = .980$, $p < .001$. In the 24 symbolic subtraction problems one problem would be answered incorrect and four undecided, while the rest would be answered correctly using this strategy, $r(24) = .854$, $p < .001$ (Table 16).

A.3 Early arithmetic competencies test

Table 17
Study 2 Test to Assess Early Arithmetic Competencies

Question	Description
1-2	Compare small sets up to six items and indicate where is more
3-4	Equally split a set of up to ten candies between two children
5-6	Compare two sets of up to seven dots and draw new dots on the side with less items until both are the same
7-10	Children see a sequence of dots with one element missing (2-3-_-5) and have to draw the missing dots.
11-14	Children see three boxes, where one contains the whole dots, another one a part of these dots, while the third box is empty. Children have to draw dots into this box to solve the part-part-whole problem.
15-16	Part-part-whole word problems. Children have to draw dots into a box to indicate the solution.
17-18	Relational number word problems. Children have to draw items into a box to indicate the solution.

We assessed early arithmetic competencies with a test based on a five-level model proposed by Fritz, Ricken and Balzer (2009), which was administered in a class setting (Table 17)

A.4 Individual differences analyses

At the recommendation of a reviewer, we conducted additional analyses to determine how many children performed above chance on the individual level for both studies. Because all approximate arithmetic problems could be solved with a 50% guessing probability, binomial distribution calculation can be applied. For problem categories with 24 problems, a child had to answer 17 questions correct to be above chance on the individual level with $\alpha < .05$. Similarly, problem categories with 21 problems needed 15 correct answers, problem categories with 16 problems needed 12 correct answers and problem categories with 8 problems needed 7 correct answers (see Table 18). The results show that not even 50% of the children answered approximate arithmetic problems correctly, when testing for individual guessing probabilities.

Table 18
Number of Children Solving Problems above Chance on an Individual Level

	Study 1 (*n* = 34)		**Study 2 (*n* = 66)**	
Task	**Non-symbolic**	**symbolic**	**Non-symbolic**	**symbolic**
Addition	16	16	17	30
Subtraction	10	3		
Division	14	2	30	
Multiplication	15	1	28	

4. Working memory influence on mathematical achievement as a function of age

Abstract

Recent studies showed that the influence of working memory capacity on mathematics achievement changes with age, however the specific direction of this change is still unclear. Furthermore, there is little research regarding a possible interdependency between reading and math learning in terms of working memory requirements. We conducted a cross-sectional study with N = 246 children from 2nd to 4th grade. Working memory capacity, curricular mathematical achievement and reading speed along other control variables were assessed at the beginning of the school year. We found that the influence of the phonological loop increased significantly over the course of the two grades, while the influence of reading speed diminished. We interpret this finding as a resource reallocation. Over the course of grades students automate reading more and more as an effect of schooling, which leads to lower central executive load and also free capacity in the phonological loop, which can then be used for math problems. Results are discussed with respect to methodological issues in former research.

Keywords: working memory, early math education, age differences

4.1 Introduction

Working memory is a part of our cognitive system, in which information can be stored and manipulated (Baddeley & Hitch, 1974; Baddeley, 1986). Baddeley and Hitch (1974) proposed a multicomponent model consisting of three components with limited capacity each. The phonological loop and the visuo-spatial sketchpad can be described as subsidiary storage systems for auditory and visuo-spatial information respectively. The central executive is described as a system which controls and regulates the other two components' activities while coordinating two separate tasks at a time. Other functions include switching between different tasks, holding attention and the activation and retrieval of information from long term memory (Baddeley, 1996). Both, former as well as current studies use this model to investigate the correlation between working memory capacity and mathematical achievement.

Many studies demonstrated that working memory capacity has a strong impact on mathematical achievement (i.e. de Smedt et al., 2009; Meyer, Salimpoor, Wu, Geary & Menon, 2009). In their meta-analysis, Swanson & Jerman (2006) found that children of average achievement outperformed children with math problems in measures of verbal working memory, visual working memory and long term memory, although no differences in short-term memory were found, with verbal working memory having the strongest effect overall. In a literature review, DeStefano and LeFevre (2004) found evidence that different mathematical problems require different components of working memory to be activated and involved.

4.1.1 Working memory and age

Newest studies imply that the influence of working memory capacity on mathematical achievement varies as a function of age (de Smedt et al., 2009; Meyer et al., 2009). De Smedt et al. (2009) conducted a longitudinal study starting with students in their first month of first grade. Students were tested for working memory capacity at this time. Five months as well as twelve months later, mathematical achievement was assessed with a curriculum-based test. The first test used numbers up to 10, while at the beginning of second grade the test included numbers up to 20 – thus including the need for carry operations. Furthermore, intelligence was assessed at the beginning of second grade. Confirmatory factor analyses gave empirical evidence for the three component working memory model (see also Gathercole, Pickering, Ambridge, & Wearing, 2004). All components of working memory correlated significantly with mathematical achievement. Regression analyses revealed that during first grade visuo-spatial and central executive measures were most predictive for mathematical achievement. In second grade, this was the case for phonological loop and intelligence – while controlling for the other working memory components and age. De Smedt et al. (2009) explained this shift in predictive value with a higher usage of verbal coding during calculation, while abandoning visual strategies like finger based number representation.

In a cross-sectional design, however, Meyer et al. (2009) investigated second and third grade students and found contrary results. In this study, working memory, intelligence, and mathematical achievement were assessed. Mathematical achievement was assessed with the subscales 'numerical operations' and 'math reasoning' of the Wechsler Individual Achievement Test (WIAT-II; Wechsler, 2001). The numerical operations scale tests the ability to read and write numbers and solve simple arithmetic problems. The Math reasoning scale includes problems of counting and geometry as well as word problems.

There was a significant increase in mathematical achievement from second to third grade, while there were no gains in working memory capacity except for one subscale of the central executive. Regression analyses revealed that in second grade only mathematical reasoning could be predicted by phonological and central executive measures, while in third grade mathematical reasoning as well as numerical operations were predicted by visuo-spatial measures only. This shift is explained with an increased use of visuo-spatial strategies, which is in line with neuropsychological research, where a shift from prefrontal cortex functions to parietal cortex functions with higher math proficiency was found (Meyer et al., 2009).

4.1.2 Open research questions

Both of the above described studies showed that the relation between working memory components and mathematical achievement differs as a function of age. There is agreement that the influence of central executive measures decreases with increasing age. The second change concerns the influence shift of the two subsidiary components, where the two studies find indication for both directions of shifting. On first sight this seems contradictory, but there are several possible explanations for these results. First of all, the studies investigated different age ranges. Thus, it could be that both findings are plausible, but that there is a cyclic change of phonological and visuo-spatial influence on mathematical achievement. To confirm or reject these assumptions, new studies should include more than two grades at a time.

A second possibility could be a problem of materials, especially for the assessment of mathematical achievement. De Smedt et al. (2009) used two different curriculum-based tests, which have a shift in number range from one-digit problems in the first test to two-digit problems in the second one. This could be an explanation for the higher phonological loop influence, as it is a main contributor for multi-digit operations (see Logie, Gilhooly & Wynn, 1994). To avoid some of the problems arising from this, it seems necessary to use tests which include similar topics and which all use multi-digit calculation. Meyer et al. (2009), on the other hand, used a standardized psychological test to assess mathematical achievement over both grades, thus being further away from school learning.

A third option could be different curricula or cultural differences in school teaching between the United States of America and the Netherlands, where the studies were conducted. A fourth possibility is that the change of influence could be mediated by other variables correlated with working memory and mathematical achievement. Such variables include access speed to long-term memory as assessed by naming speed (Swanson & Kim, 2007) and reading comprehension (Krajewski & Schneider, 2009). Zheng, Swanson and Marcoulides (2011) showed that reading skills mediated central executive and phonological loop influence on mathematical problem solving.

The fifth issue is rather methodological. Both studies conducted regression analyses for different grades and compared the variables which significantly predicted math achievement. However, this comparison is not sufficient to conclude that there is a significant change in correlation or predictive value. Hence further analyses should be conducted to confirm the change hypothesis.

As a result of the studies of de Smedt et al. (2009) and Meyer et al. (2009) there are several open questions:

1.) De Smedt et al. (2009) - in line with Gathercole et al. (2004) – found evidence for the multicomponent model of working memory for first graders. We wanted to evaluate whether these findings could be replicated with the current set of data for German elementary school students?
2.) Meyer et al. (2009) found that only a single measure of central executive among all working memory components showed significant growth from second to third grade, although Gathercole et al. (2004) showed growth in all three components at that age. Is there any growth in working memory

components' capacities between grades and if yes, what effect size does this growth have?

3.) De Smedt et al. (2009) and Meyer et al. (2009) found a developmental change in working memory components' influence on mathematical achievement, although different directions were found. Is there any developmental change and what direction does it have if controlling for other influential variables such as reading and naming speed?

We tried to answer these questions with a cross-sectional study, assessing working memory capacity and naming speed, as well as mathematical and reading achievement in primary school students.

4.2 Method

4.2.1 Sample

246 students (132 boys, 114 girls) from two German primary schools participated in this study. Students attended second to fourth grades and were tested at the beginning of the school year. Their mean age was 104 months (*SD* = 11.71). Further demographic data separated by grade and gender can be found in Table 19.

Table 19
Sample Size, Means and Standard Deviations by Grade and Gender

Grade	2nd grade		3rd grade		4th grade	
Gender	Boys	Girls	Boys	Girls	Boys	Girls
N	39	38	49	48	44	28
Age	92.28	90.92	104.73	103.04	118.52	114.36
(in month)	(6.61)	(4.44)	(6.49)	(5.83)	(8.426)	(3.851)
Math	41.33	33.45	52.47	38.81	36.66	37.32
(Percentile rank)	(24.92)	(19.17)	(32.32)	(27.02)	(30.32)	(31.61)
Reading	39.21	38.24	33.06	41.52	27.86	28.32
(Percentile rank)	(25.86)	(27.52)	(26.87)	(29.24)	(25.46)	(21.70)
Central executive	-0.906	-0.738	-0.039	0.126	0.865	0.731
(WLE)	(1.094)	(0.986)	(1.362)	(1.168)	(1.296)	(1.073)
Visuo-spatial sketchpad	-0.846	-1.098	0.305	0.070	0.869	0.469
(WLE)	(1.380)	(1.004)	(1.364)	(1.069)	(1.453)	(0.970)
Phonological loop	-0.675	-0.587	-0.073	0.276	0.359	0.572
(WLE)	(1.397)	(1.476)	(1.658)	(1.665)	(1.523)	(1.898)

Naming Speed (z- values from N = 246)	-0.396 (1.076)	-0.190 (1.011)	0.126 (0.972)	0.174 (0.943)	0.281 (0.897)	0.616 (0.692)

4.2.2 Material

School achievement variables: Mathematical achievement was assessed with the 'Deutsche Mathematiktests' (German tests for mathematics assessment), in particular the Demat 1+ (Krajewski, Küspert, & Schneider, 2002), Demat 2+ (Krajewski, Liehm, & Schneider, 2004) and Demat 3+ (Roick, Gölitz, & Hasselhorn, 2004). These tests are based on German curricula and include problems regarding arithmetic, geometry and word problems. Reliabilities (in terms of Cronbach's alpha) of the tests are between $.83 < \alpha < .91$.

