

Wissenskonstruktion mit Computeralgebrasystemen in der Linearen Algebra/Geometrie der Sekundarstufe II

Von der Fakultät für Mathematik
der Universität Duisburg-Essen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

Wolfgang Lindner

aus Werben

Referent: Prof. Dr. rer. nat. Günter TÖRNER
Koreferent: Prof. Dr. rer. nat. Lisa HEFENDEHL-HEBEKER
Koreferent: Prof. Dr. rer. nat. Luise UNGER, FernUniversität Hagen

Tag der mündlichen Prüfung: 23. Mai 2012

Vorwort

Die nachfolgende Untersuchung hat über den langen Zeitraum ihrer Entstehung von vielfältiger Seite Unterstützung, Anregung und Zuspruch erfahren. Dafür habe ich allen Beteiligten sehr herzlich zu danken.

An erster Stelle danke ich Günter TÖRNER (Universität Duisburg-Essen, Campus Duisburg), der mich als Mitarbeiter für vier Jahre an seinen Lehrstuhl berufen hat und mir so überhaupt die Möglichkeit zur wissenschaftlichen Arbeit eröffnet hat. Er hat mit ständiger, aber geduldiger Ermutigung durch viele Literaturhinweise und gemeinsame Gespräche, auch auf unseren Tagungsteilnahmen im In- und Ausland, dieses Projekt gefördert und gestützt. So haben wir unsere Sicht auf die Mathematik und ihre Didaktik auf zahlreichen Workshops im Rahmen der NAT-WORKING-Initiative der BOSCH-Stiftung, deren Projektleitung ich für mehrere Jahre wahrgenommen habe, sowie auf gemeinsam durchgeführten Lehrerfortbildungen der MATHEMATIK.ANDERS.MACHEN (MAM)-Initiative der TELEKOM-Stiftung diskutiert und ausgetauscht. Besonders genossen habe ich seine vitalen Vorlesungen, die seine Sicht einer Mathematik als facetten- und ideenreiche intellektuelle menschliche Tätigkeit überaus anschaulich manifestierten.

Lisa HEFENDEHL-HEBEKER (Universität Duisburg-Essen, Campus Essen) hat mich durch zahlreiche persönliche Fachgespräche, die Teilhabe an ihren fachdidaktischen Seminaren und Vorlesungen sowie durch gezielte Hinweise auf für mein Forschungsvorhaben relevante Forschungsliteratur sehr inspiriert. Ich erinnere mich etwas wehmütig an die wohlthuende, dichte Arbeitsatmosphäre im von uns wiederbelebten „AMI“ (Arbeitsmittelinstitut von M. LEPPIG an der Universität Duisburg) im stillen Keller eines Universitätsgebäudes mit seinen seltenen mathematischen Exponaten. Besonders dankbar bin ich dafür, dass ich mich viele Jahre als „stilles“ Mitglied ihrer Forschungsgruppe fühlen durfte und (auch aktiver) Teilnehmer am Forschungskolloquium des Didaktischen Institutes am Campus Essen sein konnte.

Hans-Joachim ARNOLD (Universität Duisburg-Essen, Campus Duisburg) gab mir wertvolle Einblicke in seine Sicht auf die Ideenwelt J. PIAGETS, die er in seinen Modellierungswochen für Schülerinnen und Schüler umsetzte. Ein gemeinsames Projekt über „Orthogonale lateinische Quadrate“ unter Nutzung von CAS blieb leider unvollendet.

Benno FUCHSTEINER, Andreas SORGATZ, Kai GEHRS, Christopher CREUTZIG und Walter OEVEL (alle Universität Paderborn) teilten mit mir den Enthusiasmus für Computeralgebrasysteme und ihr Interesse für die didaktische Nutzung des von ihnen entwickelten CAS MUPAD im Unterricht. Von ihnen allen erfuhr ich stetige unmittelbare Unterstützung in programmiertechnischer Hinsicht bei der Konstruktion meiner Unterrichtseinheiten. Es ist für mich sehr bedauerlich, dass dieses einzigartige Produkt deutscher Forschung nunmehr nur noch ein Bestandteil von MATLAB ist.

Herbert MÖLLER (Universität Münster) gab mir wertvolle Hinweise während meines Nachdenkens (nicht nur) über Pseudoinverse. Rene GROTHMANN (Universität Eichstätt) gewährte großzügige Unterstützung bei meinen Wünschen zur schulischen Nutzung seines Numerik-Tools EULER. Czaba SAVARI (Universität Pecs/Ungarn) habe ich für eine Einladung zu einer unvergesslichen CAS-Tagung in Pecs zu danken, auf der wir durch Vorträge u. a. unsere

Ansichten zum didaktischen Nutzen von CAS-Halbautomatismen austauschten.

Mein besonderer Dank gilt meinen Schülern und Schülerinnen im Grund- wie im Leistungskurs, die hochinteressiert, geduldig und vertrauensvoll die Abkehr vom Schulbuch und die Hinwendung zu MuPAD-haltigen CAS-Sheets begleiteten. Ich hoffe, sie haben diese spannende Entwicklung der aktuellen Schulmathematik auch mit Freude wahrgenommen.

Meinen erwachsenen Studierenden im Sprintstudium Mathematik NRW habe ich zu danken, dass sie als lebens- und unterrichtserfahrende Pädagogen meine fachdidaktischen Lerntheorien (wie z. B. das SONG-Prinzip) sowohl beim bewussten Lernen von Universitätsmathematik als auch in der unterrichtlichen Anwendung erprobten und so wertvolle Rückmeldungen über ihre Wirksamkeit geben konnten.

Frau Bettina KALSKI gilt mein herzlicher Dank für Ihre unermüdliche Konzentration während des mühseligen Korrekturlesens.

Der herzlichste Dank gilt meiner lieben Frau Petra für ihre unermüdliche Geduld während der vielen Jahre der Entstehung dieser Arbeit, dies auch bedingt durch manche unerwarteten persönliche Umstände. Ihr war bewusst, dass ein solches Vorhaben zusätzlich zu einer vollen schulischen Stelle nur an arbeitsfreien Wochenenden und ruhigen Ferientagen gedeihen konnte. Ihr habe ich zu verdanken, dass meine mathematischen Neigungen und didaktischen Interessen realisierbar wurden.

Wolfgang Lindner

Leichlingen, im März 2011

Inhaltsverzeichnis

I	Theoretische Fundierung	9
1	Prolog – Forschungsfragen	11
2	Lerntheoretische Überlegungen zur Wissenskonstruktion	15
2.1	Die APOS-Theorie und der A.C.E.-Zyklus	16
2.1.1	Zur historischen Entwicklung der APOS-Theorie	17
2.1.2	Das lerntheoretische Grundkonzept der APOS-Theorie	18
2.1.3	Das zyklische A.C.E.-Lernarrangement	30
2.1.4	Adaptionen des A.C.E.-Lernzyklus	38
2.1.5	weitere Lerntheorien	40
2.2	Zur Legitimation eines computerintensiven Mathematikunterrichts	44
2.2.1	Kommunikation zwischen Experte und Laie als Leitlinie	45
2.2.2	Outsourcing des Operativen	47
2.3	Orchestrierung durch zyklische M ² .A.K.E.-Lernarrangements	49
2.4	Designprinzipien eines CAS-intensiven Mathematikunterrichts	51
2.4.1	Das Prinzip der virtuellen Erfahrungsverankerung	52
2.4.2	Das Prinzip der metakognitiven Klammerung	66
2.4.3	Das Prinzip des inkrementellen CAS-Spracherwerbs	70
2.4.4	Das Prinzip der literaten funktionalen Programmierung	72
2.4.5	Das Prinzip der Modulkonstruktion zur Wissensrepräsentation	74
2.4.6	Das Prinzip der moderaten Modellierung	92
2.4.7	Das SONG-Prinzip	94
2.4.8	Das Prinzip der limitierten kognitiven Ladung	97
2.5	Zusammenfassung	98
3	Zur Situation der Linearen Algebra als Lehr- und Lerngegenstand	99
3.1	Grundprobleme der Linearen Algebra	99
3.2	Verständnis-Barrieren in der Linearen Algebra	101
3.2.1	Epistemologische Verständnis-Barrieren	101
3.2.2	Die Geheimsprachen-Metapher	142
3.2.3	Die Chamäleonbarriere	150
3.2.4	Weitere ausgewählte kognitive Verständnis-Barrieren	188
3.3	Lösungsansätze aus den Communities	195

3.3.1	Die Curriculum-Revision der TLAG (Frankreich)	196
3.3.2	Die curriculare Revision der LACSG (USA)	201
II	CAS–Kursdesign	217
4	Entwurf eines CAS-intensiven Grundkurses	219
4.1	Globale Kurs-Strategie als Modell der Wachstumsringe	219
4.2	Zum CAS–Kursdesign	222
4.2.1	das CAS–Kurskonzept im Richtlinienbezug	222
4.2.2	das CAS–Kurskonzept als Parcourssequenz	225
4.3	Regionale Kurs-Strategien zur Konstruktion der CAS-Parcours	227
4.3.1	Matrizen und Lineare Prozesse	227
4.3.2	Genaubestimmte LGS	229
4.3.3	Unterbestimmte LGS	232
4.3.4	Skalarprodukt	242
4.3.5	Überbestimmte LGS	255
4.4	Lokale Kurs-Strategien am Beispiel des Stücklistenproblems	262
III	Empirische Untersuchungen und Befunde	265
5	Empirische Befunde zu Unterrichtsepisoden	267
5.1	Designzyklen	267
5.2	ausgewählte transkribierte Unterrichtsepisoden	294
5.2.1	Matrizenmauern	294
5.2.2	Magische Matrizen	300
5.2.3	Die rollende Kugel	304
5.2.4	Abstand windschiefer Geraden	309
5.3	Fallstudie: zur Pseudoinverse via sensibler Formelinspektion	312
6	Epistemologische Überzeugungsstrukturen	321
6.1	Querschnittsuntersuchung zum M–Weltbild	321
6.1.1	Vergleich mit den CAS-Mathematik-Weltbildern	322
6.2	Längsschnittsuntersuchung der M–Weltbilder	331
6.2.1	Belief-Längsschnitte	332
6.2.2	Belief-Index	333
6.2.3	Exkurs: Mathematikweltbild im Zentralabitur (LK)	336
6.3	Vorüberlegungen zu einem CAS–Weltbild	339
6.3.1	CAS-Fragebogen und Datenerhebung	339
6.3.2	Performance der CAS-Mathematik-Weltbilder	352

IV	Ausblick	359
7	Epilog – Resumé, Ausblick und Empfehlungen	361
7.1	Resumé	361
7.2	Ausblick und Empfehlungen	365
V	Anhänge	369
A	Zu den Lernetappen über Matrizen und lineare Prozesse	371
B	Zu den Lernetappen im Parcours über genaubestimmte LGS	385
C	Zu den Lernetappen im Parcours über singuläre LGS	399
D	Zum regionalen Themenkreis über das Skalarprodukt	405
E	Zur genetischen Dekomposition des Stücklistenproblems	409
F	Glossar	433

Teil I

Theoretische Fundierung

§ 1

Prolog – Forschungsfragen

Von 1998 bis 2000 wurde im Auftrag des *Ministeriums für Schule, Wissenschaft und Forschung* (MSWF) des Landes NRW ein landesweiter Schulversuch „Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen (CAS)“ durchgeführt, der den Einsatz von CAS im Unterricht der Sekundarstufe II erproben und evaluieren sollte. Auf einer Sitzung der Arbeitsgruppen trug S. GRIGUTSCH als externer Referent Befunde aus seiner im Jahre 1996 veröffentlichten Arbeit mit dem Titel „*Mathematische Weltbilder von Schülern – Struktur, Entwicklung, Einflussfaktoren*“ vor. Das Weltbild der Schüler wurde dabei auf fünf entscheidende Faktoren reduziert: den sog. *Formalismus-Aspekt*¹, den *Schema-Aspekt*², den *Prozess-Aspekt*³, den *Anwendungsaspekt*⁴ sowie den Aspekt der *rigiden Schemaorientierung*⁵. So entstand die Anregung zu einem Forschungsvorhaben, das die Erfahrungen des Autors als Teilnehmer am obigen Schulversuch wissenschaftlich aufbereiten, wesentlich ergänzen und vertiefen sowie mit den Befunden der GRIGUTSCH-Studie vernetzen möchte.

Ein weiterer **Ausgangspunkt** neben diesen Einstellungsbefunden (Beliefs) war die Frage, welche Auswirkungen computerorientierte Lehr-Lernumgebungen für einen aktivierenden forschend-entwickelnden Unterricht zeigen, wie er in der aktuellen didaktischen Diskussion im Nachgang der TIMS bzw. PISA-Studien vielfältig gefordert wird. Erhofft ist dabei, dass ein solcher Unterricht mehr Kreativitätchancen und Möglichkeiten zu nicht-standardisiertem Argumentieren bietet sowie mathematische Routinen abschwächt.

SCHOENFELD's Interaktionsmodell für (spontane) Lehr- und Lernprozesse basiert auf den Variablen des (aktivierten) *knowledge*, (*teacher's goals* (action plans) und *beliefs* (im jeweils aktuellen Kontext) und es stellt sich auch von hier die Frage, wie diese Erklärungsvariablen in einem CAS-geführten Unterricht wirken. Wir untersuchen dabei speziell die sog. Beliefs⁶ und den Einfluss von CAS auf die Beliefsysteme.

¹d. h. wie hoch Schüler den formalen Charakter der Mathematik einschätzen.

²also in welchem Maße die Mathematik aus Schülersicht von Rechenregeln und Kalkülen bestimmt ist

³in welchem Maße also der Mathematikunterricht für die Schüler einen Prozess des Entwickelns – und des (Nach-)Erschaffens von Mathematik – widerspiegelt

⁴wie hoch Schüler die Anwendbarkeit und den Nutzen der Mathematik einschätzen

⁵wie stark das Lernen von Mathematik von Prüfungszwängen beeinflusst wird

⁶Aktuell spricht SCHOENFELD in [185] im weiteren Sinne von *Orientierungen*, die insbesondere Dispositionen, Beliefs, Wertschätzungen, Geschmack und Präferenzen umfassen.

Versteht man mit FISCHER die Mathematik als Wechselspiel aus *Darstellen, Operieren und Interpretieren* oder mit ERNEST als Trias aus *Tools, Prozess und System*, so stellen sich Fragen nach der Austarierung der jeweiligen Komponenten bei Einwirkung eines CAS.

Die **Forschungsfragen**, denen in dieser Arbeit daher nachgegangen werden soll, befassen sich mit den Wirkungen eines CAS-intensiven Unterrichts auf die Schüler⁷ unter diversen Aspekten. Dabei soll der stoffdidaktische Fokus insbesondere auf der Linearen Algebra liegen.

1. *Welche didaktische Theorie ist der Nutzung eines CAS in der Schule angemessen?*
 - *Welche besondere Struktur sollte das Design von CAS-Lernumgebungen gemäß einer solchen Hintergrundtheorie aufweisen?*
 - *Welche charakteristischen didaktischen Konstruktionen ermöglicht ein CAS, die ein CAS-freier Mathematik-Unterricht nicht anbieten kann?*
 - *Welche Design-Prinzipien sollten die Konstruktion von CAS-Lernarrangements anleiten?*
 - *Wie sieht speziell eine mögliche didaktische Rekonstruktion eines reformierten Kurses in Linearer Algebra für die Schule aus?*
2. *Welchen Einfluss hat der Einsatz eines CAS auf die Lernprozesse (z. B. Grund- und Handlungsvorstellungen) von Lernenden?*
 - *Welche Lernhindernisse (epistemologische Barrieren) sind speziell in der Linearen Algebra nachweisbar und wie kann ein CAS „therapeutisch“ entgegenwirken?*
 - *Ermöglichen CAS-Lernarrangements vielfältigere Begriffsbildungsprozesse?*
 - *Welche Auswirkungen hat ein intensiv genutztes CAS auf die Produktivität und die Performance der Schüler im Unterricht der Linearen Algebra?*
 - *Wie gestalten sich die unterrichtlichen Argumentationsmuster, das Explorations- bzw. Problemlösungsverhalten und die nachhaltige Entwicklung des Fachverständnisses von Grundkursschülern bei intensiver CAS-Nutzung?*
3. *Welche möglichen Änderungen ergeben sich hinsichtlich der epistemologischen Überzeugungen bzw. des Fachverständnisses im Mathematikunterricht (belief structure)?*
 - *Führt ein computerintensiver Mathematikunterricht zu einer anderen Auffassung von Mathematik?*
 - *Sind Veränderungen dieser Haltungen am Ende langfristiger und intensiver Nutzungsformen von CAS erkennbar und worin bestehen diese?*
 - *Welche CAS-spezifischen Aspekte sind dabei nachweisbar (CAS-Weltbild)?*

⁷Im Folgenden - wenn nicht explizit anderes gesagt ist - kurz und geschlechtsneutral für „Schülerinnen und Schüler“. Oft verwende ich auch den neutralen Begriff „Lernende“.

Kapitel 2 beginnt die Untersuchung daher mit lerntheoretischen und designpraktischen Überlegungen zur Wissenskonstruktion und befasst sich insbesondere mit Fragen der *Legitimation* eines computerintensiven allgemeinbildenden Mathematikunterrichts. Während die Untersuchung der Kommunikationsrelation Schüler–Lehrer Gegenstand der traditionellen Mathematikdidaktik war, tritt nunmehr die Notwendigkeit einer didaktischen Reflexion der Relationen Schüler–CAS und Lehrer–CAS hinzu.

Als *didaktische Hintergrundtheorie* wird in dieser Arbeit die sog. *APOS-Theorie* von E. DUBINSKY genutzt, die zusammen mit den sog. A.C.E.-Lernarrangements erstmals im deutschen Sprachraum ausführlich erläutert und als eine Ausdehnung der Lerntheorie(n) von PIAGET auf den Erwerb höherer bzw. abstrakter mathematischer Begriffsbildungen genutzt wird. Gezeigt wird, dass sich der lerntheoretische Ansatz der APOS-Theorie zur Konstruktion vernetzten mathematischen Wissens in besonderer Weise mit Modularisierungsprozessen innerhalb eines CAS verträgt, weil sich Phasen bzw. Tätigkeiten der Software-Technik „Modularisierung“ und Phasen bzw. Aktivitäten der mentalen Wissenskonstruktion ähneln. Gezeigt wird auch, wie die APOS-Theorie – gelegentlich flankiert durch die *concept-image-Theorie* von TALL/VINNER, die prädikativ-funktionale *Denkstiltheorie* von I. SCHWANK sowie die didaktische *Modelltheorie* der RME (GRAVEMEIJER) – als Begründungsrahmen für unterrichtliche Episoden dienen kann.

Als *Design-Prinzipien* eines CAS-intensiven epistemologisch orientierten Mathematikunterrichts werden im Anschluss die acht Prinzipien der virtuellen Erfahrungsverankerung (CAS-Experimente; CAS-Mikrowelten bzw. generische organizer), der metakognitiven Klammerung, des inkrementellen CAS-Spracherwerbs, der literaten Programmierung, der strukturierten Repräsentation mathematischen Wissens (in Modulen), der moderaten Modellierung, der limitierten kognitiven Ladung sowie des SONG-Repräsentationsformwechsels formuliert und an Design-Beispielen verdeutlicht.

Kapitel 3 behandelt schulisch wesentliche Grundprobleme der Linearen Algebra als Lehr- und Lerngegenstand und fahndet nach erkennbaren Verständnis-Barrieren. Als solche identifizieren wir die *Formalismusbarriere*, die *Implizitheitsbarriere*, die *Charakterisierungsbarriere*, die *Geheimsprachen-Metapher*, die *Chamäleonbarriere* sowie die *Abstraktionsbarriere*. Bei letzterer elaborieren wir insbesondere die Erscheinungsformen der pseudoempirischen und der funktionalen (prozeduralen) Abstraktion im CAS sowie die logisch-mengentheoretische Abstraktion nach LORENZEN. Beispiele demonstrieren CAS-realisierte Abstraktionen am Vektorbegriff als Vergessen von Details bzw. als Vergessen von Struktur. Realisiert wird dies in geeignet designten CAS-Mikrowelten. Einige weitere ausgewählte kognitive Verständnis-Barrieren wie z. B. die „*Barriere des Praktischen Denkens*“ (nach SIERPINSKA) und die „*pseudokonzeptuale Denkhaltung*“ (VINNER) schließen sich an.

Anschließend werden didaktische Konsequenzen für die Grundlegung des geometrischen Teils der CAS-Lerntrajektorie gezogen, die sich aus einer APOS-begründeten „genetischen Dekomposition“ und der Analyse einiger vorliegender Lerntrajektorien ergeben.

Als Lösungsansätze aus den fachwissenschaftlichen und didaktischen Communities für den beschriebenen Problemmix werden ausführlich die Curriculum-Revision der TLAG (Frankreich; insbesondere der Vorschlag von ROGALSKI) sowie die curriculare Revision der LACSG

(USA) studiert und auf die Nutzung für die Zwecke dieser Untersuchung hin gesichtet.

Kapitel 4 beschreibt den Aufriss eines CAS-gestützten Grundkurses in Linearer Algebra für die Sekundarstufe II. Ausgehend von den diskutierten Empfehlungen der LACSG und gestützt auf die vorangegangene Untersuchung möglicher epistemologischer Barrieren während des Aufbaus tragfähiger Konzeptbildungen wird ein matrixorientierter computerintensiver Grundkurs zur Linearen Algebra skizziert, der CAS-Lernarrangements zur Unterstützung des Lernprozesses einbezieht. Der Kurs schließt an Vorkenntnisse der Schüler über das Lösen von Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten aus der Sekundarstufe I an, weitet diesen Themenstrang aber um algebraische (Matrizen), geometrische (Unterräume), funktionale (lineare Abbildungen) und algorithmische (Gauss-Jordan-Elimination) Stränge auf. Nach dem Vorschlag von VOLLRATH gliedert sich das strategische Kursdesign in eine *globale* Strategie mit der Angabe der leitenden Entwurfsprinzipien und der Gründung der Themenstränge, in die *regionale* Planung von Unterrichtssequenzen in Form von CAS-Parcours sowie in die *lokalen* Planungen von reichhaltigen Unterrichtseinheiten zum Erwerb der wesentlichen Leitbegriffe. Begleitend wird jeweils die Genese der zugehörigen notwendigen CAS-Kompetenz („Instrumentalgenese“) skizziert. Die Explizierung der globalen Kursstrategie orientiert sich dabei an dem *Modell der epistemologischen Wachstumsringe*. Unter den regionalen Kursstrategien findet sich als stoffdidaktische Innovation insbesondere eine genetische Dekomposition und didaktische Rekonstruktion des wichtigen Konzeptes der *Pseudoinversen*. Die lokalen Kurs-Strategien werden am Beispiel des sog. *Stücklistenproblems* exemplarisch verdeutlicht.

Kapitel 5 beschreibt die empirischen Untersuchungen zur Klärung der dritten Forschungsfrage. Zunächst werden die Designzyklen und die Erfolgsquoten beim Einsatz der entwickelten hypothetischen Lernarrangements betrachtet. Es schließen sich ausgewählte Fallstudien zu unterrichtlichen Episoden an, die u. a. die oben genannte Kreativitätserhöhung durch ein CAS adressieren und insbesondere eine interessante Konstruktion des Konzeptes der Pseudoinversen durch eine hochsensible Formelinspektion (Analogieschluss) aufzeigen. Die unter intensivem CAS-Einfluss gebildete epistemologische Überzeugungsstruktur der Schülergruppen wird in drei iterierten *Längsschnittuntersuchungen* zum Mathematik-Weltbild studiert und evaluiert. Der Befund der erhobenen CAS-M-Weltbilder wird anschließend mit dem Referenz-Mathematikbild der GRIGUTSCH-Untersuchung verglichen. Vorüberlegungen zur Konstruktion eines CAS-Weltbildes schließen die Untersuchung ab. Dazu werden die Befunde aus einem CAS-Fragebogen präsentiert, die in acht CAS-Weltbildaspekten verdichtet werden. Diese Aspekte generieren einige Hypothesen zur Erklärung der vorgefundenen Veränderungen im mathematischen Weltbild der untersuchten Kohorten. Methodisch werden dazu Elemente einer explorativen Datenanalyse eingesetzt.

§ 2

Lerntheoretische und designpraktische Überlegungen zur Wissenskonstruktion

Gegenstand der vorliegenden Studie ist ein vertieftes Studium der Bedeutung von CAS im Zusammenhang unterrichtlicher Lehr- und Lernprozesse mit einem spezifischen Fokus auf die Wissensdomäne der elementaren Linearen Algebra. Dazu stützt sich diese Arbeit wesentlich auf die (von mir leicht modifizierte) sog. *APOS-Theorie*¹, die als sozial-konstruktivistische Lehr- und Lerntheorie international als theoretischer Forschungsansatz, zur praktischen Curriculumentwicklung und als computerbasierte fachdidaktische Lehr- und Lernmethode eingesetzt wird. Sie versteht sich als Fortschreibung der entwicklungspsychologischen Stufentheorie PIAGET's und widmet sich speziell avancierteren mathematischen Denkprozessen. Sie scheint daher für die vorliegende Zielsetzung besonders geeignet. Diese Theorie war zwar ursprünglich für die Reform der US-amerikanischen Anfängervorlesungen (Undergraduate Math Education; UME) konzipiert, bietet nach der in dieser Arbeit vertretenen Argumentation aber auch vielversprechende Anwendungsmöglichkeiten im schulischen² Bereich.

Die *interaktive* Konstruktion neuen mathematischen Wissens in typischen Instruktionsfolgen via Kommunikation *zwischen Schülern und Lehrpersonen* untersucht z. B. STEINBRING in [189], [190] und umfassend in [191] aus epistemologischer Perspektive und NÜHRENBÖRGER [166] speziell für *sozial-interaktive* Verstehens- und Verständigungsprozesse im Anfangsunterricht. Unser Fokus liegt dagegen auf Verständigungsprozessen von älteren Schülern mit dem CAS und der Generierung von Wissen in der Interaktion mit dem CAS.

¹Akronym für **A**ction-**P**rocess-**O**bject-**S**chema-Theorie; wird weiter unten detaillierter erläutert.

²neuere Forschungen der sog. RUME-Gruppe fokussieren aktuell den US-K-12 Bereich.

2.1 Die APOS-Theorie und der A.C.E.-Zyklus

Die wissenschaftliche Grundlegung der „APOS“-Theorie erfolgte durch den nordamerikanische Mathematiker und Mathematik-Didaktiker Ed DUBINSKY³. Seine Forschungsschwerpunkte sind:

- eine Ausdehnung der Lerntheorie(n) von PIAGET auf den Erwerb höherer bzw. abstrakter mathematischer Begriffsbildungen
- die Untersuchung der Auswirkungen von Computer-Erfahrungen auf das Lernen abstrakter mathematischer Objekte
- Formen kooperativen Lernens im Undergraduate-Bereich
- die Entwicklung von neuen Zugängen zur elementaren Analysis und der abstrakten Algebra, die u.a. auf Forschungsergebnissen über Computereinsatz und kooperativen Lernformen beruhen
- der Aufbau einer dazugehörigen Forschungsgemeinschaft unter dem Titel *Research in Undergraduate Mathematics Education* (kurz: RUME⁴).

Über mehrere Jahre wirkt DUBINSKY in verschiedenen Funktionen bei der AMS/MAA und war bzw. ist Herausgeber verschiedener didaktischer Zeitschriften, u.a. von *Mathematics and Computer Science* und *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, des *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, des *Journal of Mathematical Behavior*⁵ sowie der AMS Zeitschrift *CBMS⁶ Research in Collegiate Mathematics Education*⁷. Damit erklären sich eine Fülle von Kooperationen und Fundorten in DUBINSKY's Publikationsliste. Seine Forschungsergebnisse finden sich in der Publikation von 9 Büchern wieder, darunter *Programming with Sets: An Introduction to SETL* [46], *Learning Abstract Algebra with ISETL* [86], *Applied Calculus, Concepts & Computers* [69] und *Introduction to Discrete Mathematics with ISETL* [82].

³geboren am 7. Feb. 1935 in Philadelphia, wirkte ab 1964 als Professor zunächst an verschiedenen Universitäten der USA und des Auslands (Polen, Ghana, Gastprofessur 1972 in Bonn), bevor er für 15 Jahre (1972-87) an die Clarkson University in Potsdam/New York ging. Forschungsschwerpunkte in dieser Zeit waren Problemstellungen aus der Funktionalanalysis. Mit dem Wechsel DUBINSKY's an die Purdue University in West Lafayette/Indiana (1987-96) war ein offensichtlicher Wechsel seiner Interessenschwerpunkte verbunden, sein intensives Forschen galt nunmehr Fragestellungen aus der Didaktik der Mathematik. Ab 1996 bis zu seiner Emeritierung im Jahre 2000 arbeitet Dubinsky an der Georgia State University in Atlanta/Georgia.

⁴In neueren Veröffentlichungen auch als RUMEC bezeichnet, d.h. RUME-Community (Forschungsgemeinschaft).

⁵mit R. DAVIS

⁶Conference Board of the Mathematical Sciences

⁷mit J. KAPUT und A. SCHOENFELD

2.1.1 Zur historischen Entwicklung der APOS-Theorie

Bei einer Konferenz über Funktionalanalysis hörte DUBINSKY 1969 von J. SCHWARTZ⁸ von der mathematisch orientierten Programmiersprache SETL⁹, die dieser am COURANT-Institut in New York für Ausbildungszwecke in Computerwissenschaften entwickelt hatte und die auf mathematischen Konzepten wie Mengen, Folgen, Funktionen sowie einer implementierten Aussagen- und Prädikatenlogik basierte. Als sich Dubinsky anfang der 80iger Jahre erneut mit SETL beschäftigt, stößt er im Sprachreport auf einen Satz, der ihm die entscheidende Erkenntnis bringt:

Das [mathematische] Wissen, das [zur Programmierung von SETL] vorausgesetzt wird, ist in etwa dasselbe wie es für einen Anfängerkurs in Diskreter Mathematik erforderlich ist.¹⁰ vgl. DUBINSKY [68, S. 1]

Diese Beobachtung von SCHWARTZ, dass *Informatik*studenten beim Lernen der Programmiersprache SETL interessiert und erfolgreich *mathematische* Konzepte benutzen, bringt ihn auf die Idee, das Konzept von SCHWARTZ umzukehren und *Mathematik*studenten die Grundbegriffe der Diskreten Mathematik *über die Programmiersprache* SETL mit Hilfe von Computern *zu vermitteln*. Ein erster Kurs entsteht 1981¹¹ und DUBINSKY stellt fest, dass allein schon der Umgang mit der mathematisch orientierten Syntax von SETL den Verständnisprozess der Studenten begünstigt: „Der Effekt war beeindruckend und führte uns Beobachter zu der Frage, welcher Mechanismus den Lernerfolg der Studenten verbessert hatte.“, vgl. DUBINSKY [68, S. 2].

Diese Erfahrungen münden in der Entwicklung einer *interaktiven* Variante von SETL (namens ISETL), die in der Folgezeit in Vorlesungen über Diskrete Mathematik, Abstrakte Algebra und Analysis vielfältig eingesetzt wird. Parallel dazu entwickelt DUBINSKY die genetische Epistemologie von PIAGET fort mit dem Ziel, ihre Befunde auf die beobachteten Lernprozesse junger Erwachsener im Undergrade-Bereich¹² anzupassen. In einem frühen Artikel über das Induktionsprinzip fasst DUBINSKY [58, S. 2] seine Vorstellungen über das Wesen und den Erwerb mathematischen Wissens wie folgt zusammen:

Mathematisches Wissen besteht aus einer zusammenhängenden Ansammlung von Schemata, die jeweils einzelnen mathematischen Konzepten entsprechen. Ein Schema ist mehr als eine kohärente Menge von kognitiven Objekten und Transformationen von und an diesen Objekten. Grob gesprochen: ein Verständnis von einem Konzept zu gewinnen heißt, ein oder mehrere entsprechende Schemata zu konstruieren. Dieser Konstruktionsprozess wird als *reflexive Abstraktion* bezeichnet und umfasst eine Reihe mentaler Aktivitäten wie z.B. *Interiorisation* (die Ausbildung eines internen Prozesses, der einer bestimmten mathematischen Transformation entspricht), die *Generalisation* (die Assimilation eines neuen Phänomens an ein existierendes Schema), die *Koordination* (Verbindung von zwei oder mehr Schemata) und die *Enkapsulation* (die Bildung eines mathematischen Objekts aus einem kognitiven Prozess). [...] Eine didaktisch entscheidende Frage ist, was diesen

⁸Mitautor von DUNFORD & SCHWARTZ. Functional Analysis.

⁹SetLanguage

¹⁰eigene Übersetzung; wie auch in den folgenden Zitaten

¹¹aus den später das Lehrbuch von BAXTER [16] entsteht

¹²d.h. K-12, College-Studenten in Anfangssemestern

Konstruktionsprozess¹³ fördert und wie wir als Lehrer zugehörige hilfreiche Aktivitäten gestalten können. [...] Denn] Konzeptuelles Wissen ist nicht etwas, das verbal oder durch Beispiele übertragen werden kann, von einem der es besitzt, auf jemanden, der [...] daran interessiert sein könnte, es zu lernen. [...] Piaget's Antwort auf diese Frage liegt in seinem Konzept der *Äquilibration*. Der Lernende reagiert auf eine mathematische Problemsituation mit dem Versuch, diese in seine existierenden Schemata zu assimilieren.

In den folgenden Jahren entstehen eine Fülle von Veröffentlichungen – oft in Kooperation mit Mitarbeitern oder anderen Forschern –, die aus lerntheoretischer und epistemologischer Perspektive die Behandlung des Funktionsbegriffs [81], [21], [84], [85], die Verkettung von Funktionen [8], den Grenzwertbegriff [33], [74], den Ableitungs- und Integralbegriff [7], [38], [61], [90], [91], [66] sowie zentrale Grundbegriffe der Algebra [62], [87], [6] (wie binäre Operationen, Gruppenbegriff, Nebenklassen und Quotientengruppen in [41], [23], [43] und speziell Symmetriegruppen [42], [96]) aus der Perspektive des Lernens mit Hilfe der vermittelnden Computersprache ISETL reflektieren.

Ein Strang von frühen Publikationen handelt von computerunterstützten Lernprozessen zu Grundkonzepten der Mengenlehre [46], der Prädikatenlogik [95] (speziell der Problematik von Quantoren [97], [71], [94]) sowie der vollständigen Induktion [57], [58].

Einer Reihe weitere Aufsätze befasst sich gezielt allgemeiner mit Lernprozessen aus konstruktivistischer Sicht und kreist zunächst um das Piaget'sche Konzept der reflexiven Abstraktion [88], [63], [70], [59], [92], [60], [77], behandelt die Formalismus-Problematik [76], [78], [62] sowie den expliziten Einbezug des Computers in den Lernprozess [56], [93], [83], [80].

Erste Gedanken zur Behandlung der Linearen Algebra werden in [73] formuliert und werden in dieser Arbeit im Zusammenhang mit der Konstruktion einer schulischen CAS-Kurssequenz zur Lineare Algebra behandelt.

Die APOS-Theorie entsteht während dieser Forschungen im Bemühen, den Mechanismus der reflexiven Abstraktion genauer zu verstehen, der von PIAGET eingeführt wurde, um im kindlichen Lernprozess die Entwicklung des logischen Denkens zu beschreiben und auf das Lernen höherer mathematischer Konzepte zu übertragen. Neben der APOS-Lerntheorie schält sich im Verlaufe von ca. 15 Jahren ein zugehöriges Forschungsparadigma und die *Methodik des kooperativen A.C.E.-Lernzyklus* heraus, vgl. [72], [67], [64], [65], [89].

Die Leitbegriffe dieser Theorie sind für unsere weitere Untersuchung von Bedeutung. Sie werden daher aus obigen Veröffentlichungen gesichtet und in ihren Kernaussagen zusammengestellt.

2.1.2 Das lerntheoretische Grundkonzept der APOS-Theorie

Der Begriff *APOS-Theorie* leitet sich aus den Anfangsbuchstaben der zugehörigen Grundbegriffe der zugrunde liegenden konstruktivistischen Lerntheorie ab: *Aktion* – *Prozess* – *Objekt* – *Schema*. Diese Begriffe benennen modellhaft die Entwicklungsphasen und jeweiligen individuellen Ausprägungsstadien bei der Bildung eines mathematischen Konzeptes

¹³d.h. die reflexive Abstraktion

in einem Individuum in Form eines iterativen Prozesses, wobei jede Phase mit dem Erwerb eines bestimmten mentalen Konstruktes abschließt. Der Prozess selbst ist dabei nicht linear-sequenziell¹⁴ zu denken, sondern kann im einzelnen Individuum auch dialektisch sprunghaft (d.h. einzelne Phasen überspringend oder zu vorherigen Phasen zurückspringend) verlaufen. Insofern ist die vorgeschlagene Phasierung der Theorie zunächst als Modellierung eines sich der direkten Beobachtung entziehenden internen Vorgangs im Individuum zu verstehen. Zum Zwecke der lesbaren Darstellung wird die Abfolge hier (wie auch in den Veröffentlichungen) aber linear besprochen und am begleitenden Beispiel 'Erwerb des Funktionsschemas'¹⁵ konkretisiert.

Ausgangspunkt der APOS-Lerntherie ist die folgende Hypothese, vgl. DUBINSKY [89, S. 2]:¹⁶

Die hier dargestellte Theorie beruht auf der Annahme, dass mathematisches Wissen auf der Tendenz eines Individuums beruht, auf wahrgenommene mathematische Problemsituationen [mittels Nachdenken]¹⁷ [in einem sozialen Kontext]¹⁸ mit der Konstruktion mentaler *Aktionen*, *Prozesse* und *Objekte* zu reagieren und diese in *Schemata* zu organisieren, um den vorgefundenen Situationen Sinn zu verleihen und die zugehörigen Probleme zu lösen. In Bezug auf diese mentalen Konstruktionen bezeichnen wir diese Theorie als *APOS-Theorie*.

Dieses „Axiom“ der APOS-Lerntheorie wird z.B. in DUBINSKY [68, S. 7 ff] noch etwas genauer entfaltet. Grund dafür ist die Erfahrung, dass das mathematische Wissen eines Individuums in einer konkreten Situation oder zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht verfügbar¹⁹ sein kann, d.h. es muss in einer Problemsituation nicht zwangsläufig zu einem Lernprozess kommen. Insofern sind *Erwerb und Besitz* von Wissen zu *unterscheiden*.

Die Betonung des sozialen Kontextes beim Erwerb von mathematischem Wissen mag zwar strittig sein, wird aber unter Verweis auf die kulturelle Entstehung der Mathematik als Gemeinschaftsprodukt miteinander kommunizierender Experten in diese Grundannahme aufgenommen und später genuiner Bestandteil der Wissenskonstruktion in den konstruktivistischen *explizit-kooperativen* Lernarrangements der A.C.E.-Zyklen.

Der oben undefiniert verbliebene Begriff 'Konstruktion' (von Wissen) wird in DUBINSKY [77, S. 4] beschrieben:

Ich glaube, dass eine Person dadurch lernt, dass sie aktiv etwas zu tun versucht oder etwas einen Sinn geben möchte und sie muss daher - fast bewußt - fundamentale Änderungen in jener vagen Entität vornehmen, die wir Verstand nennen. Es ist dieses Vornehmen mentaler Veränderungen, was ich *Konstruieren*²⁰ nenne und es ist meine tiefe Überzeugung, dass ein Lehrer nur indirekt

¹⁴DUBINSKY [89, S. 4]

¹⁵Häufig wird von DUBINSKY auch die Bildung des höheren Begriffs der Nebenklasse und der Quotientengruppe aus der Gruppentheorie verwendet. Das Beispiel 'Funktionsbegriff' hat aber für den Mathematikunterricht einen prototypischeren Charakter.

¹⁶eigene Übersetzung; wie auch die nachfolgenden Zitate

¹⁷diese Ergänzung findet sich in einer ähnlichen Formulierung in DUBINSKY [68, S. 8]

¹⁸Dieser ergänzte Zusatz findet sich in COTTRILL [33, S. 4]. Ähnlich formuliert DUBINSKY [79]: „Jedes Individuum muss für sich selbst – in einem sozialen Kontext – verschiedenen kohärente Ansammlungen von mentalen Objekten und Prozessen konstruieren, um mathematischen Problemsituationen Sinn geben zu können.“

¹⁹z.B. blockiert durch affektive Umstände oder aktuelle Gedächtnishemmungen, die sich [z.B. in Prüfungssituationen] auf Stichwortgabe wieder lösen können

²⁰Hervorhebungen von mir

etwas tun kann, um seine Schüler diese Veränderungen konstruieren zu lassen. Dies macht mich zu einem *Konstruktivisten* in meinen Zugang zur Mathematikdidaktik.

Dabei kann *Konstruktion* nach DUBINSKY [68, S. 7] auch eine (mehr oder weniger veränderte) *Rekonstruktion* bereits vorhandener Wissenbestandteile meinen, d.h.i.S. von PIAGET eine *Akkomodation*. In extensionalem Sinne ist das Ergebnis eines mentalen Konstruktionsprozesses jedenfalls entweder eine *Aktion*, ein *Prozess*, ein *Objekt* oder ein strukturiertes *Schema* und wird als solches der wissenschaftliche Untersuchung mit Hilfe des zugehörigen Forschungsparadigmas zugänglich.

Die zusätzliche Komponente der APOS-Theorie gegenüber klassischen Lerntheorien ist die These bzw. der durch einschlägige Studien belegte Befund, dass *der mentale (Re)Konstruktionsprozess mathematischen Wissens durch eine mathematisch-orientierte Programmiersprache als Medium*, innerhalb derer die Wissenskonstruktionen als Programmierkonstrukte angebahnt oder repräsentiert werden, *entscheidend gefördert* wird. Die Gestaltung der zugehörigen Lernarrangements ist dabei von entscheidender Bedeutung und wird daher noch genauer diskutiert.

Aktionen, Prozesse, Objekte und Schemata als Produkte von Wissens(re)konstruktionsprozessen werden in verschiedenen Studien z.T. unterschiedlich formuliert und an unterschiedlichen Fallbeispielen expliziert. An Stelle des ursprünglich für die Untersuchungen benutzten Programmes ISETL wird hier das CAS MuPAD benutzt. Ein Forschungsziel der vorliegenden Untersuchung wird es daher sein, zu untersuchen, ob sich vergleichbare Befunde bei Anwendung der APOS-Lerntheorie unter Benutzung des CAS MuPAD auch im Schulbereich nachweisen lassen.

(A) ktion

Die m.E. klarste und umfassendste Definition des Begriffs *Aktion* findet sich in DUBINSKY [75, S. 12] :

Das Verständnis eines mathematischen Konzeptes beginnt mit der Ausführung von Aktionen auf (mentalenen oder physikalischen) Objekten, welche diese in ein neues Objekte oder dasselbe mit anderen Eigenschaften transformiert. Damit ein Individuum eine Aktion durchführen kann, muss es in seinem Bewußtsein eine spezifische Auflistung von Instruktionen vorliegen haben und die Aktion muss tatsächlich bis zum letzten Detail durchgeführt werden. Ob dabei das Rezept für eine Aktion von einer anderen Person gegeben wird, aufgeschrieben vorliegt oder aus dem Gedächtnis zurückgerufen wird, das Individuum empfindet die Durchführung der Aktion jedenfalls als von außen gesteuert.²¹

Ähnliche Formulierungen finden sich in DUBINSKY [89, S. 2], ASIALA [6, S. 2], BROWN [23, S. 1], COTTRILL [33, S. 4] oder DUBINSKY [68, S. 9], wo es heißt: „[...] das Individuum benötigt vollständige und verstehbare Instruktionen, die präzise Details über die notwendigen Schritte geben, die in Verbindung mit dem Konzept vorzunehmen sind.“

²¹Der Begriff *Transformation* verbleibt in der APOS-Theorie undefiniert; man kann sich darunter äußerlich sichtbare Manipulationen des Individuums vorstellen, die Gegenstand einer Forschungsanalyse sein können. So heißt es z.B. in DAUTERMANN [41] : „Eine Aktion ist eine wiederholbare mentale oder physikalische Manipulation, die ein Objekt irgendwie verändert.“

*Aktionen*²² sind demnach als *repetierbare, oftmals kleinschrittige Handlungen zu verstehen, die unselbstständig längs äußerer Stimuli oder Algorithmen erfolgen, so dass die resultierende Aktionsvorstellung eines mathematischen Konzeptes daher notwendigerweise zunächst eng und begrenzt bleibt*. Dennoch sind die während dieser (z.B. CAS-)Aktivitäten ausgelösten mentalen Konstruktionen wichtig für den Beginn des weiteren Verständnis- und Verständigungsprozesses (auch mit dem CAS). Sie reichern die Erfahrungsbasis des Individuums entscheidend an und präparieren für das Ausbilden einer nachfolgenden konzeptuellen Prozess- und Objektvorstellung. Im Kern stoßen Aktionen mit dem Experten CAS medial vermittelt aktiv reflexive Abstraktionen an, indem sie geeignete mentale Konstruktionen auszulösen versuchen; dies formuliere ich weiter unten als „*Prinzip der virtuellen Erfahrungsbasierung*“. Im engeren Sinne versteht die APOS-Theorie unter Aktionen daher reflexionsfördernde Handlungen mit der mathematischen Programmiersprache, in erweiterter Interpretation auch mit einem CAS.

Auf eine mißlungene oder retardierte Aktionsvorstellung eines Konzeptes kann die Lernperson die höheren Phasen im Verständnisprozess nicht erfolgversprechend aufsetzen: es kann zum Abreißen des Verständnisses kommen. Dieses Phänomen sollte sich bei einer theoretischen Analyse des aufgezeichneten Datenmaterials (Interview-Transkript, schriftliche Aufzeichnung, Lösungsversuch o.ä.) mit Hilfe der APOS-Theorie nachweisen lassen.

Ein ähnliche Betonung der Handlungsorientierung als Grundlage von selbstständigen Lernprozessen findet sich auch bei WITTMANN und HEFENDEHL-HEBEKER.

Beispiel [Funktionsbegriff; A-Niveau]: Der Funktionsbegriff ist einer der zentralen mathematischen Begriffe und in der Literatur vielfach untersucht worden, u.a. von von TALL & VINNER [196]. Die Probleme von Schülern bei der adäquaten Bildung dieses Konzeptes sind weithin bekannt. Aus Sicht der APOS-Theorie liegt ein *Aktionsverständnis einer Funktion* bei einem Schüler dann vor, wenn er z.B. (nur) einzelne Funktionswerte berechnen, den zugehörigen Graphen zeichnen, den Funktionsterm umformen oder ein situatives Problem erst nach *Vorgabe* einer (möglichst einzigen) Formel modellieren kann. Relevante verständniskritische Probleme ergeben sich z.B.

- wenn das Ergebnis einer Funktion('saktion') z.B. ein Wahrheitswert oder selbst wieder eine Funktion ist
- wenn Funktionen stückweise zu einer neuen Funktion zusammengesetzt werden (Eingabe: mehrere Funktionen; Ausgabe: eine neue Funktion; Transformation bzw. Aktion: Herstellungsprozess),
- wenn die Ableitung oder das Integral (Integralfunktion) einer Funktion wieder als Funktion zu deuten ist

²²Ich übernehme das Wort „Aktion“ hier als terminus technicus der APOS-Theorie und spreche nicht von Handlungen oder „Tätigkeiten am Computer“ oder mit dem CAS, auch um weiterhin den ersten Buchstaben im Akronym APOS sinnvoll verwenden zu können.

- beim Verständnis für Operationen von binären Relationen auf Mengen wie z.B. Skalarmultiplikation, Multiplikation mit einem Skalar, Vektor- und Matrizenoperationen der Linearen Algebra.

Einen Ausschnitt einer möglichen Interaktion mit dem CAS zeigt der folgende Screenshoot, vgl. Abbildung 2.1.

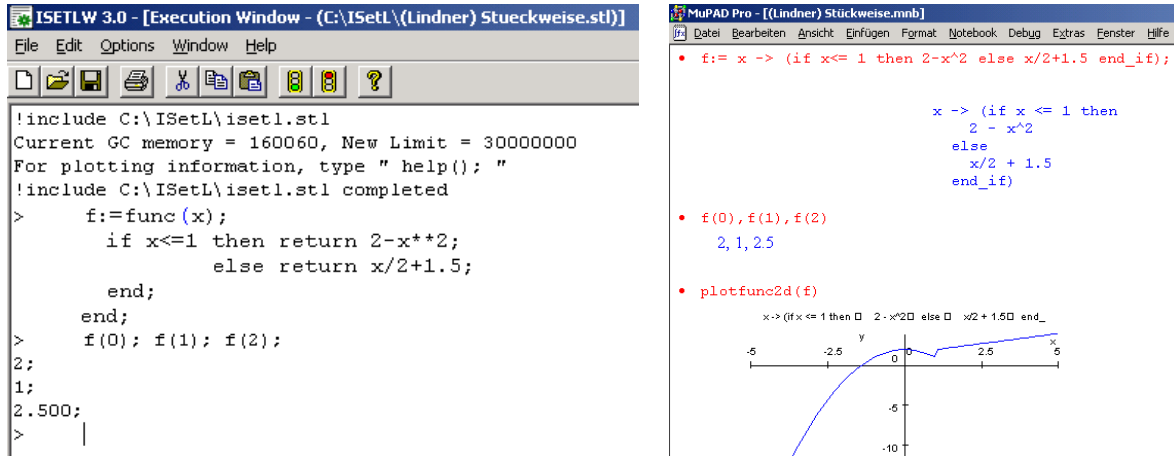


Abbildung 2.1: stückweise Funktionen in ISETLW 3.0 β und MuPAD 2.5

Die zu verstehende stückweise definierte Funktion wird dabei jeweils als ein CAS-Objekt mit Hilfe einer if-then-else-Bedingung konstruiert und berechenbar gemacht. Insbesondere wird damit eine Zeichnung zur gedanklichen Vorstellung des Funktionsgraphen möglich.

(P) rozess

Der zweite zentrale Begriff der APOS-Lerntheorie ist der eines *Prozesses* bzw. die *Prozessvorstellung eines Konzeptes* in einem Individuum. Eine Definition gibt DUBINSKY [75, S. 12]:

Eine höhere Stufe von Verständnis wäre eine Prozess-Konzeption, bei welcher das Individuum die Aktionen interiorisiert. Es benötigt keine expliziten Auflistungen oder Berechnungen mehr, um eine Operation auszuführen, sondern kann sich diese vorstellen und mental durchlaufen. Die involvierten Transformationen werden als intern gesteuert betrachtet und das Individuum kann sich die Umkehrung des Prozesses oder die irgendwie geartete Kombination zweier Prozesse vorstellen.²³

Charakteristisch für die Verständnisstufe einer Prozessvorstellung ist demnach, dass mathematische Aktionen oder Transformationen von Aktionen von der lernenden Person nicht

²³eigene Übersetzung. Weitere Umschreibungen findet man bei DUBINSKY [89, S. 3], BROWN [23, S. 2], COTTRILL [33, S. 4]. ASIALA [6, S. 2] formuliert: „Wenn das Individuum über eine Aktion reflektiert und eine interne [mentale; wL] Operation konstruiert, die im wesentlichen die gleiche Transformation [wie die Aktion; wL] durchführt, so sagen wir, die Aktion sei zu einem *Prozess interiorisiert* worden.“

mehr tatsächlich ausgeführt werden müssen, vielmehr kann sie sich – wie bei einem Gedankenexperiment – nun vorstellen, sie seien ausgeführt worden. Dabei wird die ehemals externe²⁴ Kontrolle durch eine intern-mentale ersetzt. Die Ausführung als solche wird im Gegensatz zur Aktionsvorstellung vom Individuum selbst kontrolliert, d.h. bewußt, selbstständig und ohne äußere Anleitung vollzogen. Erst nachdem das Individuum eine Prozessvorstellung eines (mathematischen) Konzeptes ausgebildet hat, kann ein Prozess umgekehrt oder mit anderen Prozessen koordiniert werden. Auf dieser Entwicklungsebene des Konzeptverständnisses wird also der Umgang mit Prozessen als solchen möglich.

Nach den Befunden der APOS-Theorie wird auch diese Phase der Verständnisbildung durch Nutzung eines CAS gefördert. Denn die zugehörigen mentalen Konstruktionen werden in der Sprache des CAS gespiegelt, konkretisieren die Erfahrungsbasis des Individuums und werden zur Voraussetzung für die nachfolgende Objektvorstellung, die einen Prozess zu einem Objekt verdichtet bzw. verdinglicht. Die Konkretisierung der Prozessvorstellung z.B. in einem Algorithmus projiziert dabei den Stand der mentalen Prozessbildung nach außen in die Ebene der CAS-Sprache und wird dort kommunizierbar und diagnostizierbar. Im engeren Sinne versteht die APOS-Theorie unter Prozessen daher reflexionsfördernde Handlungen mit Hilfe einer mathematischen Programmiersprache.

Beispiel [Funktionsbegriff; P-Niveau]: Im Unterschied zum Aktionsniveau, bei dem eine Funktion über *einen* Term mit expliziten Verzweigungen definiert wurde, wird unter Nutzung des MuPAD-Konzeptes `piecewise()` der Zusammenbau einer neuen Funktion aus kompakten fertigen Teilfunktionen (bzw. Teiltermen) über vorgeschriebenen Bereichen möglich. Dabei ist die Teilfunktion schon als eigenständiges Funktionsobjekt denkbar.

Einen Ausschnitt einer möglichen Interaktion mit einem CAS zeigt der folgende Screenshot, vgl. Abbildung 2.2.

MuPAD erlaubt auch eine termbasierte (im Gegensatz zur oben präferierten zuordnungs-basierten) Funktionsdefinition, welche einen mathematik-affineren Output liefert:

```
• f := piecewise([x<=1, 2-x^2], [x >1, x/2+1.5])
```

$$\begin{cases} 2-x^2 & \text{if } x \leq 1 \\ \frac{x}{2}+1.5 & \text{if } 1 < x \end{cases}$$

```
• plotfunc2d(f,x=-2..2)
```

(O) Objekt

Die dritte Phase bei der Bildung höherer mathematischer Konzepte ist der Erwerb einer *Objektvorstellung eines Konzeptes*. Dazu heißt es bei DUBINSKY [70, S. 5]: „Ein Individuum

²⁴DUBINSKY [70, S. 5]: „Das bedeutet: eine interne mentale Operation wird konstruiert, die das gleiche leistet, wie die mehr externe Aktion. Der Term 'extern' will nicht irgendetwas vom Individuum separiertes andeuten. Vielmehr hat er etwas mit Phänomenen zu tun, bei denen der Zugriff hauptsächlich über die Sinne erfolgt und die das Individuum als nicht unter seiner Kontrolle interpretiert.“

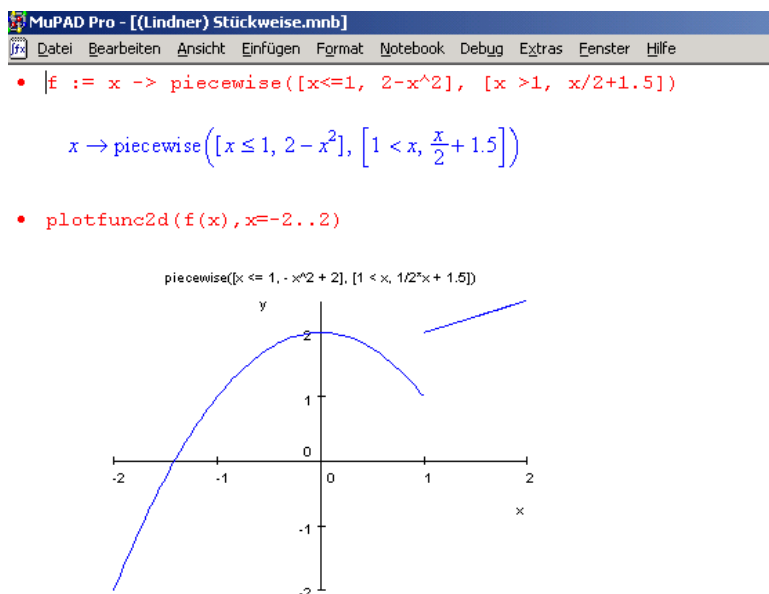


Abbildung 2.2: stückweise definierte Funktionen in MuPAD auf dem Prozess-Niveau

denkt über einen Prozess als Objekt, wenn es über Operationen reflektiert, die auf diesen Prozess als Ganzes wirken.“ und ausführlicher in DUBINSKY [89, S. 3] :

Ein Objekt wird ausgehend von einem Prozess dann konstruiert, wenn das Individuum einen Prozess als solchen [als Ganzes; wL] wahrnimmt und erkennt, dass Transformationen auf ihm wirken können. Wenn es notwendig wird, Aktionen an einem Prozess durchzuführen, so muß das Subjekt den Prozess als Ganzes einkapseln²⁵ und so ein [neues mentales Denk-; wL] Objekt erschaffen. Für viele mathematischen Operationen ist es notwendig, ein Objekt wieder zu entkapseln²⁶ und wieder mit dem Prozess zu arbeiten, aus dem es geschaffen wurde.²⁷

Nach dem Verständnis der APOS-Theorie hat eine Lernperson dann ein Objektverständnis erreicht, wenn ein Prozess als Entität gedacht werden kann unter Absehen seiner Genese und der konstruktiven Details. Die zugehörige Objektvorstellung enthält als genuinen Bestandteil daher eine bewußt gewordene Sensibilität des Individuums für die Totalität eines Prozesses. Auf dieser Stufe der reflexiven Abstraktion wird aus einem kognitiv gedachten Prozess daher ein neues kognitives Objekt im subjektiven Wissen konstruiert und kann in dieser Form selbst zum Gegenstand weiterer Denk- und Umformungsprozesse werden. *Objekte* i.S.d. APOS-Lerntheorie *sind* daher *enkapsulierte verdinglichte Prozesse*.

Aus lösungsstrategischer Sicht ist bei konkreten mathematischen Problemsituationen ein flexibler Umgang mit Denk-Objekten und den dahinterliegenden verdichteten Prozessen wichtig. Erfolgsentscheidend ist dabei oft, flüssig zwischen der Prozessvorstellung und der Objektvorstellung eines mathematischen Konzeptes wechseln zu können. Metaphorisch

²⁵im Original: encapsulate

²⁶im englischen Originaltext: de-encapsulate

²⁷Weitere Definitionsvorschläge finden sich u.a. bei DUBINSKY [74, S. 6], BROWN [23, S. 2] oder COTT-RILL [33, S. 4].

könnte man von der Fähigkeit eines Individuums zum *Einfrieren eines Prozesses zu einem Objekt* bzw. dem *Wiederauftauen eines Prozesses aus einem Objekt* sprechen. Höhere mathematische Denkhandlungen werden an strukturierten Objektansammlungen und in deren Relationsgeflecht vorgenommen, setzen daher ebenfalls erfolgreich vollzogene Objektbildungen (Enkapsulationen) voraus. Ist z.B. das Funktions-Konzept nicht erfolgreich zu einem Denkobjekt gekapselt, wird das nachfolgende Sprechen über Funktionenmengen (und Eigenschaften solcher Mengen) sinnleer, da ein ansprechbares Denkobjekt im Kopf des Lernenden nicht vorliegt.

Wir werden zeigen, dass ein geeignetes CAS wie MuPAD die notwendigen Ein- und Entkapselungen²⁸ von Prozessen zu Objekten didaktisch entscheidend fördern kann. Dazu stellen wir *geeignete virtuelle Erfahrungen*²⁹ als Ersatz für die fehlende alltägliche Erfahrung im Rahmen entsprechend designer CAS-Lernarrangements bereit.

Beispiel [Funktionsbegriff; O-Niveau]: Eine Lernperson versteht Funktionen als Objekte, wenn es z.B. Funktionen auf Gleichheit überprüfen kann, Funktionsgraphen als Ganzes und nicht aus einzelnen Punkten entstanden denkt, Funktionen addieren oder Mengen von Funktionen bilden kann. Sie verharrt dagegen auf einer Prozessvorstellung, wenn z.B. die Addition zweier Funktionen nur im Rekurs auf die (elementweise) Konstruktion aus ihren einzelnen Teilfunktionen gedacht werden kann oder eine stückweise definierte Funktion in ihre Bestandteile zerlegt werden muss. Das folgende MuPAD-Beispiel demonstriert die Anbahnung von Objektvorstellungen innerhalb einer CAS-Sprache.

Einen Ausschnitt einer möglichen Interaktion mit dem CAS zeigt der folgende Screenshot in Abbildung 2.3.

Nach der Definition zweier einzelner Funktionen f und g wird das neue Funktionsobjekt `f_plus_g` in `#1#` konstruiert. Die Wertverlaufsgleichheit der Summenfunktion mit der elementweisen Addition der Einzelfunktionen wird an Beispielen in `#2#` verifiziert. In `#3#` wird das neue Funktionsobjekt `f_plus_g` gezeichnet und mit den Teilfunktionen verglichen.

(S) chema

Die abschließende Phase beim Erwerb konzeptuellen mathematischen Wissens im Rahmen der hier diskutierten APOS-Theorie ist die *Schemavorstellung*, die eine Lernperson zu einem mathematischen Konzept strukturiert organisiert. DUBINSKY [80, S. 4] formuliert wie folgt:

Alle Aktionen, Prozesse und Objekte, die ein Individuum bezogen auf ein bestimmtes mathematisches Konzept gebildet hat, werden gemeinsam zu einem Schema gebündelt. Ein Schema (welches wiederum vorher gebildete Schemata einbeziehen kann) ist eine [strukturierte; wL] Gesamtheit, welche kohärent in dem Sinne ist, dass das Individuum ein (implizites oder explizites)

²⁸Vgl. dazu DUBINSKY [68, S. 11] „En- und Dekapsulationsprozesse werden in der didaktischen Literatur als schwierig angesehen (Sfard, 1987) und nur wenige didaktische Strategien haben sich als hilfreich erweisen, Lernpersonen in Situationen wie Funktionen oder Nebenklassen zu helfen. Ein Grund ist, dass es wenig in unserer Erfahrung gibt, dass dem Ausführen von Aktionen mit Prozessen entspricht.“

²⁹gemäß unserem unten formulierten Prinzip der Sicherung virtueller Erfahrung

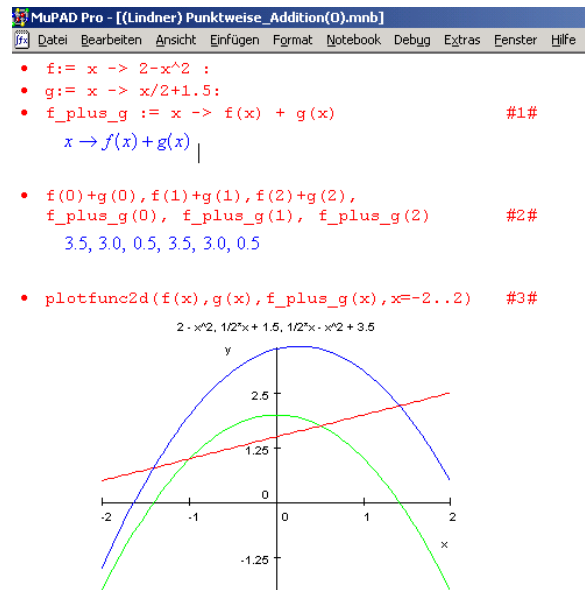


Abbildung 2.3: Addition zweier Einzelfunktionen zur einer neuen Funktion (Objekt) und deren Graph

Verständnis davon hat, wann ein Phänomen in den Gültigkeitsbereich eines Schemas fällt und wann nicht.

Weitere Aspekte des Schema-Begriffs lassen sich den Forschungsberichten der APOS-Literatur entnehmen. Danach werden nur verstandene³⁰ vorher gebildete Konzepte in ein Schema eingelagert und führen zu einer entsprechend reichhaltigen Vorstellung. *Schematisiertes Wissen* i.S.d. APOS-Theorie³¹ ist bewußt konstruiertes und verstandenes Wissen, das strukturiert bzw. „thematisiert³²“ vorliegt und in mathematischen Problemsituationen zur Lösungsfindung „de-thematisiert³³“ werden kann. Mit seiner expliziten Thematisierung wird ein Schema selbst zu einem mentalen Objekt und damit möglicher Gegenstand weiteren Nachdenkens. Die individuelle Wissensbildung erfolgt nach der APOS-Theorie daher im Modell eines zyklischen Prozesses, vgl. dazu COTTRILL [33, S. 4] :

Analog zu einem Prozess kann ein Individuum über ein Schema reflektieren und es transformieren. Auf diese Weise wird das Schema selbst zu einem neuen Objekt. [...] Folglich haben wir eine Entwicklung, die als eine spiralförmige Abfolge von Aktion, Prozess und Objekt innerhalb expandierender Schemata angesehen werden kann.³⁴

³⁰vgl. DUBINSKY [74, S. 12] „Ein Schema [...] enthält alle Interpretationen eines mathematischen Konzeptes zusammen mit Eigenschaften und Beziehungen, die das Individuum von einem Konzept versteht.“

³¹im Gegensatz zur naiven Interpretation keineswegs schemenhaft i.S.v. „nebulös“ oder schematisch i.S.v. „unverstanden anwendend“.

³²vgl. ASIALA [6, S. 2] „Ein Schema kann *thematisiert* sein und so eine neue Art von Objekt bilden; ein so thematisiertes Schema kann ebenfalls entpackt werden, um auf die zugrundeliegenden Komponenten des Schemas zuzugreifen.“

³³vgl. ASIALA [6, S. 2]

³⁴Ähnlich heißt es bei DUBINSKY [68]: „Man beachte, dass für Aktionen Objekte erforderlich sind,

Fehlvorstellungen eines Individuums sind i.S. der APOS-Theorie interpretierbar als Indikatoren für eine möglicherweise misslungene Schemavorstellung³⁵ eines Konzeptes. Sie können sich nachweisen lassen in einer fehlerhaften Thematisierung bzw. nur bruchstückhaft gelingender De-Thematisierungen. Ursachen können in der Nicht-Koordination wichtiger thematischer Wissens-Bestandteile liegen.

Befunde der APOS-Theorie belegen nun, dass mathematische Programmiersprachen wie CAS die Koordinierung von vorher konstruierten Objekte anbahnen bzw. direkt fördern können.

Beispiel [Funktionsbegriff; S-Niveau]: Im Vorgriff auf den folgenden Abschnitt sei eine sog. *primäre genetische Dekomposition*³⁶ des Konzeptes „binäre Verknüpfung“ vorgestellt, die für die lineare Algebra zentral ist. Diese genetische Dekomposition beschreibt die verschiedenen APOS-Phasen einer zu entwickelnden Vorstellung vom Konzept der *binären Relation* während des Lernprozesses einer Lernperson:

- A: Die Lernperson kann eine binäre Verknüpfung ausführen, wenn diese explizit als Term vorliegt. Sie ist in der Lage, eine solche Verknüpfung als Funktionen mit 2 Eingaben zu verstehen.
- P: Die Lernperson kann sich eine *generische* binären Verknüpfung vorstellen, bei der 2 Objekte (Eingaben) eingehen, mit diesen etwas passiert und ein neues mathematisches Objekt herauskommt.
- O: Die Lernperson kann sich verschiedene binäre Verknüpfungen auf einer Menge vorstellen und zwischen diesen unterscheiden; insbesondere kann sie eine binäre Verknüpfungen entkapseln, um mit ihr als Prozess zu arbeiten.
- S: Die Lernperson hat eine Vorstellung von einer binären Verknüpfung entwickelt, die in Problemsituation aufgerufen und benutzt werden kann.

Eine Lernperson versteht demnach eine binäre Verknüpfung als eine Funktion zusammen mit einer Menge dann als ein Schema, wenn sie z.B. die systematische Verknüpfung von schon konstruierten Objekten und binären Verknüpfungen zum *Schema der algebraischen Struktur* organisieren und koordinieren kann. Sie verharrt dagegen auf einer bloßen Objektvorstellung, wenn z.B. die binären Verknüpfungen auf einer Menge nur getrennt von der zugrundeliegenden Menge vorgestellt werden können.

Das folgende MuPAD-Beispiel zeigt die Anbahnung der Schemavorstellungen zu den Konzepten „binäre Verknüpfung“ und „Restklassenring“, formuliert innerhalb der CAS-Sprache.

Objekte erfordern Prozesse und Prozesse setzen Aktionen voraus, so ergibt sich ein gewisser spiraler Aspekt in unseren Betrachtungen.“

³⁵Auf Ähnlichkeiten mit den Begriffen Kernschemata (vgl. RUF & GALLIN), bzw. fundamentaler Ideen oder Grundvorstellungen (VOM HOFE) sein hiermit verwiesen. Auch die concept image vs. concept definition Dichotomie von TALL & VINNER zeigt offenkundige Analogien mit der Schemakonzeption der APOS-Theorie.

³⁶nach BROWN; DÖRFLER spricht von „hypothetischer Lerntrajektorie“.

Einen Ausschnitt einer möglichen Interaktion mit dem CAS zeigt der folgende Screenshot, vgl. Abbildung 2.4.

```

MuPAD Pro - [(Lindner) Z5.mnb]
File Edit View Insert Format Notebook Debug Extras Window Help

• Z5 := {0..4}; #1#
  {0, 1, 2, 3, 4}

• add_5 := (x, y)-> if contains(Z5,x) and contains(Z5,y) then
  return (x + y) mod 5 end_if: #2#

• add_5(2,4), add_5(4,4), add_5(0,5) #3#
  1, 3, Nil

• operator("add5", add_5) #4#

• 2 add5 4, 4add54, 0 add5 5 #5#
  1, 3, Nil

• additionTable := (m,i,j)->
  array(0..m-1,0..m-1,[(i + j) mod m $ i = 0..m-1
  $ j = 0..m-1]): #6#

additionTable(5), additionTable(4) #7#

(0 1 2 3 4) (0 1 2 3)
1 2 3 4 0 1 2 3 0
2 3 4 0 1 2 3 0 1
3 4 0 1 2 3 0 1 2
4 0 1 2 3 3 0 1 2

```

Abbildung 2.4: Anbahnung einer Schemavorstellung I

Kommentar: In #1# wird die zugrunde liegende Menge der 5-Restklasse definiert und die zugehörige binäre Verknüpfung `add_5` mittels `contains()` nur für die Elemente der in #1# definierten Menge `Z5` zugelassen. In #3# werden Beispiele erprobt, bevor in #4# die Relation `add_5(.,.)` durch einen infix-Operator vereinfacht notiert wird: dabei bleibt via Formel #3# der Kontakt zur ursprünglichen 2-stelligen Funktion erhalten und lediglich als eine andere Notation explizit konstruiert. Eine Additionstafel (interpretiert als Wertetabelle der 2-stelligen Relation) bildet ein erstes Beispiel. Die zugehörige Multiplikationstafel #8# läßt eine zweite binäre Operation auf der gleichen Menge operieren, siehe Abbildung 2.5. Insgesamt gilt es den Begriff der binären Verknüpfung zunächst als 2-stellige Funktion auf einer Menge zu verstehen und zusammen mit dieser Menge und zugehörigen Eigenschaften (wie z.B. der Abgeschlossenheit) als neues eigenes Objekt zu denken. Dies wird oben ohne Worterklärungen durch Beobachtungen am Lern-Material innerhalb der CAS-Sprache angeregt. Auf diese Weise lassen sich anschließend z.B. die Begriffe des Inversen, des neutralen Elementes etc. aus dem Datenmaterial mittels geeigneter Anfragen ('Experimente', 'angeleitete Erkundungen') extrahieren.

Anmerkungen:

1. In Analogie zur APOS-Theorie sollen nach WITTMANN [211, S. 103] „Grundkenntnisse und Grundtechniken [...] bei den Schülern als kognitive Schemata verfügbar werden.“ Dabei hat ein kognitives Schema „folgende Merkmale: Es ist plastisch (flexibel), modifi-


```

MuPAD Pro - [(Lindner) Z5.mnb]
File Edit View Insert Format Notebook Debug Extras Window Help

• additionTable := (m,i,j)-> array(0..m-1,0..m-1,[[ (i + j) mod m $ i = 0..m-1]
array(0..m-1,0..m-1,[[ (i + j) mod m $ i = 0..m-1]
$ j = 0..m-1]): #6#

additionTable(5), additionTable(4) #7#
(0 1 2 3 4) (0 1 2 3)
(1 2 3 4 0) (1 2 3 0)
(2 3 4 0 1) (2 3 0 1)
(3 4 0 1 2) (3 0 1 2)
(4 0 1 2 3)

• multiplicationTable := (m,i,j)-> array(0..m-1,0..m-1,
[[ (i * j) mod m $ i = 0..m-1]
$ j = 0..m-1]): #8#

multiplicationTable(5), multiplicationTable(4)
(0 0 0 0 0) (0 0 0 0)
(0 1 2 3 4) (0 1 2 3)
(0 2 4 1 3) (0 2 0 2)
(0 3 1 4 2) (0 3 2 1)
(0 4 3 2 1)

• MultiplikationsTafel := m -> matrix(m,m, (i,j)-> (i*j) mod m):
MultiplikationsTafel(5), MultiplikationsTafel(4)
(1 2 3 4 0) (1 2 3 0)
(2 4 1 3 0) (2 0 2 0)
(3 1 4 2 0) (3 2 1 0)
(4 3 2 1 0) (0 0 0 0)
(0 0 0 0 0)
    
```

Abbildung 2.5: Anbahnung einer Schemavorstellung II

zierbar (speziell generalisierbar und diskriminierbar), transferierbar, von überflüssigem Beiwerk gereinigt ('abstrakt') und mit anderen Schemata verzahnt.“

2. Bildhaft kann man sich den APOS-Prozess als eine Spirale vorstellen:

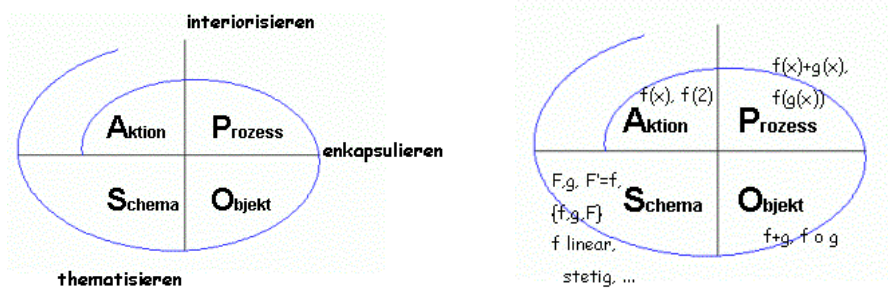


Abbildung 2.6: zyklischer Wissensbildungsprozess gemäß der APOS-Theorie; das rechte Bild demonstriert dies am Beispiel des Funktionskonzepts

Zusammenfassend formuliert dazu DUBINSKY [80, S. 5]

Eine basale Hypothese der APOS-Theorie ist nun, dass viele schwierige mathematischen Konzepte (z.B. die Kettenregel, der Satz von Lagrange, die Konstruktion von Quotientengruppen) für Schüler besser zugänglich werden, sobald sie geeignete Aktionen, Prozesse, Objekte und Schemata konstruiert haben. Dazu lasse ich die Schüler Computer-Programme schreiben, die sie dazu führen diese spezifischen Konstruktionen auf dem Computer zu machen und dies kann zu geeigneten Konstruktionen in ihren Vorstellungen führen.

Diese Darstellung bringt somit zum Ausdruck, dass im APOS-Wissensbildungsprozess kein Stufung durchlaufen wird, sondern eher eine Phasierung des Lernprozesses erfolgt. Daher liegt auch keine „Treppenmodellvorstellung des Fortschritts zu höherer Erkenntnis“ vor, sondern das Durchlaufen von notwendigen Abschnitten zur Anbahnung des Verständnisses.