To assess reading achievement the 'Würzburger Leise Leseprobe' (WLLP; Würzburg silent reading test; Küspert & Schneider, 1998) was conducted. This test is a speed test to assess reading speed and precision from first to fourth grade. Children were given word lists. Next to each word were four pictures that showed objects, whose names sounded similar or which had a similar meaning. Out of these four pictures, the one fitting the given word had to be identified. Reliability of this test depends on the tested grade with $.82 < \alpha < .93$.

Cognitive variables: Working memory was assessed with seven subtests. These included 'number span forward' and 'non-words forward' as measures of the phonological loop, 'corsi blocks' and 'matrices' as measures of the visuo-spatial sketchpad and 'color span backward', 'number span backward' and 'listening span' as measures of the central executive.

During the number span forward task, the experimenter spoke out loud a string of different numbers to the child, which the child had to repeat in the same order afterwards (span size 2-9, two items per span, stop condition: two of a span wrong). The non-words forwards task worked similarly, with the experimenter presenting senseless syllables to the child, which had to be repeated afterwards (span size 1-7, three items per span, stop condition: two of a span wrong).

During the corsi block task, the experimenter presented a board with nine identical cubes glued to random positions on the board (although they were the same for all children). Afterwards the experimenter tapped a span of cubes, which the child had to retap in the correct order (span 2-8, four items per span, stop condition: three of a span wrong). During the matrices task, the experimenter presented a matrix of 4x4 areas to the child for five seconds, with a certain amount of areas being black. In the following, these black areas had to be tapped by the child on an empty 4x4 matrix (span size 2-8, two items per span, stop condition: two of a span wrong).

Color span backward tasks had four example tasks (2x span size 2; 2x span size 3) in which the experimenter showed a toy pirate walking along colored treasure chests (forward). The child had to name the colors of the chests. Afterwards the child was told that the pirate is now walking back and had to tell what colors the chests would have when passing backward (three items at span size 2, two tasks at span size 3, no stop condition). Number span backwards was conducted directly afterwards. The experimenter told the child a string of different numbers, which had to be repeated by the child in the opposite order (span sizes 2-8, two items per span, stop condition: two of a span wrong). During the listening span task (Daneman & Carpenter, 1980), children had to answer a series of simple questions with Yes or No (i.e. “Is a crocodile green?”; “Is an elephant blue?”). After doing so, they were asked to repeat the colors in correct order (span sizes 2-5, maximum of four items per span, stop condition: two of a span wrong, jump condition: two of a span correct).

During the naming speed task, children were shown two sheets with 16 images on each of them. Each image corresponded to a one syllable word, which had to be spoken out aloud as quickly as possible. The number of correct answers and solution time were assessed and combined into an efficiency score introduced by

Paas and van Merriënboer (1993).

4.2.3 Procedure

All participants were tested three times. In a first session of approximately 30-45 minutes, mathematical abilities were assessed with the grade-appropriate version of the “Demat”. In a second session of 10-15 minutes, reading abilities were assessed with the WLLP. Both tests were administered in a class setting. Working memory measures were administered individually in a quiet room. This test took around 20-30 minutes.

4.3 Results

4.3.1 Rasch scaling of working memory tasks

A Rasch scaling of all working memory items was conducted for two reasons. On the one hand, adaptive tasks were included, thus it was impossible to compute sum scores. On the other hand, Rasch scaling offered the possibility to directly validate the three component working memory model for primary school students on item level. We tested for a one-dimensional model, where all items of all tasks were on one dimension. Next, a two-dimensional model was tested with a phonological and a visuo-spatial dimension, whereby central executive items loaded on both dimensions. Finally, a three-dimensional model was tested, with each component’s items loading on its unique dimension.

The one-dimensional model was inferior to the two-dimensional model, $\chi^2(2, N = 246) = 445.308$, $p < .001$. Additionally, the two-dimensional model was inferior to the three-dimensional model, $\chi^2(3, N = 246) = 311.977$, $p < .001$. Infit of all 114 items ranged from 0.83 to 1.21 and was thus sufficient. WLE person separation reliabilities for the three dimensions were .904 for the phonological loop, .805 for the visuo-spatial sketchpad and .785 for the central executive dimension. On a medium level, the central executive correlated with the phonological loop ($r(244) = .522$, $p < .001$) and the visuo-spatial sketchpad dimension ($r(244) = .575$, $p < .001$), while the phonological loop and visuo-spatial sketchpad dimension only correlated on a lower level ($r(244) = .229$, $p < .001$). These findings correspond to Baddeley's model (1986) and the findings of de Smedt et al. (2009).

4.3.2 Descriptive statistics and working memory capacity growth

Means and standard deviations for all tasks and problems can be found in Table 19. A multivariate analysis of variance (MANOVA) was computed to find out if there was a significant growth in any working memory component over the course of the three assessed grades (see Figure 11). We found significant growth in all three working memory components: Central executive, $F(2, 243) = 35.778$, $p < .001$, *partial* $\eta^2 = .227$, visuo-spatial sketchpad, $F(2, 243) = 36.526$, $p < .001$, *partial* $\eta^2 = .231$, and phonological loop, $F(2, 243) = 8.965$, $p < .001$, *partial* $\eta^2 = .069$. Post-Hoc tests (Tukey's HSD) revealed significant growths in all components from second to third grade (central executive ($d = .74$, $p < .001$), visuo-spatial sketchpad, ($d = .93$, $p < .001$), phonological loop, ($d = .49$, $p = .008$)). From third to fourth grade though, there was only significant growth in the central executive ($d = .59$, $p < .001$) and visuo-spatial sketchpad ($d = .49$, $p = .019$), but not in phonological loop measures ($d = .22$, $p = .353$). As can be seen from Figure 11, growth seems to be rather linear, which was confirmed by a linear contrast test with significant mean differences for all three components ($MD_{CE} = 1.16$, p <.001; $MD_{VS} = 1.19$, p <.001; $MD_{PL} = 0.76$, p <.001)

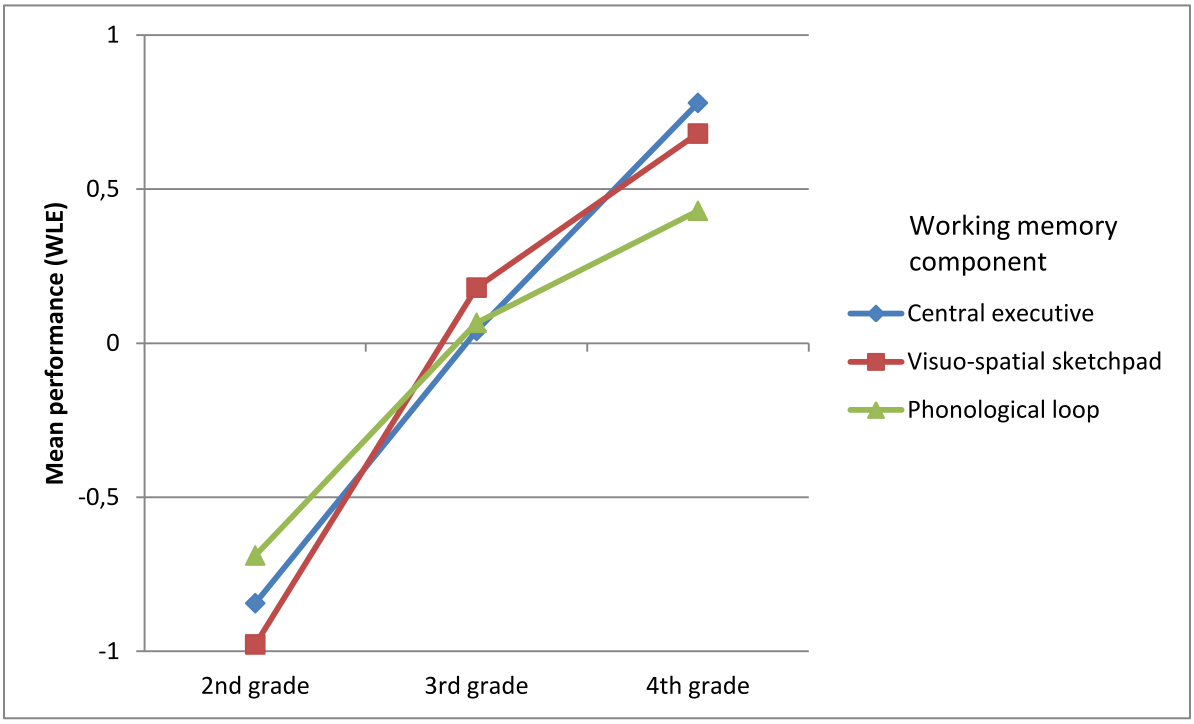

Figure 11: Mean WLE scores as a function of grade grouped by working memory components.

4.3.3 Correlation and regression analyses

Pearson correlation coefficients between math and reading achievement, as well as other variables were computed for all three grades (see Table 20). We found significant correlations between all three components of working memory and mathematics, except for second grade, where there was no correlation between phonological loop and mathematics. Furthermore, there was a significant decrease in the correlation between mathematics and reading from second to fourth grade (z = 2.335, p = .020), while the correlation between mathematics and phonological loop increased marginally (z = -1.779, p = .075).

Table 20

Pearson Correlations among Math, Reading, Working Memory, Naming Speed, Age and Gender (coding: male 1 – female 2) split by grade

2nd grade (*N*=77)	1	2	3	4	5	6	7	8
1 Math		.564**	.353**	.288*	.137	.277*	.038	-.144
2 Reading			.410**	.320**	.199	.358**	.017	-.009
3 Central executive				.426**	.341**	.223	-.165	-.083
4 Visuo-spatial sketchpad					.096	.141	.045	-.096
5 Phonological loop						.233*	-.079	.056
6 Naming Speed							-.420**	.037

7 Age							-.070
8 Gender							
3rd grade (*N*=97)							
1 Math	.448**	.468**	.528**	.202*	.424**	-.206*	-.226
2 Reading		.373**	.348**	.321**	.489**	-.200*	.145
3 Central executive			.371**	.414**	.461**	-.174	.063
4 Visuo-spatial sketchpad				.032	.277**	-.025	-.119
5 Phonological loop					.273**	.043	.092
6 Naming Speed						-.246*	.062
7 Age							-.203*
8 Gender							
4th grade (*N*=72)							
1 Math	.243*	.349**	.360**	.410**	.197	-.136	-.015
2 Reading		.345**	.303**	.291*	.198	-.217	-.046
3 Central executive			.339**	.341**	-.018	-.129	.005
4 Visuo-spatial sketchpad				.175	.124	-.077	-.122
5 Phonological loop					.138	-.135	.059
6 Naming Speed						-.193	.159
7 Age							-.266*
8 Gender							

Note. * $p < .05$ ** $p < .01$

Table 21

Regression Analyses for Curricular Arithmetic Performance: Unique Contribution of Working Memory, Age, Gender, Naming Speed and Reading

		2nd grade					3rd grade					4th grade				
Model	Variables & Model summary	*B*	*SE*	β	*t*		*B*	*SE*	β	*t*		*B*	*SE*	β	*t*	
Model 1																
	Central executive	5.791	2.752	.269	2.104	*	6.788	2.367	.282	2.867	**	3.988	2.920	.157	1.366	
	Visuo-spatial Sketchpad	2.970	2.251	.159	1.319		10.452	2.227	.421	4.694	***	5.971	2.604	.252	2.293	*
	Phonological loop	0.660	1.843	.042	0.358		1.304	1.675	.071	0.778		5.723	2.020	.312	2.833	**
Model 2																
	Age	0.484	0.433	.122	1.116		-0.613	0.410	-.125	-1.494		-0.104	0.443	-.025	-0.235	
	Central executive	5.930	2.750	.275	2.156	*	6.140	2.391	.255	2.568	*	3.955	2.944	.156	1.343	
	Visuo-spatial Sketchpad	2.841	2.250	.152	1.263		10.462	2.212	.421	4.730	***	5.916	2.632	.250	2.248	*
	Phonological loop	0.701	1.840	.044	0.381		1.591	1.675	.087	0.950		5.695	2.038	.311	2.795	**
Model 3																
	Gender	-7.571	4.919	-.169	-1.539		-14.459	4.872	-.239	-2.968	**	2.175	6.966	.035	0.312	
	Age	0.409	0.432	.103	0.946		-0.779	0.398	-.159	-1.958		-0.060	0.468	-.014	-0.128	
	Central executive	6.497	2.749	.302	2.364	*	6.436	2.298	.268	2.801	**	4.000	2.967	.158	1.348	
	Visuo-spatial Sketchpad	2.368	2.250	.127	1.052		9.699	2.139	.391	4.534	***	6.069	2.695	.257	2.252	*
	Phonological loop	0.631	1.823	.040	0.346		2.000	1.614	.109	1.239		5.642	2.059	.308	2.741	**
Model 4																
	Naming Speed	5.105	2.424	.233	2.106	*	5.983	2.846	.187	2.102	*	4.711	4.021	.128	1.172	
	Gender	-8.456	4.821	-.189	-1.754		-14.300	4.784	-.236	-2.989	**	0.768	7.050	.012	0.109	
	Age	0.322	0.424	.081	0.759		-0.672	0.394	-.137	-1.705		-0.002	0.470	.000	-0.004	
	Central executive	5.819	2.703	.270	2.153	*	4.923	2.368	.205	2.079	*	4.380	2.977	.173	1.471	
	Visuo-spatial Sketchpad	1.916	2.207	.103	0.868		9.054	2.122	.365	4.266	***	5.601	2.717	.237	2.061	*
	Phonological loop	0.070	1.800	.004	0.039		1.536	1.600	.084	0.960		5.337	2.069	.291	2.579	*
Model 5																
	Reading	0.667	0.170	.445	3.922	***	0.311	0.147	.210	2.113	*	-0.107	0.192	-.074	-0.559	
	Naming Speed	2.226	2.324	.102	0.958		3.546	3.022	.111	1.174		5.198	4.135	.142	1.257	
	Gender	-10.022	4.404	-.224	-2.276	*	-16.950	4.859	-.280	-3.488	**	1.739	7.297	.028	0.238	
	Age	0.241	0.386	.061	0.623		-0,564	0.390	-.115	-1.446		-0.072	0.489	-.017	-0.147	
	Central executive	3.218	2.547	.149	1.263		5.038	2.324	.209	2.168	*	4.689	3.043	.185	1.541	
	Visuo-spatial Sketchpad	1.030	2.020	.055	0.510		7.480	2.212	.301	3.382	**	5.894	2.781	.249	2.119	*
	Phonological loop	-0.414	1.642	-.026	-0.252		0.825	1.606	.045	0.514		5.592	2.130	.305	2.626	*

Note. Model 1: 2nd grade: $F(3, 72) = 4.071$, $p = .010$, $R^2 = .145$; 3rd grade: $F(3, 93) = 18.089$, $p < .001$, $R^2 = .368$; 4th grade: $F(3, 68) = 8.555$, $p < .001$, $R^2 = .274$; Model 2: 2nd grade: $F(4, 71) = 3.375$, $p = .014$, $R^2 = .160$, R^2 Change = .015, $p = .268$; 3rd grade: $F(4, 92) = 14.305$, $p < .001$, $R^2 = .383$, R^2 Change = .015, $p = .139$; 4th grade: $F(4, 67) = 6.341$, $p < .001$, $R^2 = .275$, R^2 Change = .001, $p = .815$; Model 3: 2nd grade: $F(5, 70) = 3.226$, $p = .011$, $R^2 = .187$, R^2 Change = .028, $p = .128$; 3rd grade: $F(5, 91) = 14.176$, $p < .001$, $R^2 = .438$, R^2 Change = .054, $p = .004$; 4th grade: $F(5, 66) = 5.024$, $p = .001$, $R^2 = .276$, R^2 Change = .001, $p = .756$; Model 4: 2nd grade: $F(6, 69) = 3.560$, $p = .004$, $R^2 = .236$, R^2 Change = .049, $p = .039$; 3rd grade: $F(6, 90) = 12.994$, $p < .001$, $R^2 = .464$, R^2 Change = .026, $p = .038$; 4th grade: $F(6, 65) = 4.439$, $p = .001$, $R^2 = .291$, R^2 Change = .015, $p = .246$; Model 5: 2nd grade: $F(7, 68) = 5.885$, $p < .001$, $R^2 = .377$, R^2 Change = .141, $p < .001$; 3rd grade: $F(7, 89) = 12.205$, $p < .001$, $R^2 = .490$, R^2 Change = .026, $p = .037$; 4th grade: $F(7, 64) = 3.809$, $p = .002$, $R^2 = .294$, R^2 Change = .003, $p = .578$.

* $p < .05$ ** $p < .01$ *** $p < .001$

To study the unique influence of working memory components on mathematical achievement, hierarchical regression analyses for all three grades were conducted (see Table 21). In a first step (model 1), all three components of working memory were entered simultaneously. These analyses revealed that, under control of the other components, only central executive measures predicted mathematics in second grade, while in third grade, central executive and visuo-spatial measures were predictive. Finally in fourth grade, visuo-spatial and phonological measures were significant predictors of mathematical achievement. In models 2 to 4, age, gender and naming speed were entered into the regression, leaving the general influence of working memory mainly unchanged. When finally controlling for reading achievement in second grade (model 5) there was no significant influence of the central executive left.

4.4 Discussion

The purpose of this study was to examine how the influence of working memory components on mathematical achievement changes as a function of age during primary school. In this regard, three research questions were examined. Concerning the three-dimensional structure of working memory during primary school, we replicated the findings of Gathercole et al. (2004) and de Smedt et al. (2009). In contrast to those studies, however, we used item-response theory to validate Baddeley's (1986) theoretical model. Additionally, we showed that there is a significant linear growth in all three working memory components from grade to grade. These findings are consistent with Gathercole et al. (2004), but are contrary to the findings of Meyer et al. (2009).

Regarding the development of working memory influence on mathematical achievement, however, we replicated the findings of Meyer et al. (2009) and de Smedt et al. (2009) that the central executive becomes less influential with increasing grade. An explanation for this could be that children have found and adjusted to optimum strategies for certain problems and thus do not need to switch between several rather heuristic strategies they use when learning math. This automation of strategy use could be the reason for lower central executive use in higher grades. However, in contrast to both studies, this loss of influence appeared later in our study, between third and fourth grade. The rather weak mathematical achievement of our sample (percentile rank of standardized math achievement test M = 40.29, SD = 28.77) might be a reason for this delayed development, as strategy change might need some proficiency level to occur. Concerning the development of phonological loop and visuo-spatial influence on mathematical achievement, our findings are closer to those of de Smedt et al. (2009), as we replicated a shift from the visuo-spatial to the phonological dimension from third to fourth grade, although this change also happens rather delayed. On the other hand, their explanation for this shift was that there is a shift from finger counting to more sophisticated verbal strategies like verbal counting or fact retrieval. Our findings, however, find this shift from second to third grade, which would be rather late for finger counting strategy use. Although we agree with the idea of better and more fact retrieval in higher grades, the question arises whether younger children generally make use mental images instead of symbols and words when solving math problems. This idea is supported by findings regarding the approximate number system based on the idea of an innate number sense by Dehaene (1997).

Controlling for reading ability, we found that reading is one of the most influential predictive variable for early mathematics, even able to compensate the influence of working memory components in line with Zheng et al. (2011). With increasing grade, reading gets less important, while the predictive value of working memory increases. When children enter school there are individual differences in reading and math, mainly because of parental or preschool training. If we accept the idea that primary school arithmetic requires a certain level of reading proficiency, for example to read symbolic math or task descriptions, our finding could just be a compensatory effect of schooling which brings all children to that required level. Once it is reached, there seems to be no further benefit from good reading or at least reading speed, which was the only part of reading we measured in the current study. Thus, once children are on a sufficient level for automatized processes of reading in mathematics, cognitive variables can come to the fore.

All these findings were derived from a direct comparison between different regression analyses. Hence all results should be viewed with reservation. This comparison gives no conclusion about significant increases or decreases of predictive values. By checking for changes in correlation coefficient over the years, we showed, however, that reading gets less important, while phonological influence increases. This could be caused by the fact that the limited resources of the phonological loop at a younger age are needed for the reading and verbalization of mathematical problems, as these processes are far from being automatized at that point of time. The phonological loop is required to store math problems or intermediary results in working memory. If young children need to switch between reading and maintaining as well as solving a math problem, they clearly have to work with a dual-task problem here, which would be addressed by the central executive. As we showed that the capacity of the phonological loop increases with age and reading gets more and more automatized, rather than being handled actively in working memory, there is no more dual-task requirement. This is in line with the findings of de Smedt et al. (2009) and Meyer et al. (2009), who found that central executive is far more important at younger ages. If this is the case though, children with low phonological loop capacity or with insufficient automation in reading should still rely on the central executive to solve math problems. Swanson and Jerman (2006) found that weak primary school students often have lower working memory capacity as well. As such materials for such students should be adapted to impose low memory demands. Otherwise mathematical failure in school would not occur because mathematical skills are not at hand, but rather because of lacking memory capacity and cognitive overload in terms of Cognitive Load Theory (Sweller, van Merriënboer & Paas, 1998).

To generalize our findings, they should be replicated in a longitudinal design. As statistical power is a bigger problem when comparing correlations than it is when comparing means, a larger sample size seems inevitable. Young children seem to rely on dual-task strategies for many mathematical problems. If this is the case, other dual tasks with phonological loop load should be administered to children to find out if there is some specific influence and to test the idea that dual task hinders a phonological loop influence to show up at younger grades.

4.5 References

Baddeley, A. D. (1986). *Working memory*. Oxford: Clarendon Press.

Baddeley, A. D. (1996). Exploring the central executive. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 49A*, 5-28.