2.1.3 Das zyklische A.C.E.-Lernarrangement

Das zur APOS-Lern-Lehr-Theorie von DUBINSKY und seinen Mitarbeitern entwickelte zugehörige Lernarrangement wird als „A.C.E.-Zyklus“ bezeichnet. Dieses Lernarrangement wurde zunächst als Ersatz für die traditionelle Vorlesung konzipiert, von deren Wirksamkeit man nicht mehr überzeugt war, und zielte auf die Förderung des Lernens avancierter mathematischer Begriffsbildungen. Der Einsatz von Computern im Lehr-Lernprozess verlangte nach einer anderen Organisation. Daher wurden Wochenabschnitte gebildet, die jeweils in drei Phasen unterteilt wurden, vgl. DUBINSKY [68, S. 22]³⁷:

Activities: Die Klasse trifft sich im Computer-Raum, wo die Studenten in Teams an Computeraufgaben arbeiten, die entworfen sind, um jene spezifischen mentalen Konstruktionen anzubahnen, die von unserer Forschung³⁸ empfohlen werden. Diese Computerlabor-Aufträge sind i.d.R. zu umfangreich, um in der vorhandenen Arbeitszeit bewältigt zu werden und es wird erwartet, dass die Studenten auch zu anderen Öffnungszeiten zum Arbeiten kommen oder andere PC-Labors nutzen, um ihre Aufträge zu beenden.

Class: Die Klasse trifft sich im Kursraum, wo die Studenten in Teams an Papier-Bleistift-Aufgaben arbeiten, die auf den Computer-Aktivitäten aus dem Lab aufsetzen. Der Instruktor führt gruppeninterne Diskussionen, die darauf abzielen, den Studenten Gelegenheit zur Reflexion über ihre Rechnungen zu geben. Gelegentlich stellt der Instruktor auch Definitionen, Erklärungen und Überblicke bereit, um zu bündeln, über was die Studenten nachdenken.

Exercises: Vergleichsweise traditionelle Aufgaben werden angeboten, an denen die Studenten wiederum in Teams arbeiten. Diese sollen ausserhalb von Kurs und Labor vervollständigt werden und stellen somit Hausarbeiten dar, welche die Laborarbeit ergänzt. Zweck der Aufgaben für die Studenten ist es, die konstruierten Ideen zu verstärken, die gelernte Mathematik zu benutzen und – gelegentlich – über Situationen nachzudenken, die erst später genauer studiert werden.

Erprobungsbericht von R. Smith. Details zu Organisation und Ablauf gibt SMITH [188] in einem ausführlichen Erfahrungsbericht über die dreimalige eigene³⁹ Erprobung des innovativen Ansatzes⁴⁰ in Vorlesungen zur Abstrakten Algebra und beschreibt, wie kooperatives Arbeiten und die spezifischen integrierten Computeraktivitäten⁴¹ zur Konstruktion und Interiorisierung von Begriffen der Algebra konkret eingesetzt wurden.

³⁷eigene Übersetzung

³⁸sog. „genetische Dekompositionen“, d.h. sorgfältig designte theoretische Lerntrajektorien.

³⁹der Konzept wurde an 5 Universitäten in Kanada, Israel und den USA erprobt. SMITH selbst hatte nach eigener Auskunft über abstrakte Algebra mehr als 28 Jahre gelehrt.

⁴⁰gefördert von der NSF, s.o.

⁴¹mit ISETL 3.0

Vor Erprobungsbeginn wurden die Studenten sowohl auf die erhofften Wirkungen als auch auf die zu erwartende höhere Arbeitsbelastung durch die zusätzliche Arbeit am Computer hingewiesen. Die Kooperations-Gruppen bestanden aus jeweils 3-4 Studierenden, wobei leistungsstarke Personen über die Teams verteilt wurden und zudem in jedem Team mindestens eine Person PC-Erfahrung hatte. In den ersten beiden Versuchen waren die Teams geschlechtsgemischt, im dritten Durchgang getrennt geschlechtlich zusammengesetzt. Nach SMITH erzielten die mixed-gender-Teams substanziell bessere Resultate. Insgesamt zeigt sich ein tieferes Verständnis der erworbenen Konzepte, die sich insbesondere in erhöhten Beweisführungskompetenzen niederschlugen. Allerdings erlaubte der reformierte Kurs wegen der PC-Einbeziehung nicht die volle thematische Abdeckung einer traditionellen Vorlesung zur Abstrakten Algebra.

Die Gruppen trafen sich 4-mal in der Woche offiziell, dabei in der Anfangsphase der ersten zwei Wochen ausschließlich⁴² im PC Labor. Die Abfolge war danach *PC-Interaktion* (A) gefolgt von einer zweimaligen *Kurs-Interaktion* (C, C) sowie *Übungen* (E) im PC-Labor. Die mathematische Konzeptbildung wurde jeweils durch PC-Aktivitäten („A-Phase“) angeregt und zwar „with minimal explanation beforehand“. Im Kurs („C-Phase“) wurden Aktivitäten zur Verfeinerung der mentalen Konstruktionen und zu einem mehr formalen Verständnis gestellt, die durch traditionelle Hausübungen („E-Phase“) zur Festigung ergänzt wurden. Die Klassen-Interaktion beschreibt SMITH als einen „modifizierten Sokratischen Dialog“. Der Instruktor gab Darlegungen zu einem Thema, führte formale Definitionen ein oder fasste die Ergebnisse studentischer Arbeit zusammen. Gelegentlich bewies der Dozent einige der mathematischen Sätze oder die Studenten formulierten eigene Sätze bzw. suchten Gegenbeispiele.

Ratschläge zum Lösen der gestellten Probleme wurden nicht gegeben. Stattdessen wurde eine Fragekultur geschaffen, die eine möglichst weitgehende eigene Lösungssuche forcierte. Jeder Frage an den Dozenten sollte intensives eigenes (Gruppen)Bemühen vorausgehen. Fragen an den Dozenten wurden daher i.d.R. lediglich mit Gegenfragen beantwortet⁴³. Vor der (formalen) Einführung bzw. Behandlung allgemeiner Konzepte wie Gruppe o.ä. wurden von den Studenten informell zugehörige Beispiele am PC untersucht.

SMITH gibt dazu folgendes

Beispiel. Es soll der Begriff des *Inversen eines Elementes* mental mit Hilfe von ISETL konstruiert werden.

Ü: Definiere \mathbb{Z}_{12} und die Funktion `inv` auf \mathbb{Z}_{12} , die das additive Inverse eines Elementes von \mathbb{Z}_{12} produziert.

```

Z12 := {0..11};
inv := func(x);
      if x in Z12 then

```

⁴²Grund war die notwendige Einarbeitung in die Software ISETL und das PC-System. Dies entspricht auch meinen Erfahrungen, s.u.

⁴³„Dr. Smith, ich möchte Ihnen eine Frage stellen, damit Sie mir eine Frage stellen können und ich herausfinden kann, was ich eigentlich zeigen will.“

```

    return (choose g in Z12 | (x + g) mod 12 = 0);
end;
end;

```

Teste die Funktion durch Berechnen des additiven Inversen von 2, 5, 6, 11 und 0.

```
inv(2); inv(5); inv(6); inv(11); inv(0);
```

Verwende die angegebene Funktion, um folgende Fragen zu beantworten.

Was ist das Inverse des Inversen von 2? Was ist das Inverse des Inversen von 5?

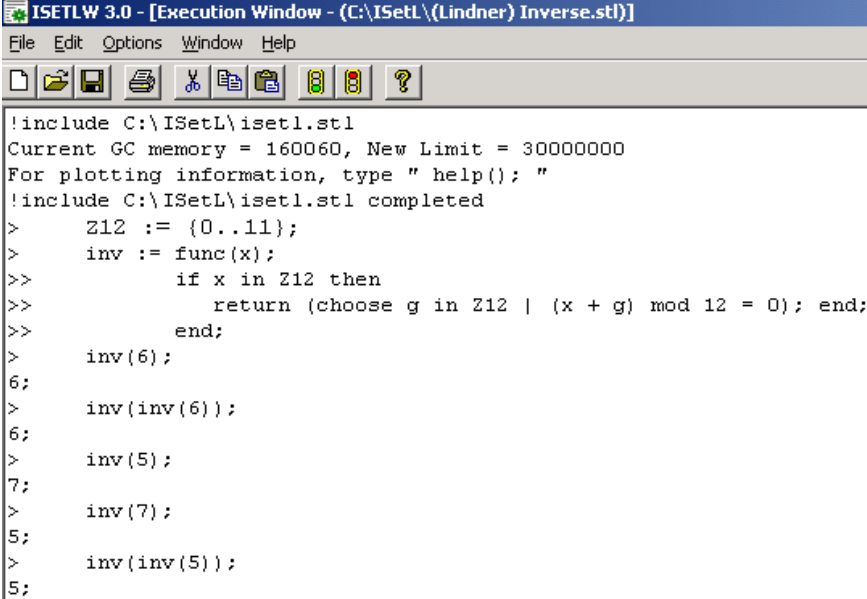
```
inv(inv(2)); inv(inv(5));
```

Was ist die Summe von 6 und seinem Inversen?

Was ist die Summe von 11 und seinem Inversen?

```
(6 + inv(6)) mod 12; (11 + inv(11)) mod 12;
```

Eine mögliche erste Interaktion zeigt folgender ISETL-Bildschirmauszug, vgl. Abbildung 2.7.



```

ISETLW 3.0 - [Execution Window - (C:\ISetL\Lindner) Inverse.stl]
File Edit Options Window Help
!include C:\ISetL\isetl.stl
Current GC memory = 160060, New Limit = 30000000
For plotting information, type " help(); "
!include C:\ISetL\isetl.stl completed
> Z12 := {0..11};
> inv := func(x);
>>   if x in Z12 then
>>     return (choose g in Z12 | (x + g) mod 12 = 0); end;
>>   end;
> inv(6);
6;
> inv(inv(6));
6;
> inv(5);
7;
> inv(7);
5;
> inv(inv(5));
5;

```

Abbildung 2.7: Informelle Erfahrungen zum Begriff des Inversen mit ISETL

Kommentar: Die Inversenbildung wird dabei programmsprachlich als eine ISETL-Funktion repräsentiert, die zu einem vorgegebenen Element $x \in \mathbb{Z}_{12}$ ein geeignetes Element $g \in \mathbb{Z}_{12}$ sucht (mit Hilfe der system-immanenten Funktion `choose`, die nach einer erfolgreichen Existenzprüfung eine willkürliche Auswahl aus der Kandidatenmenge trifft), dessen Summe mit x bei Division durch 12 den Rest 0 läßt. Die nachfolgenden Tests stellen Erfahrungen für die Lernperson im Umgang mit der Funktion `inv` bereit. Man beachte die programmiersprachliche Repräsentation von $x \in \mathbb{Z}_{12}$ als „`x in Z12`“ und den Operator „`|`“ der *Mengenkomprehension*, welcher der üblichen mathematischen Notation entspricht und die Sprechweise „...mit der Eigenschaft, dass ...“ programmiersprachlich abbildet. \square

Beispiel: Thematisierung der Inversenbildung im CAS MuPAD

Zum Vergleich sei eine mentale Konstruktion des Konzeptes des Inversen mit MuPAD demonstriert. Man beachte im Folgenden, dass die (blaue) Systemantwort bei der aktuellen Vollzugshandlung einer Lernperson jeweils konkret entsteht, während sie im vorliegenden Text für den Leser schon fertig zur Betrachtung vorliegt. Die Konstruktionshandlungen mit ihren mentalen Wirkungen auf die Objektbildung „Inverse“ sind daher „beim reinen Lesen“ des Bildschirmauszugs in Abbildung 2.8 nur zu erahnen.

Aktion & Prozessvorstellung Inverses: Zeile #1# konstruiert die zu betrachtende Menge Z12 mit Hilfe des MuPAD-Sequenzoperators \$ durch Hinschreiben des ersten und letzten Elementes - das gedankliche Konstrukt erzeugt aber in der CAS-Antwortzeile die komplett zu Ende gedachte Menge: der menschliche Beobachter erfasst dies mit dem Auge und sieht seinen eigenen geistigen Entwurf bestätigt:

```

MuPAD Pro - [(Lindner) Inverse.mnb]
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Notebook Debug Extras Fenster Hilfe

• Z12:=0..11; #1#
  0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

• (2 + y) mod 12 $ y in Z12 I #2#
  2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 0, 1

• f:=y->(2 + y) mod 12 #3#

• f(y) $ y in Z12 #4#
  2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 0, 1

• f(y) $ y in Z12 #5#
  2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 0, 1

• g:=(x,y)->(x + y) mod 12 = 0 #6#
  (x, y) -> x+y mod 12 = 0

• g(2,5), g(2,11), g(5,6), g(5,7) #7#
  7 = 0, 1 = 0, 11 = 0, 0 = 0
  
```

Abbildung 2.8: Inversenbildung I: die definierende Gleichung als 2-stelliger Funktionsterm

Zeile #2# repräsentiert die Suche nach dem Inversen von 2 in der Menge Z12; der Term links des Sequenzoperators stellt dabei den Term dar; dies wird in #3# als Funktionsterm notiert und in #4# auf Z12 ausgewertet.

Der funktionale Zusammenhang einer Zahl und seines Inversen über eine definierende Gleichung wird in #6# und #7# angebahnt; hierzu ist ein Prozess-Verständnis des Konzeptes Funktion notwendig bzw. wird hier aufbauend konstruiert, das 2-stellige Funktionen einschließt, s.o.

Objektvorstellung Inverses: Die programmtechnische Konstruktion von `inv2` (die „2“ erinnert an eine 2-stellige funktionale Beziehung) in #8# als *wahrheitswertige* Funktion⁴⁴

⁴⁴Dazu wird die bewertete Relation in die Funktion `bool` eingesetzt; diese gibt den *Wahrheitswert* für

```

MuPAD Pro - [(Lindner) Inverse.mnb]
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Notebook Debug Extras Fenster Hilfe

• inv2 := (x,y)->bool( (x+y) mod 12 = 0) #8#
  (x, y) -> bool(x+y mod 12 = 0)

• inv2(2,5), inv2(2,10) , inv2(5,6), inv2(5,7) #9#
  false, true, false, true

• inv3 := (x,y,m)->bool( (x+y) mod m = 0) #10#
  (x, y, m) -> bool(x+y mod m = 0)

• inv3(5,6,12), inv3(5,7,12), inv3(5,7,11) #11#
  false, true, false

• select($0..11, y->bool( (5+y) mod 12 = 0)) #12#
  7

• inv1:=x->select($0..11,y->bool((x+y) mod 12 = 0)) #13#
• inv1(5) #14#
  7

• inv1(inv1(5)) #15#
  5

```

Abbildung 2.9: Inversenbildung II: die definierende Gleichung als wahrheitswertiger 2-stelliger Funktionsterm sowie die reflexive Abstraktion vom Modul

$inv2: \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \{true, false\}$ mit zwei Eingaben erlaubt die Feststellung des Inversseins (nämlich als `true` oder `false`) zweier Elemente aus \mathbb{Z}_{12} zueinander, vgl. #9# in Abbildung 2.9.

In #10# und #11# wird mental konstruiert, dass das Inverssein zusätzlich abhängig ist von dem betrachteten Modul, d.h. vom zu Grunde liegenden Restklassenring – die zugehörige Funktion wird 3-stellig: `inv3`.

Die kritische mentale Kontruktion des Inversen wird in #12# konkret am Beispiel des Inversen der Zahl 5 in \mathbb{Z}_{12} angebahnt und in #13# allgemein abgeschlossen: die Makro-Funktion `select` filtert aus der Menge \mathbb{Z}_{12} diejenigen Elemente aus, auf welche das durch die angegebene *anonyme*⁴⁵ Funktion beschriebene Prädikat zutrifft. Die mentale Prozessbildung abschließend abstrahiert man den Selektionsprozess #12# durch Substituieren der Konstanten 5 durch eine Variable. Die resultierende *einstellige* Funktion `inv1` konstruiert damit das Schema der Inversenbildung innerhalb des CAS: die für den mathematischen Begriff des Inversen konstitutive Eigenschaft spiegelt sich konstruktiv in der Programmiersprache und schafft dadurch die Möglichkeit als mentales Objekt in der Wissendomäne der Lernperson repräsentiert zu werden. Insofern wird – vermittelt durch die Sprache des CAS – der Wissenerwerb eines mentalen Konstruktes vollzogen. #13# setzt im übrigen ersichtlich eine tragfähige Schemavorstellung des Funktionskonzepts voraus. Der `choose`-Befehl von ISETL wird als Selektionsprozess („Filtern“) mittels einer Prädikatfunktion

die aktuelle Belegung zurück.

⁴⁵d.h. man hat der Prädikatsfunktion gar keinen Namen gegeben, da sie nicht weiter referenziert wird, sondern vielmehr nur lokal im Aufruf von `select` interessiert.

```

• operator("~", inv1, Postfix, 1000): #16#
• 5~ #17#
  7
• 5~~ #18#
  5
• 5+5~, 5+(5~), 5+(5~) mod 12 #19#
  2, 12, 0
• inv_1:=(x,m)->select($0..m,y->bool((x+y) mod m=0)) #20#
• inv_1(10,12) #21#
  2
• inv_1(inv_1(10,12),12) #22#
  10

```

Abbildung 2.10: Inversenbildung III: reflexive Abstraktion der Inversenbildung `inv1` zu einem Operator mit einstellbarer Priorität

rekonstruiert. Der MuPAD-Funktion `select` realisiert im Hintergrund den zugehörigen Existenz-Quantor, der Novizen bekanntlich erhebliche Verständnisprobleme bereitet. Über die materialisierte Codestrecke im CAS kann man im Anschluß verständnisvoll reden und Verstehensprozesse auslösen, über diffuse „innere“ Vorstellungen dagegen nicht.

Inversen-Schema: Wie in der Mathematik üblich, kann die Inversenbildungsfunktion (als Materialisierung des Prozesses) sprachlich als einstelliger Postfix-Operator (z.B. mit dem hier gewählten freien Symbol `~`) notiert werden: genau dies rekonstruiert `#16#` in der Syntax des CAS MuPAD. Die Zeilen `#17#` und `#18#` demonstrieren dies, siehe Abbildung 2.10.

Zeile `#19#` fokussiert einige Subtilitäten und gibt Anlass zu weiteren Beobachtungen z.B. nach der Frage der *Priorität des Operators* „`~`“, dessen Bindung hier für den Novizen unerwartet *nach* der von „`+`“ kommt: $5+5\sim = (5+5)\sim = 10\sim = 2$. Diese Priorität von „`~`“ läßt sich durch Wahl eines anderen Gewichts in `#16#` (Prioritätswert ist hier auf 1000 gesetzt) ändern. Jedenfalls ist mit dem Einkapseln der Funktion `inv1` in einen Operator `~` der mentale Konstruktionsprozess des Wissenskonzeptes Inverse(nbildung) zu einem ersten Abschluss gebracht und *das Schema des Inversen* ist i.S.d. APOS-Theorie *thematisiert*.

Kurzum: das thematisierte Inversenschema rekonstruiert den Inversen-Operator aus einer 1-stelligen Funktion (‘Inverses von ...’), die wiederum aus der Prozessvorstellung einer 2-stelligen Relation (‘`x` ist das Inverse von `y`’) destilliert wurde. Dies ist i.S.v. DÖRFLER zugleich eine mögliche „hypothetische Lerntrajektorie“ zur Inversenbildung.

Anmerkungen:

1. Die hier skizzenhaft vorgetragene Thematisierung der Inversenbildung will also kein schülergemäßes Lernarrangement vorschlagen, sondern lediglich als Lernumgebungskern eine mögliche genetische Dekomposition im Wissensbildungsprozess für das mathematische Konzept Inverse aufzeigen. Es sollte aber sichtbar geworden sein, dass das CAS MuPAD eine sinnvolle Meta-Sprache bildet, innerhalb derer auch Schüler und Schülerinnen konstruktiv Wissen ausbilden können und dieses Wissen notational unterstützt finden. Der vorgestellte APOS-Ansatz mit (einem anzupassenden A.C.E.-Lernzyklus) kann sich daher für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht als tragfähig erweisen.
2. In den lediglich einzeiligen Codeschnipseln `inv2` und `inv1` wurde das zu erwerbende mathematische Wissen zur Inversenbildung CAS-sprachlich materialisiert und zur Wissenskonstruktion vorbereitet. Diese wurden mathematik-nah funktional repräsentiert; auf die Verwendung allgemeinerer Prozeduren (mit dem Schlüsselwort `proc`) wurde wegen des höheren „bürokratischen“ Programmieraufwandes und des zugehörigen mentalen Aufwandes verzichtet. Prozeduren im eigentlichen Sinne werden in dieser Arbeit ausschließlich zur Abstraktion von Verfahren eingesetzt. ISETL bietet dagegen lediglich die Prozedur-Variante mit `func` an.

Nicht der Erwerb von Programmierkenntnissen steht im Zentrum, sondern die verständige Nutzung jener mächtigen Sprach- und Ausdrucksmöglichkeiten des CAS, die kleinschrittiges Programmieren (und Denken) nicht erforderlich machen.

3. Man beachte den Unterschied in der Kommunikation des Nutzers eines modernen CAS und einer mathematischen interpretierten Programmiersprache wie ISETL. Die Antworten von MuPAD erfolgen „zwei-dimensional“ in möglichst starker Anlehnung an die mathematische Hochsprache. Die Lernperson wird daher en passant in die mathematiksprachliche Symbolik eingeübt. Da die Bezeichnungssyntax vom Experten(system) CAS oft auch vorgegeben wird, findet zugleich eine Einübung in semi-professionelle Routinen statt (User als Semi-Experte). Auf Details hierzu gehe ich unter der Frage der Eignung gewisser CAS für den konstruktiven Lernprozess gemäß der APOS-Theorie näher ein.
4. Varianten des A.C.E.-Zyklus mit antizipierten genetischen Dekompositionen des Lerngegenstandes findet man z.B. in der Konzeption der *hypothetischen Lerntrajektorie* von SIMON (auch: DÖRFLER) oder dem Konzept des „*generic organizer*“ von TALL [195].

Zum Design von Lernumgebungen im A.C.E-Zyklus nach COTTRILL

Als Beispiel betrachte man einen Auszug aus der Linearen Algebra von COTTRILL⁴⁶. Das Lehrmaterial liegt den Studierenden als Online-Buch vor. Es beginnt in jedem Unterkapitel mit ca. 10 Aufträgen für die A.-Phase. Danach folgen mathematische Überlegungen

⁴⁶Diese Veröffentlichung erschien erst nach Abschluß meiner Vorarbeiten im Jahre 2001; sie zeigt die prototypische Gestaltung von Lehr-Lern-Material der APOS-Gruppe.

2.1 Vectors

Activities

1. (a) Define the set $\mathbf{K} = \mathbf{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ in ISETL.
 (b) Write an ISETL func `add_scat` that accepts two elements of \mathbf{K} and returns their sum mod 5.
 (c) Write an ISETL func `mult_scat` that accepts two elements of \mathbf{K} and returns their product mod 5.
2. (a) Define $V = (\mathbf{Z}_5)^2$, that is, the set of all 2-tuples with components from \mathbf{Z}_5 in ISETL. How many elements are there in V ?
 (b) Write an ISETL func `vec_add` that accepts two elements, $[v_1, v_2]$ and $[w_1, w_2]$ of V and returns the tuple $[(v_1 + w_1) \bmod 5, (v_2 + w_2) \bmod 5]$.
 (c) Write an ISETL func `scal_mult` that accepts an element k of \mathbf{Z}_5 and a tuple $[v_1, v_2]$ from V , and returns the tuple $[(kv_1) \bmod 5, (kv_2) \bmod 5]$.
3. Define the tuples $v = [2, 3]$, $w = [1, 1]$, and $u = [0, 3]$ in ISETL. Use your funcs defined in Activities 1 and 2 to determine whether the following tuples are the same.
 - (a) $v + w$ and $w + v$.
 - (b) $(u + v) + w$ and $u + (v + w)$.
 - (c) $v + v$ and $2v$.
 - (d) $-1v$ and $-v$.
 - (e) $v + -1v$ and $v - v$.
 - (f) $2(3v)$ and $(2 * 3)v$.
 - (g) $2(v + w)$ and $2v + 2w$.
4. How is the following code different from the func `vec_add` you wrote in Activity 2? What assumption does this code make about u and v ?


```
va := |v, w -> [(v(i) + w(i)) mod 5 : i in [1..#v]]|;
```

CHAPTER 1. FUNCTIONS AND STRUCTURES

```

      return x + a;
    end;
  end;

```

Predict the results of the following ISETL statements:

```

add_a(3); add_a(3)(5); add_a(3)(2); add_a(7)(4);
f3 := add_a(3); f3(5); f3(2);
f7 := add_a(7); f7(4);

```

11. Write down an ISETL func `compose` which takes as input two ISETL funcs f and g and returns a func representing their composition; that is, the func `compose` returns a func which for each input x returns $f(g(x))$. Use your func to compose some of the funcs previously defined in the Activities, and study the resulting new funcs.

Discussion

Funcs and Their Syntax Options

The notion of function is fundamental to every area of mathematics. A function has to do with transforming an input value, or a collection of input values, into a single output value. In ISETL there are several ways to represent functions, one of which is the func. What kinds of inputs are used in the funcs of Activity 1? What kinds of outputs are used? A func processes (transforms) the input to obtain an output. The syntax of funcs is designed to describe these processes. There are a variety of processes demonstrated in the funcs of the activities. Let us look at the function of Activity 1(e) again:

```

inv := func(x);
  if x in Z6 then
    return choose g in Z6 | (x * g) mod 6 = 1;
  end;
end;

```

Funcs must have a header line, a list of statements for ISETL to process, and an end statement. The header line for a func usually starts naming the

Abbildung 2.11: A.C.E.-Zyklus am Beispiel der Linearen Algebra von COTT-RILL et al.: verkleinertes Original der Seiten 32(A), 34(C) des Online-Buches

für die C.-Phase, die typischerweise mit vielen kognitionsstiftenden Zwischenfragen⁴⁷ unterbrochen sind. Diese Phase ist äußerlich im Text als „*Diskussion*“smaterial (für den Kurs mit/ohne Lehrperson) erkennbar und greift auf die wissenskonstruktiven Vor-Erfahrungen aus der A.-Phase zurück. Die abschließende E.-Phase umfasst i.d.R. wieder je ca. 10 (oft innermathematische) Aufgaben, siehe z.B. Abbildung 2.12.

In Activities 5–15, you wrote or explained several ISETL funcs that checked various properties of vector addition and scalar multiplication. Systems in which these particular properties are satisfied turn out to be very useful in the study of linear algebra. We will explore such systems further in the next section.

Exercises

1. Compute the following vector expressions for

$$\mathbf{v} = (2, 3), \mathbf{u} = (-3, 1), \text{ and } \mathbf{w} = (8, 0)$$

- (a) $\frac{1}{2}\mathbf{w}$
- (b) $\mathbf{v} + \mathbf{u}$
- (c) $\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w}$
- (d) $2\mathbf{v} + 3\mathbf{u} + \mathbf{w}$

Abbildung 2.12: E.-Phase im ACE-Zyklus, vgl. COTTRILL a.a.O. 35(E).

Das zitierte Buch umfasst auf 389 Seiten in 7 themenzentrierten Kapiteln ca. 420 ausgewählte speziell konstruierte Aufträge und Aufgaben.

2.1.4 Adaptionen des A.C.E.-Lernzyklus

A.C.E.–Fallstudie von BALAS et al. In einer Fallstudie zur Analysis-Reform erprobten Andrew BALAS et al. [9] an der Universität von Wisconsin-Eau Claire (USA) über 4 Semester (2 Jahre) eine Abkehr vom traditionellen 4:0⁴⁸–Instruktionsformat. Die Kusstärken in Analysis I schwankten dabei zwischen 15–35 Personen, fielen also in die Größenordnung deutscher Grundkurse der gymnasialen Oberstufe.

Diesen reformierten Kursen wurde zunächst die Konzeption DUBINSKY’s zusammen mit einem A.C.E.-Zyklus im 2:2⁴⁹–Format zu Grunde gelegt; als mathematische Programmierumgebung wurde ISETL benutzt, für symbolische Berechnungen das CAS Derive.

Die Befunde zeigten, dass die teilnehmenden Studierenden die PC-Labors positiv annahmen und die damit vermittelten inhaltliche Konzepte verstanden hatten. Ihren Erfolg schrieben die Studierenden aber größtenteils der kooperativen Kleingruppen-Arbeit zu. Parallele anonyme Einstellungserhebungen wiesen zwiespältige Einstellungen⁵⁰ nach. Die

⁴⁷ohne Antworten; sie sind gedacht für die Gruppenphasen ohne PC-Arbeit

⁴⁸d. h. 4 Einzelstunden Vorlesung, keine PC-Nutzung, keine kooperativen Lernformen

⁴⁹d. h. eine 2-stündige Vorlesung und 2 einstündige PC-Labs

⁵⁰Berichtet wird über geänderte Sichtweisen zum Entstehen von Mathematik, Mathematik als lohnende Beschäftigung mit positiver Faszination, von einem gewachsenen Verständnis für das Funktionskonzept,

Reaktion der Kollegen von BALAS war skeptisch verhalten, in Folgekursen wurden Mängel im händischen Rechnen beklagt.

In einer nachfolgenden Erprobung wurde das Format auf 3:2⁵¹-Format umgestellt und der A.C.E.-Zyklus durch einen *L.A.B.-Zyklus*⁵² ersetzt: Mit einer vorangestellten *Launch-Phase* wurde der Wunsch der Studierenden aufgegriffen, die PC-Aktionen durch einleitende „Überblicks-“Vorträge vorzubereiten. Ziele der Labor-Phase waren dann u. a. die in der Launch-Phase umrissenen Konzepte durch Explorationen und Experimentierhandlungen zu erkunden sowie ein mathematisch reichhaltiges Lernarrangement für die Darstellung, Erkundung und Reflexion mathematischer Konzepte der Analysis anzubieten. Zugleich sollte das Lösen komplexer Probleme mit Technologie-Unterstützung geübt und die Vermittlung von Technologie-Fertigkeiten für Folgeveranstaltungen bereit gestellt werden.

Die Befunde zeigten, dass die Studenten das revidierte 3:2-Format dem 2:2-Format vorzogen. Ein multiple-choice-Test verglich die in einer traditionellen 4:0-Vorlesung vermittelten Kenntnisse und Fertigkeiten mit denen in dem 3:2-Format erworbenen⁵³. *Die Ergebnisse zeigten eine signifikant bessere Performance der Studenten aus dem reformierten 3:2-Format.*

Befunde zur Genderproblematik. Nach SHELBY et al.⁵⁴ stellen Frauen eine unterrepräsentierte Gruppe in den Informatikwissenschaften dar. Überdies wurde das Selbstvertrauen als ein signifikanter Faktor für die Prognose der mathematischer Leistung für Frauen erkannt. SHASHANI⁵⁵ fand, dass dieses Selbstvertrauen bzgl. Mathematik positiv korreliert zu dem Selbstvertrauen in Informatik. GOULET & CLAY⁵⁶ sehen Hinweise darauf, dass Frauen auf PC-Labor-Erfahrungen nicht auf die gleiche Weise wie Männer reagieren, vermutlich teilweise wegen der Computer-Umgebung selbst. Es wird daher vermutet, dass eine Lehr-Lern-Umgebung, in der Studenten eine direktere Verbindung zwischen der Vorlesung und dem PC-Labor vorfinden, für weibliche Studenten hilfreich sein könnten. Der Vergleich ihrer Umfrage-Fakten weist jedenfalls darauf hin.

*Als kritische Komponente für Akzeptanz und Lernerfolg eines CAS-Lernarrangements stellt sich das Design auch unter lerntheoretischer Perspektive heraus.*⁵⁷ Danach wird es als förderlich angenommen, wenn die Studenten direkter zwischen Vorlesung und PC-Erkundung

einer positiven Wertschätzung von Selbstfinden, Selbstlösen, Selbstdenken. Manche Studierende lernten aber auch lieber nach dem Lehrbuch, glaubten „nicht viel von den Computern zu lernen“, wünschten konzeptuelle Erläuterungen vor den PC-Labor Aktivitäten.

⁵¹d. h. 3 Einzelvorlesungen und eine 2-stündige Laborveranstaltung

⁵²Launch-Aktivitäten-Build; die Build-Phase entspricht dabei der E-Phase aus dem A.C.E.-Zyklus.

⁵³Beide Kurse wurden im gleichen Semester vom gleichen Dozenten unterrichtet.

⁵⁴L. SELBY & K. RYBA & A. YOUNG: Women in computing: What does the data show? *New Zealand Journal of Applied Computing and Information Technology*, **2** (1998), no. 1, 74–81.

⁵⁵Lily SHASHANI: Gender differences in computer attitudes and use among college students. *J. Educational Computing Research* **16** (1997), no. 1, 37–51.

⁵⁶M. GOULET & J. CLAY: A comparison of student attitudes towards technology driven calculus activities versus technology flexible calculus activities. University of Wisconsin-Eau Claire, Preprint, 1999.

⁵⁷BALAS verweist auf Studien von M. PROSSER & K. TRIGWELL: Relations between perceptions of the teaching environment and approaches to teaching. *British Journal of Educational Psychology*, **67** (1997), 25–35.

wechseln können und die Dozenten die Zeitscheibe für PC-Arbeit und Kursarbeit somit flexibler einteilen können.

Diese Befunde wurden in meinem Unterrichtsdesign beachtet, vgl. § 3.

2.1.5 weitere Lerntheorien für einen CAS-gestützten Mathematikunterricht

Ich verweise kurz auf wenige weitere mögliche Lerntheorien, die für einen CAS-intensiven Unterricht empfohlen worden sind.

1. BUCHBERGER'S epistemologische Helix. Es handelt sich dabei um eine didaktische Leitlinie zum Erkunden einer bekannten mathematischen Wissensdomäne, die aber in erweitertem Sinne auch als eine Forschungsstrategie zum Erwerb von neuem mathematischen Wissen dient. Eine ausführliche Darstellung der Kreativitätsspirale⁵⁸ mit vielen Beispielen findet sich in [124, S. 81-123].

BUCHBERGER'S epistemologische Helix startet mit Problemstellungen oder der Betrachtung von Beispielen, an denen ein Lernender mathematische Phänomene beobachtet, eine Vermutung aufstellt oder eine Beweisidee gewinnt. Wenn die Vermutung bewiesen ist, wird sie zu einem Theorem, d. h. einem argumentativ abgesicherten Lehrsatz im Rahmen einer Theorie. Enthält der Lehrsatz zusätzlich Formel- oder Verfahrenswissen, so kann dieses Wissen in einem Algorithmus implementiert werden. Dieser Algorithmus kann auf neue Daten, andere Beispiele oder weiterführende Problemstellungen angewandt werden. Damit erhebt sich die epistemologische Helix zur nächsten Windung. BUCHBERGER'S epistemologische Helix empfiehlt also zur Genese von Wissen oder zur Lösung von Problemen den Durchlauf von 4 Phasen, siehe Abbildung 2.13.

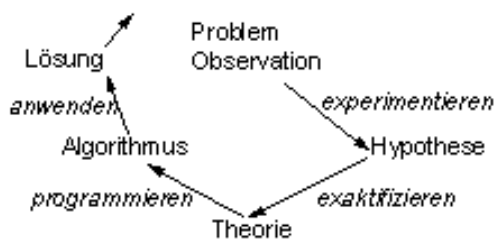


Abbildung 2.13: BUCHBERGER'S epistemologische Helix zur Wissensgenese

Jede Phase besitzt typische Aktivitäten.

⁵⁸in HEUGEL at al. statt 'epistemologische Helix'

1. die *heuristisch-experimentelle Phase*: Beispiele studieren, Hypothesen formulieren, Lösungsstrategien planen, intuitive Konzeptionen ausbilden, induktives Schließen, CAS-unterstützt experimentieren, Trial & Error-Situationen überwinden, Repräsentationen wechseln, Modellierungen vornehmen, etc.
2. die *theoretisch-exaktifizierende Phase*: Beweise führen, Begriffe (exakt) definieren, Schritte begründen, begriffliche Zusammenhänge und Abhängigkeiten klären, Voraussetzungen bedenken, Theorieverständnis erweitern, Wissen vernetzen, Argumentationsvermögen schärfen, etc.
3. die *algorithmisch-operative Phase*: komplexe Rechnungen ans CAS auslagern, Prozeduren implementieren, Effizienz überdenken, etc.
4. die *interpretativ-anwendende Phase*: Realitätsbezug herstellen, Resultate interpretieren, Problemstellung abändern bzw. öffnen, alternative Modellierungen heranziehen, Vergleiche anstellen, Idealisierungen aufdecken, etc.

Didaktische Verkürzungen der epistemologischen Helix sollten i. Allg. zur Sicherung einer ausgewogenen mathematischen Allgemeinbildung vermieden werden. Sie bestehen u.a. im

- *Auslassen der Exaktifizierung* bei stark genetischer Wissensgewinnung (nur abwechselndes Durchlaufen der Phasen „1-4-1-4-..“).
Beispiel: Überbetonung von Plausibilität und Intuition
Gefahr: keine theoretisch-systematische Absicherung bzw. Einordnung in die Wissensbasis
- *Überspringen der Experimentalphase* im „Beh.-Bew.-Ritual“ („2-3-2-3-..“).
Beispiel: zu abstrakt theorieorientierter Unterrichtsgang
Gefahr: durch fehlende Erfahrungsbasis oder realitätsnahe Anwendungsbezüge kommt es zum Wegbrechen der Sinnhaltigkeit von Mathematik
- *Reduzieren der Exaktifizierung* bei zu *starker Kalkülorientierung* („1-3-4-1-3-4-..“).
Beispiel: Fokussierung auf CAS-Experimente, Algorithmen und Rechenfertigkeiten
Gefahr: Verkümmern heuristischer und metakognitiver Kompetenzen

Anmerkung: In ähnlichem Sinne formuliert GRAEBE [107, S. 26] :

Eine solche Zunahme des Abstraktionsniveaus [...] ist das Resultat eben dieser Erkenntnisspirale, die die Mathematik wie jede andere (ernstzunehmende) Wissenschaft durchläuft: In einer Fülle von *Experimenten* werden *Regelmäßigkeiten* aufgedeckt, die im Weiteren zu *Gesetzmäßigkeiten* verdichtet werden und schließlich in weiter ausgebauter und systematisierter Form als *Kalkül* für neue Experimente zur Verfügung stehen. Die Durchführung von Experimenten setzt die Beherrschung des aktuellen Kalküls voraus, die Aufdeckung von Regelmäßigkeiten im gewonnenen Erfahrungsmaterial zusätzlich eine geschulte Beobachtungsagabe, gepaart mit einem guten Schuss Intuition. Will man allerdings die erkannten Regelmäßigkeiten zu Gesetzmäßigkeiten verdichten, reichen Fertigkeiten im Umgang mit dem aktuellen Kalkül nicht mehr aus, sondern man muss in der Lage sein, *über diesen Kalkül* selbst zu reflektieren. Eine solche Zunahme des Abstraktionsniveaus ist oft damit verbunden, dass man einzelne Elemente des aktuellen Kalküls in Sinneinheiten zusammenfasst und mit diesen als Ganzes operiert, wofür sich symbolische Methoden anbieten.

2. Die Gerüstmethode von KUTZLER. Die Gerüstmethode⁵⁹ ist eine von B. KUTZLER [142, S. 35] bzw. [143, S. 18], speziell für den CAS-Einsatz empfohlene Artikulation des Mathematikunterrichts. KUTZLER [143, S. 18] definiert:

Allgemein bezeichne ich mit Gerüstmethode jede pädagogisch begründete Folge von Verwendung und Nicht-Verwendung eines Computers, Taschenrechners oder Taschencomputers für das Trivialisieren, Experimentieren, Visualisieren oder Konzentrieren im Sinne von Automation oder Kompensation.

Bei der erwünschten Unterstützung traditioneller Lehrziele des Mathematikunterrichts durch CAS argumentiert KUTZLER mit zwei Metaphern:

- ein CAS wird als „intellektuelles Trainingsgerät“ in Analogie zum „Hometrainer“ als Trainingsgerät für den Erwerb körperlicher Fertigkeiten betrachtet
- der Aufbau mathematischer Kompetenz (Wissen und Fertigkeiten) wird mit dem *Bau eines Hauses* und der Gebrauch der CAS-Technologie mit dem *unterstützenden Einsatz eines Baugerüsts* verglichen. Wird z. B. in einem ersten Schritt eine mathematische Fertigkeit A unterrichtet und trainiert, so wird in einem zweiten Schritt eine auf A aufbauende Fertigkeit B unterrichtet, wobei der Schüler das CAS zur Lösung von Teilproblemen verwendet, die die Fertigkeit A voraussetzen. Im zweiten Schritt kann sich der Schüler also auf den Erwerb der „höheren“ Fertigkeit B *konzentrieren*.

Intellektuelle Fitness und die Ausbildung von Problemlösefähigkeiten sind nach KUTZLER zwei wesentliche Ziele des Mathematikunterrichtes, d. h. die Ausbildung der Schüler in den „Disziplinen“ Denksport und Problemlösen. Mangelnde Fitness bzw. verminderte „intellektuelle Gesundheit“ manifestiert sich dabei z. B. in Symptomen wie Gedächtnis- und Konzentrationsschwäche. Zur Steigerung der intellektuellen Fitness kann die CAS-Technologie die Funktion eines Trainingswerkszeuges („mathematischen Hometrainers“) übernehmen. Ziel beim Problemlösen ist dagegen die Fähigkeit, gegebene Werkzeuge zur Lösung eines Problems zu nutzen - unter sinnvollem Einsatz der CAS-Technologie.

KUTZLER sieht im CAS also ein *Werkzeug*, das mögliche Unsicherheiten des Lerners auf der handwerklichen Ebene *kompensiert* bzw. Fehler verhindert oder im Lernprozess auf die hauptsächlichen Lernschritte zu *konzentrieren* hilft, vgl. Abbildung 2.14.

Zur Demonstration der Nutzung eines *CAS als Konzentrationshilfe* i. S. v. KUTZLER sei hier eine klassische Problemstellung (nach KUTZLER) aus der *Linearen Algebra mit MuPAD* gezeigt.

Beispiel: Abstandsberechnung mit elementargeometrischen Methoden.

Zeigen Sie, dass der Punkt $A=(1,2,3)$ nicht auf der Ebene $Eb: x+z=5$ liegt und berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Ebene Eb.

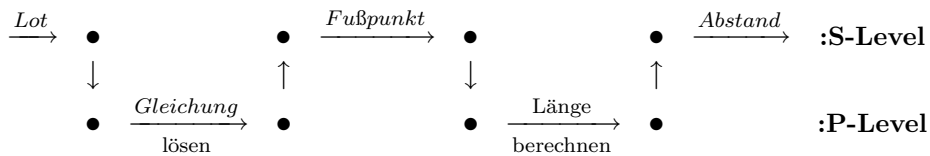
⁵⁹engl.: scaffolding-method



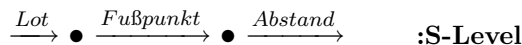
Abbildung 2.14: abstützende CAS-Kompensation nach Kutzler [a.a.O., S. 34]; für die Zeit des Erlernens einer höherwertigen Fertigkeit B wird ein CAS-Gerüst über dem ggfs. „unvollständigen Stockwerk“ niedrigerwertiger Fertigkeiten A errichtet.

Bei der Lösung dieser Aufgabe liegt der Fokus auf dem neu zu lernenden methodischen Verfahren „Lotgerade aufstellen → Lotfußpunkt F berechnen → Abstand P zu F berechnen“. Alles andere, wie z. B. das Lösen einer Gleichung in einer Variablen, die Länge eines Vektors zu berechnen etc. sind dabei handwerkliche Grundvoraussetzungen, welche die Schüler beherrschen (sollten). Die folgende Graphik verdeutlicht die operativ begründeten Unterbrechungen der gedanklichen Zugfolge im Lösungsablauf bei einer CAS-freien „traditionellen“ Lösung im Vergleich mit einer CAS-gestützten Lösung: die CAS-freie Lösung unterbricht wiederholt die Lösungsstrategie auf dem (S)chema-Niveau zwecks Zwischenrechnung auf dem (P)rozess-Niveau.

Traditionelle Lösung der Problemstellung:



CAS-Lösung:

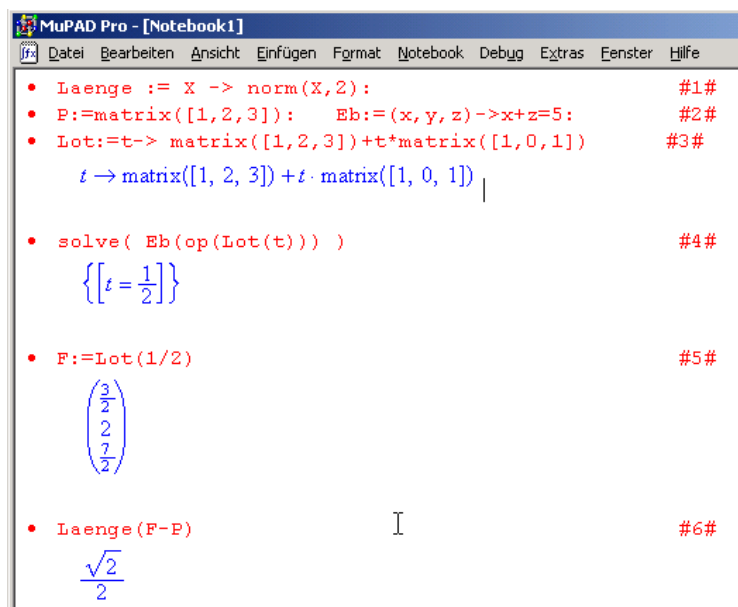


Eine CAS-Lösung vermeidet den wiederholten Niveau-Wechsel von der Strategie (S)- zur Operativen (P)-Ebene und komprimiert die Lösungshandlung auf der Schema-Ebene.

Die CAS-Lösung im Detail zeigt Abbildung 2.15.

Kommentar zu Abbildung 2.15. #1# definiert die Längenfunktion mittels der MuPAD-Funktion `norm(.,2)`. #2# definiert den Datensatz der Aufgabenstellung. In #3# wird mit dem Lot durch P in Richtung des Normalvektors der Ebene Eb das erste Lösungsobjekt konstruiert. #4# löst („solve“) die Gleichung, die durch Einsetzen der Lotgleichung $\text{Lot}(t)$ in die Ebenengleichung entsteht. Man beachte, dass die konkrete Gestalt der Gleichung verdeckt bleibt und lediglich implizit formuliert wird. Das Ergebnis wird vom CAS aber rückgemeldet und ergibt nach Einsetzen in die parametrisierte Lotgeradengleichung in #5# den nach Plan gesuchten Fußpunkt F . #6# berechnet automatisch den gesuchten Abstand.

Wie man sieht, braucht der Lernende nicht zwischen handwerklichen Fertigkeiten wie „Gleichung lösen“ oder „Abstand berechnen“ und dem methodischen Handlungsplan zu



```

MuPAD Pro - [Notebook1]
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Notebook Debug Extras Fenster Hilfe

• Laenge := X -> norm(X, 2): #1#
• P:=matrix([1, 2, 3]): Eb:=(x, y, z)->x+z=5: #2#
• Lot:=t-> matrix([1, 2, 3])+t*matrix([1, 0, 1]) #3#
  t -> matrix([1, 2, 3]) + t · matrix([1, 0, 1])

• solve( Eb(op(Lot(t))) ) #4#
  { { t = 1/2 } }

• F:=Lot(1/2) #5#
  ( 3/2 )
  ( 2 )
  ( 7/2 )

• Laenge(F-P) I #6#
  sqrt(2)/2

```

Abbildung 2.15: CAS-vermittelte *Konzentration* auf die zentrale strategische Handlungsfolge der vorgelegten Problemstellung.

mäandrieren, sondern kann sich ganz auf den Lösungsprozess *konzentrieren*. Eine störende Unterbrechung der Handlungsfolge durch Springen zwischen übergeordneten („Planen“) bzw. untergeordneten („Rechnen“) Handlungsebenen („Stockwerke“) wird vermieden; dies setzt allerdings eine entsprechende CAS-Kompetenz voraus. □

Im Sinne der APOS-Theorie wird hierbei eine Schemavorstellung (de-)thematisiert, die CAS-technische Realisierung kommt aber auf algorithmischer Ebene *ohne Module*⁶⁰ aus und benutzt lediglich einzelne Funktionsaufrufe, d. h. die *Gerüstmethode* von KUTZLER ist *als funktionales Programmieren* elementarer mathematischer Algorithmen rekonstruierbar.

2.2 Zur Legitimation eines computerintensiven allgemeinbildenden Mathematikunterrichts

Bei der *computerintensiven* Nutzung von CAS⁶¹ im Mathematikunterricht stellt sich zuerst das Problem der Legitimation in einem auf *Allgemeinbildung* zielenden Unterricht an öffentlichen Schulen. Insbesondere ist zu fragen, welcher spezifische Nutzen für den Wissenserwerb und die Verständnisförderung im Mathematikunterricht aus der Verwendung von CAS erwächst. Dieser Legitimationsfrage gehen insbesondere SCHNEIDER & PESCHEK [171] sowie ausführlicher [172] nach. Eine deutschsprachige Ausarbeitung findet sich in

⁶⁰dies wird weiter unten genauer elaboriert

⁶¹im Folgenden abkürzend für *Computeralgebrasystem*

der Habilitationsschrift SCHNEIDER [183, S. 13–39], eine Zusammenfassung der wesentlichen Überlegungen in dem Beitrag [133].

Die dort vorgetragene Argumentation lässt drei wesentliche Begründungen erkennen:

- CAS ist ein *Mediator zur Stiftung von kultureller Kohärenz* zwischen den Generationen
- die Kommunikation mit einem CAS ist ein *Modell für die Kommunikation* mit einem menschlichen Experten
- CAS erlaubt die *Auslagerung des Operativen* und damit einen emanzipierten Umgang mit Wissen.

Diese Argumente sollen hier in ihren für uns wichtigen Aspekten kurz nachgezeichnet werden.

SCHNEIDER [183] nimmt zur Legitimation eines CAS-orientierten Mathematikunterrichts vor allem explizit Bezug auf das Allgemeinbildungskonzept von HEYMANN⁶², welches sieben zentrale Aufgaben von öffentlichen Schulen benennt: *Lebensvorbereitung*, *Stiftung kultureller Kohärenz*, *Weltorientierung*, *Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch*, *Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft*, *Einübung in Verständigung und Kooperation* sowie die *Stärkung des Schüler-Ichs*.

Während eine intensive Nutzung von CAS im Mathematikunterricht von Teilen der mathematischen Community und der Lehrerschaft als potentielle Gefährdung des Kulturgutes Mathematik und seiner Weitergabe an die nächste Generation betrachtet wird, fördert und unterstützt der Einsatz von CAS nach SCHNEIDER's Argumentation gerade die Stiftung dieser kulturellen Kohärenz zwischen den Generationen. Denn ein *CAS wirke als Mediator zwischen Innovation und Tradition* im Mathematikunterricht: zwar führten CAS einerseits, insbesondere durch die Möglichkeit zur Auslagerung bzw. Trivialisierung von operativem Wissen und Können, einen Bruch mit dem bisher (von Eltern) erlebten bzw. (von Lehrpersonen) gestalteten Unterricht herbei, andererseits würde ein Verzicht auf CAS im Mathematikunterricht eine Missachtung der technologischen Entwicklung und damit einen Bruch mit der aktuellen mathematischen Gegenwartskultur bedeuten, vgl. dazu SCHNEIDER [182, S. 540 ff].

2.2.1 Kommunikation zwischen Experte und Laie als Leitlinie eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts

Eine hochgradig differenzierte Gesellschaft ist gekennzeichnet von Kommunikations- und Verständigungsprozessen von Laien mit Experten und von Experten untereinander auf diversen Wissensdomänen. Daher wird kulturelle Kohärenz zwischen den Mitgliedern einer Gesellschaft und den Generationen in ihr insbesondere durch die Kompetenz des Umgangs von Laien mit Experten gestiftet: Der (z. B. mathematisch) *allgemeingebildete, aber*

⁶²Dieses liegt auch den NRW-Richtlinien und Lehrplänen von 1999 für Mathematik auf der Sekundarstufe II am Gymnasium und der Gesamtschule zu Grunde.

fachgebietspezifische Laie soll adäquate Fragen an den gebietspezifischen (ansonsten aber auch „nur“ allgemeingebildeten) Experten stellen können und danach in der Lage sein, die Antworten des Experten auf die ursprüngliche Fragestellung zu beurteilen, um sinnvolle Konsequenzen ziehen zu können. Dazu sind nach R. FISCHER „Grundwissen“ und „Reflexion“ die Schlüsselkompetenzen des Laien: Grundwissen ist „Voraussetzung für die Verständigung mit Experten“, Reflexion ist „notwendig für die Beurteilung der Expertisen“. Das zur Erstellung einer Expertise notwendige *operative Spezialwissen* braucht beim Laien daher nicht vorzuliegen, es ist *an den Experten* (z. B. an den Arzt, Juristen, Mathematiker, das CAS) *ausgelagert*. Die angestrebte mathematische Allgemeinbildung – und nach SCHNEIDER folglich auch die Rolle von CAS im Mathematikunterricht – soll sich daher nach FISCHER und HEYMANN am Kommunikationsmodell

$$\text{Experte} \rightleftharpoons (\text{allgemeingebildeter}) \text{ Laie}$$

orientieren.

Diesem Allgemeinbildungsmodell liegt FISCHER's Auffassung von Mathematik zu Grunde, die er in der nachfolgenden „metaphorischen Gleichung“ komprimiert formuliert hat

$$\text{Mathematik} = \text{Darstellen} + \text{Operieren} + \text{Interpretieren}$$

und die von SCHNEIDER [183, S. 17] wie folgt interpretiert wird:

Mathematik ist ein Wechselspiel zwischen Darstellen (Materialisieren abstrakter Sachverhalte), regelhaftem Operieren und Interpretieren; mathematisches Tun meint Interaktion zwischen Mensch und Darstellung(sform) mit dem Ziel, Aussagen über abstrakte Gegebenheiten zu gewinnen.

PESCHEK und SCHNEIDER [183, S. 26] bzw. PESCHEK [172, S. 11] verweisen für ihr Allgemeinbildungsmodell der Wissensdomäne Mathematik bezüglich seiner zugeordneten mathematischen Kompetenzbereiche auf folgende Einteilung von FISCHER, in der die zu erwerbenden Fachkompetenzen in die drei Bereiche *Grundwissen*, *operatives Wissen* und *Können* sowie *Reflexionsfähigkeiten* aufgeschlüsselt werden:

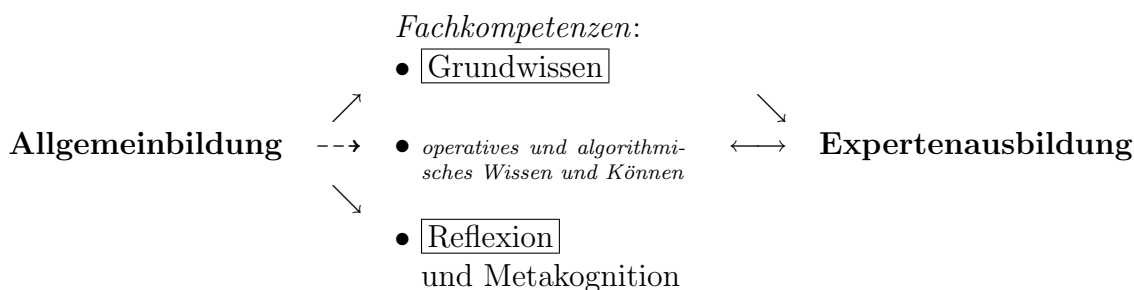


Tabelle 2.1: Allgemeinbildungsmodell und mathematische Kompetenzbereiche nach FISCHER/PESCHEK/SCHNEIDER. *Eingeraht*: Schlüsselkompetenzen; *kleingedruckt*: Expertenwissen. – Durch \longleftrightarrow sei angedeutet, dass der Umfang des für eine mathematische Allgemeinbildung als unverzichtbar erachteten operativen Wissens im Mathematikunterricht in der gegenwärtigen didaktischen Diskussion noch nicht abschließend ausgehandelt ist.

Dazu heißt es resümierend bei SCHNEIDER [183, S. 28] :

Die *Kommunikation zwischen Lai/inn/en und Expert/inn/en* kann sowohl im Hinblick auf inhaltliche Schwerpunktsetzungen⁶³ wie auch im Hinblick auf die Unterrichtskultur eine wesentliche *Orientierung für den allgemeinbildenden (Mathematik-)Unterricht* sein: Die *Kompetenzschwerpunkte* des allgemeingebildeten Laien [...] liegen beim *Grundwissen* und der *Reflexion*, für die Tätigkeit der Expert/inn/en sind darüber hinaus vor allem weitergehende Kompetenzen im Bereich des Operierens erforderlich; *Schule und Unterricht* können als *Modell der Interaktion* und *Vermittlung zwischen Expert/inn/en und Lai/inn/en* (Allgemeinheit) gesehen werden.

Betrachtet man die zeitlichen Unterrichtsanteile, die auf die Ausbildung der drei Kompetenzbereiche bzw. auf die Anteile an Darstellen, Operieren und verstehendem Deuten im traditionellen CAS-freien Mathematikunterricht entfallen, so zeigt die folgende qualitative Einschätzung nach SCHNEIDER [181, S. 134] eine unangemessene Überbetonung des Operativen:

<i>gegenwärtig:</i>		<i>angestrebt:</i>
<input type="text"/>	Repräsentation	<input type="text"/>
<input type="text"/>	Operation	<input type="text"/>
<input type="text"/>	Interpretation	<input type="text"/>

Tabelle 2.2: geschätzte Verteilung der effektiven Unterrichtszeit auf die Kompetenzbereiche im gegenwärtigen Mathematikunterricht Österreichs

Wird eine ausgeglichene Verteilung der zeitlichen Ressourcen im Mathematikunterricht angestrebt, so besteht eine Möglichkeit darin, diejenigen operativ-kalküllastigen und zeitintensiven Handlungen zurückzudrängen bzw. ganz zu unterdrücken, die keinen Erkenntniszuwachs versprechen und daher vom CAS durchgeführt werden können. In diesem Sinne können und sollten operative Handlungen an das CAS „ausgelagert“ werden.

2.2.2 Outsourcing des Operativen

Die Idee der *Auslagerung des Operativen als didaktisches Prinzip*⁶⁴ wird erstmals von PESCHEK [170] formuliert und erneut in PESCHEK [172, S. 14–16] aufgegriffen⁶⁵. Nach PESCHEK ist ausgelagertes (auch: mathematisches) Wissen genuiner Bestandteil von Alltag und Wissenschaft und ein wesentlicher Grund für Leistungsfähigkeit und Effizienz einer hochindustrialisierten Gesellschaft: „Mathematik ist relativ gut gesichertes, sozial ausgehandeltes, kodifiziertes Wissen, das in besonderem Maße eine Trennung von Verstehen und Tun zulässt. [...] und] auch dann funktioniert, wenn der Anwender schon längst nicht mehr weiß warum.“⁶⁶

⁶³auch curricularer Designentscheidungen

⁶⁴Dieses Auslagerungsprinzip wird in 2.3 in Abgrenzung zum Black-Box-Prinzip noch genauer diskutiert.

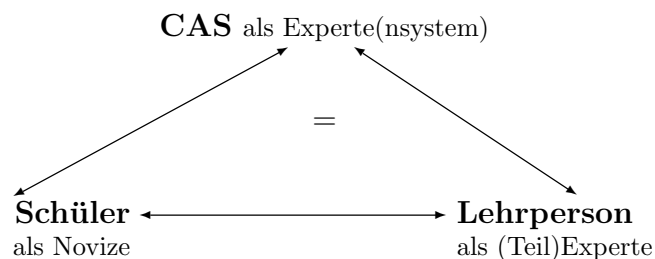
⁶⁵vgl. auch SCHNEIDER [183, S. 33–36]

⁶⁶vgl. PESCHEK [170, S. 406]

Das Auslagerungsprinzip wird in der Anlage am Beispiel der Lösung einer Abituraufgabe der Zentralen Abiturprüfung im Fach Mathematik (Grundkurs) in Thüringen 1998 gezeigt. Dabei wird erkennbar, wie mathematik-affin die CAS-interne Syntax ausgebildet und damit für den mathematischen Experten annähernd selbst-erklärend ist. Der Umfang der dabei an das CAS auslagerbaren operativen Lösungsanteile (wie Ableitungen und Integrale berechnen, Lösungsmengen bestimmen, Graph zeichnen etc.) liegt bei ca. 80 % der 30-punktigen Bewertungsvorgabe dieser Abituraufgabe. Allerdings wird die *Kalkülkompetenz* des Bearbeiters durch seine *Kommunikationskompetenz mit dem Experten(system) CAS ersetzt*: es müssen die syntaktisch und semantisch richtigen Anfragen formuliert und die Antworten weiterverarbeitet werden, um zufriedenstellende Ergebnisse zu erzielen. Die zugehörigen notwendigen Denk- und Planungsprozesse lassen sich auf eine „Mathematik auf Knopfdruck“ nicht reduzieren. Die CAS-Lösung umfasst mit 18 Zeilen aber weniger Textzeilen als der vorgelegte Aufgabentext.

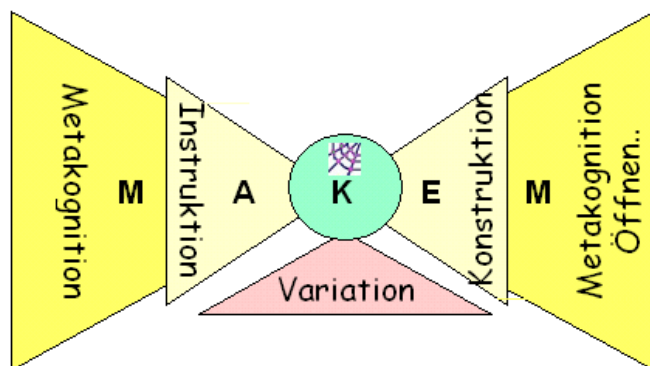
Gleichzeitig verweist dieses Beispiel auf die Möglichkeit weiterer Abstraktionen, die ihren Niederschlag in Programmierkompetenzen des Benutzers finden (können): Überschreibt man nämlich den angegebenen Funktionsterm durch einen anderen, so bleiben weite Teile der Aufgabenstellung automatisiert lösbar und lassen einen Algorithmus (Modul) *allgemeine Kurvendiskussion* formulieren. Auf einer höheren Ebene kommt es somit zur *Auslagerung mentaler Prozesse*, die über die Möglichkeit der Auslagerung des rein Operativen hinausweisen. Darauf wird im Zusammenhang der Diskussion des sog. Modularitätsprinzips später eingegangen.

Zusammenfassung. Als Leitvorstellung eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts dient in der folgenden Untersuchung das Kommunikationsmodell Laie – Experte. Bei einem computerintensiven Mathematikunterricht mit Benutzung eines CAS als Expertensystem ergibt sich somit das folgende *CAS-didaktische kommunikative Diagramm*:



Während die Untersuchung der Kommunikationsrelation *Schüler* \rightleftharpoons *Lehrer* Gegenstand der traditionellen Mathematikdidaktik war, tritt nunmehr die Notwendigkeit einer didaktischen Reflexion der Relationen *Schüler* \rightleftharpoons *CAS* und *Lehrer* \rightleftharpoons *CAS* hinzu.

Darüber hinaus verspricht ein computerintensiver Mathematikunterricht mit CAS in besonderer Weise für die Lern-, Verstehens- und Verständigungsprozesse im Mathematikunterricht förderlich zu sein. Diesbezügliche Ausführungen werden von SCHNEIDER [183, S. 7] allerdings explizit ausgespart:

Abbildung 2.16: Zur Konstruktion der M².A.K.E.-Lernarrangements

Meine Untersuchungen und Überlegungen in dieser Arbeit fokussieren auf das Lehrangebot und die Unterrichtsgestaltung mit CAS; [...] Diese Lernprozesse selbst und deren Reorganisation in einem CAS-unterstützten Unterricht sind nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Während SCHNEIDER den Fokus auf die curriculare Begründung von CAS legt und i. W. Repräsentationsformen in Bezug auf CAS studiert, sind wir hier an einer unterrichtsrelevanten und verständnisorientierten Lehr-Lern-Theorie für CAS interessiert. Daher werden die konkreten unterrichtlichen Vorschläge von SCHNEIDER et al. erst nach der Formulierung einer CAS-gemäßen Lerntheorie und der daraus ableitbaren Leitlinien (Prinzipien) eines CAS-intensiven Mathematikunterrichts diskutiert und untersucht.

2.3 Zyklische M².A.K.E.-Lernarrangements zur Orchestrierung eines CAS-intensiven Mathematikunterrichtes

Nach den Befunden von SMITH, BALAS et al. wurde für die nachfolgende Gestaltung der CAS-Lernarrangements für die schulische Lineare Algebra der A.C.E.-Zyklus adaptiert und insbesondere durch metakognitive Aktivitäten⁶⁷ in der Launch-Phase sowie der Rückblicksphase gerahmt. Daraus resultierte folgende Design-Entscheidung, siehe Abbildung 2.16.

Nach einer kurzen Launch-Phase zum Zwecke der Orientierung arbeiten die Lerngruppen paarweise und selbstständig-kooperativ an den *Aktivitätselementen* des vorgelegten Lernarrangements. Dabei werden mathematische Phänomene betrachtet, Reflexionen angeregt, Metakognitionen ausgelöst und es wird mathematisch im CAS experimentiert. Ort der Aktivitäten ist der PC-Raum. Nach dem Vorschlag von BALAS findet *auch der Klassenunterricht im PC-Raum* statt – jedoch bei abgeschaltetem PC. Dadurch ist das CAS

⁶⁷zu den Design-Prinzipien siehe § 2.4.

jeweils zuschaltbar, wenn die Lernumstände dies sinnvoll erscheinen lassen. Die Plenumsphase („whole Class teaching“) mit Präsentationen, (Fehl-)Vorstellungsdiskussionen und Konzeptfokussierungen findet erst nach ausreichender Zeitgabe nach den vorangegangenen Erkundungen statt. In der *Erprobungs-Phase* des neu generierten Wissens und Könnens werden die CAS-Worksheets wiederum paarweise selbstständig-kooperativ an zunehmend offenen Problemstellungen bearbeitet, Vernetzungen gebildet sowie Lernprodukte hergestellt. Lernort ist ebenso der PC-Raum, aber auch die häusliche Umgebung unter Nutzung von Email-Kommunikation. Insgesamt resultiert eine halboffene instruktionsgesteuerte CAS-Lernumgebung⁶⁸.

Jede „ $M \rightarrow A \overset{K}{\circlearrowleft} E \rightarrow M$ “-Phase mit den zugehörigen Instruktionen, Konstruktionen, Reflexionen und Metakognitionen dauert ca. 3-5 Unterrichtsstunden. „Hausaufgaben“ werden in die CAS-Sheets integriert, insgesamt entsteht das Lerngefühl eines selbsttätigen, selbstgesteuerten und kooperativen Lernens mit freier Verwaltung des eigenen Zeitbudgets. Auch die Auswahl der Aufgaben aus dem Aufgabenpool („k aus n“) ist freigestellt.

Die Folge vernetzter thematischer CAS-Lernarrangements mit denkbaren Öffnungen (z. B. Erkundung mathematischer Eigenschaften der Inversen A^{-1} und deren Begründung vs. Programmierung des Gauss-Algorithmus mit automatisierter Berechnung der Inversen) präsentiert sich der Lernperson so als „Online-Lernbuch“. Der gesamte Lernparcours ist damit von anderen Lerngruppen/Lehrpersonen reproduzierbar, er ist zeitoffener⁶⁹ und durch die Orientierung an professionellen Arbeitsmustern frustrationsärmer.

Die Betonung der Metakognitionsphasen mit informellen Vor-Überlegungen (advanced organizer) und fokussierenden Nachbetrachtungen bilden jeweils wünschenswerte „metakognitive Klammerungen“ der A.C.E.-Lernsequenzen; dies bringe ich hier mit der Notation M.A.K.E.M bzw. $M^2.A.K.E$ ⁷⁰ zum Ausdruck.

Die so konzipierte Orchestrierung des Unterrichtsgeschehens soll fruchtbare emanzipatorische Auswirkungen auf Lernende und Lehrende zeitigen und in der reduzierten Notwendigkeit der Geschehenskontrolle Zugzwänge und Fehlroutrinen des klassischen kurztaktigen Unterrichts vermeiden helfen.

DUBINSKY's Konzept des A.C.E.-Zyklus steht hier in der Nähe von WITTMANN's Auffassung der Mathematikdidaktik als *design science*, vgl. DUBINSKY [58, S. 2] : „Die Herausforderung für den Lehrer besteht darin, Aktivitäten zu designen, die sie [die Lerner; W.L.] anleitet, die notwendigen reflektiven Abstraktionen auszuführen, um die in Frage stehenden Konzepte zu konstruieren.“

⁶⁸DANKWERTS und VOGEL sprechen (unabhängig von der Nutzung eines CAS) von „angeleiteten“ Erkundungen.

⁶⁹i. S. v. nicht an die übliche 45-min-Taktung gebunden

⁷⁰Im Wort „make“ wird zugleich die *Aktionsorientiertheit* des Ansatzes herausgestellt.

2.4 Design-Prinzipien eines CAS-intensiven epistemologisch-orientierten Mathematikunterrichts

Während die APOS-Lerntheorie einen Theorierahmen für einen CAS-intensiven Mathematikunterricht abgibt und im (M.)A.C.E.-Zyklus ein zugehöriges Organisationsmodell vorschlägt, fehlen leitende Prinzipien einer darauf abgestimmten Unterrichtsartikulation, d. h. Leitlinien für die Ausformung der einzelnen CAS-Phasen. Aus der Konzeption der APOS-Theorie lassen sich aber einige didaktische und methodische Prinzipien ableiten, die die Konstruktion der nachfolgenden CAS-Lernarrangements zur Linearen Algebra bestimmt haben. Solche Prinzipien erlauben sowohl eine Analyse des Designs vorgelegter Lernarrangements als auch die Planung eigener. Auf Prinzipien einer allgemeinen (d. h. CAS-freien) Mathematikdidaktik verweisen wir auf WITTMANN [211], der einen genetischen, ebenfalls handlungsorientierten Ansatz auf Grund der Lerntheorie von PIAGET vorstellt.

Im Folgenden gebe ich eine Begründung für die Auswahl dieser leitenden Prinzipien und vergleiche sie mit einigen weiteren in der CAS-Literatur vorhandenen.

Diese Prinzipien bündeln zugleich eigene Erfahrungen und Beobachtungen im Umgang mit CAS in den letzten 10 Jahren und im Umgang mit Programmiersprachen in Kursen über Mathematik und Informatik seit ca. 20 Jahren. Sie versuchen diese Erfahrungen zu fokussieren und für Dritte nach-erfahrbar zu machen. Sie sind im Misserfolgsfalle verwerfbar und im Erfolgsfalle optimierbar. Im Sinne der Aktionsforschung sind diese Erfahrungen mit konkretem Unterricht in Worksheets konserviert und von Kollegen im Nachvollzug verifizierbar bzw. revidierbar. Sie verstehen sich als Startdesign eines zyklisch zu optimierenden Entwurfs. Die zugehörigen Kurssequenzen explizieren diesen Entwurf, machen ihn reproduzierbar und reliabel.

Nach WITTMANN [211, S. vi] „ist die Konstruktion von zusammenhängenden Problem- und Aufgabensequenzen, bei deren Bearbeitung die Schüler mathematische Einsichten gewinnen“ von zentraler Bedeutung⁷¹ i. S. einer *Mathematik-Didaktik als Design Science*.

Unsere Frage ist daher zunächst, welche zusätzlichen *CAS-spezifischen* Leitprinzipien die Konstruktion substanzieller CAS-Lernarrangements steuern sollten. In diesem Kapitel werden daher einige (z. T. aus der Literatur bekannte) Prinzipien eines CAS-intensiven Mathematikunterrichts zusammen getragen, geeignet ergänzt und ihre mögliche Eignung zum Design von APOS-basierten konstruktivistischen Lernarrangements reflektiert.

Im Folgenden formuliere ich die acht CAS-Unterrichtsprinzipien

- der *virtuellen Erfahrungsverankerung*,
- der *metakognitiven Klammerung*,
- des *inkrementellen CAS-Spracherwerbs*,
- der *literaten Programmierung*,
- der *strukturierten Repräsentation* mathematischen Wissens *in Modulen*,

⁷¹eines genetischen Unterrichts

- der *moderaten Modellierung*,
- der *limitierten kognitiven Ladung*,
- des „*SONG*“-Prinzips zwecks Repräsentationsformwechsels.

2.4.1 Das Prinzip der virtuellen Erfahrungsverankerung

In der Aktivitätsphase des A.C.E-Zyklus unterscheide ich zunächst zwei hauptsächliche Handlungsformen, die den Einsatz von CAS im Lernprozess aus verschiedenen didaktischen Perspektiven nutzen: nämlich zum *Vertrautmachen* und *Vertrautwerden* mit mathematischen Objekten, mathematischen Phänomenen und zugehörigen CAS-Strukturen. Dies weitet zugleich den Blick auf eine experimentelle Mathematik mit CAS.

■ Vertrautmachen.

Höhere mathematische Konzepte wie z. B. der Begriff eines Vektors und zugehörige Operationen wie z. B. die Bildung einer Linearkombination von Vektoren sind oft einer direkten Beobachtung nicht zugänglich. Geeignete CAS-Lernarrangements sollten daher in der Aktivierungsphase gezielt wichtige Erfahrungen anbieten, die für nachfolgende mentale Konstruktionen oder Problemstellungen die Bedeutungshaltigkeit absichern. Das angebotene Beobachtungs- und Bearbeitungsmaterial sollte dabei i. Mathematikunterricht S. von WITTMANN beziehungshaltig sein und das Vorverständnis dort anreichern, wo es auf intuitiver Basis aus der Vorerfahrung der Schüler nicht vorliegt. Diese *medial gewonnenen, virtuellen Erfahrungen* können dann als *Substitut für die fehlenden realen Erfahrungen oder realen Handlungen an konkreten Objekten* dienen, die ein lernendes Subjekt an Vorerfahrungen sonst mitbringt. Im Sinne von BAUERSFELD wird also im individuellen Lerner ein subjektiver Erfahrungsbereich sowie in seiner umgebenen sozialen Lerngruppe ein kollektiv ausgehandelter intersubjektiver Erfahrungsbereich ausgebildet.

Die A-Phase im M²AKE-Lernzyklus muss daher nicht notwendig problemorientiert ausgestaltet sein, sondern sollte zunächst eine wünschenswerte Vertrautheit im Umgang mit abstrakten Objekten (wie z. B. Matrizen oder Vektoren) bei gleichzeitig erfolgreicher intuitiver Handhabung der Software und der zugehörigen syntaktisch korrekten symbolischen Repräsentationen herstellen, d. h. *mathematische Objekte oder Phänomene und die assoziierten CAS-Repräsentationen werden simultan in der gleichen CAS-Lernumgebung studiert*. Die *Beobachtung der realen Auswirkungen eigener Handlungen an den symbolischen Objekten des CAS* am Bildschirm wirkt auf den Lernenden wie Handlungen mit konkreten Materialien einer virtuellen Realität und bereitet so die mentale Konstruktion mathematischer Objekte und Prozesse – medial vermittelt – vor.

Die erhebliche Bedeutung der Erfahrung, die durch den Umgang mit konkreten Repräsentanten gewonnen wird, betont auch HEFENDEHL [120, S. 3] bei der Wissensgenese im Geometrieunterricht für die Bildung von Größen wie Länge oder Fläche:

Die jeweiligen Größenwerte sind gedankliche Konstrukte; diese bilden sich in einem dynamischen Wechselspiel zwischen dem Hantieren mit konkreten Materialien [...], einer zugehörigen begriffli-

chen Beschreibung und dem Umgang mit Bezeichnungssystemen zur Darstellung [...]. So steht die Erfahrung mit Größen, die durch den Umgang mit konkreten Repräsentanten vermittelt wird, erkenntnispsychologisch am Anfang [...]. Es ist Aufgabe des Mathematikunterrichts, Lernanlässe zu schaffen, die das dynamische Wechselspiel zwischen experimenteller Erfahrung und theoretischer Betrachtung möglichst effizient in Gang setzen.

In diesem Sinne sollten auch CAS-Lernarrangements beim Erwerb höherer mathematischer Konzepte geeignete Lernanlässe bereitstellen. Die nötigen virtuellen Erfahrungen werden dabei üblicherweise über Simulationen, Animationen, Interaktionen, etc. innerhalb von CAS-Worksheets ermöglicht. Die Lernenden sind dabei aktiv und engagiert beteiligt, Interesse und Freude werden evoziert und so werden sie auf die folgenden Frage- und Problemstellungen eingestimmt.

Wegen der fundamentalen Bedeutung der virtuellen Erfahrung für die A.P.O.S.-Theorie betrachten wir drei Beispiele.

Beispiel 1: funktionswertige Funktionen. Zu einer breit thematisierten Schemavorstellung⁷² des Funktionskonzeptes gehört auch die Kenntnis, dass Funktionen als Werte wieder Funktionen haben können. Zugehörige Erfahrungen lassen sich traditionell nur über Worterklärungen und Beispiele vermitteln, diese bieten aber keine Gelegenheit für eigene aktive Proberhandlungen. In geeigneten CAS kann man solche Vorstellungen nun virtuell anbahnen.

Ein *Beispiel* ist die Partialsummenbildung $PS: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, die jeder reellwertigen Folge $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (aufgefasst als Abbildung von der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen in die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen) die Folge ihrer Partialsummen $PS(s): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ zuordnet durch die Vorschrift $n \mapsto \sum_{i=1}^n s_i$. Ein Verständnis für diese Begriffsbildung lässt sich durch eine geeignete CAS-Interaktion vor einer eventuellen definitorischen Präzisierung einleiten, siehe Abbildung 2.17.

Kommentar: In #1# wird eine Folge s von Zahlen als MuPAD-Funktion erklärt und in #2# werden einige Folgenwerte berechnet. In #3# wird die Partialsummenprozedur mit der Variablen s (für die einzugebende Folge) definiert, die in #4# als Rückgabe⁷³-Wert die Funktion `n->_plus(s(i) $ i=1..n)` hat. Man beachte die *sinnfällige* syntaktische *Analogie* von MuPAD mit der mathematischen Nomenklatur. Die Systemantwort zum Aufruf #5# zeigt, dass MuPAD `PS(s)` tatsächlich als Funktion interpretiert. Von dieser Funktion kann der Lernende daher Werte berechnen lassen #6#; die Schreibweise `PS(s)(3)` reflektiert syntaktisch die richtige Prozessvorstellung und #7# demonstriert, dass man sogar die Folge, deren Partialsummenfolge man betrachten möchte, als anonyme Funktion in der ersten Variablen übergeben darf. Wie der letzte Aufruf zeigt, darf dabei für die freie Variable

⁷²in anderer Terminologie als reichhaltiges *concept image* (Tall/Vinner) bzw. als tragfähige *Grundvorstellung* (vom Hofe) bezeichnet

⁷³In MuPAD ist die letzte Anweisung im Prozedurkörper automatischer Rückgabewert, auch ohne explizites `return`. Man hätte in obiger Prozedur `PS` also auch ausführlicher schreiben dürfen `.. begin return(n->_plus(s(i) $ i=1..n)) end_proc .`

```

• s := j -> j*(j+1) #1#
  j -> j*(j+1)

• s(3), s(10), s(0) #2#
  12, 110, 0

• PS := proc(s) option escape; #3#
  begin n -> _plus(s(j) $ j=1..n) end_proc; #4#
  proc PS(s)...end

• PS(s) #5#
  n -> _plus(s(j) $ j = 1..n)

• PS(s)(3), PS(s)(10), PS(s)(0) #6#
  20, 440, 0

• PS(j -> j*j)(3), PS(x -> x*x)(3), PS(n -> n*n)(3) #7#
  14, 14, 14

```

Abbildung 2.17: Partialsummenbildung als Beispiel einer Funktion, deren Funktionswert eine Funktion ist. Skizze eines SelbstLernarrangements.

sogar der gleiche Name benutzt werden, wie in Zeile #4# für $PS(s)$ selbst, ohne dass das CAS (wie vielleicht der Lernende) Namenskonflikte vermeldet, siehe Abbildung 2.18.

#8# fokussiert hier den Lernenden darauf, dass die Partialsummenbildung PS nicht als 2-dimensionale Funktion aufzufassen ist und beugt somit – ohne Lehrerintervention – einer möglichen Fehlvorstellung vor. #9# und #10# machen klar, dass der naheliegende und sinnvolle Versuch, PS direkt mit einem zweifachen Funktionsoperator \rightarrow zu konstruieren, vom CAS-Interpreter (derzeit) nicht verstanden wird: PS muß technisch als Prozedur mit der Option `escape` erklärt werden. Allerdings ist es möglich, PS durch ein „Currying“⁷⁴ aus einer 2-dimensionalen Zuordnung zu gewinnen, vgl. #4# und #4#. Dieses Vorgehen ist auf Schulniveau jedoch nicht zu empfehlen. □

Beispiel 2: Die kanonische Isomorphie zwischen Matrizen und linearen Abbildungen.

Die kanonische Isomorphie $L: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ zwischen dem Vektorraum $\mathbb{R}^{m \times n}$ der reellwertigen Matrizen mit m -Zeilen und n -Spalten und dem Vektorraum der linearen Abbildungen von \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m spielt in der Linearen Algebra eine wichtige Rolle. Dieser Isomorphismus wird bei vorgegebener Matrix A über die kanonische Zuordnung $L_A: X \mapsto A * X$ vermittelt. Die mathematisch übliche Notation L_A mit Tiefstellung des Parameters A wird der Funktionsnotation $L(A)$ bzw. $L(A, \cdot)$ i. Allg. vorgezogen, letztere ist aber direkt im CAS formulierbar. Damit wird die folgende Kommunikation der Lernperson mit dem CAS möglich und vermittelt auch hier eine sinnhaltige virtuelle Anfängerfahrung vor einer konzeptuellen Begriffspräzisierung, siehe Abbildung 2.19.

⁷⁴ein Begriff der Programmiersprache SCHEME

```

MuPAD Pro - [(Lindner) Curry.mnb]
File Edit View Insert Format Notebook Debug Extras Window Help

• PS(s,3) #8#
      n -> _plus(s(j) $ j = 1..n)

• PS1 := s ->(n -> _plus(s(j) $ j=1..n)); #9#
      s -> n -> _plus(s(j) $ j = 1..n)

• PS1(s) (3) #10#
Warning: Uninitialized variable 'unknown' used
Error: Illegal operand [_plus]

• PS2:= fp::curry( (s, n) -> _plus(s(j) $ j=1..n) ) #11#
  proc PS2()... end

• PS2(s)
  proc()... end

• PS2(s) (3) , PS2(n->n*n) (3) #12#
  20, 14
|

```

Abbildung 2.18: Prozess des *Currying* einer binären Funktion $(x; y) \mapsto PS1(x, y)$ zu einer unitären Funktion höherer Ordnung $x \mapsto (y \mapsto PS1(x, y))$.

```

MuPAD Pro - [(Lindner) L(A)(X).mnb]
File Edit View Insert Format Notebook Debug Extras Window Help

• L := proc(A) option escape; begin X->A*X end_proc; #1#
  proc L(A) ... end

• L(A) #2#
      X -> A*X      I

• A:=matrix([[1,2],[3,4]]); B:=matrix([[ -1,1],[0,2]]); X:=matrix([5,6]); #3#
  ( 1 2 )
  ( 3 4 )

• L(A) (X); #4#
  ( 17 )
  ( 39 )

• L(A)+L(B); #5#
      (X -> A*X) + (X -> A*X)

• L(A)+L(B) (X), (L(A)+L(B)) (X), L(A) (X)+L(B) (X) #6#
  Fail, ( 18 ) ( 18 )
        ( 51 ) ( 51 )

```

Abbildung 2.19: zur kanonischen Isomorphie L zwischen Matrizen und linearen Abbildungen in Objektsicht

```

• 2*(L(A)+L(B))(X) , (2*L(A)+2*L(B))(X) #7#
      (36) (36)
      (102) (102)

• 2*(L(A)+L(B)) , (2*L(A)+2*L(B)) #9#
      2*(X -> A*X) + 2*(X -> A*X), 2*(X -> A*X) + 2*(X -> A*X)

• A:=matrix([[1,2,3],[4,5,6]]); #11#
      (1 2 3)
      (4 5 6)

• L(A)(X) #12#
      Error: dimensions don't match

• Y:=matrix([-1,-2,-3]), L(A)(Y) #13#
      (-1) (-14)
      (-2) (-32)
      (-3)

```

Abbildung 2.20: zur kanonischen Isomorphie L zwischen Matrizen und linearen Abbildungen, hier: absichtlich evozierte Fehlermeldungen

Kommentar: #1# definiert die Abbildung L in MuPAD, die jeder Matrix A die Abbildung L_A zuordnet, hier lediglich anonym notiert. Die vom CAS auf Anfrage $L(A)$ kommunizierte Antwort macht syntaktisch augenfällig, dass $L(A)$ eine Abbildung ist, die daher in #4# für einen Vektor X ausgewertet werden kann. #5# bzw. #8# machen klar, dass diese *Abbildungen als Objekte* addiert bzw. skalar-multipliziert werden können, wozu #6# bzw. #9# die Vorstellungen erweitert und ausschärft.

#11# bis #13# in Abbildung 2.20 präparieren den Lernenden durch die evozierten Fehlermeldungen des CAS auf die Beachtung der Dimensionen von Urbild- und Bildraum (im Unterschied zu der Zeilen- und Spaltenzahl des Vektorraumes der Matrizen) und bereiten so die anschließende C.-Phase vor. \square

Beide Beispiele weisen einige spezifische Vorteile eines CAS für das Sammeln virtueller aktivitätsbasierter Grunderfahrungen auf, die in der *prinzipiellen Unabhängigkeit von Lernort und Lernzeit* sowie der *beliebigen Repetierbarkeit der Lerntrajektorie* liegen. Wird das Worksheet nämlich über die aktuelle Unterrichtsstunde hinaus zur Verfügung gestellt, so kann die Lernperson die Lerngelegenheit erneut durchlaufen, so lange sie möchte und so oft sie es wünscht. Die angebotenen Grunderfahrungen können durch ihre Konservierung im Worksheet selbstständig oder mit einem Peer gefestigt werden. Im traditionellen Mathematikunterricht müssen die Lernanlässe üblicherweise in reglementiertem Zeitrahmen an vorgegebenen Orten von offiziellen Lehrpersonen jeweils aktuell organisiert angeboten werden; sie sind flüchtig, d. h. von der Lernperson nur in der vorgesehenen Zeitschiene erlebbar: Ein eigenständiges Nacherleben ist nahezu unmöglich. Über die hier angedeuteten emanzipatorischen Wirkungen eines CAS für Lernende und Lehrende wird unten Genauerer gesagt werden.

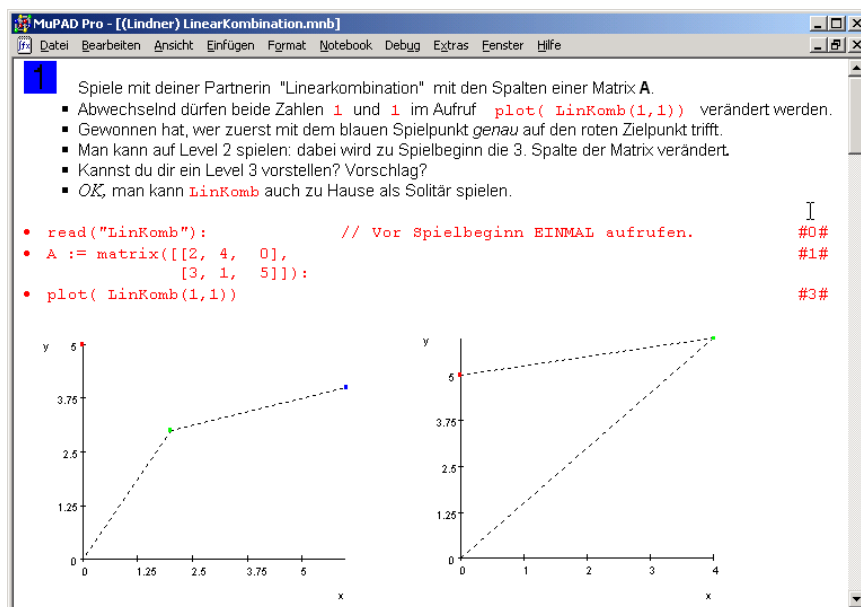


Abbildung 2.21: Spielhandlungen mit *Linearkombinationen als Vektorzug*; der Spieler muss gedanklich den grünen Spielstein längs *seiner* Bahn weit genug verschieben und den blauen Spielstein in *Gegen-*Richtung auf den roten Zielpunkt verschieben. Die Gewinnstellung im rechten Bild mit der Parameterwahl (2;-1) wurde hier zusätzlich einkopiert.

Das folgende Beispiel hat prototypischen Charakter für die von mir vorgeschlagenen CAS-Lernarrangements. Es möchte einerseits aufzeigen, *warum CAS für das Sammeln von Grunderfahrungen gegenüber traditionellen Lernarrangements in spezifischer Weise geeignet* sind und andererseits die nachfolgenden Prinzipien eines CAS-intensiven Unterrichts in Linearer Algebra motivieren.

Beispiel 3: CAS-Spielhandlungen zum Konzepterwerb „Lineare Abhängigkeit“ und „Linearkombination“. Das folgende CAS-Lernarrangement zum selbstständigen Wissenserwerb des Konzeptes der linearen Abhängigkeit von Vektoren wird von den Lernenden im Unterricht in Partnerarbeit als CAS-Parcours in einer Folge von Stationen durchlaufen. Diese Stationen sind innerhalb eines MuPAD-Worksheets arrangiert, eine äußere Unruhe erzeugende Rotation mit Stationen an verschiedenen Tischen wird daher nicht notwendig, vielmehr bleiben die Zweiergruppen während der gemeinsamen Aktivität konstant und bestimmen über Zeitscheibe und Aufenthaltsdauer jeder „Station“ innerhalb eines vorgegebenen Zeitrahmens selbstständig.

CAS eignen sich in besonderer Weise zur Programmierung von virtuellen *Spielhandlungen*, die ich gerne *als anregendes, intensives Aktivitätsformat* zu Beginn einer Konzeptbildung ansetze, um Grunderfahrungen und Grundvorstellungen anzubahnen, siehe Abbildung 2.21. *Kommentar:* In #0# wird die Programmierung der graphische Spielroutine als Black-Box⁷⁵

⁷⁵Dazu wird später Genaueres ausgeführt.

versteckt. Die Ausführung von #2# erzeugt die graphische Ausgangssituation: Der grüne Spielpunkt ist von der Spielperson identifizierbar⁷⁶ als erste Spalte der Matrix A (interpretiert als *Ortsvektor* mit dem grünen Punkt als Pfeilspitze), der blaue als die zweite Spalte (interpretiert als *Richtungsvektor*, d. h. als anschließende Zugrichtung im Sinne von „von Grün aus um 4 nach rechts und um 1 nach oben ziehen“) und der rote Zielpunkt als dritte Spalte von A . Die Zeichnung eines Kräfteparallelogramms wird unterdrückt, um die Situation nicht zu überfrachten. Die Abänderung der Spielregeln und weitere Aushandlungen bleiben als offene Aufgabenstellungen den Spielpartnern überlassen. Im letzten Auftrag wird die individuelle Möglichkeit zur Absicherung der virtuellen Erfahrungsbasis explizit angesprochen.

Didaktische Vorteile von Spielhandlungen zur Sicherung notwendiger Anfangserfahrungen vor einem Konzeptbildungsprozess liegen u. a. in der individuellen Aushandlung der Aktionsdauer durch die Spielpartner, in der sanften konzentrationsfördernden Konkurrenzsituation und in der intuitiven formelfreien Problemstellung, die eine unmittelbare Beobachtung der ausgelösten Phänomene in der virtuellen Realität gestattet. Verständnisprozesse kommen durch Aushandlungen und Interpretationsversuche des CAS-Outputs durch die Lernenden selbstständig in Gang. Die Lehrperson verbleibt in dieser Aktivitätsphase der Lernenden als Beobachter im Hintergrund und sammelt aus den Beobachtungen Fragestellungen für die C.-Phase; der Unterricht entfaltet sich ohne äußere Orchestrierung selbst. Ein Aktionsverständnis des Konzeptes Linearkombination ist somit in Form eines entdeckend-experimentellen Lernens angelegt.

■ Experimentieren.

Während tastende Proberhandlungen das CAS eher als *Spielzeug* nutzen, steht beim Experimentieren ein zielsätzliches methodisches Handeln im Vordergrund, welches das CAS als *Werkzeug* nutzt. Im Unterschied zum Vertrautmachen durch virtuelle Erfahrung als Vorstufe eines *Begriffsbildungsprozesses* zielen *virtuelle Experimentierhandlungen* schon stärker auf einen *Problemlösungsprozess*. Der Problemlösungsprozess selbst orientiert sich dabei am Wissenschaftsparadigma der empirischen Wissenschaften und den dort etablierten Methoden der Erkenntnisgewinnung und zugehöriger heuristischer Strategien, vgl. BUCHBERGER's epistemologische Helix. Dort hat das Experiment erkenntniskritischen Charakter. In Adaption dieser experimentellen Methode auf eine computer-unterstützte Mathematik schreiben HEUGL [124, S. 89] et al.:

Experimentieren heißt Beobachten unter kontrollierten Bedingungen. Zielloses Probieren bringt selten Erfolg⁷⁷. Ausgangspunkt für Tätigkeiten in dieser Phase: Ein Problem, experimentelles Material, Daten. Typische Denk- und Arbeitsweisen bei der Problemanalyse sind plausibles Schließen und Experimentieren. Daten müssen geordnet, Fragen präziser formuliert werden. Bei offenen Aufgaben müssen Fragen häufig erst gefunden werden. Ziel dieser Phase: Finden einer Vermutung. Danach wird häufig versucht, die Vermutung durch Tests zu erhärten.

⁷⁶Man könnte durch eine Plot-Option das Koordinatengitter ganzzahlig eichen; dies würde in der Startposition zwar die Ablesung erleichtern, aber bei nachfolgenden Zugversuchen die Spielfläche begrenzen, s. u. Abb. 75.

⁷⁷Dies ist m. E. ein zentrales Problem bei der Benutzung von dynamischer Geometriesoftware.

KAUTSCHITSCH vergleicht *mathematisches Experimentieren* mit den Experimenten in den Naturwissenschaften und kennzeichnet Experimentierhandlungen als „nicht zufälliges, sondern gezieltes Herbeiführen verschiedener mathematischer Situationen, die einen Beitrag zur Fragestellung“ leisten. In Analogie zum Erkenntnisprozess in den Naturwissenschaften unterscheidet er

- Sammeln von Daten
- Entnahme der relevanten Informationen
- Abänderung von Bedingungen mit dem Ziel treffsicherer Prognosen
- hypothesenbasierte Voraussagen über das Eintreten von Ereignissen
- abschließende mathematische Wissensabsicherung z. B. durch Beweise.

Hier sind deutliche Verwandtschaften mit BUCHBERGER's epistemologischer Helix erkennbar. Richtet man eine computerunterstützte Wissensbildung in der Mathematik am Forschungsparadigma der empirischen Wissenschaften aus, so birgt diese Orientierung die Gefahr eines Missverständnisses: die prinzipielle potentielle Fehlerhaftigkeit des empirischen Erkenntnisprozesses bedingt durch die Ungenauigkeit der experimentellen Messmethoden könnte fälschlicherweise auf die *virtuelle Realität der quasi-experimentellen CAS-Mathematik* übertragen werden.

Einer der tiefsten Kenner einer CAS-intensiven Mathematik ist der Mathematiker und Physiker Stephen WOLFRAM⁷⁸, der ab 1977 mathematische Computer-Experimente⁷⁹ ansetzte, um Formeln aus der theoretischen Teilchenphysik zu gewinnen. Er berichtet von seinen wahrgenommenen Einstellungen von Mathematikern zur experimentellen CAS-Mathematik:

Mathematiker scheinen oft zu glauben, dass Computerexperimente irgendwie weniger präzise sind als ihre mathematischen Standardmethoden. [...] Aber *diskrete oder symbolische Berechnungen können absolut präzise* sein. Und in einem gewissen Sinne kann die Darbietung eines partikulären, durch ein Experiment gefundenen Objektes [...] als *konstruktiver Existenzbeweis* für ein solches Objekt angesehen werden. Beim Ausüben von Mathematik gibt es oft die Vorstellung, dass Beweise die Resultate erklären sollten, die sie beweisen – und man nicht annehmen sollte, dass dies erreicht werden könnte, wenn man nur ein Objekt mit gewissen Eigenschaften präsentiert. Aber wenn man in der Lage ist, im Detail darauf zu schauen, wie ein Objekt reagiert, wird in vielen Fällen ein viel besseres Verständnis erzeugt als durch einen standardmäßigen abstrakten mathematischen Beweis.⁸⁰

Eine mögliche Ursache solcher Präzisionsvorstellungen mag von der Diskussion prinzipieller Approximationsfehler bei Näherungsrechnungen mit reellen Zahlen herrühren; dort setzt

⁷⁸ab 1988 Chefentwickler des CAS *Mathematica*, vgl. WOLFRAM [212, S. 899]

⁷⁹In einer historischen Notiz führt WOLFRAM die Entstehung einer experimentell ausgerichteten Mathematik auf GAUSS, RAMANUJAN, GIBBS u. a. zurück, vgl. WOLFRAM [212, S. 991] .

⁸⁰eigene Übersetzung, wie auch in den folgenden Zitaten

die interne Stellenzahl der erreichbaren Genauigkeit Grenzen. Dagegen sind Rechnungen mit rationalen, komplexen oder hyperkomplexen Zahlen oder symbolische Rechnungen mit Variablen stets genau, d.h. rechenfehlerfrei auf der Basis der implementierten Algorithmen. Nach WOLFRAM's Ansicht ist der erreichbare Grad an Präzisierung und theoretischer Durchdringung in einem naturwissenschaftlichen und einem virtuellen computerbasierten Experiment völlig unterschiedlich, beide Experimentalformate haben völlig disparate Reliabilitäts-, Validitäts- und Viabilitäts-Problematiken. So schreibt WOLFRAM [212, S. 108] :

In einem traditionellen wissenschaftlichen Experiment setzt man ein System aus der Natur an und danach beobachtet man es, um zu sehen, wie es sich verhält. Und in ziemlich der gleichen Weise kann man ein Programm auf einem Computer ansetzen und dann beobachten, wie es sich verhält. Und der große Vorteil von solch einem experimentellen Ansatz ist, dass er von einem nicht verlangt im Voraus exakt zu wissen, welche Art von Verhalten auftreten kann. Und genau das ermöglicht es, genuin neue Phänomene zu entdecken, die man nicht erwartet hatte. Erfahrungen aus den traditionellen Experimentalwissenschaften könnten es jedoch nahelegen, dass Experimente irgendwie immer fundamental unpräzise sind. Denn wenn man mit einem System aus der Natur beschäftigt ist, ist es normalerweise unmöglich, es genau anzusetzen oder mit perfekter Präzision zu messen – und tatsächlich kann es eine Herausforderung sein, ein traditionelles Experiment überhaupt wiederholbar zu machen. Aber für die Art von Computerexperimenten, die ich in diesem Buch unternehme, gibt es kein derartiges Problem. Denn in fast allen Fällen involvieren sie Programme, deren Regeln und Anfangsbedingungen mit perfekter Präzision spezifiziert werden können – so dass sie exakt genauso ablaufen, wann immer und wo immer sie ablaufen. In vielfacher Weise vermag diese Art von Computerexperimenten die besten theoretischen und experimentellen Zugänge zur Wissenschaft zu kombinieren. Denn ihre Resultate besitzen jene Präzision und Klarheit, die man von mathematischen oder theoretischen Aussagen erwartet. *Und dennoch können diese Resultate allein durch Beobachtungen entdeckt werden.* Doch wie mit allen Arten von Experimenten bedarf es einer hinreichenden Fertigkeit und Urteilskraft, um ein Computerexperiment anzusetzen, welches bedeutungshaltige Resultate produziert.

Trotz der Entdeckung chaotischer Phänomene ab 1962 durch LORENZ oder die computerbasierten Forschungsergebnisse in der Zahlentheorie konstatiert WOLFRAM [212, S. 899]:

Aber ganz im Gegensatz zu fast allen anderen Zweigen der Wissenschaft verbleibt die Mainstream-Mathematik sogar heute völlig dominiert von theoretischen statt experimentellen Methoden.

Zusammenfassend formuliere ich daher das didaktische

Prinzip der virtuellen Erfahrungsverankerung: *Die Verankerung des Lernprozesses in selbsttätigen Handlungen des Lernenden sollte durch die Ausführung von vertrautmachenden Aktivitäten oder geeigneten virtuellen Experimentierhandlungen im CAS gefördert werden. Dies ist deshalb so wichtig, da zentrale mathematische Konzepte der Alltagserfahrung oft nicht direkt zugänglich sind.*

Da besonders im Bereich der Stochastik und der diskreten Mathematik geeignete Vorerfahrungen der Schüler fehlen, scheinen virtuelle CAS-Experimente zum Aufbau einschlägiger Erfahrungen von besonderer Bedeutung für die Akzeptanz theoretischer Überlegungen zu sein. Dazu folgendes

Beispiel 4: eine experimentelle Behandlung des „Ziegenproblems“. Bei dem sog. Ziegenproblem der elementaren Stochastik handelt es sich um folgendes Experiment, vgl. z. B. HENZE [123, S. 54] oder HEFENDEHL [122, S. 15] :

Bei einem Quiz hat ein Kandidat die Wahl zwischen drei verschlossenen Türen. Hinter zweien sind Nieten (Ziegen) und hinter der dritten befindet sich ein Auto als Gewinn. Nach der ersten Entscheidung des Kandidaten für eine zu öffnende Tür wird von einem Moderator – der weiß, hinter welcher Tür der Hauptgewinn ist – eine „Ziegen“-Tür geöffnet und der Kandidat darf jetzt entscheiden, ob er eine andere Tür wählen möchte oder bei seiner ersten Wahl bleibt. „Paradoxerweise“ ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen bei einem Wechsel der Tür höher und beträgt $\frac{2}{3}$.

Diese Problemstellung dient üblicherweise der Offenlegung diverser Fehlvorstellungen und wird kommunikativ durch Aushandlungsprozesse im Plenum angegangen. Während verschiedene Argumentationen auf dem theoretischen Level (z. B. einer Vorlesung oder unterrichtlichen Behandlung) vorgetragen werden konnten, bleibt eine mögliche CAS-basierte experimentelle Verifikation der Argumentationen oft ungenutzt.

Die folgende unterrichtliche Behandlung des Ziegenproblems fand im Differenzierungsbereich Mathematik/Informatik einer Klasse 10 statt. Kerngedanke war durch eine Simulation der Spielhandlung eine geeignete virtuelle Realität als Voraussetzung für das Studium des wahrscheinlichkeitstheoretischen Phänomens zu schaffen, innerhalb derer die vorgetragenen Hypothesen der Schüler über den Ausgang der Spielhandlung durch Experimente falsifizierbar bzw. verifizierbar wurden.

Der Unterrichtsverlauf folgte der vorgeschlagenen Lerntrajektorie von GRABINGER [108, S. 32 ff] wo nach der Präsentation der Problemstellung eine wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegung angestellt wurde, die erst im Nachgang durch eine Simulation verifiziert wurde. Im aktuellen Unterrichtsverlauf offenbarten sich aber erhebliche Probleme beim theoretischen Verständnis der Situation. Auch die im Lehrwerk angegebene Simulation wurde von den Schülern in einer Selbstarbeitsphase nur partiell verstanden und wurde daher nochmals im Plenum diskutiert; der angegebene Derive-Quelltext zum Simulations-Algorithmus wurde anschließend von den Schülern selbstständig nach MuPAD portiert, vgl. Abbildung 2.22.

Hier der Originalkommentar eines Schülers zum Simulationsprogramm:

„Ich lasse für das Auto und für den Kandidaten jeweils eine Tür würfeln. Der Moderator wählt danach die Tür, hinter der eine Ziege ist bzw. die der Kandidat nicht gewählt hat (6-kandidat-auto). Wenn der Kandidat am Anfang das Auto getroffen hat, wählt der Moderator entweder Tür 1 oder Tür 2 aus (je nachdem hinter welcher Tür das Auto nicht ist). Das ist ein geringfügiger Nachteil meiner Prozedur, das Problem wirklich 1:1 nachzuspielen, trägt aber nicht zur Veränderung des Ergebnisses bei. Nun wechselt der Kandidat seine Wahl und ich lasse prüfen, ob er nun auf die Auto-Tür gesetzt hat (6-kandidat-moderator=a).[Der Kandidat hat jetzt ja nicht mehr die Tür, die bei 'kandidat' gewählt wurde.] Nun rechne ich noch die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn in Prozent aus. Ein weiterer ebenfalls geringfügiger Nachteil ist also, dass ich festsetze, der Kandidat wechselt immer die Tür. Es trägt aber ebenfalls nichts zum Ergebnis bei.“

Erst die Beobachtung der konkreten Spielsimulation überzeugte die Schüler a posteriori von der Gültigkeit der a priori vorgetragenen wahrscheinlichkeitstheoretischen Argumentation, siehe Abbildung 2.23.

```

• ZiegenProblem_1 := proc(y, x=0)
begin
print("Au-Ka-Mo-Um-Si");
( auto :=random (1..3)(); #1#
kandidat:=random (1..3)();
if kandidat=auto
then moderator:= 1 + (kandidat mod 2) #2#
else moderator:= 6 - kandidat - auto #3#
end_if;
if 6-moderator-kandidat =auto then x:=x+1 else x:=x+0 end_if; #4#
print(auto,kandidat,moderator,6-moderator-kandidat,x);
)$ i=1..y;
return (float(x/y)*100); #5#
end_proc

• ZiegenProblem_1(10)

"Au-Ka-Mo-Um-Si"
3, 2, 1, 3, 1
2, 2, 1, 3, 1
3, 3, 2, 1, 1
3, 3, 2, 1, 1

```

Abbildung 2.22: Simulation des Ziegenproblems durch eine Modellierung, basierend auf einer algebraischen Überlegung.

```

• ZiegenProblem_1(10)

"Au-Ka-Mo-Um-Si"
3, 2, 1, 3, 1
2, 2, 1, 3, 1
3, 3, 2, 1, 1
3, 3, 2, 1, 1
2, 3, 1, 2, 2
1, 3, 2, 1, 3
2, 3, 1, 2, 4
1, 1, 2, 3, 4
2, 1, 3, 2, 5
2, 3, 1, 2, 6

60.0

```

Abbildung 2.23: Simulation des Ziegenproblems; Ausgaben des ersten CAS-Experiments bei 10 Versuchswiederholungen.

```

• ZiegenProblem_2:= proc(x, s=0)
begin
  print("Auto-Kand-Mod-Tuer-Wahl-Sieg");
  ( LT:=[1, 2, 3]; //Liste Tueren #1#
  a:=random(1..3); a:=[a()]; k:=[a()]; #2#
  h:=listlib::setDifference(LT, k); #3#
  q:=listlib::setDifference(h, a); #4#
  m:=q[1]; #5#
  LT2:=listlib::setDifference(LT, m); #6#
  w :=listlib::setDifference(LT2, k); #7#
  if w=a then s:=s+1 else s:=s+0 end_if; #8#
  print(a,k,m,LT2,w,s); #9#
) $ f:=1..x;
return(float(s/x)*100);
end_proc

• ZiegenProblem_2(10)

"Auto-Kand-Mod-Tuer-Wahl-Sieg"

[1], [2], [3], [2, 1], [1], 1
[1], [1], [2], [3, 1], [3], 1
[2], [2], [1], [3, 2], [3], 1
[2], [3], [1], [3, 2], [2], 2

```

Abbildung 2.24: Simulation des Ziegenproblems durch eine Modellierung, die auf einer mengentheoretischen Überlegung basiert.

Die Klassenarbeit bestätigte ein zufriedenstellendes Verständnis des Problems und seiner Lösung. Zu meiner Überraschung hatte sich ein Schüler zu Hause mit einer anderen Simulation beschäftigt: Er war mit den zahlentheoretischen Überlegungen offenbar nicht zufrieden und schuf sich eine Modellierung des Spielverlaufs durch Betrachtung gewisser Mengen – obwohl der Umgang mit Mengen unter MuPAD vorher nicht behandelt worden war⁸¹, siehe Abbildung 2.24.

Auch hier sei der Originalkommentar des Schülers zitiert:

„Es wird eine Liste (LT) erstellt mit den 3 Türen. Danach wird die Tür, die der Kandidat wählt und die Tür, hinter der das Auto steht durch eine Zufallssimulation ausgewählt. Aus der Türliste werden sowohl die Autotür (a) als auch die Kandidatentür (k) entnommen, um an die Tür zu kommen, die der Moderator (m) öffnet. Sollten die Autotür und die Kandidatentür identisch sein, wird dem Moderator eine Tür aufgezwungen. Dann wird eine neue Türliste (LT2) erstellt, in der die Moderatortür nicht enthalten ist. Dieser Liste wird die Kandidatentür (k) entnommen. Dadurch bleibt die Tür (w) übrig, zu der der Kandidat wechselt. Als nächstes wird verglichen, ob die neue Tür dieselbe ist, hinter der das Auto steht. Die gesamte Prozedur wird beliebig oft wiederholt und es wird die Gewinnwahrscheinlichkeit berechnet.“

Die Ausführungen in der Klassenarbeit zeigten als Indiz für ein volles und tiefgehendes Verständnis des Schülers eine besondere Ausführlichkeit der Darstellung.

Bei geringen Versuchswiederholungen lässt sich der Ablauf der Simulation gut verfolgen und erzeugt die angestrebte virtuelle Erfahrung sowie ein Grundvertrauen in die Stimmigkeit der theoretischen Begründung. Für eine große Zahl von Wiederholungen unterdrückt man

⁸¹Nach seiner Auskunft reichte ihm allein das Studium der MuPAD-Hilfdatei und das Studium der dort gezeigten Beispiele.

```

MuPAD Pro - [(Lindner) Ziegenproblem.mmb]
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Notebook Debug Extras Fenster Hilfe

• t0:=time(): ZiegenProblem_1(1000)*Prozent, (time()-t0)*sec/1000.0;
  65.7·Prozent, 0.13·sec

• t0:=time(): ZiegenProblem_1(10^5)*Prozent, (time()-t0)*sec/1000.0;
  66.778·Prozent, 12.849·sec

• t0:=time(): ZiegenProblem_1(10^6)*Prozent, (time()-t0)*sec/1000.0;
  66.6938·Prozent, 129.717·sec

• t0:=time(): ZiegenProblem_2(1000)*Prozent, (time()-t0)*sec/1000.0;
  t0:=time(): ZiegenProblem_2(10^5)*Prozent, (time()-t0)*sec/1000.0;
  t0:=time(): ZiegenProblem_2(10^6)*Prozent, (time()-t0)*sec/1000.0;
  68.9·Prozent, 0.171·sec

  66.704·Prozent, 16.784·sec

  66.6716·Prozent, 167.881·sec

```

Abbildung 2.25: Versuchsausgang bei beiden Simulationen für hohe Versuchswiederholungen als Bestätigung des empirischen Gesetzes über die Stabilisierung relativer Häufigkeiten, vgl. HENZE [123, S. 20]. Die Stabilisierung tendiert hier zu 66.6 %. Man erkennt am Zeitverhalten außerdem ein Indiz dafür, dass der algebraische Algorithmus effektiver zu sein scheint.

die Ausgabe der Simulation durch Auskommentieren der `print`-Anweisungen und lässt sich neben dem Simulationsergebnis zusätzlich die Rechenzeit ausgeben.

Vorschlag einer revidierten Lerntrajektorie. Angesichts der Beobachtungen scheint es sinnvoller zu sein, nach der Vorstellung des Problems und einer intuitiv begründeten Hypothesenbildung *zunächst eine Simulation* der Situation z.B. mittels Mengen vorzunehmen. Das ggfs. unerwartete, kontra-intuitive und experimentell gewonnene Versuchsergebnis gibt dann Anlass für das Bemühen um ein theoretisch begründetes Verständnis.

Vorteile und Nachteile eines CAS bei Experimentierhandlungen. SCHNEIDER [183, S. 210–240] resümiert allgemeine didaktische Überlegungen, die insbesondere Vorteile beim selbstständigem aktiven Erkunden mathematischer Sachverhalte (mit Freiräumen für subjektive Sichtweisen der Schüler, einer Verbesserung der Fehlerkultur, etc.) und den bekannten heuristischen Strategien erkennen lassen. Diese Vorteile sind als genuine Designziele in den MAKE-Lernarrangements in allen Phasen des Zyklus schon implizit aufgegriffen.

Bezogen auf den Einsatz von CAS ortet sie *Vorteile* bei der Variation von Variablenbelegungen auf symbolischer Ebene (a. a. O., S. 222), der leichten Wiederholbarkeit von Berechnungen (a. a. O., S. 222), dem raschen Wechsel von Darstellungsformen (a. a. O., S. 223), der Erkundung von Begriffsaspekten (a. a. O., S. 222; Beispiel: Funktionsuntersuchungen), bei der selbstständigen Entdeckung mathematischer Regeln (a. a. O., S. 222;

Beispiel: Kettenregel⁸²) und Verfahren sowie der Simulation (a. a. O., S. 222; Modellierung; Modellbewertung) von Sachverhalten.

An *Nachteilen* eines CAS-Einsatzes im Zuge experimentellen Handelns nennt SCHNEIDER z. B.:

1. Durch die experimentelle Herleitung mathematischer Regeln wird gerade der operative Bereich in den Vordergrund gerückt und die Schüler/innen erforschen Regeln, die von CAS beherrscht und an diese ausgelagert werden können. [...] lässt auch wenig Aspekte erkennen, die im Hinblick auf den Erwerb von Grundwissen und Grundvorstellungen sowie für die Interpretation und Reflexion bedeutsam wären. Ein CAS-unterstütztes (Er-)Finden einer Vermutung [...] basiert im Wesentlichen auf einer möglichst geschickten Mustererkennung [...]. [a. a. O., S. 228]

Dagegen ist zu argumentieren, dass die oben von den Schülern angegebenen Codestrecken erhebliche Reflexionsanteile aufweisen und beweisartigen Charakter der in Rede stehenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Regel annehmen. Zudem ist das Erkennen von Mustern und Regelmäßigkeiten in Phänomenen geradezu typisch für das wissenschaftliche Forschen. Das Auslagern der Rechnungen (Zählprozesse) an den Rechner ist insofern unkritisch.

2. Wenn operative Tätigkeiten in größerem Umfang an CAS ausgelagert werden, dann hat dies auch zur Folge, dass mit dem händischen „Üben“ auf [...] Gelegenheiten zur Entwicklung von Vorstellungen und Einsichten verzichtet wird. [a. a. O., S. 237]

Dagegen ist einzuwenden, dass sich die Experimentierphase im MAKE-Zyklus wesentlich auf die *vorbegriffliche* A-Phase verortet und letztlich einer profunden Hypothesenbildung dient.

3. Gerade CAS-unterstütztes experimentelles Arbeiten birgt aufgrund der einfachen und beliebigen Wiederholbarkeit der Experimente die Gefahr in sich, dass die Schüler/innen – ohne entsprechende Lenkung des Lehrers [...] über ein phänomenologisches Begriffsverständnis nicht hinauskommen und auch keine Notwendigkeit für eine gedankliche (theoretische) Weiterführung ihrer empirischen Beobachtung sehen. [...] jedenfalls wird es entsprechender unterrichtlicher Interventionen und Maßnahmen seitens der Lehrer/innen bedürfen, um solche Effekte zu erzielen bzw. unerwünschte Effekte zu reduzieren. [a. a. O., S. 240]

Gerade das Beispiel des Ziegenproblems zeigt allerdings, dass die Experimentierhandlung mit ihrer Modellbildung eine virtuelle Erfahrung schafft, die wegen des kontraintuitiven Resultates zu einer nachträglichen Begründung auffordert. Die APOS-Theorie mit ihrer Konkretisierung im MAKE-Zyklus bleibt absichtsvoll nicht auf der A/P-Phase stehen, sondern zielt auf die Ablösung der experimentellen Handlungen zu Prozessen und Konzepten. Der obige Einwand trifft den MAKE-Zyklus daher nicht, da er in der C-Phase *CAS-freie Aktivitäten von metakognitivem Charakter ausdrücklich vorsieht*.

Experimentierhandlungen fördern meines Erachtens daher die Selbstständigkeit der Schüler und bieten Gelegenheiten, einen Teil der Lernzeit zur Erfahrungsbildung an CAS-Handlungen zu delegieren.

⁸²Merkwürdigerweise wird die Kettenregel im Lehrbuch von PRUGGER [175] aber keineswegs selbstständig entdeckt, sondern verbleibt unentdeckt im Datenmaterial.

2.4.2 Das Prinzip der metakognitiven Klammerung

Oder: das Prinzip vom zweifachen holistischen Spray. Nach den Befunden von BALAS et al. ist eine Adaption des originären (M)ACE-Zyklus insofern angeraten, als nach den dort berichteten Erfahrungen vor dem Eintreten in den MAKE-Zyklus eine überblicksartige Einführung über Ziele und Inhalte im Plenum erfolgen sollte.

Um die aktive Selbsttätigkeit der Lernenden möglichst weit zu erhalten, empfehle ich anstelle einer möglichen lehrergesteuerten Einstimmung in ein Thema oder eine Problemstellung eine metakognitive Anfangs-Reflexion in der Zweiergruppe. Dazu kann man in das CAS integrierte „advanced organizer“ vorschalten, die ein zielgebendes Vorausschauen ermöglichen und ein thematisches Gespür entwickeln helfen. Unterrichtspraktisch getestet wurden z. B. Bilder⁸³ mit unmittelbarem Aufforderungs- oder Fragecharakter (ohne Worte, ohne Formeln, ohne Text) oder Problemstellungen, die simultan multiple Repräsentationen als Kristallisationspunkte für metakognitive Interpretationen oder Diskurse in der Zweiergruppe anbieten. Denkbar sind auch Animationen (CAS-erzeugte Filmschnipsel) oder Black-Box-Abläufe von Algorithmen als gedanklich vorweggenommene Handlungsfolgen auf Prozess-Niveau.

Nach Abschluss des MAKE-Zyklus erfolgt analog eine reflexive metakognitive Rückbesinnung, die i. d. R. der letzte Auftrag der E-Phase ist. Neben Kurzzusammenfassungen, Präsentationsaufträgen oder selbst konstruierten Verständnistests lassen sich auch Konzeptnetze oder Mindmaps verwenden. Im der CAS-freien Mathematikdidaktik kennt man dies als *Prinzip des vorwegnehmenden Lernens* und als *Prinzip der Fortsetzbarkeit*, vgl. WITTMANN [211, S. 86]. Wegen der zwei den inneren (M)AKE(M)-Zyklus umrahmenden Reflexions('M')phasen formuliere ich dieses Prinzip als

Prinzip der metakognitiven Klammerung: *Metakognitive Reflexionen sollten vor Eintritt und zum Abschluss einer mehrstündigen CAS-(M)AKE-Phase angeboten werden. Diese wirken als mentale Orientierungsmarken, fokussieren auf eine ganzheitliche Sicht der Lernaktivitäten und fördern strategisch-heuristische Methodenablösungen aus den vorangegangenen Aktivitäten.*

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 1: eine metakognitive Anmutung des Gauß-Algorithmus. Die Lernenden betrachten Abbildung 2.26. Der Auftrag lautet:

Versucht möglichst viel Sinn in die dargestellte Szene hineinzudenken. Erfindet eine denkbare Aufgabenstellung. Was könnte die mittlere Zeile andeuten?

Gegeben sind Start- und Endsituation eines Gleichungssystems in Matrixform. Weder das Gleichungssystem selbst noch der Algorithmus sind bekannt. Eine Reflexion zielt hier auf die Grundvorstellung des Gauß-Verfahrens ab, welches danach durch multirepräsentative MuPAD-Aktivitäten handelnd erfahren wird. Später soll dieses Bild als fundamentale

⁸³deren *ganzheitliche* Sicht nach WITTMANN eine „simultane Erfassung von Handlungsketten“ ermöglicht, vgl. [a. a. O., S. 89]

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbildung 2.26: Öffnende metakognitive Klammer zu Beginn des Gauß-Algorithmus.

Idee des Verfahrens im Kopf des Lernenden gespeichert und in eigenen Worten interpretiert, d. h. mit Sinn hinterlegt werden können. Dieses Beispiel ist später im Rahmen einer Fallstudie noch Gegenstand einer genetischen Dekomposition bzw. der Konstruktion einer zugehörigen hypothetischen Lerntrajektorie.

Beispiel 2: ein holistischer Spray zum Skalarprodukt. Die Lernenden studieren im Zugmodus des DGS Z. u. L.⁸⁴ eine graphische Szene, bei der nur die Punkte X und Y auf ihrer horizontalen Verbindungsgeraden XY frei ziehbar sind, siehe Abbildung 2.27.

In ganzheitlicher Sicht ist neben der Gleichheit (visuell als Pegelstand dargestellt; symbolisch als Term; numerisch als Pegelhöhe) der Terme $x_1 * y_1 + x_2 * y_2$ auch die geometrische Lage studierbar; dabei ist $a * \cos(\gamma)$ als Länge p der senkrechten Projektion von OX auf OY erkennbar. Neben dem direkten Erfassen und verbalen Beschreiben der Zusammenhänge werden die Fragen nach dem Grund der Term-Gleichheit, einer geometrischen Deutung des rechten Terms (er enthält Winkel und Längen, d. h. geometrische Größen) und ihre Verallgemeinerbarkeit auf höhere Dimensionen motiviert. Das anschließende CAS-Worksheet hilft in einer Aktivitätsphase mit einigen Stationen diese Beobachtungen genauer zu erschließen.

Entscheidend ist für die Möglichkeit einer metakognitiven Reflexion, dass in dieser ganzheitlich-animierten Szene wesentliche Zusammenhänge und Einsichten simultan erfasst werden und ein CAS-Einsatz zunächst unterbleibt.

⁸⁴Diese in JAVA programmierte dynamische Geometrie-Software „Zirkel.und.Lineal“ von R. GROTHMANN ist frei verfügbar.

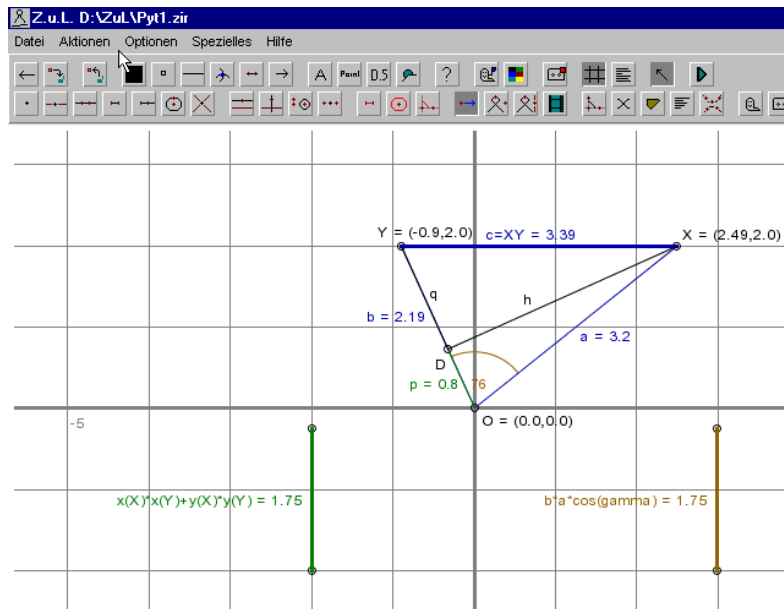


Abbildung 2.27: ein holistischer Spray zum Skalarprodukt; ändert man die Eigenschaftsliste des rechten Pegels durch Löschen von $b * ..$ ab, so takten beide Pegelstände im Zugmodus asynchron.

Dies ist zugleich ein Beispiel für das Prinzip der multiplen Repräsentationen („SONG-Prinzip“), das ich weiter unten formuliere.

Beispiel 3: eine metakognitive Rast im LinKomb-Spiel. Im LinKomb-CAS-Spiel hatten die Lernenden durch freie Wahl der Streckfaktoren zwei oder mehrere Vektoren zu einem Vektorzug in Richtung auf einen Zielpunkt zusammensetzen. Die Streckfaktoren sind dabei zugleich die Lösungen des zugehörigen linearen Gleichungssystems. Diese Beobachtung wird durch Zwischenfragen evoziert, vor Durchführen der Lösungsrechnung ist also eine „metakognitive Rast“ eingelegt, um den Sinn der nachfolgenden Prozeduren zur algebraischen Lösungsermittlung zu erkennen, siehe Abbildung 2.28.

LinKomb1(x, y) bildet als Black-Box die Linearkombination $x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, die mit der zu erreichenden rechten Seite $col(A, 3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ verglichen wird. Dies geschieht sowohl algebraisch als auch geometrisch (im Ausschnitt nicht gezeigt).

Beispiel 4: eine metakognitive Rückbesinnung auf die Theorie der LGS. Zum Abschluss der Theorie der Linearen Gleichungssysteme wird den Lernenden eine thematische Abbildung⁸⁵ vorgelegt, vgl. Abbildung 2.29.

Der Auftrag für die Lernenden kann nun darin bestehen, möglichst viele bekannte Situationen zu erinnern, zugehörige Sätze zu formulieren, die Skizze als memotechnische Eselsbrücke für Prüfungen zu verstehen, eine Bild-Interpretation zu verfassen, eine zugehörige

⁸⁵nach G. STRANG [193, S. 166, 169, 352, 358]

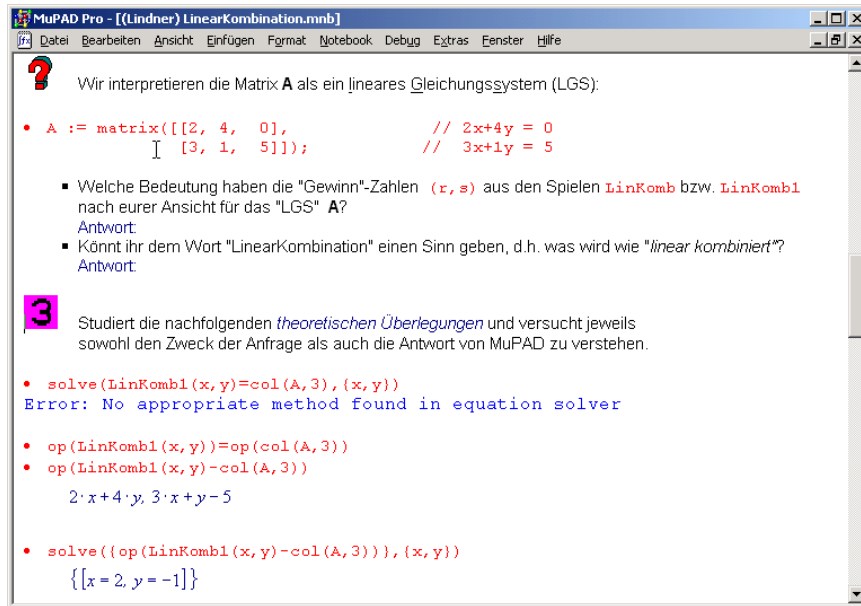


Abbildung 2.28: *LinKomb1(x, y)* als Black-Box einer Linearkombination

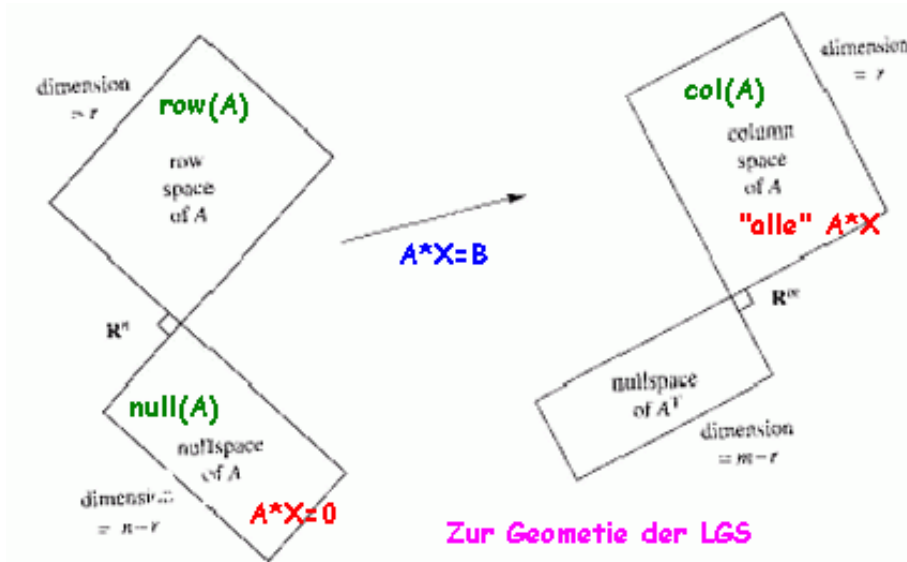


Abbildung 2.29: ein holistischer Rück-Blick auf die Theorie der linearen Gleichungssysteme.

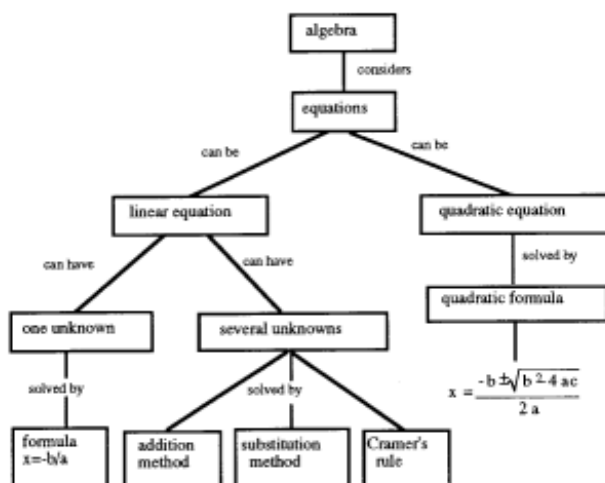


Abbildung 2.30: Ein holistischer Rück-Blick auf die Theorie der linearen Gleichungen mittels einer Konzeptkarte nach PARK/TRAVERS, a. a. O., S. 162.

Konzeptkarte mit wesentlichen Begriffen und Zusammenhängen zu erstellen u. v. a. Diese Abbildung wurde vorab schon wiederholt benutzt – allerdings unter Ausblendung der zum betreffenden Zeitpunkt nicht interpretierbaren Bildbestandteile – und zeigt sich hier in abschließender ganzheitlich-sinngebender Version.

Mit diesem „holistischen Spray“ ist die thematisierte Schemavorstellung der Theorie der Linearen Gleichungssysteme abgeschlossen und sollte aus dieser Merkskizze mit Verständnis dethematisiert werden können.

Beispiel 5: metakognitive Reflexionen mittels Konzeptkarten. Auch die Nutzung von ConceptMaps⁸⁶ z.B. nach TRAVERS mit/ohne Vorgabe von Begriffslisten o. ä. bietet sich an, vgl. Abbildung 2.30. Empfohlen wird die Analyse schülergefertigter Konzeptkarten auch mit dem Vorschlag einer Punktbewertung nach der Anzahl der festgestellten zutreffenden Aussagen, der genutzten Systematik, dem Grad der Beziehungshaltigkeit, dem Einbau weiterer Konzepte sowie eventuell diagnostizierbarer Fehlvorstellungen. Aus einer solchen Analyse wird eine Adjazenzmatrix erstellt, die statistisch (auch für Bewertungszwecke) auswertbar ist.

2.4.3 Das Prinzip des inkrementellen CAS-Spracherwerbs

Nach meinen Erfahrungen sollte man vermeiden, spezielle *systematische* „Einführungen in das CAS“ anzubieten. Es reicht in der Regel völlig aus anhand *eines* einführenden Beispiels die grundlegenden Funktionalitäten eines CAS-Worksheets wie *Textfelder*, *Rechenbereiche* und *Output-Zonen* zu demonstrieren. Danach bietet es sich an die weitere *CAS-Kompetenz* *längs der thematischen Leitlinien just in time zu platzieren* und sich parallel mit den ein-

⁸⁶vgl. z. B. PARK/TRAVERS, a. a. O., S. 162 ff

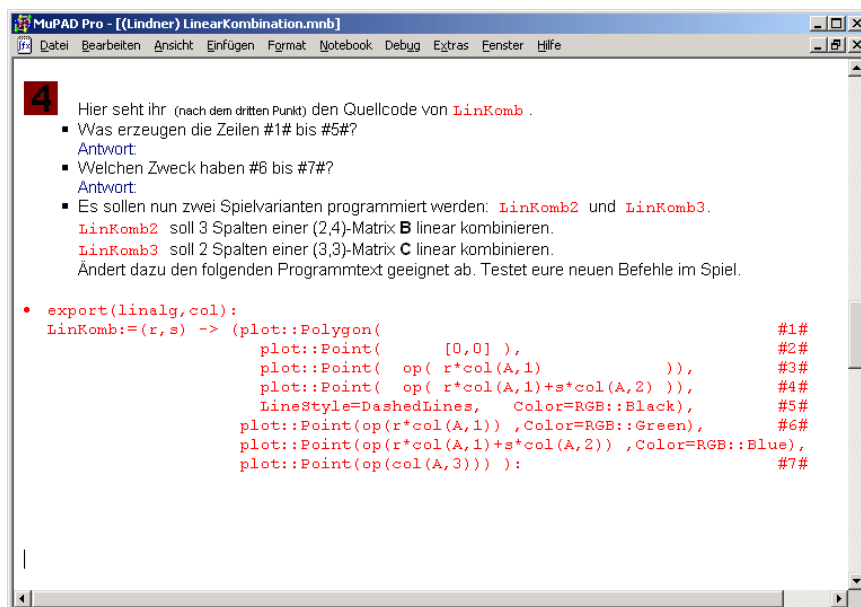


Abbildung 2.31: der `LinKomb`-Quellcode und zugehörige Erkundungsaufträge

geführten Objekten bzw. Prozeduren allmählich ausbilden zu lassen. Dazu genügen sehr wenige CAS-Befehle, die durch Selbsterkundungen aus den offiziellen CAS-Helpfiles gelernt werden können.

Prinzip des inkrementellen CAS-Spracherwerbs: *CAS-Konzepte (Befehle oder Prozeduren) sollten gemeinsam mit den eingeführten mathematischen Objekten bzw. Algorithmen angeboten werden. Die gleichzeitige Betrachtung eines Konzeptes mit und ohne CAS reduziert das subjektive Lerntempo und dient als variierte immanente Wiederholung bzw. als verständnisfördernder Repräsentationswechsel.*

Beispiel: Konzeptbildung „Linearkombination“. Im Zusammenhang des Begriffserwerbs „Linearkombination“ spielen die Lernenden das CAS-Spiel `LinKomb`. Erst nach einigen aktivitätsbasierten Erfahrungen wird die Black-Box⁸⁷ `LinKomb` geöffnet und der siebenzeilige Quellcode aufgedeckt, siehe Abbildung 2.31.

Die Analyse des CAS-Codes zeigt, dass `LinKomb` nur aus der Konstruktion und Zeichnung von Objekten besteht: eines schwarzfarbigen *Polygonzuges* in #1# und dreier verschiedenfarbiger *Punkte* in #6# ff. Das Polygon selbst ist wiederum aus *drei* Punkten erzeugt, dem Nullpunkt als Start sowie den Matrixspaltensummen als Zwischenpunkten. Diese drei Punkte werden dabei jeweils durch eine Linie verbunden: Die entstehenden *zwei* Linien repräsentieren die jeweiligen Spaltenvektoren der Gleichungssystemmatrix `A`. Die zusätzli-

⁸⁷für eine Diskussion dazu, s. u.

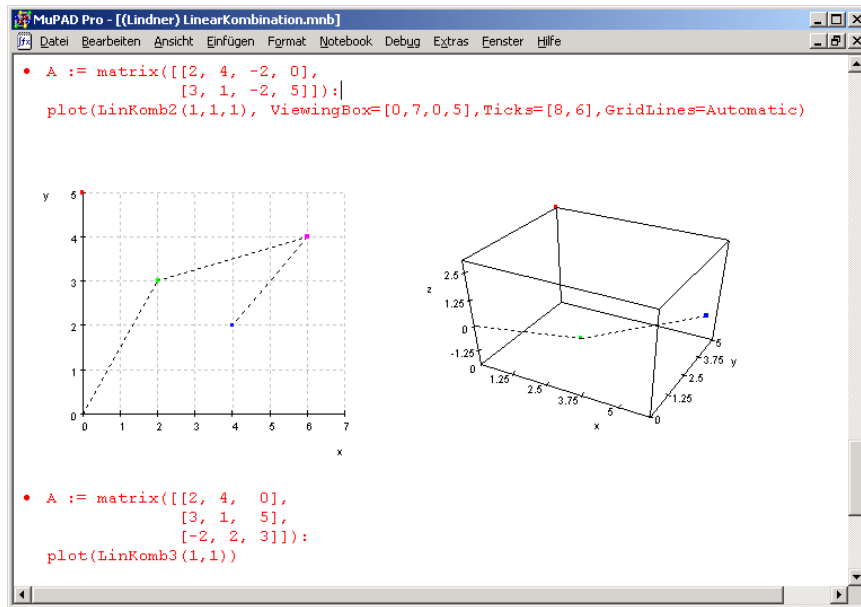


Abbildung 2.32: Verifikation der schülereigenen Codestreckenänderungen anhand zugehöriger Visualisierungen

chen Punkte repräsentieren lediglich zusätzlich die „Vektorspitzen“⁸⁸. Die als Aufgabe gestellte Analyse des Quellcodes läßt die Lernenden en passant die (CAS-)Objekte `Polygon` und `Point` zusammen mit ihren Optionen (wie Farbe und Stil) erkunden.

Ein *vertieftes mathematisches Verständnis wird nun zusammen mit einem vertieften Syntaxverständnis* durch den Auftrag zu einer zweifachen Abänderung des vorliegenden Programmcodes *erzeugt*: es sind sowohl mehr als zwei 2-dimensionale Vektoren als auch 3-dimensionale Vektoren (jeweils repräsentiert als Spalten einer Matrix) linear zu kombinieren. Die dabei beobachtbaren neuen Phänomene der linearen (Un-)Abhängigkeit werden anschließend in einer Aufweitung der Erkenntnishelix thematisiert: *bildhafte Anschauung, mathematische Konzeptbildung und CAS-sprachliche Expressivität entwickeln sich simultan*⁸⁹, siehe Abbildung 2.32.

2.4.4 Das Prinzip der literaten funktionalen Programmierung

Bei schüler- bzw. lehreigenen Konstruktionen von CAS-Routinen orientieren wir uns an den drei Leitlinien

- der *literaten* Programmierung, d. h. der jeweilige CAS-Programmtext sollte für sich

⁸⁸Eine direkte Realisierung von Vektoren mit dem CAS-Konzept `arrows2d()` war zwar möglich, wegen des unübersichtlicheren und umfangreicheren Quellcodes wurde aber zu diesem Zeitpunkt darauf verzichtet.

⁸⁹Weiter unten zeige ich, dass Schüler auf diese Weise nachweislich auch *Zugang zu eigenständigen Abstraktionsprozessen* finden, vgl. die *schülereigenen* Routinen zum Lösen von LGS auf der Basis der CRAMER-Regel bzw. zum Eliminieren von Parametern zur Herstellung der Koordinatenform einer Ebene als Vorstufe des GRÖBNER-Algorithmus.

selbst sprechen und in seinem eigenen Kontext möglichst verständlich sein,

- der möglichst durchgängigen Nutzung eines *funktionalen Programmierparadigmas*, d. h. mathematische Aktionen sollten durch *CAS-Funktionen und derer Aufrufe zu realisieren*⁹⁰ sein, und
- selbst *kurze CAS-Programme* sollten übersichtlich und *strukturiert gestaltet* sein.

KERNIGHAN [135, S. 2] als Vater der Programmiersprache C empfiehlt dazu:

Die Prinzipien des Programmierstils basieren auf Erfahrungswissen, nicht auf willkürlichen Regeln und Vorschriften. Programmcode sollte klar und einfach sein – einsichtige Logik, natürliche Ausdrücke, umgangssprachlicher Sprachgebrauch, bedeutungshaltige Namen, ordentliche Formatierung, hilfreiche Kommentare – und sollte clevere Tricks und ungebräuchliche Konstruktionen vermeiden.

Durch die Wahl eines hochsprachlichen CAS anstelle einer genuinen Programmiersprache als Programmierumgebung wird von Beginn an die mathematische Welterschließung mit der simultan erfolgenden CAS-Erschließung erleichtert, denn: „Da Programmieren inhärent schwierig ist, müssen Studenten davor bewahrt werden, die zusätzliche Bürde einer komplexen Sprache zu tragen.“, vgl. REISER [178, S. 6] .

Die Programmiererschließung, die nach der APOS-Lerntheorie zur Wissenskonstruktion wichtig ist, sollte dabei behutsam und graduell erfolgen – beginnend mit der einfachen Analyse und Synthese *interpretativer Anweisungen* für Daten und Befehle, über ein *minimal-invasives Code-Recycling*⁹¹ durch Programmier-Laien hin zu *semi-automatischen*⁹² Algorithmen zur Unterstützung der Lern- und Verstehensprozesse. Nur exemplarisch wird der Übergang zu einem *voll-automatischen* professionellen Algorithmus vollzogen, wo der Laie (Lernende) lediglich Nutzer der vom einem Experten (Lehrer) erstellten Prozedur ist. Die Konstruktion einer (semi-professionellen) *Library von Routinen* als Realisierung der Idee der Auslagerung des Operativen sollte auf Schulniveau ebenfalls nur exemplarisch⁹³ erfolgen.

Auch GUDENBERG [204, S. 5] führt für die funktionale Sichtweise von Programmierung, die wir hier auch für ein CAS einnehmen, wichtige Argumente auf:

- . Der hohe Abstraktionsgrad erlaubt übersichtliche Programme.
- . Funktionale Sprachen werden zur Spezifikation beim „Programmieren im Großen“ verwendet.
- . Die Semantik ist klar zu formulieren.
- . Datenstrukturen lassen sich so eingeben, wie sie definiert sind.
- . Bei Algorithmen ist die funktionale Spezifikation ausführbar.
- . Durch Interpretation ist die direkte Interaktion zwischen Benutzer und Rechner gewährleistet.

⁹⁰s. u. die Demonstration des GAUSS-JORDAN-Algorithmus

⁹¹vgl. die obige Codestrecke zum LinKomb-Spiel

⁹²Unser schulisches Beispiel ist der GAUSS-Algorithmus via Elementarmatrizen. In der Staatsexamensarbeit von PÜTTMANN setzten wir eine basale semi-automatische Version des Simplexalgorithmus der linearen Optimierung ein.

⁹³s. u. die Library zum Skalarprodukt.

In diesem Sinne erlaubt ein CAS die möglichst einfache Realisierung einer experimentellen Mathematik, vgl. WOLFRAM [212, S. 109] :

Immer und immer wieder war es ein wichtiges einzelnes Prinzip, das ich lernen musste: *die besten Computereperimente sind diejenigen, die so einfach und unkompliziert sind wie irgend möglich*⁹⁴. Und dieses Prinzip gilt sowohl für die Struktur der aktuell studierten Systeme – als auch für die Prozeduren, die man benutzt, um sie zu studieren.

Zusammenfassend formuliere ich diese Einsichten als das

Prinzip der literaten funktionalen Programmierung im Kleinen: *Programmier-technische Aktivitäten mit dem CAS sollten sich an dem Leitgedanken der literaten Programmierung, der funktionalen mathematik-affinen Sichtweise eines Algorithmus als Funktion „Eingabe $\xrightarrow{\text{Algorithmus}}$ Ausgabe“ sowie der strukturierten Gestaltung auch kleinerer Codestrecken orientieren.*

Bemerkung: CAS-Codestrecken konstruieren wir (d.h. Schüler und Lehrer) zunächst i. d. R. „bottom-up“, d. h. erfahrungsbasiert und sukzessiv ergänzend. Top-down-Entwürfe sind ihrem Wesen nach eher deduktiv und daher zur APOS-Theorie als induktiver erfahrungsbasierter Theorie nicht passend. Auf der S(chema)-Stufe thematisierten strukturierten Wissens kommt ihnen dagegen eine wichtige, lokal ordnende Bedeutung zu.

2.4.5 Das Prinzip der Modulkonstruktion zur strukturierten Repräsentation mathematischen Wissens

Die Modularisierung ist eine Kernidee aus der objektorientierten Informatik. Die dahinter liegenden zentralen Probleme sind die *Bewältigung von Komplexität* und die *Ermöglichung von Wiederverwendbarkeit* („Recycling“). Eine leitende Modellvorstellung ist die der *Stückliste* zur Vorbereitung und Steuerung der materiellen technischen Fertigung bzw. Produktion: Stücklisten sind Verzeichnisse der Komponenten (Bau-Teile oder Bau-Gruppen), aus denen das fertige Endprodukt zusammengesetzt wird. Teile und Gruppen ergeben für sich genommen noch kein funktionsfähiges Endprodukt: sie müssen erst in der richtigen Art und Weise und in der geeigneten Reihenfolge strukturiert zusammengesetzt werden.

Über die softwaretechnische bzw. mathematikdidaktische Beschreibung und den Zweck von *Modularisierung* gibt es in der Literatur verschiedene Aussagen. Diese werden im Folgenden zunächst gesichtet und anschließend unter der Perspektive der APOS-Lerntheorie neu geordnet, an Beispielen erläutert und zu einem CAS-didaktischen Prinzip verdichtet. Abschließend werden aus dieser Sicht einige vorfindbare mathematikdidaktische Interpretationen des „Modulprinzips“ kritisch betrachtet.

Modularisierung und Modularität

Dieser Abschnitt fokussiert die Beschreibung und Klärung der Begriffe *Modul* bzw. *Modularisierung*. Diese stammen aus der ingenieurwissenschaftlichen und universitären Softwaretechnik und haben sich historisch aus Erfahrungen mit der Bewältigung hochkomplexer

⁹⁴Hervorhebung von mir, W.L.

Programmierprobleme entwickelt. Das Modulkonzept bzw. die modulare Programmierung wird von allen wichtigen prozeduralen und funktionalen Programmiersprachen und auch von CAS unterstützt.

Imperativ-prozeduraler Programmierstil. Ab 1985 entwickelte N. WIRTH an der ETH in Zürich ein neues Betriebssystem zusammen mit der neuen objektorientierten Programmiersprache Oberon als Nachfolger der ebenfalls von ihm konstruierten prozeduralen Sprachen Pascal und Modula⁹⁵. Ziel war, dieses *große Software-Projekt durch einen gegliederten Aufbau zu strukturieren* und damit beherrschbar zu machen, vgl. REISER [178, S. 6]:

Pascal unterstützt zwar strukturiertes Programmieren, in der Zwischenzeit wurde aber in der Softwaretechnik der *modulare Entwurf* wichtig. Dieser Begriff hat mindestens zwei Aspekte. Der erste ist als *Geheimnisprinzip* (information hiding) bekannt: Jedes große System soll aus Modulen zusammengesetzt werden, die relativ isoliert entwickelt werden können. [...] Der zweite Aspekt ist eher technischer Natur: die getrennte Übersetzung von Modulen.

Explizite Entwurfskriterien für die Sprache Oberon selbst waren mustergültige Einfachheit, Effizienz und Flexibilität; die sprachliche Einfachheit sollte die inhärente Komplexität der Aufgabenstellung, ein neues Betriebssystem in dieser Entwurfssprache ab ovo zu schreiben, meistern helfen:

Das wirkliche Problem ist aber nicht der Speicherverbrauch, sondern die Unzuverlässigkeit und die Unflexibilität (auch Wartbarkeit genannt) von großen Softwaresystemen. [...] Man sollte sich bewusst sein, dass die wichtigste Einzelmaßnahme der Steigerung der Zuverlässigkeit eines Systems die *Entfernung von überflüssigen Eigenschaften und Fähigkeiten sowie die Begrenzung der Komplexität ist*. [...] Um so irritierender ist der Umstand, dass sich viele Anwender durch komplexe Systeme mehr beeindrucken lassen als durch ein ökonomisches Design. [...] Natürlich ist es viel leichter ein *großes* System zu entwerfen als ein *ökonomisches*: Das Zweite erfordert Erfahrung, sorgfältige Planung und große Sorgfalt im Detail [...]. [a. a. O, S. 6]

Der Informatiker und Mitentwickler der Sprache Oberon, MÖSSENBÖCK [163, S. 11], betont das Zusammenfassen von Daten (z. B. reellen Zahlenpaaren) und zugehörigen Operationen (z. B. Addition, Multiplikation etc. von solchen Zahlenpaaren, realisiert als Prozeduren oder Funktionen in der verwendeten Programmiersprache) mit diesen Daten zu einem neuen Ganzen (etwa dem Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen), einem *Modul*⁹⁶:

Ende der siebziger Jahre erkannte man, dass es Vorteile bringt, zusammengehörende Daten und Operationen zu einer Einheit – zu Modulen – zusammenzufassen. Programme wurden dadurch “geordneter”. Module – als Sammlung von Daten und Prozeduren – entsprechen auch besser den Komplexen der Problemwelt als einzelne Prozeduren.

Den Hauptzweck der Konstruktion von Modulen sieht MÖSSENBÖCK in der damit erreichbaren Reduktion von Komplexität. Eine solche Reduktion ergibt sich z. B. dadurch, dass

⁹⁵Der Name ist Programm: ein ‘modularer’ Programmierstil sollte durch entsprechende Konstrukte der Programmiersprache unterstützt werden.

⁹⁶In erster Näherung stelle man sich also ein *CAS-Modul* als Realisierung eines *Moduls i. S. der Algebra* vor.

man einem Problem durch Modularisierung eine Struktur aufprägt, die Abstraktion erhöht und neue kompaktifizierende Entitäten schafft:

Wofür verwendet man Module? Sie sind zunächst einmal ein *Strukturierungsmittel*. Sie gruppieren Daten und die zugehörigen Operationen zu einer Einheit und schaffen damit Ordnung in einem Programm. Module sind auch ein *Abstraktionsmittel*. Sie verbergen Implementationsdetails vor anderen Modulen und bieten ihre Dienste über eine einfache Schnittstelle an. Module bilden eine Mauer. Die in ihnen deklarierten Namen sind außerhalb nur dann bekannt, wenn man sie exportiert. [...] Ein Modul bildet schließlich eine *Übersetzungseinheit*. Sein Quellcode steht in einer eigenen Datei und der aus ihm erzeugte Objektcode wird ebenfalls in eine eigene Datei geschrieben. Damit sind Module die kleinsten austauschbaren Einheiten in einem System. [a. a. O., S. 26]

Auch MÜHLBACHER [165] et al. betonen den Gesichtspunkt der Strukturierung komplexer Aufgaben in *gegliederte zusammenhängende* Teilprobleme. Darüber hinaus beschreiben sie den Kommunikationsprozess zwischen Modulen untereinander bzw. den Nutzern und einem Modul als eine Import-Export-Relation:

Ein Modul ist eine Sammlung von Deklarationen für Konstanten, Typen, Variablen und Prozeduren. [...] Module können getrennt übersetzt werden und sind so ein wichtiges Strukturierungswerkzeug, um komplexe Softwareaufgaben in kleine überschaubare Einheiten zu zerlegen. [a. a. O., S. 105]

Die Erfahrung zeigt, dass große Softwareprojekte im ersten Entwurfsschritt in kleinere, möglichst abgeschlossene Teilaufgaben zu zerlegen sind, um die Gesamtkomplexität überhaupt in den Griff zu bekommen. [...] Der Klient soll eine abstrakte Sicht des Moduls bekommen, die ihm in der Schnittstelle nur die Mechanismen zur Handhabung gewährt. [...]

Ein Modul ist eine Zusammenfassung von Operationen und Daten zur Realisierung einer in sich abgeschlossenen Aufgabe. Zur Kommunikation mit anderen Modulen ist eine Schnittstelle vorgesehen, die den Export und den Import von Daten und Operationen regelt. Zur Verwendung eines Moduls muss die Kenntnis über seine Export-Schnittstelle genügen. Das Modul selbst muss beim Import anderer Module wieder deren Schnittstelle kennen. [a. a. O., S. 111]

Im Folgenden möchte ich diese Definition⁹⁷ von MÜHLBACHER meinem Verständnis des Modulbegriffs zugrundelegen. Die aus der Literatur rekonstruierbaren wesentlichen begrifflichen Merkmale eines Software-*Moduls* sind daher

- die Bündelung von *Daten* und zugehörigen *Operationen* zu einem neuen Ganzen
- die Trennung von „sichtbarem“ *Interface* und „verborgener“⁹⁸ *Implementation*
- die *Kommunikation* mit der Außenwelt (Benutzer, andere Module) ausschließlich *via* *Interface* mit Hilfe einer *Import-Export-Funktion*

⁹⁷Eine ähnliche Definition gibt CLAUS [32, S. 393] ; er sieht als *Zweck der Modularisierung* eine übersichtliche und in Bezug auf Änderungen am Implementationsteil eines Moduls *flexible Programmieretechnik*: „Ein *Modul* ist die Zusammenfassung von Konstanten, Datentypen, Variablen und Prozeduren zu einer Einheit. Soll ein Modul von einem anderen genutzt werden können, so muss man angeben, welche Teile dieses Moduls von außen sichtbar sein sollen und welche nicht. Grundsätzlich bleibt aber die Implementierung eines Moduls, also die konkrete Realisierung der Datentypen und Prozedurrümpfe, vor allen anderen Modulen verborgen. [...] Der Vorteil dieser Programmieretechnik ist neben der Übersichtlichkeit auch die Flexibilität[...]“ .