Baddeley, A. D., & Hitch, G. J. (1974). Working memory. In G. H. Bower (ed.), *The psychology of learning and motivation: Advances in research and theory (vol. 8, pp. 47 ‑90).* New York: Academic Press.

Daneman, M., & Carpenter, P.A. (1980). Individual differences in working memory and reading. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behaviour, 19,* 450-466.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

De Smedt, B., Janssen, R., Bouwens, K., Verschaffel, L., Boets, B., & Ghesquière, P. (2009). Working memory and individual differences in mathematics achievement: A longitudinal study from first grade to second grade. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*, 186-201.

DeStefano, D., & LeFevre, J. A. (2004). The role of working memory in mental arithmetic. *European Journal of Cognitive Psychology, 16*, 353-386.

Gathercole, S. E., Pickering, S. J., Ambridge, B., & Wearing, H. (2004). The structure of working memory from 4 to 15 years of age. *Developmental Psychology, 40,* 177–190.

Krajewski, K., Küspert, P., & Schneider, W. (2002). *Deutscher Mathematiktest für erste Klassen (DEMAT 1+)* [German test for mathematics assessment in first grade]. Göttingen: Hogrefe.

Krajewski, K., Liehm, S., & Schneider, W. (2004). *Deutscher Mathematiktest für zweite Klassen (DEMAT 2+)* [German test for mathematics assessment in second grade]. Göttingen: Hogrefe.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2009). Exploring the impact of phonological awareness, visual–spatial working memory, and preschool quantity–number competencies on mathematics achievement in elementary school: Findings from a 3-year longitudinal study. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*, 516-531.

Küspert, P., & Schneider, W. (1998). *Würzburger Leise Leseprobe (WLLP)* [Würzburg silent reading test]. Göttingen: Hogrefe.

Logie, R. H., Gilhooly, K. J., & Wynn, V. (1994). Counting on working memory in arithmetic problem solving. *Memory & Cognition, 22*, 395-410.

Meyer, M. L., Salimpoor, V. N., Wu, S. S., Geary, D. C., Menon, V. (2009). Differential contribution of specific working memory components to mathematics achievement in 2nd and 3rd graders. *Learning and Individual Differences, 20,* 101-109.

Paas, F., & Van Merriënboer, J. J. G. (1993). The efficiency of instructional conditions: An approach to combine mental-effort and performance measures. *Human Factors, 35,* 737-743.

Roick, T., Gölitz, D., & Hasselhorn, M. (2004). *Deutscher Mathematiktest für dritte Klassen (DEMAT 3+)* [German test for mathematics assessment in third grade]. Göttingen: Hogrefe.

Swanson, H. L., & Jerman, O. (2006). Math Disabilities: A selective Meta-Analysis of the literature. *Review of Educational Research, 76*, 249-274.

Swanson, H. L., & Kim, K. (2007). Working memory, short-term memory, and naming speed as predictors of children's mathematical performance. *Intelligence, 35*, 151-168.

Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. W. C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review, 10*, 251-296.

Wechsler, D. (2001). *The Wechsler Individual Achievement Test — Second Edition (WIAT-II).* London: The Psychological Corporation.

Zheng, X., Swanson, H. L., & Marcoulides, G. A. (2011). Working memory components as predictors of childrens' mathematical word problem solving. *Journal of Experimental Child Psychology, 110*, 481-498.

5. Zusammenfassende Diskussion

Ausgangspunkt für die vorgestellten Studien waren die diskrepanten Forschungsbefunde hinsichtlich der Frage, welche Arbeitsgedächtniskomponenten im Modell nach Baddeley (1986) Prädiktionswert für die mathematische Leistungsfähigkeit von Kindergarten- und Grundschulkindern haben. Aus der bisherigen Forschung kristallisierten sich drei Merkmale heraus, die möglicherweise einen moderierenden Einfluss auf diesen Zusammenhang haben können, nämlich (a) die Zugehörigkeit zu bestimmten mathematischen Leistungsgruppen (Swanson & Jerman, 2006), (b) das Alter der Probanden (De Smedt et al., 2009a; Meyer et al., 2009) und (c) die Art der eingesetzten Aufgaben zur Erfassung der mathematischen Leistungsfähigkeit (DeStefano & LeFevre, 2004). Um ein besseres Verständnis dafür zu entwickeln, wie diese drei Merkmale wirken, wurden drei Studien zum Zusammenhang von Arbeitsgedächtniskapazität und Rechenleistung durchgeführt. In allen drei Studien wurden zum einen dieselben Aufgaben zur Erfassung des Arbeitsgedächtnisses eingesetzt und zum anderem in etwa gleich alte Kinder getestet, um die Ergebnisse über die Studien hinweg vergleichbar zu halten.

In der in Kapitel 2 vorgestellten Studie wurden in einem Screening die arithmetischen Fähigkeiten von Kindergartenkindern sowie von Erst- und Zweitklässlern basierend auf dem Entwicklungsmodell arithmetischer Konzepte von Fritz und Ricken (2008) erfasst. Darauf aufbauend wurden zwei Leistungsgruppen gebildet. Gruppe 1 gehörten Kinder an, deren arithmetische Fähigkeiten dem typischen Entwicklungsstand ihres Alters entsprachen. Dazu wurden in Gruppe 2 Kinder nach Rohwerten im arithmetischen Screeningtest parallelisiert, deren arithmetische Fähigkeiten jedoch deutlich hinter dem typischen Entwicklungsstand ihres Alters zurücklagen. Beide Gruppen unterschieden sich somit nicht hinsichtlich ihrer Leistung, jedoch waren die Kinder in Gruppe 2 bedeutsam älter als jene in

Gruppe 1. In der daran anschließenden Hauptstudie wurden mit einem detaillierteren Test noch einmal die arithmetischen Fähigkeiten, die Arbeitsgedächtniskapazität sowie weitere Kontrollvariablen dieser beiden Gruppen von Kindern erhoben. In dieser Studie sollte vorrangig untersucht werden, ob sich die beschriebenen zwei Gruppen in ihren Arbeitsgedächtnismaßen und in deren Zusammenhang mit der arithmetischen Leistung voneinander unterschieden.

In Kapitel 3 wurde eine Studie vorgestellt, in welcher zu Beginn der ersten Klasse die mathematischen Fähigkeiten (gemäß der Theorie der zwei numerischen Kernsysteme; Feigenson et al., 2004), die Arbeitsgedächtniskapazität sowie weitere Kontrollvariablen erhoben wurden. Ein Jahr später, zu Beginn der zweiten Klasse, wurden zudem die mathematischen Fähigkeiten gemäß Curriculum für die erste Klasse erhoben. Da die beiden numerischen Kernsysteme ein relativ neues Forschungsfeld im Bereich der frühkindlichen Rechenfertigkeiten darstellen, gibt es bisher noch keine Forschungsbefunde zum Zusammenhang der Leistungsfähigkeit der Kernsysteme mit der Arbeitsgedächtniskapazität, was in der vorgestellten Studie überprüft werden sollte. Darüber hinaus sollte in dieser Studie untersucht werden, ob sich in der Korrelation von Arbeitsgedächtniskapazität und mathematischer Leistungsfähigkeit differentielle Effekte in Abhängigkeit von den erhobenen mathematischen Fertigkeiten, hier die Kernsysteme und curriculare Rechenfertigkeiten, zeigen.

In der letzten, in Kapitel 4 vorgestellten Studie wurden die curricularen mathematischen Fähigkeiten von Zweit- bis Viertklässlern, die Arbeitsgedächtniskapazität sowie weitere Kontrollvariablen erhoben, um zu prüfen, ob der Einfluss der Arbeitsgedächtniskapazität auf die mathematische Leistungsfähigkeit als Funktion der Klassenstufe und damit auch des Alters variiert. Bisher gibt es nur wenige Befunde zu dieser Frage, die sich inhaltlich widersprechen

(de Smedt et al., 2009a; Meyer et al., 2009)

5.1 Zentrale Befunde

Im einleitenden Theorieteil wurden die folgenden drei studienübergreifenden Fragestellungen formuliert: Gibt es Unterschiede im Zusammenhang zwischen Arbeitsgedächtniskapazität und mathematischer Leistung als Funktion der (a) Gruppenzugehörigkeit zu bestimmten Leistungsgruppen, (b) Jahrgangstufe / des Alters und (c) der Art der Aufgaben zur Erfassung der mathematischen Leistungsfähigkeit? Bezogen auf diese zentralen Forschungsfragen zeigten sich die folgenden Befunde:

(a) In der in Kapitel 2 vorgestellten Studie zeigte sich, dass über alle Kinder hinweg insbesondere die Kapazität der zentralen Exekutive und des visuell-räumlichen Skizzenblockes Prädiktionswert für die arithmetische Leistungsfähigkeit haben. Ein Einfluss der phonologischen Schleife konnte hingegen nicht nachgewiesen werden. Diese Befunde gelten auch unter Kontrolle von Intelligenz, phonologischer Bewusstheit, Benenngeschwindigkeit (Naming Speed) und Alter. Im Vergleich der beiden arithmetischen Problemgruppen konnten in keiner Komponente des Arbeitsgedächtnisses signifikante Kapazitätsunterschiede nachgewiesen werden. In einem weiteren Schritt wurde untersucht, ob die Gruppenzugehörigkeit die Korrelation zwischen Arbeitsgedächtniskapazität und arithmetischer Leistungsfähigkeit moderiert. In diesen Analysen zeigte sich, dass dies im Bereich des visuell-räumlichen Skizzenblockes der Fall war. Hier zeigte sich, dass dieser nur bei den durchschnittlich entwickelten Kindern der Gruppe 1 signifikanten Prädiktionswert für die arithmetische Leistung hatte, während dies für die in ihrer arithmetischen Leistungsfähigkeit altersverzögerten Kinder der Gruppe 2 nicht der Fall war.

(b) In der in Kapitel 4 vorgestellten Studie zeigte sich über die Jahrgangsstufen hinweg ein signifikanter Kapazitätszuwachs in allen drei Komponenten des Arbeitsgedächtnisses. In Bezug auf den Zusammenhang zwischen Arbeitsgedächtniskapazität und schulmathematischer Leistung zeigte sich, dass von der zweiten zur vierten Klasse der Einfluss der Lesegeschwindigkeit auf die Rechenleistung abnahm, während der Einfluss der phonologischen Schleife auf die Rechenleistung zunahm. Darüber hinaus zeigte sich auf deskriptiver Ebene eine Abnahme des zentralexekutiven Einflusses von der zweiten zur vierten und des visuell-räumlichen Einflusses von der dritten zur vierten Klasse.