⁹⁸in anderer Terminologie auch: „ausgelagerter“

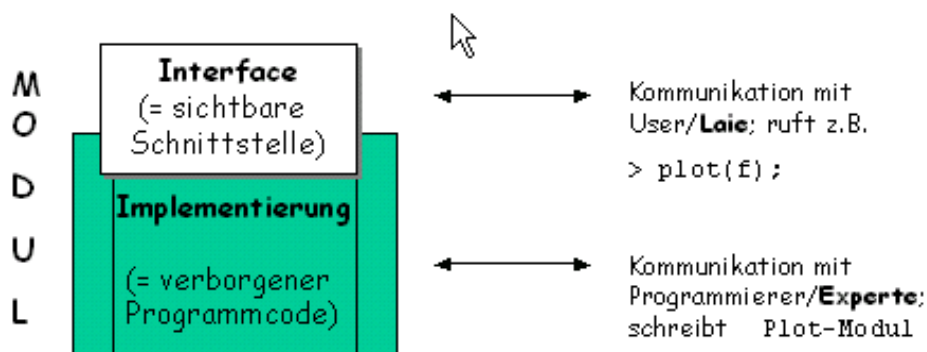


Abbildung 2.33: Modul mit nutzbarem Interface-Teil und verschattetem Implementations-Teil; die Kommunikation erfolgt über den Import bzw. Export von Funktionalität durch das Interface. Die Funktionalität selbst wird von Experten im Implementationsteil bereitgestellt.

und ihr Hauptzweck wird gesehen in

- der *Reduktion von Komplexität* bei umfangreichen Software-Aufgaben durch Strukturierung und Abstraktion
- der *Flexibilität* in Bezug auf Code-Erweiterung und Code-Wartung
- der Methode der *Modularisierung* selbst als einer effektiven Software-Technik, bei der ein komplexes Problem in Einzel-Module mit ausgegliederten Funktionalitäten zerlegt wird.

Unter *Modularisierung* sei also im Folgenden der Prozess der Software-Konstruktion von Modulen und unter *Modularität* die Zerlegtheit in einzelne Module mit spezifizierten Aufgaben verstanden. Abbildung 2.33 fasst die obigen Charakterisierungen anschaulich zusammen.

Funktionaler Programmierstil. Nach dem Prinzip vom funktionalen Programmierparadigma werden die Operationen in einem (CAS-)Modul z. B. im CAS MuPAD durch Funktionen realisiert. Gerade bei einem solchen Programmierstil bleibt die obige Perspektive von Modularisierung erhalten, wie z. B. folgende Fundstellen aus der funktional orientierten Programmierliteratur belegen.

PAULSEN [168, S. 59] vergleicht die Modularisierung mit einem ingenieurmäßigen Design-Handeln und bemerkt, dass die Modularität eine wesentliche Voraussetzung für einen differenzierten verteilten Arbeitsprozess mit ausgelagerten⁹⁹ Teilaufgaben ist:

Ein Ingenieur versteht ein Gerät in Bezug auf seine Teil-Komponenten und diese wiederum in Bezug auf deren Unter-Teile. Ein Fahrrad hat Räder; ein Rad hat eine Nabe; eine Nabe hat ein Lager, usw. Man braucht mehrere Stufen, bevor man das Niveau der individuellen Stücke aus

⁹⁹vgl. dazu PESCHEK's Idee von der „Auslagerung des Operativen“ in Bezug auf die Mathematik.

Metall und Plastik erreicht. Auf diese Weise kann man das ganze Fahrrad auf einem abstrakten Level verstehen oder Teile von ihm im Detail. Der Ingenieur kann das Design durch Modifikation eines Bauteils verbessern, oft ohne an die anderen Bauteile zu denken.

Programme (die komplizierter sind als Fahrräder!) sollten auch aus Komponenten aufgebaut betrachtet werden. Traditionell ist ein Teilprogramm eine Prozedur oder eine Funktion, aber diese sind zu klein – es ist so, als wolle man ein Fahrrad als aus Tausenden von Metallstücken zusammengesetzt verstehen. Viele neuere Programmiersprachen betrachten Programme daher als aus *Modulen* bestehend, von denen jedes seine eigene Datenstruktur und zugehörige Operationen definiert. Das Interface eines jeden Moduls wird separat vom Modul selbst spezifiziert. Verschiedene Module können daher von unterschiedlichen Teilnehmern eines Projektteams codiert werden; der Compiler kann prüfen, ob jedes Modul seiner Interface-Spezifikation genügt.

ULLMAN [201, S. 145] fokussiert auf den *Prozess des Einkapselns* von Datentypen, Operationen und Ideen zu einem *Cluster*, welches er ein Modul nennt, und bringt als zusätzliche strategische Zwecksetzung das sog. *Code-Recycling* ins Spiel:

Eines der großen Themen des modernen Programmiersprachen-Designs ist es, das *Einkapseln* von Information zu erleichtern, d. h. Konzepte wie Typen¹⁰⁰ und Funktionen auf diesen Typen in einem Cluster so zu gruppieren, dass dieses nur in begrenzter Weise genutzt werden kann. Ziel der Begrenzung ist nicht etwa das Programmieren zu erschweren, sondern 1. zu verhindern, dass Daten in unkontrollierter Weise genutzt werden [...] 2. die Wiederverwertung von Code zu unterstützen [...]. Ein *Modul* ist eine separat compilierbare Einheit, typischerweise ein File. Die Möglichkeit Module zu konstruieren, die Cluster von verwandten Ideen einkapseln, ist aus den genannten Gründen hochgradig nützlich. [...] Eine wichtige Fähigkeit des Modul-Systems in ML und anderen Sprachen ist das Verstecken von Informationen¹⁰¹. Wir verbergen Informationen dadurch, dass gewisse Definitionen in einem Cluster außerhalb des Clusters nicht verwendbar sind.

Im Hinblick auf die oben bei N. WIRTH nachweisbare historische Entstehung der Idee der Modularisierung aus dem Wunsch zur programmiertechnischen Beherrschung sehr *umfangreicher professioneller Projekte* und Aufgabenstellungen, der sog. „*Programmierung im Großen*“, unterscheidet PEPPER [169, S. 33] bei konstruierten Modulen ebenfalls das sichtbare Interface (Benutzer-Schnittstelle) von der verborgenen eigentlichen Implementierung und bindet *mehrere Module* in eine *hierarchisch-geordnete Struktur* ein:

Ernsthafte Softwareprodukte umfassen Hunderte oder gar Tausende von Funktionen und Typen. Deshalb braucht man Mittel, um diese überbordende Fülle sinnvoll organisieren und überschaubar strukturieren zu können. Im Software-Engineering hat sich dafür der Begriff *Modularisierung* eingebürgert. [...] die Module eines Softwareprodukts im Allgemeinen in einer *Hierarchie* von Abhängigkeiten organisiert sind. [...] Ein Modulsystem für Operationen auf geometrischen Objekten besteht aus Modulen für Dreiecke, Rechtecke, Kreise, Linien, Punkte, usw. Alle diese Einzelmodule sind zusammengefasst in einem Hauptmodul *Geometry* und alle basieren letztlich auf einem Modul für die reellen Zahlen.

CAS als Hauptbeispiele für modulare Software-Produkte. CAS wie MuPAD sind selbst modular konstruiert: das User-Frontend mit Notebook, Grafik etc. kommuniziert

¹⁰⁰Mit Typen sind *Datentypen* gemeint; man stelle sich z. B. als Datentyp eine *Menge* vor mit zwei binären Operation (wie z.B. „+“ oder „*“) auf ihr als Funktionen.

¹⁰¹im Original: “information hiding”; im deutschen Software Engineering oft auch als „Geheimnisprinzip“ (nach PARNAS) bezeichnet.

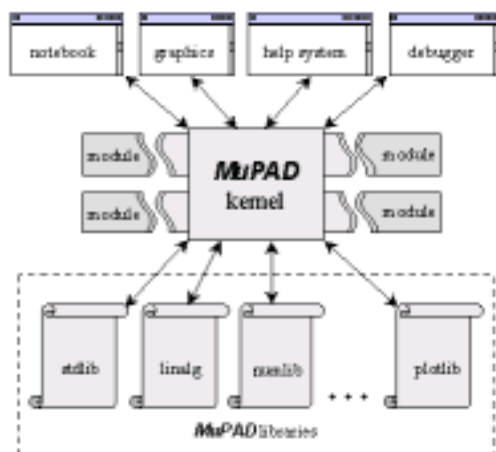


Abbildung 2.34: CAS wie MuPAD sind selbst modular konstruiert: Das User-Fontend mit Notebook, Grafik etc. kommuniziert als Interface mit den Kernmodulen, die durch herstellerseitige oder benutzerseitige Module ergänzt werden können.

als Interface mit den Kernmodulen („CAS-Herzstück“). Diese Kernmodule werden vom Hersteller bzw. benutzerseitig durch eigene Module ergänzt, die in Bibliotheken (Libraries) zusammengefasst werden. Diese Komponenten enthalten das mathematische Wissen einer Domäne. Der Kern selbst bietet als Funktionalitäten die Komponenten Memorymanager, Multipräzisionsarithmetik, Modulmanager und Sprachinterpretier (mit den Teilkomponenten I/O-Parser, Evaluator, Simplifier) an. Module erscheinen dem Benutzer oft auch als „packages“ (z. B. beim CAS Maple oder beim CAS Maxima), „Utility-Files“ (CAS Derive) oder „Domains“ (CAS MuPAD). Dazu schreibt CREUTZIG [36, S. 116], vgl. auch Abbildung 2.34:

Grundlegende Datenstrukturen wie Zahlen, Mengen, Tabellen etc. werden vom MuPAD-Kern als Domain-Typen zur Verfügung gestellt. Darüber hinaus hat der Nutzer die Möglichkeit, sich zusätzlich im Rahmen der MuPAD-Sprache eigene Datenstrukturen zu konstruieren, mit denen er dann symbolisch operieren kann.

Solche MuPAD-Domains (Module) sind z. B. Restklassenringe, Polynomringe, Körpererweiterungen wie $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ etc. *zusammen mit* den zugehörigen Operationen auf ihnen.

Modularisierung aus der Perspektive der APOS-Lerntheorie

Wenn die Strategie des modularen Designs hauptsächlich auf die Reduzierung von Komplexität¹⁰² und ein ökonomisches Recycling bei *umfangreichen professionellen* Aufgabenstellungen abzielt, so ist zu klären, warum und welche der dort gewonnenen Einsichten in

¹⁰²ENGEL [98] weist darauf hin, dass Komplexität mindestens zwei Aspekte hat: *Umfang* und *Vernetzungsgrad*. Komplexität kann daher z. B. dadurch reduziert werden, dass man die Anzahl der Komponenten und/oder die Anzahl der Verbindungen zwischen den Komponenten verringert. Neben einer solchen methodischen Gruppierung und Strukturierung (als Werkzeug, die Anzahl der Verbindungen systematisch zu optimieren) ist natürlich die Reduktion der Anzahl der Komponenten selbst am wirksamsten. Darauf zielt

einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht mit geringer Komplexität der Problemstellungen überhaupt von Bedeutung sein könnten. Tatsächlich wird man im Unterricht lediglich wenige und übersichtliche Modularisierungen durchlaufen können, im hier vorgestellten Grundkurs der Linearen Algebra waren es drei.

Die modulare Designtechnik ist ihrem Wesen nach eine *analytische* Methode, die Strukturen und systematische Zusammenhänge in komplexen Problemstellungen aufdeckt und diese problemlösend auswertet. *Lerngelegenheiten zu analytischen Erfahrungen, wie mit einer inhärenten Struktur umzugehen und eine gewonnene Systematik zielführend auszunutzen* ist, sind aber auch in kleineren Projekten auf schulischem Niveau realisierbar. Die didaktische Leitlinie ist dabei die prototypische Konstruktion von kleinen Moduln als *Realisierung organisierten und strukturierten mathematischen Wissens* und die *Reflexion über Strukturen und Abhängigkeiten in einem Modul als metakognitive Tätigkeiten*. Modulares Programmieren ist insofern *begriffliches* Programmieren. Das Ein- und Auskapseln von Wissensblöcken wird medial erfahrbar und *behandelbar*, sein Erfahrungstransfer auf andere Wissensformen somit vorbereitet.

Der lerntheoretische Ansatz der APOS-Theorie zur Konstruktion vernetzten mathematischen Wissens verträgt sich daher in besonders geeigneter Weise mit dem Modularisierungsprozess unter dem Aspekt einer systematischen Strukturierung. Vergleicht man nämlich Phasen und Tätigkeiten der Software-Technik *Modularisierung* mit den Phasen und Aktivitäten der mentalen *Wissenskonstruktion* gemäß der APOS-Theorie, so ergibt sich folgende Gegenüberstellung:

<i>mentales Konstrukt nach A.P.O.S.-Lerntheorie:</i>	<i>software-technologisches Konstrukt im Modularisierungsprozess:</i>
Prozess vorstellung eines mathematischen Konzeptes; mathematische Funktion oder Objekt	einzelne Prozedur , individuelle Funktion, singulärer Datentyp
<i>einkapseln</i> ↓↑ <i>entfalten</i>	<i>strukturieren</i> ↓↑ <i>redesignen</i>
Objekt vorstellung eines mathematischen Konzeptes	Datenstruktur & Operationen
<i>thematisieren</i> ↓↑ <i>dethematisieren</i>	<i>verbergen</i> ¹⁰³ ↓↑ <i>exportieren</i>
thematisierte Schem avorstellung (Grundvorstellung, „Chunk“)	≈ strukturiertes Modul mit Interface und Implementation („Cluster“)

letzlich die Kapselung ganzer Wissensblöcke sowohl im Wissenserwerb als auch im Modularisierungsprozess ab.

¹⁰³alias *kapseln* alias *auslagern* (PESCHEK)

Die Prozessvorstellung eines mathematischen Objektes im Erkenntnisprozess der APOS-Theorie wird materialisiert als eine einzelne Prozedur oder Funktion, die als Teil-Funktion eines zu konstruierenden Moduls anzusehen ist. Diese Funktionen und Daten werden in der Objektvorstellung zu einem mentalen Objekt verdichtet; diese Enkapsulation wird analog auf der programmtechnischen Seite als Datenkapselung im Modul vollzogen. Die thematisierte Schemavorstellung eines mathematischen Konzeptes entspricht schließlich dem fertig strukturierten Modul. Der Fähigkeit eines Lernenden, die Schemavorstellung des Wissenkonstruktes zur Problemlösung flexibel zu thematisieren bzw. zu de-thematisieren, wird auf der Software-Ebene reflektiert durch seine Fähigkeit, die Funktionalitäten des Moduls (z. B. zur Wartung oder zum Redesign) zu reflektieren bzw. zur Problemlösung zu exportieren. Die mentale Kapselung des mathematischen Wissens in einem thematisierten Schema wirkt simultan als Komplexitätsreduzierung und erzeugt eine mentale Entlastung im Problemlösungsprozess; ihr entspricht das *Geheimnisprinzip* der Implementationsdetails. Schließlich speichert ein *Modul* erworbenes und strukturiertes Wissen, es stellt daher eine *Wissensrepräsentation* dar. Der *Modularisierungsprozess* spiegelt dagegen den *Wissenserwerb*, d. h. die lernpraktische Konstruktion von Wissen wieder. Die didaktische Bedeutung der Modularisierung liegt daher in der *Konstruktion strukturierter Wissensrepräsentationen*.

Zusammengefasst kann man sagen: Die mentale *reflexive Abstraktion* zur mathematischen Konzeptbildung findet ihr homomorphes Pendant im *Modularisierungsprozess* zur programmiertechnischen Modulkonstruktion: Die strukturierten beziehungsreichen mentalen Objekte in der thematisierten Schemavorstellung eines mathematischen Konstruktes im Individuum entsprechen in dieser Interpretation ihrer materialen Realisierung als *strukturierte Daten und Operationen* im Modul. Damit werden die mentalen Strukturen, vermittelt über die modularen Strukturen in einem Verständigungsprozess, kommunikativ zugänglich gemacht.

Da eine Reduktion von programmiertechnischer Komplexität („Programmierung im Großen“) Expertenwissen darstellt und auf Grund des Prinzipes des inkrementellen CAS-Spracherwerbs „im Kleinen“ aus mathematisch-didaktischer Perspektive daher nicht zentral ist, geht aus schulischer Sicht *Modularisierung und Strukturierung vor Codierung* und obige Überlegungen lassen sich zusammenfassen als

Das Prinzip der Modulkonstruktion als strukturierte Repräsentation mathematischen Wissens („Modularisierungsprinzip“): *Die notwendige Erfahrung der Bedeutung von Struktur und Systematik in mathematischen Begriffsbildungsprozessen sollte durch prototypische Modularisierungen „im Kleinen“ durch selbsttätige Handlungen im CAS analytisch gefördert werden. Module sollten als CAS-Werkzeuge erfahren werden, die komprimierte Wissensblöcke der individuellen Wissensdomäne als Entitäten aufrufbar und (wieder)verwendbar machen.*

Betrachten wir dazu drei Beispiele.

```

Modularisierung im Kleinen: Euklidischer Vektorraum      (wL)

• vec := () -> matrix([args()]):                          #1#
• skp := (X,Y) -> _plus( X[i]*Y[i] $ i=1..nops(X) ):      #2#
• tr := M -> linalg::transpose(M):                       #3#
• skp1 := (U,V) -> (tr(U)*V)[1,1]:                      #4#
• skp2 := (X,Y) -> linalg::scalarProduct(X, Y):         #5#

• laenge := X -> sqrt( skp(X,X) ):                       #6#
• winkel:=(X,Y) -> arccos( skp(X,Y)/(laenge(X)*laenge(Y)))*180/PI: #7#
• winkel2:=(X,Y) -> arccos( skp(X,Y)/
    (sqrt(skp(X,X))*sqrt(skp(Y,Y)))*180/PI:             #8#

• write("EuklidVR");                                     #9#

```

Abbildung 2.35: Modularisierung der thematisierten Schemavorstellung „Euklidischer Vektorraum“.

Beispiel 1: eine Modularisierung der thematisierten Schemavorstellung „Euklidischer Vektorraum“. Am Ende des Erwerbs grundlegenden Wissens über das Skalarprodukt und elementarer Anwendungen im Rahmen einiger MAKE-Zyklen soll das erworbene Wissen (z. B. Definitionen und Sätze) in einem selbst geschriebenen Modul zur weiteren Verwendung strukturiert und systematisiert abgelegt werden. *Der Zweck liegt im (Re-)Konstruktionsprozess der Struktur (Vernetzung) selbst:* der Sammlung der verstreuten Definitionen und Sätze aus den Worksheets sowie ihrer folgerichtigen Anordnung zu einer „lokalen Ordnung“. Man beachte, dass in dem folgenden Modul also keine Definition des Begriffs „Euklidischer Vektorraum“ gegeben wird, sondern die schon aktuell entfaltete Grundvorstellung, d. h. die schon gewonnene thematisierte Schematisierung programmtechnisch reflektiert wird. Eine mögliche *strukturierte Modularisierung im Kleinen* des Konzeptes des Euklidischen Vektorraums zu diesem Zeitpunkt der Lerntrajektorie könnte im Ergebnis so aussehen wie in Abbildung 2.35.

Kommentar zu Abbildung 2.35. Zeile #1# erzeugt den Konstruktor zum Datentyp Vektor namens `vec`, d. h. zu eingegebenen Zahlen wird eine zugehörige $1 \times n$ -Matrix konstruiert. `vec` stellt eine bestimmte Sprech- und Schreibweise für Vektoren auf CAS-Sprachebene zur Verfügung, welche die Kommunikation erleichtern und die symbolische Notation kompaktifizieren soll: statt z.B. `X:= matrix([[1],[2],[3]])`; kann man damit gleichwertig einfacher sprechen und notieren `X:=vec(1,2,3)`.

#2# definiert das Skalarprodukt zweier Vektoren funktional mittels Sequenzoperator `$` und Summenbildung `_plus` über eine Zahlenfolge. `nops` berechnet die Länge der Zahlenfolge und macht die Definition damit dimensionsunabhängig.

#3#, #4# und #5# zeigen mögliche *alternative Implementierungen* des Skalarproduktes und

demonstrieren verschattete Details; der Nutzer von `skp` braucht (im Prinzip) nicht zu wissen, wie `skp` definiert wurde und welche Variante von `skp` zur konkreten Berechnung tatsächlich benutzt wird (Geheimnisprinzip, s. o.). `#5#` verwendet z. B. einfach die aus dem objektorientiert programmierten (Experten-) MuPAD-Modul `linalg` mittels des `::-` Importoperators exportierte Funktion `scalarProduct`¹⁰⁴; wie diese Funktion intern definiert ist, weiß der Nutzer nicht – die implementierte Definition ist verborgen.

`#6#` definiert die Länge(nfunktion) `laenge` eines Vektors `X` als Wurzel (`sqrt = square root`) aus dem Skalarprodukt von `X` mit sich selbst. `#7#` implementiert eine Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren. Mit der Anweisung `#9#` wird das Modul unter dem Namen `EuklidVR` auf der Festplatte im MuPAD-Wurzelverzeichnis abgelegt.

Die folgenden Screen-Shots zeigen die Nutzung des kleinen Moduls `EuklidVR` aus Sicht der Lernperson bzw. des Benutzers, z. B. bei Hausaufgaben oder im Abitur. Der `read`-Befehl wirkt als Interface und stellt die gewünschte Funktionalität des Moduls bereit, d. h. ein explizites Laden der Notebook-Datei `Euklid.mnb` mit den sichtbaren Implementationen ist nicht mehr nötig¹⁰⁵, weil ablenkend und störend – die Inhalte des Moduls sind als erworbenes Wissen ausgelagert, man konzentriert sich auf die Nutzung des Wissens zur Problemlösung, vgl. Abbildung 2.36.

`#1#` importiert das ausgelagerte Wissen in den aktuellen Speicher (Gedächtnis), d. h. *das Modul exportiert* sein Wissen für den Nutzer. In `#2#` werden Vektor-Paare im \mathbb{R}^2 konkret bzw. im \mathbb{R}^3 symbolisch notiert und anschließend werden Längen und Winkel berechnet.

`#7#` zeigt die Möglichkeit der *Definition eines neuen Datentyps `MatC` und einer erweiterten zugehörigen Operation `scalarProduct`*: komplexwertige Matrizen werden über den Datenkonstruktor `MatC` konstruiert; `MatC` selbst greift auf die vordefinierte Datenstrukturen des Matrizen-Dom(ain)s und den Domain der komplexen Zahlen zurück, d. h. `MatC` „sien“ alle Matrizen *von* komplexen Zahlen – genauso, wie man diese Definition liest, wird vom CAS das zugehörige Objekt konstruiert!¹⁰⁶ In `#8#` konstruiert man zwei komplexe Vektoren und wertet das verborgen implementierte `scalarProduct` auf ihnen aus, siehe Abbildung 2.37.

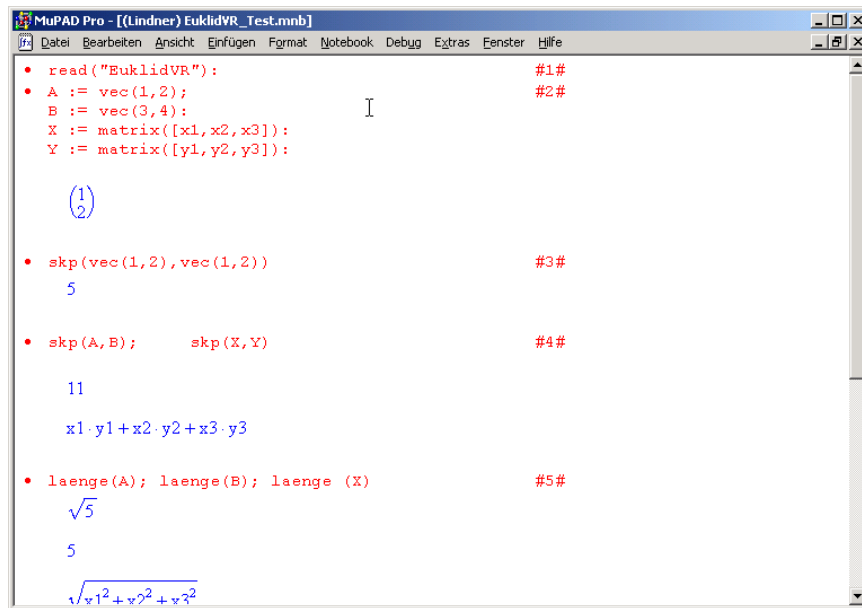
Bemerkung. Man beachte, dass das *im Modul abgelegte Wissen strukturiert* ist: Beispielsweise kann die Funktion `winkel` *nicht vor* der Funktion `laenge` und diese *nicht vor* `skp` definiert werden, da sie selbst in ihren Definitionen `#6#` auf die vorige Funktion zurückgreifen. Das CAS würde bei einer Konstruktion in umgekehrter Reihenfolge die jeweils unbekannte Funktion anmahnen. Die konstruierte Struktur ist *vertikal-linear*. Definiert man dagegen Winkel und Länge gemäß `#6#` und `#8#`, so resultiert eine *Baum-Struktur*, in der auf der zweiten Ebene Winkel und Länge in gleicher Abhängigkeit zu `skp` stehen.

Im Kurs wird die Aufgabe gestellt, Skalarprodukt, Länge und Winkel „gleichrangig“ zu

¹⁰⁴Erfahrungsgemäß vergessen CAS-Novizen diese Schreibweise; man schreibt `Scalarproduct` bzw. `skalarprodukt` o. ä. Alle diese Notationen werden vom CAS falsch interpretiert: MuPAD ist *case-sensitive*, d. h. es unterscheidet Groß- und Kleinschreibung – die Kommunikation CAS \rightleftharpoons Laie ist gestört.

¹⁰⁵Dies ist natürlich möglich, z. B. um das aktuelle Wissen der Schemavorstellung „Euklidischer Vektorraum“ um neue Bestandteile (z. B. weitere Funktionen) zu erweitern.

¹⁰⁶Dies ist im Vergleich mit einer entsprechenden Implementation in imperativen objektorientierten Programmiersprachen wie z. B. C++ eine erhebliche Vereinfachung.



```

MuPAD Pro - [(Lindner) EuklidVR_Test.mnb]
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Notebook Debug Extras Fenster Hilfe

• read("EuklidVR") : #1#
• A := vec(1,2); #2#
  B := vec(3,4);
  X := matrix([x1,x2,x3]):
  Y := matrix([y1,y2,y3]):

  (1)
  (2)

• skp(vec(1,2),vec(1,2)) #3#
  5

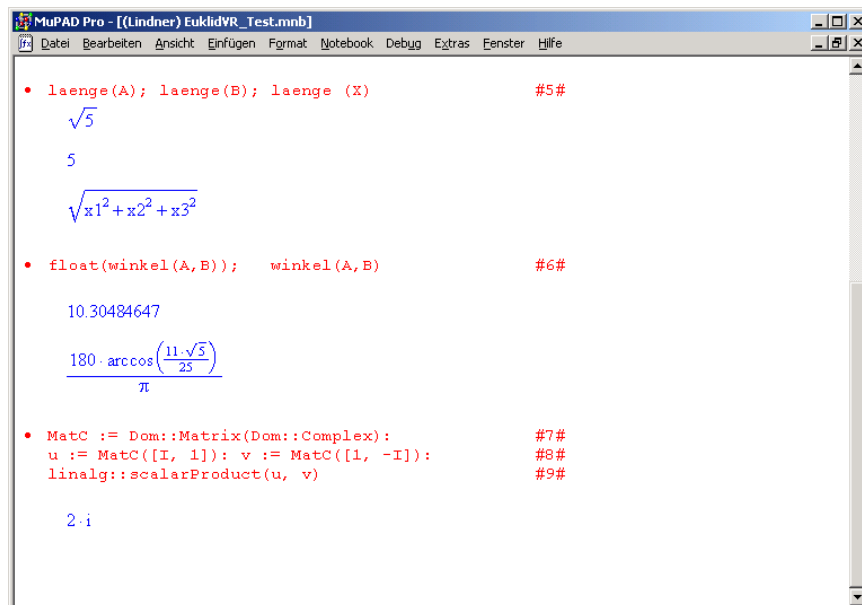
• skp(A,B); skp(X,Y) #4#

  11
  x1·y1+x2·y2+x3·y3

• laenge(A); laenge(B); laenge(X) #5#
  √5
  5
  √x1²+y1²+x2²+y2²+x3²+y3²

```

Abbildung 2.36: versteckter Wissensimport der thematisierten Schemavorstellung „Euklidischer Vektorraum“ mit anschließender Nutzung zur Berechnung der Länge von Vektoren bzw. dem Winkel zwischen zwei Vektoren.



```

MuPAD Pro - [(Lindner) EuklidVR_Test.mnb]
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Notebook Debug Extras Fenster Hilfe

• laenge(A); laenge(B); laenge(X) #5#
  √5
  5
  √x1²+x2²+x3²

• float(winkel(A,B)); winkel(A,B) #6#

  10.30484647
  180·arccos(11·√5/25)
  π

• MatC := Dom::Matrix(Dom::Complex): #7#
  u := MatC([1, 1]); v := MatC([1, -1]): #8#
  linalg::scalarProduct(u, v) #9#

  2·i

```

Abbildung 2.37: Ergänzung der thematisierten Schemavorstellung „Euklidischer Vektorraum“ um den neuen Datentyp `MatC` komplexwertiger Matrizen.

definieren. Dies verlangt die De-Thematisierung des erworbenen strukturierten Wissens: die via `skp` kompaktifizierte Definition der Länge¹⁰⁷

```
• laenge := X -> sqrt( skp(X,X) )
```

wird dazu entpackt

```
• laenge := X -> sqrt( _plus( X[i]*Y[i] $ i=1..nops(X) ) )
```

und ergibt als CAS-Antwort die übliche Explizitformel: $X \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}$. Eine direkte Definition des Winkels kopiert man analog aus der expliziten Längenformel zusammen; wertet man dies mit variablen Vektoren aus, so teilt das CAS die gewünschte Explizitformel in mathematischer Notation mit:

```
• winkel:=(X,Y) -> arccos(_plus(X[i]*Y[i] $i=1..nops(X))
                        /
                        ( sqrt(_plus(X[i]*X[i] $i=1..nops(X))
                          *sqrt(_plus(Y[i]*Y[i] $i=1..nops(X)))
                        )*180/PI
```

```
A := vec(x1,x2):
```

```
B := vec(y1,y2):
```

```
winkel(A,B);
```

$$\frac{180 \cdot \arccos\left(\frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}\right)}{\pi}$$

Der Lernende erkennt den Wert strukturierender Reflexionen und ihre wissensbildende Kraft. Zugleich demonstrieren die Moduldefinitionen den Sinn abkürzender Definitionen. Die vorstehenden Überlegungen kann man wie folgt zusammenfassen:

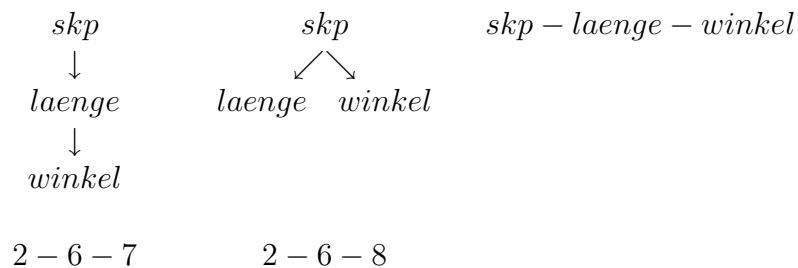


Tabelle: Unterschiedliche Modulstrukturen als Modell einer mentalen Wissenskonstruktion im CAS: *Vertikale* bzw. *baumartige* bzw. *horizontale* Struktur je nach Abhängigkeit der Definitionen im CAS-Modul. „2-6-7“ bedeutet, dass die Definitionen #2# und #6# und #7# des Moduls aktiviert wurden.

¹⁰⁷Hier sieht man wieder sehr schön die Auswirkung des Prinzips der funktionalen Programmierung: Die Länge eines Vektors X ist die Wurzel (= „`sqrt`“) aus dem Skalarprodukt (= „`skp`“) des Vektors mit sich selbst (= „`X,X`“) – man liest den Code wie man denkt bzw. spricht.

Dies kann im Unterrichtsverlauf thematisiert werden und führt zu durchaus unterschiedlichen Vernetzungen, die entsprechend in den individuellen Konzeptkarten der Lernenden im metakognitiven Rückblick kondensieren könnten. Der Prozess der strukturierten Wissenskonstruktion wird jedenfalls exemplarisch CAS-gestützt als solcher thematisierbar und produziert in der Folge ein allgemeinbildendes strategisches Meta-Wissen.

Beispiel 2: lernerseitige Modularisierung des GAUSS-Algorithmus – ein Modul zur GAUSS-Elimination. Dieses Beispiel demonstriert die Verwendung von Hilfsfunktionen, wie sie oben beschrieben worden waren. Das zugehörige Modul und das in ihm strukturiert niedergelegte Wissen ist von den Lernenden in einer CAS-Stationenarbeit im MAKE-Design (partiell) selbst zu konstruieren. Innerhalb eines MuPAD-Worksheets wird das Modul von den Lernenden erstellt und als Datei „GaussEli“ mittels der MuPAD-Prozedur `write(..)` in unlesbarem Binärformat gekapselt oder unter den „Initialisierungskommandos“ innerhalb des Worksheets versteckt. Das Modul wird anschließend innerhalb eines Schüler-Worksheets mittels `read(..)` aufgerufen und verwendet:

```

• read("GaussEli"); export(linalg, nrows, ncols, col):
  B:=matrix([[ 2, 4,-2, 2],      // 2x+4y-2z = 2
             [ 4, 9,-3, 8],      // 4x+9y-3z = 8
             [-2,-3, 7,10]]);    // -2x-3y+7z = 10
  v:=col(B,1); Gdown(col(B,1),1); Elimination_(B);

[ 2, 4,-2, 2]
[ 0, 1, 1, 4]
[ 0, 0, 0, 8]

```

Eine anschließende Aufgabe¹⁰⁸ könnte verlangen, die Modulimplementation in MuPAD nachzuvollziehen und die MuPAD-Wissensbasis um Kenntnisse der unbekanntenen, aber zur Konstruktion von `Gdown` bzw. `Elimination_` verwendeten `linalg`-Library-Funktionen wie `nrows`, `ncols`, `col` zu ergänzen. Dazu kann man z. B. die MuPAD-Hilfe aufrufen. □

Beispiel 3: expertenseitige Moduln `latoools` und `digraph`. Das Modul `latoools` wurde vom Autor nach vorliegenden Tools von STRANG [193] entwickelt; dort lag das Modul als Mathematica sowie Maple-Quelltext vor. Die entsprechenden Codestrecken wurden nach MuPAD portiert¹⁰⁹ und um weitere Prozeduren, z. B. zur *Visualisierung von Projektionen*¹¹⁰, erweitert. Die dort versteckt implementierten Routinen werden von den Lernenden zur Nutzung im Lernprozess bzw. Problemlösungsprozess exportiert. Eine mögliche selbstständige Programmierung übersteigt die zeitlichen und programmiertechnischen

¹⁰⁸Eine ausführliche Darstellung dieses Beispiels findet sich in LINDNER [154].

¹⁰⁹Mit freundlicher Unterstützung durch M. IGEL von der MuPAD-Group; er schrieb auch ein zugehöriges MuPAD-L^AT_EX-Handbuch mit Hyperlinks.

¹¹⁰teilweise veröffentlicht in LINDNER [153]

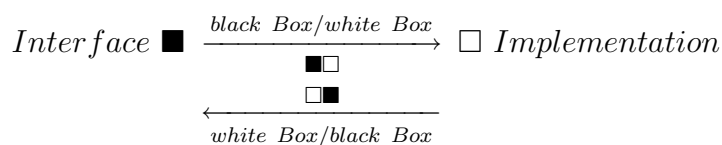
Ressourcen von Lernenden und fördert keine allgemeine mathematische Wissensbildung – dieses Modul wird daher *als Fertigprodukt zur Verfügung gestellt*. In ähnlicher Weise kann aus dem Modul **digraph** Wissen exportiert und eine Lerntrajektorie zum Einstieg in die Matrizenrechnung¹¹¹ designed werden.

Zur Diskussion des Modularisierungsprinzips

Die Einkapselung von erworbenem Wissen im CAS erfolgt üblicherweise in drei Phasen: Nach einer *ersten Phase* mit Aktivitäten wie Verstehen, Strukturieren, Aufspüren von Wissensseinheiten innerhalb eines Problembereichs kommt es in einer *zweiten Phase* zum interaktiven Implementieren, Testen, Dokumentieren des Wissens im CAS; hier findet die eigentliche Komprimierung bzw. Kapselung zu Modulen in der CAS-Sprache statt. In einer *dritten Phase* werden Problemlösungen mit Hilfe der Module möglich: Deren Funktionen, Algorithmen und Kalküle stehen nun als Ganzes zur Verfügung und werden als gedankliche Einheiten im Problemlösungsprozess aufgerufen. Die hiemit verbundene Vereinfachung auf der Problemlösungsebene verschiebt den Schwerpunkt der mathematischen Tätigkeit von der Operation auf die Reflexion: auf mentale Lösungsstrategien, Heuristiken und andere Planungstätigkeiten.

In Zusammenhang mit dem Modularisierungsprinzip diskutiere ich abgrenzend noch zwei verwandte Konzepte der CAS-Didaktik: das *BlackBox-WhiteBox-Prinzip* von Bruno BUCHBERGER und das *Auslagerungsprinzip* von Werner PESCHEK.

Modularisierungsprinzip vs. BlackBox-WhiteBox-Prinzip. Aus der Sicht des Modularisierungsprinzips lassen sich zwei verschiedene Nutzungsformen eines Moduls unterscheiden, unabhängig davon, ob es schülerseitig *erstellt* oder expertenseitig *bereitgestellt* wird:



■□: Die Lernenden können einerseits die Funktionalität eines vorgegebenen Moduls über sein sichtbares Interface (Aufrufbefehl) z. B. zum Experimentieren mit linearer Abhängigkeit nutzen, ohne die Implementation des zugehörigen Konzeptes zu kennen. Da die Definitionen der wirkenden Funktionen für die Lernenden verborgen („verschattet“ bzw. „im Dunkeln liegend“) sind, arbeiten sie in einer *BlackBox-Phase*. Wird im Anschluss die Implementation (z. B. die zugehörige symbolische Formulierung) aufgedeckt, studiert, bearbeitet, abgewandelt oder rückwirkend rekonstruiert, so gehen sie in eine Phase verstehenden Lernens über, in eine *WhiteBox-Phase*. Insgesamt haben sie daher eine BlackBox→WhiteBox-Lerntrajektorie durchlaufen. Das Interface wird also als „schwarzer Kasten“ interpretiert, dessen Inhalt im Verlaufe des Lernprozesses bekannt gemacht („aufgehellt“) wird.

Eine solche Modulnutzung dient z. B. zur Erforschung einer unbekanntem mathematischen

¹¹¹vgl. LINDNER [152, S. 199 ff]

Wissensdomäne mit Hilfe des CAS als Experte. Sie realisiert die heuristisch-experimentelle A-Phase in einer Windung des A.C.E.-Zyklus und stellt ein ohne CAS-Nutzung bisher so nicht mögliches unterrichtliches Lernarrangement dar. Mögliche Aktivitäten sind u. a. die experimentelle Beobachtung der Wirkung eines bisher unbekanntes Algorithmus (z. B. der Kettenregel) oder das Generieren von Hypothesen für nachfolgende Exaktifizierungsphasen. Die WhiteBox-Phase dient bei dieser Nutzung zur Konzeptualisierung bzw. Exaktifizierung der gebildeten Hypothesen bzw. Grundvorstellungen. Dabei können begriffliche Argumentationen bzw. Beweisführungen in der C-Windung des ACE-Zyklus die Konzeptbildung abrunden (z. B. Beweis der Kettenregel).

□■: In einer „WhiteBox-Phase“ führt der CAS-Unterricht z. B. nach dem MAKE-Zyklus einsichtsvoll zur Gewinnung eines mathematischen Konzeptes oder zum Verständnis eines Algorithmus; dieses Wissen wird in einem Modul implementiert. Gegebenenfalls werden „alte“-CAS-Module („Boxen“) verwendet, die schon eine frühere erhellende Phase durchlaufen haben und deren Inhalt zum erworbenen Wissensbestand zählt. Ein Beispiel ist der Erwerb von Grundfertigkeiten zum Lösen linearer Gleichungssysteme. Anschließend „BlackBox“-Phasen wenden die entwickelten mathematischen Konzepte bzw. Algorithmen als erworbenes Wissen durch verständige Aktivitäten über das Interface in Problemlösungsprozessen an. Die vorher verstandenen Operationen werden jetzt vom CAS „blind“ ausgeführt: Die weiße Box wird geschwärzt („zugeklappt“), d. h. operatives Modulwissen wird an das CAS zweckhaft ausgelagert.

Man beachte, dass die in einem Modul gespeicherte Kompetenz ggfs. partiell erhalten bleiben muss (z. B. grundlegende Umformungstechniken, Regeln oder Definitionen), d. h. ein Modul – hier interpretiert als BlackBox – wird gelegentlich wieder zu einer WhiteBox „aufgeklappt“. Ein eventueller Zeitgewinn durch BlackBox-Phasen in Problemlöseprozessen kann für zusätzliche metakognitive Aktivitäten genutzt werden.

In dieser Interpretation erscheint das sog. □■-■□-„Prinzip“ von BUCHBERGER also lediglich als spezielle Modulsicht und wird daher hier unter das *Prinzip der Modularisierung* subsumiert. Dennoch spreche ich gelegentlich auch von einer BlackBox bzw. WhiteBox, um in anschaulicher Weise die Fokussierung auf Interface bzw. Implementation-Sicht eines Moduls zu betonen.

Die Möglichkeit zur Modularisierung erweist sich als Kernkompetenz eines CAS, aus der sich alle bekannten Prinzipien ableiten bzw. als Varianten interpretieren lassen. Dies optimiert und verschlankt insofern das hier betrachtete Lernmodell.

Anmerkungen:

1. BUCHBERGER hatte ursprünglich ein WhiteBox/BlackBox-Modell formuliert, in dem die „weiße Phase“ ohne PC-Tätigkeiten stattfinden sollte. Durch Unterrichtserfahrungen (insb. von HEUGL) wurden später auch in dieser Phase Computeraktivitäten zugelassen. Dies deckt sich mit dem Vorgehen im (M)A.C.E.-Zyklus.
2. Man beachte auch, dass in obiger Interpretation die BlackBox/WhiteBox-Sicht auf die Nutzungsform von Modulen bezogen ist. Manchmal wird auch in dieser Arbeit in umgangssprachlicher Weise von „BlackBox“ gesprochen, wenn lediglich einzelne wirkungs-

unbekannte Funktionen o. ä. betrachtet werden. Dies wird aber aus dem Kontext klar werden.

Modularisierungsprinzip vs. Prinzip der „Auslagerung des Operativen“. PESCHEK formulierte sein Auslagerungsprinzip ursprünglich als Anti-These zum ursprünglichen WhiteBox-BlackBox-Prinzip von BUCHBERGER, dem die didaktische Empfehlung zu Grunde lag, erst *nach* einer CAS-freien mathematischen Behandlung eines Konzeptes das CAS in Problemlösungsphasen als „BlackBox“ einzusetzen. PESCHEK [170, S. 407] formuliert dazu:

Die mathematische Ausbildung sollte sich bei der Einführung wie auch bei der Anwendung mathematischer Konzepte zeitgemäßer Mittel bedienen; sie sollte insbesondere auch versuchen operatives Wissen und operative Fertigkeiten an diese **auszulagern**, soweit dies didaktisch sinnvoll möglich ist. Sie hat dabei darauf bedacht zu sein, die Lernenden

- zur effizienten Nutzung von mathematischen Black Boxes
- zur Beurteilung der Voraussetzungen, Wirkung, Reichweite und Grenzen der verwendeten Black Boxes und
- zur Einsicht in die wissenschaftstheoretische wie auch gesellschaftliche Bedeutung der Verwendung mathematischer Black Boxes zu befähigen. Ich nenne diese didaktische Prinzip **Auslagerungsprinzip**.

Es wird also explizit die Verwendung von CAS in der *Einführungsphase* empfohlen, d. h. aus der hier vertretenen APOS-Perspektive in der A/P-Phase einer Konzeptformung. Dies ist aber schon Standpunkt der APOS-Theorie ab ca. 1985. Auch PESCHEK's Sicht der BlackBoxes ist nicht neu und – wie oben näher ausgeführt – im Bereich der sog. objekt-orientierten Programmierung (OOP) als Software-Design-Prinzip schon länger bekannt. Ein Urteil über Voraussetzungen, Grenzen etc. eines Moduls setzt m. E. jedoch einen Blick in seine Implementation (WhiteBox) voraus. Auch für PESCHEK [172, S. 15]¹¹² sind zudem die Konzepte Modul und BlackBox identisch:

In der Mathematik arbeiten wir ständig mit der Methode des *outsourcing*. [...] Man braucht nicht zu wissen, warum der Divisionsalgorithmus funktioniert, mit dem man arbeitet, um die richtige Antwort beim Dividieren zu erhalten [...]. Man benutzt viele dieser mathematischen Konzepte und Prozeduren als „Kompromiss“¹¹³–Wissensstücke, als *Module*, von denen man sehr wohl die Wirkungen kennt und die Interfaces nach außen, um sie korrekt anzuwenden, aber ihre interne Funktionsweise nicht kennt. (Solche Module, für die der Benutzer die interne Funktionsweise nicht kennt, nennt man häufig „Black Boxes.“)

Damit liegt kein elaboriertes Modulkonzept vor und Module erscheinen insbesondere nicht als *systematisierte Wissensauslagerungen*. Auch seine Interface-Interpretation ist schon bei MÖSSENBÖCK [163, S. 22] nachweisbar:

Ein Modul ist ein Baustein mit einer klar definierten *Schnittstelle*, der benutzt werden kann, ohne zu wissen, wie er implementiert ist und der implementiert werden kann, ohne zu wissen, in welchem Zusammenhang er später benutzt wird.

¹¹²eigene Übersetzung

¹¹³im Original: *compromised bits*

Ähnlich formuliert auch R. FISCHER:

Wie bemühen uns, diese Wissenschaften [z. B. Mathematik; wL] verständlich zu machen, obwohl ihr Wert für die Gesellschaft gerade darin liegt, dass sie funktioniert, ohne dass man sie versteht.

und später PESCHEK [170, S. 406]:

Mathematik ist relativ gut gesichertes, sozial ausgehandeltes, kodifiziertes Wissen, das in besonderem Maße eine Trennung von Verstehen und Tun zulässt. [... und] auch dann funktioniert, wenn der Anwender schon längst nicht mehr weiß warum.

Der Verdienst von PESCHEK besteht m. E. daher eher darin, dieses Prinzip in seiner Bedeutung und Wirksamkeit für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht herausgehoben und explizit in dem Wort „*Auslagerungsprinzip*“ griffig gefasst zu haben. Das Auslagerungsprinzip selbst ist durch das Prinzip der Modularisierung allerdings bereits hinreichend erfasst. Zudem ist die Auslagerung mathematischer *Operationen* bereits auf dem P-Niveau mittels *Prozeduren (Funktionen)* zu realisieren und benötigt keine Module. Analysiert man die unter der Projektleitung von SCHNEIDER/PESCHEK herausgegebenen Lehrbücher zur Analysis von PRUGGER [176, S. 12] nach erkennbaren BlackBoxes (z. B. im Umkreis der Kettenregel), so lassen sich i. d. R. nur einzeilige Funktionen bzw. Prozeduren rekonstruieren. Eine systematische Verdichtung zu Modulen ist nicht erkennbar, wohl aber die von PESCHEK [170, S. 407] im *Auslagerungsprinzip* gewünschte *Verlagerung* „von syntaktisch-operativen Tätigkeiten hin zu semantisch-begrifflichen“.

PESCHEK sieht ein CAS nach obiger Analyse eher als *programmierbaren grafischen Taschenrechner* denn als systematisch geordnete Wissensdomäne, die ihr gebietsspezifisches lokales Wissen in Modulen organisiert und auf gezielte Anfrage anbietet. Kritisch ist zudem anzumerken, dass ausgelagertes Wissen immer „schon erworbenes Wissen“ ist, im Lernprozess geht es aber vornehmlich um den Erwerb von Wissen, d. h. eines werdenden Wissens als Vorstufe und Voraussetzung für eine anschließende Auslagerung des erworbenen systematisierten Wissens. Das oben formulierte Modularisierungsprinzip mit dem Import/Export-Schema bzw. dem Kapseln/Entkapseln von Wissen beschreibt die Idee der Auslagerung hinlänglich. Ein spezielles Prinzip der „Auslagerung des Operativen“ wird daher hier nicht aufgenommen.

Anmerkungen:

1. KUTZLERS Gerüstmethode erweist sich im Kern als variantenreiche¹¹⁴ Verwendung der WhiteBox-BlackBox vs. BlackBox-WhiteBox-Strategie¹¹⁵. KUTZLER versteht Module wesentlich als BlackBoxes; aus seinen Beispielen wird klar, dass damit i. d. R. einzelne *Prozeduren* gemeint sind, die algorithmische Aufgaben automatisieren. Insbesondere werden *Moduln, Makros und Black-Boxes identifiziert*, vgl. KUTZLER [142, S. 38] :

¹¹⁴KUTZLER schlägt 5 Anwendungsformen vor, gestuft nach der „Wichtigkeit“ der *grundlegenden* Fertigkeit A, auf die eine nachfolgende Fertigkeit B aufbaut.

¹¹⁵„Nach welchen Richtlinien soll der ‚Hausbau mit Computeralgebra-Gerüst‘ erfolgen? Ab wann soll/darf eine Operation automatisiert, d. h. zur Black-Box werden?“, [a. a. O., S. 34].

Es ist eine grundlegende Methode in der Mathematik, etwas, das einmal erarbeitet wurde nachfolgend zu verwenden. [...] Die Verwendung dieses *Modul-, Makro- oder Black-Box-Prinzips*¹¹⁶ wird daher auf die Schüler [...] generelle Bildungswirkung im Sinne der mathematischen Arbeitsweise haben.

Dagegen ziehe ich eine Unterscheidung von Modulen als thematisierte Schemavorstellungen auf dem S-Niveau und den prozeduralen Prozessvorstellungen auf dem P-Niveau im Sinne der APOS-Theorie vor. Die *Gerüstmethode* von KUTZLER ist eher als *funktionales Programmieren* elementarer mathematischer Algorithmen verstehbar.

2. Im Zusammenhang einer kurzen Diskussion von Prinzipien des Computer-Einsatzes geht HUSSMANN [128, S. 38] auf das Modulprinzip ein: „Module entstehen durch das Zerlegen eines Problems in eigenständige Teile.“ Diese *problemlösungsorientierte* Auffassung von „Modul“ deutet eher auf die Anwendung des *Divide&Conquer*¹¹⁷-Prinzips in einem *Problemlösungsprozess zur Algorithmenkonstruktion* hin als auf einen *Modularisierungsprozess mit strukturierten Daten und Operationen zur Wissensorganisation* mit einer Aufteilung in Interface und Implementation. Auch die Aussage „Die Modularisierung von Problemen ist von essentieller Bedeutung für diese Prozesse, da sie komplexes Wissen komprimiert.“ fokussiert erneut auf *Probleme*, während ein CAS-Modul Daten und Operationen *systematisiert*. Wie oben ausgeführt ist der Aspekt der Komplexität als Expertenperspektive schulisch irrelevant; nicht rekonstruierbar ist auch, wie eine Komprimierung realisiert wird: möglicherweise wird unter „Komprimierung“ die Benennung einer Prozedur mit einem aufrufbaren Prozedur-Namen verstanden.

HUSSMANN bezieht überdies das Modulprinzip auf KUTZLER's Gerüstdidaktik und ordnet es dieser sogar unter: „Die vierte Methode der Gerüstdidaktik enthält sozusagen die von den Schülerinnen erzeugten Module, welche im Rahmen des Begriffsbildungsprozesses von KLIP die maßgeblichen sind. Damit ist das Modulprinzip auch Teil der Methode 5 der Gerüstdidaktik.“ Aus der hier vertretenen Sicht ist dies nicht zulässig; denn umgekehrt gilt: Eine Modularisierung als Konstruktion von auslagerbarem strukturierten Wissen (nämlich Objekten und den zulässigen Operationen auf diesen Objekten) ermöglicht erst die mit dem Gerüstprinzip vorgeschlagenen Kompensations- oder Konzentrationsmethoden als BlackBox-Varianten.

Offenbar versteht HUSSMANN Module auch als einzelne vorhandene oder selbst geschriebene Funktionen des CAS [a. a. O., S. 64]: „Das Modul 'Integral berechnen'¹¹⁸ schafft der Schülerin Freiraum, sich auf die Zusammenhänge von Funktion und Stammfunktion zu konzentrieren. [...] Der Grenzwert von Produktsummen lässt sich wiederum als Modul programmieren [...]“.

Ein „echtes“ Modul ließ sich in HUSSMANN [128] nicht auffinden. Rekonstruierend lässt sich daher vermuten, dass *Module* bei HUSSMANN einzelne oder gesammelte *problemlösende Prozeduren* bzw. DERIVE-Funktionen sind, die als BlackBox agieren und in einen

¹¹⁶Kursivsatz von mir

¹¹⁷vgl. z.B. OTTMANN [167, S. 1–24]

¹¹⁸gemeint ist der INTEGRATE-Befehl von Derive

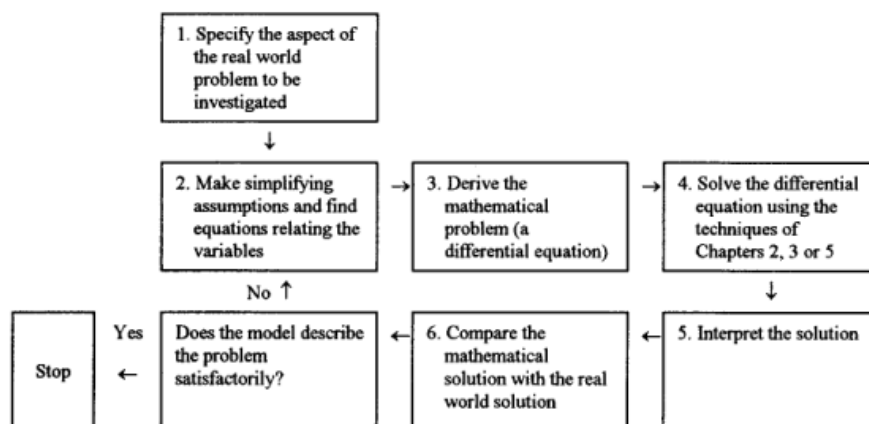


Abbildung 2.38: Modellierungsphasen nach TOWNEND & POUNTNEY.

Divide&Conquer-Lösungsprozess eingebunden sind. Der m. E. entscheidende allgemeinbildende Aspekt der Module als strukturierte mathematische Wissensrepräsentationen wird damit aber nicht erfasst: Module enthalten eben i. d. R. auch thematisch zugehörige Definitionen, Hilfsfunktionen, systematisch geordnete Operationen (Prozeduren) etc. und die Modularisierung besteht in der Konstruktion eines solchen Moduls. Problemlösungs- und Modellierungsprozesse können dann anschließend mit Hilfe solcher Modulen effizient unterstützt werden.

2.4.6 Das Prinzip der moderaten Modellierung

Nach der OECD-PISA 2000 Konzeption ist der Erwerb von Grundqualifikationen ein lebenslanger Prozess, der im Bereich der Mathematik zur „*mathematical Literacy*“ führen soll. Als Kern einer mathematical Literacy werden begriffliches Verstehen und mathematisches Modellieren von innermathematischen oder realitätsbezogenen Kontexten (Situationen, Problemstellungen) angesehen. Die dahinter stehende mathematik-didaktische Konzeption von FREUDENTHAL ist als *Realistic Mathematics Education* (RME) bekannt.

Die Lösung realistischer Problemstellungen als Modellierungsprozess. Die konkrete Bearbeitung und Lösung einer mathematischen Aufgabenstellung wird dabei als Prozess¹¹⁹ der *Erstellung, Verarbeitung, Interpretation* und *Validierung* eines mathematischen Modells verstanden, vgl. Abbildung¹²⁰ 2.38.

Dabei unterscheidet man i.d.R. folgende Phasen, die ich hier nur kurz skizziere und mich im Wesentlichen auf die Monographie von TOWNEND [199] stütze.

¹¹⁹vgl. BAUMERT [15, S. 141 ff.]

¹²⁰Ähnliche Abbildungen findet man u. a. bei LOWE [160, S. 2] als 7-Box-Phasenschema nach Empfehlungen der Open University (UK) und wohl erstmalig bei BURGHES [24].

- *Modellbildung*: Eine vorliegende problemhaltige Situation wird in eine innermathematische Problemstellung übersetzt, d. h. mathematisiert.
- *Verarbeitung*: Ausgehend von einem Ansatz im mathematischen Modell (d. h. einer Gleichung, einer funktionalen Beziehung o. ä.) sucht man nach mathematischen Lösungen.
- *Interpretation*: Die gewonnene(n) Lösung(en) wird noch innerhalb des mathematischen Kontextes auf Konsequenzen überprüft.
- *Validierung*: Die gewonnene(n) Lösung(en) wird aus dem mathematischen Kontext in die situative Einbettung rückübersetzt und prüfend auf ihre Gültigkeit in Bezug auf die Ausgangssituation beurteilt.

Ein mathematisches Modell ist also die Übersetzung eines Realweltproblems in ein mathematisches Analogon. Dieses wird stellvertretend gelöst und die erhaltene Lösung in den Originalkontext rückübersetzt. Das Bündel an zugehörigen Tätigkeiten der einzelnen Phasen nennt man „modellieren“.

Didaktische Aspekte des Modellierungsprozesses nach TOWNEND & POUTNEY. Der Modellbildungsprozess ist wissenschaftspropädeutisch orientiert, prinzipiell mit „offenem Ende“, und wird im Verfeinerungsfall iterativ durchlaufen. Dieses Vorgehen ist oft diametral zur vorherrschenden „1-Problem-1-Lösung“-Erwartung bzw. Erfahrung der Lernenden. In der Modellkonstruktionsphase werden von TOWNEND & POUTNEY „4er“-Kleingruppen mit Kreativitätstechniken (wie z. B. brain-storming) zur Produktion von ranggeordneten Eigenschafts- und Annahmelisten empfohlen. Nur in solchen Gruppen (zufallsgebildet oder gemischt rangselektiert) könnten Entwurfsideen in der nötigen Vielfalt hervorgebracht, ausgetauscht, kritisiert und verteidigt werden. Dabei sollte ein Moderator (Lehrer) nicht mehr als sechs 4er-Gruppen betreuen.

Zur Beurteilung der individuellen Schülerleistung handelt die Gruppe intern einen Gewichtungsfaktor (<1) für jeden Einzelteilnehmer aus, dieser wird von der Lehrperson auf die Gesamtleistung der Gruppe angewendet. Eine traditionelle zeitbeschränkte Lernerfolgskontrolle scheint dem offenen kreativen Modellbildungsprozess unangemessen. Als Bewertungsgrundlage sollten vielmehr ein schriftlicher Bericht (foliengestützter Report) und/oder eine verbale bzw. postergestützte Präsentation zählen; dabei werden interpersonale mündliche und schriftliche Kommunikationsskills ausgebildet.

Vorteile des Einsatzes von CAS im Modellierungsprozess. Die Fokussierung auf metakognitive Reflexionen im eigentlichen Modellbildungsprozess regt zur Auslagerung von Rechenoperationen oder graphischen Validierungen an. Durch Nutzung des CAS resultiert eine Schonung der Zeitressourcen im Lernprozess und eine eventuell notwendige Iterierung der Modellbildung wird emotional¹²¹ erleichtert. Auch die Behandlung realistischerer

¹²¹Umfangreiche oder komplizierte Rechnungen möchte man nach einer Fehlerentdeckung ungerne wiederholen.

Problemstellungen wird möglich, wobei die interaktive Kleingruppenarbeit in CAS-„Laboratmosphäre“ den Enthusiasmus für Mathematik erhöhen und professionelle Arbeitsformen anbahnen soll.

Trotz der unbestreitbaren Vorteile eines CAS im Modellbildungsprozess erwiesen sich bei der unten berichteten Erprobung von CAS-Kursen in Linearer Algebra und analytischer Geometrie die Modellbildungsphasen als *Zeitfallen* und für eine „positive“ *Beliefbildung als kritisch*. In der Regel konnten die zu Beginn eines Themas gestellten *einleitenden* Modellierungsaufgaben nur von ca. 20–30% der Lernenden erfolgreich bearbeitet werden. Aus Sicht der APOS-Theorie platziert man Modellbildungen m. E. daher strategisch besser in die E(xercise)-Phase eines MAKE-Zyklus. Ich formuliere daher das

Prinzip der moderaten Modellierung: *Umfangreichere CAS-gestützte Modellbildungsprozesse sollten maßvoll und nicht zu komplex erst zum Abschluss einer mehrstündigen (MAK)E-Phase angeboten werden, um die vorher konstruierten Wissensmodule angemessen einzusetzen, das Selbstbild zu stärken und negative Affekte gegenüber der Mathematik minimieren zu können.*

Beispiele für einleitende und ausklingende Modellierungsprobleme in einer CAS-intensiven Linearen Algebra zeige ich später im Kontext der Darstellung der empirischen Resultate dieser Untersuchung.

2.4.7 Das SONG-Prinzip

Das sog. „*Window-Shuttle*“-Prinzip nach DÖRFLER ist ein weiteres didaktisches Prinzip speziell für den CAS-gestützten Mathematik-Unterricht. Es handelt sich um eine CAS-gemäße Realisierung des didaktischen *Prinzips der multiplen Repräsentation* bzw. des bekannten BRUNERSchen E-I-S-Prinzips¹²² zur variationsreichen Darbietung bzw. Darstellung von Lerngegenständen.

Die Window-Shuttle-Technik. Schon in älteren Versionen des CAS Derive konnte man den Benutzer-Bildschirm in zwei Fenster („Windows“) teilen: ein „Algebra“- (Text)Fenster zur Eingabe von Formeln und ein Grafik-Fenster mit Zeichnungen. Zwischen diesen gleichzeitig offenen Fenstern konnte der Benutzer auf Tastendruck bzw. Mausklick wechseln. Daher der Name „Window-Shuttling“, vgl. Abbildung 2.39.

Neuere CAS wie MuPAD¹²³ bieten die gleiche Funktionalität, jedoch werden Grafiken unmittelbar an geeigneter Stelle in das Arbeitsblatt integriert. Mit der Maus kann man dabei den Fokus auf den Anweisungstext oder die eingebettete Grafik setzen, d. h. zwischen Text und Grafik wechseln („shutteln“).

Funktionen des CAS im Lernprozess beim Window-Shuttling. In übertragenem

¹²²also: **Enaktiv-Ikonisch-Symbolisch**, d. h. „handelnd vs. bildhaft vs. sprachlich“

¹²³oder MATHPIPER oder DGS wie GEOGEBRA

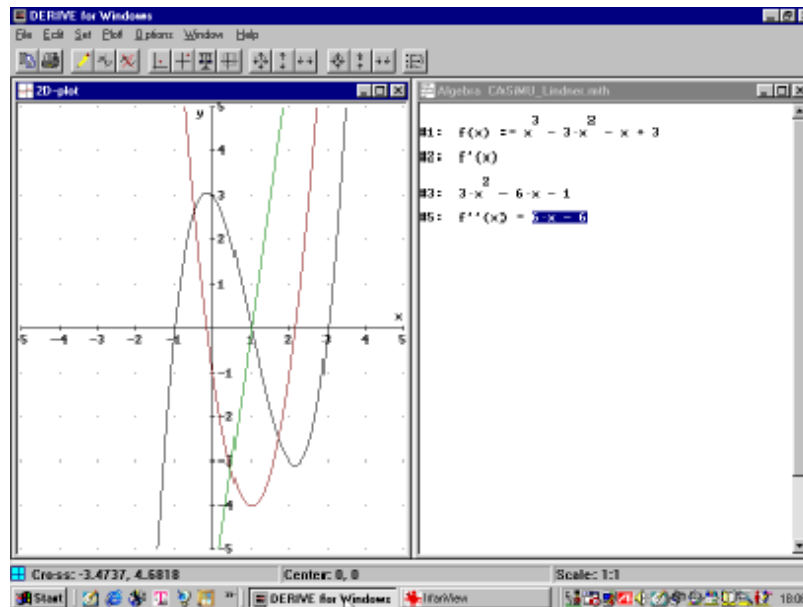


Abbildung 2.39: Per Windows-Shuttling wechselt man in Derive 4.11 zwischen den simultan geöffneten Algebra- und Plot-Fenstern.

Sinne beruhen darauf die neuen CAS-didaktischen Möglichkeiten, in verschiedenen „gedanklichen“ Fenstern auf einem CAS-Worksheet mehrere Darstellungsarten eines Objekts gleichzeitig zu verwenden. DÖRFLER [50, S. 51 ff] bemerkt dazu:

Denkprozesse erfolgen oft vorteilhaft anhand gegenständlicher Vorstellungen, Repräsentationen, Modellierungen der jeweiligen Problemsituation. [...] Es wird i. Allg. mental nicht abstrakt mit definierten Eigenschaften [...] operiert, sondern gegenständlich mittels der mentalen Vorstellung charakteristischer Exemplare oder sogar direkt an materiellen prototypischen Repräsentanten.

Deshalb sollte man dem Lernenden zunächst verschiedene Prototypen eines Konzepts präsentieren und Relationen zwischen diesen Prototypen aufzeigen lassen. Erst danach sei eine sinnhafte Abstraktion zu einer z. B. verbalen Definition eines Konzeptes sinnvoll. Bekannte didaktische Vorteile von CAS in diesem Zusammenhang sind u. a.:

- die *Darstellung verschiedener Repräsentationen* eines Problems/Konzepts simultan *in verschiedenen Fenstern*
- die Beobachtung der *Auswirkungen von Manipulationen* an Termdarstellungen auf die zugehörige Graphik
- die Untersuchung von *interaktiven Parameterabänderungen* auf tabellarische Darstellungen
- die *Stimulierung von Begriffsbildungen* resp. Problemlösungen durch iteriertes Shuttlen zwischen verschiedenen Darstellungen im CAS-Worksheet.

Wir formulieren daher das

Prinzip des Window Shuttling alias das „SONG“-Prinzip: *Jedes neue mathematische Konzept sollte numerisch, graphisch, analytisch und deskriptiv (re)präsentiert werden. Dabei ist ein CAS zu einem raschen Wechsel bzw. der Vernetzung zwischen diesen multiplen Repräsentationen hilfreich.*

Anmerkungen:

1. Mit dem memotechnischen Merkwort „SONG“ habe ich das CAS-Prinzip der multiplen Repräsentation deshalb benannt, um an symbolische, mottoverdichtete (z. B. als umgangssprachlicher „Merksatz“), numerische und graphische Darstellungsmöglichkeiten eines Konzeptes zu erinnern. *Die Einführung eines neuen Konzepts wird so beschreibbar als didaktischer Auftrag zur „Komposition eines geeigneten Songs“ zusammen mit seiner zugehörigen Orchestrierung.*
2. In PLETSCH [173, S. 288] wird das SONG-Prinzip der multiplen Repräsentationen als „*Rule of the Four*“ bezeichnet. Bei BAUMANN [14, S. S. 3] wird daraus, verkürzt um die sprachliche Merksatzverdichtung, die „*didaktische Dreierregel*“.
3. Das SONG-Prinzip zielt auf die kognitive Flexibilität eines Lernalters, die eine wichtige Voraussetzung zur Bewältigung komplexer und offener Problemstellungen ist. Oft kann diese Flexibilität als die Fähigkeit betrachtet werden fließend zwischen den verschiedenen mentalen Repräsentationen eines Objektes zu wechseln. Der Aufbau eines solchermaßen flexiblen Wissensbestandes wird gefördert durch multiple Repräsentationen zentraler mathematischer Konzepte während des Lernprozesses. Für eine Anwendung im Zusammenhang mit dem GAUSS-Algorithmus verweise ich auf LINDNER [154].

Beispiel: Window-Shuttling – Modellieren von Daten. Es sei die Aufgabe gestellt:

Eine experimentell gewonnene Datenmenge wird durch eine lineare Funktion f beschrieben.
 Folgende Werte wurden gemessen: $f(101)=271.1$, $f(102.4)=275.6$, $f(104.6)=280.1$, $f(106)=283.6$.
 Durch einen Abschreibefehler ist ein Wert leider falsch angegeben worden. Auch der Zettel mit der Termdarstellung ging verloren ...

Zur Lösung wird die Problemstellung aus verschiedenen Perspektiven numerisch analytisch graphisch deskriptiv (Beobachtungsfenstern, „windows“) betrachtet und analysiert.

Die *graphische Darstellung* der Datenmenge als Punktwolke (unverbundene Einzelpunkte bzw. Polygon) hilft bei der Gewinnung einer modellierenden Funktion,

```

• Pgon := plot::Polygon(
      [101, 271.1], [102.4, 275.6], [104,280.1], [106,283.6]);
plot(Pgon)

```

siehe Abbildung 2.40.

Mit dem CAS gewinnt man eine *analytische* Lösung:

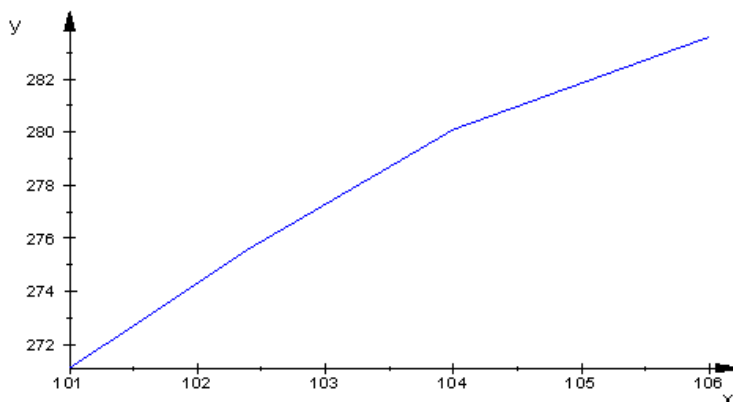


Abbildung 2.40: Ein Beispiel zum integrierten Window-Shuttling: Eine Änderung am Term wirkt sich unmittelbar an der Grafik aus.

• `solve({271.1=m*101+b, 283.6=m*106+b},{m,b})`

`[b=18,5, m=2.5]`

deren Gültigkeit man (nach Abändern des falschen Punktes in der Datenmenge) graphisch und *numerisch* verifizieren kann. □

2.4.8 Das Prinzip der limitierten kognitiven Ladung

Nach Befunden der Hirnforschung¹²⁴ können maximal ca. 9 Wissenseinheiten simultan im menschlichen Kurzzeitgedächtnis gehalten werden. Diese prinzipielle Einschränkung der menschlichen Wissensbasis ist (insbesondere bei Novizen) im Verlauf von Lernprozessen zu akzeptieren¹²⁵. Angesichts dieser naturgegebenen Grenze kann ein CAS als Expertensystem (neben der Auslagerung des Operativen) auch durch *Auslagerung des „Memorativen“* gehirnentlastend wirken. Daher erscheint es ratsam, sich auf wenige mächtige und wichtige CAS-Befehle („eine Hand voll“ bzw. *einstellig viele* wie z. B. `solve`, `gaussJordan`, `plot`) bei der nachfolgenden Konstruktion eines Kerncurriculums der Linearen Algebra zu beschränken. Ich erinnere an diese Einsicht als

Prinzip der limitierten kognitiven Ladung oder der $7^{\pm 2}$ Chunks¹²⁶ : *Die grundsätzliche Beschränkung der Aufnahmekapazität des menschlichen Kurzzeitgedächtnisses ist als Nebenbedingung im Lernprozesses zu bedenken. Die während einer Konzeptbildung oder CAS-Aktivität zu manipulierenden Objekte sollten eine einstellige Anzahl möglichst nicht überschreiten.*

¹²⁴vgl. G. MILLER: *The magic number seven, plus or minus two*: Some limits on our capacity for processing information. Psych. Rev. 63 (1956), 81-97.

¹²⁵vgl. dazu auch SCHOENFELD [184]

¹²⁶Ein „Chunk“ (Block) ist in diesem Zusammenhang eine nicht weiter teilbare mentale Wissenseinheit.

2.5 Zusammenfassung

Die konstruktivistisch orientierte APOS-Lerntheorie wurde in ihren wesentlichen Aussagen zusammen mit ihrem wissenschaftlichen Forschungsparadigma dargestellt und ihre Eignung für einen allgemeinbildenden CAS-intensiven Mathematikunterricht begründend nachgewiesen. Zur methodischen Artikulation wurde der ursprüngliche A.C.E.-Lernzyklus zu einem M².A.K.E.-Lernzyklus aufgeweitet und so für schulische Erfordernisse angepasst. Als Leitlinien zum konstruktiven Design von CAS-Lernarrangements längs einer M².A.K.E.-Trajektorie wurden CAS-didaktische Prinzipien vorgeschlagen und aus der Literatur bekannte Design-Prinzipien unter der neuen Perspektive kritisch betrachtet.

Die gewonnenen theoretischen Einsichten fasst die folgende Übersicht zusammen:

<i>mentales Konstrukt nach A.P.O.S.-Lerntheorie:</i>	<i>leitendes CAS-didaktisches Prinzip im methodischen M².A.K.E.-Zyklus:</i>
[öffnende metakognitive Klammer (Vorausschau; 1 ^{er} holistischer Spray)
Aktions vorstellung eines mathematischen Konzeptes	↓ P der <i>virtuellen Erfahrungsbasierung</i> ; P des <i>inkrementellen Spracherwerbs</i>
Prozess vorstellung eines mathematischen Konzeptes	↓ P der <i>virtuellen Erfahrungsbasierung</i> ; P der <i>literaten funkt. Programmierung</i>
Objekt vorstellung eines mathematischen Konzeptes	↓ P der <i>funktionalen Programmierung</i>
Schem avorstellung (Grundvorstellung, 'concept image')	↓ P der <i>Modularisierung</i> zur strukturierten Wissensrepräsentation
]	↓ schließende metakognitive Klammer (Rückschau; 2 ^{er} holistischer Spray)

Auf der Grundlage der hier formulierten theoretischen Forschungsperspektive und ihrer methodischen unterrichtspraktischen Ausprägung wird im folgenden Kapitel ein Vorschlag zum Redesign der schulischen Linearen Algebra/Geometrie erarbeitet.

§ 3

Zur Situation der Linearen Algebra als Lehr- und Lerngegenstand

Betrachtet man die Vermittlung der spezifischen Konzepte der Linearen Algebra aus der Perspektive der subjektiven Wissenskonstruktion, so spielen epistemologische Fragestellungen eine entscheidenden Rolle. In der Monographie TIETZE et al. [197, S. 132–148] gibt es dazu lediglich einen kurzen Abschnitt von G. WITTMANN; ihr Schwerpunkt ist u. a. die Diagnose von Schülerkonzepten zu den Begriffen des Vektors, der Parametergleichung einer Geraden und des Vektorraums. Filtriert man das Literaturverzeichnis von TIETZE et al., so fällt zudem auf, dass wichtige neuere Befunde aus der internationalen Literatur zum Thema, wie die Empfehlungen der nordamerikanischen *Linear Algebra Curriculum Study Group*¹ oder der französischen *Teaching Linear Algebra Group*² – bis auf drei Untersuchungen von DORIER –, noch nicht berücksichtigt sind. Dies sei hier zunächst geleistet.

Eine umfassende *epistemologische* Genese grundlegender Konzepte der Linearen Algebra, ausgehend von der Theorie der linearen Gleichungssysteme bis hin zur Funktionalanalysis, gibt DORIER [51], einen knappen *historischen* Überblick skizzieren ARTMANN & TÖRNER [5]. Bis auf die für uns notwendige Analyse der Grundbegriffe 'Matrix' und 'lineares Gleichungssystem' (LGS) verweise ich daher auf diese Quellen. Da die universitäre Lineare Algebra als Lehrgegenstand direkt an den schulischen Lernprozess anschließt, können wir uns aus einer Analyse der universitären Situation Rückschlüsse auf und Empfehlungen für die schulische Lineare Algebra erhoffen.

3.1 Grundprobleme der Linearen Algebra

Das Lernen und Lehren der Lineare Algebra in Schule und Universität gilt als schwierig. Eine Reihe vorliegender empirischer Studien zeigt dabei für den (Miss)Erfolg universitärer Ausbildung eine ähnliche Situation auf wie die z. B. durch die PISA-Studie bewusst gewordenen schulischen Lernerfolge. Die Befundlage der zugehörigen Forschung wird lediglich

¹Im Folgenden mit LACSG abgekürzt; die dort zusammengestellten Artikel erschienen ab ca. 1993.

²Im Folgenden kurz mit TLAG bezeichnet.

durch eine bisher fehlende vergleichbare Untersuchung in seiner Brisanz (noch) nicht offenbar. Die im Kern vergleichbare Situation lässt das Wirken ähnlicher Ursachen vermuten. Diese liegen u. a. in der Existenz sog. *epistemologisch-kognitiver Barrieren* begründet. Einigen dieser Barrieren möchte ich hier nachspüren und die lokalen Erklärungsversuche aus der Forschungslage in für die Lineare Algebra wesentlichen Kernbarrieren bündeln. Darüber hinaus versuche ich eine vereinheitlichte Erklärung der beobachteten Phänomene auf der Basis der um die *Procept-Theorie* von TALL, der *concept definition vs. concept image* („cD-cl“-Theorie von TALL/VINNER und der *prädikativ vs. funktional* („pDfD“-Denkstil-Theorie von SCHWANK erweiterten³ APOS-Theorie zu geben.

Eine graphische Zusammenfassung der didaktischen Theorie enthält die nachfolgende Abbildung 3.1.

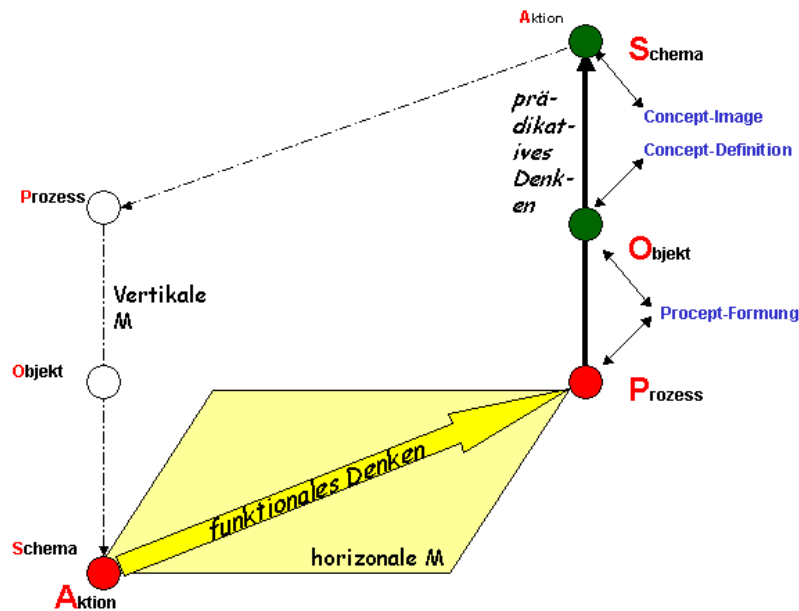


Abbildung 3.1: grundlegende Zusammenhänge und Grundtatsachen der didaktischen Hintergrundtheorie zur Erklärung didaktischer Phänomene in der Linearen Algebra

Die spezifischen formalsprachlichen Aspekte der Linearen Algebra adressiere ich danach durch die *Geheimsprachen-Metapher* als Modellvorstellung zur Erklärung der nachweisbaren fachsprachlichen *Missverständnis*-Phänomene.

³Das Procept-Modell fokussiert die Reversibilität bzw. *Flexibilität* der PO-Bildung und das cI-Modell die *Reichhaltigkeit* der OS-Ausprägungen.

3.2 Verständnis-Barrieren in der Linearen Algebra

Der didaktische Begriff der „kognitiven⁴ Barriere“ stammt von G. BACHELARD (1938), wurde aber erst von G. BROUSSEAU (1983) für die Mathematikdidaktik wiederentdeckt und fruchtbar zur Erklärung mathematikdidaktischer Phänomene herangezogen. Eine *kognitive Barriere* ist ein Wissensselement, das sich bei einer Person im Zusammenhang von Problemlösungs- oder Verstehensprozessen als erfolgreich erwiesen und sich daher im Bewusstsein verfestigt hat. Angewendet auf andere Problemstellungen kann sich seine Existenz aber als hinderlich erweisen und notwendige Adaptionen der Lernperson auf neue Gegebenheiten erschweren. Ein bekanntes *Beispiel* ist die Einführung der Bruchzahlen: Erfahrungen und Regeln für natürliche Zahlen bilden den Kern der *implizit mitgelernten Beobachtung*, dass *Malnehmen als Vergrößerung* wirkt. Diese Erfahrung führt aber einer epistemologischen Barriere, sobald die Lernperson auf eine Multiplikationsaufgabe mit Zahlen kleiner als Eins trifft und *Malnehmen nun als Verkleinerung* wirkt. Das Aufspüren nachweisbarer kognitiv-epistemologischer Barrieren, z. B. in Fehleranalysen oder Fehlverständnissen, stellt eine wichtige Aufgabe der Fachdidaktik dar. Ihre Therapie kann z. B. durch das Design sensibler curricularer Lernarrangements angegangen werden.

Die folgenden Ausführungen sichten zunächst einige wichtige kognitive und epistemologische Barrieren aus der Literatur zur universitären Linearen Algebra, berichten von Versuchen curricularer Revisionen und ziehen Folgerungen für die schulische Lineare Algebra.

3.2.1 Epistemologische Verständnis-Barrieren

Im Folgenden werden vier wesentliche Verständnisbarrieren diagnostiziert: die Formalismusbarriere, die Implizitheitsbarriere, die Charakterisierungsbarriere sowie die Abstraktionsbarriere. Dabei wird analysierend begründet, warum diese Verständnishindernisse auftreten und therapeutisch vorgeschlagen, was didaktisch zur Abmilderung dieser Lernhemmnisse aus CAS-Sicht versucht werden sollte.

1. Die Formalismus-Barriere

In einer Folge von empirischen Studien untersuchten DORIER [54, S. 98] et al. von 1987 bis 1995 den Wissensstand und die Vorstellungen über Lineare Algebra von Studenten nach dem ersten Universitätsjahr. An französischen Universitäten beginnt eine typische 2-stündige Vorlesung über Lineare Algebra mit der axiomatischen Definition eines Vektorraumes, führt über die Behandlung von Unterräumen, linearen Abbildungen, linearen Gleichungssystemen und Linearformen zu Matrizen und deren Determinanten und endet mit der Diagonalisierbarkeit von Matrizen.

Während die Lineare Algebra in Frankreich ab 1960⁵ nach BOURBAKI als eine axiomatische Theorie endlich-dimensionaler Vektorräume gelehrt⁶ wurde mit dem Ziel, den Geometrie-

⁴mit Fokus auf wissenschaftstheoretischen Betrachtungen oft auch als *epistemologische Barriere* (obstacle) bezeichnet

⁵so auch in der Schule für Schüler ab 15 Jahren

⁶vgl. [a. a. O., S. 85]

Unterricht auf der Struktur eines affinen Raumes präzise zu begründen, kam es nach dem Scheitern der unterrichtlichen Implementation ab 1980 zum völligen Verdrängen der formalen Behandlung geometrischer Themen und in der Folge davon zu einer Abnahme des formalen Wissens.

Vor diesem Hintergrund lautete Frage 1 im Fragebogen von 1987, vgl. [a. a. O., S. 88]:

- Wahr oder falsch (begründe deine Antwort): v und u seien zwei lineare Abbildungen eines Vektorraumes in sich: $v \circ u = 0 \Leftrightarrow \text{Bild}(u) = \text{Kern}(v)$.

Ergebnis: Von 379 befragten Student(inn)en des zweiten Studienjahres aus 3 französischen Universitäten antworteten nur 23 % richtig, ca. 50 % der Antworten waren falsch und *fast ein Drittel antwortete überhaupt nicht*.

Hier sind drei ausgewählte Beispiele von studentischen Lösungen:

A: Wenn $v(u(x)) = 0 \Rightarrow v(y) = 0$, also $y \in \text{Kern}(v)$ folglich $u(x) \in \text{Kern}(v)$ aber $u(x) = y$, daher $\exists x \in E \mid u(x) = y$ folglich $y \in \text{Bild}(u)$, schließlich $v \circ u = 0 \Rightarrow \text{Bild}(u) = \text{Kern}(v)$.

B: falsch, weil $v \circ u = 0 \Rightarrow \text{Bild}(u) \in \text{Kern}(v)$ und nicht $\text{Bild}(u) = \text{Kern}(v)$.

C: falsch, denn es gibt ein Gegenbeispiel: $v = 2x + 1$ und $u = 3x + 2$
 $\text{Kern}(v) \Rightarrow x = -1/2$ und $\text{Bild}(u) \Rightarrow y = 3x + 2$

Wir nehmen eine kurze fachdidaktische Analyse dieser Lösungsvorschläge vor und ziehen daraus einige Konsequenzen.

A: Man diagnostiziert eine absonderliche Verquickung aussagenlogischer, prädikatenlogischer und umgangssprachlicher Elemente, impliziter Abkürzungen (z. B. $y := u(x)$), willkürlich eingeführter Objekte (Was ist E ? Ist an [nicht vorausgesetzte] Surjektivität gedacht?) sowie aussagen- und mengentheoretische Fehlschlüsse. Von der Äquivalenz-Aussage wird (unausgesprochen) nur ein Implikations-Anteil ausgeführt - all dies sind eindeutige Hinweise auf Pseudo-Konzeptbildungen i. S. v. VINNER bzw. defizitäre Schemavorstellungen i. S. der APOS-Theorie.

B: zeigt einen verkürzten Schluss einer ansatzweise richtigen Argumentation. Jedoch wird die Gleichheit der linearen Abbildungen sowie die Komposition nicht elementweise aufgelöst, um eine Mengeninklusion zu verifizieren. Es bleibt unklar, ob der Missbrauch des Enthaltenseinszeichens \in statt des Mengeninklusionszeichens \subset auf einen syntaktischen Notationsfehler oder ein semantisches Fehlverständnis hindeutet. Die Argumentation ist elliptisch und könnte daher mögliche Fehlvorstellungen kaschieren. Die Kürze des Schlusses könnte auch auf einen prädikativen Denkstil i. S. v. SCHWANK seitens der Testperson verweisen, während hier eher ein funktionaler angemessen scheint.

C: Die Testperson wählt implizit $V := \mathbb{R}$, dann ist im Term $v = 2x + 1$ das Symbol $x := id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als lineare Abbildung zu interpretieren, in $x = -1/2 \in \mathbb{R}$ aber als Vektor. Zudem ist $v = 2x + 1$ gar keine lineare Abbildung, denn z. B. ist wegen $v(0) = 1 \neq 0$ das Bild des Nullvektors nicht der Nullvektor: v ist also affin. Wie die Testperson aus der letzten Zeile einen Widerspruch abliest, ist nicht rekonstruierbar: zwar ist $\text{Kern}(v)$ implizit über die Bedingungsgleichung $v(x) = 0$ definiert – das erklärt die Aussage $x = -1/2$.

Allerdings wird diese Gleichung aus einer falschen Prämisse gewonnen. Wird gedacht, dass die syntaktisch willkürlich erzeugten Terme $x = -1/2$ und $y = 3x + 2$ syntaktisch gleich sein müssten, um die Mengengleichheit $\text{Kern}(v) = \text{Bild}(u)$ zu begründen? \square

Aus der Sichtung der Antworten diagnostizieren DORIER et al. als Ursachen für den Misserfolg vor allem *fehlende aussagenlogische und mengensprachliche Kenntnisse*, insbesondere das Verwechseln von Gleichheit und Inklusion sowie *symbolsprachliche Konfusionen*. Zudem *fehlen solide stützende Schulkenntnisse* in geometrischer Koordinatengeometrie oder der Theorie der linearen Gleichungssysteme, *die eine intuitive Kontrolle der formalen Umformungen ermöglichen*. Für die Studierenden türmen sich so die symbolisch-formelsprachlichen Notationen zu einer unüberwindbaren epistemologischen Verständnis-Sperre, zu einer „*Formalismus-Barriere*“. Aus der Analyse des gesamten Fragebogens ziehen DORIER et al. als Schlussfolgerung:

Von den Fertigkeiten aus der Linearen Algebra, die wir getestet haben, konnten wir feststellen, dass weniger als 1/4 der Studenten wusste, wie man die Begriffe Bild und Kern einer linearen Abbildung umformt und dass weniger als die Hälfte der Studenten wusste, wie man ein 4x4-System linearer Gleichungen umformt, wobei die numerische Berechnung leicht ist. Nahezu 1/3 der Studenten wusste nicht, wie man die Matrix einer linearen Abbildung berechnet, wenn der Vektorraum verschieden von \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 , aber isomorph zu einem der drei ist. [...] Weniger als 1/3 aller Studenten zitieren \mathbb{R}^n als Beispiel eines Vektorraumes [...]. Für die Mehrheit der Studenten ist Lineare Algebra nichts weiter als ein Katalog von sehr abstrakten Notationen [...]. Überdies werden sie begraben unter einer Lawine neuer Worte, neuer Symbole, neuer Definitionen und neuer Sätze. [a. a. O., S. 95]

Anmerkungen:

1. *Offenbar erzeugt eine symbolsprachlich präsentierte Problemstellung die stillschweigende Aufforderung an die Testpersonen auch symbolsprachlich zu argumentieren – vermutlich auf Grund eines impliziten didaktischen Kontraktes oder als Zugzwang zum Nachahmen von Expertenhandeln*. Bezeichnenderweise werden daher keine umgangssprachlich argumentierenden Lösungen und auch keine Argumentationen nach Repräsentationswechseln, z. B. holistisch ikonische Schemavorstellungen, zitiert. Folgende Lösungsvarianten, wie z. B. die in Abbildung 3.2 skizzierten, treten offenbar nicht auf:

- mögliche *diagrammatische Lösung* ohne Worte:
- mögliche i. W. *umgangssprachlich argumentierende Lösung*:
Ist $v \circ u = 0$, so wird das u-Bild $u(x) \in \text{Bild}(u)$ jedes Vektors $x \in V$ wegen $0 = v(u(x)) = (v \circ u)(x)$ von der linearen Abbildung v auf den Nullvektor abgebildet, d. h. es ist $u(x) \in \text{Kern}(v)$. Folglich ist $\text{Bild}(u) \subset \text{Kern}(v)$ - auf eine Mengengleichheit ist aus der Voraussetzungslage nicht schließbar. Der Rückschluss „ \Leftarrow “ braucht nicht mehr gezeigt zu werden, da schon eine Hälfte der Äquivalenz-Aussage falsifiziert ist.
- Gegenbeispiel durch eine *Randfall-Analyse*:
Wählt man z. B. für v und u jeweils die Nullabbildung $v = u := 0: V \rightarrow V$, so ist zwar $v \circ u = 0$, aber es folgt nur $\text{Bild}(u) = \{0\} \subsetneq V = \text{Kern}(v)$ für $V \neq \{0\}$.

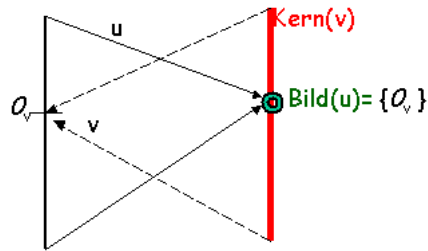


Abbildung 3.2: Das Diagramm zeigt in prädikativem Denkstil die i.Allg. vorliegende Inklusion und falsifiziert somit auf einen Blick die vorgelegte Äquivalenzaussage.

Das Fehlen informeller oder holistisch-ikonischer Argumentationen und der Sog des Formalen erzeugen offenbar eine derartige Verständnisarmut, dass sich in der Folge eine effektive Schemavorstellung nicht ausbildet. Über didaktische Gegenmaßnahmen mit den Regeln vernünftiger Argumentation oder einer Meta-Kommunikation wird weiter unten berichtet. Der benutzte Formalismus behindert jedenfalls ein sachgerechtes Verständnis, dieses didaktische Phänomen wird daher im Folgenden als **Formalismus-Barriere** bezeichnet.

2. Irritierend war für die Testpersonen vermutlich auch die *offene* Problemstellung „*wahr oder falsch: ...*“ statt der vermutlich gewohnten *geschlossenen, Sicherheit erzeugenden* Aufgabenstellung „*Beweise: ...*“
3. Über eine mögliche Stützung der aussagenlogischen bzw. symbolsprachlichen Kompetenzen durch ein CAS als Symbolrechner argumentiere ich zusammenfassend unten.

2. Die Impliziteits-Barriere

In einer weiteren Reihe von empirischen Tests (1992 bis 1994) analysieren DORIER et al. das Konzeptverständnis von Studierenden über lineare Unterräume, die in *impliziter Form* als System linearer Gleichungen bzw. in *expliziter Repräsentation* als linearer Spann von erzeugenden Vektoren gegeben sind. Eine typische Problemstellung ist die folgende, vgl. [a. a. O., S. 110 ff; Lösungsdiskussion ab S. 123]:

- Seien E_1, E_2, E_3 die Unterräume im \mathbb{R}^4 , die definiert sind durch die Gleichungen:
 $E_1 : 3x - 2y - z + t = 0$ $E_2 : x + y + 2z - t = 0$ $E_3 : 5x + 3z - t = 0^7$
 (a) Vergleiche E_3 und $E_1 \cap E_2$.

Die erste Evaluation weist 70 % falsche Lösungen (bei 76 % vertretbaren diversen Ansätzen) nach, die Fehlverständnisse häufen sich in Bezug auf Inklusion (21 %) und logischen Fehlern (26 %):

⁷Im Test von 1993 werden die Gleichungen zur Unterscheidung zu den von ihnen erzeugten Unterräumen mit $e_1, ..$ bezeichnet.

Man kann sagen, dass der Begriff des Ranges einer Menge von Erzeugenden und der eines erzeugten Unterraumes am Ende der Lernphase mehr oder weniger erworben sind; dass die Beziehung zwischen Parametergleichung und impliziter Gleichung von den meisten Studierenden auf einem basalen Niveau verstanden wird, aber dass dies nur von einem Drittel der Studenten verwendet werden kann, sobald es in Relation mit aussagenlogischen Begriffen in Zusammenhang mit Inklusion oder Schnitt benutzt werden muss. [a. a. O., S. 111]

Eine zweite Evaluation zeigt vergleichbare Resultate: von 125 Probanden lösen die Aufgabe 24 %, aber 39 % scheitern trotz richtiger Lösungsstrategie auf Grund logischer und mengentheoretischer Fehler (Inklusionsbeziehung falsch gerichtet, Gleichheit statt Inklusion etc.) und 36 % *bleiben ohne erkennbare Lösungsstrategie oder antworten gar nicht*; das Fazit ist ernüchternd:

Da man annehmen kann, dass letztere Gruppe auch Schwächen in Logik und Mengenlehre hat, kann man schätzen, dass $3/4$ der naturwissenschaftlich-mathematischen Studenten seriöse Probleme in diesem Bereich haben.

Auch diese Resultate einer Aufgabenstellung auf Schulniveau sind desillusionierend. Die Probleme resultieren nach Ansicht der Autoren sowohl aus den schon oben beobachteten Schwächen in Aussagenlogik und naiver Mengenlehre, aber auch aus dem unzureichenden Verständnis für den Zweck von Parametern sowie der Beschreibung eines *geometrischen* Objektes durch eine *algebraische* Gleichung.

Da annähernd 40 % der Probanden überhaupt keinen Ansatz formulieren können, vermute ich hinter dieser Problemstellung das Wirken einer spezifischen epistemologischen Barriere, deren tieferer Grund im Misslingen des flexiblen Wechselspiels von *impliziter* und *expliziter Darstellung* linear-algebraischer Objekte vermutet werden darf. Da ähnliche Phänomene auch beim *implizit* durch eine Gleichung definierten Begriff des Kernes einer linearen Abbildung auftraten, verweist dies m. E. auf eine *generelle Schwierigkeit im Operieren mit implizit definierten Objekten*: Ich bezeichne diese epistemologische Barriere daher als *Implizitheits-Barriere*.

Anmerkungen.

1. Man könnte vorschlagen, die Implizitheitsbarriere unter der Formalismus-Barriere zu subsumieren. Während letztere aber symbolsprachliche Phänomene adressiert, will erstere auf Probleme der psychologischen Akzeptanz implizit definierter mathematischer Objekte durch den Lerner fokussieren: Implizite Objekte sind als „*als-ob*“-Objekte gewissermaßen unfertig konstruiert, sie gewinnen ihre mentale Vorstellbarkeit erst indirekt nach Umformungsprozessen. Im Sinne der APOS-Theorie ist mit ihnen eine volle Objektvorstellung noch nicht verbunden, daher bildet sich eine angemessene Schemavorstellung nicht aus - der Lerner verharret auf der Stufe der Prozessvorstellung⁸ und kann keine thematisierten Lösungsstrategien finden: Er befindet sich noch im Zustand horizontaler Mathematisierung. Dies erklärt obigen Befund.

⁸Er muss sozusagen gedanklich den Umformungsprozess zum expliziten Objekt im Geiste noch zu Ende führen, d. h. vermag ein implizit definiertes Objekt noch nicht als Objekt sui generis zu akzeptieren.

2. Verallgemeinernd könnte man die Implizitheitsbarriere aber als Spezialfall einer weitreichenden „*Komprehensions-Barriere*“ fassen. Ihre tiefere Wurzel ist das unverstandene prädikatenlogische *Komprehensionsaxiom*. Dieses Axiom formuliert z. B. DOMBROWSKI [48, S. 11] wie folgt:

(*Aussonderungs- oder Komprehensionsaxiom*): Sei M eine Menge und $H(\dots)$ eine Aussageform, so dass alle Objekte a mit $a \in M$ zur Einsetzungsklasse Ω_H von $H(\dots)$ gehören, so gibt es eine Menge N , deren Elemente genau die Elemente a von M sind, für welche die Aussage $H(a)$ wahr ist. - In logischer Symbolik lautet dieses Axiom:

$$\bigvee_N [(N \text{ ist eine Menge}) \wedge \bigwedge_a (a \in N \iff a \in M \wedge H(a))]$$

Die in diesem Axiom als existent behauptete Menge N ist wegen (M_1) auch eindeutig bestimmt und wir bezeichnen sie mit $\{b \in M | H(b)\}$, also

$$\bigwedge_a [a \in \{b \in M | H(b)\} \iff a \in M \wedge H(a)].$$

Z. B. ist in der obigen Problemstellung der Unterraum E_1 präzise beschreibbar als $\{b := (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | H(b)\}$ mit $H((x, y, z, t)) := 3x - 2y - z + t = 0$. Diese Aussageform $H(\dots)$ sondert diejenigen Punkte aus der Menge $M := \mathbb{R}^4$ aus, deren Koordinaten nach Einsetzen in H die Gleichung erfüllen, d. h. H zu einer wahren Aussage machen. Dieses Konstruktionsprinzip von Mengen ist im obigen Sinne aber *implizit*, da es aussondernd (mit Hilfe einer Aussageform) wirkt und nicht aufzählend ist.

3. Die Analyse der gewählten Lösungsansätze⁹ zeigt eine klare Präferenz für den Ansatz einer „*Gauss-Elimination für die Gleichungen E_1 und E_2* “ bei ca. 50 % der Testpersonen gegenüber einem *Vergleich der Parameterdarstellungen* von $E_1 \cap E_2$ mit der von E_3 bei ca. 9 % oder der von ca. 9 % gewählten Strategie, dass die Erzeugenden von $E_1 \cap E_2$ in E_3 sind. Die bestehende *direkte lineare Abhängigkeit* $E_1 + 2 * E_2 = E_3$ wird nur von ganz wenigen Testpersonen erkannt. Diese Befunde stehen im Einklang mit der obigen Hypothese, denn die bevorzugte Wahl einer standardisierten Lösungsroutine verweist auf ein starkes prozessuales Verständnis und eine fehlgeschlagene Procept-Bildung.
4. Die *Anbahnung einer prädikativen Objektvorstellung* kann durch ein CAS gefördert werden: Abbildung 3.3 zeigt eine mögliche Implementation der dritten Lösungsstrategie. Der implizit durch Bedingungsgleichungen definierte Durchschnitt der beiden Unterräume E_1 und E_2 wird mittels `expr2Matrix` automatisch in Matrixform konvertiert; in dieser Form dient der Unterraum als Input für die Funktion `matlinsolve`, welche die Parameterdarstellung des Durchschnitts in interpretierbarer Form anzeigt. (Tatsächlich kann man sogar ohne diesen Zwischenschritt das Schnittobjekt in Parameterform durch die Abbildungsverkettung schlagartig durch `matlinsolve @expr2Matrix` herstellen.) Damit wird eine enge mentale Bindung von der Gleichung und ihrem äquivalentem Objekt gestiftet, da das vektorielle Schnittobjekt simultan mit seiner impliziten Beschreibung entsteht. Der Test in (4) und (5) verifiziert, dass die erzeugenden Basisvektoren des Durchschnitts von E_1 und E_2 in E_3 liegen.

⁹vgl. [a. a. O., S. 110 ff. und 113 ff.]

```

• export(linalg):
• E1undE2_impl := expr2Matrix( [ 3*x - 2*y - z + t = 0,
                               x + y + 2*z - t = 0], [x,y,z,t]) // (1)


$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$


• E1undE2_expl := matlinsolve (E1undE2_impl) // (2)


$$\left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$


• E3 := (x, y, z, t) -> 5*x + 3*z - t = 0 // (3)
(x, y, z, t) -> 5·x + 3·z - t = 0

• E3(-3,-7,5,0) // (4)
0 = 0

• E3(1,4,0,5) // (5)
0 = 0

```

Abbildung 3.3: Förderung der Objektvorstellung des Schnittgebildes durch ein CAS; (2) zeigt links unmittelbar den Nullvektor als Element des Unterraumes, der sich damit als Vektorraum zu erkennen gibt, sowie eine mögliche (2-dimensionale) Basis.

3. Die Charakterisierungs-Barriere

Paul LORENZEN untersucht aus der Perspektive des mathematischen Konstruktivismus¹⁰ in seiner Wissenschaftstheorie umfassend die FREGE-RUSSELL-Theorie der *Kennzeichnungen* („Charakterisierungen“) im Rahmen seiner kritischen Rekonstruktion einer rationalen Syntax¹¹ und der Theorie mathematischen Wissens, vgl. [159, S. 203 ff] bzw. [157, S. 39 ff]. Seine Auffassung von der Einführung der Kennzeichnungen in die natürliche Sprache wird in folgenden Auszügen erkennbar:

Wie kann man wissen, daß es ein *bestimmtes* Objekt gibt, ohne daß man einen Eigennamen (oder eine Darstellung [...]) für dieses Objekt hat? Antwort: Wenn das Objekt durch eine Aussage *bestimmt* ist, wenn also eine Aussageform $C(x)$ für *genau ein* x gilt. Wir sagen dann, daß $C(x)$ ein Objekt *kennzeichnet*. Statt eines Eigennamens benutzt man im Deutschen dann den bestimmten Artikel mit einem Relativsatz „das x , für das $C(x)$ gilt“ oder kürzer „das x mit $C(x)$ “. [159, S. 203 ff]

¹⁰in der Nachfolge von BROUWER im Unterschied zum didaktischen Konstruktivismus z. B. der APOS-Theorie.

¹¹Dennoch lassen sich bei LORENZEN auch Spuren eines didaktischen Konstruktivismus erkennen, wenn er schreibt: „Der Sinn der Konstruktion einer rationalen Syntax liegt darin, daß wir nur dadurch unser eigenes Denken und Sprechen verstehen lernen. Dieses Prinzip, daß wir nur das verstehen, was wir selber herstellen können, [...]“, [156, S. 43] oder [157, S. 31]: „Auch für die Unterscheidung von Ganzheiten unserer Lebenswirklichkeit, wie etwa von Stileinheiten, muß gefordert werden, daß man methodisch mit Beispielen anfangt. Hier muss der Lernende selber teilhaben an einem Sinngeganzen, etwa an einem Herstellungsprozeß oder an einem Spiel, um die Unterschiede verstehen zu können.“

Mit Recht weist LORENZEN auf das – auch epistemologisch und didaktisch bedeutsame – Problem hin, dass man über solchermaßen gekennzeichnete Objekte auch *sprachlich fingierend sprechen kann, ohne dass die Existenz bzw. die eindeutige Existenz vorab bewiesen ist*. Im formalsprachlichen Novizen ohne logische Grundschulung entfaltet ein solcher (Miss-)Gebrauch i. d. R. verständnishemmende Wirkungen. Dazu schreibt LORENZEN [a. a. O., S. 206]:

[Es] ist vor der Verwendung eines Ausdrucks $\iota_x C(x)$ ¹² stets zu prüfen, ob „ $\iota_x C(x)$ “ eine (echte) *Kennzeichnung* ist (im Falle der eindeutigen Existenz) oder eine *Pseudokennzeichnung* (im Falle dass kein x oder mehrere x mit $C(x)$ existieren). Unabhängig davon wollen wir die Ausdrücke „ $\iota_x C(x)$ “ als *potentielle Kennzeichnungen* [...] bezeichnen. „Der Verfasser der Illias“ ist z. B. eine potentielle Kennzeichnung. [...] „Der Held der Odyssee“ ist dagegen eine echte Kennzeichnung. [...] „Die größte Primzahl“ ist eine Pseudokennzeichnung.¹³

Für eine kritische Rekonstruktion der Umgangssprache gilt daher: „Sätze mit Pseudokennzeichnung sind für vernünftiges Argumentieren verboten.“, vgl. [156, S. 40]¹⁴.

Daran hält sich auch der professionelle Mathematiker und führt im Anschluss an axiomatisch-charakterisierende Definitionen i. d. R. auch Existenz- und Unitätsbeweise. Zwar ist aus *logischer* Perspektive das mathematische Objekt damit korrekt konstruiert, nicht jedoch aus *kognitiv-psychologischer*. Denn für das lernende Subjekt bedarf es zusätzlich der vorstellbaren Anschau und prozessualen Manipulation solcher Objekte, um tragfähige (Grund-)Vorstellungen aufzubauen. Logische Korrektheit allein ist nicht hinreichend zur erfolgreichen Konzeptvorstellung, sie ist nach LORENZEN allerdings notwendig zur Vermeidung von Täuschungen und zur Sicherung einer rationalen Argumentation.

Diese Überlegungen möchte ich am Beispiel des Konzeptes der Pseudoinverse verdeutlichen.

Beispiel: zur Charakterisierung der Pseudoinversen. Als ich¹⁵ zum ersten Mal in MAX KOECHER'S *Lineare Algebra*¹⁶ auf S. 94 las, dass es neben der vertrauten Lösungsformel $x = A^{-1}b$ für *reguläre* lineare Gleichungssysteme auch eine solche für LGS mit *singulärer* Systemmatrix A gibt, war ich von dieser Ein- bzw. Aussicht fasziniert und wollte unbedingt wissen, wie „Kehrmatrixen“ analog zu A^{-1} *aussehen*, die eine solche Umformung ermöglichen. Doch trotz aufmerksamen Selbststudiums von § 2.8.1, S. 94–97 und § 6.7, S. 200–201 wollte sich keine klare Konzeptvorstellung vom Begriff einer Pseudoinversen einstellen, die mehr enthielt als algebraisches Formel- bzw. Formalwissen.

Rückblickend habe ich dafür folgende Erklärung: Nach der *axiomatischen Charakterisierung* von Pseudoinversen [a. a. O., S. 94]

¹²als symbolsprachliche Notation für den umgangssprachlichen Relativsatz „*das x mit C(x)*“

¹³Ähnlich heißt es in [156, S. 41]: „Damit das erste Prädikat einen Eigennamen ersetzen kann, ist erforderlich, daß aus der Situation - allgemeiner: aus dem Kontext - hervorgeht, daß das Prädikat eindeutig einen Gegenstand kennzeichnet.“

¹⁴vgl. auch [a.a.O. S. 40, 42 ff, 43 unten und 31 Mitte.]

¹⁵Dieser Abschnitt gibt zugleich einen autobiographischen Rückblick auf eigene autodidaktische Lernerfahrungen im Umfeld des interessanten Konzeptes der Pseudoinversen.

¹⁶vgl. KOECHER [139]

Eine $n \times m$ Matrix B über K heißt ein *Pseudo-Inverses* der $m \times n$ Matrix A über K , wenn gilt:

$$ABA = A \quad (\text{PSI.1})$$

$$BAB = B \quad (\text{PSI.2})$$

folgte im zitierten Lehrtext eine mathematische *Darstellung* wesentlicher Eigenschaften und Beziehungen und auf S. 200 eine *weitere Charakterisierung*, nämlich die der MOORE-PENROSE-INVERSEN. Erst auf S. 201 erscheint in Aufgabe 1) die erste und einzige *sichtbare* Pseudoinverse. Bis dahin konnten keinerlei mentale Vorstellungen aufgebaut werden, da ausschließlich auf Symbolniveau operiert wurde. Zieht man als Lernender weitere Literatur heran, so findet man z. B. in J. WERNER [206, S. 71–74] die Pseudoinverse alternativ über eine Singulärwertzerlegung definiert. WERNER vermerkt auf S. 74 zusätzlich, dass drei äquivalente Definitionen möglich sind. Dass die Eigenschaften aus Satz 6.5 den Term AA^+ als Orthogonalprojektion ausweisen, wird aber erst in Aufgabe 6 auf S. 80 klar. HÄMMERLIN & HOFFMANN [116, S. 91 ff] vermerken diese geometrische Erkenntnis bereits in Satz § 2.6.3 auf S. 91 und geben ein konkretes Beispiel auf S. 92. Sie selbst bezeichnen ihren Zugang als „konstruktiv“, da die Berechnung einer Pseudoinversen aus der (komplizierten aber) expliziten Darstellung der Singulärwertzerlegung¹⁷ erhältlich ist. *Allen Darstellungen fehlt jedoch ein elementarer handlungsbasierter Konzepterwerb, der vor der Verwendung charakterisierender axiomatischer Bedingungsgleichungen eine Objekterkundung mit stabilem Vorstellungsaufbau leistet.*

Ein elementarer CAS-explorativ gestützter Zugang zum Konzept der Pseudoinversen ist in LINDNER [153] beschrieben¹⁸. Er geht aus von intuitiv¹⁹ zu lösenden Approximationsproblemen, deren algebraische Lösung über die Normalgleichung gefunden wird. In der aus dem Problemkontext entnommenen Lösungsformel wird die Wirkung einer Orthogonalprojektion graphisch erkannt und algebraisch verifiziert; die Pseudoinverse tritt dabei als MOORE-PENROSE-Inverse in einer *expliziten Form* als 2. Faktor des Lösungsterms auf. Immer steht sie aber als *konkretes Objekt* (Matrix) *sicht-* und CAS-manipulierbar im spezialfälligen Term $(A^t \star A)^{-1} \star A^t$ vor Augen und *nicht als ein abstrakt gekennzeichnetes fiktives Objekt, das „notfalls“ auf Wunsch konstruiert werden könnte.*

Die hier aufgedeckte *didaktische Inversion in der üblichen Entwicklung des Konzeptes der Pseudoinversen* vertauscht die Schritte des vertikalen und horizontalen Mathematisierens, d. h. sie arbeitet sozusagen entgegen der APOS-„Pfeilrichtung“ „von S nach O zurück“, *ohne jemals A- oder P-Phasen durchlaufen zu haben.* Die mathematische Schematisierung mit ihrem Beziehungsreichtum wird dabei als Ausgangspunkt der Überlegungen genommen und daraus rückwärts die (eindeutige) Existenz eines gekennzeichneten (O)jektes erschlossen. In der Folge entsteht keine Begriffsvertrautheit, *die fehlende Explizitheit lässt die Vorstellung blind bleiben*, die Konkretisierungen kommen zu spät und würden dazu zwingen,

¹⁷Diese steht erst z. B. mit einem CAS mühelos zur Verfügung.

¹⁸In der dort ausformulierten Lerntrajektorie habe ich mich bemüht, den Gang des eigenen Erkenntnisfortschritts nachzuzeichnen.

¹⁹Ein einfacher geometrischer Zugang über einen *Analogieschluss* wird im Rahmen einer unterrichtlichen Episode unten gezeigt. Er demonstriert die erhebliche Bedeutung formaler Analogien in mathematischen Verallgemeinerungsprozessen.

den Lernprozess nochmals invertiert zu durchlaufen. Was fehlt, sind explizit konstruierte pseudo-empirische Objekte (d. h. betrachtbare Exemplare von Pseudoinversen), die Objektstudien zulassen. Was zudem fehlt, ist die quasi-vertraute Vorform $(A^t \star A)^{-1} \star A^t$, die Bezüge zum Wort Pseudo*inverse* algebraisch und syntaktisch aufscheinen lassen.

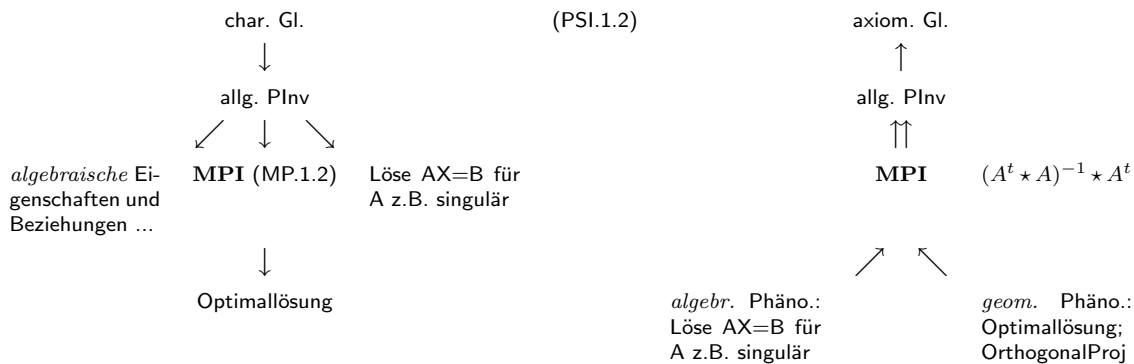


Tabelle 3.1: Zur didaktischen Inversion bei der Einführung des Konzeptes der Pseudoinversen; *links*: klassischer universitärer top-down Abstieg; *rechts*: elementarisierter bottom-up-Aufstieg zum axiomatisch charakterisierten Konzept (mit Nutzung von CAS).

Anmerkungen.

1. Ein ähnliches Beispiel kennt die Differentialrechnung mit der Möglichkeit z. B. die Sinus- und Cosinus-Funktionen über ein Differentialgleichungssystem zu *charakterisieren*. Auch hier ist die begleitende Kontrolle der Überlegungen durch den dann nicht vorliegenden Graphen erschwert. Ein ähnliches Problem stellt sich bei der Charakterisierung des natürlichen Logarithmus durch die Stammfunktion $\int_1^t \frac{1}{x} dx$, vgl. z. B. ARTMANN [3, S. 11 ff] oder FREUDENTHAL [101].
2. Die tiefliegende Problematik der Konstruktion aktuell bzw. potentiell unendlicher Objekte bleibt hier undiskutiert, da ich im Rahmen dieser Untersuchung nur endlich-dimensionale Vektorräume betrachte.
3. Die hier am Beispiel der Pseudoinversen studierte epistemologische Barriere bezeichne ich im Folgenden als *Charakterisierungs-Barriere*.

4. Die Abstraktions-Barriere

Die lineare Algebra gilt allgemein als die erste voll entwickelte *abstrakte mathematische Theorie*, auf die der (ehemalige) Schüler i. d. R. trifft. In der „Abstraktheit“ der Präsentation ihrer Inhalte wird eine wesentliche Verständnis-Barriere für den Erwerb ihrer leitenden

Grundbegriffe gesehen. Aussagen von Studenten der DORIER-Untersuchung sind Belege für diese Befunde.

Wenn eine Abhandlung als 'abstrakt' attribuiert wird, so gilt sie gemeinhin als schwierig und potentiell unverständlich, im Gegensatz dazu gilt eine 'konkrete' Darstellung als prinzipiell verständlich. Daher identifizieren Lernende subjektiv Unverstandenes häufig gefühlsmäßig mit Abstraktem, ohne die zu Grunde liegenden Ursachen verstehen zu können. Die zugehörigen negativ geladenen Beliefs (Emotionen) wirken als innere Ablehnung im weiteren Lehrprozess und führen bei als 'zu abstrakt' empfundenen Überlegungen zum 'inneren Abschalten'.

Ich möchte im Folgendem den möglichen Ursachen auf zwei wichtigen Pfaden nachspüren: in der *psychologisch*-epistemologischen Abstraktionstheorie von PIAGET und der *mathematisch*-mengentheoretischen Abstraktionsexplikation durch P. LORENZEN. Begleitend möchte ich skizzieren, wie die im CAS explizierbare *informativ*-funktionale Abstraktion die algebraische Abstraktionsbarriere mildert und somit *Abstraktionsprozesse als wertvolle und einsichtsfördernde geistige Werkzeuge der Mathematik erfahrbar machen*.

1. Reflexive Abstraktion nach J. PIAGET. PIAGET untersuchte verschiedene Formen des Abstrahierens aus psychologischer Perspektive und bündelte seine Überlegungen im Begriff der *reflexiven Abstraktion*. Nach VON GLASERSFELD beruht eine reflexive Abstraktion wesentlich auf *Re-Präsentationen*, die in (Wort-)*Symbolen* codiert werden. Dabei ist mit *Re-Präsentation* ein mentaler Akt des Subjekts gemeint, der eine vorausgegangene eigene Handlungs-Erfahrung²⁰ in das Bewusstsein zurück bringt, d. h. *Re-Präsentationen* sind autonome *Vorstellungen*²¹ des denkenden Subjektes. In diesem Kontext bezeichnet nach ARNOLD [1, S. 8] „ein Wort dann ein Symbol, wenn es im Besitzer eine abstrahierte *Re-Präsentation* aufruft. Ein Wort/Symbol muss folglich mit einer begrifflichen Struktur verknüpft sein, die erstens von der Erfahrung abstrahiert und zweitens zumindest in gewissem Ausmaß *verallgemeinert* worden ist.“ Dieses *Loslösen von der Erfahrung* und die damit oft einhergehenden *Verallgemeinerungen*, die überdies in Symbolen komprimiert repräsentiert werden, können die für den Lerner *barriere-bildenden Bestandteile im Abstraktionsprozess* ausmachen. Die symbol-sprachlich abstrahierten Repräsentationen stellen aber die entscheidenden Wissensbasen (mathematischen Ontologien) für ein mathematisch handelndes Subjekt dar, die subjektiv *vernetztes und verstandenes* Wissen ausformen und eine Grundlage weiter führender zyklisch iterierter, reflexiver Abstraktionsprozesse sind.

ARNOLD [1, S. 11] verwendet bei der Konstruktion sog. *Handlungsfelder für problemorientierte Lernsequenzen* im Rahmen von Modellierungswochen für mathematisch begabte Schüler(innen) explizit reflexive Abstraktionen als Kern des mathematischen Modellierens:

²⁰ „[...] wobei es sich also um eine *autonome* Konstruktion handelt, die in jedem Falle eine Wiederholung *eigener* Erfahrung ist, nicht ein Stück irgendeiner vom Subjekt unabhängigen objektiven Welt. Deshalb besteht VON GLASERSFELD bei solchen mentalen Akten auf dem Bindestrich, um die bloße Bedeutung als 'Darstellung' bei 'representation' auszuschließen.“ [2, S. 8]

²¹ VON GLASERSFELD weist in diesem Zusammenhang auf die fehlerhafte und irreführende Übersetzung von 'representation' als 'Darstellung' i. S. einer Reproduktion (Kopie eines Originals) hin, während im konstruktivistisch-epistemologischen Sinne aber eine gedankliche Vorstellung im Bewusstsein des Subjekts gemeint ist.

Das bedeutet, dass der Lehrer nicht nur sich selbst der für die jeweilige Problemsituation und die möglichen Lösungen nötigen Operationen bewusst ist, sondern auch weiß, **ob** und **wie** seine Schüler diese Operationen erstens *erhandeln* und zweitens *behandeln* können, d. h. erstens ob und wie die Schüler durch (vorgestellte) Handlungen die Wirkung der Operationen auf die Objekte erfahren können, und zweitens wie sie diese Operationen selbst objektivieren und diese neuen Objekte derart repräsentieren können, dass die nun objektivierten Operationen für die Schüler miteinander verknüpfbar werden [...].

Im Sinne der APOS-Theorie können wir dies als Übergang von der Prozessvorstellung zur Objektvorstellung im Rahmen einer thematisierten Schematisierung der Problemsituation interpretieren. ARNOLD warnt vor dem Auslassen der Aktions- bzw. Prozessphase, die gerade den konkreten Gehalt der Lernsituation ausmacht, und betont notwendige Rückkopplungen der vertikalen Mathematisierung an die horizontale:

Besonders wichtig ist dabei, dass der Kontakt zur ursprünglichen Problemebene nicht abreißt, die Ergebnisse und Resultate also im Hinblick auf die eingangs gestellten Fragen der Problemstellung für die Schüler interpretierbar sind. Allgemein dürfte bekannt sein, dass der Lehrer nicht etwa formales Denken als Darstellungsraum für die Operationen (in jedem Fall) als geeignet im Unterricht ansehen darf, weil er dann im Allgemeinen keine Chance hat, die Gedankenwelt seiner Rezipienten so anzusprechen, dass eine effektive Kommunikation über noch nicht formales, aber schon mathematisches Denken beim Problemlösen zustande kommen kann. Auch die spätere Einführung der Schüler in die Welt des Formalen ist dann kaum noch möglich, wenn ohne die zuvor entwickelte Basis reflexiv abstrakter Denkweisen schon zur Unzeit Formalismus erzwungen worden ist [...], denn jedes wirkliche Verstehen ist ein (Nach-)Konstruieren **mit eigenen Erkenntnis-Werkzeugen**. [a. a. O., S. 11]

Auch PIAGETS Stadium der *aufgeschobenen Imitation* innerhalb der reflexiven Abstraktion

das sich auf die Fähigkeit bezieht, eine Folge physischer Handlungen (geistig) zu durchlaufen, auch wenn die Wahrnehmungssituation, die ursprünglich zur Koordination dieser Abfolge geführt hat, nicht aktuell gegeben ist. Wenn diese aufgeschobene Ausführung also auch gar keine motorische Aktivität verlangt, so leistet sie doch die begriffliche Koordination der konstruierten Objekte [...], es entsteht also eine Re-Präsentation. [a.a.O., S. 11]

erweist sich in der Re-Interpretation i. S. der APOS-Theorie als Ausbildung der Prozessvorstellung eines Konstruktes (konstruierten Objektes).

Empirische vs. reflexive Abstraktion. PIAGET unterscheidet²² zwischen reflexiver und *empirischer* Abstraktion: Während die empirische Abstraktion aus der sensomotorischen Erfahrung schöpft und durch die bloße Isolierung gewisser Eigenschaften einer Erfahrung und ihre Fixierung als wiederholbare Kombination charakterisierbar ist, geht es bei der *reflexiven* Abstraktion dagegen um die *Ideen*:

die der Geist durch das Reflektieren seiner eigenen Operationen gewinnt. Ein erster Typ dieser Reflektion besteht in einem Prozess, welchen PIAGET als *réfléchissement* bezeichnet, wohl am besten als „Projektion“ übersetzt. Projiziert wird dabei jeweils eine mentale Operation, welche sich auf einer bestimmten Ebene vollzieht, auf eine gewissermaßen höhere Ebene des Denkens. Dabei

²²vgl. auch ARNOLD [1, S. 21]

werden die Operationen auf der ursprünglichen Ebene zu Objekten (auf der höheren Ebene), mit denen neu operiert wird, die in (neue) Beziehungen zueinander treten. Diese neuen Operationen und Beziehungen (Relationen) werden natürlich von der ursprünglichen Ebene her definiert und müssen zur Lösung der gestellten Probleme beitragen. [1, S. 21]

Kurz: im psychologisch-epistemologischen Begriff PIAGETS von der reflexiven Abstraktion meint die Begriffskomponente *Abstraktion* also die Projektion auf eine höhere Ebene des Denkens („Abstraktionsniveaus“) und die Begriffskomponente *Reflektion* („*réflexion*“) verweist auf die mehr oder minder bewusste *kognitive Re-Konstruktion* oder *Re-Organisation* des Projizierten. Im Sinne der APOS-Theorie wird hiermit der Übergang von der AP- zur OS-Phase beschrieben, die empirische Abstraktion markiert den Übergang von der Aktions- zur Prozessphase im APOS-Zyklus.

Pseudoempirische Abstraktion. Diese tritt²³ nur auf „wenn noch nicht formal deduziert werden kann oder soll, so dass die Objektivierung der Operationen (Operatoren) noch sehr konkret erfolgt, man sich von allem 'ein Bild machen' muss oder will, und wenn dafür überhaupt geeignetes sensomotorisches Material zu finden ist.“ Die pseudoempirische Abstraktion ist auch deshalb von Bedeutung, weil sie es dem noch konkret Denkenden schon ermöglicht „wesentliche Züge des Mathematisierens zu erfahren, eventuell lange bevor er (oder sie) den Passierschein für den Eintritt in das Reich des Formalen erwerben kann.“, vgl. [a. a. O., S. 13].

Piagets *pseudoempirische Abstraktion* entspricht in gewissem Sinne den semi-formalen Aktivitäten auf CAS-Ebene; denn hierbei sind wesentliche mentale Operationen beteiligt, während gleichzeitig ein materialisiertes Tätigwerden des epistemischen Subjekts in der Sprache des CAS möglich wird.

Reflexion. Nach ARNOLD [a.a.O., S. 18] ist die eigentliche Reflexion

tatsächlich von den drei Typen der reflexiven Abstraktion der komplizierteste, weil sie u. a. ein (wachsendes) Bewusstwerden vom Ergebnis einer reflexiven Abstraktion beinhaltet. Diese entwickelt sich später als das Wissen, wie in *einer* bestimmten Situation zu handeln ist. Erst dann, wenn es dem erkennenden Subjekt gelingt, retroaktiv das zu thematisieren, was es doch praktisch schon konnte, wenn in ihm also die Frage aufkeimt: „*Was* habe ich da eigentlich gemacht?“ und so durch eine Distanzierung von seinem praktischen (und daher kontextgebundenen) Können dieses zum Gegenstand des Fragens wird, erst dann kommt es unter dem Oberbegriff der *réflexion* zu dem, was PIAGET „reflexives Denken“ oder „reflektierte Abstraktion“ nennt. Das *réfléchissement* und die pseudoempirische Abstraktion sollte man zusammenfassen als *Projektion* oder anschauliche *Organisation* des zum Gegenstand gemachten *Operativen* der Problemebene (untere Stufe), wodurch dann eine neue (höhere) operationale Ebene erreicht wird. Nur die *reflektierte* Abstraktion sollte als bewusstes (mathematisches) Denken hervorgehoben werden.

Im Sinne der APOS-Theorie interpretieren ich dies als eine äquivalente Beschreibung des Prozesses der Schematisierung (S-Phase) einer Konzept-Vorstellung, d. h. Reflexionen im Sinne PIAGETS formen die thematisierten Schemavorstellungen des mathematisierenden Subjektes i. S. der APOS-Theorie.

²³vgl. auch ARNOLD [2, S. 13]

Im Folgenden wird demonstriert, wie die hier ausgeführten Überlegungen durch *funktionale Abstraktionen und Modularisierungen* in einem CAS expliziert und damit verstehbar gemacht werden können, insbesondere wenn man eine CAS-Sprache im funktionalen Programmierparadigma nutzt.

2. Funktionale (prozedurale) Abstraktion im CAS. Abstraktionen im obigen Sinne sind den Informatikern sehr vertraut. Tatsächlich liegen sie im Kern von mathematischen bzw. informatorischen Problemlösungsprozessen. So heißt es z. B. bei PEPPER [169, S. 11]: „Unser wichtigstes intellektuelles Mittel für die Lösung von Problemen ist die *Abstraktion*, also das Weglassen der irrelevanten Details und die Konzentration auf das Wesentliche. Als Ergebnis eines solchen Abstraktionsprozesses formen wir ein *mentales Modell* des betreffenden 'Weltausschnitts'. Um ein solches mentales Modell mit anderen kommunizieren zu können, müssen wir ihm eine erfassbare *Darstellung* verleihen [...]“.

HARRISON [119, S. 2] definiert *prozedurale Abstraktion* als „die Verwendung von Prozeduren oder Funktionen, um einen einzelnen Auftrag zu kapseln und zu benennen.“

HAILPERIN et al. [114, S. ix] wählen sogar einen scheinbar widersprüchlichen Buchtitel *Concrete Abstractions*, um ihre Botschaft zu fokussieren: Informatik ist ihnen die „Wissenschaft der konkreten Abstraktionen“ und eine Prozedur ist „eine Art von Abstraktion von dem, was ein Berechnungsprozess genannt wird“.

MANIS et al. [161, S. 375] unterscheiden syntaktische²⁴, prozedurale und Daten-Abstraktion:

So wie uns die prozedurale Abstraktion hilft, Algorithmen zu verbergen und Daten-Abstraktion die Repräsentationen versteckt, so erlaubt uns eine syntaktische Abstraktion neue Formen [Makros; W.L.] zu erzeugen, die gebräuchliche Programmier Techniken darstellen und dabei die Art und Weise zu verbergen, wie diese tatsächlich implementiert sind.

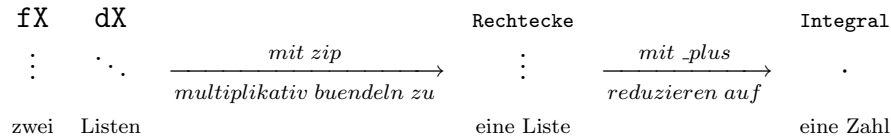
Im Folgenden möchte ich am Beispiel der funktional programmierten Rechteckregel (numerische Integration) und am Konzept der linearen Kombination (lineare Algebra) zeigen, wie mittels prozeduraler Abstraktion auf einer höheren Ebene Gemeinsamkeiten beider Konzepte erkennbar werden. *In diesem Sinne kann eine prozedurale Abstraktion helfen, im Kern gleiche Berechnungsmuster aufzudecken und Operationen abstrakt vergleichbar zu machen.*

■ **Beispiel: funktionale Programmierung der Rechteck-Regel (Integralrechnung).**

Näherungsweise sei das Integral $\int_0^1 x \cdot e^x dx$ nach der Rechtecksregel zu berechnen. In einer pseudoempirischen Abstraktion wird in Abbildung 3.4 der Berechnungsprozess für die Untersumme prozessual entwickelt, durch den Einsatz globaler funktionaler CAS-Sprachmittel wie `zip`, `map` und `$` (Sequenzoperator) werden programmiersprachliche Schleifenkonstrukte vermieden und jede einzelne Konzeptphase *konstruktiv erhandelbar* und im CAS *leicht behandelbar*. Die Intervalllängen zur gewünschten Intervallzerlegung sowie die linkseitigen

²⁴Nach FRIEDMAN et al. [104, S. 67] abstrahieren diese übliche syntaktische Muster: „Sie sind informell als *syntaktischer Zucker* bekannt, da sie eine [Programmier-]Sprache besser gebrauchbar machen, aber nichts Substanzielles hinzufügen.“

Funktionswerte werden als Listenobjekte sichtbar gebildet und benannt²⁵; anschließend wird mit `zip` im Reißverschlussverfahren multiplikativ die Liste aller einzelnen Rechtecksflächen gebildet. Die Rechtecksumme entsteht als globale Summation (`_plus`) über die eben konstruierte Liste, „diagrammatisch“ dargestellt:



Alle diese *selbst konstruierten Objekte (Listen)* stehen als *manipulierbare Objekte* für wei-

```

• f := x -> x*exp(x)           // Beispielfunktion
  x -> x · ex

• x:=[i/5 $ i = 0..5]          // Intervall-Zerlegung [0;1]
  [0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1]

• Xs:=X: delete Xs[1]: Xs      // "Xs = X - {X[1]}"
  [1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1]

• dX := zip(Xs, X, _subtract); // "X-Xs" Intervall-Längen
  [1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5]

• fX := map(X, float@f);       // "f(X)" Funktionswerte
  [0.0, 0.2442805516, 0.5967298791, 1.09327128, 1.780432743, 2.718281828]

• Rechtecke := zip(fX, dX, _mult);
  [0.0, 0.04885611033, 0.1193459758, 0.218654256, 0.3560865486]

• SummeRechtecke := _plus( op(Rechtecke) )
  0.7429428907

```

Abbildung 3.4: pseudoempirische Abstraktion bzw. Aktionsvorstellung bei der Rechtecksregel der Integralrechnung

tere Handlungen (z. B. Wahl eines anderen Integrationsintervalls, einer anderen Zerlegung, einer anderen Funktion) bzw. *zur progressiven Wissenskonstruktion zur Verfügung*, sie sind zur Entwicklung geeigneter geistiger Vorstellungen „pseudo“-empirisch als CAS-Objekte *re-präsentiert*.

Abbildung 3.5 zeigt, wie der 5-schrittige Herstellungsprozess *in das Wort (Symbol) Integral syntaktisch-funktional abstrahiert* worden ist; die Befehle zwischen den runden Klammern

²⁵ dX bzw. fX liegen symbolisch sehr nahe an der mathematischen Notation; das groß geschriebene X verweist dabei semantisch auf eine Liste von kleinen x -Werten. Man beachte, dass `zip` geschickterweise die Listen-Elemente nur bis zum Minimum der betrachteten Listenlängen bündelt.

vor (1) und nach (5) werden als Einheit zusammengefasst und als *ein* Objekt in der Vorstellung unter dem Namen `Integral` aufrufbar durch

```
Integral(x -> x*exp(x), [i/5 $ i = 0..5])
```

wobei nur noch an den zu betrachtenden Funktionsterm und die gewünschte Intervall-Zerlegung als isolierte Objekte zu denken ist - vom weiteren Herstellungsprozess wurde damit bereits abstrahiert. Dennoch bleiben die tatsächlich benötigten konstruierten Hilfs-

```
• Integral := (f, X) ->
  (
    Xs := X; delete Xs[1];           // (1)
    dX  := zip(Xs, X, _subtract);    // (2)
    fX  := map(X, float@f);         // (3)
    Rechtecke := zip(fX, dX, _mult); // (4)
    SummeRechtecke := _plus(op( Rechtecke )) // (5)
  ):

• Integral(x -> x*exp(x), [i/5 $ i = 0..5])
  0.7429428907

• plot( student::plotRiemann(x*exp(x), x = 0..1, 5, Left))
```

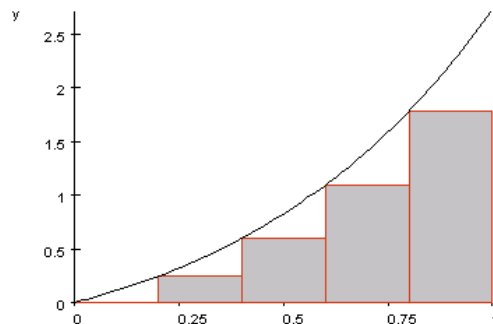


Abbildung 3.5: funktionale Abstraktion bzw. Objektvorstellung bei der Rechtecksregel der Integralrechnung

objekte wie `dX` oder `fX` weiterhin als *globale* Variablen verfügbar und *inspizierbar*²⁶: z. B. zeigt Abbildung 3.6 die Liste der Rechtecksflächen bei der gleichen Zerlegung unter der Wurzel-Funktion `sqrt` nach Aufruf des Namens `Rechtecke`; gleichzeitig wird sichtbar, dass man im Herstellungs-Prozess von der konkreten Funktion und der gewählten Zerlegung abstrahieren kann. Durch Verwendung *lokaler* Variablen (hier: lediglich noch `Xs`) gelingt eine *vollständige prozedurale Abstraktion*; diese entspricht der reflektierten Abstraktion i. S. v. PIAGET bzw. der Schemavorstellung der APOS-Theorie. Zwischenphasen und Zwischenkonstrukte sind ausgeblendet bzw. in einen einzigen Aufruf substituiert und nicht mehr als individuelle Objekte existent und damit der externen Beobachtung entzogen. In dieser Form könnte das Konzept `Integral` als aufrufbare Entität in einem CAS-Modul bzw.

²⁶Dies gilt als *schlechter Programmierstil*, ist aber hier *didaktisch sehr sinnvoll*, da die Sichtbarkeit der Zwischenresultate, z. B. zu Kontrollzwecken, erhalten bleibt: es wurde eben bewusst *noch keine vollständige Abstraktion* vollzogen.

- `Integral(x -> x*exp(x), [i/n $ i = 0..n]) $ n in [5,10,100,1000,10^4]`
0.7429428907, 0.8677819518, 0.9864455621, 0.9986412288, 0.9998640896
- `Integral(x -> sqrt(x), [i/5 $ i = 0..5])`
0.5497385976
- `Rechtecke`
[0.0, 0.0894427191, 0.1264911064, 0.1549193338, 0.1788854382]
- `Integral(2*(x -> sqrt(x))+(x -> x*exp(x)), [i/5 $ i = 0..5])` // (6)
1.842420086

Abbildung 3.6: global verfügbare Zwischenkonstrukte und erkennbare Linearität bei der Rechtecksregel der Integralrechnung

im subjektiven Wissensbereich als abstrahiertes Konzept unter „Vergessen der Details“ gespeichert werden, vgl. dazu Abbildung 3.7.

- `Integral := proc (f, X) local Xs;
begin
 Xs := X; delete Xs[1];
 _plus(op(zip(map(X,float@f), zip(Xs,X,_subtract), _mult))) // (7)
end_proc;`
- `Integral(x -> x*exp(x), [i/5 $ i = 0..5])`
0.7429428907

Abbildung 3.7: prozedurale Abstraktion bzw. Schemavorstellung bei der Rechtecksregel der Integralrechnung

In (6) wird sichtbar, dass der so abstrahierte Prozess `Integral` eine Linearform darstellt. Dies mache ich noch durch einen Vergleich mit dem Begriff der Linearkombination auf höherer Ebene studierbar.

Anmerkung: Natürlich läßt sich auch die *Intervall-Additivität* des RIEMANN-Integrals im CAS wahrnehmbar machen; dazu wird der zweite Parameter `X` in der funktionalen Abstraktion `Integral(f,X)` *additiv* zerlegt, siehe Abbildung 3.8.

- `[i/10 $ i = 0..5].[i/10 $ i = 6..10]` // (1)
 $\left[0, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, 1\right]$
- `Integral(x -> x*exp(x), [i/10 $ i = 0..6]) +
Integral(x -> x*exp(x), [i/10 $ i = 6..10])` // (2)
0.8677819518
- `Integral(x -> x*exp(x), [i/10 $ i = 0..6].[i/10 $ i = 6..10])` // (3)
0.8677819518
- `Integral(x -> x*exp(x), [i/10 $ i = 0..10])` // (4)
0.8677819518

Abbildung 3.8: Intervall-Additivität der funktionalen Integral-Abstraktion

(1) zeigt eine Intervall-Zerlegung, die aus der „Addition“ (im CAS realisiert als „ \cdot “-Verkettung) zweier Teilerlegungen konstruiert wurde. Formel (2) und (3) demonstrieren, wie sich diese Verkettung gleichwertig als Addition der Integrale über den Teilerlegungen berechnen läßt. Eine Probe steht in (4).

■ **Beispiel: funktionale Programmierung der Linearkombination.** Definiert man das Konzept einer *Linearkombination* (hier abgekürzt: `linKomb`) von \mathbf{a} und \mathbf{b} in der üblichen Weise funktional zunächst in einem einfachen Falle als $x \cdot \mathbf{a} + y \cdot \mathbf{b}$, so wird zunächst pseudoempirisch (experimentell) klar, dass diese Konstruktion offensichtlich für verschiedene Vektorräume (hier: \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 und \mathbb{C}) sinnvoll interpretierbare Resultate ergibt. Dies demonstriert der Bildschirmauszug in Abbildung 3.9.

```

• linKomb := (x, y, a, b) -> x*a+y*b
  (x, y, a, b) → x·a+y·b

• linKomb(1, 2, 3, 4)
  11

• a:=matrix([1,2]); b:=matrix([3,4])
  (1) (3)
  (2) (4)

• linKomb(2, 3, a, b); linKomb(2, 3, 1+I*2, 2+I*4)
  (11)
  (16)          8+16·i

```

Abbildung 3.9: pseudoempirische Abstraktion bzw. Aktionsvorstellung beim Konzept der Linearkombination

Abbildung 3.10 lässt am Beispiel des Vektorraumes der Polynome über \mathbb{Z} zudem erkennen, dass im CAS MuPAD die Koeffizienten aus dem Grundkörper als univariate konstante Polynome interpretieren werden müssen, damit eine automatische Evaluation stattfindet. Diese Reaktion des CAS ist mathematisch durchaus legitim. In (8) wird das ursprüngliche Konzept *verallgemeinert*²⁷ auf eine *beliebige endliche* Anzahl von Summanden.

Die in (8) verallgemeinerte Formel `linKomb2` zeigt ein mit der Rechtecksregel vergleichbares prozedurales Muster: In beiden Fällen wird *eine Liste* (als geordnete Folge) *von Produkten aufaddiert*. Dieses mental gleiche Berechnungs-Muster lässt sich innerhalb des CAS auch syntaktisch erkennbar machen durch eine *funktionale Re-Interpretation* (Re-Implementation) der abstrahierten Prozedur, wie Abbildung 3.11 zeigt.

In dieser abstrahierten Form wird der linear-algebraische Begriff *Linearkombination* im selbstgewählten Wort-Symbol `linKomb3` in der Wissensbasis der Lernperson verankert und in vergleichbarer Weise auch explizit in einem CAS-Modul speicherbar.

²⁷als *ein* Charakteristikum von Abstraktion i. o. Sinne.

```

• P := poly(-x^2 - x + 3);
  poly(3 - x - x^2, [x])

• Q := poly(2*x*(x + 3))
  poly(2 * x^2 + 6 * x, [x])

• linKomb(2, 3, P, Q)
  3 * poly(2 * x^2 + 6 * x, [x]) + 2 * poly(3 - x - x^2, [x])

• linKomb(poly(2, [x]), poly(3, [x]), P, Q)

  poly(4 * x^2 + 16 * x + 6, [x])

• linKomb2 := (K, V) -> _plus( K[i]*V[i] $i=1..nops(K) ) // (8)
• linKomb2([2, 3], [a, b])
  (11)
  (16)

• linKomb2([2, 3], [4+3*I, 2-5*I])
  14 - 9 * i

```

Abbildung 3.10: erste abstrahierende Verallgemeinerung des Konzeptes der Linearkombination

```

• linKomb3 := (K, V) -> _plus( op( zip(K, V, _mult) ) ) // (9)
  (K, V) -> _plus(op(zip(K, V, _mult)))

• linKomb3([2, 3], [a, b])
  (11)
  (16)

```

Abbildung 3.11: zweite abstrahierende Verallgemeinerung des Konzeptes der Linearkombination

■ **Beispiel: funktionale Programmierung des Korrelationskoeffizienten.** Behandelt man den Korrelationskoeffizienten nach²⁸ VOGEL & WINTERMANTEL [203, S. 121], so verfügen die Schüler(inn)en nach Abschluss der dritten Lerneinheit über die Berechnungsformel $r_{XY} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_X s_Y}$, wobei für die Standardabweichung nach [a. a. O., S. 72] gilt: $s_X := \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$. Nach Kürzen von $\frac{1}{n}$ erhält man folgenden Term zur Berechnung von r_{XY} , vgl. [39, S. 107]:

$$r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

In Abbildung 3.12 lässt man für zwei vorgelegte Datensätze²⁹ zunächst die Mittelwerte `mw` als „Summe der Daten durch Anzahl der Daten“ in (1) berechnen. Damit bestimmt

²⁸z. B. in der Jahrgangsstufe 11 des Gymnasiums in Form einer Selbsterlernheit

²⁹hier die ersten 5 Datensätze aus dem Dialekt-Projekt [47, S. 59]

man anschließend die Liste der Abweichungen dX vom Mittelwert in (2), indem man die *anonyme*³⁰ Funktion $x \rightarrow x - \text{mw}$ mittels `map` auf jedes Element x aus X wirken („[ab]bilden“) lässt. Auf diese Weise lassen sich der Zähler und die Faktoren im Nenner des Korrelations-

```

• x := [17.0, 23, 15, 9, 12]
      [17.0, 23, 15, 9, 12]

• Y := [27.6, 39.9, 37.1, 14.1, 30.3]
      [27.6, 39.9, 37.1, 14.1, 30.3]

• mwX := _plus (op(X)) / nops (X)           // (1)
      15.2

• mwY := _plus (op(Y)) / nops (Y)
      29.8

• dX := map (X, x -> x - mwX)              // (2)
      [1.8, 7.8, -0.2, -6.2, -3.2]

• dY := map (Y, x -> x - mwY)
      [-2.2, 10.1, 7.3, -15.7, 0.5]

```

Abbildung 3.12: Aktions- und Prozessvorstellung des Konzeptes des Korrelationskoeffizienten

koeffizienten als Summe von multiplizierten gleichstehenden Datenpaaren erkennen und in (3), (4) und (5) zu einer funktional abstrahierten Definition von r_{XY} ausnutzen. Dies zeigt Abbildung 3.13.

```

• zip( dX, dY, _mult )
      [-3.96, 78.78, -1.46, 97.34, -1.6]

• Zaehler := _plus (op (zip ( dX, dY, _mult ) ) ) // (3)
      169.1

• N1 := sqrt (_plus (op (zip ( dX, dX, _mult ) ) ) ) // (4)
      10.62073444

• N2 := sqrt (_plus (op (zip ( dY, dY, _mult ) ) ) )
      20.17126669

• rXY := (Zaehler / (N1 * N2))              // (5)
      0.789325051

```

³⁰unbenannte Funktion; diese ist im Sinne obiger Diskussion dennoch eindeutig gekennzeichnet als *diejenige Funktion*, die jedem Datum x aus dem Datensatz X seine Differenz zum Mittelwert zuordnet.

```

• rXY := (X, Y) -> (
  mwX := _plus (op (X)) / nops (X) :
  mwY := _plus (op (Y)) / nops (Y) :
  dX := map (X, x -> x - mwX) :
  dY := map (Y, x -> x - mwY) :
  linKomb3 (dX, dY)
  / (sqrt (linKomb3 (dX, dX)) * sqrt (linKomb3 (dY, dY)) )
):
• rXY (X, Y)

0.789325051

```

Abbildung 3.13: funktionale Abstraktion des Konzeptes des Korrelationskoeffizienten

Abstrahiert man zusätzlich auch die Mittelwert-Bildung und die Berechnung der Abweichungen vom jeweiligen Mittelwert funktional in eigene Symbole, vgl. (6) und (7), und nutzt zusätzlich die als syntaktische Abstraktion schon vorliegende Definition der Linearkombination `LinKomb3`, so wird die gesamte mathematisch unübersichtliche Summendefinition des Korrelationskoeffizienten r_{XY} funktional abstrahiert in einer kurzen und begrifflich klaren Definition formulierbar: r_{XY} ist *von höherer Sicht aus Linearkombinationen (Skalarprodukten) von Abweichungen von Mittelpunkten gebildet*, wie Abbildung 3.14 zeigt.

```

• mw := X -> _plus (op (X)) / nops (X) : // (6)
• mw (X)
  15.2

• dD := X -> map (X, x -> x - mw (X)) : // (7)
• dD (X)
  [1.8, 7.8, -0.2, -6.2, -3.2]

• rXY := (X, Y) ->
  (
    linKomb3 (dD (X), dD (Y))
    / (sqrt (linKomb3 (dD (X), dD (X))) * sqrt (linKomb3 (dD (Y), dD (Y))) )
  ):
• rXY (X, Y)

0.789325051

```

Abbildung 3.14: weitergehende funktionale Abstraktion des Konzeptes des Korrelationskoeffizienten

An diesem Beispiel wird die funktionale *Abstraktion* als wertvolles Mittel mathematischer Erkenntnis *konkret erfahrbar*, denn erst in der abstrakten Formulierung werden die im Prinzip einfachen Berechnungs-Prozesse erkennbar und vergleichbar.

■ **Beispiel: Vergleich der drei Implementationen auf „abstrakter Ebene“.** Ein abstrakter Vergleich der Berechnungsprozesse von Rechteckregel, Linearkombinationen und Korrelationskoeffizienten auf 'höherer' Ebene wird zunächst die gleichartige mathematisch-funktionale Konstruktion reflektieren. Die Lernperson nimmt wahr, dass auf abstraktem

Niveau im ersten Falle eine Funktionswertfolge mit einer zugehörigen Folge von Intervalllängen, im zweiten eine geordnete Koeffizientenmenge mit einer geordneten Menge von Vektoren und im letzten Falle Folgen von Abweichungswerten multiplikativ ver„zip“t werden:

```

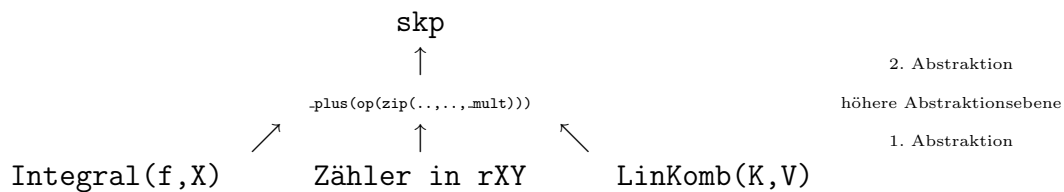
_plus(op( zip(K , V , _mult))) : linKomb
      |   |
_plus(op( zip(fX, dX, _mult))) : Integral
      |   |
_plus(op( zip(dX, dY, _mult))) : Zähler in rXY

```

In einer weiteren zyklischen funktionalen Abstraktion könnte man von den aktuell unterschiedlichen Eingaben abstrahieren und eine Funktion mit dem Kunstnamen `skp` definieren:

```
skp := (a,b) -> _plus(op( zip(a,b, _mult)))
```

Damit werden eine Linearkombination `linKomb` als `skp(K,V)`, ein Integral als `skp(fX,dX)` und ein Korrelationskoeffizient `rXY(dX,dY)` als `skp(dX,dY)/(sqrt(skp(dX,dX))*sqrt(skp(dY,dY)))` durch individuell verschiedene *Aufrufe der gleichen abstrakten Funktion `skp` mit verschiedenen Werten identifiziert*, d. h. alle drei mentalen Begriffs-Prozesse sind *abstrakt gesehen gleich*. Dies bietet u. a. eine unterrichtlich mögliche *abstrakte Erklärung der Linearität des Integrals* bzw. des Korrelationskoeffizienten und später die Deutung von `skp` als Skalarprodukt. Diese 2-fach iterierte reflexive Abstraktion bzw. Schematisierung von Integral und Linearkombination zum allgemeinen Skalarprodukt (realisiert innerhalb eines CAS) lässt sich in einem Diagramm wie folgt zusammenfassen



oder kurz unter Benutzung eines symbolischen Abstraktionsoperators³¹ \mathbb{A} wie folgt notieren³²:

$$\begin{array}{c} \text{skp} \\ \mathbb{A} \\ \text{Integral, rXY, LinKomb} \end{array} \quad \text{plus(op(zip(...,_mult)))}$$

Anmerkungen.

1. Die in der Definition von `LinKomb3` genutzte Typfreiheit des CAS erlaubt in beiden Komponenten unterschiedliche Objekte. Insofern ist `LinKomb3` keine Bilinearform auf *einem*

³¹Das skandinavische Ligaturzeichen \mathbb{A} möge hier als Symbol an *AbstraktionsEbene* oder *empirische Abstraktion* erinnern.