(c) In der in Kapitel 3 vorgestellten Studie zeigte sich, dass Kinder zu Beginn der Grundschulzeit in der Lage sind, mithilfe der beiden numerischen Kernsysteme Aufgaben zu allen vier Grundrechenarten approximativ zu lösen, wenn diese nicht-symbolisch präsentiert werden. Darüber hinaus konnte aufgezeigt werden, dass keine Komponente des Arbeitsgedächtnisses Prädiktionswert für die Leistungsfähigkeit der numerischen Kernsysteme hat. Daraus kann geschlossen werden, dass diese weitestgehend unabhängig vom Arbeitsgedächtnis, als eigenständiges mathematisches System agieren. Beide numerische Kernsysteme sowie die zentrale Exekutive waren jedoch prädiktiv für den Schulerfolg ein Jahr später. Insbesondere der Befund zur zentralen Exekutive ist hierbei deckungsgleich mit den Befunden aus der zweiten Klasse der in Kapitel 4 beschriebenen Studie.

Über alle Studien hinweg zeigte sich, dass alle drei

Arbeitsgedächtniskomponenten spezifisch bei bestimmten mathematischen Aufgaben zum Einsatz kommen. Während bei auf den mathematischen Kernsystemen basierenden, automatisierten Prozessen weitgehend auf das Arbeitsgedächtnis verzichtet werden kann oder, wenn überhaupt, die Subsysteme bemüht werden, zeigt sich bei neuen Anforderungen insbesondere im schulischen Bereich die Wichtigkeit der zentralen Exekutive (Kapitel 2, 3 & 4). Dieser Einfluss verlagert sich jedoch später auch immer weiter in die Subsysteme, wobei eine genaue Trennung zwischen Effekten des Alters und der Art der mathematischen Aufgabenstellung nicht immer möglich sind, da bestimmte Aufgabenstellungen nur in eingeschränkten Altersbereichen überhaupt eingesetzt werden.

5.2 Theoretische Implikationen

Aus den Befunden der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Studien zum Zusammenhang von Arbeitsgedächtniskapazität und Rechenleistung ergeben sich mehrere theoretische Implikationen.

Das Arbeitsgedächtnis und seine einzelnen Komponenten stehen seit längerer Zeit im Fokus der Forschung zu potentiellen kognitiven Ursachen der Rechenschwäche (Geary et al., 2007; McLean & Hitch, 1999; Swanson & Jerman, 2006). Im Gegensatz zum sonst üblichen Zugang, Kinder gleichen Alters, aber unterschiedlicher mathematischer Leistungsfähigkeit in Gruppen aufzuteilen und zu vergleichen, wurden in der vorliegenden Arbeit in Anlehnung an McLean & Hitch (1999) Kinder anhand ihrer arithmetischen Leistung parallelisiert, wobei die eine Gruppe altersangemessene Leistungen, die andere Gruppe altersunangemessen schwache Leistungen bei entsprechend höherem Alter zeigte. Aufgrund seiner geringen Ökonomie bei der Stichprobengewinnung wird dieser Zugang eher selten gewählt. Ein entscheidender Vorteil ist jedoch die Möglichkeit zu überprüfen, ob rechenschwache Kinder entweder (1) nur in den rechnerischen Fähigkeiten altersverzögert sind, in den kognitiven jedoch nicht, (2) sowohl in den rechnerischen als auch in den kognitiven Bereichen altersinadäquate Leistungen zeigen oder (3) in einzelnen kognitiven Variablen über (2) hinausgehende Defizite aufweisen, also beispielsweise in einer Komponente des Arbeitsgedächtnisses besonders beeinträchtigt sind. McLean & Hitch (1999) zeigten, dass bei einem solchen Vergleich in besonderem Maße Defizite in der Aktivierung von Informationen aus dem Langzeitgedächtnis (Zentrale Exekutive) bestehen. Diese Befunde konnten in der vorliegenden Arbeit nicht bestätigt werden, da sich bei keiner Komponente des Arbeitsgedächtnisses Defizite nachweisen ließen. Es scheint demnach vielmehr so zu sein, dass rechenschwache Kinder auch im Arbeitsgedächtnis nicht über altersgemäße Ressourcen verfügen, jedoch diesen Ressourcen entsprechende Leistungen im mathematischen Bereich zeigen.

Während in der Forschung zur Veränderung des Zusammenhangs zwischen Arbeitsgedächtniskapazität und Rechenleistung als Funktion des Alters bereits einige Ansätze bestehen, Korrelationsunterschiede stärker zu fokussieren (de Smedt et al., 2009a; Meyer et al., 2009), wurde dieser Ansatz in der Forschung zur Rechenschwäche bisher noch nicht berücksichtigt, was in dieser Arbeit aufgegriffen werden sollte. Üblicherweise wird im Vergleich zwischen rechenschwachen und durchschnittlich entwickelten Kindern besonders darauf geachtet, ob sich deren Arbeitsgedächtniskapazitäten voneinander unterscheiden. Der wesentliche Nachteil dieses Vorgehens liegt darin begründet, dass damit allein noch keine Aussage darüber getroffen werden kann, welche spezifischen Nachteile diese verminderte Kapazität mit sich bringt. Beim Vergleich von Korrelationskoeffizienten von Arbeitsgedächtniskapazität und Rechenleistung liegt der Fokus jedoch vornehmlich auf der Frage, welchen Nutzen Kinder aus der vorhandenen Arbeitsgedächtniskapazität ziehen können. Wie oben ausgeführt, hatten die Kinder der vorliegenden Studien keine spezifischen Arbeitsgedächtnisdefizite über eine Altersverzögerung hinaus, das heißt sie waren sowohl von ihren arithmetischen Fähigkeiten als auch von ihrer Arbeitsgedächtniskapazität her vergleichbar. Es konnte nachgewiesen werden, dass die Höhe der Korrelationen von Rechenleistung und Kapazität des visuell-räumlichen Skizzenblockes durch die Gruppenzugehörigkeit (durchschnittliche arithmetische Leistung, altersverzögerte arithmetische Leistung) moderiert wird. Dieser Korrelationsunterschied wird dahingehend interpretiert, dass rechenschwache Kinder zwar über gewisse kognitive Ressourcen verfügen, jedoch nicht in der Lage sind, diese in arithmetischen Situationen adäquat zum Einsatz zu bringen. Diese Interpretation wird im Folgenden als Nutzungsdefizithypothese (usage deficit hypothesis) bezeichnet, da offensichtlich nicht fehlende Kapazität, sondern lediglich fehlende Nutzung der vorhandenen Kapazitäten maßgeblich ist. In der Literatur wurden bisher üblicherweise Mittelwertsunterschieden zwischen rechenschwachen und durchschnittlich rechnenden Kindern aufgezeigt, so dass mit der Idee von Korrelationsunterschieden ein neuer Ansatz für weitere Forschungen aufgezeigt wurde.

Darüber hinaus wird die Arbeitsgedächtniskapazität in der Forschung jedoch auch als wichtiger kognitiver Prädiktor mathematischer Leistungsfähigkeit angesehen (Andersson, 2007; 2008; Rasmussen & Bisanz, 2005; Swanson & Beebe-Frankenberger, 2004). Dabei ist jedoch der individuelle Prädiktionswert der Arbeitsgedächtniskomponenten abhängig von der Art der eingesetzten Rechenaufgaben (DeStefano & LeFevre, 2004). Auch in den drei hier vorgestellten Studien zeigten sich ähnliche Befunde in den Regressionsmodellen. So hatte die Arbeitsgedächtniskapazität keinen Prädiktionswert für die Fähigkeiten in den mathematischen Kernsystemen (vgl. Espy et al., 2004), während die teilweise darauf basierenden arithmetischen Konzepte nach Fritz & Ricken (2008) in besonderem Maße durch die Kapazität der zentralen Exekutive und des visuell-räumlichen Skizzenblocks vorhergesagt werden konnten. Im Bereich der Grundschulmathematik zeigte sich, dass die zentrale Exekutive besonders zu Beginn der Grundschulzeit einen wichtigen Einflussfaktor darstellt, der zum Ende der Grundschulzeit schwächer wird und sich in die beiden Subsysteme, besonders die phonologische Schleife verlagert (vgl. de Smedt et al., 2009a; Meyer et al., 2009). Hierbei ist es wichtig zu betonen, dass sich die zentralexekutive Kapazität zu Beginn der Grundschulzeit auch unter Kontrolle von insgesamt drei mehr oder weniger spezifischen Vorläuferfertigkeiten (Subitizing, approximative Arithmetik und frühe arithmetische Konzepte) als wichtiger Prädiktor erweist. Dieser Befund kann damit als wichtiges Indiz dafür gesehen werden, dass die Zentrale Exekutive in diesem Altersbereich eine unabdingbare Voraussetzung für Lernerfolg darstellt (Bull et al., 2008). Im weiteren Verlauf der Grundschulzeit scheint dieser Einfluss zurückzugehen und sich mehr in Richtung der beiden Speichersysteme zu verlagern (de Smedt et al., 2009a; Meyer et al., 2009).

Im selben Zeitraum geht auch der Einfluss der Lesegeschwindigkeit auf die Rechenleistung signifikant zurück, was als mögliche Ursache für den Wandel im Arbeitsgedächtnis in Frage kommt. Zu Beginn der Grundschulzeit stellen viele Rechenaufgaben für Kinder eine doppelte Belastung in der Art dar, dass sie zum einen die Zahlen und Symbole lesen und die rechnerische Anforderung umsetzen müssen, was im Grunde eine klassische *dual-task* Aufgabe darstellt. Mit andauernder Beschulung wird das Lesen und Dekodieren immer weiter automatisiert, so dass schließlich kaum noch Kapazität dafür aufgebracht werden muss und keine doppelte Belastung des Arbeitsgedächtnisses mehr vorliegt, so dass eine Bearbeitung in den jeweils zuständigen Speichersystemen erfolgen kann. Lediglich auf deskriptiver Ebene konnte in Kapitel 4 von der dritten zur vierten Klasse eine Verschiebung vom visuell-räumlichen Skizzenblock zur phonologischen Schleife hin festgestellt werden, ähnlich vorherigen Forschungsbefunden (de Smedt et al., 2009a; Rasmussen & Bisanz, 2005). Somit lassen sich auch in der aktuellen Studie Belege dafür finden, dass die Schule einen Strategiewechsel von visuellen hin zu sprachlichen Strategien induziert, was sich beispielsweise darin äußert, dass Kinder auf verbale Zählstrategien und symbolische Darstellungsweisen zurückgreifen.

5.3 Praktische Implikationen

Über die theoretischen Implikationen hinaus bieten die Befunde dieser Arbeit auch Anstöße für die Schul- und Interventionspraxis. Die Nutzungsdefizithypothese geht davon aus, dass rechenschwache Kinder, unabhängig von der tatsächlichen Kapazität ihrer Arbeitsgedächtnisressourcen, diese mindestens im Bereich des visuell-räumlichen Notizblocks nicht hinreichend effektiv einsetzen. Eine solche mangelnde Nutzung scheint jedoch leichter zu beheben als gegebenenfalls nicht vorhandene Kapazität. Ein möglicher Ansatz im frühen Grundschulalter wäre es, Kindern mit Problemen im rechnerischen Bereich Beispiele dafür aufzuzeigen wie sich mathematische Sachverhalte angemessen visuell-räumlich darstellen lassen und sie darauf aufbauend anzuleiten, unterschiedliche mathematische Problemstellungen zu visualisieren, um damit die Nutzung visuell-räumlicher Ressourcen anzuregen. Dieser Ansatz kann auch deshalb als erfolgversprechend angesehen werden, da sich Visualisierungsstrategien in anderen schulischen Inhaltsbereichen, die ebenfalls symbolische Darstellungen für konkrete Inhalte nutzen, bereits als förderlich für den Lernerfolg erwiesen haben (vgl. Schwamborn, Mayer, Thillmann, Leopold & Leutner, 2010; Schwamborn, Thillmann, Opfermann & Leutner, 2011).