³²Lies: `Integral`, der `Zähler in rXY` und `LinKomb` werden via `_plus(...)` auf einer höheren **A**bstaktions-Ebene zum `skp` verallgemeinert.

Vektorraum, ja nicht einmal eine *Form*, d. h. eine reellwertige Funktion. Ein Vergleich der drei Konzepte lässt aber diese Eigenschaften an **Integral** bzw. **rXY** als *Besonderheit* erkennen und sich so im Rahmen einer anschließenden reflexiven Abstraktion zu einer axiomatischen Charakterisierung eines inneren Produktes (Skalarproduktes) ausbauen. Im Unterschied zu einer unvermittelten *axiomatischen top-down-Einführung* des Skalarproduktes in Lehrbüchern der Linearen Algebra³³ wird damit eine *axiomatisierende bottom-up-Hinführung* zum Skalarprodukt geleistet, denn neben der Bilinearität lassen sich natürlich auch Symmetrie und positive Definitheit als wesentliche Eigenschaften studieren. Im Sinne von ARTMANN [3, S. 73] wird „ein vorliegendes Material geordnet, und es werden in relativ kurzen Schritten substantielle Ergebnisse hergeleitet. Damit wird der eigentliche Sinn der Axiomatik [...] viel deutlicher sichtbar als bei den banalen Übungen zu Vektorraum-Axiomen [...]“.

2. Die explizite Berechnung des Korrelationskoeffizienten $\mathbf{rXY}(dX, dY)$ durch

$$\text{skp}(dX, dY) / (\text{sqrt}(\text{skp}(dX, dX)) * \text{sqrt}(\text{skp}(dY, dY)))$$

lässt sich bekanntlich geometrisch deuten als $\cos(\varphi) = \frac{\langle dX, dY \rangle}{|dX| \cdot |dY|}$. Damit kommen wichtige grundlegende Begriffe der euklidischen Geometrie wie Winkel und Länge in den Fokus. Die reflexive Abstraktion des Skalarproduktes aus *algebraischer* Perspektive wird durch die *geometrische* Definition des Skalarproduktes $\text{geom.Skp}(X, Y) := |dX| \cdot |dY| \cdot \cos(\varphi)$ ergänzt und führt zur „Konstruktion eines Abstraktionsturms“:

$$\begin{array}{ccc} & \langle \dots \dots \rangle & \\ & \mathbb{A} & \text{axiomatische Charakterisierung} \\ \text{algeSkp} & \xrightarrow{\quad} & \text{geomSkp} \\ \\ \text{algeSkp} & & \\ \mathbb{A} & \xrightarrow{\quad} & \text{funktionale Charakterisierung} \\ \text{Integral} & \xrightarrow{\quad} & \text{LinKomb} \end{array}$$

Eine mögliche unterrichtliche Lerntrajektorie könnte den obigen Mustervergleich in einer weiteren reflexiven Abstraktion thematisieren und das Skalarprodukt anschließend über eine axiomatische Kennzeichnung im üblichen Sinne gewinnen.

3. Es sei angemerkt, dass mit der syntaktischen Rekonstruktion des Korrelationskoeffizienten **rXY** im CAS a priori *kein semantisches Begriffsverständnis* erzeugt wird. Vielmehr wird erst a posteriori nach Einführung des euklidischen Winkels in Klasse 12 im Rahmen der oben skizzierten Trajektorie klar werden, dass **rXY** als *verallgemeinerter abstrakter Winkel* in einem Datensatz (als Verallgemeinerung eines Winkels in einem 2- bzw. 3-dimensionalen Datensatz) interpretiert werden kann. **rXY** ist dagegen auf dem Niveau von Klasse 11 zunächst nur visuell in Daten-Punktwolken mit Hilfe z. B. eines CAS explorierbar und erzeugt nur ein intuitives Präverständnis. Der Winkel-Begriff selbst ist tieflegend, vgl. z. B. die Ausführungen von DOMBROWSKI [49, S. 26 ff], FREUDENTHAL [102, S. 404–410; 438–454] oder HEFENDEHL [121, S. 179 ff].

³³vgl. z.B. BRÖCKER [22, S. 109], KOECHER [139, S. 149 bzw. S. 155] oder BLYTH & ROBERTSON [18, S. 11]

4. Genauso wie man im Abstraktionsprozess aufsteigend über algebraische und geometrische Beschreibungen das Skalarprodukt im CAS charakterisierend konstruiert, so kann man absteigend danach fragen, wie die intuitiv benutzten Werkzeuge `zip` oder `map` konstruiert worden sind. Die Entfaltung dieser gekapselten Prozeduren führt auf informatives „Grundlagen“-Wissen.
5. Neben den Querbezügen und innermathematischen Beziehungen, die auf abstrakter höherer Ebene im Sinne lokalen Ordners im CAS re-konstruiert worden sind, wird insbesondere *der Wissensbildungsprozess der reflexiven Abstraktion selbst im CAS explizit thematisiert* und in seiner Materialisierung als CAS-Modul für den Lerner konkretisiert und damit *entmystifiziert*. Sieht man in Abstraktionsprozessen ein wesentliches Mittel für die Gewinnung mathematischer Erkenntnis und zur Konstruktion von (nicht nur) mathematischem Wissen, so kann – analog der Reflexion über mathematische Formeln – mit gleichem Erkenntnisgewinn über syntaktische CAS-sprachliche Codestrecken reflektiert und anschließend Erkenntnis gewonnen werden. Die materiale Konstruktion im CAS zeigt aber zusätzlich die menschliche Konstruiertheit dieses Wissens explizit auf und entfaltet in ihrer Demystifizierung eine humane Wirkung: dermaßen konkretisierte und er- und behandelbare Abstraktionen sollten keine „*Abstraktionsbarriere*“ mehr auftürmen. Neben der Auslagerung des Operativen (Peschek) erweisen sich *Abstraktionen* in dieser Sicht *als Auslagerungen von Reflexionen*, zugehörige Realisierungen im CAS als Einübung in den metakognitiven Wissensbildungs-Prozess der reflexiven Abstraktion selbst. Der Lernperson sollte im Verlaufe von CAS-Trajektorien bewusst werden, dass *Abstraktionen die Einnahme einer Vogelperspektive bedeuten*, mit der man sich aus dem Wald erhebt, dessen Bäume die Lichtung mit der Quelle der Erkenntnis verdecken.

In diesem Sinne ist somit der Prozess der reflexiven Abstraktion als funktionale Abstraktion im CAS re-konstruiert und damit expliziert worden.

3. Logisch-mengentheoretische Abstraktion nach LORENZEN. Die logisch-mengentheoretische Abstraktion oder *klassifikatorische Abstraktion* beschreibt, im Unterschied zur funktionalen Abstraktion, die Begriffe aus Prozessen destilliert, die Konstruktion neuer Objekte aus vorhandenen. Das rationale Verständnis dieser Form von Abstraktion verdanken wir zu wesentlichen Teilen den Untersuchungen von P. LORENZEN, der *Aussagen über* sog. abstrakte Gegenstände oder *Abstrakta* schrittweise kontrollierbar und damit überhaupt erst *verstehbar rekonstruiert* hat. Ihr Wesenskern ist die mengentheoretische Klassenbildung nach einer vorgelegten Äquivalenzrelation. Da dieser Prozess in der Linearen Algebra gehäuft – und für viele Lernpersonen zu ersten Male vorkommt – ist er eine Quelle vielfältiger Miss- und Unverständnisse: er bildet insofern ein eine entscheidene Verständnisbarriere.

Zunächst sei daher an wichtige Einsichten von LORENZEN erinnert, die für unser Thema von Bedeutung sind. Danach studieren wir exemplarisch den *Vektorbegriff als eine zentrale klassifikatorische Abstraktion in der linearen Algebra* und zeigen eine mögliche unterrichtliche Behandlung unter Benutzung von CAS auf.

LORENZEN [159, S. 194 ff] leitet seine Überlegungen über Abstraktionen mit den folgenden nüchternen und desillusionierenden Worten ein:

Die Abstraktionsmethode liefert uns die Möglichkeit, so zu reden, *als ob* wir über neue Gegenstände (abstrakte Objekte) redeten - obwohl wir nur in neuer Weise über die bisherigen (konkreten Objekte) reden. Z. B. reden wir „abstrakt“ über *Zahlen, Begriffe (Relationen) und Sachverhalte*, statt „konkret“ über Zählzeichen, Prädikatoren (mehrstellige Prädikatoren) und Aussagen zu reden.

Weiter heißt es [a. a. O., S. 197]³⁴:

Jede Äquivalenzrelation gestattet, von den Objekten, für die sie definiert ist, zu neuen „abstrakten Objekten“ überzugehen. Dieser Übergang, die Abstraktion, geschieht wie oben durch die Beschränkung der Aussagen über die früheren Objekte auf die Aussagen, die bezüglich der Äquivalenzrelation invariant sind. Die Abstraktion ist kein psychischer Prozeß, sondern ein logischer Prozeß, d. h. eine Operation mit Aussagen.

THIEL [31, S. 26] verdeutlicht diesen Begriffsbildungsprozess am Beispiel vom Aufbau des Zahlensystems:

Den Übergang von der Ziffernsprechweise zur Zahlensprechweise bezeichnen wir als *Abstraktion*, die also kein psychischer Prozess ist, bei dem wir uns etwa besonders anstrengen müssten, nicht an die graphischen Eigenschaften der Ziffern und an andere beim Wechsel des Zählzeichensystems nicht übertragbarer Eigenschaften zu denken. Die Abstraktion ist vielmehr ein rein logischer Prozess, ein Operieren mit Aussagen, dessen logischer Charakter durch den Wechsel von der Struktur der komplizierten Ausgangsaussage zur Struktur der neuen Aussage, die wir durch den Abstraktionsschritt erhalten, zum Vorschein kommt. [a. a. O., S. 131]

Weiter heißt es zum konstruierten Charakter der neuen Objekte, den Zahlen:

Die philosophische Pointe dieses Übergangs von allgemeinen Aussagen über Ziffern zu arithmetischen Aussagen liegt darin, dass wir zwar zusätzlich zur Rede über Ziffern die Rede über Zahlen eingeführt haben, [...] deren Möglichkeit nicht davon abhängt, dass es etwa über die konkreten Ziffern hinaus noch abstrakte Gegenstände gäbe, die wir als „Zahlen“ bezeichnen. Wir sind m. a. W. keine neuen ontologischen Verpflichtungen eingegangen und haben an keiner Stelle unseres Weges in die Arithmetik über das *Wesen* der neuen Zahlen spekulieren müssen. [a. a. O., S. 133]

Die Reversibilität des Abstraktionsprozesses ist zum Erhalt einer rationalen Begründung wichtig:

Darstellung in unserem Sinn ist demgegenüber eine fiktionale Beziehung in den Sinne, dass wir die arithmetischen Aussagen *wie* Aussagen über neue Gegenstände, die Zahlen, formulieren [...] - wohl wissend, dass all diese [...] Redeweisen [...] eben Redeweisen sind, deren genauer, unmissverständlicher Sinn durch Rückgang im Abstraktionsprozeß jederzeit aufgewiesen werden kann. [a.a.O., S. 134]

³⁴Ähnliche Aussagen finden sich in [156, S. 108 ff] oder [a. a. O., S. 36] „üblicherweise [wird] die Abstraktion, d. h. der Übergang von gewissen Objekten, zwischen denen eine Äquivalenzrelation besteht, zu abstrakten Objekten, derart daß die abstrakten Objekte die gegebenen Objekte bis auf Äquivalenz repräsentieren, zurückgeführt auf eine Mengengbildung, nämlich die Bildung von Äquivalenzklassen.“

Kann. Besser: „*prinzipiell könnte*“ – ist es doch gerade die strategische Absicht solcher Konstruktionen, sich in diese letzten Niederungen und Details nicht (erneut) begeben zu müssen, von denen man doch gerade abstrahieren wollte. Einen Rekurs wird man nur beweistechnisch absichernd, i. d. R. nicht aus lerntheoretischer Rücksicht vornehmen.

THIEL verdeutlicht diesen Vorgang näher, indem er Abstraktionsprozesse als Konstruktionsprozesse innerhalb mathematischer Kalküle interpretiert, vgl. [a.a.O., S. 153]:

Jeder Abstraktionsschritt geht aus von konkreten Zeichen, und diese Zeichen sind in der Mathematik stets Ergebnis von *Konstruktionen* nach Herstellungsregeln, deren Gesamtheit wir jeweils einen „Kalkül“ zur Herstellung der Zeichen nannten. So hatten wir einen Kalkül zur Herstellung von Strichlisten, und schon bei unserem ersten Abstraktionsschritt, der unter den Aussagen über Strichlisten³⁵ solche aussonderte, deren Geltung (oder Nichtgeltung) invariant gegenüber der Einsetzung der in ihnen vorkommenden Strichlisten durch nach anderen Kalkülregeln hergestellte, aber zu jenen „zähläquivalente“ Zählzeichen ist, wurden durch die Äquivalenzrelation Konstruktionsergebnisse in Beziehung zueinander gesetzt. Die zunächst zum Ausdruck der Invarianzbeziehung formulierten Aussagen mit der Äquivalenzrelation zwischen Zählzeichen wurden dann durch übersichtliche neue Aussagen, nämlich Aussagen über fiktive neue Gegenstände ersetzt: Wir waren durch einen Abstraktionsschritt zu Aussagen über Grundzahlen übergegangen. Damit waren wir erstmals auf einer neuen „Ebene“, nicht mehr auf der Ebene der *konkreten Gegenstände*, von der wir ausgingen, sondern auf einer Ebene „abstrakter Gegenstände“. Über diese fiktiven Gegenstände die neuen Aussagen zu machen, bedeutete auch, für sie Bezeichnungen, neue fiktionale Gegenstands*namen* zu verwenden, und damit hatten wir auch *neue konkrete Gegenstände*, nämlich die *Namen* der Grundzahlen. [...] Die Grundzahlen hatten wir dann wieder zu Paaren zusammengefasst, und waren damit *wieder Konstruktionsregeln für konkrete Gegenstände* gefolgt. [a. a. O., S. 153]

Es scheint gerade die Rede über und der Umgang mit solchen *fiktionalen menschlich konstruierten Gegenständen* und den dafür erfundenen Bezeichnungen zu sein, die in ihrer Loslösung von der Konkretheit erhebliche Barrieren darstellen. *Diese künstliche menschengemachte Konstruiertheit mathematischer Denkobjekte kann - wie ich zeigen möchte - im feinfühligem Nach-Konstruieren in der Sprache eines CAS materialisiert, explizit gemacht und anschließend metakognitiv gemeinsprachlich reflektiert werden.* Die Situation verkompliziert sich aber speziell in der Linearen Algebra dadurch, dass hier eine *Kaskade von virtuellen Objektbildungen* in schneller Folge aneinander gereiht und aufeinander aufgebaut wird. So folgt auf die Abstraktion von Richtungen zu Vektoren (Pfeilklassen) die Bildung affiner Unterräume als Abstraktion vom auszeichnenden Ursprung der Ortsvektoren und die Bildung projektiver Räume, die wiederum Geraden zu Vektoren erklären Ein Unverständnis auf einer Zwischenphase verschließt folglich ein volles Verständnis der nachfolgenden Begriffsbildungen. Dieses *Wechselspiel von Konstruktion und Abstraktion* ist typisch für die Lineare Algebra und fatal für den Lernprozess:

Das auffallendste Charakteristikum an dieser Weise des *Aufbaus* ist, dass [...] nicht lauter Stockwerke derselben Art übereinander gesetzt werden, um (beispielsweise) das Zahlengebäude zu errichten. Jedem Abstraktionsschritt muss ja die Konstruktion der konkreten Figuren vorausgehen,

³⁵vgl. auch LORENZEN selbst [156, S. 108 ff], wo er pointiert und spitz formuliert: „Der Konstruktivist beginnt mit einer Konstruktion der Zahlen, indem er zunächst Ziffern konstruiert - etwa in der primitivsten Form |, ||, |||, ..., der Axiomatizist schreibt dagegen als Axiome an, daß es eine Zahl | gäbe und dass es zu jeder Zahl n eine weitere Zahl $n|$ gäbe.“

die als Bezeichnungen der Gegenstände fungieren, zwischen denen die zur Abstraktion benötigte Äquivalenzrelation erklärt wurde. [...] stets wechseln Konstruktionsstockwerke und Abstraktionsstockwerke miteinander ab. Dieses *Wechselspiel von Konstruktion und Abstraktion* (LORENZEN, 1965, 20³⁶)³⁷ ist eines der bedeutsamsten [...] Merkmale der mathematischen Denkweise [...]. [a. a. O., S. 155]

Dieses logisch-mathematische Wechselspiel von Konstruktion und Abstraktion findet seine didaktische Widerspiegelung in den Zyklen von AP- und OS-Phasierungen in der APOS-Lerntheorie bzw. der wechselnden Abfolge von horizontalen und vertikalen Mathematisierungsprozessen der RME-Entwicklungstheorie. Insofern besteht folgende Analogie der Methoden:

$$[\text{Konstruktion} \rightarrow \uparrow \text{Abstraktion}] \sim [\text{AP} \rightarrow \uparrow \text{OS}] \sim [\text{horiz.M.} \rightarrow \uparrow \text{vert.M.}]$$

Im folgenden möchte ich am Beispiel des Vektorbegriffs und des Vektorraumes verdeutlichen, wie mittels *klassifizierender* Abstraktionen diese Begriffe (re)konstruiert werden könnten. Dabei werden *prozedurale* Abstraktionen helfen, die vorzunehmenden klassifikatorischen Abstraktionen innerhalb des CAS-Kalküls zu explizieren.

■ **Beispiel: algebraisch orientierte Anbahnung des Vektorraum-Begriffs im endlich-diskreten Kontext.** Will man erkundend die Begriffe *Äquivalenzrelation*, *Vektor* und *Vektorraum* in einem gemeinsamen Kontext anbahnen, so bietet sich ein endlich-dimensionaler Vektorraum wie z. B. der Restklassenkörper \mathbb{Z}_7 mit den Restklassen als Vektoren (über sich selbst als Koeffizienten-Körper) an. Ein solcher Vektorraum erlaubt auf Grund der kleinen endlichen Anzahl seiner Elemente eine *holistische Sicht auf wichtige Vektorraum-Konzepte* wie *Vektor*, *Gegenvektor*, *Nebenklasse* (Unterraum) etc. am diskreten vollständig überschaubaren Modell³⁸. Dazu ist für eine erfolgreiche handlungsorientierte Konzeptaneignung entscheidend, dass eine syntaktisch überzeugende Repräsentation der in Frage stehenden Objekte innerhalb des CAS konstruierbar ist und somit CAS-Dialoge mit metakognitiven Reflexionen möglich werden.

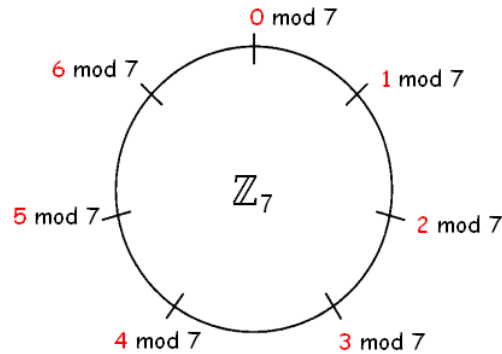
Eine mögliche visuelle Repräsentation zum Aufbau virtueller Erfahrungen aus Wahrnehmungssituationen ist z. B. die 7-Uhr, vgl. Abbildung 3.15.

Die zugrunde liegende algebraische Struktur eines endlichen Körpers von 7 Elementen wird in Abbildung 3.16 in (1) zur Erkundung bereit gestellt. In einer unterrichtlichen Lerntrajektorie könnte man statt \mathbb{R} (für Restklasse) z. B. auch *Uhr* schreiben und dann zunächst kontexthaltig von $\text{Uhr}(3)$ („3 Uhr“) statt $\mathbb{R}(3)$ sprechen. Erste Beobachtungen in (2), (3) und (4) zeigen, dass die *Restklasse* $\mathbb{X}=\mathbb{R}(4)$ von der *Zahl* $U = 4 \bmod 7$ verschieden *is_t*

³⁶vgl. LORENZEN [158]

³⁷ „[besteht in] der Konstruktion immer neuer mathematischer Objekte auf einer Stufe der Betrachtung, und dem Übergang zu einer neuen Stufe durch eine Abstraktion, deren Ergebnis neue mathematische 'Objekte' sind, die in wiederum neue Konstruktionen Eingang finden.“ [a. a. O., S. 69]

³⁸Dies ist auch der Zugang von COTTRILL et al. [34].

Abbildung 3.15: \mathbb{Z}_7 als diskretes Modell eines Vektorraumes

trotz der syntaktisch gleichen Notation³⁹! In (7) wird die in (6) beobachtbare Gleichheit von R-Objekten explizit als Äquivalenz-Relation definiert: zwei ganze Zahlen x und y werden als gleich erklärt, wenn ihre jeweiligen Restklassen gleich sind. Z. B. erweisen sich 4 und 11 laut CAS-Anfrage als äquivalent.

```

MuPAD Pro - [Z7.mnb]
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Notebook Debug Extras Fenster Hilfe

• R:= Dom::IntegerMod(7) // (1)
• X:=R(4); Y:= R(3); Z:= R(2) // (2)
  4 mod 7   3 mod 7   2 mod 7
• U:=4 mod 5 // (3)
  4
• is(U=X) // (4)
  false
• X+Y; 1/X; X/Y; X^2; // (5)
  0 mod 7  2 mod 7  6 mod 7  2 mod 7
• is(X=R(11)) // (6)
  true
• aeq := (x,y) -> is( R(x) = R(y) ) // (7)
• aeq(4,11); aeq(1,5) // (8)
  true      false

```

Abbildung 3.16: Zur CAS-Re-Konstruktion der Klassenbildung in \mathbb{Z}_7

In Abbildung 3.17 wird diese Äquivalenz operativ notiert und damit innerhalb des CAS in der konventionellen mathematischen Syntax formulierbar. (11) demonstriert sinnfällig, wie

³⁹Diese `print`-Notation kann man durch Umbiegen der Ausgabe-Routine von MUPAD aber abändern. Nach Ausführen der Definition `R::print := x -> [R::expr(x)]`: ergibt die Anfrage `R(4)` die Antwort `[4]`. Auch eine noch präzisere Ausgabe, z. B. in der Form `[4]mod7`, ist möglich. Ich belasse es hier zunächst bei der default-Einstellung.

die *Äquivalenz als eine abstrakte Gleichheit auf R-Niveau* erscheint. In Sinne von LORENZEN haben wir damit ein Beispiel für eine Abstraktion (zu R-Klassen) im CAS nachvollziehbar re-konstruiert. Der Dialog (12) zeigt im Kontrast zu (13) die Wirkung der *Mengenbildung* zum Erhalt der Restklassen-Anzahl, während die *Listenbildung* in (13) den aktuellen gedanklichen Berechnungsprozess in seiner genauen Abfolge widerspiegelt. (14) und (15) zeigen die Abgeschlossenheit der Inversenbildung, in der Fehlermeldung (13) lässt das CAS vom Nullelement $R(7)$ grüßen. (16) listet alle additiven Inversen („Gegenvektoren“) dieses Vektorraumes auf.

```

• operator("~", aeq, Binary, 1000) // (9)

• 1 ~ 5;      3*4 ~ 5 // (11)
  false      true

• 3*4 mod 7;  R(3)*R(4)=R(12) // (11)
  5          5 mod 7 = 5 mod 7

• {R(n) $ n=0..9} // (12)
  {0 mod 7, 1 mod 7, 2 mod 7, 3 mod 7, 4 mod 7, 5 mod 7, 6 mod 7}

• [R(n) $ n=0..9] // (13)
  [0 mod 7, 1 mod 7, 2 mod 7, 3 mod 7, 4 mod 7, 5 mod 7, 6 mod 7, 0 mod 7, 1 mod 7, 2 mod 7]

• map([R(n) $ n=1..7], x->1/x) // (14)
  Error: Division by zero during evaluation of _invert'
• map([R(n) $ n=1..6], x->1/x) // (15)
  [1 mod 7, 4 mod 7, 5 mod 7, 2 mod 7, 3 mod 7, 6 mod 7]

• map([R(n) $ n=0..6], x->-x) // (16)
  [0 mod 7, 6 mod 7, 5 mod 7, 4 mod 7, 3 mod 7, 2 mod 7, 1 mod 7]

```

Abbildung 3.17: Zur CAS-Re-Konstruktion der Äquivalenzrelation in \mathbb{Z}_7

Abbildung 3.18 erlaubt Fehlverständnisse zu reflektieren (z. B. in (17), wo 6er-Restklassen R_6 und 7er-Restklassen R_7 fehlerhaft vermengt werden, was vom CAS kontrolliert und beanstandet wird) und *neue abstrakte Objekte zu konstruieren*: Die Operation der Nebenklassenbildung in (18) gibt Anlass zur Existenz neuer abstrakter Objekte, z. B. der *Nebenklasse* $NK[2]$ der Klasse der 2.

Ein vollständiger Ausbau der hier nur ansatzweise skizzierten Lerntrajektorie wird weitere Eigenschaften eines Vektorraumes erkunden lassen; wegen der Endlichkeit der zugrunde liegenden Menge sind insbesondere Existenzaussagen (wie die Existenz inverser Vektoren) oder Allausagen (wie Assoziativität, Abgeschlossenheit oder Kommutativität) vollständig mit dem CAS überprüfbar. Eine Abstraktion i. S. einer *Verallgemeinerung* der beobachteten Phänomene zum Vektorraum-Begriff wird man jedoch erst *nach mindestens einer weiteren Modellexploration* vollziehen. Dazu bietet sich eine explizite Modellierung des Anschauungsraumes innerhalb eines CAS an.

```

MuPAD Pro - [27.mnb]
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Notebook Debug Extras Fenster Hilfe

• R6 := Dom::IntegerMod(6) // (15)

• map([R6(n) $ n=0..6], x-> R(2)+x ) // (17)
[Fail, Fail, Fail, Fail, Fail, Fail, Fail]

• map([R(n) $ n=0..6], x-> R(2)+x ) // (18)
{0 mod 7, 1 mod 7, 2 mod 7, 3 mod 7, 4 mod 7, 5 mod 7, 6 mod 7}

• map([R6(n) $ n=1..6], x-> R6(2)*x ) // (19)
{0 mod 6, 2 mod 6, 4 mod 6}

• Z7 := {R(n) $ n=0..6} // (20)
{0 mod 7, 1 mod 7, 2 mod 7, 3 mod 7, 4 mod 7, 5 mod 7, 6 mod 7}

• NK[2] := map(Z7, x-> R(2)+x ) // (21)
{0 mod 7, 1 mod 7, 2 mod 7, 3 mod 7, 4 mod 7, 5 mod 7, 6 mod 7}

```

Abbildung 3.18: Zur CAS-Re-Konstruktion von Nebenklassen in \mathbb{Z}_7

■ **Beispiel: Abstraktion als Vergessen von Details – eine Konkretisierung des Vektorraum-Begriffs im Anschauungsraum.** Die hier vorgestellte Konzeption der Linearen Algebra basiert auf einem *apodeiktisch*⁴⁰ bzw. *ostentativ*⁴¹ eingeführten *Matrixbegriff* als insofern „undefinierten“ Grundbegriff. Das zugehörige MuPAD-Domain `Dom::Matrix` trägt dabei per Implementation bereits die algebraische Struktur eines Vektorraumes mit den zugehörigen Operationen. Auf diesem Basistyp setzen unsere folgenden Konstruktionen zur verständnisvollen Einführung des Vektorbegriffs auf.

Zur präzisen und im CAS nachvollziehbaren Re-Konstruktion der zu unterscheidenden mathematischen Konzepte *Punkt*, *Richtung*(svektor) und (Orts) *Vektor* nutzen wir den (im mathematischen Sinne strukturlosen) Datentyp der *Liste* und die algebraische Struktur `Dom::Matrix` der Matrizen. Damit können wir die in ARTMANN & TÖRNER [4, S. 89] formulierten unterschiedlichen Beschreibungssprachen *Punktsprache*, *Pfeilsprache* und *Vektorsprache* im CAS MuPAD kritisch rational rekonstruieren und mit erhandeltem Sinn hinterlegen. Mit Hilfe des m. W. bisher nicht gebräuchlichen Hilfskonzeptes der *Richtungsmatrix* gelingt hier sowohl eine eindeutige Zuordnung zur graphischen Repräsentation im Anschauungsraum als auch eine erklärende klassifizierende Abstraktion der Richtungsmatrix zum Begriff des Ortsvektors. Diese *Abstraktion zum Begriff des Vektors* wird zudem zum Vergleich mit Hilfe von zwei unterschiedlichen Äquivalenzrelationen gewonnen und so das Verfahren der Abstraktion i. S. von LORENZEN im CAS expliziert. Eine reflexive Abstraktion über das beobachtete Verfahren führt anschließend zu einem tieferen Verständnis der Abstraktionsmethode selbst. Aus den Erfahrungen mit verschiedenen Modellen (\mathbb{Z}_7 , An-

⁴⁰vgl. z. B. BOCHENSKI [19, S. 93]

⁴¹vgl. z. B. FREUDENTHAL [103, S. 123]

schauungsraum, Matrixraum, Lösungsräume homogener linearer Gleichungssysteme) kann man abschließend den abstrakten Begriffs des Vektorraums axiomatisieren.

Wie Abbildung 3.19 in der Zeile (f) zeigt, tragen Listen keine algebraische Struktur: Der naheliegende Additionsversuch zweier Listen wird von MuPAD zurückgewiesen⁴² und ist – wie wir gleich sehen werden – auch nicht sinnvoll. Eine mögliche naive Identifikation des n -Tupel-Raumes und der CAS-Listenstruktur wird damit von vornherein ausgeschlossen. Stattdessen interpretieren wir eine MuPAD-Liste $[. . .]$ als Punkt (genauer: als Koordinatenliste eines Punktes) im Anschauungsraum, die von MuPAD in einer graphischen Szene auch als Punkt gezeichnet wird. Der für einen tieferen Lernprozess notwendige Wechsel der Repräsentationsformen ist damit vorbereitet: (0) stellt drei Punkte im Anschauungsraum dar. Die funktionale Definition (1) formuliert das Hilfs-Konzept einer Richtungsmatrix $rv(A, B)$ als eine $2 \times n$ -Matrix, in deren Spalten⁴³ die beteiligten Punktkoordinaten stehen. Ihr graphisches Pendant in einer MuPAD-Szene ist ein **Richtungsvektor** bzw. eine „gerichtete Strecke“, die vom Punkt A zum Punkt B zeigt. $rv(A, B)$ ist damit die eindimensional notierte CAS-Symbolfolge auf der Editor-Schreibzeile für die übliche 2-dimensionale mathematische Matrix-Notation

$$[A: A + \overrightarrow{AB}].$$

Die in (2) vorgenommene syntaktische Zuckering zu AB ist prinzipiell entbehrlich, stellt aber im Folgenden eine hilfreiche und verständnisfördernde Abkürzung dar. Sie ist in diesem Kontext mit einer Streckenbezeichnung nicht verwechselbar, da MuPAD im Dialog für AB die Richtungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ausgibt, also eine sinnvolle Kompaktnotation für

$$\text{„}\overrightarrow{AB}\text{“} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}},$$

d. h. für die noch *unausgewertete*⁴⁴ Richtungsvektor-Bildung. Aus einer solchen Richtungsmatrix entsteht durch simultanes Subtrahieren der ersten Spalte von beiden Spalten die *Ortsmatrix* (als Präbildung zur späteren Abstraktion zum *Ortsvektor*) $ov(rv(A, B))$. In der funktionalen Definition von ov wird dazu technisch von einer vorgelegten $2 \times n$ -Matrix X die $2 \times n$ -Matrix ihrer duplizierten ersten Spalte subtrahiert, (5) zeigt einige Beispiele. Abbildung 3.20 visualisiert die definierten Konstruktionen. Die Richtungsmatrix $AB = rv(A, B)$ erzeugt in Übereinstimmung mit der Erwartung den Pfeil⁴⁵ in der graphischen

⁴²Das CAS Derive und der TI-92 ermöglichen eine solche Operation aus „Gründen der syntaktischen Bequemlichkeit“ für den Nutzer; damit wird aber gerade eine tieferschürfende Reflektion im hier vorgetragene Sinne unterbunden.

⁴³Die Transponierung ist notwendig auf Grund der default-Zeilensstruktur einer MuPAD-Matrix. Zugleich sind solche Matrizen die geeigneten Eingaben für die Matrixbild-Routine [155, S. 108] und befolgen ARTMANNs [3, S. 46] Ratschlag der besseren Lesbarkeit.

⁴⁴Der didaktische Sinn besteht darin, an die Endpunkte des Vektors noch denken zu dürfen – z. B. zwecks Skizzierung des Richtungsvektors zwischen den Punkten A und B – während $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ im mathematischen Sinne schon die *ausgewertete* Vektorbildung, also die *vollzogene Abstraktion* anzeigt. Diese lässt die ehemaligen Endpunkte ja zweckhaft nicht mehr erkennen, denn sie hat von ihnen abstrahiert.

⁴⁵Man könnte statt rv als Name der Funktion (1) auch **Pfeil** verwenden.

```

• export(linalg):
• A:=[1,2]; B:=[3,1]; O_:= [0,0] // (0)
  [1,2] [3,1] [0,0]
• A+B // (f)
  Error: Illegal operand [_plus]
• rv := (A,B) -> transpose(matrix([A,B])) // (1)
• AB := rv(A,B) // (2)
  (1 3)
  (2 1)
• OA:=rv([0,0],[1,2]); OB:=rv(O_,B); OO:=rv(O_,O_) // (3)
  (0 1) (0 3) (0 0)
  (0 2) (0 1) (0 0)
• ov := X -> X - col(X,1).col(X,1) // (4)
  X -> X - col(X,1).col(X,1)
• ov(AB); OA + 0.5*AB; ov(OA + 0.5*AB) // (5)
  (0 2) (0.5 2.5) (0.0 2.0)
  (0 -1) (1.0 2.5) (0.0 1.5)

```

Abbildung 3.19: Zur CAS-Konstruktion der Begriffe *Punkt*, *Richtung(svektor)* und *Ortsvektor* im Anschauungsraum niedriger Dimension

MuPAD-Szene (als Modell des Anschauungsraumes), der vom Anfangspunkt A zum Endpunkt B zeigt⁴⁶. Wie man sieht, sind die graphischen Repräsentanten von Richtungsmatrix und Ortsmatrix parallel, die Ortsmatrix beginnt per Konstruktion immer im Nullpunkt, da ihre erste Spalte immer eine Nullspalte ist. Wie man in Bild (b) Zeile (7) erkennt, zeigen die Ortsmatrizen zu AB bzw. BA in verschiedene Richtungen - in Übereinstimmung mit der intuitiven Erwartung an das Symbol bzw. die Funktionalität von $rv(B,A)$, denn die abendländische Leserichtung von Fließtexten verläuft von links nach rechts und unterstützt diese Erwartung aus der sprachlichen Leseerfahrung des Lerners zusätzlich. Durch die 2-spaltige Matrix-Darstellung ist daher die graphische und algebraische Repräsentation der Begriffe Richtungsmatrix bzw. Ortsmatrix eindeutig geleistet: damit ist eine stimmige, sinnhaltige und direkt visualisierbare Prä-Vorstellung des Vektorbegriffs als $2 \times n$ -Matrix aufgebaut. Darauf wird der nachfolgende Abstraktionsschritt zum üblichen Ortsvektor nun aufbauen.

Ortsmatrizen haben als erste Spalte immer die Nullspalte; graphisch gehen die zugehörigen Pfeile folglich immer vom Nullpunkt aus, die gesamte Information steht daher in der zweiten Matrixspalte, d. h. der Pfeilspitze. In diesem Sinne ist die Ortsmatrix der eindeutige Repräsentant aller parallel verschobenen Richtungsmatrizen, die durch *Normierung* auf die Nullspalte in der ersten Komponente entsteht. Da die Nullspalte aber keine zusätzliche Information trägt, kann man sie daher ohne Informationsverlust weglassen – in diesem

⁴⁶Auf die Programmierung einer Pfeilspitze in B wurde der Einfachheit halber verzichtet; dieser Punkt ist durch seine Koordinaten aber eindeutig verortbar und kann bei Bedarf in der ausgedruckten Szene nachträglich per Hand eine Spitze erhalten.

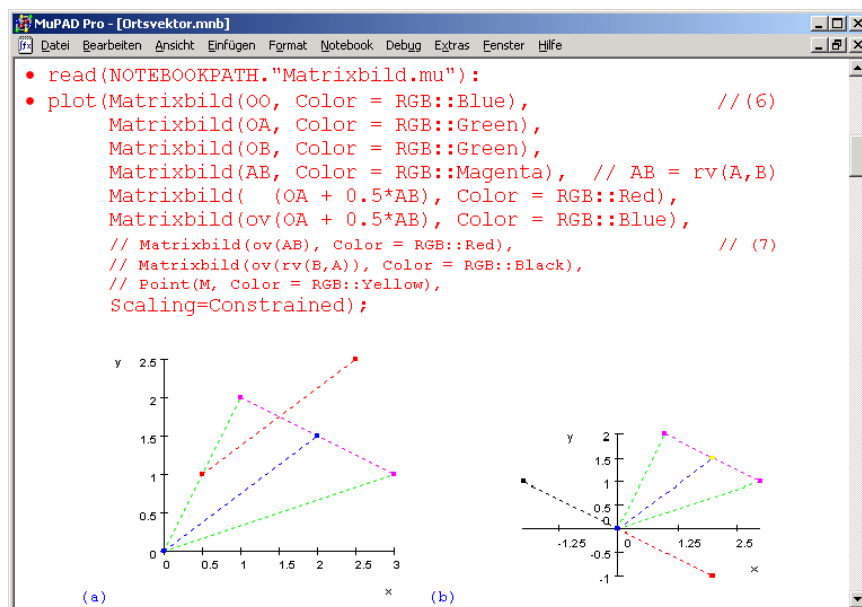


Abbildung 3.20: Zur CAS-Visualisierung der konstruierten Begriffe *Punkt*, *Richtung(svektor)* und *Ortsvektor*

„wegstreichenden“ *Vergessen der ersten Spalte der Ortsmatrix besteht die Abstraktion*, die übrig bleibende einspaltige Matrix ist der *Ortsvektor* zur Richtungsmatrix AB, er „ist“ die abstrahierte Richtungsmatrix. Der zu einer *Ortsmatrix* $ov(AB)$ gehörende *Ortsvektor* ist daher einfach als Extraktion der 2-ten Spalte implementierbar⁴⁷:

• `vec := AB -> col(ov(AB),2)`

Man beachte, wie diese funktionale Definition⁴⁸ von *vec* den *Abstraktionsprozess funktional offenlegt*: Man bildet zu zwei Punkten zunächst die Richtungsmatrix mittels *rv*, aus ihr die zugehörige Ortsmatrix mittels *ov* und gewinnt daraus durch Auswahl der 2-Spalte (engl. *column*) per *vec* den Ortsvektor $vec(A,B)$. Kurz:

$$A, B \xrightarrow{rv} rv(A, B) =: AB \xrightarrow{ov} ov(AB) \xrightarrow{vec} vec(ov(AB))$$

Zur zeichnerischen Darstellung des Ortsvektors benötigen wir aber den zugehörigen (End)-Punkt: Dies leistet die Definition (10) – die extrahierte 2-te Spalte wird dazu in eine Liste, d. h. in obiger Interpretation in einen Punkt konvertiert.

Die Definitionen (12) bzw. (14) präzisieren diese Abstraktionen durch die Angabe von Äquivalenzrelationen: Zwei Punkteteppaare heißen *aequivalent*, wenn die Ortsmatrizen ihrer

⁴⁷ Die auch denkbare Definition `vec := (A,B) -> col(ov(rv(A,B)),2)`, die zwei *Punkten* direkt ihren Ortsvektor als Fertigprodukt zuordnet, würde allerdings verhüllen, dass man den Ortsvektor gedanklich aus der Abstraktion einer Richtungsmatrix gewinnt.

⁴⁸ Wählt man oben statt *rv* lieber den Namen *Pfeil*, so wird man jetzt analog statt *vec* besser den Funktionsnamen *Pfeilrichtung* nehmen.

Richtungsmatrizen gleich sind, d. h. wenn bei erzeugter führender Nullspalte die zweiten Spalten gleich sind. Die Definition `aeq1` besagt das Gleiche – geht aber davon aus, dass die Eingaben bereits zwei Richtungsmatrizen aus dem Zwischenprozess sind, also: Zwei Richtungen werden als gleich erklärt, wenn ihre zugehörigen Ortsmatrizen gleich sind. Beide Definitionen reflektieren genau die wahrgenommenen Beobachtungen der visuellen Darstellung im Anschauungsraum. Tests beider Definitionen finden sich in (13) bzw. (15).

```

MuPAD Pro - [Ortsvektor.mnb]
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Notebook Debug Extras Fenster Hilfe

• rv(A,A); OO := ov(rv(A,A)) // (8)
  (1 1) (0 0)
  (2 2) (0 0)

• ov(OA + 0.5*AB); [op(col(ov(%),2))] // (9)
  (0.0 2.0) [2.0, 1.5]
  (0.0 1.5)

• Pt := OV -> [op(col(OV,2))] // (10)
• Pt(AB); M:= Pt(ov(OA + 0.5*AB)) // (11)
  [3, 1] [2.0, 1.5]

• aeq := (P,Q, R,S) -> is( ov(rv(P,Q)) = ov(rv(R,S)) ) // (12)

• aeq(A,B, B,A); aeq(A,B , O_,Pt(ov(AB))) // (13)
  false true

• aeq1 := (PQ, RS) -> is( ov(PQ) = ov(RS) ) // (14)

• rv(A,B); ov(AB)
  (1 3) (0 2)
  (2 1) (0 -1)

• aeq1(AB, ov(AB)) // (15)
  true

```

Abbildung 3.21: Zur CAS-Kennzeichnung äquivalenter *Richtungsvektoren* durch den zugehörigen Ortsvektor

Mit dem Infix-Operator \sim wird diese Äquivalenzrelation konventionell formulierbar. (17) zeigt: Der Richtungs„vektor“ \overrightarrow{AB} ist i. d. S. äquivalent („parallel“) zu *seinem* Orts„vektor“. (18) zeigt, dass man einen Ortsvektor auch als Differenz aus zweiter und erster Spalte der Richtungsmatrix gewinnen kann; dies wird in der zweiten Äquivalenzrelation (20) ausgenutzt: Zwei Richtung(smatriz)en sind $\sim\sim$ -äquivalent, wenn ihre Spaltendifferenzen gleich sind (dabei wohlgermerkt so gebildet, dass in der ersten Spalte in Übereinstimmung mit der ersten Äquivalenzrelation eine Nullspalte entsteht). Damit gewinnt man nun Anschluss an die übliche Definition eines Ortsvektors $\overrightarrow{AB} = B - A$, die z. B. der Behandlung linearer Abbildungen in LINDNER [155, S. 12 ff] zugrunde liegt.

Abbildung 3.23 und Abbildung 3.24 demonstrieren die vorgenommenen Konstruktionen im 3-dimensionalen Anschauungsraum.

■ **Beispiel: Abstraktion als Vergessen von Struktur – eine alternative Modellierung des Vektor-Begriffs im Anschauungsraum.** Wie wir im vorigen Beispiel gesehen haben, legt der CAS-gestützte Versuch einer Präzisierung des Vektorbegriffs im Anschauungsraum die zugehörige im Unterricht wirkende verständnisemmende Abstraktionsbarriere explizit

```

MuPAD Pro - [Ortsvektor.mnb]
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Notebook Debug Extras Fenster Hilfe

• operator("~", aeq1, Binary, 1000): // (16)
• rv(A,B) ~ ov(AB) // (17)
  true
• col(AB,2)-col(AB,1) // (18)
  ( 2
  -1 )
• RS := matrix([2,4]) . matrix([4,3]) // (19)
  ( 2 4
  4 3 )
• aeq2 := (PQ,RS) -> is( col(PQ,2)-col(PQ,1) =
  col(RS,2)-col(RS,1) ) // (20)
• aeq2(AB,RS) // (21)
  true
• operator("~~", aeq2, Binary, 1000): // (22)
• AB ~~ RS // (23)
  true

```

Abbildung 3.22: Zur CAS-Kennzeichnung äquivalenter *Richtungsvektoren* durch wertgleiche Spaltendifferenzen der *Richtungsmatrix*

offen. Es ist nicht mehr möglich, durch umgangssprachliche Glättung der didaktischen Problematik eine angemessene Unterscheidung der relevanten Begriffe vorzunehmen: Man muss syntaktisch und semantisch explizit werden. *Das Ringen mit dem CAS wird zum Ringen um das eigene volle Verständnis.*

Ich zeige daher eine zweite mögliche Implementation dieser Begrifflichkeit im CAS MuPAD und diskutiere im Anschluss Vor- und Nachteile beider Implementationen. Dieser zweite Zugang präzisiert die Rede von *Vektorsprache*, *Punktsprache* und *Pfeilsprache*⁴⁹ und versucht eine kritische Rekonstruktion unter Zugrundelegung der Vektorraumstruktur von $\text{Dom}::\text{Matrix}$. Dabei werden (gedankliche) Punkte und Vektoren zunächst gemeinsam als einspaltige Matrizen modelliert und zu zeichnende Punkte aus dem Spaltenvektor per Konvertierung in eine strukturlose Liste realisiert, also durch abstrahierende Wegnahme der Vektorraumstruktur. Das oben eingeführte Konzept der *Richtungsmatrix* wird jetzt durch den Konkat-Operator „.“ von MuPAD realisierbar: $A.B$ wird zur Grundvorstellung der Richtung. Aus diesem Ansatz gewinnen wir durch eine Abstraktion das Konzept der *Pfeilrichtung* bzw. des (Orts) *Vektors*. Wir demonstrieren die Stimmigkeit der Modellierung durch die anschauungsraum-basierte Berechnung des Mittelpunktes einer Strecke sowie des Schwerpunktes eines Dreiecks. Dies sind paradigmatische Beispiele aus dem Anfangsunterricht der schulischen Vektorrechnung. Die wechselseitige Befruchtung des Lernprozesses durch den Wechsel zwischen der algebraischen bzw. graphischen Repräsentation dient dem vertieften Verständnis wie auch den vorgenommenen Abstraktionen.

Abbildung 3.25 definiert in (0) die „Punkte“ A, B etc. als einspaltige Matrizen; mit die-

⁴⁹vgl. [4, S. 89 ff]

```

• OA+(AB); OA+ov(AB) // (24)
  (1 4) (0 3)
  (2 3) (0 1)

• M:= 1/2*(matrix(A) + matrix(B)) // (25)
  (2)
  (3)
  (2)

• A:=[1,2,3]; B:=[3,1,-2]; O_:= [0,0,0] // (30)
  [1, 2, 3] [3, 1, -2] [0, 0, 0]

• OA:=rv(O_,A); OB:=rv(O_,B); AB:= rv(A,B); OO := rv(O_,O_)
  (0 1) (0 3) (1 3) (0 0)
  (0 2) (0 1) (2 1) (0 0)
  (0 3) (0 -2) (3 -2) (0 0)

• OA + 0.5*AB; M:= Pt(ov(OA + 0.5*AB)) // (31)
  (0.5 2.5)
  (1.0 2.5)
  (1.5 2.0)
  [2.0, 1.5, 0.5]

```

Abbildung 3.23: Vektorielle Kernkonzepte im 3-dimensionalen Anschauungsraum

sen kann man zwar wie gewohnt rechnen – aber Matrizen lassen sich mit dem CAS nicht zeichnen. Dazu hat man die „Punktmatrix“ in eine Liste zu konvertieren. Die implementierte Punktbildung aus den $1 \times n$ -Matrizen zeigt, dass plotbare Punkte nicht addiert werden können: von der Vektorraumstruktur wurde abstrahiert, die Operation „+“ muss man für („echte“) Punkte „vergessen“.

Grundlage der Veranschaulichung der Vektoroperationen im Anschauungsraum wird das Nebeneinanderstellen von einspaltigen Matrizen: $A.B$ „ $= [A:B]$ “ erzeugt eine $2 \times n$ -Matrix, die obige *Richtungsmatrix*, die wir interpretierend als *Pfeil von A nach B* lesen. $A.B$ wird von der Routine `Matrixbild` direkt als gerichtete Strecke von A nach B gezeichnet und ist damit sowohl sinnfällig notiert als auch eindeutig anschaulich interpretierbar. Man beachte: $A.B$ ist nicht der Richtungsvektor \overrightarrow{AB} , dieser wird vielmehr erst durch eine Abstraktion hieraus gewonnen: (2) implementiert diese Abstraktion unter dem Begriff *Pfeilr(ichtungsvektor)* alias Ortsvektor, der dann die übliche Interpretation gestattet: $\text{Pfeilr}(A.B)$ „ $= \overrightarrow{AB}$ “. Dieser zweite Ansatz zur Rekonstruktion der Begrifflichkeit im CAS kommt daher mit *einer* funktionalen Definition aus: man bildet zu zwei Punkten zunächst die Richtungsmatrix $A.B$ mittels „.“ und aus ihr den zugehörigen Ortsvektor per Abstraktion mittels `Pfeilr`. Kurz:

$$A, B \longrightarrow A.B \xrightarrow{\text{Pfeilr}} \text{Pfeilr}(A.B)$$

Der Zwischenschritt der Ortsmatrix-Bildung ist ohne funktionale Abstraktion hier auf Matrixniveau durch eine Rechnung in den Komponenten lösbar. Man kann diese Begriffsbildungsphase daher auch vor die Bildung der `Pfeilr`-Abstraktion schalten und den Ortsvektor $B-A$ auch aus der Ortsmatrix $N.(B-A)$ durch Auslesen der 2^{ten} -Komponente gewinnen. Die

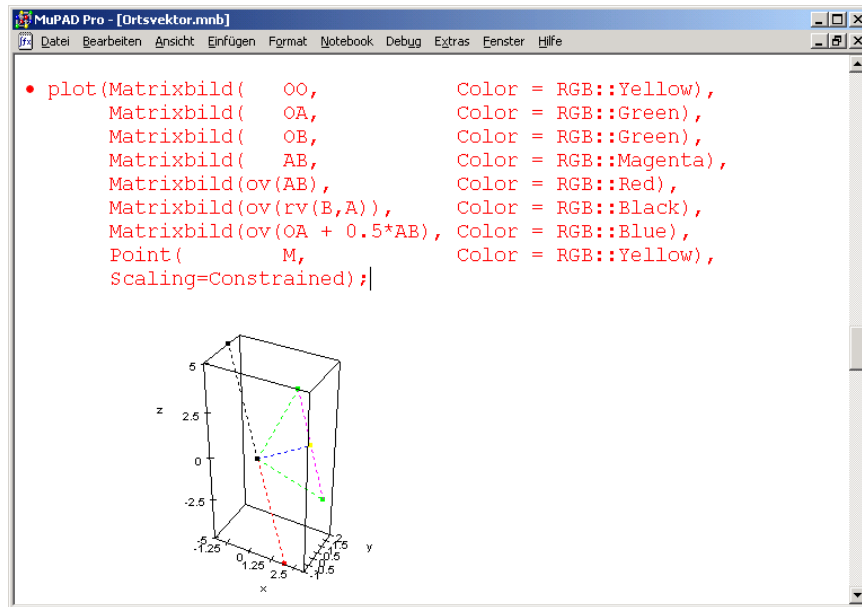


Abbildung 3.24: Dreidimensionale Darstellung vektorieller Grundkonzepte

folgende Übersicht fasst diese Überlegungen zusammen:

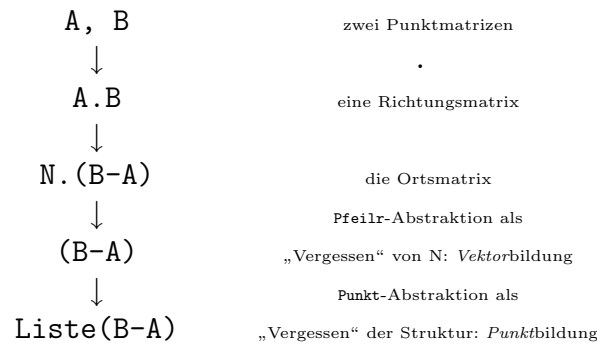


Abbildung 3.26 gibt Gelegenheit zur Aneignung dieser Begrifflichkeit im Wechselspiel zwischen algebraischer Termdarstellung und geometrischer Vorstellung. Dabei können mögliche Fehlverständnisse reflektiv ausgeräumt werden. Zum Beispiel ist $N.Pfeilr(A.B + B.C)$ die Richtungsmatrix von $N(\text{ull})$ in Pfeilrichtung der Summe, diese wird ersichtlich erst durch Addition des Aufpunktes A in beiden Matrixkomponenten nach A verpflanzt. Dies zeigen sowohl die geometrische Kontrolle des algebraischen Ausdrucks in (4) als auch die simultan beobachtbaren Matrixeinträge. Die hier vorgeschlagene Syntax gibt sehr schön diese übliche affine Translation (Verschiebung) in den Punkt A wieder:

$$N.Pfeilr(A.B + B.C) \longrightarrow N.(N + Pfeilr(A.B + B.C)) \longrightarrow (A.(A + Pfeilr(A.B + B.C)))$$

Abbildung 3.27 zeigt die visuelle Darstellung der Vektoraddition: Wie man erkennt, ist die im CAS gewählte Modellierung bzw. ermöglichte Symbolik $N.A$ (lies: „Pfeil von $N(\text{ull})$ “)

```

• export(linalg): export(plot):
• read(NOTEBOOKPATH, "Matrixbild.mu"):
• A:=matrix([1,2]); B:=matrix([3,1]); C:=matrix([2,5]); N:=matrix([0,0]) // (0)
  (1)      (3)      (2)      (0)
  (2)      (1)      (5)      (0)

• Punkt := v -> [op(v)] // (1)

• Punkt(A); Punkt(B)
  [1, 2]      [3, 1]

• Punkt(A) + Punkt(B)
  Error: Illegal operand [_plus]

• Pfeilr := AB -> col(AB,2) - col(AB,1) // (2)

• A.B; B.C; A.B + B.C; Pfeilr(A.B); Pfeilr(B.C)
  (1 3) (3 2) (4 5)      (2)      (-1)
  (2 1) (1 5) (3 6)      (-1)      (4)

• Pfeilr(A.B + B.C) = Pfeilr(A.B) + Pfeilr(B.C) // (3)
  (1) = (1)
  (3)   (3)

```

Abbildung 3.25: Eine alternative CAS-Re-Konstruktion der Begriffe *Punkt* und *Ortsvektor* (= *Pfeilr*(ichtungsvektor) im Anschauungsraum

nach A“) sehr nahe an der gewohnten mathematischen Notation \overrightarrow{NA} , so dass die Diagonale im Vektor-Parallogramm nach (1) als $N \cdot A + N \cdot B$ ($= N \cdot (A+B)$!) $= \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}$ notierbar wird. Dies ist in Übereinstimmung sowohl mit der angestrebten Begriffsbildung als auch mit der vorhandenen Intuition. Die Farbgebung dient der erleichterten Identifikation der Objekte in der Grafik; sie mildert das Fehlen der üblichen Vektor-Pfeilspitzen ab. (6) bereitet algebraisch und konstruktiv explizit die Abstraktion vor, dass die Richtung, in der man von A zur Summe $A+B$ gelangt, gleich ist der Richtung, die von $N(\text{ull})$ nach B weist. Man beachte, dass man in der hier vorgeschlagenen Re-Konstruktion im CAS in den Komponenten der Konkatenation $(\dots) \cdot (\dots)$ ⁵⁰ rechnen kann: Insofern ist $(A-A) \cdot (A+B-A)$ identisch mit $N \cdot B$, wie eine Evaluation im CAS verifiziert.

Die Rechnungen (1) bis (4) in Abbildung 3.28 zeigen die CAS-Umsetzung zweier paradigmatischer unterrichtlicher Beispiele der anfänglichen *Vektorrechnung* bzw. *Vektorzeichnung*: *Wie berechnet bzw. erzeichnet man vektoriell den Mittelpunkt einer Strecke und den Schwerpunkt eines Dreiecks*. Die links stehende Formel für den Schwerpunkt **S** in (1) gelingt, weil in der gewählten Modellierung Punkte als Matrizen eine algebraische Struktur besitzen, d. h. man kann sie addieren. Das Ergebnis ist der zugehörige Punkt (bzw. Ortsvektor). Die rechts stehende Formel in (1) ermöglicht die direkte graphische Darstellung der Operationen als Ortsmatrizen. In (2) werden Zwischenpunkte bestimmt, die in der Skizze die additive Zusammensetzung des Schwerpunktes aus drei gedrehten Vektorzügen parallel zu den drei Ortsmatrizen alias „Kantenzügen“ $N \cdot A$, $N \cdot B$ und $N \cdot C$ sichtbar macht. (4) bzw.

⁵⁰da dies bei den hier benutzten *ein*spaltigen Matrizen als Input-Daten nichts weiter als eine zeichnerisch interpretierbare $2 \times n$ -Matrix $\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ ist

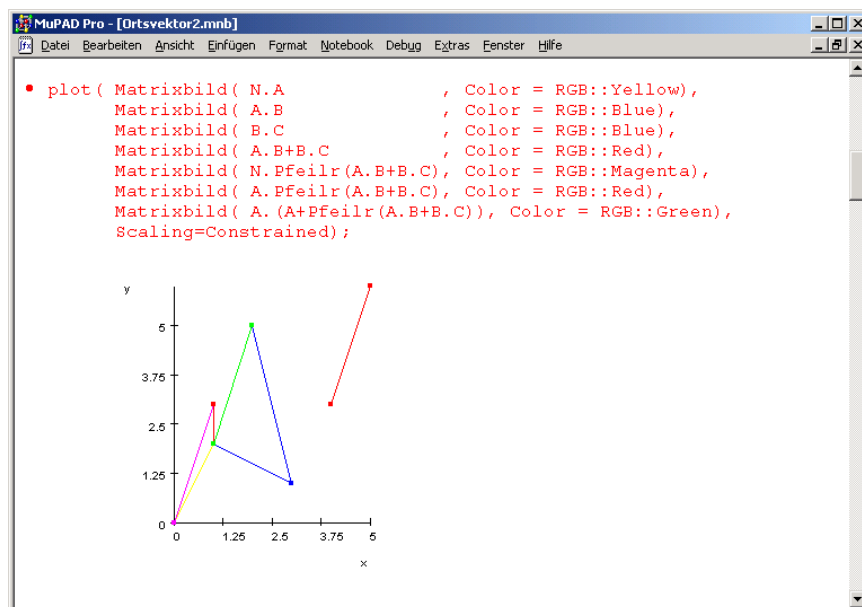


Abbildung 3.26: Zur (farblich gekennzeichneten) Unterscheidung von Richtungsmatrix, Ortsmatrix und Pfeilrichtung alias Ortsvektor

(3) zeigen im Einklang die algebraische Berechnung bzw. die vektorielle Er-Zeichnung des Mittelpunktes M_{BC} der Strecke BC .

In Abbildung 3.29 wird die obige algebraische Rechnung graphisch nachkonstruiert. Man beachte, dass man zur Zeichnung des Dreiecks ABC statt $A.B.C.A$ syntaktisch auch $A.B . B.C . C.A$ schreiben kann: Statt an einen durchgehenden Vektorzug von A über B nach C und nach A zurück, denkt und betont man dann die Zusammensetzung des Dreiecks ABC aus den Kanten $A.B$, $B.C$ und $C.A$. Der blaue Vektorzug zeigt, dass man auch zum Schwerpunkt S gelangt, wenn man vom Nullpunkt aus zunächst nach A geht und von dort aus $2/3$ der Strecke in Richtung des Pfeiles zur Mitte der Strecke BC geht. Man beachte die im CAS mögliche passende symbolsprachliche Formulierung dieser mathematischen Einsicht. Durch explorierende Abänderung lediglich der drei Ausgangsdaten A , B und C zu

```
• A:=matrix([1,2,5]): B:=matrix([3,1,3]): C:=matrix([2,5,4]):
  N:=matrix([0,0,0]):
```

werden automatisch alle Rechnungen und die resultierende Grafik dreidimensional aktualisiert.

Die folgende Tabelle fasst beide Modellierungen synoptisch zusammen:

mathematischer Begriff	mathematisches Symbol	mathematische Darstellung	CAS-MuPAD Modellierung.1	CAS-MuPAD Modellierung.2
------------------------	-----------------------	---------------------------	--------------------------	--------------------------

Punkt	A, B, ...	$(x;y)$ oder $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$[x,y];$ als Liste <i>ohne</i> Struktur	$\text{matrix}([x,y]);$ <i>mit</i> algebrai- scher Struktur
Richtungsmatrix	$[A:B]$ $(A; A + \overrightarrow{AB})$	$\begin{pmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{pmatrix}$	$\text{rv}(A,B)=:AB$	A.B (lies: „A nach B“)
Ortsmatrix	$[N:B - A]$ $(N; \overrightarrow{AB})$	$\begin{pmatrix} 0 & b1-a1 \\ 0 & b2-a2 \end{pmatrix}$	$\text{ov}(AB)$	$N.(B-A)$
(Orts)vektor	$\frac{B-A}{\overrightarrow{AB}}$	$\begin{pmatrix} b1-a1 \\ b2-a2 \end{pmatrix}$	$\text{vec}(\text{ov}(AB))$	Pfeilr(A.B)
<i>Denktyp</i>			<i>funktional</i> orientiert	<i>prädikativ</i> bzw. operativ orientiert

Tabelle 3.2: Zusammenfassende Übersicht über die verschiedenen Repräsentationen des Vektorbegriffs im CAS MuPAD; N bezeichnet den Nullpunkt bzw. den Nullvektor.

Anmerkungen.

1. Ein angemessenes Verständnis der erworbenen Abstraktion kann man an Problemstellungen wie z. B. dem Folgenden testen. Geht man in Richtung $\text{Pfeilr}(X,Y)$ von A aus voran, so gelangt man ebenfalls nach B, d. h. der gleiche Endpunkt wird unabhängig von der Wahl der Richtungs-Repräsentanten erreicht:

$$\bullet \quad X:=\text{matrix}([4,-2]); \quad Y:=\text{matrix}([6,-3]); \\ A+\text{Pfeilr}(A.B) = A+\text{Pfeilr}(X.Y)$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Im Unterschied z. B. zu ARTMANN & TÖRNER [4, S. 89] bezeichnen wir den Pfeil \vec{x} in der Pfeilsprache durch die *Matrix* $N.X$, d. h. wir denken und notieren den Nullpunkt immer dazu. Erst die Pfeil*richtung* wird durch \vec{x} notiert.
3. WITTMANN untersucht in TIETZE [197, S. 132 ff] epistemologische Probleme zum Vektorbegriff und zum Begriff des „Vektorraumes als Strukturbegriff“. Die dort beschriebenen sprachlichen und begrifflichen Verständnisschwierigkeiten der Schüler – insbesondere aufgrund fehlender Lerngelegenheiten zu Äquivalenzrelationen – scheinen bei Nutzung eines CAS durch die hier mögliche Explizierung ausräumbar. Entsprechende Untersuchungen sind geplant. Wie das dort [a. a. O., S. 143] beschriebene Beispiel mit Fehlvorstellungen zur Mittelpunktberechnung – die intuitiven Vorstellungen aufgreifend – in einem CAS reflektiert werden könnte, wurde oben gezeigt.

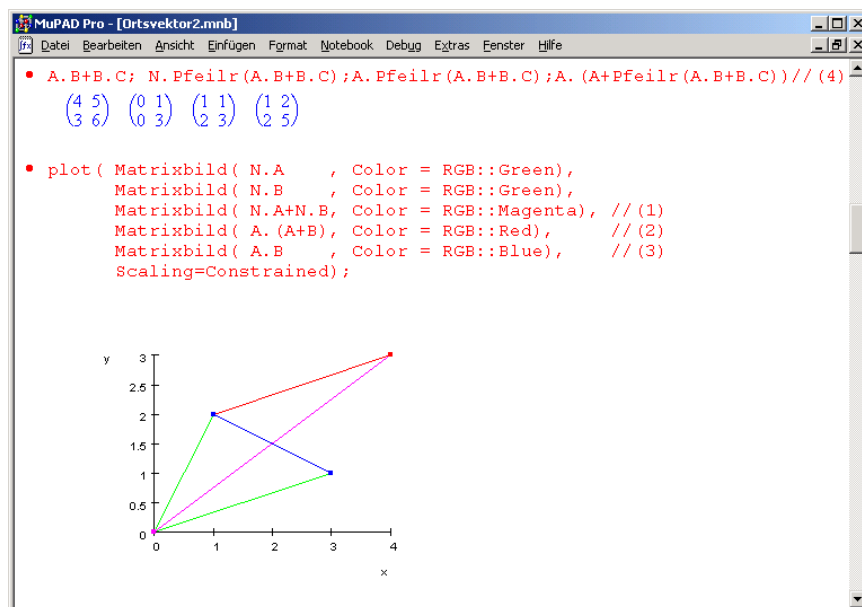


Abbildung 3.27: Visualisierung der Vektor-Addition im CAS MuPAD; Isomorphie von symbolsprachlicher Formulierung und zugehöriger Visualisierung als Stütze im Verständnisprozess

- Der von WITTMANN benutzte Begriff von Abstraktion als „das Ablösen der Struktur von den Modellen, unter Verallgemeinerung die Konkretisierung der Struktur in weiteren Modellen“ [a. a. O., S. 156] zielt eher auf eine *charakterisierende Axiomatik* und nicht auf eine reflexive Abstraktion. Statt des „Wechselspiels von Abstraktion und Verallgemeinerung“ [a. a. O., S. 146] scheint mir LORENZEN’s Beschreibung der Abstraktion als Wechselspiel von *Konstruktion und Abstraktion* für den Lernprozess zutreffender, betont er doch die *erhandelte Konstruiertheit neuen Wissens aus vorhandenen Objekten*.
- Die nach den unterrichtlichen Erfahrungen als langweilig empfundenen und offensichtlich unfruchtbaren Begriffsbildungen im Umfeld des Vektorbegriffs können unter Nutzung von CAS zum Design interessanter Lernarrangements aufbereitet werden. *Die barrierebildenden Probleme* - vgl. Anmerkung 2 - *scheinen im Überspringen des Hilfsbegriffs der Richtungsmatrix zu liegen*, wodurch die reflektive Abstraktion zum Ortsvektor verfrüht vollzogen wird, bevor die Schüler das Zwischenstadium der Nutzung konkreter Endpunkte zur Festlegung der Richtung handelnd überwunden haben. So erklärt sich der zu beobachtende ständige Rückfall in die Streckenintuition. Das Weglassen der hier aufgewiesenen Zwischenstufe verursacht nach meiner Vermutung das beobachtbare Unverständnis. Der handelnde Umgang mit den implementierten Objekten im ständigen Wechselspiel von Anschauung und dem Zwang zu präziser syntaktischer Formulierung im CAS ermöglicht dagegen den Erwerb stabiler Konzepte jenseits des bloßen Redens. Zudem werden im hier vorgeschlagenen Zugang die Konzepte des n-Tuple-Raumes und der Pfeilklassenbildung in einem Lernkontext gleichzeitig angeboten und miteinander

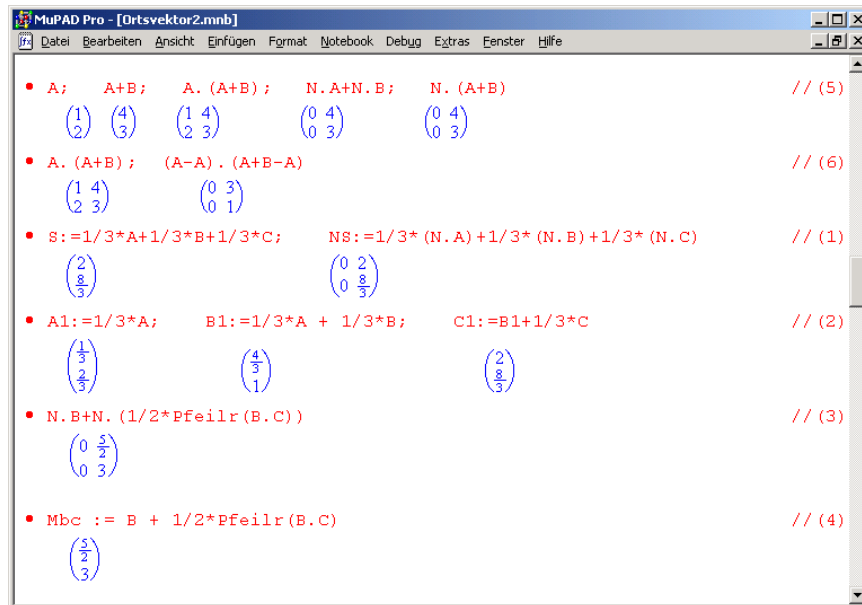


Abbildung 3.28: Zur Berechnung des Mittelpunktes einer Strecke und des Schwerpunktes eines Dreiecks im CAS

verwoben.

Zusammenfassung. Fassen wir die didaktischen Vorteile des hier skizzierten Zugangs zum Vektorbegriff stichwortartig zusammen:

- Das Hilfs-Konzept der *Richtungsmatrix* erleichtert die Anfertigung passender graphischer Repräsentationen, präzisiert das implizite Konzept der Parallelität und gestattet handelnde Aktivitäten im Begriffsumfeld;
- die algebraische und visuelle Kontrollmöglichkeit der Vorstellungen durch explizite CAS-Dialoge fördert ein angemessenes Grundverständnis;
- die intuitive Pfeilsprache wird rational und exekutierbar im CAS re-konstruiert und re-präsentiert, damit werden semantische Fehlverständnisse auf syntaktischer Ebene auf- und entdeckbar;
- sowohl die mental-psychologischen als auch die logisch-mathematischen Abstraktionsprozesse selbst werden als CAS-sprachliche Begriff-Implementationen vollzogen und damit einer metakognitiven methodischen Rückbesinnung erst zugänglich gemacht.

3.2.2 Die Geheimsprachen-Metapher

Die hier diskutierten verständniskritischen epistemologischen Barrieren waren und sind Gegenstand vielfältiger Zeugnisse, die ein gewachsenes Unverständnis gegenüber mathematischen Ausdrucksformen und das Gefühl der Fremdheit in Bilder und Metaphern fassen.

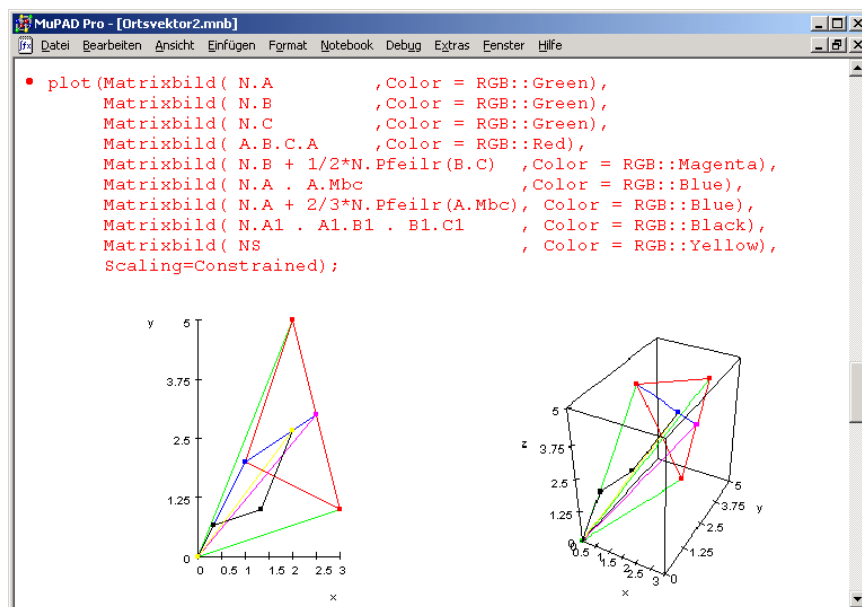


Abbildung 3.29: ebene bzw. anschauungsräumliche Konstruktion von Mittelpunkt und Schwerpunkt im CAS MuPAD

Fachchinesisch. Abbildung 3.30 zeigt einen Ausschnitt einer Spaß-Postkarte⁵¹. Aber ihre Botschaft ist bitterernst: der entnervte Dozent am Pult spricht fach-chinesisch, seine Botschaft ist kryptisch, der Inhalt mathematisch, die Tafelmitte markiert ein Fragezeichen als Symbol des Unverstandenen, tiefend-blutrot droht die Klausur.

Im Kontrast dazu zeigt die zweite Szene Mathematik-Studenten im Übungssaal eines Mathematischen Instituts⁵²: man spürt förmlich den ruhigen kommunikativen Gedankenaustausch, erahnt die fachlichen Diskussionen, die miteinander an Tisch und Wandtafel geführt werden, das Ringen um gemeinsames Verständnis. Ein Dozent ist nicht erkennbar.

Zugangerschwernis. ENZENSBERGER [99] bemüht das literarische Bild der *hochgezogenen Zugbrücke* vor der monolithischen Festung, die dem Ankömmling den Eintritt in die mathematische Wissensburg erschwert bzw. völlig verwehrt, weil sie das Überwinden der Barriere des tiefen Burggrabens nicht ermöglicht und somit die Mathematik ins „Jenseits der Kultur“ stellt. Er schreibt [a. a. O., S. 18],

daß die Mathematiker nicht nur wie andere Wissenschaftler über eine eigentümliche Fachsprache, sondern auch über eine Notation verfügen, die sich von der gewohnten Schrift unterscheidet und die für ihre Binnenkommunikation unentbehrlich ist. [...] Sie sind nämlich der Ansicht, daß ihre Notation wunderbar deutlich und jeder natürlichen Sprache weit überlegen ist. Deshalb sehen sie gar nicht ein, weshalb sie sich die Mühe machen sollten, ihre Ideen ins Deutsche [...] zu übersetzen.

⁵¹ von Gregor SUCHAROWSKI, Berlin, mit dem Titel: „*Es ist nicht leicht, Student zu sein*“.

⁵² der Universität Göttingen; die Aufnahme erfolgte am Tage zur Feier des 70. Geburtstages von B. ARTMANN.



Abbildung 3.30: *Links*: Mathematikvorlesung eines Dozenten in 'Fachchinesisch'. *Rechts*: fachlicher Gedankenaustausch zweier Studierender vor einer Tafel im Göttinger Mathematik-Institut.

Der hier beschriebene formalsprachliche Aspekt, der wie oben ausgeführt, eine wesentliche Verständnisbarriere nicht nur für die Lineare Algebra darstellt, kommt auch im Abschnitt „Semantische Annäherungen“ zum Ausdruck:

Es ist ein gutes Zeichen, daß sich in den letzten Jahren immer mehr Dolmetscher gefunden haben, die darauf spezialisiert sind, die formale Sprache des Faches in natürliche Sprachen zu übersetzen. [a. a. O., S. 42]

Die wissenschaftstheoretischen Hintergründe für diese Entwicklung skizziere ich weiter unten.

Nebelschwaden. CARLSON [26, S. 35] fühlt sich von dichtem Nebel „umgeben, wenn meine Lineare Algebra-Klassen die Konzepte von Unterraum, Spann und linearer Unabhängigkeit zu diskutieren beginnen.“ Nach seiner Erfahrung liegen die Gründe darin, dass es sich erstmals zentral um die Gewinnung von Einsicht und Verständnis in ein *Begriffssystem* handelt, während fast alle Erfahrungen der Schüler auf *Rechentechniken* (Gauss-Algorithmus etc.) gründen - es gibt „keine Erfahrung mit dem Lernen von Ideen“. Er stellt fest: „The problem of poor student understanding of concepts, if not universal, is certainly wide-spread.“ Denn diese Konzepte werden „ohne substanzielle Verbindung mit der Vorerfahrung der Studenten eingeführt [...] und ohne signifikante Beispiele oder Anwendungen.“ [a. a. O., S. 40] CARLSON benutzt die *Metapher der Tanz-Lektion* und gibt vor dieser Folie Ratschläge für eine konstruktive Auflösung der Angst vor dem abstrakt Begrifflichen:

- Konzentrierte Praxis ist für das Lernen wesentlich.
- Angst behindert das Lernen; aber Lernen kann die Angst überwinden.
- Praxis erfordert Motivation; Ermutigung und partieller Erfolg sind gute Motivatoren.
- Lernen erfolgt Schritt für Schritt.

- *Deine* Eleganz muss *mir* beim Lernen nicht helfen.

Diese konstruktive Sicht des Lernprozesses ist in die Empfehlungen der LASG eingeflossen. Wie mit CAS Konzepte dialogisch verständlich re-konstruiert werden können, habe ich am Beispiel des Vektorbegriffs aufgezeigt.

Die Geheimsprachen-Metapher. Das *pragmatische Obligat*⁵³ der wissenschaftlichen Erkenntnis besagt nach LEINFELLNER [148, S. 14] : „Erkenntnis ist für den Menschen und er selbst ist ihr Schöpfer, sowie der ihrer Methoden.“ Es steht im Einklang mit einer prozessualen Sicht von Mathematik in einem fortwährendem *statu nascendi*. Nach dem *Obligat der sprachlich-begrifflichen Repräsentation*

Erst wenn das Ergebnis des Erkenntnisprozesses in zusammenhängender begrifflich–sprachlicher Form [...] vorliegt, kann man es sinnvoll an Hand operativer und operationaler Kriterien überprüfen. [a. a. O., S. 15]

schiebt sich die Sprache(n) zwischen das Objekt der Erkenntnis und das erkennende Subjekt. Dabei führt der wissenschaftliche Präzisierungprozess *von der Umgangssprache über die Fachsprache („Episprache“) zur theoretischen Sprache*⁵⁴ , im Falle der Mathematik mit der Formelsprache sogar zu einer *künstlichen Sprache*. Zweck ist die semantische und logische Unbestimmtheit der Umgangssprache zu eliminieren⁵⁵.

Dieser Prozess der kritischen Konstruktion der mathematischen Wissenschaftssprache als Formelsprache wird am sichtbaren Endprodukt in Form mathematischer Resultate nicht mehr erkennbar, folglich wirkt die Mathematik auf den „ungeübten Tänzer“ esoterisch, sie *erscheint als Geheimwissenschaft* (Geheimlehre): Geheimwissenschaften waren nur Eingeweihten zugänglich und ihre „Geheimnisse“ dürfen nicht weiter verbreitet werden. Diese Charakteristika treffen auf die Wissenschaft Mathematik nicht zu, werden doch mathematische Erkenntnisse offen verbreitet und sind jedermann jederzeit frei zugänglich. Dass Mathematik als objektiv offene und freie Wissenschaft wegen der genannten epistemologischen Barrieren paradoxerweise subjektiv für eine Lernperson unverständlich und *geheimsprachlich* wirken kann, bezeichne ich daher als *Geheimsprachen-Metapher* (Belief).

Während Geheimsprachen absichtsvoll ihre Botschaften so verschlüsseln, dass sie als unverständliche Zeichenfolgen geschützt werden, stellt das *Geheimsprachen-Gefühl gegenüber dem Lernen von Mathematik* einen unwillkommenen affektiven Nebeneffekt im Lernprozess dar.

Geheimsprache – Gemeinsprache – gemeinsame CAS-Sprache. *CAS sind künstliche theoretische* (Programmier)*Sprachen*, die insbesondere darauf abzielen mathematische Wissensdomänen zu implementieren und dabei den obigen Obligaten genügen; sie sind daher auch rational rekonstruierte Wissenschaftssprachen. Aus semiotischer Sicht hat ein Wort einer Sprache drei Dimensionen⁵⁶: eine syntaktische, eine semantische und eine

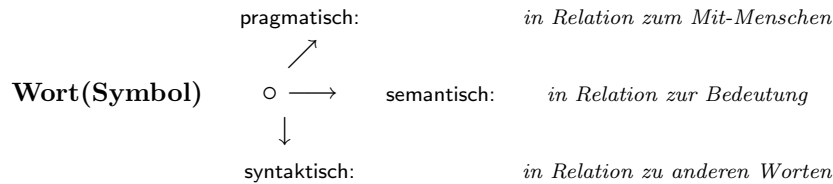
⁵³als verpflichtende Vorstellung

⁵⁴LORENZEN [159, S. 24 ff] bezeichnet eine solche künstlich konstruktiv aufgebaute Sprache als *Orthosprache*, die zu ihrer Beschreibung benutzte Sprache als begründende *Parasprache*.

⁵⁵vgl. [a. a. O., S. 24–27]

⁵⁶vgl. z. B. BOCHENSKI [19, S. 39 ff]

pragmatische.

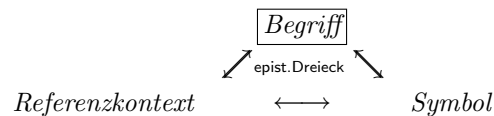


In Bezug auf ein CAS zielt die pragmatische Komponente auf die Kommunikation von Mensch und Maschine: Der CAS-Dialog kommt in Gang durch Notation (selbst) hingeschriebener Bezeichner (identifier) im Eingabeeditor des CAS. Die Antwort des CAS erfolgt i. d. R. mit mathematiknahen Bezeichnungen und hält dadurch den Dialog in Gang. *Insofern ist ein CAS-Dialog modellhaft für einen wissenschaftlichen Dialog in einer Wissenschaftssprache, der Umgang mit CAS ist die partielle Einübung in wissenschaftliche Rede* und macht einen Teil ihrer didaktischen Relevanz aus.

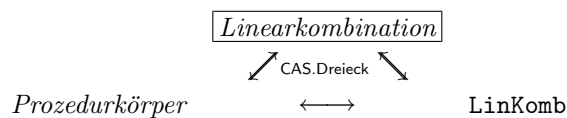
Ein Wort (Symbol) ist auch ein *Signum*, d. h. es hat eine graphische *Zeichengestalt*. Es ist a priori auch ein *Signifikatum*, d. h. es bezeichnet etwas. Jedoch: Ein Zeichen muss kein *Denotatum* sein, d. h. es braucht nicht etwas zu bedeuten. Wie bei Pseudokennzeichnungen sollte ein solcher Missbrauch in wissenschaftlichen Kontexten vermieden werden. Denn wenn man keine *Denotation* vornehmen kann, kann man ein Symbol nicht entschlüsseln, man versteht *buchstäblich* nichts. Diese Zusammenhänge werden üblicherweise in einem semiotischen Dreieck diagrammatisch dargestellt:



Mit Fokus auf die *Wissenskonstruktion* ist aus mathematik-didaktischer Sicht das von STEINBRING vorgeschlagene *epistemologische Dreieck* von Bedeutung. Darin wird das Signifikatum durch den *Referenzkontext*, in dem ein Begriff gelernt wird, ersetzt:



Diese Situation können wir im CAS isomorph abbilden, indem als Referenzkontext z. B. die Funktionsdefinition bzw. der Prozedurkörper eines Algorithmus verwendet wird. Für den Begriff der *Linearkombination* mit dem Bezeichner `LinKomb` ergibt sich damit z. B. das folgende *CAS-epistemologische Dreieck* für den Begriffserwerb:



Im *Prozedurkörper als Wissensblock* kann die Semantik eines CAS-Begriffs aber explizit eingesehen und damit (re)konstruiert werden. Im Unterschied zum epistemologischen

Dreieck sind die *benutzten Symbole jetzt aber exekutierbar*, sie sind nicht an eine Bedeutungsaushandlung mit Mitmenschen gebunden, ihre Bedeutungen können (auch) im Dialog mit dem CAS selbst ausgehandelt (beobachtet) werden; es ist dieses Surplus, welches die Bedeutung von CAS für den selbstständigen Lernprozess ausmachen kann. Die Möglichkeit zusätzlich mit menschlichen Lernpartnern zu kommunizieren bleibt dabei erhalten. Aus wissenschaftspropädeutischer Perspektive gestatten CAS-Re-Präsentationen mathematischer Konzepte damit die explizite Einübung in die semiotische Diskrimination von Zeichen, Bezeichnendem und Bezeichnetem.

Die beschriebenen Befunde über epistemologische Barrieren und Verständnisdefizite wurden in CAS-freien Lernumgebungen (Unterricht, Lehrveranstaltungen) beobachtet. Es ist daher anzunehmen, dass der *direkte Übergang von der Umgangssprache* („Gemeinsprache“⁵⁷) *zur formalisierten Wissenschaftssprache* bzw. Formelsprache der Mathematik, die beobachtete Effekte verursacht. Insofern ist zu untersuchen, ob der Einbezug einer *Zwischensprache* (Parasprache) *als gemeinsamer Präzisionsplattform* im Unterricht der linearen Algebra die Geheimsprachen-Beliefs mildert bzw. ausräumt. Folgende Graphik verdeutlicht die Situation.

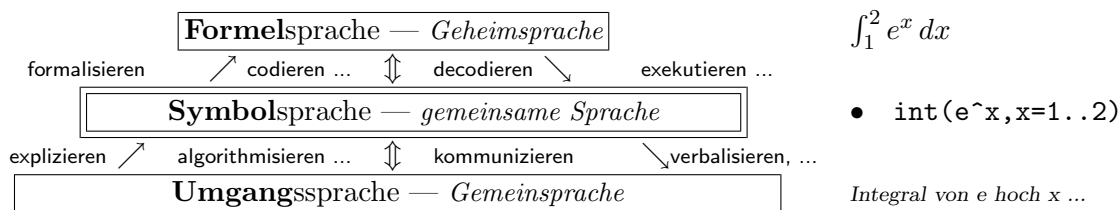


Tabelle 3.3: Kommunikation über Mathematik in Umgangs-, CAS-Symbol- und mathematischer Formelsprache. Die verschiedenen Ausdrucksformen sind am Beispiel einer Integralformel verdeutlicht.

In der reflektierten Nutzung von CAS als symbolischer Zwischensprache liegt daher ein möglicher Schlüssel (Code), mathematische Konzepte und Formeln zu (de)codieren oder verständlich und kontrolliert zu (re)konstruieren. Darüber wird genauer im nächsten Abschnitt nachgedacht.

Anmerkungen.

1. FREUDENTHAL [102, S. 557 ff] befasst sich im letzten Kapitel (§19) seiner *Mathematik als pädagogische Aufgabe* mit der *Logik*. Dabei unterscheidet er das *Schematisieren* (vgl. APOS) und das *Formalisieren*:

⁵⁷Ich benutze hier eine treffende Wortwahl von WILLE [209].

Das Denken äußert sich nach außen sprachlich, und weitgehend ist es auch ein Mit-sich-selbst-sprechen. [...] Ich möchte, wo das Denken im engeren Sinne Gegenstand der mathematisierenden Tätigkeit ist, vom *Schematisieren* sprechen; wo das sprachliche Formulieren einen mathematischen Charakter annimmt, also das Streben nach einer mathematisch einwandfreien Sprache bemerkbar ist, will ich vom *Formalisieren* sprechen. [a. a. O., S. 558]

Auch er unterscheidet drei nebeneinander genutzte Sprachen: zwischen *Gemeinsprache*, der *Formelsprache* als „der mathematischen Sprache um die Formeln herum“ [a. a. O., S. 583] und einer *formalisierten Sprache*. [a. a. O., S. 583 ff] und bemerkt [a. a. O., S. 584]: „Dies bewusste Manipulieren der Sprache muss obendrein allerlei zur Spracherziehung im Allgemeinen beitragen“. Die Formelsprache nennt er auch „halbformalisierte Zwischenform der adaptierten Umgangssprache“ oder eine „zu mathematischen Zwecken zurechtgestutzte Version der Umgangssprache“, vgl. [a. a. O., S. 587].

Die Symbolsprache des CAS ist i. d. S. eine weitere Zwischenform bzw. ein Ausschnitt der formalisierten Sprache, d. h. in obiger *Sprachenpyramide* zunehmender Präzisierung ist als oberster Schlussstein die formalisierte Mathematiksprache zu denken. Die Symbolsprache des CAS benutzt (derzeit) keine 2-dimensionalen Symbole und hat in ihrer Zeilenorientiertheit eine größere Nähe zur Umgangssprache, ihre Präzision aber ist die einer formalisierten Sprache. Die Einübung in CAS ist daher auch ein Stück Einübung in die Präzision einer formalisierten Sprache.

- Um den Ver- und Entschlüsselungscharakter von Symbolsprache und Formalsprache, insbesondere bei den mentalen Kapselungen von Definitionen und Prozessen, zu betonen verwende ich in Aufgabenstellungen⁵⁸ oft die Gegensatzpaare *chiffrieren und dechiffrieren* oder *codieren und decodieren* oder *komprimieren und expandieren* bzw. *zipen und entzipen* als vertraute Prozesse des PC-Handlings. Auch FREUDENTHAL bemerkt die *geheimsprachliche Komponente der Symbolsprache*, ohne dies explizit so zu nennen. So heißt es z. B. im Zusammenhang einer syntaktisch-sensiblen Bemerkung zum Konzept der Größenordnung [a. a. O., S. 497]:

In der analytischen Zahlentheorie kennt man [...] die LANDAUSchen O und o , aber dem modern mathematisch-sprachlich Gebildeten wird es bei dieser Symbolik mit falsch verwendetem Gleichheitszeichen, falsch *angedeuteten* Funktionen und *geheimnisvollen* Variablen *unheimlich* zumute⁵⁹. ($f(x) = O(g(x))$ bedeutet nicht, daß $f(x)$ gleich dem Wert einer Funktion O für das Argument $g(x)$ ist, sondern daß $f(x)/g(x)$ für große x beschränkt bleibt.) [a. a. O., S. 497]

- Die Beobachtung, dass Formeln aus umgangssprachlichem Klartext einen Geheimtext machen können, verweist auf die *mögliche Entschlüsselungswirkung von CAS*, denn dieses kann die syntaktisch richtig aufgeschriebene Formel wieder zum Leben erwecken, d. h. kommunikationsfähig machen. Im CAS kann man wie in der Mathematik selbst diesen Prozess der künstlichen Konstruiertheit von Symbolen und Formeln stellvertretend lernen und so die wissenschaftliche Methode der Formalsprachenkonstruktion

⁵⁸vgl. z. B. LINDNER, Lernparcours *Matrizen und Prozesse I*

⁵⁹Hervorhebung von mir. W.L.

anbahnen. Insofern wird das CAS „zum Tanz mit der Symbolsprache“, zur *herabgelassenen* Zugbrücke, die eine Verbindung zum formalisierenden Mathematisieren herstellen hilft.

4. Die umgangssprachliche Lautgestalt eines Konzeptes wird abgebildet in der Schreibform einer CAS-Zeile. So wie man (mathematisch) spricht und etwas damit meint, so schreibt man im CAS und das Gemeinte (die Semantik) wird über die CAS-Syntax verstanden oder nicht: *Die gelingende Kommunikation mit dem CAS wird zum Kommunikationsmodell für das Nachdenken über eine mathematische Formel*, zur CAS-konstruktiven Sinnerzeugung. Die Reaktion des CAS zeigt dabei, ob und wie ein sinnvoller Dialog zustande gekommen ist. Darauf gründet sich die Hoffnung für einen sinngebenden Verständigungsprozess mit dem CAS. Ein CAS interpretiert die mathematische Sprache des Benutzers und ist/heißt daher sinnvollerweise auch „*Interpreter*“. Im einem letzten Schritt wird man die Zwischensprache des CAS nicht mehr benötigen und als professioneller Mathematiker direkt in der mathematisch-formalisierten Wissenschaftssprache formulieren können.
5. BARDY (in [52]) vergleicht den Erwerb zentraler Begriffe der Linearen Algebra mit dem Lernen einer *Fremdsprache*. Dieser Vergleich - und auch der eines CAS - mit einer Fremdsprache hinkt: Denn Fremdsprachen sind - im anderem kulturellen Kontext - natürlich gewachsene Umgangssprachen und keine künstlichen Sprachen. Die Sprache der Linearen Algebra ist dagegen eine wissenschaftliche Formalsprache, ihr Lernen folgt daher anderen Gesetzen, mathematisches Verständnis gewinnt man nicht wie das Lernen von Vokabeln. Wenn man z. B. weiß, das „span“ mit „Linearkombination“ zu übersetzen ist, so ist die eigentliche Bedeutung des Begriffs selbst mit dieser Übersetzung nicht erfasst.
6. Im Sinne von WITTGENSTEIN könnte man vielleicht formulieren: *Alles was sich schulmathematisch klar sagen lässt, lässt sich CAS-sprachlich klar sagen*. Was man CAS-sprachlich nicht klar und einfach formulieren kann, davon sollte man schulisch schweigen.
7. Während die wissenschaftliche Präzision mathematischer Begriffe als Explikation im CAS erfolgen kann, ist die gesprochene Umgangssprache Medium (Parasprache i. S. v. LORENZEN) der (Selbst-)Reflexion über die geschriebene CAS-Sprache. Neben der Sprache des Lehrers bietet sie eine zweite parallele Unterrichtssprache zur Verständigung und Verstehen mathematischer Konzepte an. Insofern dient sie der *Auflösung des begrifflichen Nebels* und erfüllt damit neben ihrer genuin wissenschaftlichen Aufgabe auch eine zutiefst humane.
8. Ein CAS erlaubt die Manipulierbarkeit und *Spielbarkeit mit begrifflich-mathematischen Kalkülen*, man vergleiche dazu die oben gezeigte Implementation des Vektorkalküls. Dabei wird das Ringen mit dem CAS zum Ringen mit der eigenen Expressivität, d. h. zum Bemühen um ein tiefes statt eines oberflächlichen Verständnisses, um ein Verstehen,

das analog dem formalsprachlichen Verständnis eine *Klarheit bis ins letzte syntaktische Detail* erfordert. Erst dann reagiert ein CAS in zufrieden stellender Weise.

9. ROBERT [179, S. 130] bemerkt in ihren Untersuchungen über Konzeptualisierungsebenen ebenfalls die verschattende Wirkung der formalisierenden Fachsprache in der Linearen Algebra:

Diese Formalisierung [...] macht nicht nur das Arbeiten auf einer neuen Ebene der Konzeptualisierung möglich, sondern erlaubt es auch neue Probleme anzugreifen, die ohne diese Formalisierung nicht zugänglich wären. Allerdings kann sich diese Formalisierung für die Lernenden als vollständig opak erweisen und ihre Nutzung kann folglich die Quelle eines bedenkenswerten Bedeutungsverlustes sein. Tatsächlich arbeiten wir nicht mehr mit Vorstellungen: ihrem Wesen nach verdeckt das Formale, Vereinheitlichende, Verallgemeinernde die Bilder, die mit der vorherigen mathematischen Sprache verbunden waren, aber dies ist genau einer ihrer denkökonomischen Vorzüge.

Hierbei werden „geometrische“ Sprachmittel (z. B. *Ebene* im Anschauungsraum), algebraische Ausdrücke (z. B. die *LGS-Repräsentation* einer Ebene), abstrakte Begriffe (z. B. *Vektorraum*) und metaphorische Sprachbilder (z. B. *Funktionenraum*) zusammen mit diversen Repräsentationsformen graphischer, tabellarischer und symbolischer Form virtuos miteinander verwoben. Abschließend bemerkt DORIER [52, S. 274] daher zu Recht:

Dozent und Text bewegen sich fortwährend zwischen diesen Sprachen, Registern und Darstellungsformen ohne die notwendige Zeit zu geben, um diese Konvertierungen zu festigen und ihre Gültigkeit zu diskutieren. Man scheint zu unterstellen, dass diese Umwandlungen 'natürlich' und offensichtlich sind und überhaupt keiner konzeptuellen Arbeit bedürfen.

Fazit. DORIER [52, S. 274] zieht daher das Fazit: Die „*Lineare Algebra ist ein 'explosives Gemisch' aus Sprachmitteln, Hintergründen und Repräsentationsmitteln*⁶⁰.“ Wie diese drohende Sprachverwirrung durch Einsatz einer didaktisch geeigneten CAS-Sprache als Zwischensprache gemildert werden könnte, wurde bereits ansatzweise aufgezeigt. Im nächsten Kapitel werden weitere Vorschläge aus der Forschung zur Lösung der Problematik dargestellt und diskutiert.

3.2.3 Die Chamäleonbarriere

The teaching of linear algebra at a university level is almost universally regarded as a frustrating experience for instructors and students alike. HILLEL [127, S. 191]

Auch die Untersuchungen von HILLEL [127] bestätigen⁶¹ die oben aufgezeigten epistemologischen Barrieren und die enttäuschenden Lehrresultate. Er weist in einer Fallstudie aber zusätzlich nach, dass der Gebrauch paralleler Repräsentationssprachen zur Vermittlung geometrischer Sachverhalte und die damit notwendigen Übersetzungen zu zusätzlichen mentalen Verständnisproblemen in der Linearen Algebra führen. Dies wird an zwei

⁶⁰Alle fremdsprachliche Übersetzungen von mir (W.L.) – falls nicht ausdrücklich anders gesagt.

⁶¹vgl. [127, S. 191 unten]

Phänomenen verdeutlicht: am *Vektorkonzept* und bei der *Basisdarstellung* von Vektoren und linearen Abbildungen.

Im Folgenden beschreibe ich kurz die visuellen und symbolischen Repräsentationsformen der betrachteten mathematischen Objekte *Vektor* bzw. *Basisdarstellung*, beschreibe die beobachteten Barrieren und ihre Reproduktion in einem eigenen Kurs. Anschließend diskutiere ich mögliche Ursachen und stelle einen CAS-gestützten Lösungsvorschlag zur Überwindung der Repräsentationsbarriere vor. Die hier wirkende Barriere bezeichne ich aus Gründen, die später erkennbar werden, als „*Chamäleonbarriere*“.

Beschreibungssprachen

Mit HILLEL⁶² kann man drei verschiedene Beschreibungssprachen für Konzepte der Linearen Algebra unterscheiden, die nach seinen Befunden Ursachen konzeptueller Lernschwierigkeiten sein können: es sind dies

- eine *geometrisch-visualisierende Gemeinsprache*, die z. B. vom 2-dimensionalen *Anschauungsraum*, *Richtungs- und Ortsvektoren*, *Punkten* und *Abbildungen* spricht und zeichnet; sie dient der Veranschaulichung und intuitiven Vorstellung der Konzepte mit („analytisch“) oder ohne („synthetisch“) Benutzung von Koordinaten(systemen). Wesentliche Operationen sind die anschauliche *Parallelogrammregel* zur Addition von Vektoren sowie die Streckung eines Vektors.
- eine *algebraisch-konkrete Formelsprache*, die z. B. von n-Tupeln X , dem n-Tuple-Raum \mathbb{R}^n und Matrizen T spricht und intuitiv komponentenweise rechnet; hier werden die anschaulichen Konzepte algebraischen Berechnungen zugänglich gemacht, *wobei Vektoren und Punkte i. d. R. mit der Koordinatenspalte identifiziert werden*.⁶³
- eine *formal-abstrakte Symbolsprache*, die z. B. von Vektor v , Vektorraum V oder linearem Operator T axiomatisch spricht und argumentiert; sie reflektiert die voll-ausgebaute professionelle mathematische Theorie.

Will man im Lernprozess das formalsprachliche abstrakte Level anstreben, so sind die anderen Beschreibungsmittel übliche Konkretisierungen (nach HAREL) während der Abfolge horizontaler und vertikaler Mathematisierungsphasen zum Wissensaufbau. Die dabei notwendigen Repräsentationswechsel zwischen den drei Beschreibungsebenen bieten nach HILLEL jedoch erhebliche Barrieren für den Lerner. Dazu einige Beispiele.

⁶²vgl. aber auch z. B. [4, S. 89], wo zwischen *Vektorsprache*, *Pfeilsprache* und *Punktsprache* differenziert wird.

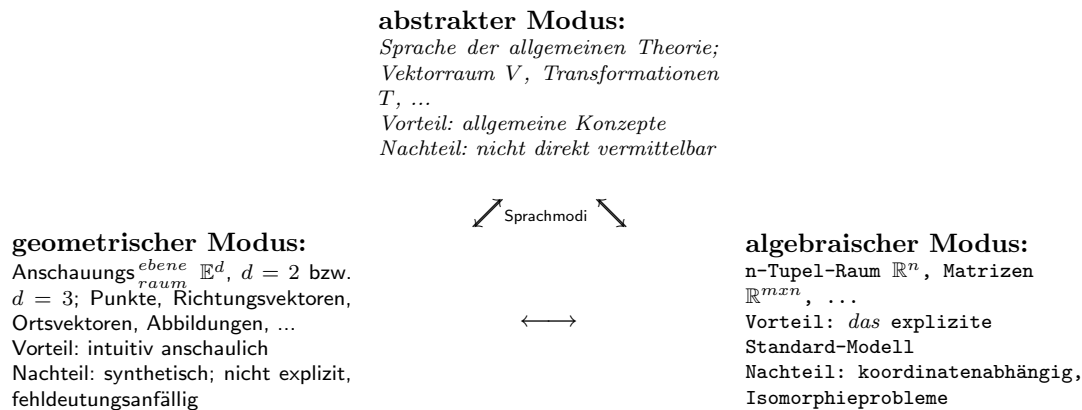
⁶³vgl. z. B. [4, S. 89] „Wenn wir im Folgenden von einem Pfeil \vec{x} sprechen, meinen wir nichts anderes als den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, den wir uns vorteilhaft als jenen Punkt P mit dem Koordinatentripel (x_1, x_2, x_3) bzw. als Pfeil vom Nullpunkt nach P vorstellen.“ oder [22, S. 3] „Ein Punkt oder Vektor in \mathbb{R}^n ist ein n-Tupel reeller Zahlen [...]. Zwei n-Tupel (Punkte, Vektoren) sind [...]“ oder [13, S. 196] „Ein Punkt und ein Vektor haben dieselben Koordinaten“ oder [193, S. 5] „Es besteht eine perfekte Übereinstimmung zwischen dem Spaltenvektor und dem Pfeil vom Ursprung zu dem Punkt, wo der Pfeil endet.“

Beispiel 1: Vektorbegriff. Die physikalisch motivierte Pfeildar(vor)stellung im synthetischen Anschauungsmodus wird leicht brüchig: So zeichneten fast alle Schüler, die einige Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit der Nebenbedingung $x_1 + x_2 = 1$ darstellen sollten, die Gerade mit der Gleichung $x_2 = -x_1 + 1$ und hielten fälschlicherweise „Richtungs-Vektoren“, die sie *auf* die Gerade zeichneten, für die Lösung - anstatt *Ort*vektoren zu zeichnen, die vom Ursprung zu End-Punkten auf der Geraden zeigten. Im Koordinatenmodell des Tupelraumes wurden die Koordinatenachsen nicht als von den Einheitsvektoren erzeugt erkannt und andere Basen als die kanonische Basis wurden widerwillig akzeptiert. Selbst nach Wahl eines synthetischen DGS (Cabri) wurden rein geometrische Aufgaben dennoch analytisch in Koordinatensystemen angegangen. Ähnlich wie auch von HAREL beobachtet, wird anschaulichen „Gedanken“-Skizzen oft die intendierte Konzeptvorstellung nicht entnommen, sondern nur die vordergründige Darstellung betrachtet:

[..] der Bezug auf ein geometrisches Bild meint eine Art Metapher für den allgemeinen Fall. Die Lernenden jedoch scheinen solche Illustrationen oft wörtlich zu nehmen. Sie operieren in der 'Bild-Haben-Ebene' statt auf der 'Eigenschaft-Beobachten-Ebene'. [...] D. h. sie fokussieren auf das Objekt der Metapher ('eine Projektion in einem Euklidischen Raum *ist..*') anstatt auf seine Eigenschaften ('eine Projektion in einem Euklidischen Raum *ist wie..*'). [a. a. O., S. 199]

Alle diese Beobachtungen weisen auf Retardierungen in Prozessvorstellungen hin, die auf unfertigen bzw. ineffektiven Aktionserfahrungen aufbauen. Ein wirksame reflexive Abstraktion vermag sich so nicht einstellen.

Die folgende Übersicht fasst diese Überlegungen zusammen:



Beispiel 2: Basisdarstellung. In einer *Fallstudie* beschreibt HILLEL den Lösungserfolg von Studenten in einer Folge von Tests, deren Problemstellungen insbesondere die *Matrixdarstellungen von linearen Abbildungen* behandeln. Hier sind drei ausgewählte Aufgaben:

A: Sei $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, repräsentiert durch die Matrix $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ mit

Bezug auf die Basis $\{(2, 1), (5, 3)\}$ des \mathbb{R}^2 und $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ des \mathbb{R}^3 . **(i)** Zeige: $T(2, 1) = (17, 10, 15)$. Wie lautet $T(5, 3)$? **(ii)** Schreibe $(1, 0)$ und $(0, 1)$ als Linearkombinationen von $(2, 1)$ und $(5, 3)$. **(iii)** Bestimme die Matrixdarstellung von T mit Bezug auf die Standardbasen von \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 .

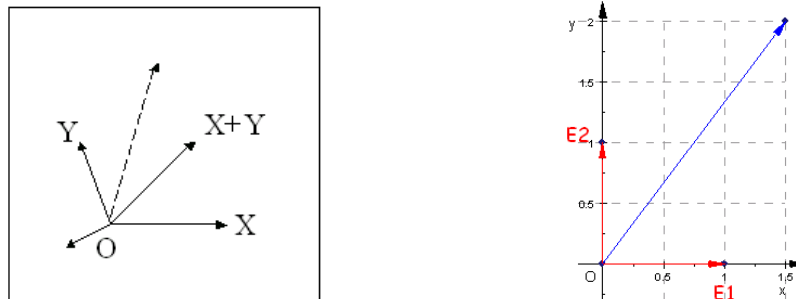


Abbildung 3.31: Kommunikation über Vektoren bzw. Transformationen in drei verschiedenen Repräsentationssprachen nach J. HILLEL. *Links*: synthetischer Anschauungsraum. *Rechts*: algebraisch-analytischer Koordinatenraum.

B: Sei $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, repräsentiert durch die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ mit Bezug auf die Basis $\{(1, 1, 1), (2, 1, 0), (0, 5, 6)\}$ des \mathbb{R}^3 . Bestimme $T(1, 1, 1)$.

C: Sei $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, repräsentiert durch die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ mit Bezug auf eine Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$. Bestimme die Matrix von T in der Basis $\{f_1, f_2, f_3\}$, wobei $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_2 + e_3$, $f_3 = e_1$ ist.

Die Ergebnisse sind – bis auf C – desillusionierend; so geben auf die einfache Frage B mehr als die Hälfte der Probanden überhaupt keine Antwort, nur 10 % lösen die Aufgabe richtig. Selbst die vorgegebene Lösung in A.i wird von weniger als der Hälfte erzielt wie auch die elementare Aufgabe A.ii:

Test	TN		r	nb	Art des Tests
A	18	[nur (i): 8; nur (ii): 8];	4	2	Abschlussarbeit
B	29		3	17	Übungsaufgabe zu Beginn des 2 ^{ten} Semesters; Zusammenarbeit mit den Nachbarn zugelassen
C	22		17		Wiederholungstest

Tabelle 3.4: Erfolgsbilanz in den 4 Testaufgaben von HILLEL:
r = richtig gelöst; nb = nicht bearbeitet.

Aus der Evaluation glaubt HILLEL auf das Vorliegen einer epistemologischen Barriere schließen zu können, denn als „Hauptfehler erwies sich die Vorstellung, eine Matrixspalte als Bild des entsprechenden Basisvektors zu nehmen.“, also z. B. $T([1, 1, 1]) = [1, 3, 6]$ und „nicht *Darstellungen* dieser Bilder bezüglich einer Basis. Die Schwierigkeit wird verstärkt durch die Tatsache, dass dies im Falle der kanonischen Basis eine korrekte Interpretation ist.“, vgl. [a. a. O., S. 204]. Dass mit C eine „abstraktere“ Problemstellung⁶⁴ erstaunlicherweise von 80 % Studenten korrekt gelöst wird, verlangt nach einer Erklärung und wird zu einer didaktischen Design-Konsequenz für den Entwurf der CAS-Lerntrajektorie führen.

Nach der hier vertretenen APOS-Lerntheorie hatten die Studenten keine wirksame

⁶⁴zu der vom Autor in der zitierten Veröffentlichung eine *fehlerhafte* Lösung präsentiert wird

Konzeptvorstellung konstruiert und verharrten in einem Prä-Prozessstadium, da nicht einmal isolierte Aktionen mit den vorliegenden Objekten verständlich ausführbar waren. Da die Lernenden aber von diesen Begriffen reden, als ob sie diese verstanden hätten, diagnostiziere ich die Bildung einer Pseudo-Konzeptvorstellung i. S. v. VINNER. □

Nachfolgend forsche ich zunächst nach den Ursachen dieser „*Repräsentationsbarriere*“ und ziehe daraus didaktische Konsequenzen für die Grundlegung des geometrischen (analytischen) Teils der CAS-Lerntrajektorie. Nach der Konstruktion einer CAS-Mikrowelt, innerhalb derer ein barrierefreier Wissenserwerb ermöglicht werden soll, studieren wir mögliche Lösungen obiger Aufgaben in der CAS-Mikrowelt und analysieren die obigen Fehlvorstellungen zu A, B und C in diesem Rahmen vertieft.

Die Repräsentationsbarriere

Während der Repräsentationswechsel zwischen synthetisch-anschaulichem und analytisch-algebraischem Darstellungsmodus einfach durch die Wahl eines Koordinatensystems erfolgt, erweist sich nach HILLEL der Wechsel vom abstrakten zum algebraischen Modus als verständniskritisch: Dabei stellt sich *die basisabhängige Repräsentation von Vektoren oder linearen Transformationen als ein Haupthindernis heraus*. Denn die gewohnte Identifikation von Vektoren bzw. linearen Abbildungen mit Zahlen-Tupeln wird dadurch erschüttert, dass **das gleiche Objekt** (z. B. ein Vektor) durch **verschiedene n -Tupel dargestellt werden kann** - „diese Ambivalenz kann auf Lernerseite das komplette individuelle Vektorkonzept zerstören.“, vgl. [a. a. O., S. 201]. Ein solches Objekt der individuellen Ontologie ist nun nicht mehr direkt anschaulich, sondern durch seine aktuellen Koordinaten verhüllt – sozusagen „chamäleonisiert“:

Weil die Darstellungen [von Vektoren und Operatoren] i. a. nicht eindeutig sind und von der Wahl einer speziellen Basis oder eines Koordinatensystems abhängen, ist das Verständnis einer solchen Abhängigkeit von einer Basis (und implizit: zu verstehen, was invariant bleibt) eine große Herausforderung für Lernende. Sie müssen nicht nur in der Lage sein eine Matrixdarstellung bezgl. einer gegebenen Basis eines gegebenen Operators zu *finden*, sondern müssen auch über Matrixdarstellungen linearer Operatoren als Gegenstände einer Untersuchung sui generis nach*denken* können [...] [a. a. O., S. 199]

Punkte, Vektoren und Transformationen sind mathematische *Objekte*, Basisdarstellungen und Basiswechsel dieser Objekte sind dagegen linear-algebraische *Prozesse* (Algorithmen), die prinzipiell an der *Seinsform* (Ontologie) dieser Objekte nichts ändern - wohl aber ihre *Erscheinungsform*. Das kann so irritierend sein wie Pseudokennzeichnungen oder implizite Darstellungen. Während aus unserer Perspektive daher zunächst nur ein brüchiges Prozessverständnis aus dem Misslingen der Lösungsversuche abgelesen werden kann, vermutet HILLEL die Existenz und das Wirken einer epistemologischen Barriere:

Man ist versucht mit PIAGET zu sagen, dass die Aktivität der Darstellung einer linearen Abbildung durch eine Matrix bezgl. einer Basis *nicht als Operation internalisiert* worden sei. Jedoch weist die Hartnäckigkeit des Fehlers bei dieser Art von Problemen auf die Existenz einer Barriere, die mehr konzeptueller Art ist und nicht nur ein Problem der Operationalisierung einer Prozedur. [a. a. O., S. 205]

HILLEL argumentiert dabei für die Existenz von zwei epistemologischen Barrieren, die letztlich in der Benutzung von verschiedenen Beschreibungssprachen während der Lernphasen wurzelt:

- eine *Anschauungsraum-Barriere*, die aus der gewohnheits(über?)mäßigen Nutzung des Anschauungsmodus und des kartesischen Koordinatensystems herrührt
- eine *Tupelraum-Barriere*, die in der algorithmischen Nutzung des \mathbb{R}^n (der - mit Recht - als das paradigmatische Modell eines endlich-dimensionalen Vektorraumes dient) und der zugehörigen (linear-) algebraischen Lösungsmethoden gründet.

Er schreibt dazu [a. a. O., S. 205]:

In einem klassischen Aufsatz über epistemologische Barrieren hat BROUSSEAU (1983 und 1997)⁶⁵ erörtert, dass ein mathematischer Begriff dann gelernt wird, wenn er mit anderen Begriffen verknüpft ist und wenn er nutzbar ist und auch tatsächlich zur Lösung einer Reihe von Problemen herangezogen wird, welche den Begriff mit Bedeutung aufladen. Wenn darüber hinaus ein Begriff gut funktioniert und dies für eine längere Zeit, nimmt er eine Bedeutung an, die seine Modifikation, Generalisierung oder Verwerfung erschwert. Daher sehen wir in einem typischen Lineare Algebra-Kurs zwei Arten von epistemologischen Barrieren. Die erste stammt von der 'Vertrautheit' der Lerner mit der analytischen Geometrie und dem Standard-Koordinatensystem [...] und wirkt als Barriere, an eine Basis zu denken (anstatt an die Achsen) und über die Notwendigkeit, die Basis zu wechseln. Die andere Barriere entsteht, weil die Studenten Begriffe lernen, die speziell mit dem \mathbb{R}^n verknüpft sind. Diese Begriffe lösen eine Vielfalt von Problemen, die direkt oder indirekt mit dem zentralen Begriff eines linearen Gleichungssystems verknüpft sind. Folglich wird dieses algebraische Level selbst zur Barriere beim Lernen der allgemeinen Theorie und bei der Akzeptanz anderer Arten von Objekten wie Funktionen, Matrizen oder Polynomen als Vektoren. Dieses Phänomen ist wieder nicht spezifisch für die Lineare Algebra, sondern tritt in der Mathematik mit Regelmäßigkeit auf, wenn man das Allgemeinheitsniveau anhebt.

Die Situation scheint paradox: Während die LACSG-Empfehlungen und die TLAG-Befunde eine unterrichtliche Ausweitung analytisch-anschauungsgeometrischer Aktivitäten im Koordinatenraum als förderlich ansehen, wird eben darin von HILLEL die Ursache von tiefgreifenden Verständnisproblemen beim Erwerb linear-algebraischen Wissens gesehen.

Diese Problematik ist aber erst entscheidbar, wenn die in Frage stehenden algorithmischen Prozesse seitens der Studenten verstanden und effektiv ausführbar sind. Erst danach könnte über weitere tieferliegende konzeptuelle Ursachen gemutmaßt werden. Bis dahin sollte man zunächst Fehler *konzeptioneller* Art vermuten, d. h. *Fehler im Design der Lerntrajektorien* bzw. der dahinterliegenden genetischen Dekompositionen suchen bzw. vermuten. Analysiert man vorliegende empfohlene Lerntrajektorien zur elementaren Linearen Algebra, wie sie in schulischen bzw. universitären Lehrbüchern manifestiert sind, so stellt man eine gravierende Problematik fest: Will man geometrische Objekte, wie Geraden oder Ebenen, die nicht durch den Nullpunkt verlaufen darstellen, *so benötigt man zur algebraischen bzw. geometrischen Beschreibung der geometrischen Objekte affine Begriffsbildungen, während*

⁶⁵ vgl. BROUSSEAU, G.: Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (2), S. 164–198 und *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer 1997.

lediglich linear-vektorielle Konzepte zur Verfügung stehen. Zwar lassen sich solche Objekte im Anschauungsraum intuitiv repräsentieren und auch im algebraischen Modus im Koordinatenraum durch Koordinatengleichungen beschreiben, aber eine abstrakt-vektorielle Repräsentation scheitert mit den vorhandenen begrifflichen Mitteln, da das benötigte Konzept des affinen Raumes nicht vorliegt. Dieses wird zwangsläufig auch in universitären Lehrwerken erst nach der Vektorraumtheorie behandelt (wenn überhaupt), vgl. z. B. BRÖCKER [22, S. 240–244] oder KRAMER [140, S. 107–132] oder KERSTEN [136, S. 222–227].

Ich skizziere daher zunächst im Rahmen einer genetischen Dekomposition den mathematischen Hintergrund und analysiere im Anschluss ausgewählte Lehrwerke auf mögliche Designfehler, die im angestoßenen Lernprozess zu obiger Repräsentationsbarriere führen könnten. Abschließend konkretisiere ich die vorgelegte Dekomposition zu exemplarischen Fragmenten einer CAS-gestützten Lerntrajektorie.

Zur Modellierung des Anschauungsraumes als affiner Raum

Die mathematische Repräsentation der Geometrie des Anschauungsraumes, soweit er für die Schule von Belang ist, ist der *affine Raum*. Die zugehörige Begriffsbildung ist avanciert und benötigt das Operieren einer Gruppe auf einer Menge. So definiert z.B. DOMBROWSKI [49, S. 171]:

Definition: Ein m -dim. \mathbb{R} -affiner Raum $(M, +, V)$ besteht aus einer Menge M , einem m -dim. \mathbb{R} -VR V und einer *einfach-transitiven Operation* der additiven Gruppe des VR-es V auf M :
 $.. + .. : M \times V \longrightarrow M \quad ((p, v) \longmapsto p + v). \dots$

Erläuternd fährt er fort:

Die Elemente $p \in M$ des \mathbb{R} -affinen Raumes $(M, +, V)$ heißen *Punkte*, M sein *Punktraum*, die Elemente $v \in V$ *Richtungsvektoren* [...], das Operieren $(p, v) \rightarrow p + v$ wird zitiert als *Abtragen* des Richtungsvektors v im Punkte p , und man nennt für $p, a \in M$ das Element $q - p \in V$ ⁶⁶ den *Verbindungsvektor von p nach q* . [a. a. O., S. 172]

Entscheidend für die schulisch übliche Elementarisierung ist nun folgende Erkenntnis einer *zulässigen Identifizierung des geometrischen Abtragungsprozesses und der algebraischen Vektoraddition*, die er meisterhaft wie folgt formuliert:

Zwischen dem Symbol für die Operation [des Abtragens] von V auf M (einem Pluszeichen) bzw. dem für den Verbindungsvektor $q - p$ [...] (einem Minuszeichen) einerseits und dem Symbol für die Addition bzw. die Differenz von Vektoren im VR V andererseits wird *typographisch nicht unterschieden*. Dies führt bei sinnverständlichem Gebrauch zu keinen Schwierigkeiten, bietet sogar suggestive Vorteile [...].

„**Goldene Regel**“ des affinen Kalküls: *Alle syntaktisch sinnvollen Formeln über Punkte und Richtungsvektoren affiner Räume $(M, +, V)$, die für den speziellen affinen Raum V selbst [...] richtig sind (und dort allein mittels Vektorrechnung in V verifiziert werden können) gelten auch in beliebigen affinen Räumen $(M, +, V)$.*

Verantwortlich für die letztere Regel ist eine Isomorphie zwischen Abtragungsoperation bzw. Verbindungsvektorbildung und Addition bzw. Differenzbildung im zugehörigen Richtungsvektorraum. [a. a. O., S. 172]

⁶⁶In seinen Kölner Vorlesungen hatte er dafür noch \overrightarrow{pq} geschrieben, eine Bezeichnung die von BRÖCKER, KRAMER, KERSTEN und vielen Schulbüchern verwendet wird. Es ist bemerkenswert, dass P. DOMBROWSKI später mit Bedacht auf eine neue Notion umsteigt. Über mögliche Gründe reflektiere ich weiter unten.

Diese mathematische Erkenntnis bietet die Grundlage für eine (schulische) Elementarisierung, die nach BRÖCKER [22, S. 240]⁶⁷ auch so formuliert werden kann:

Wählt man einen Ursprungspunkt $o \in M$ fest aus, so ist M [...] isomorph zu V [...]. Insofern bringt die Betrachtung affiner Räume nichts Neues, alle Struktur steckt schon drin in dem Vektorraum [...] V . Allerdings, nicht jede in V sinnvolle Aussage ist auch sinnvoll als Aussage über M , nur solche Aussagen, die von der Wahl des Ursprungspunktes unabhängig sind [...].

In Analogie zu den *Linearkombinationen von Vektoren* benötigt man zur expliziten Beschreibung der in Frage stehenden geometrischen Objekte noch sog. *Affinkombinationen von Punkten*, die mit Hilfe baryzentrischer Koordinaten definiert werden, vgl. z. B. DOMBROWSKI [a.a.O., S. 173]:

$$(1) (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \text{ baryzentrisch} \quad :\Leftrightarrow \quad t_1 + \dots + t_n = 1$$

(2) Für ein Punkte- n -Tupel $(p_1, \dots, p_n) \in M^n$ definiert man die *Affinkombination von (p_1, \dots, p_n) mit den baryzentrischen Koeffizienten*⁶⁸ $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ durch:

$$\sum_{i=1}^n t_i \cdot p_i := a + \sum_{i=1}^n t_i \cdot (p_i - a)$$

mit $a \in M$ beliebig.

Ist nun wie im Koordinatenraum bzw. Anschauungsraum $V = M = \mathbb{R}^3$, so gehen diese Konzepte ununterscheidbar ineinander über⁶⁹ und eine (eigentlich strukturlose) Menge trägt nun zugleich doch eine algebraische Struktur - man muss also an M korrekterweise *zugleich als mit und ohne Struktur* behaftet denken. KRAMER [140, S. 111] fügt daher einen unterscheidenden Index *aff* ein⁷⁰:

Wir betrachten jetzt den Spezialfall $V = K^n$. In diesem Falle schreiben wir $A^n(K) = A(K^n)$. Die Elemente von K^n , d. h. die Vektoren, bezeichnen wir als n -Tupel $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ und verstehen darunter den entsprechenden Ortsvektor im K^n . Die Elemente von $A^n(K) = A(K^n)$, d. h. die Punkte, bezeichnen wir ebenfalls als n -Tupel mit dem Index *aff*, d. h. $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{aff} \in A^n(K)$ und verstehen darunter den durch den Ortsvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ festgelegten Punkt von $A^n(K)$.

⁶⁷Den Verbindungsvektor bezeichnet er - wie auch viele Schulbücher - als $v = \overrightarrow{pq}$ bzw. nach der Identifikation auch als $v = q - p$.

⁶⁸im Falle der *affinen Unabhängigkeit* des Punktetupels auch als *Koordinaten* bezeichnet, vgl. z. B. [136, S. 225]

⁶⁹falls man nicht syntaktisch differenzierend aus höherer Warte gegensteuert

⁷⁰In Schulbüchern versucht man diese Unterscheidung dadurch nachzuahmen, dass ein Punkt P oft als Zeilenvektor $P(x, y)$ notiert wird und ein Richtungsvektor \vec{v} als Spaltenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, vgl. z. B. [13, S. 195]. Warum man nach P z. B. kein Gleichheitszeichen setzt, bleibt unmotiviert. Gelegentlich motiviert man die Unterscheidung von Punkt und Vektor auch wie folgt: „Wenn wir *geometrisch in der Anschauungsebene denken und zeichnen*, dann bezeichnen wir die Zahlen x, y als *Koordinaten des Punktes (x, y)* . Wenn wir *algebraisch im Koordinaten„system“ (ebene) denken und rechnen*, dann bezeichnen wir die Zahlen x, y als *Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$* .“ Faktisch sind aber beides Objekte der gleichen Menge \mathbb{R}^2 und nach der „Goldenen Regel“ (s. o.) wird zudem später spaltenweise ununterscheidbar mit Punkten und Vektoren gerechnet.

Anmerkungen:

1. Zeichnet man in der Anschauungs- oder Koordinatenebene einen festen Punkt P als Ursprung aus, so mutiert die affine Anschauungs- bzw. Koordinatenebene zu einem punktierten Vektorraum („Tangentialraum“) und man kann wie gewohnt vektoriell rechnen und zeichnen, vgl. z. B. KOECHER [139, S. 4]:

Es sei E die anschauliche Zeichenebene und V die Menge aller von einem Punkt P von E ausgehenden Pfeile⁷¹. [...] V ist mit diesen beiden Verknüpfungen [Parallelogrammkonstruktion; Streckung] ein Vektorraum über E .

2. Falls man die gewünschte mentale Vorstellung eines Punktes oder eines Vektors auch ohne eine Zeichnung hervorrufen möchte, so kann die Unterscheidung von Punkten und Vektoren typographisch z. B. dadurch erfolgen, dass man die zugrunde liegende Menge unterschiedlich bezeichnet, z. B. „ist“ nach [100, S. 16 ff] $p \in \mathbb{E}^d := \mathbb{R}^d$ ein Punkt, aber $p \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor. Man „denkt“ bei \mathbb{E}^d an die Anschauungs-Ebene bzw. den Euklidischen Raum und bei \mathbb{R}^d an die Reelle Koordinaten^{ebene}_{raum}. Eine andere Möglichkeit ist p bzw. \vec{p} zu notieren; darauf sollte man wegen 3. jedoch verzichten.

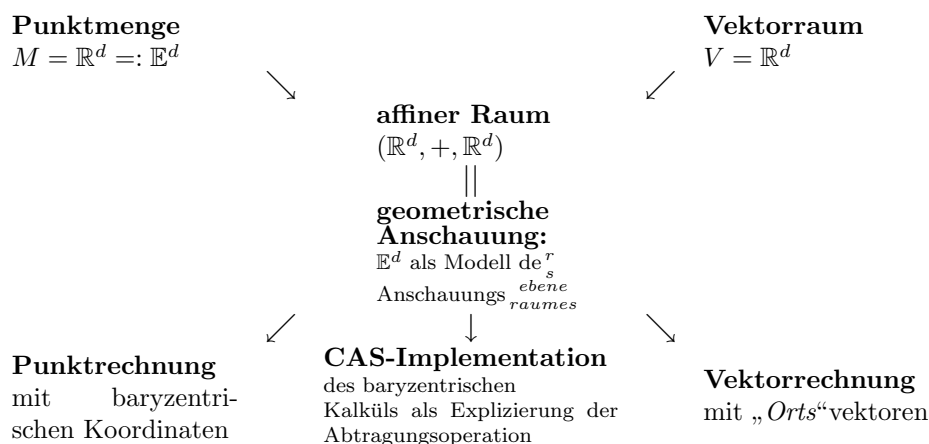
3. Man beachte: In dieser Interpretation ist auch der Verbindungsvektor („Richtungsvektor“) $v := q - p$ ein ursprungsbasierter Vektor und wird vom Nullpunkt aus gezeichnet. Bei dieser Deutung steht der Verbindungsvektor dem Lerner eindeutig als ein mentales Objekt vor Augen - die Auswahl eines Repräsentanten bzw. eine Klassenbildung (Identifizierung) oder Ähnliches entfällt. Damit ist eine kritische Verständnisbarriere, die aus der Abstraktionsbarriere herrührt, ausgeräumt.

Bemerkung: Die Definition $v := \vec{pq}$ ist wegen $v = q - p$ überflüssig und muss zu Rechenzwecken jeweils entpackt werden. Sie verstellt zudem durch die unnötige Kreation eines neuen Symbols den einfachen algebraischen Kern der Gleichung $v = q - p$ und erschwert eine CAS-Implementation unnötig. Man weiß aus algebraischer Erfahrung, dass bei Subtraktionen (Minuszeichen) die Reihenfolge eine Rolle spielt: mehr sagt das Symbol \vec{pq} auch nicht - „von p nach q “, d. h. man sieht in $q - p$ die Spitze algebraisch immer vorne - wie es bei vorne angespitzten Pfeilen eben üblich ist. Zugleich wird eine mentale Belastung des Kurzzeitgedächtnisses vermieden: $\vec{pq} + 2\vec{qp} - \vec{pr}$ benötigt einen Rechenschritt mehr als die schon algebraisch notierte Version $(q - p) + 2(p - q) - (r - p)$. Vor allem aber: Die Notation \vec{pq} verleitet dazu, den Pfeil zwischen p und q zu denken - und dies ist nach obigen Überlegungen eine definitiv falsche Vorstellung.

4. Pointiert sollte man daher fachlich korrekt, aber schülergemäß formulieren: Ein Vektor ist (definiert als) die Differenz zweier Punkte. Ortsvektoren $v = p - o = p$ sind damit lediglich spezielle Vektoren.
5. Affinkombinationen kann man dann wie folgt von Linearkombinationen unterscheiden: Eine Affinkombination von Punkten zu einem neuen Punkt hat immer die Koeffizientensumme 1, während eine Linearkombination von Vektoren zu einem neuen Vektor immer die Koeffizientensumme 0 hat.

⁷¹betonender Kursivsatz von mir. -w.L.

Zusammenfassend ergibt sich daher die folgende *genetische Dekomposition* des Raumes (Ebene) der Anschauung, die wir der Konstruktion von schulischen Lernarrangements zur *Linearen Algebra und Analytischen Geometrie* mit Hilfe eines CAS zugrunde legen werden:



Die folgenden Abbildungen zeigen mit diesen Konzepten kompatible Repräsentationen in den geometrischen Beschreibungssprachen der koordinatenfreien Anschauungsebene (geometrischer Modus) und in der Koordinatenebene (algebraischer Modus) als geplantes Handlungsfeld zur vorstellungsrobusten Konstruktion linear-algebraischen Wissens auf der Schule. Abbildung 3.32 zeigt links die Anschauungsebene mit Auszeichnung eines Ursprungs, damit ist dies eine korrekte Vorstellung eines Vektorraumes, der aus einem affinen Raum entstanden gedacht werden kann und nach Entfernen des Ursprungs O wieder zu einem solchen wird. Rechts findet sich die gleiche Darstellung in der algebraischen Beschreibungssprache der Koordinatenebene: Durch ihre reichere Struktur werden vielfältigere – auch CAS-kontrollierte und CAS-gestützte – Aktivitäten des Lerner möglich, wie z. B. die algebraische Kontrolle geometrischer Überlegungen. Man beachte, dass von der (CAS-)Startszene ab die *affin-unabhängigen Basis-Punkte* (O, E_1, E_2) und die *Basis-Vektoren* ($E_1 - O, E_2 - O$) eingezeichnet werden, um verständig-intuitiv in den Begriffen der noch anzubahrenden abstrakten Konzeptvorstellungen wie *Komponenten, Koordinaten, Kombinationen oder Zerlegungen* vorgehend reden und denken zu können:

Im CAS schaltet man durch Ein/Ausblenden des Koordinatengitters bei Bedarf zwischen beiden Beschreibungsmodi hin und her. Auch Szenen der synthetischen Geometrie wird man daher in der Koordinatenebene vor-konstruieren. Ich verwende daher zur Anbahnung von linear-algebraischen Konzeptvorstellungen ausschließlich die CAS-Koordinatenebene. Die koordinatenfreie Zeichenebene als nicht-explizite „umgangssprachliche“ geometrische Beschreibungssprache dient zusätzlich vor allem kommunikativen Planungs- oder Verständigungsprozessen mit/zwischen den Lernpersonen. Solche Skizzen (vgl. oben HAREL bzw. HILLEL) können im argumentativen Zweifel oder bei drohenden Fehlvorstellungen explizit in der CAS-Koordinatenebene verständnisfördernd re-konstruiert werden. Erst danach ist die höhere abstrakte Ebene der begrifflichen Argumentation sinnvoll betretbar. Im angestrebten Kurs ist daher der (affine) CAS-modellierte n -Tupelraum die gemeinsame geometrische Explikationssprache. Darauf gründet sich die Möglichkeit mit einem CAS einsichtig Geometrie zu betreiben:

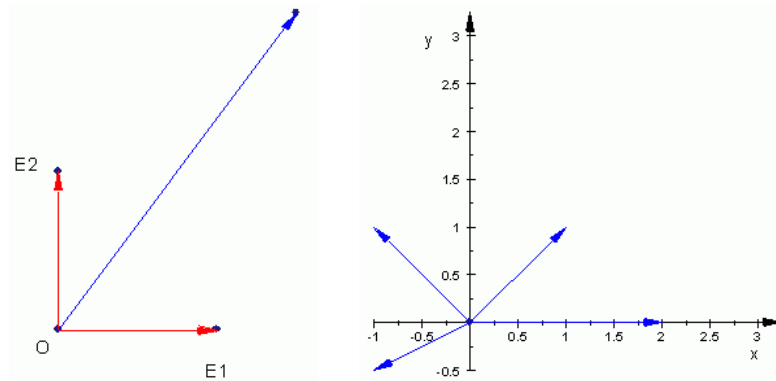
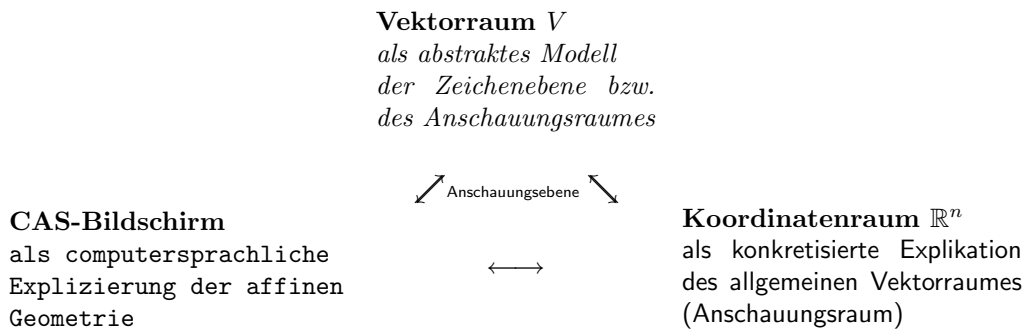


Abbildung 3.32: punktierte („zentrierte“) *Anschauungsebene* (links) und ursprungsmarkierte *Koordinatenebene* (rechts) mit Einzeichnung von Basispunkten bzw. Basisvektoren als elementare anschauliche Vektorräume der schulischen Linearen Algebra



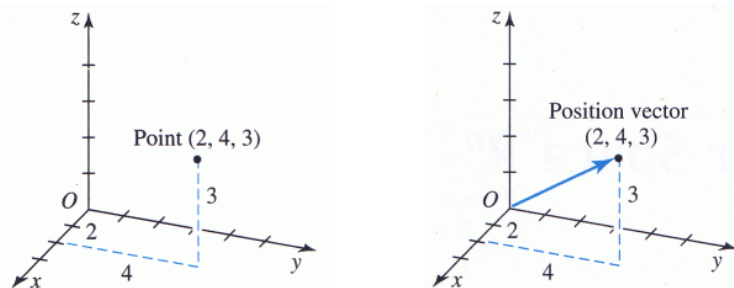
Kritische Analyse einiger Lehrwerke

Ausgehend von obiger genetischer Dekomposition des Anschauungsraumes analysiere ich nun einige verbreitete Lehrwerke auf ihre Eignung zur barrierefreien Umsetzung obiger Überlegungen. Betrachten wir dazu das Problem der sinnvollen Unterscheidung von affinen und vektoriellen Objekten in verschiedenen Lehrwerken, da hierauf die Anbahnung von effektiven und belastbaren Konzeptvorstellungen für die Überwindung der obigen Repräsentationsbarriere entscheidend gründet.

1. Abbildung 3.33 aus WILLIAMS [210, S. 174] zeigt links die Darstellung eines *Punktes* aus \mathbb{E}^3 und in der Mitte die eines *Ortsvektors* aus \mathbb{R}^3 im Koordinatensystem. Beide Objekte werden syntaktisch nicht unterschieden, sondern als Zahlentripel (Zeilenvektor) notiert. Dies fokussiert die Gleichheit der Objekte, lässt aber Fragen nach dem Unterschied unbeantwortet.⁷² Jedoch fehlt das Einzeichnen der Standard-Basis; damit wird eine

⁷²Ähnlich definieren LARSON & EDWARDS [145, S. 160]: „Ein **Vektor in der** [Anschauungs- bzw. Koordinaten-] **Ebene** wird repräsentiert durch eine **gerichtete Strecke**, deren **Anfangspunkt** der Ursprung ist und deren **Endpunkt** der Punkt (x_1, x_2) ist. [...] Bemerkung: Die Bezeichnung *Vektor* stammt

Gewöhnung an Linearkombinationen und Ursprungsbasierungen nicht angebahnt. Darauf wird z. B. in der rechten Grafik aus [4, S. 89 ff] Wert gelegt: Die Skizze verknüpft geschickt anschauliche, algebraische und vektorielle Sichtweisen in Übereinstimmung mit den obigen Überlegungen und erlaubt die Beschreibung geometrischer Phänomene aus allen Beschreibungsmodi; Punkte und Vektoren werden nicht unterschieden und als Spaltenvektor notiert. So ist z. B. $(2, 1, 0)$ ein Punkt, aber $(2, 1, 2)$ ein Vektor. Die Autoren ziehen es vor, die Unterscheidung von Punkten X und Vektoren \vec{x} über die Einzelobjektnotation zu leisten, während hier die Zugehörigkeit zur globalen Menge durch \mathbb{E}^3 bzw. \mathbb{R}^3 unterschieden wird. „Freie“, „verschobene“ Richtungsvektoren werden - wie schon in dieser Skizze - im Lehrwerk konsequent vermieden: Alle Vektoren gründen im Nullpunkt. Die Darstellung ist daher in Übereinstimmung mit der *Goldenen Regel der affinen Geometrie*, eine irreführende barrieregeladene Notation wie \overrightarrow{AB} tritt im gesamten Buch nicht auf. Einen ähnlichen Ansatz einer konsequent anschaulichen⁷³ Vektorraumgeometrie und -theorie wählt auch [10, S. 6], es gibt keine Verquickung mit affinen Konzepten, alle auftretenden Vektoren sind Ursprungsvektoren, die mit großen Fettdruckbuchstaben wie X notiert werden, von Punkten ist nicht die Rede⁷⁴ - und damit allerdings auch nicht von einem intuitiv bekannten Konzept des Anschauungsraumes aus der Vorerfahrung der Schüler: Der rigoros-korrekte Ansatz wird mit einem mentalen Abstand zur Vorerfahrung erkaufte.



2. Die folgende Abbildung 3.34 demonstriert, wie die übliche (unbedachte?) Verwendung von „freien“ Richtungsvektoren zu theoretischen Inkonsistenzen führt, die sich in der Bildung von Fehlvorstellungen niederschlagen können. Im linken Bild aus [136, S. 222] tritt eine Abstraktionsbarriere auf: Die Gleichung $v = \overrightarrow{pq}$ ist mit der Skizze nicht stimmig, denn *visuell sieht der Lerner zwei verschiedene Pfeile* (Objekte) - man muss interpretieren (Repräsentant, Identifikation etc.), warum diese laut „algebraischer Gleichung“ gleich [Klassen] sind, was für eine „Gleichheit“ gemeint ist etc. - eine für den anfänglichen Lernprozess in der Schule belastende Situation. Die *Abstraktionsbarriere verdeckt die eindeutige*

vom lateinischen Wort *vectus*, und bedeutet soviel wie „tragen“. Die Idee ist: Wenn du etwas vom Ursprung zum Punkt (x_1, x_2) trägst, so könnte der Weg dahin als gerichtete Strecke von $(0,0)$ zu (x_1, x_2) gezeichnet werden.“ Diese einfache Deutung wird in deutschen Schulbüchern leider nicht gegeben, wiewohl z. B. KROLL [141, S. 25 ff] eine hinlängliche historische Einleitung bietet.

⁷³hier i. S. von anschauungsebenen-basierte bzw. anschauungsraum-basierte

⁷⁴BLYTH [17, S. 16 ff] spricht dagegen im matrixorientierten ersten Teil des Werkes nur von *Punkten* als intuitiv vorbekannten Objekten der Anschauungsebene: Diese dienen z. B. als Inputs für Matrizen. Erst nach der (axiomatischen) Einführung des Vektorraum-Konzeptes S. 67 ff wird der Begriff *Vektor* benutzt.

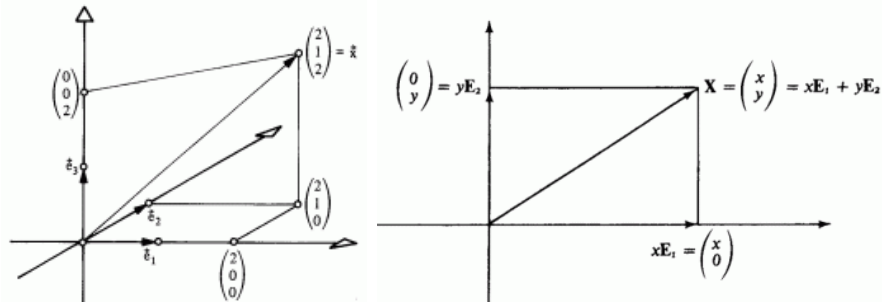


Abbildung 3.33: Zur korrekten Visualisierung von affinen Objekten (Punkten) und vektoriellen Konzepten (Ortsvektoren) in verschiedenen Lehrwerken.

Sicht auf ein (sic!) mentales Objekt, der Lerner muss annehmen verschiedene Objekte zu sehen - trotz aller Beteuerungen der Lehrperson. Es kommt zum Bruch visueller und mentaler Vorstellungen, weil sich ein abstraktes Konzept (Restklasse) mit anschaulichen Evidenzen (Pfeile) stört: Die algebraische Gleichheit steht im psychologischen Widerspruch zur visuellen Verschiedenheit.

[100, S. 17] versucht Punkt-Koordinaten (Ablese im *globalen* KOS) und Vektor-Koordinaten (Ablese am *lokalen* Steigungsdreieck) getrennt zu visualisieren; es wird im Gegensatz zum linken Bild zwar nur ein Objekt (als Repräsentant des *richtigen* Richtungsvektors) gezeichnet - allerdings beginnt der Vektor⁷⁵ $v = q - p = \vec{pq}$ nicht mehr nullpunktsbasiert und die Vektorrauminterpretation wird widersprüchlich. Zwar tritt die Abstraktionsbarriere dann nicht auf, es kommt aber zur Kopplung mit einer falschen Vektorvorstellung: „Vektoren können irgendwo im affinen Gelände liegen“ und es bildet sich möglicherweise eine Repräsentations-Barriere aus. Zudem wird der Basisvektor \vec{e}_1 als Achsenbezeichnung benutzt und verliert seine klare Bedeutung als Konstruktionsbestandteil in der Affinkombination $q = p + 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ bzw. der Linearkombination $q - p = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, die in Widerspruch zur Positionierung der Daten in der Skizze gerät. Hier sollten die Basisvektoren(punkte) \vec{e}_i besser an der 1 stehen und der Richtungsvektor nur angedeutet sein (gestrichelt) - worüber man dann wieder interpretierend sprechen müsste, s. o.

Im Schulbuch [13, S. 196] wird versucht, Punkte und Vektoren aufwändig [aber irrelevant] zu unterscheiden, die Koordinaten werden zeilen- bzw. spaltenweise notiert, Farbgebungen möchten zur Orientierung im Koordinatensystem verhelfen. Aber entscheidend fehlt der Ursprungsrepräsentant des Richtungsvektors und da diese Graphik den Erstkontakt des Lerners mit einem Vektor darstellt, ruft diese Visualisierung eine massive Fehlvorstellung hervor - Vektoren müssen offenbar und *ersichtlich* nicht ursprungsverhaftet sein. Auch die Basisvektoren als „die“ ursprungsbasierten Prototypen von Richtungsvektoren fehlen und können die Fehlvorstellung nicht mildern. Was aus der Skizze mental haften bleibt, ist der

⁷⁵FARIN [100, S. 18] unterscheidet Punkt und Vektor wie folgt: „Betrachtet man also einen Vektor als Differenz zweier Punkte, so erkennt man, dass es unendlich viele Vektoren mit derselben Richtung und Länge gibt. [...] Im Unterschied zu einem Punkt kann ein Vektor jedoch *nicht* zur Festlegung einer Position verwendet werden.“

„Eindruck des rot und wichtig mitten im Anschauungsraum“ liegenden „Vektors“ - eine fatale Langzeitwirkung.

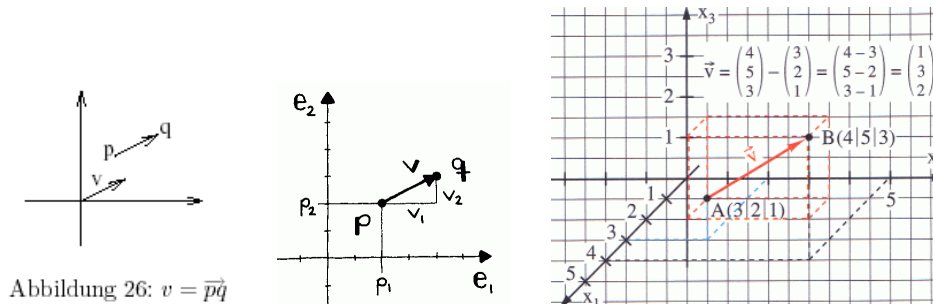


Abbildung 26: $v = \overrightarrow{pq}$

Abbildung 3.34: Unterschiedliche Darstellungen von Richtungsvektoren in verschiedenen Lehrwerken mit barrieregefährdeten Fehlvorstellungen.

3. Betrachten wir abschließend die unterschiedliche Darstellung affiner Geraden und ihre Wirkung auf die mögliche Bildung von Fehlverständnissen. Die linke Abbildung 3.35 betont konsequent die Ursprungsbasiertheit aller Vektoren und verwendet daher korrekterweise zwei Punkte (affine Objekte) zur mentalen Konstruktion der affinen Geraden⁷⁶. In Übereinstimmung mit der mathematischen Hintergrundtheorie ankert der Richtungsvektor $q - p$ massiv im Nullpunkt (hier wird also die Richtung „gemessen“⁷⁷!) und die gleichfarbige Gerade verläuft in seiner Richtung. Der Lerner sieht drastisch, dass auch alle übrigen Vektoren im Ursprung ansetzen und auf End-Punkte zeigen. Die Skizze ist in perfekter Harmonie mit der affinen und vektoriellen Geometrie der Anschauungsebene und fokussiert die richtigen Vorstellungen. Kein Vektor vagabundiert frei (besser: quer [auch: zur Theorie]) herum, das Koordinatensystem hält sich dezent angedeutet im Hintergrund. Die Skizze mischt meisterhaft synthetische und analytische Aspekte.

Dagegen ist die Darstellung im mittleren Bild aus [112, S. 216] eine merkwürdige, wenig informative Mischung aus Anschauungsraum und angedeutetem Koordinatenraum, die Textblase zeigt verstärkend auf „den querliegenden“ Richtungsvektor und der (Auf)Punkt A der Geraden wird unnötig als „Stütz“vektor⁷⁸ gedeutet. Auch im rechten Bild aus [13, S. 221] ist die Lage des Richtungsvektors fehlvorstellungsgefährdend gezeichnet⁷⁹.

⁷⁶vgl. analog [4, S. 95] oder die baryzentrische Deutung der Geradengleichung in [100]; s. u. unsere CAS-Konstruktion dazu

⁷⁷genauer: auf der Einheitssphäre

⁷⁸Was ist, wenn die Gerade „unterhalb des Ursprungs“ verläuft: „fällt sie dann von den Stützvektoren ab“, verliert die Gerade in diesem Falle ihren Halt?

⁷⁹GRIESEL et al. [112, S. 204] definieren: „Ein **Vektor mit drei Koordinaten** (auch **dreidimensionaler Vektor** genannt) ist ein geordnetes Zahlentupel, welches wir als Spalte schreiben.“ Diese Definition ist letztlich apodeiktisch und besagt nichts; insbesondere ist ein Vektor damit von einem Punkt nicht unterscheidbar – beide stammen aus dem \mathbb{R}^3 . Auch der Versuch, eine Diskriminierung über eine andere Notation (Punkt als Zeilentupel) zu erzwingen, kann wegen der prinzipiellen Isomorphie keine Einsicht erzeugen.

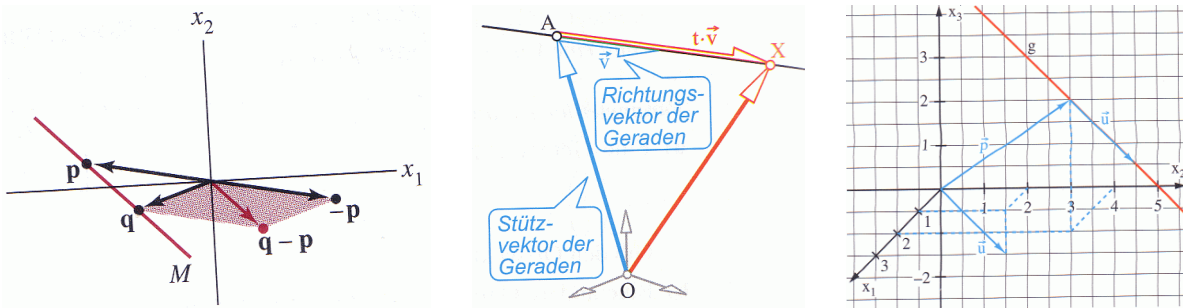


Abbildung 3.35: Korrekte und barrieren-evozierende Darstellungen affiner Geraden in Schulbüchern.

Fazit: Haftet man die Richtungsvektoren (Richtungsraum) zu affinen Objekten (in der Schule: Punkt, Gerade, Ebene) nicht konsequent am Nullpunkt an, so prägt sich in der Folge eine massive Fehlvorstellung aus, die mit ihrer Theorieinkonsistenz eine Repräsentationsbarriere⁸⁰ evoziert. Denn *die Anschauungsebene und die hier gebundenen Konzeptvorstellungen können dann ihrer gedachten Funktion als Überwachungsinstanz (Monitoring) gegen Fehlhandlungen und als Anker eines intuitiven Vektorbegriffs nicht mehr nachkommen:* Wenn Schüler an Bilder mit querliegenden Verbindungsvektoren gewöhnt werden - was sollte dann im Experiment von HILLEL gegen die Skizzierung eines Vektors *in* einer Geraden schützen?

Daher ist folgende Notiz von KOECHER [139, S. 8] mit großer didaktischer Skepsis zu lesen, denn die unheilvollen mentalen Folgen eines (unter Experten vielleicht hilfreichen) gezielten mis-use sind mitzubedenken - diese könnten den erhofften Nutzwert erheblich reduzieren:

In der Anschauungsebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist es oft hilfreich, wenn man einen Vektor P , den man als Pfeil \overrightarrow{OP} interpretiert hat, von dem Anfangspunkt O löst und ihn als gerichteten Pfeil betrachtet, der einen beliebigen Punkt der Ebene als Anfangspunkt besitzt. Alle solche Vektoren mit gleicher Länge und Richtung werden dann identifiziert, das heißt, man kann sie unter Beibehaltung von Länge und Richtung in der Ebene beliebig verschieben. Die Addition von P und P' erhält man dann als Endpunkt von P' , wenn man P als Anfangspunkt für P' wählt. In diesem Zusammenhang spricht man manchmal von „gebundenen“ und „freien“ Vektoren.

Das hier angemessene Konzept ist das eines *Vektorfeldes*⁸¹, wie es der Physiker gebraucht - dies aber ist ein Objekt der Differentialgeometrie und die hier benutzten Konzepte sind *Tangentialräume* T_pM und deren Bündel TM : lauter punkt-basierte Vektorräume, in denen man alles lokal von einem Punkt aus linear vektoriell kombiniert.

Didaktische Konsequenzen I (analytisch-geometrisch)

Aus der obigen genetischen Dekomposition und der Analyse einiger vorliegender Lerntrajektorien ziehe ich für den Entwurf einer CAS-basierten Linearen Algebra bzw. Analyti-

⁸⁰Auch unterscheidende Präfixe wie *Richtungs-, Orts-, Ursprungs-* Vektor können der Konzeptvorstellung nicht auf die Sprünge helfen, wenn zugehörige Skizzen falsche Assoziationen anlegen.

⁸¹vgl. z. B. Reckziegel [177, S. 82]

schen Geometrie folgende Entwurfskonsequenzen für den analytisch-geometrischen Teil der Revision.

1. Um CAS-gestützt analytische Geometrie zu betreiben, *modelliere ich Anschauungsebene bzw. Anschauungsraum durch ein globales kartesisches Koordinatensystem* (Bildschirm-ebene) als algebraische Beschreibungssprache geometrischer Phänomene.
2. Zur Anbahnung geeigneter verallgemeinerungsfähiger Vorstellungen werden dabei *immer die kanonische Basis sowie die affinen Basispunkte mit eingezeichnet*. Dazu steht eine CAS-Routine zur Verfügung.
3. *Alle Vektoren sind Ortsvektoren*, die am Nullpunkt ansetzen. *Jeder Vektor ist die algebraische Differenz zweier affiner Punkte*.
4. Affine Sachverhalte werden (im Leistungskurs) mit baryzentrischen Koordinaten in lokalen Koordinatensystemen konkretisiert bzw. expliziert.
5. Konzeptdiskussionen und Kommunikationen können gelegentlich auch in der unpräzisen „*umgangsgeometrischen*“ Anschauungsebene skizziert werden, um holistische Vorstellungen zu materialisieren. *Explikationsfeld und geometrische Verständigungssprache ist aber das CAS-Koordinatensystem*.
6. Das abstrakte Modell des Anschauungsraumes als allgemeiner Vektorraum (genauer: affiner Raum) bleibt der Einführung an der Universität überlassen. Robuste Grundvorstellungen werden dazu gelegt. CAS-explizierte geometrische Einsichten sollten ein klares Verständnis fördern, die Realisierung von anschaulichen Vorstellungen im CAS verifiziert zugleich die Funktionsfähigkeit des affinen und vektoriellen Kalküls.