Die vorliegenden Ergebnisse zeigen deutlich, dass die beim Rechnen von

Grundschulkindern genutzten Arbeitsgedächtniskomponenten sich sowohl mit dem Alter als auch mit der Art der zu bearbeitenden Rechenaufgaben verändern. Um dieser Veränderung Rechnung zu tragen, sollten Lerninhalte und Aufgaben daran entsprechend angepasst werden, um bereits vorhandene Strategien der Arbeitsgedächtnisnutzung und vorhandenes Wissen optimal zu nutzen. Es konnte gezeigt werden, dass Kinder bereits zu Beginn ihrer Grundschulzeit über rudimentäres Wissen in allen vier Grundrechenarten verfügen und nicht-symbolisch präsentierte Aufgaben approximativ lösen können. Darüber hinaus ist aus der Forschung bekannt, dass Kinder im Bereich des frühen mathematischen Wissens stark auf visuell-räumliche Arbeitsgedächtnisressourcen zurückgreifen, während die zentrale Exekutive für weiteren Lernzuwachs, durch die Integration von neuem Wissen in das Langzeitgedächtnis, zuständig ist (Baddeley, 1996; Bull et al., 2008; Rasmussen & Bisanz, 2005). In der Schule wird jedoch bereits von Beginn an großer Wert auf eher sprachlich-phonologische Strategien gelegt, die zum einen die phonologische Schleife und darüber hinaus bei Aufgaben mit Leseanforderung durch die doppelte Belastung auch die zentrale Exekutive belasten. Es ist selbstverständlich weiterhin notwendig, dass Kinder lernen, Zahlen zu lesen und zu schreiben sowie die Grundrechenarten schriftlich präzise zu beherrschen. Jedoch scheint es angebracht, insbesondere bei der Einführung von neuen Lerninhalten auf bereits vorhandenes Wissen und etwaige visuelle Strategien zurückzugreifen, um die kognitive Belastung geringzuhalten und größtmögliches Verständnis zu erreichen.

5.4 Ausblick

Basierend auf den hier vorgestellten Forschungsergebnissen ergeben sich einige Ansatzpunkte für weitergehende Forschung zum Zusammenhang von Arbeitsgedächtniskapazität und Rechenleistung. Es konnte gezeigt werden, dass alle Arbeitsgedächtniskomponenten zu unterschiedlichen Altersstufen und bei unterschiedlichen Arten von Aufgaben Prädiktionswert haben. Aus diesem Grund scheint es für weitergehende Forschung sinnvoll, auch immer alle drei Komponenten zu erfassen, um spezifische Aussagen treffen zu können. Für die aktuellen Vergleiche zwischen den drei Studien bestand der Vorteil, dass die eingesetzten Arbeitsgedächtnisaufgaben immer gleich gehalten wurden, was in der Forschung speziell im Bereich der zentralen Exekutive üblicherweise nicht der Fall ist. Es wäre wünschenswert, wenn man sich auf einen gewissen Grundkanon einigen könnte, um die Ergebnisse vergleichbarer zu machen.

Es konnte gezeigt werden, dass rechenschwache Kinder ihre vorhandenen Ressourcen im visuell-räumlichen Notizblock nicht im selben Maße nutzen konnten wie normal entwickelte Kinder jüngeren Alters. Da es sich jedoch lediglich um einen querschnittlichen Befund bei Kindern im Vorschul- und frühen Grundschulalter handelt, bleiben einige Fragen offen. Ist das Nutzungsdefizit bei Kindern unterschiedlicher Altersgruppen vorhanden und, falls ja, betrifft es spezifisch für Kinder mit Problemen im rechnerischen Bereich in allen Altersgruppen den visuell-räumlichen Notizblock? Besteht das Nutzungsdefizit lediglich bei Aufgaben, für die der visuell-räumliche Notizblock Prädiktionswert hat – wie Aufgaben nach dem Modell von Fritz und Ricken (2008), oder zeigt es sich auch bei Aufgaben, die höhere sprachliche Anforderungen haben und damit eine stärkere Belastung der phonologischen Schleife induzieren können? Haben rechenschwache Kinder stärkere Defizite bei Aufgaben, die visuelle Repräsentationen und Manipulationen erfordern, wie beispielsweise mathematischen Modellierungsaufgaben, als bei solchen, die auf rein sprachlicher Ebene lösbar sind, wie zum Beispiel Kettenaufgaben der Form 2 + 4 – 3 + 5? Zukünftige Studien sollten deshalb zum einen eine ältere Stichprobe (Ende der Grundschule, Beginn der weiterführenden Schulen) stärker in den Fokus nehmen und zum anderen spezifische Hypothesen dazu aufstellen, welche Aufgaben welche

Gedächtnisanforderungen stellen und nach Aufgabengruppen getrennt analysieren. Ein weiterer Ansatzpunkt für zukünftige Studien wäre auch die Überprüfung der Idee, dass ein Nutzungsdefizit im visuell-räumlichen Skizzenblockdurch ein Visualisierungstraining möglicherweise behoben werden könnte. Solch eine Trainingsstudie wäre darüber hinaus dazu geeignet, Hinweise dafür zu finden, ob dieses Defizit tatsächlich mit ursächlich für die Rechenschwäche ist oder möglicherweise lediglich eine unwesentliche Nebenwirkung darstellt.

Im Bereich der Moderation durch das Alter zeigte sich, dass der Einfluss der zentralen Exekutive und des Lesens auf die Rechenleistung zurückging, während der Einfluss der phonologischen Schleife zunahm. Diese Befunde wurden im Zusammenhang mit möglichen *dual-task* Anforderungen durch gleichzeitiges Lesen und Rechnen im frühen Schulalter diskutiert. Sollte dem so sein, müssten sich in Experimenten nach dem *dual-task* Paradigma massive Leistungseinbußen einstellen, wenn zusätzliche phonologische Belastung durch eine Zweitaufgabe eingebracht wird, während die Einbußen bei visuell-räumlicher Belastung geringer sein sollten. Einen weiteren, ungleich aufwendigeren Forschungsansatz zur Rolle des Alters stellen zudem längsschnittliche Untersuchungen innerhalb der ersten Klasse da. Sowohl de Smedt et al. (2009a) als auch Rasmussen und Bisanz (2005) konnten eine Einflussverschiebung vom visuell-räumlichen ins phonologische Arbeitsgedächtnis nachweisen, die innerhalb des ersten Schuljahres stattfand. Mithilfe einer einmaligen Erfassung der Arbeitsgedächtniskapazität zu Schuljahresbeginn und zeitlich nah beieinander liegenden Testungen der Rechenleistung ließe sich die Idee empirisch fundieren, dass die Schule die Kinder stärker in Richtung der phonologischen Repräsentation drängt, und die Frage beantworten, durch welche Lerninhalte dies geschieht.

6. Literatur

Adams, A. M. & Gathercole, S. E. (1995). Phonological working memory and speech production in preschool children. *Journal of Speech and Hearing Research, 38,* 403–414.

Alloway, T. P., & Alloway, R. (2008). Working memory: Is it the new IQ? *Nature Precedings*. Available from: http://hdl.handle.net/10101/npre.2008.2343.1

Andersson, U. (2007). The contribution of working memory to children’s mathematical word problem solving. *Applied Cognitive Psychology, 21*, 1201–1216.

Andersson, U. (2008). Working memory as a predictor of written arithmetic skills in children: The importance of central executive functions. *British Journal of Educational Psychology, 78*, 181–203.

Antell, S. & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development, 54,* 695–701.

Ashcraft, M.H., & Faust, M.W. (1994). Mathematics anxiety and mental arithmetic performance: An exploratory investigation. *Cognition and Emotion, 8,* 97–125.

Atkinson, R. C. & Shiffrin, R. M. (1968). Human memory: A proposed system and its control processes. In K. W. Spence and J. T. Spence (Eds.), *The psychology of learning and motivation: Advances in research and theory, Vol. 2* (S. 89–195). New York: Academic Press.

Atkinson, R. C. & Shiffrin, R. M. (1971). *The control processes of short-term memory.* Technical Report 173.

Baddeley, A. D. (1983). Working memory. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series Biological Sciences, 302,* 311–324.

Baddeley, A. D. (1986). *Working memory.* New York: Clarendon.

Baddeley, A. D. (1996). Exploring the central executive. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 49A,* 5–28.

Baddeley, A. D. (2000). The episodic buffer. A new component of working memory?

Trends in Cognitive Sciences 4, 418–423.

Baddeley, A. D. (2007). *Working memory, thought, and action.* New York: Oxford University Press.

Baddeley, A. D. & Hitch, G. (1974). Working memory. In G. H. Bower (ed.), *The psychology of learning and motivation: Advances in research and theory (Vol. 8, pp. 47–89)*. New York: Academic Press.

Baddeley, A. D. & Lieberman, K. (1980). Spatial working memory. In R. Nickerson (ed.), *Attention and performance, VIII* (S. 521–539). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Baddeley, A. D. & Logie, R. H. (1999). Working memory: The multiple-component model. In A. Miyake & P. Shah (Eds.), *Models of working memory* (S. 28–61). New York: Cambridge University Press.

Baddeley, A. D., Thomson, N. & Buchanan, M. (1975). Word length and the structure of short-term memory. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 14,* 575–589.

Balakrishnan, J. D. & Ashby, F. G. (1992). Subitizing: Magical numbers or mere superstition? *Psychological Research, 54,* 80–90.

Barth, H., Baron, A., Spelke, E. & Carey, S. (2009). Children's multiplicative transformations of discrete and continuous quantities. *Journal of Experimental Child Psychology, 103,* 441–454.

Barth, H., Beckmann, L. & Spelke, E. S. (2008). Nonsymbolic, approximate arithmetic in children: Abstract addition prior to instruction. *Developmental Psychology, 44,* 1466–1477.

Barth, H., Kanwisher, N. & Spelke, E. (2003). The construction of large number representations in adults. *Cognition, 86,* 201–221

Barth, H., La Mont, K., Lipton, J., Dehaene, S. , Kanwisher, N. & Spelke, E. (2006). Non-symbolic arithmetic in adults and young children. *Cognition, 98,* 199–222.

Barth, H., La Mont, K., Lipton, J. & Spelke, E. S. (2005). Abstract number and arithmetic in preschool children. *Proceedings of the National Academy of*

Sciences, 102, 14116–14121.

Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Stanat, P., Tillmann, K. J. & Weiß, M. (Hrsg.). (2001). *PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich.* Opladen: Leske + Budrich.

Bos, W., Lankes, E. M., Prenzel, M., Schwippert, K., Walther, G. & Valtin, R. (Hrsg.). (2003). *Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich.* Münster: Waxmann.

Bos, W., Bonsen, M., Baumert, J., Prenzel, M., Selter, C., & Walther, G. (Hrsg.). (2008). *TIMSS 2007. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich.* Münster: Waxmann.

Brannon, E. M. & Van de Walle, G. A. (2001). The development of ordinal numerical competence in young children. C*ognitive Psychology, 43*, 53–81.

Bulheller, S. & Häcker H.O. (Hrsg.) (2002). *Coloured Progressive Matrices (CPM). Deutsche Bearbeitung und Normierung nach J. C. Raven.* Frankfurt: Pearson Assessment.

Bull, R., Espy, K. & Wiebe, S. A. (2008). Short-term memory, working memory, and executive functioning in preschoolers: Longitudinal predictors of mathematical achievement at age 7 years. *Developmental Neuropsychology, 33*, 205–228.

Bull, R., Johnston, R., & Roy, J. A. (1999). Exploring the roles of the visual-spatial sketchpad and central executive in children's arithmetical skills: Views from cognition and developmental neuropsychology. *Developmental Neuropsychology, 15*, 421–442.

Bull, R. & Scerif, G. (2001). Executive functioning as a predictor of children's mathematics ability: Inhibition, switching, and working memory. *Developmental Neuropsychology, 19,* 273–293.

Cantlon, J. F. & Brannon, E. M. (2006). Shared system for ordering small and large numbers in monkeys and humans. *Psychological Science, 17,* 401–406.

Cantlon, J. F., Platt, M. L. & Brannon, E. M. (2009). Beyond the number domain. *Trends in Cognitive Sciences, 13,* 83–91.

Cattell, R.B., Weiß, R.H., & Osterland, J. (1997). *CFT 1. Grundintelligenztest Skala 1. 5. Revidierte Auflage* (Culture Fair Intelligence Test, Scale 1 – 5th edition revised). Göttingen: Hogrefe.

Chi, M. T. H. & Klahr, D. (1975). Span and rate of apprehension in children and adults. *Journal of Experimental Child Psychology, 19,* 434–439.

Daneman, M., & Carpenter, P.A. (1980). Individual differences in working memory and reading. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behaviour, 19,* 450-466.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

De Smedt, B., Janssen, R., Bouwens, K., Verschaffel, L., Boets, B. & Ghesquière, P. (2009a). Working memory and individual differences in mathematics achievement: A longitudinal study from first grade to second grade. *Journal of Experimental Child Psychology, 103,* 186–201.

De Smedt, B., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2009b). The predictive value of numerical magnitude comparison for individual differences in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 103,* 469–479.

Desoete, A. & Grégoire, J. (2006). Numerical competence in young children and in children with mathematics learning disabilities. *Learning and Individual Differences, 16,* 351–367.

DeStefano, D. & LeFevre, J. A. (2004). The role of working memory in mental arithmetic. *European Journal of Cognitive Psychology, 16,* 353–386.

Ehlert, A. (2007). *Arbeitsgedächtnis und Rechnen im Vorschulalter.* Frankfurt: Peter Lang.

Espy, K. A., McDiarmid, M. M., Cwik, M. F., Stalets, M. M., Hamby, A. & Senn, T. E. (2004). The contribution of executive functions to emergent mathematic skill in preschool children. *Developmental Neuropsychology, 26,* 465–486.

Fechner, G. T. (1859). Über ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. *Abhandlungen der Königlich*

Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Classe, 4, 455–532.

Feigenson, L., Carey, S., & Hauser, M. (2002): The representations underlying infants´ choice of more: object file versus analog magnitudes. *Psychological Science, 13,* 150–156.

Feigenson, L., Dehaene, S. & Spelke, E. S. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences, 8,* 307–314.

Francis, D.J., Fletcher, J.M., Stuebing, K.K., Lyon, G.R., Shaywitz, B.A., & Shaywitz, S.E. (2005). Psychometric approaches to the identification of LD: IQ and achievement scores are not sufficient. *Journal of Learning Disabilities, 28,* 98-108.

Fritz, A. & Ricken, G. (2008). *Rechenschwäche.* Stuttgart: UTB.

Fritz, A., Ricken, G. & Balzer L. (2009). Warum fällt manchen Kindern das Rechnen schwer? Entwicklung arithmetischer Kompetenzen im Vor- und frühen Grundschulalter. In Fritz, A. & Schmidt S. (Hrsg.): *Förderndner Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 12–28). Weinheim: Beltz.

Fritz, A., Ricken, G. & Balzer, L. (in press). *Marko – D. Testverfahren zur Erfassung mathematischer und rechnerischer Konzepte im Vorschulalter* [MARKO-D. Test for the measurement of mathematical concepts in kindergarten]. Göttingen: Hogrefe.

Fuchs, L.S., Compton, D.L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J.D., & Hamlett, C.L. (2005). The prevention, identification and cognitive determinants of math difficulties. *Journal of Educational Psychology, 97,* 493-513.

Fuchs, D., Mock, D., Morgan, P.L., & Young, C.L. (2003). Responsiveness-to-intervention: Definitions, evidence, and implications for the learning disabilities construct. *Learning Disabilities Research & Practice, 18,* 157-171.

Fuson, K. C. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number*. New York: Springer.

Gathercole, S., & Baddeley, A.D. (1993). *Working memory and language. Essays in cognitive psychology*. Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates.

Gathercole, S.E., & Pickering, S.J. (2000). Working memory deficits in children with low achievements in the national curriculum at 7 years of age. *British Journal of Educational Psychology, 70,* 177–194.

Gathercole, S. E., Pickering, S. J., Ambridge, B., & Wearing, H. (2004). The structure of working memory from 4 to 15 years of age. *Developmental Psychology, 40,* 177–190.

Gathercole, S.E., Pickering, S.J., Knight, C., & Stegmann, Z. (2004). Working memory skills and educational attainment: Evidence from national curriculum assessments at 7 and 14 years of age. *Applied Cognitive Psychology, 18*, 1–16.

Gaupp, N. (2003). Dyskalkulie – *Arbeitsgedächtnisdefizite und Defizite numerischer Basiskompetenzen rechenschwacher Kinder* [Working memory impairments and impairments of numerical core competencies within children with dyscalculia]. Berlin: Logos.

Geary, D.C., Hamson, C.O., & Hoard, M.K. (2000). Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability. *Journal of Experimental Child Psychology, 77*, 236–263.

Geary, D.C., & Hoard, M.K. (2005). Learning disabilities in arithmetic and mathematics. Theoretical and empirical perspectives. In J.I.D. Campbell (Ed.). *Handbook of mathematical cognition* (pp. 253-267). Psychology Press. New York, NY.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L. & Numtee, C. (2007) Cognitive mechanism underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development, 78,* 1343–1359.

Gerlach, M., Fritz, A. & Leutner, D. (in press). Marko – T. Trainingsverfahren für mathematische und rechnerische Konzepte im Vorschulalter [Marko – T. A training of mathematical and arithmetical concepts for preschoolers]. Göttingen: Hogrefe.

Gilmore, C. K., McCarthy, S. E. & Spelke, E. S. (2007). Symbolic arithmetic knowledge without instruction. *Nature, 447,* 589–591.

Gilmore, C. K., McCarthy, S. E. & Spelke, E. S. (2010). Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. *Cognition, 115,* 394–406.

González, J.E.J., & Espínel, A.I.G. (1999). Is IQ-achievement discrepancy relevant in the definition of arithmetic learning disabilities? *Learning Disability Quarterly, 22,* 291-301.

Gonzales, P., Williams, T., Jocelyn, L., Roey, S., Kastberg, D., and Brenwald, S. (2008). *Highlights From TIMSS 2007: Mathematics and Science Achievement of U.S. Fourth- and Eighth-Grade Students in an International Context* (NCES 2009–001 Revised). National Center for Education Statistics, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Washington, DC.

Grube, D. & Barth, U. (2004). Rechenleistung bei Grundschülern. Zur Rolle von Arbeitsgedächtnis und basalem Faktenwissen. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 18*, 245–248.

Halberda, J., Mazzocco, M.M.M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. Nature, 455, 665-668.

Hasemann, K. (2007). Anfangsunterricht Mathematik (2. Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Hasselhorn, M., Grube, D., & Mähler, C. (2000). Theoretisches Rahmenmodell für ein Diagnostikum zur differentiellen Funktionsanalyse des phonologischen Arbeitsgedächtnisses. In M. Hasselhorn, W. Schneider & H. Marx (Hrsg.), *Diagnostik von Lese-Rechtschreibschwierigkeiten. Tests und Trends – Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik* (Vol. 1, pp. 167-181). Göttingen: Hogrefe.

Hein, J., Bzufka, M.W., & Neumärler, K.J. (2000). The specific disorders of arithmetic skills. Prevalence studies in a rural and an urban population sample and their clinic-neuropsychological validation. *European Child/Adolescent Psychiatry*, *9, Supplement 2*, 87-101.

Henry, L. A. (2010). The episodic buffer in children with intellectual disabilities: An exploratory study. *Research in Developmental Disabilities, 31,* 1609–1614.

Holloway, I. D. & Ansari, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: The numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology,* 103, 17–29.

Holmes, J., & Adams, J. W. (2006). Working memory and children's mathematical skills: Implications for mathematical development and mathematics curricula. *Educational Psychology, 26,* 339–366.

Holmes, J., Adams, J. W., & Hamilton, C. J. (2008). The relationship between visuospatial sketchpad capacity and children's mathematical skills. *European Journal of Cognitive Psychology, 20,* 272–289.

Hornung, C., Brunner, B., Reuter, R. A. P. & Romain, M. (2011). Children's working memory: Its structure and relationship to fluid intelligence. *Intelligence, 39,* 210–221.

Hunting, R.-P. (2003). Part-whole number knowledge in preschool children. *Journal of Mathematical Behavior, 22,* 217–235.

Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (2008). *Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4).* Zugriff am 27.09.11: http://www.iqb.hu-berlin.de/bista?reg=r_4.

Johnson, P. (1982). The functional equivalence of imagery and movement. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 34A,* 349–365.

Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W. & Volkmann, J. (1949): The discrimination of visual number. *The American Journal of Psychology, 62,* 498–525.

Klauer, K.J. (1992). In Mathematik mehr leistungsschwache Mädchen, im Lesen und Rechtschreiben mehr leistungsschwache Jungen? Zur Diagnostik von Teilleistungsschwächen. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 24,* 48-65.

Krajewski, K., Küspert, P., & Schneider, W. (2002). *Deutscher Mathematiktest für erste Klassen* (DEMAT 1+). Göttingen: Hogrefe.

Krajewski, K., Liehm, S., & Schneider, W. (2004). *Deutscher Mathematiktest für zweite Klassen (DEMAT 2+).* Göttingen: Hogrefe.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2009). Exploring the impact of phonological awareness, visual–spatial working memory, and preschool quantity–number competencies on mathematics achievement in elementary school: Findings from a 3-year longitudinal study. *Journal of Experimental Child Psychology, 103,* 516-531.

Krajewski, K., Schneider, W. & Nieding, G. (2008). Zur Bedeutung von Arbeitsgedächtnis, Intelligenz, phonologischer Bewusstheit und früher Mengen-Zahlen-Kompetenz beim Übergang vom Kindergarten in die Grundschule. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 55,* 100–113.

Kroesbergen, E. H., Van Luit, J. E. H., Van Lieshout, E. C. D. M., Van Loosbroek, E. & Van de Rijt, B. A. M. (2009). Individual differences in early numeracy: The role of executive functions and subitizing. *Journal of Psychoeducational Assessment, 27,* 226–236.

Kultusministerkonferenz (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* Berlin: Luchterhand.

Küspert, P., & Schneider, W. (1998). *Würzburger Leise Leseprobe (WLLP)* [Würzburg silent reading test]. Göttingen: Hogrefe.

Le Corre, M., Van de Walle, G., Brannon, E. M. & Carey, S. (2006). Re-visiting the competence/performance debate in the acquisition of the counting principles. *Cognitive Psychology, 52,* 130–169.

Libertus, M. E., Feigenson, L. & Halberda, J. (2011). Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability. *Developmental Science*, *14,* 1292-1300.

Lipton, J., & Spelke, E.S. (2003): Origins of number sense: Large-number discrimination in human infants. *Psychological Science*, *14,* 396-401.

Logie, R. H. (1995). *Visuo-spatial working memory*. Hove: Lawrance Erlbaum

Associates.

Logie, R. H., Gilhooly, K. J. & Wynn, V. (1994). Counting on working memory in arithmetic problem solving. *Memory & Cognition, 22*, 395–410.

McCandliss, B.D., Yun, C., Hannula, M., Hubbard, E.M., Vitale, J., & Schwartz, D. (2010, April*). "Quick, how many?" Fluency in Subitizing and 'Groupitizing' Link to Arithmetic Skills.* American Educational Research Association, Denver, CO.

McCrink, K. & Spelke, E. S. (2010). Core multiplication in childhood. *Cognition, 116,* 204–216.

McLean, J.F. & Hitch, G. J. (1999). Working memory impairments in children with specific arithmetic learning difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology, 74,* 240–260.

Meyer, M. L., Salimpoor, V. N., Wu, S. S. , Geary, D. C., Menon, V. (2009). Differential contribution of specific working memory components to mathematics achievement in 2nd and 3rd graders. *Learning and Individual Differences, 20,* 101–109.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2008). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen.* Frechen: Ritterbach Verlag.

Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review, 63,* 81–97.

Miller, G. A., Galanter, E. & Pribram, K. H. (1960). *Plans and the structure of behavior.* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Muth, K. D. (1984). Solving arithmetic word problems: Role of reading and computational skills. *Journal of Educational Psychology, 76,* 205–210.

Norman, D. A. & Shallice, T. (1986). Attention to action: willed and automatic control of behavior. In R. J. Davidson, G. E. Schwarts & D. Shapiro (eds.), *Consciousness and self-regulation. Advances in research and theory (Vol. 4, pp. 1–17)*. New York: Plenum Press.

Hayes, J. (1952). *Memory span for several vocabularies as a function of vocabulary* *size.* Quarterly Progress Report: Jan-June, Acoustics Laboratory. Cambridge, MA.

Paas, F., & Van Merriënboer, J.J.G. (1993). The efficiency of instructional conditions: An approach to combine mental-effort and performance measures. *Human Factors, 35,* 737-743.

Passolunghi, M. C. & Siegel, L. S. (2004). Working memory and access to numerical information in children with disability in mathematics. *Journal of Experimental Child Psychology, 88,* 348–367.

Peterson, L. R. & Peterson, M. J. (1959). Short-term retention of individual verbal items. *Journal of Experimental Psychology, 58,* 193–198.

Piaget, J. (1965). *The child´s conception of number*. New York: Norton (first published in French, 1941).

Piaget, J. & Szeminska, A. (1975). *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde*. Stuttgart: Klett.

Pickering, S.J., Gathercole, S.E., Hall, M., & Lloyd, S.A. (2001). Development of memory for pattern and path: Further evidence for the fractionation of visuo-spatial memory. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 54,* 397–420.

Posner, M. I. & Konick, A. F. (1966). Short-term retention of visual and kinesthetic information. *Organizational Behavior and Human Performance, 1,* 71–86.

Rasmussen, C. & Bisanz, J. (2005). Representations and working memory in early arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology, 91,* 137–157.

Reiss, K., Heinze, A. & Pekrun, R. (2007). Mathematische Kompetenz und ihre Entwicklung in der Grundschule. In Prenzel, M., Gogolin, I. & Krüger, H. H. (Hrsg.), *Kompetenzdiagnostik. Sonderheft 8 der Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* (S. 107–127). Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

Resnick, L. B. (1989). Developing Mathematical Knowledge. *American Psychologist, 44,* 162–169.

Riley, M. S., Greeno, J. G. & Heller, J. H. (1983). Development of children´s problem-solving ability in arithmetic. In Ginsburg, H. P. (ed.): *The Development of mathematical thinking* (S.153–196). New York: Academic Press.

Roick, T., Gölitz, D., & Hasselhorn, M. (2004). *Deutscher Mathematiktest für dritte Klassen (DEMAT 3+)*. Göttingen: Hogrefe.

Schuchardt, K., Kunze, J., Grube, D. & Hasselhorn, M. (2006). Arbeitsgedächtnisdefizite bei Kindern mit schwachen Rechen- und Schriftsprachleistungen. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 20,* 261–268.

Schuchardt, K., & Mähler, C. (2009). Working memory functioning in children with learning disabilities: Does intelligence make a difference? *Journal of Intellectual Disability Research, 53,* 3-10.

Schuchardt, K. & Mähler, C. (2010). Unterscheiden sich Subgruppen rechengestörter Kinder in ihrer Arbeitsgedächtniskapazität, im basalen arithmetischen Faktenwissen und in den numerischen Basiskompetenzen? *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 42*, 217–225.

Schuchardt, K., Mähler, C., & Hasselhorn, M. (2008). Working memory deficits in children with specific learning disorders. *Journal of Learning Disabilities, 41,* 514-523.

Schuchardt, K., Mähler, C., & Hasselhorn, M. (2010). Arbeitsgedächtnisfunktionen bei rechenschwachen Kindern mit und ohne Dyskalkuliediagnose. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 57,* 290-298.

Schwamborn, A., Mayer, R. E., Thillmann, H., Leopold, C., & Leutner, D. (2010). Drawing as a generative activity and drawing as a prognostic activity. *Journal of Educational Psychology, 104*, 872-879.

Schwamborn, A., Thillmann, H., Opfermann, M. & Leutner, D. (2011). Cognitive load and instructionally supported learning with provided and learner-generated visualizations. *Computers in Human Behavior, 27,* 89-93.

Shallice, T. & Warrington E. K. (1970). Independent functioning of verbal memory stores: A neuropsychological study. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *22*, 261–273.

Siegel, L. S. & Ryan, E. B. (1989). The development of working memory in normally achieving and subtypes of learning disabled children. *Child Development, 60,* 973–980.

Siegler, R.S., & Opfer, J. (2003): The development of numerical estimation: evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science, 14,* 237–243.

Spelke, E. (2005). Sex differences in intrinsic aptitude for mathematics and science? A critical review. *American Psychologist, 60,* 950-958.

Spelke, E.S., & Kinzler, K.D. (2007): Core knowledge. *Developmental Science, 10,* 89–96.

Sperling, G. (1960). The information available in brief visual presentations. *Psychological Monographs: General and Applied, 74,* 1–29.

Starkey, P., Spelke, E.S., & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition, 36,* 97-127.

Stern, E. (1992). Spontaneous use of conceptual mathematical knowledge in elementary school children. *Contemporary Educational Psychology, 17*, 266–277.

Stern, E. (2003). Früh übt sich – Neuere Ergebnisse aus der LOGIK-Studie zum Lösen mathematischer Textaufgaben. In Fritz, A., Ricken, G. & Schmidt, S. (Hrsg.): *Handbuch Rechenschwäche* (S. 116–130). Weinheim: Beltz.

Stroop, J. R. (1935). Studies of interference in serial verbal reactions. *Journal of Experimental Psychology, 18,* 643–662.

Swanson, H.L. (2006). Cross-sectional and incremental changes in working memory and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 98,* 265–281.

Swanson, H.L. & Beebe-Frankenberger, M. (2004). The relationship between working memory and mathematical problem solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties. *Journal of Educational Psychology, 96*, 471–491.

Swanson, H.L. & Jerman, O. (2006). Math Disabilities: A selective Meta-Analysis of the literature. *Review of Educational Research, 76*, 249–274.

Swanson, H.L., Jerman, O. & Zheng, X. (2008). Growth in working memory and mathematical problem solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties. *Journal of Educational Psychology. 100*, 343–379.

Swanson, H. L., & Kim, K. (2007). Working memory, short-term memory, and naming speed as predictors of children's mathematical performance. *Intelligence, 35*, 151-168.

Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. W. C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review, 10*, 251-296.

Von Aster, M. (1993). Neurowissenschaftliche Ergebnisse und Erklärungsansätze zu Rechenstörungen [Neuroscientific results and explanations on dyscalculia]. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Eds.), *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie (pp. 163-178). Ein Handbuch.* Weinheim: Beltz.

Wagner, R. & Torgesen, J. (1987): The nature of phonological processing and its causal role in the acquisition of reading skills. *Psychological Bulletin, 101,* 192-212.

Wechsler, D. (2001). *The Wechsler Individual Achievement Test – Second Edition (WIAT-II).* The Psychological Corporation.

Wilson, K.M., & Swanson, H.L. (2001). Are mathematics disabilities due to a domain-general or a domain-specific working memory deficit? *Journal of Learning Disabilities, 34*, 237–248.

World Health Organization - WHO (2007). ICD-10: International Statistical Classification of diseases and related health problems: tenth revision (3rd Edition). Geneva, Switzerland.

Wynn, K. (1990). Children´s understanding of counting. *Cognition, 36*, 155–193.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358,* 749–750.

Xu, F. (2003): Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representations. *Cognition, 89*, B15–B25.

Xu, F. & Arriaga, R. (2007): Number discrimination in 10–month-old-infants. *British Journal of Developmental Psychology*, *25,* 103–108.

Xu, F. & Spelke, E. S. (2000): Large number discrimination in 6–month-old infants. *Cognition, 74,* B1–B11.

Zheng, X., Swanson, H. L., & Marcoulides, G. A. (2011). Working memory components as predictors of childrens' mathematical word problem solving. *Journal of Experimental Child Psychology*, *110,* 481-498.

Zoelch, C., Seitz, K. & Schumann-Hengsteler, R. (2005). From rag(bag)s to riches: Measuring the developing central executive. In W. Schneider, R. Schumann-Hengsteler & B. Sodian (Eds.), *Young children's cognitive development: Interrelationships among executive functions, working memory, verbal ability and theory of mind* (S. 39–69). Mahwah, NJ: Erlbaum.