Zum Test des Entwurfskonzepts modelliere ich die Wissenskonstruktion der Konzepte *Punkt*, *Vektor* und *baryzentrische Koordinaten* im CAS MuPAD. Mit dem so implementierten Wissen wird exemplarisch die affine sowie vektorielle Berechnung und szenische Darstellung des Mittelpunktes einer Strecke demonstriert. Abschließend skizziere ich eine CAS-Lernumgebung zur Förderung des Verständnisses von *Basistransformationen*.

■ **Beispiel 1: Zur CAS-Modellierung von Punkt, Ortsvektor und Vektor.** Das nachfolgende Modul implementiert eine MuPAD-Mikrowelt zur affinen Geometrie. Dieses Modul definiert diejenigen Objekte und Prozesse, die als externe Handlungsbestandteile für das Lernsubjekt zur Verfügung gestellt werden: die Konstruktoren⁸² **Punkt** und **Richtungsvektor** zur Erzeugung geometrischer (plot-)Objekte der Mikrowelt in (1) bzw. (5) und den Konstruktor **Vektor** zur Erzeugung der algebraische Vektoren des Vektorraumes der Mikrowelt. Man beachte, dass nur mit diesen Vektoren der Mikrowelt gerechnet werden kann, da hier Werte in der operierenden additiven Gruppe des einspaltigen \mathbb{R} -Matrizenvektorraumes

⁸²hier nicht im engeren Sinne der objektorientierten Informatik als Objekt-Konstruktor, sondern im übertragenen Sinne der *Erzeugung eines Denkobjekts der Mikrowelt* gemeint.

erzeugt werden, vgl. Zeile (3). Zur vereinfachten CAS-Eingabe werden alle drei Basiskonstrukturen als einstellige Präfix-Operatoren definiert, vgl. (1), (4) und (6), und sinnfällig symbolisiert. Die Symbolisierung orientiert sich dabei an den gewohnten Sprech- und Notationsweisen. Als einzige Konstruktion neuer Punkte wird in (8) das Konzept der Affinkombination (baryzentrische Kombination) bereitgestellt. Dazu dient als Hilfsfunktion der boolesche Test eines vorgelegten Zahlentupels auf Baryzentrität in (7). In (10) wird die Konstruktion eines globalen Koordinatensystems bereitgestellt. Modelliert werden alle Objekte über dem Basistyp der unstrukturierten Zahlenliste.

```

• export(linalg): export(plot):
  // MuPAD3 Modellierung der affinen Geometrie der Anschauungsebene (W.Lindner)

Punkt := A -> Point2d([op(A)]):           // zum Zeichnen           (1)
operator("°", Punkt, Prefix, 1000):      // eine Präfix-Abkürzung  (2)

Vektor := A -> transpose(matrix([A])):   // zum Rechnen           (3)
operator("~", Vektor, Prefix, 1800):     // eine Präfix-Abkürzung  (4)

Richtungsvektor := v -> Arrow2d(v):      // zum Zeichnen           (5)
operator("~>", Richtungsvektor, Prefix, 1799): // eine Präfix-Abkürzung (6)

baryzentrisch := Ko -> is(_plus( Ko[i] $ i=1..nops(Ko) )=1): // (7)

baryzKomb := (Koord,Pkte) ->
  if baryzentrisch(Koord) // (8)
  then [op(_plus( Koord[i]*~(Pkte[i] $ i=1..nops(Pkte))))]
  else print("nicht baryzentrisch") end_if:

N:= [0,0]:
KOS2d :=Point2d([0, 0], PointSize=2), // (10)
  Point2d([1, 0], PointSize=2),
  Point2d([0, 1], PointSize=2),
  Arrow2d([1, 0],LineColor = RGB::Red),
  Arrow2d([0, 1],LineColor = RGB::Red):
KOS2dT :=Text2d("O", [-0.1, -0.15]), // (11)
  Text2d("E1", [1, -0.3], TextFont = ["Comic Sans MS",14,RGB::Red]),
  Text2d("E2", [-0.2, 1], TextFont = ["Comic Sans MS",14,RGB::Red]):

```

Abbildung 3.36: Modul (Mikrowelt) zur spielerischen Erkundung der affinen Geometrie.

Die folgende Tabelle fasst diese Modellierung synoptisch zusammen:

mathe. Begriff	mathe. Symbol	CAS-Symbol	gelesen	Bemerkung
geord. Tupel der Koordinaten	(x, y)	$[x, y]$	die geordnete Ko- ordinaten-Liste	ohne algebraische Re- chenstruktur
Punkt	$A(x; y)$	$°[x, y]$	der Punkt A mit den Koordinaten x und y	als Zeichenobjekt ohne algebraische Struktur

Richtungs- oder Ortsvektor	$A - O = \overrightarrow{OA}$	$\sim > A$	der <i>ursprungsbasierte</i> Ortsvektor ⁸³	als Ursprungs-Pfeil in der Anschauungsebene
Vektor	$A = \vec{A}$	$\sim A$	der <i>algebraische</i> Vektor	als <i>Rechenobjekt</i> des Vektorraumes
Affinkomb.	$\sum_{i=1}^n t_i \cdot p_i$	<code>baryzKomb([t1,...,tn], [p1,...,pn])</code>	baryzentrische Kombination	als explizite Realisie- rung der Abtragungs- operation
Verbindungs- vektor	\overrightarrow{AB}	–	–	zielsätzlich: <i>nicht im- plementiert</i>

Tabelle 3.5: zusammenfassende Übersicht über die möglichen Operationen in der Mikrowelt *Ebene affine Geometrie* im CAS MUPAD

Die folgenden Beispiele demonstrieren mögliche Handlungen in der Mikrowelt.

In der ersten Zeile werden die Koordinaten zweier Punkte A und B als Listen vorgegeben, danach ihr Mittelpunkt vektoriell (vorangestelltes \sim) berechnet und als Punkt (vorangestelltes $^\circ$) zum Zeichnen bereitgestellt. Der `plot`-Befehl zeichnet diese 6 Punkte (lauter vorangestellte \sim) in einem 2-dimensionalen Koordinatensystem **KOS2d**, vgl. Abbildung 3.37.

- `A:=[4,1]: B:=[1,4]:`
- `°(0.5*~A + 0.5*~B)`
`plot::Point2d(2.5, 2.5)`
- `(1/3*~A + 1/3*~B + 1/3*~[1,1])`
 $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
- `°(1/3*~A + 1/3*~B + 1/3*~[1,1])`
`plot::Point2d(2, 2)`
- `plot(°A, °B, °(0.5*~A + 0.5*~B), °(0.25*~A + 0.75*~B), // (1)`
`°[1,1], °(1/3*~A + 1/3*~B + 1/3*~[1,1]), // (2)`
`KOS2d, Scaling=Constrained)`

Der folgende Aufruf demonstriert, dass die Funktion `baryzKomb` zunächst lediglich die Koordinatenliste eines neuen Objektes zur Verfügung stellt, damit der Benutzer in zweiter

⁸³Man beachte die Symbolwahl: So wie das Wort *Richtungs-Vektor* aus *zwei* Bestandteilen besteht, so besteht das kennzeichnende CAS-Präfix aus *zwei* Zeichen für \sim *Richtung* und $>$ *Vektor*. Dagegen bezeichnet den algebraischen *Vektor* nur *ein* CAS-Präfix \sim ; kurz: nur mit CAS-Objekten mit dem Präfix \sim kann daher gerechnet werden! Alle anderen Objekte der Mikrowelt dienen der zeichnerischen Konstruktion und lösen bei - versuchten Rechenvorgängen - berechtigte Fehlermeldungen aus.

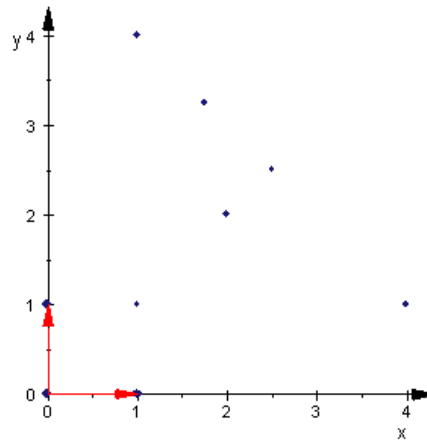
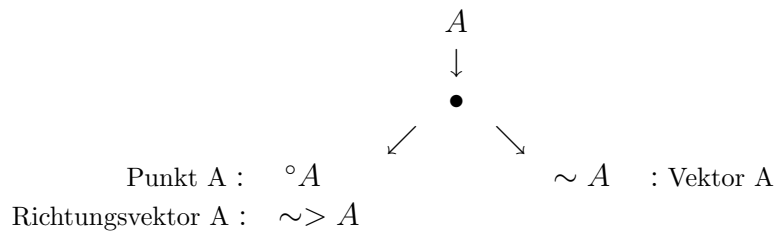


Abbildung 3.37: Berechnung und Zeichnung von Mittelpunkten

Instanz entscheiden kann, was er mit diesen Koordinaten anfangen möchte – weiterzeichnen „ \circ “ oder weiterrechnen „ \sim “:



Diese Dichotomie interpretiert eine vorgelegte Koordinatenliste in eindeutiger Weise und schützt insofern auch syntaktisch vor einer Chamäleonbarriere, die beide Objekte ununterscheidbar als bloße Koordinatenliste (n-Tupel) identifizieren würde – der folgende Quellcode erzeugt daher das linke Teilbild in der folgenden Abbildung 3.38.

```

• plot(°[1,4], °[4,2], °[3,1],
      °baryzKomb( [1/3,1/3,1/3], [[1,4],[4,2],[3,1]]),
      Polygon2d( [[1,4],[4,2],[3,1]],
                 Closed, Color = RGB::Red,LineStyle = Dashed),
      ~>[1,4], ~>[4,2], ~>[3,1],
      ~>baryzKomb( [1/3,1/3,1/3], [[1,4],[4,2],[3,1]]),
      KOS2d, Scaling=Constrained);

```

und die folgende Codestrecke das rechte:

- `baryzKomb([1/3,1/3,1/3], [[1,4],[4,2],[2,1]])`
 $\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$
- `plot(°[1,4], °[4,2], °[3,1],
°baryzKomb([1,0,0], [[1,4],[4,2],[3,1]]),
°baryzKomb([1/2,1/2], [[1,4],[4,2]]),
°baryzKomb([1/2,1/2], [[3,1],[4,2]]),
°baryzKomb([1,0,0], [[1,4],[4,2],[3,1]]),
°baryzKomb([1/2,-1/2,1], [[1,4],[4,2],[3,1]]),
°baryzKomb([1/2,1/2,0], [[1,4],[4,2],[3,1]]),
°baryzKomb([1/3,1/3,1/3], [[1,4],[4,2],[3,1]]),
Polygon2d((~[1,4]). (~[4,2]). (~[3,1]), Closed,
Color = RGB::Red, LineStyle = Dashed),
KOS2d, Scaling=Constrained);`

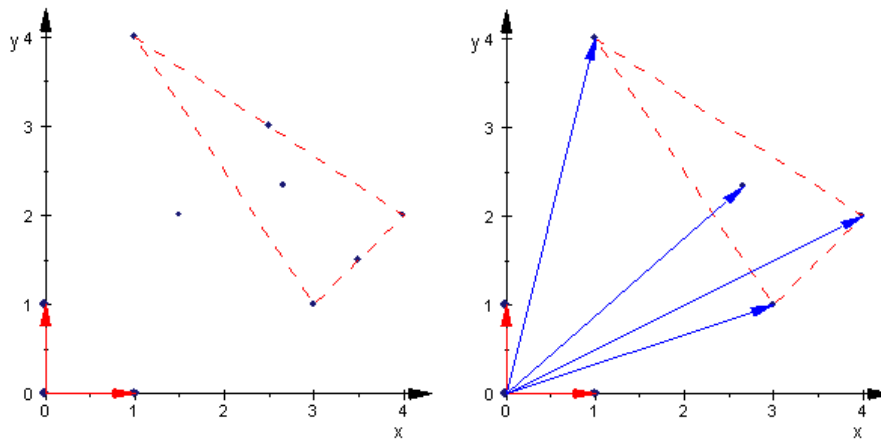


Abbildung 3.38: *Links:* Baryzentrische Koordinaten und Affinkombinationen von Punkten. *Rechts:* Richtungsvektoren zu den szenischen Punkten.

Abbildung 3.38 zeigt im linken Bild, wie *baryzentrische Koordinaten als relatives Koordinatensystem* die relative Lage der Dreieckspunkte zueinander und zu den äußeren Punkten beschreiben. Man erkennt die affine Konstruktion von Seitenmittelpunkten und Schwerpunkt des Dreiecks. Z. B. legen das baryzentrische Koordinatentripel $[1, 0, 0]$ in der Affinkombination `baryzKomb([1, 0, 0], [[1, 4], [4, 2], [3, 1]])` die Lage des Punktes $[1, 4]$ in Bezug auf die drei Punkte $[[1, 4], [4, 2], [3, 1]]$ der 2-dimensionalen *Ebene* eindeutig fest, die Affinkombination `baryzKomb([1/2, 1/2], [[1, 4], [4, 2]])` markiert den Mittelpunkt der Strecke als von beiden Punkten gleich weit entfernt (als Maß des Längenverhältnisses der Teilstrecken; Teilverhältnis). Der in der Mikrowelt Lernende beobachtet insbesondere, dass ein Koordinatentripel durchaus nicht einen *räumlichen* Punkt festlegen muss, sondern dass dies von der Wahl des Koordinatensystems abhängt. In Analogie zum Längenverhältnis einer Strecke lassen sich die obigen drei Schwerpunktskoordinaten, die im folgenden Bild in (2) *vektoriell berechnet* werden, als die gleichen Flächenverhältnisse von Teildreiecken deuten, vgl. die Dreiecksflächenberechnung [Faktor $\frac{1}{2}$ wurde gekürzt] mit Hilfe der 2-dimensionalen Determinante in (3):

```

• A :=[4,1]: B:=[1,4]: C:=[3,1]: // (1)
  M := 1/3*~A + 1/3*~B + 1/3*~C; // (2)
  det( (M~C).(M~A) )/det( (~B~C).(~B~A) ) // (3)

      2:  $\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$       3:  $\frac{1}{3}$ 

```

■ **Beispiel 2: Baryzentrische vs. vektorielle Berechnung des Mittelpunktes eines ebenen oder räumlichen Dreiecks.** a. Abbildung 3.39 bietet eine Erkundungs- und Erkenntnissituation, in der die kartesischen Koordinaten $[2, 1.5]$ des Mittelpunktes M zwischen $A := [1; 2]$ und $B := [3; 1]$ als von seinen baryzentrischen Koordinaten $[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ unterschieden erlebt werden: der Mittelpunkt der Strecke AB wird alternativ durch eine *Linearkombination* $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ (Vektoraddition⁸⁴) und eine *Affinkombination* $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ konstruiert. Dabei wird aus *prädikativer Perspektive* klar, wie sich die *kartesischen* Koordinaten des Mittelpunktes der Norm-Strecke E_1E_2 zwischen $E_1 := [1, 0]$ und $E_2 := [0, 1]$ als die baryzentrischen Koordinaten von M entpuppen („Chamäleon“): Die rote Gerade mit der Gleichung $x + y = 1$ (d.h. $y = -x + 1$) *besteht per definitionem aus lauter baryzentrischen Koordinaten*; die Lage des Punktes $[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ auf dieser Geraden liegt relativ zu den Endpunkten der Strecke $[1; 0]$ zu $[0; 1]$ genau so in der Mitte wie der Mittelpunkt der Strecke AB - daher hat auch deren Mittelpunkt die gleichen baryzentrischen Koordinaten $[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, d. h. der Mittelpunkt einer Strecke ist durch die baryzentrischen Koordinaten $[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ eindeutig *gekennzeichnet* - er ist eine affine Invariante. Die Lage eines Punktes auf der Norm-„strecke“ $x + y = 1$ dient als das Vergleichs-Maß für die relative Lage jeder anderen ebenen *planetarischen Drei-Punkt-Konstellation* („Teilverhältnistreue“), vgl. Abbildung 3.39.

Der folgende Code-Auszug zeigt, wie man die Ortsvektoren zu den relevanten Punkten einzeichnet und wie eine Animation in (3) mit Animationsparameter a die Resultierende zum Mittelpunkt wachsen lässt.

```

• plot(°[1,2], °[3,1], °[4,4],
      Line2d([1, 0], [0, 1], LineColor = RGB::Magenta),
      Line2d([1, 0], [1.5,-0.5], LineColor = RGB::Magenta, LineStyle=Dashed),
      Line2d([-0.5,1.5], [0, 1], LineColor = RGB::Magenta, LineStyle=Dashed),
      Line2d([1,2], [3,1], LineColor = RGB::Blue, LineStyle=Dashed),
      °baryzKomb( [1/2,1/2], [[1,2],[3,1]] ), // (1)
      Text2d("[1/2,1/2]", [2.5,1.6]), // (2)
      ~>(0.5*~[1,2]), ~>(0.5*~[3,1]),
      Arrow2d([a*2, a*1.5], LineColor = RGB::Green,
              LineWidth=0.5, a=0..1), // (3)
      //~>baryzKomb( [1/2,1/2], [[1,2],[3,1]]),
      //~>(0.5*~[1,2]+0.5*~[3,1]),
      KOS2d, /* KOS2dT, */ Scaling=Constrained);

```

b. Die folgende 3D-Szene demonstriert, dass die Bildung von Linearkombinationen und Affinkombinationen im Anschauungsraum dem gleichen Muster⁸⁵ folgt.

⁸⁴Dabei sollte man nach der hier vertretenen Ansicht die Kantenzüge nicht als freie Vektoren zeichnen, sondern die Parallelogrammseiten als Strecken stricheln - letztlich ist nur die Vorstellung der richtigen Richtung und Länge der Resultierenden entscheidend.

⁸⁵Auch das zugehörige Modul KOS3d bleibt semantisch unverändert; lediglich die Zeichenfolge 2d wird durchgängig durch 3d substituiert; das Modul wird daher verborgen.

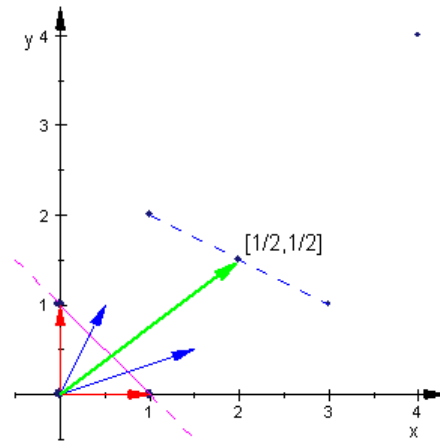


Abbildung 3.39: Zur Unterscheidung von kartesischen und affinbaryzentrischen Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke als Ausdruck der *Chamäleon-Barriere*: das *gleiche* Objekt (Mittelpunkt) in *verschiedener* Gestalt (Repräsentation).

- $A := [4, 1, 2]; B := [1, 4, 3]$
- ${}^\circ(0.5 \cdot \sim A + 0.5 \cdot \sim B)$
`plot::Point3d(2.5, 2.5, 2.5)`
- $(1/3 \cdot \sim A + 1/3 \cdot \sim B + 1/3 \cdot \sim [1, 1, 1])$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
- `plot(°A, °B, °[1,1,1],
°(0.5*~A + 0.5*~B), °(0.25*~A + 0.75*~B),
°(1/3*~A + 1/3*~B + 1/3*~[1,1,1]),
KOS3d, Scaling= Constrained)`

c. Die abschließende graphische Szene in Abbildung 3.41 zeigt im linken Teilbild das Standard-Simplex $\Delta_3 \subset \mathbb{E}^3$, dessen gepunktete „Dach“-Fläche aus baryzentrischen Koordinaten besteht. Die folgende Codestrecke zeigt, wie diese kurze Sequenz baryzentrischer Koordinatentripel-Listen im CAS erzeugt wird, zeigt die „Quersummen“-Proben auf Baryzentrizität und die zugehörigen Affinkombinationen mit Hilfe dieser Koordinaten zu einem raumfixen Punktetripel („Dreieck“, „Planetenkonstellation“).

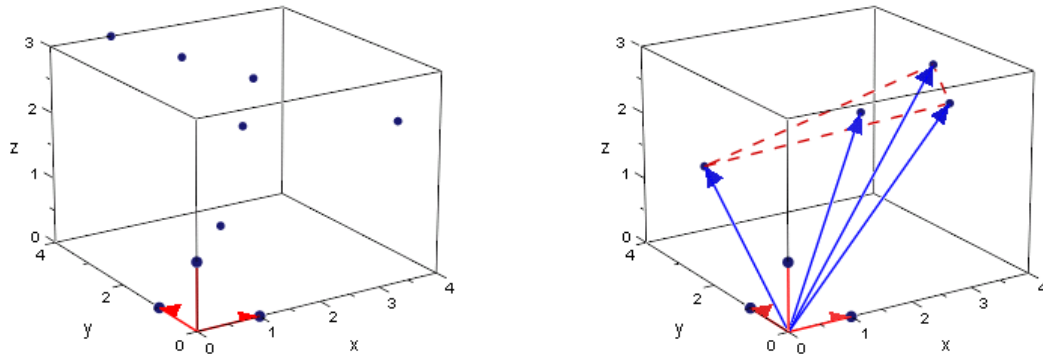


Abbildung 3.40: Zur Konstruktion von Linear- und Affinkombinationen im Anschauungsraum \mathbb{E}^3

- $[1/3, 2/3 \cdot a, 2/3 \cdot (1-a)]$ § a in $[0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1]$
 $[\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{8}{15}], [\frac{1}{3}, \frac{4}{15}, \frac{2}{5}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{15}], [\frac{1}{3}, \frac{8}{15}, \frac{2}{15}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0]$
- $_plus(op([1/3, 2/3 \cdot a, 2/3 \cdot (1-a)]))$ § a in $[0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1]$
 $1, 1, 1, 1, 1, 1$
- $baryzKomb([1/3, 2/3 \cdot a, 2/3 \cdot (1-a)], [[1, 4, 1], [4, 2, 1], [3, 1, 2]])$
 § a in $[0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1]$
 $[\frac{7}{3}, 2, \frac{5}{3}], [\frac{37}{15}, \frac{32}{15}, \frac{23}{15}], [\frac{13}{5}, \frac{34}{15}, \frac{7}{5}], [\frac{41}{15}, \frac{12}{5}, \frac{19}{15}], [\frac{43}{15}, \frac{38}{15}, \frac{17}{15}], [3, \frac{8}{3}, 1]$

Folgender Aufruf konstruiert das Norm-Simplex Δ_3

- `plot(°[1.5, 1.5, 1.5],
 Polygon3d([[0, 0, 0], [1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 0],
 [0, 1, 0], [0, 0, 1], [1, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 1]]),
 PointList3d([[1/3, 2/3*a, 2/3*(1-a)] § a in [0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1]]),
 KOS3d, Scaling=Constrained)`

und der nachfolgende Aufruf das räumliche Dreieck mit der Folge der Affinkombinationen der Dreieckspunkte:

- `plot(°[1, 4, 1], °[4, 2, 1], °[3, 1, 2], °[0, 0, 0],
 °baryzKomb([1/3, 2/3*a, 2/3*(1-a)], [[1, 4, 1], [4, 2, 1], [3, 1, 2]])
 § a in [0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1],
 Polygon3d([[1, 4, 1], [4, 2, 1], [3, 1, 2]],
 Closed, Filled, FillColor = RGB::Yellow,
 Color = RGB::Red, LineStyle = Dashed),
 KOS3d, Scaling=Constrained)`

■ **Beispiel 3: Basistransformationen und Matrixdarstellungen.** HILLELS Befund⁸⁶, dass eine Test-Mehrheit fortgeschrittener Studenten zu Aufgabe A.i, A.iii bzw. B überhaupt

⁸⁶vgl. Tabelle 3.4

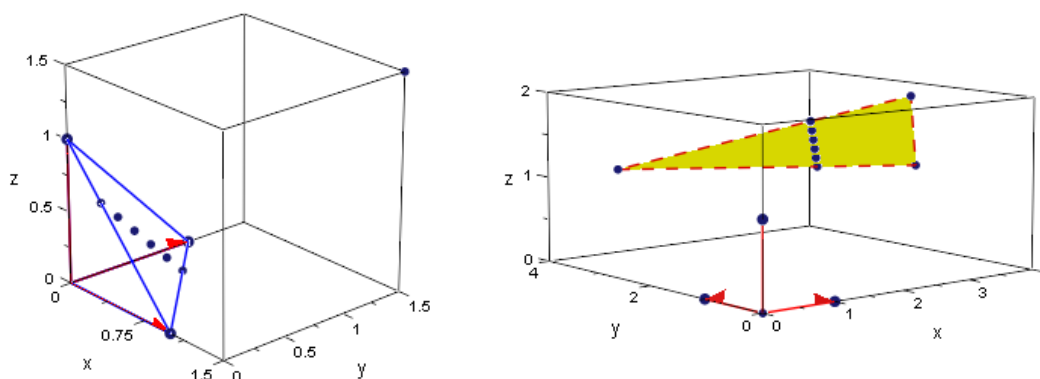


Abbildung 3.41: *Links*: Standard-Simplex mit sechs baryzentrischen Koordinatentriplen. *Rechts*: zugehörige Affinkombinationen zu einem vorgelegten räumlichen Dreieck.

keinen Zugang⁸⁷ fand, wurde beim zitierten Duisburger Test bestätigt. Auch hier konnte nach einer internen Gruppendiskussion keine klare Lösungsstrategie formuliert werden. Die beobachtete *Desorientierung* wurde dadurch erhärtet, dass auf die Frage „Kann die Matrix $\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ +1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ die identische Abbildung darstellen?“ mit Erstaunen reagiert wurde. Dem entsprechend wurde die Frage „Wie lautet die Matrix der 2-dimensionalen Identität?“ unisono mit $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ beantwortet. Diese *Fixierung von id an E* ist eine weitere Ausprägung der mentalen *Chamäleonbarriere*, welche die Vorstellung verdrängt, dass zur identischen Abbildung $id : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y)$ eine andere Matrix als die Einheitsmatrix gehören könnte, und dahinter auf einen unfertigen Abstraktionsprozess im Umfeld der Ähnlichkeit (als Äquivalenz-Relation) von Matrizen verweist.

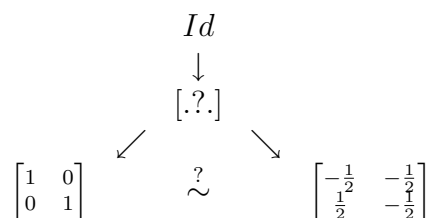


Abbildung 3.42: Die Identität *id* als Chamäleon: *ein* mathematisches und mentales Objekt mit *verschiedenen* Erscheinungsformen (Repräsentationen)

Da die Aufgabenstellungen wesentlich auf das Arrangieren von Schemavorstellungen einer vertikalen Mathematisierung abzielten und die Lösungsversuche erhebliche Defizite offenbarten, kann man vermuten, dass die vorgelagerten APO-Prozesse in der Lerntrajektorie

⁸⁷Der Mix aus Maple-Syntax **matrix(..)** und mathematischer Syntax in den Aufgabenstellungen von HILLEL sollte die Studenten nicht irritiert haben, da das CAS Maple benutzt worden war.

misslungen waren. Es wurde daher eine CAS-Lerntrajektorie designed, die auf der Basis (i. w. obiger Mikrowelt) zunächst konkrete experimentelle Aktionen im 2-dimensionalen Koordinatensystem anbot und insbesondere den Herstellungsprozess der Transitionsmatrix zwischen zwei Basen als Matrixdarstellung von id - am Beispiel von A.ii - betonte. Danach wurde mit der Gruppe als „abstrakte“ Orientierung (Schemavorstellung) ein kommutatives Diagramm⁸⁸ zur Lösungsplanung erarbeitet. Auf dieser Grundlage gelang der Gruppe eine erfolgreiche Lösung von A.iii, B und C. Die Skizze einer genetischen Dekomposition der Lernumgebung zeigt die Übersicht 3.6. Auf die prozedural verständniskritischen Stellen (1) und (2) der Lerntrajektorie gehe ich im Rahmen der CAS-Darstellung unten genauer ein. Didaktische Konsequenzen für das globale Design eines Kurses über Analytische Geometrie ziehe ich im Anschluss an die Darstellung der skizzierten Lerntrajektorie.

A.P.O.S.-Phase	mathe. Konzept	HILLEL	genetische Dekomposition
A: <i>Basisentwicklung</i>	$X = \sum_{i=1}^n t_i \cdot B_i$ $X = \text{LinKomb}([t_1, \dots, t_n], [B_1, \dots, B_n])$ $\downarrow \uparrow (1)$ $[X]_B := [t_1, \dots, t_n]$	A.i; B	die Entwicklungs-Koeffizienten t_i als <i>Koordinaten</i> bzgl. der Basis; <i>drohende Barriere der verfrühten Identifikation</i> von Koordinatenvektor $[X]$ und X
\downarrow $\text{id} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin. Abb.			
P: <i>Basiswechsel/Matrixdar.</i>	$C * [X] = B = \text{id}(B)$ $H * [X] = T(G)$ $\downarrow (2)$	A.ii	<i>Basiswechsel</i> Id_{BC} von Basis B nach C als <i>spezielle Matrixdarstellung</i> von id deuten; als Matrixgleichung schreiben
\downarrow LGS lösen			
O: <i>Transitionsmatrix</i>	$[Id]_{BC}, [T]_{GH}$		als <i>Procept</i> verstehen, d.h. als <i>Objekt</i> (Lösung der Matrixgleichung) und <i>Prozess</i> (Transformation der Koordinaten)
\downarrow Tr.-matrizen multiplizieren			
S: <i>Prozessdiagramm</i>	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{ G}^m & \xrightarrow{T_{GH}} & \mathbb{R}_{ H}^n \\ \text{id}_{BG} \uparrow & & \uparrow \text{id}_{CH} \\ \mathbb{R}_{ B}^m & \xrightarrow{\text{id}_{BC}} & \mathbb{R}_{ C}^m \end{array}$	A.iii; C	als <i>Vorstellungsschema</i> zur Steuerung des und zur Orientierung im Lösungsprozess

Tabelle 3.6: APOS-Trajektorie und Skizze der zugehörigen genetischen Dekomposition zur Untersuchung der Repräsentationsbarriere bei den Problemstellungen von HILLEL.

CAS-gestützte visuelle Anbahnung einer Konzeptvorstellung von Basistransformationen in APOS-Phasen. **A: Aktionen.** Die Lerntrajektorie startet mit der Beobachtung, dass derselbe Punkt $P \in \mathbb{E}^2$ in verschiedenen Basen B und C bzw. D und E

⁸⁸JÄNICH [131, S. 171] bietet eine kurze metakognitive Erörterung über den Sinn solcher Diagramme.

unterschiedlich repräsentiert wird und nur in der kanonischen Basis B die erwartete Norm-Gestalt hat - eine erste und grundlegende Erfahrung zum Aufbrechen der Chamäleon-Barriere. Simultan wird *ersichtlich*, dass die Koordinaten eines Punktes P bzgl. eines gewählten Koordinatensystems nichts weiter als die Koeffizienten seiner Basisentwicklung⁸⁹ sind, vgl. Abbildung 3.43.

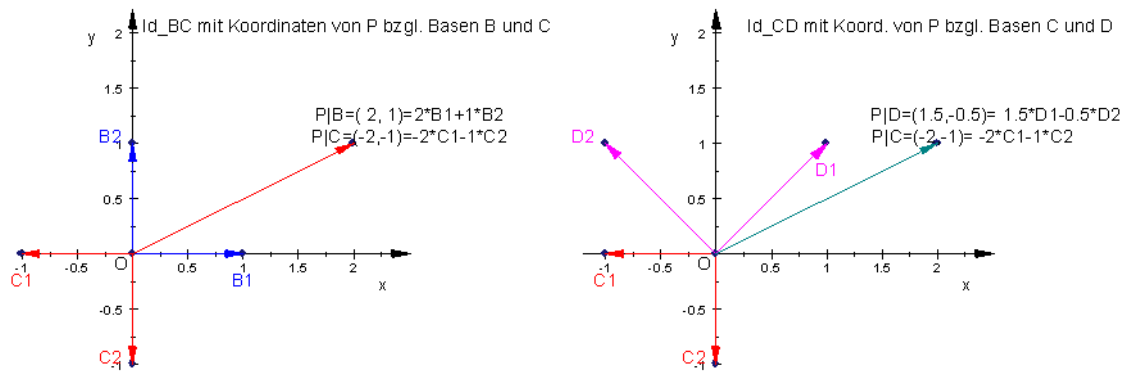


Abbildung 3.43: Basisentwicklung

Die folgende Codestrecke übersetzt die Beobachtungen aus der graphischen Szene in die Sprache des CAS, wobei die Lösungen des Gleichungssystems (1) in (4) bis (6) ablesbar sind.

```

• Id:= x -> matrix([ x[1] , x[2] ]):           // (1) Id:R²->R² als lineare Abb.
  B := matrix([[1,0],[0,1]]):                 // (2) als Standard-Basis im R²
  C := matrix([[ -1,0],[0,-1]]):              // (3) neue Basis im R², dh X=T*X'
  Id_BC := C|Id(col(B,1)) . C|Id(col(B,2)) ; // (4) xC1+yC2=B1 & zC1+wC2=B2
  ID_BC := _concat( matlinsolve( C . Id(col(B,i)) $ i=1..2 ): // (5)
  Id_BC := C^-1 * B:                           // (6) Basis-Wechsel von B nach C

```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass in (1) die *identische Abbildung*⁹⁰ $id: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, y)$ als `Dom::Matrix`-wertige Abbildung und damit *explizit als lineare Abbildung definiert* wird. Als Input ist dabei zunächst sowohl eine Koordinatenliste $[x, y]$ als auch ein Spaltenvektor $\sim [x, y]$ der Mikrowelt zulässig. Damit hat *id* zugleich nur in der kanonischen Basis B als Matrixdarstellung die Einheitsmatrix E . Man beachte auch, dass *id* zielsätzlich *nicht* – wie es üblicherweise geschieht – *über eine Matrixgleichung* $X \rightarrow E * X$ *definiert* wird, weil damit die Beobachtung des *Phänomens der Polymorphie* nicht zum Vorschein käme. (2) und (3) definieren die betrachteten Basen; hierbei wird die Konstruktion von B und C durch Benutzung des `matrix`-Konstruktors zeilenweise vollzogen - eine Ursache häufiger Fehler, weshalb nach dieser Einsicht im Folgenden die Basen explizit über die Verschmelzung von

⁸⁹vgl. auch JÄNICH [130, S. 82]

⁹⁰Erstaunlicherweise war den Duisburger Studenten diese folgende Zuordnungsvorschrift zur Definition der Identität nicht geläufig.

Spaltenvektoren der Mikrowelt zu einer spaltenweise interpretierbaren Matrix konstruiert werden.

PO: Herstellungsprozess und Objektvorstellung. Eine lineare Abbildung (Transformation) $T: V \rightarrow W$ ist bekanntlich vollständig und eindeutig durch ihre Aktion auf einer Basis bestimmt, d. h. sind $(v_i)_{i=1..m}$ bzw. $(w_j)_{j=1..n}$ geordnete Basen der endlichdimensionalen \mathbb{R} -Vektorräume V bzw. W , dann wird diese Aktion beschrieben durch die Darstellung der Bilder $T(v_i)$ als Linearkombination der Basiselemente (w_i) , in diesem Fall der mit $T := id$ konkret (i. S. v. HAREL):

$$\begin{aligned}
 x \cdot C_1 + y \cdot C_2 = B_1 = id(B_1) \quad \wedge \quad z \cdot C_1 + w \cdot C_2 = B_2 = id(B_2) \\
 \xLeftrightarrow{(a)} \quad (C_1:C_2) * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B_1 \quad \wedge \quad (C_1:C_2) * \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = B_2 \\
 \xLeftrightarrow{(b)} \quad (C_1:C_2) * \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = (B_1:B_2) \\
 \xLeftrightarrow{(c)} \quad C * X = B \text{ mit } X =: [id]_{BC} \\
 \xLeftrightarrow{(d)} \quad X = C^{-1} * B \quad \vee \quad gaussJordan(C:B) \rightsquigarrow X \\
 \xLeftrightarrow{(CAS)} \quad 1/C * B \quad \vee \quad C|B \\
 \xrightarrow{(Kt)} \quad [X]_C = [id]_{BC} * [X]_B \quad s.u.
 \end{aligned}$$

Die gesuchten Entwicklungskoeffizienten der Matrix („darstellung“) $X = [id]_{BC}$ der Identität relativ zu den gewählten Basen B und C (d. h. die „Koordinaten“ von id) ergeben sich aus zwei gekoppelten Matrixgleichungen (a) bzw. einer kompakten Matrixgleichung (b), deren Lösung X der Basiswechsel „ist“ und als ein Objekt (nämlich als die Matrix $1/C * B$) vor Augen steht, während der Herstellungsprozess in die automatisierte Berechnung von $C^{-1} * B$ bzw. den GAUSS-Algorithmus $(C|B1) \cdot (C|B2)$ ausgelagert ist. Letztere Notation wird im CAS-MuPAD durch folgenden benutzerdefinierten „Lösungs“-Operator „|“ realisiert⁹¹ und legalisiert.

```

• mls := (X,Y) -> matlinsolve(X,Y):
  operator("|", mls, Binary, 1701):

```

Gleichung (7) ist eine CAS-Probe der visuellen Ablesung der Koordinatentransformation von $[1, 2]_B$ auf CAS-Sprachebene und (8) errechnet diese neuen Koordinaten nach dem Basiswechsel auf C gemäß obiger Überlegung (Kt):

⁹¹Ersetzt man dort den Verschmelzungsoperator „.“ durch ein Komma „“, so wird der Berechnungsprozess auch kompakter als $C|B$ notierbar.

- $\sim[2,1] = -2*\sim[-1,0] + (-1)*\sim[0,-1];$ // =OP Probe (7)
 $\text{Id}_{BC} * \sim[2,1] /* |B */;$ // = |C "nach C" (8)

$$7: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 8: \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die folgende CAS-Codestrecke zeigt in (5) die Matrix der Identität relativ zu den Basen C und D – dies beantwortet die Eingangsfrage – und berechnet mit (5) die Koordinaten von $P = [-2, -1]_C$ bzgl. D sowie deren Verifikation in (8). Man beobachte das verständnisfördernde Repräsentationswechselspiel zwischen visuellen und CAS-algebraischen Registern innerhalb der Mikrowelt.

- $\text{Id} := x \rightarrow \text{matrix}([x[1], x[2]]);$ // (1)
 $C := \sim[-1,0].\sim[0,-1];$ // (2)
 $D := \sim[1,1].\sim[-1,1];$ // (3)
 $\text{Id}_{CD} := D_| \text{Id}(\text{col}(C,1)) . D_| \text{Id}(\text{col}(C,2));$ // (5)
 $\text{Id}_{CD} * \text{matrix}([-2,-1]) /* P|C */;$ // = P|D (6)
 $-2*\sim[-1,0] + (-1)*\sim[0,-1] = \sim[2,1];$ // = P|D (7)
 $3/2*\sim[1,1] - 1/2*\sim[-1,1] = \sim[2,1];$ // = P|E (8)

$$5: \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad 6: \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$7: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 8: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die folgende CAS-Szene verifiziert, dass die ungewohnte Matrixgestalt A der Identität, vgl. (8), nach Rücktransformation (11) auf die Standard-Basis B die gewohnte Standard-Form der Einheitsmatrix annimmt; der gesamte Denkprozess wird hierbei durch das kommutive Diagramm im Kommentarvorspann geleitet, die Rechnungen sind ausgelagert.

- // id T=? id
// B --> C --> D <-- B(=E)
 $B := \sim[1,0].\sim[0,1];$ // Std Basis im \mathbb{R}^2 (7)
 $A := \text{matrix}([\sim[-1/2,-1/2], \sim[1/2,-1/2]]);$ // = [T]|CD (8)
 $T := X \rightarrow A*X;$ // T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ als lineare Abb. (9)

 $\text{Id}_{BC} := 1/C * B;$ // B->C->D->B (10)
 $\text{Id}_{BD} := 1/D * B;$
 $T_{BB} := 1/\text{Id}_{BD} * A * \text{Id}_{BC};$ // Rücktransformation von A (11)

$$8: \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad 11: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■ **Beispiel 4: Fehlvorstellungen vs. fehlerhafte Aufgabenstellungen in den Aufgaben von HILLEL.** Der Analyse der Fehlverständnisse bei den HILLEL-Problemen A, B und C seien

eine theoretische Überlegung und jeweils die CAS-Lösung in der Mikrowelt vorangestellt. Betrachtet man das Bild $T(X) = c \cdot C_1 + d \cdot C_2$ eines beliebigen Vektors $X = a \cdot B_1 + b \cdot B_2$ unter einer linearen Abbildung T , so gilt:

$$\begin{aligned}
 T(X) &\stackrel{(e)}{=} T(a \cdot B_1 + b \cdot B_2) = T(\text{LinKomb}([a, b], [B_1, B_2])) \quad [d.h. \quad [X]_B = [a, b] \quad] \\
 &\stackrel{(f)}{=} a \cdot T(B_1) + b \cdot T(B_2) \quad [\text{weil } T \text{ linear}] \\
 &\stackrel{(g)}{=} a(x \cdot C_1 + y \cdot C_2) + b(z \cdot C_1 + w \cdot C_2) \\
 &\stackrel{(h)}{=} (ax + bz) \cdot C_1 + (ay + bw) \cdot C_2 \\
 &\stackrel{(i)}{=} \left(\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)_1 \cdot C_1 + \left(\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)_2 \cdot C_2 \\
 &\stackrel{(j)}{=} ([T]_{|BC} * [X]_{|B})_1 \cdot C_1 + ([T]_{|BC} * [X]_{|B})_2 \cdot C_2 \\
 &\stackrel{(k)}{=} \text{LinKomb}([T]_{|BC} * [X]_{|B}, [C_1, C_2]) \\
 &\stackrel{(l)}{=} c \cdot C_1 + d \cdot C_2 \quad d.h. \quad [T(X)]_{|C} = [T]_{|BC} * [X]_{|B} = [c, d]_{|C}
 \end{aligned}$$

d. h.: Die Koordinaten von $T(X)$ sind nach (j) bzw. (l) ablesbar aus dem Produkt der Koordinatendarstellungen $[T]$ und $[X]$.

zu Aufgabe ^{Hillel}A: Die Lösung in der CAS-Mikrowelt wird durch Einführung der Identität id zur Beschreibung der Basistransformationen in die Schemavorstellung des kommutativen Diagramms systematisch eingeordnet und die gegebenen Daten werden bereitgestellt: Zeile (5) zeigt die Koordinaten $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_G$ des Basis-Vektors $G_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ relativ zur Basis G ; das CAS-Resultat **5:** ist nach (2a) sowie nach (j) als Koordinatentripel $[T(G_2)]_H$ des Bildvektors zu interpretieren und muss in (6) noch in der Bildraumbasis zum Bildvektor $T(G_2) = (-2, 1, -3)^t$ linear-kombiniert werden.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{T}} & \mathbb{R}^3 & \xleftarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^3 & \text{Raum} \\
 & & \text{id} & & \text{T} & & \text{id} & \text{lin. Abb.} \\
 \mathbf{B} & & \mathbf{C} & & \mathbf{H} & & \mathbf{G} & \text{Basen} \\
 & & \text{Id}_{BC} & & \mathbf{A} & & \text{Id}_{GH} & \text{Matrix}
 \end{array}$$

```

• Id:= x -> matrix([ x[1] ,x[2], x[3] ]): // (1)
A := matrix([[7,-3],[2,1],[8,0]]); // (2)
T := X -> A*X: // (2a) T:R²->R³ linear, A=[T]|GH

G := ~[2,1]~[5,3]: // (3) Basis in R²
H := ~[1,0,1]~[1,1,0]~[1,1,1]: // (4) Basis in R³

T(~[0,1]); // (5) [5,3]=[0,1]|G = 0*G1 + 1*G2
-3*col(H,1)+1*col(H,2)+0*col(H,3); // (6) T(~[0,1]) = [-3,1,0]|H =.

```

$$2: \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \quad 5: \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 6: \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Lösung zu A.ii entnimmt man der folgenden CAS-Rechnung, die zugleich eine explizite Konkretisierung der obigen Überlegungen **PO:** (a) .. (d) in der CAS-Symbolsprache bietet;

die Antworten des CAS erfolgen in mathematischer Formelsprache.

- $\sim[1,0] = a \cdot \sim[2,1] + b \cdot \sim[5,3];$ // (7)
- $\sim[0,1] = c \cdot \sim[2,1] + d \cdot \sim[5,3];$ // (8)
- $G \cdot (\sim[a,b] \cdot \sim[c,d]) = \sim[1,0] \cdot \sim[0,1];$ // (9)
- $\frac{1}{G} \cdot \sim[1,0] \cdot \sim[0,1]$ // (10)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot a + 5 \cdot b \\ a + 3 \cdot b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot c + 5 \cdot d \\ c + 3 \cdot d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot a + 5 \cdot b & 2 \cdot c + 5 \cdot d \\ a + 3 \cdot b & c + 3 \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Der folgenden CAS-Lösung zu A.iii entnimmt man in (15) die Koordinatendarstellung der linearen Abbildung T in der kanonischen Basis.

- // id L id
- // iii: B --> G --> H <-- C
- B := $\sim[1,0] \cdot \sim[0,1];$ // (11) Std Basis im \mathbb{R}^2
- C := $\sim[1,0,0] \cdot \sim[0,1,0] \cdot \sim[0,0,1];$ // (12) Std Basis im \mathbb{R}^3
- Id_BG := $1/G \cdot B;$ // (13) Wechsel B->G
- Id_CH := $1/H \cdot C;$ // (14) Wechsel C->H
- T_BC := $1/Id_CH \cdot A \cdot Id_BG;$ // (15)

$$13: \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 14: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 15: \begin{pmatrix} 53 & -89 \\ 29 & -48 \\ 48 & -81 \end{pmatrix}$$

In A.i betrachten viele Studenten nach HILLEL fälschlicherweise das „Zwischenresultat“ $(-3, 1, 0)^t$, d. h. die *Koordinaten* $[T(G_2)]$ von $T(G_2)$ als Ergebnis: Als Grund vermutet HILLEL [a. a. O., S. 69], dass „das Verständnis eines Vektors auf seiner Identifikation mit einer Ziffernfolge basiert“ bzw. „dass die Spalten einer Darstellungsmatrix als Bilder der Basisvektoren und nicht als *Repräsentationen* dieser Bilder in der Basis angesehen werden.“ Da die spezifische Lerntrajektorie der HILLELSchen Studenten nicht vorliegt und da nach Einführung des obigen kommutativen Diagramms (mit der Identität zur Explizierung des Basiswechsel) diese Ergebnisse nicht reproduzierbar waren, vermute ich eine andere Form von Barriere. *Das Problem ist* m. E. nicht, dass „ein Vektor mit einer Ziffernfolge identifiziert“ wird, sondern *dass die Ziffernfolge eines vorliegenden Vektors je nach Kontext verschieden interpretiert werden muss* und die dazu notwendige Orientierung ohne Diagramm-Schemavorstellung oder stützende Notationshilfen verloren geht.

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} \binom{5}{3} \\ \downarrow \\ ? \\ \downarrow \end{array} & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \binom{5}{3}_B \equiv \mathbf{5} \cdot \binom{1}{0} + \mathbf{3} \cdot \binom{0}{1} = \binom{5}{3} & \begin{array}{c} \binom{5}{3}_G \equiv \binom{25}{8}_B \\ \mathbb{R}_{|G}^2 \xrightarrow{id_{GB}} \mathbb{R}_{|B}^2 \end{array} & \begin{array}{c} \binom{5}{3} = \mathbf{0} \cdot \binom{2}{1} + \mathbf{1} \cdot \binom{5}{3} \equiv \binom{0}{1}_G \\ \mathbb{R}_{|B}^2 \xrightarrow{id_{BG}} \mathbb{R}_{|G}^2 \end{array}
 \end{array}$$

Abbildung 3.44: Die Tupelnotation $(:)$ als Chamäleon: *Eine* mathematische Notation trägt *verschiedene* überlagerte Bedeutungen (Interpretationen) – als *Vektor* bzw. als seine *Koordinaten* bzgl. einer Basis.

Die n -Tupel-Notation $(:)$ wird i. d. R. sowohl als Bezeichnung eines *Vektors des Vektorraumes* \mathbb{R}^m und zugleich als Bezeichnung der *Liste seiner Koordinaten*(vektor⁹²) benutzt, d. h. für die eindeutigen Entwicklungskoeffizienten in einer Non-Standard-Basis G des $\mathbb{R}_{|G}^m$. Es ist diese *Identifikation des \mathbb{R}^m als Vektorraum mit seinem isomorphen⁹³ Koordinatenraum $\mathbb{R}_{|G}^m$, welche die Verständnisbarrieren verursacht* und zur *eindeutigen Objekt-Vorstellung* ein Zurückrechnen auf die kanonische Basis erfordert, kurz: *Das eindeutige mentale Objekt der Betrachtung wird durch eine basisabhängige Repräsentation (Identifikation) vernebelt*, der Vektor steht sozusagen „nicht original“ vor Augen, sondern durch eine mathematische Isomorphie lediglich in gestaltveränderter Form („chamäleonisiert“). Die Situation verschärft sich in Gegenwart einer *nonstandard-basisrepräsentierten und daher nur indirekt sichtbaren* linearen Abbildung T : An $T(2, 1)$ bzw. genauer $T((2, 1))$ bzw. genauer $T(\binom{2}{1})$ kann man (eigentlich) erst klar denken, wenn T als lineare Abbildung relativ zur Standard-Basis vorliegt (liegen würde), denn auch $\binom{2}{1} = \binom{2}{1}_B$ ist relativ zur Standardbasis notiert – was bereits interpretierend erschlossen werden muss, da ein symbolisch-notationelles Stützungssystem der gedanklichen Führung im Beispiel nicht vorhanden ist. Die z. T. sinnleeren und widersprüchlichen⁹⁴ studentischen Antworten – auch zur analogen Fragestellung in B – erklären sich m. E. daraus, dass der Problemlöser weder weiß, *wo* er sich im Lösungsprozess befindet (im nachfolgenden Diagramm im Prozess der Umrechnung (2) bzw. (3) auf eine andere Basis oder auf dem Niveau (1) der Nonstandardbasen) noch *wohin der Weg zielsetzend* führen soll – zurück zum Niveau der Standardbasen in (1) bzw. besser: einer *basis- und matrixfreien Abbildungsdarstellung* von T . Damit ist T als ein klares („Ziel“-)Objekt der Erkenntnis nicht gegeben, auf dem eine erfolgreiche Schematisierung aufsetzen und die notwendigen Umrechnungen gemäß dem folgenden Diagramm auslösen könnte.

⁹²Eine unterscheidende Notation wie $[2, 1]$ statt $\binom{2}{1}$ hilft nicht, da man beim Basiswechsel mit einer Matrix linksmultiplizieren muss und daher als Input doch wieder einen Spaltenvektor (1-spaltige Matrix) benötigt. Ich behelfe mir hier mit einem Basis-Index $\binom{2}{1}_B$, wenn ein Koordinatentupel gemeint ist.

⁹³bzgl. einer basisabhängigen Isomorphie!

⁹⁴wonach das Resultat $T(2, 1)$ z. B. eine *Zahl* bzw. eine *mehrsplaltige* Matrix sei, vgl. [a. a. O., S. 69]

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^2_{|G} & \xrightarrow[\text{(3) Niveau der Non-Std.-Basen}]{A=[T]_{GH}} & \mathbb{R}^3_{|H} \\
 \uparrow \text{id}_{BG} \text{ (2)} & & \uparrow \text{id}_{CH} \text{ (4)} \\
 \mathbb{R}^2_{|B} & \xrightarrow[\text{(1) Niveau der Standard-Basen}]{T \equiv [T]_{BC}} & \mathbb{R}^3_{|C}
 \end{array}$$

Abbildung 3.45: Die basisabhängige Matrixdarstellung $[T]_{\dots}$ als Chamäleon: Die basisfreie lineare Abbildung T erscheint in *verschiedenen* Matrix-Gestalten und muss aus der Standard-Darstellung $[T]_{BC}$ rekonstruiert werden.

Die folgende CAS-Strecke zeigt die invariante Funktions-Form der linearen Abbildung T , die aus der Standard-Repräsentation (15) entnommen wurde und als Objekt der Erkenntnis vor Augen stehen sollte; zugleich wird erfahrbar, dass die gesuchten Funktionswerte sich hier direkt als Output ergeben.

- `T := x -> matrix([53*x[1]-89*x[2], 29*x[1]-48*x[2], 48*x[1]-81*x[2]])`
`x → matrix([53 · x1 - 89 · x2, 29 · x1 - 48 · x2, 48 · x1 - 81 · x2])`
- `T([2,1]); T([5,3])`

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Die folgende Szene zeigt am dritten Prompt, dass der Versuch einer vereinfachten CAS-sprachlichen Repräsentation der linearen Abbildung T als lediglich listenwertige Funktion misslingt, da dann die Linearität nicht repräsentiert wird.

- `T := (x,y) -> [53*x-89*y, 29*x-48*y, 48*x-81*y]`
`(x,y) → [53 · x - 89 · y, 29 · x - 48 · y, 48 · x - 81 · y]`
- `T(2,1)`
`[17, 10, 15]`
- `T(2,1) + T(5,3)`
`Error: Illegal operand [_plus]`

zu Aufgabe ^{Hilf!}B: Die folgenden CAS-Skripten zeigen die oben diskutierte Barriere der frühzeitigen Identifikation von Vektor und Koordinaten; am zweiten Punkt werden die Koordinaten des Vektors $X := \sim [1, 1, 1]$ nach der Basisentwicklung als $[X] := [1, 0, 0]$ abgelesen und als Input für $T * [X]$ verwendet. Der Output stellt die *Koordinaten* von $[T(X)]$ dar, die den gesuchten Bildvektor $T(X)$ linear kombinieren.

- `A := matrix([[1,2,3], [3,4,5], [6,7,8]]); // (4)`
`T := X -> A*X; // (5) A=[T]|BB`

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

- $\sim[1, 1, 1] = 1 \cdot \text{col}(B, 1) + 0 \cdot \text{col}(B, 2) + 0 \cdot \text{col}(B, 3) \quad // \quad (6) \implies \sim[1, 1, 1] | B = [1, 0, 0]$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $T(\sim[1, 0, 0]); \quad 1 \cdot \text{col}(B, 1) + 3 \cdot \text{col}(B, 2) + 6 \cdot \text{col}(B, 3);$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 34 \\ 37 \end{pmatrix}$$

Dass Studenten gehäuft $T * X = T * (\sim[1, 1, 1])$ bzw. $T(1, 1, 1) = (1, 3, 6)$ ⁹⁵ als gesuchten Wert ansehen, verweist – wie in **A** ausgeführt – auf die fehlerhafte Identifizierung von Koeffizienten und Koordinaten oder schlimmer noch: auf ein orientierungsloses blindes Rechnen mit gegebenen Daten.

zu Aufgabe ^{Hillel}**C**: Betrachten wir zunächst die kanonische CAS-Lösung: Dazu reicht die Bestimmung der Koordinatenmatrix $ID = [id]_{FE}$ aus dem gegebenen Gleichungssystem für (f_1, f_2, f_3) und die Betrachtung des obigen kommutativen Diagramms aus:

- ```
// id T id
// F --> E --> E <-- F
// wegen z.B. f1 = id(f1) = 1*e1 -1*e2 + 0*e3 = [1, -1, 0] | E
```
- $ID := \sim[1, -1, 0] \cdot \sim[0, 1, 1] \cdot \sim[1, 0, 0]; \quad // \quad (1) = [Id] | FE$   
 $Id := X \rightarrow ID * X; \quad // \quad (2) \quad Id: R^3 \rightarrow R^3 \quad \text{linear}$   
 $A := \text{matrix}([[1, -1, 0], [0, 1, -2], [7, 0, 3]]); \quad // \quad (3) = [T] | EE$   
 $T := X \rightarrow A * X; \quad // \quad (4) \quad (T: R^3 \rightarrow R^3) | EE \quad \text{linear}$   
 $T\_FF := 1/ID * A * ID; \quad // \quad (5)$
- 3:  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$     4:  $X \rightarrow A \cdot X$     5:  $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 7 \\ -6 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

Die studentischen Lösungen<sup>96</sup> folgten dagegen nach HILLEL einer anderen – wohl eingeübten – Lösungsstrategie:

$$\begin{aligned} & f_1 = e_1 - e_2, \quad f_2 = e_2 + e_3, \quad f_3 = e_1 \\ \xrightarrow{(a)} & e_1 = f_3, \quad e_2 = f_3 - f_1, \quad e_3 = f_2 - f_3 + f_1 \quad (= [1, 1, -1] |_F) \\ \xrightarrow{(b)} & T(f_1) = T(e_1) - T(e_2) = e_1 + 7e_3 + e_1 - e_2 = \dots = 8f_1 + 7f_2 - 6f_3, \quad \dots \\ \xrightarrow{(c)} & [T(f_1)] |_F = [8, 7, -6], \quad \dots \\ \xrightarrow{(d)} & [T] |_{FF} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 7 \\ -6 & -5 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<sup>95</sup>Eine überschlägige Rechnung hätte diese Gleichheit unmittelbar falsifiziert; die Studenten waren von ihren Fehlvorstellungen offenbar so stark überzeugt, dass die Sicht auf  $(1, 1, 1)$  als ersten Basisvektor automatisch die erste Matrixspalte als Bild des ersten Basisvektors evoziert – und nicht an die notwendige Koordinatendarstellung von  $[X]$  als Input für die zugehörige „Koordinatendarstellung“ von  $T$  gedacht wird. Vielleicht sollte man daher bei  $[T]$  statt von „Matrixdarstellung“ in Analogie zu  $[X]$  vereinheitlichend von „Koordinatendarstellung“ sprechen.

<sup>96</sup>HILLELS Darstellung der Lösung ist im Übrigen fehlerhaft, was die obige CAS-Kontrollrechnung en passant aufdeckt.

In (a) wird die Bildung der Inversen  $1/\text{ID}$  (Basiswechsel) manipulativ implizit über einen sukzessiven Substitutionsprozess vollzogen, (b) nutzt die Linearität von  $T$  und die Substitution (a) aus, woraus sich unmittelbar die erste Koordinaten-Spalte von  $[T]_{|FF}$  ergibt.

HILLEL erklärt [a. a. O., S. 71] den hierbei beobachteten sehr viel „höheren Lösungserfolg gegenüber der Benutzung von konkreten Basisvektoren“ dadurch, dass „der Student durch die Nicht-Zahlentupel-Darstellung der Basisvektoren vor obigen Fehlschlüssen gewarnt ist“.

Da nach obigen Beobachtungen der Lösungserfolg auch mit der Orientierungsmöglichkeit am kommutativen Diagramm in gleicher Weise anwächst, scheint HILLELS Erklärung zu kurzschlüssig. Vielmehr verdeckt die hier mögliche mechanische („verständnislose“) Manipulation im Vektor-Kalkül vorhandene Fehlvorstellungen im Umkreis der begrifflichen Unterscheidung von Koeffizienten in Basisentwicklungen und zugehörigen Koordinaten, von Vektorraum und zugehörigem isomorphen Koordinatenraum. Die direkte Anwendung der definierenden Vektor-Gleichung zur Ablese der Matrixdarstellung von  $T$  operiert allein auf dem Vektorraumlevel, das vor- und nachgeschaltete Umdenken auf Koordinatendarstellungen entfällt und in der Folge wird eine Abstraktionsebene (eine Identifikation) eingespart – das Matrixprodukt  $[T] * [X]$  tritt gar nicht zum Vorschein. Der abschließende Ableseprozess für die Koordinatendarstellung erweist sich aus dieser Sicht lediglich als „Datenkompression“ und muss nicht notwendig als Isomorphie begriffen werden - *die Orientierungsfunktion des Diagramms im Lösungsprozess wird in dieser Variante durch die stützende Notation der unterscheidbaren Basisvektoren geleistet:*

$$\begin{array}{ccc}
 8f_1 & +7f_2 & -6f_3 \\
 \searrow & \downarrow & \swarrow \\
 & (8, 7, -6)_{|F} & 
 \end{array}
 \quad \text{Koordinatenbildung als Kompression (Identifikation)}$$

Die Chamäleonbarriere könnte sich aber auch in Test C verschärft zeigen, wenn nach der Repräsentation von  $T$  in der kanonischen Basis gefragt würde.

## Didaktische Konsequenzen II (linear-algebraisch)

Für die Grundlegung des (linear-) algebraischen Teils einer CAS-gestützten Revision der schulischen Linearen Algebra ziehe ich einige Konsequenzen. Die nachfolgende Übersicht fasst die obigen Überlegungen dazu in einer Matrix zusammen. *Iiab* markiert darin die Chamäleon-Barriere, welche die Sicht auf „die“ lineare Abbildung  $T$  durch die verschiedenen Repräsentationen und Identifizierungen behindert. Diese vertikal wirksame Barriere wird überlagert von einer horizontalen multiplen Repräsentation der Funktionswert-Darstellung  $T(X)$  einer linearen Abbildung in Zeile  $b$  und der zugehörigen multiplen Repräsentation eines zugehörigen linearen Gleichungssystems  $T(X) = B$  in Zeile  $c$ . In Zeile  $d$  wird die zugehörige Repräsentation in der Anschauungsebene  $\mathbb{E}^2$  und in  $e$  der modellierenden CAS-(MuPAD)Mikrowelt angegeben. Zusätzlich haben sich zu jeder Sichtweise *I*, *II* bzw. *III* eigene mathematische Sprach- und Notationsweisen, zugehörige Argumenta-

tionsmuster sowie visuelle Darstellungen herausgebildet:

|          | <i>I</i>                                                                                       |                   | <i>II</i>                                                                             |                   | <i>III</i>                                                                                    |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>a</i> |                                                                                                |                   | $\tilde{A} * \tilde{X}$                                                               |                   |                                                                                               |
|          |                                                                                                |                   | $\Updownarrow \cong$                                                                  |                   |                                                                                               |
| <i>b</i> | $T(X)$                                                                                         | =                 | $\boxed{\mathbf{A} * \mathbf{X}}$                                                     | =                 | $A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots$                                                       |
| <i>c</i> | $T(X) = B$                                                                                     | $\Leftrightarrow$ | $A * X = B$                                                                           | $\Leftrightarrow$ | $A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots = B$                                                   |
| <i>d</i> | $T: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ | =                 | $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ | =                 | $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot y$ |
| <i>e</i> | $T := x \rightarrow \sim[a*x[1]+..]$                                                           | =                 | $\sim[a,c] \cdot \sim[b,d] * \sim[x,y]$                                               | =                 | $\sim[a,c]*x + \sim[b,d]*y$                                                                   |
| <i>s</i> | Sprache der Abbildungen:<br><i>Funktionswert</i>                                               | $\Leftrightarrow$ | Sprache der Matrixalgebra:<br><i>Matrixmultiplikation</i>                             | $\Leftrightarrow$ | Sprache der Vektorrechnung:<br><i>Linearkombination</i>                                       |

Abbildung 3.46: Die „Chamäleon-Gleichung“  $b: T(X) = A * X = \sum x_i A_i$  wechselt an jedem Gleichheitszeichen Sprachebene, Argumentationsmuster und visuelle Vorstellungen; zusätzlich erschwert die Ähnlichkeitsidentifikation  $IIab$  die Ausformung eindeutiger mentaler Objekte.  $A := [T]$

Aus obigen Befunden ziehe ich daher für das Kursdesign einer CAS-gestützten schulischen Linearen Algebra die folgenden Konsequenzen.

1. *Lineare Abbildungen werden durchgängig als Funktionen mit Zuordnungsvorschriften in der Tupel-Notation der Analysis* (an die die Schüler gewöhnt sind) definiert<sup>97</sup>, also z. B.  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, y - x)$  statt  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , vgl. Spalte (*Id*). Damit ist (später) automatisch eine eindeutige Repräsentation (*IIb*) als Matrix relativ zu den Standard-Basen des  $\mathbb{R}^n$  verbunden und es gilt der Memovers<sup>98</sup> „Die Matrixspalten sind die Bilder der Einheitsvektoren“. Eine *repräsentationsfrei definierte lineare Abbildung als genuines mentales Objekt der Betrachtung* und die zugehörige „Standard“-Matrix sind damit mental und mathematisch verschiedene Objekte. Zwar sind nach (*b*)  $T(X) = A * X$  wertverlaufsgleich und daher identifizierbar. Das Risiko dieser Identifikation zeigt sich später, wenn der Preis mit dem Auftreten von Fehl- und Unverständnissen gezahlt werden muss. Es erscheint daher ratsam, lineare Abbildungen zunächst basisfrei zu notieren und nicht mit Matrizen zu identifizieren: Die basisabhängige Isomorphie  $Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cong_{BC} Mat(n, m, \mathbb{R})$  erweist sich – nicht nur schulisch – als ein Kern-Hindernis.
2. *Koordinatenvektoren werden (weitgehend) vermieden*; stattdessen wird die zugehörige *eindeutige Linearkombination (IIIb) längs einer Basis bevorzugt* und daraus die Koordinaten abgelesen. Selbst bei Benutzung der Standardbasis in der Anschauungsebene wird daher die explizite Notation  $x \cdot E_1 + y \cdot E_2$  gegenüber der komprimierenden Abkürzung  $[x, y]$ <sup>99</sup> oder  $[x, y]_E$  vorgezogen, um eine Gewöhnung an Linearkom-

<sup>97</sup>vgl. auch BLYTH [17, S. 92 ff] oder JÄNICH [a. a. O., S. 78 (7)]

<sup>98</sup>vgl. z.B. JÄNICH [a. a. O., S. 73] oder ARTMANN & TÖRNER [a. a. O., S. 118]

<sup>99</sup>Wählt man als Namen der Basisvektoren z. B. **i** und **j** oder **B** und **C**, so bestehen die Zeichenfolgen  $x\mathbf{B} + y\mathbf{C}$  und  $[x, y]$  beide aus jeweils 5 Zeichen, d. h. sie sind gleich lang und damit sogar kompressionsgleich.

binationen zu ermöglichen. Damit sind vektorielle Rechnungen (z. B. Basistransformationen) und Visualisierungen – auch im CAS – erleichtert möglich, Ambivalenzen und Identifikationen werden vermieden. Dies erfolgt in Anlehnung an die Schreibweise  $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \equiv a \cdot E_1 + b \cdot E_2 + c \cdot E_3 \equiv [x, y, z]$  der Physik bzw. von  $a + bi \equiv \binom{a}{b}$  der Funktionentheorie. Die Deutung von Koordinaten als Koeffizienten einer Linear- bzw. Affinkombination relativ zu einer Basis vermeidet mit der  $\cong_{|BC}$ -Isomorphie zugleich die Notwendigkeit der zusätzlichen Einführung einer unterscheidenden Notation wie „ $|B$ “: Die CAS-Funktionen `LinKomb(.,.)` bzw. `baryKomb(.,.)` der Mikrowelt bilden diesen Prozess ab und führen in ihrer ersten Komponente das Koordinatentupel [...] sowieso konstruktiv mit, s. o. Tabelle 3.6. Insofern ist dieses Vorgehen auch konzeptökonomisch, da sie den zu bildenden Begriffsapparat der Wissensdomäne minimiert.

3. Die Nutzung der Linearkombination  $x \cdot E_1 + y \cdot E_2$  als implizite Notation der Koordinaten  $[x, y]$  erlaubt zudem eine angemessene Procept-Bildung und fördert die thematisierte Schematisierung („Vernetzung“) der relevanten Konzepte: Denn  $x \cdot E_1 + y \cdot E_2$  ist in der Linearkombinationsform als flexibles Wissenselement sowohl *prozessual* (P-Phase) als  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Komponenten-Zerlegung} \\ \text{Parallelogramm-Addition} \end{array} \right.$  oder *objektiviert* (O-Phase) als *Ergebnisvektor* interpretierbar.
4. Die Funktionsschreibweise linearer Abbildungen ( $Ic$ ) und ihre nachgeordnete flexible Interpretation als Matrix ( $IIc$ )- oder Vektorgleichung ( $IIIc$ ) ermöglicht die direkte Anbindung an die Theorie der linearen Gleichungssysteme, da der Funktionsterm einer linearen Abbildung die linke Seite eines LGS darstellt:  $(x + y, y - x) = (2, 3)$  ist vom Schüler unmittelbar als LGS erkennbar im Gegensatz zu der Matrixgleichung  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , die eine (kleine) Interpretation erfordert – diese Flexibilität ist allerdings ein Lernziel der Lerntrajektorie.
5. Basistransformationen werden schulisch im Zusammenhang des Übergangs zu Basen aus Eigenvektoren benötigt; es ist daher sinnvoll an Basen und Linearkombinationen schon frühzeitig gewöhnt zu sein. Insbesondere kann zur *Produktion eines eindeutigen Repräsentanten einer linearen Abbildung* der Rekurs auf kanonische Basen und die zugehörige Funktionsvorschrift angestrebt werden.
6. Lineare Abbildungen als Funktionen ermöglichen in kommutativen Abbildungs-Diagrammen mentale quasi-visuelle Orientierungshilfen durch holistische Perspektiven bei funktional – dynamischem Denkstil und führen so zu stabilen Vernetzungen auf der Schema-(S)-Ebene; Matrizenprodukte haben eher statischen Charakter. Insbesondere werden Identifikationen erspart bzw. expliziert. Lineare Abbildungen werden daher konsequent durch Tupel-Zuordnungen *definiert* und (später) durch Matrizen *repräsentiert*.

Diese didaktischen Entscheidungen sollen der Ausbildung einer mentalen Repräsentations- oder Chamäleon-Barriere vorbeugen, die sich in verständnisstörenden Interpretationsproblemen in der Art obiger Befunde niederschlagen würde: Design-Fehler bei der ontologischen Wissenskonstruktion 'baden' die Schüler als Lernbarrieren 'aus'. Fasst man Repräsentations<sup>100</sup> - bzw. Identifikationsprobleme als Spezialfall eines Abstraktionsprozesses i. S. v.

<sup>100</sup>vgl. auch JÄNICH [a. a. O., S. 175 ff]

LORENZEN auf, so erweist sich die Chamäleon-Barriere im Kern als bedeutsame Variante einer Abstraktions-Barriere.

**Eine kurze Kritik ausgewählter Lehrwerke zur Linearen Algebra.** Abschließend seien einige Lehrbücher unter Bezug auf obige didaktische Konsequenzen analysiert.

1. ARTMANN & TÖRNER [4, S. 114] motivieren die Einführung linearer Abbildungen aus der vertrauten Betrachtung von linearen Gleichungssystemen, d. h. im Sinne von Tabelle *IIC*  $\rightsquigarrow$  *IIB*. Die dort *ausgeschriebene* Zuordnung  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  entspricht obigem Vorschlag. Ab S. 116 wird aber eine lineare Abbildung  $A$  mit der zugehörigen Matrix  $A$  syntaktisch identifiziert; dies ist nach obigen Befunden nicht zu raten. Zur Betonung des Abbildungsaspektes wird jedoch die Funktionsnotation  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und zur Unterscheidung Formulierungen wie „die durch die Matrix  $A = [..]$  definierte Abbildung  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ “ benutzt, vgl. [a. a. O., S. 117], was die orientierungsfördernde Nutzung von Diagrammen gestattet, vgl. z. B. [a. a. O., S. 123].

2. BLYTH & ROBERTSON [17, S. 92–109] definieren und studieren in Übereinstimmung mit obigem Vorschlag lineare Abbildungen (wie Projektion, Differenzialoperator, Integraloperator, etc.) ein ganzes Kapitel lang via Abbildungsvorschriften, bevor der Zusammenhang mit Matrixdarstellungen hergestellt wird.

3. LAY [146, S. 67 ff] vertritt die Sicht von ARTMANN & TÖRNER, formuliert aber vorsichtiger „den Fokus auf Abbildungen, die mit der Matrizenmultiplikation assoziiert sind. Für jedes  $\mathbf{x}$  in  $\mathbb{R}^n$  wird  $T(\mathbf{x})$  berechnet als  $A\mathbf{x}$ , wobei  $A$  eine  $m \times n$  Matrix ist.“ Die Zuordnungsvorschrift wird aber nicht *ausgeschrieben*, so dass letztlich doch wieder eine starke mentale Kopplung an die Darstellungsmatrix resultiert. Jedoch werden lineare Abbildung  $T$  und Darstellungsmatrix  $A$  syntaktisch konsequent unterschieden. – Im Instruktor’s manual spricht Lay von „*der*“ Standard-Matrix  $A$  von  $T$ : Diese entsteht durch die Operation von  $T$  auf der kanonischen Basis und ist daher ein sicheres mentales Objekt.

4. BAUM et al. [13, S. 300 ff] behandelt sofort affine Abbildungen (130 Seiten nach Beginn der Linearen Geometrie!) – lineare Abbildungen kommen *sui generis* nicht vor. Die unterrichtliche Lerntrajektorie bietet einen unklaren Repräsentationsmix aus Affin- und Linearkombinationen, Koordinaten- und Matrixdarstellungen im Lichte obiger Tabelle, Zeile  $d$ ; Matrizen kommen im Lehrwerk aber über 100 Seiten lang überhaupt nicht mehr vor (diese traten isoliert im Zusammenhang des Gauss-Algorithmus im ersten Kapitel auf).

Im oft noch verwendeten Leistungskurs-Band [25] wird ähnlich vorgegangen; zusätzlich wird die zu einer affinen Abbildung gehörende „*Vektorabbildung*<sup>101</sup>“ [a. a. O., S. 217 ff] betrachtet. Bei der Untersuchung von Normalformen affiner Abbildungen mittels Eigenvektoren treten unvermittelt Basistransformationen auf, vgl. [a. a. O., S. 240]. Die Neufassung [12, S. 180 ff] hat ein sehr ähnliches Grund-Konzept: Hier kommt die Vektorabbildung<sup>102</sup> nicht mehr vor und die „Affinkombination“-s-Darstellung affiner Abbildungen ist gestrichen – wird aber in Herleitungen und Rechnungen noch verwendet. Matrixdarstellungen relativ zu Non-Standard-Basen finden sich auf S. 201 ff. Affine Abbildung  $\alpha$  und Darstel-

<sup>101</sup>als *der lineare Teil* einer affinen Abbildung, vgl. z. B. DOMBROWSKI [49, S. 174].

<sup>102</sup>stattdessen spricht man jetzt von „affinen Abbildungen mit den Fixpunkt  $O$ “

lungsmatrix  $A$  werden zwar typographisch unterschieden, aber es wird wesentlich nur mit Koordinatendarstellungen gerechnet. Die Ausprägung einer massiven Chamäleon-Barriere in Folge dieser Lerntrajektorie kann man daher prognostizieren.

5. GRIESEL et al. [112, S. 328 ff] behandeln „Abbildungen<sup>103</sup> und Matrizen“ auf den letzten 8 von 147 Seiten. Die Abbildungsmatrix  $\mathbf{T}$  wird aus Bildpunktskoordinaten konstruiert. Man spricht von der „Abbildungsmatrix“  $\mathbf{T}$  und von „der durch  $\mathbf{T}$  vermittelten Abbildung“. Eine klare Unterscheidung von Abbildung und Matrix findet nicht statt, vgl. [a. a. O., S. 329 ff] – eine Chamäleon-Barriere ist zu prognostizieren, da explizite Basiswechsel aber nicht thematisiert sind, verbleibt sie zunächst unerschwinglich.

6. KROLL et. al. [141, S. 141–158] definieren affine und lineare Abbildungen wechselweise über *Zuordnungsvorschriften* [a. a. O., S. 142], *Linear- bzw. Affinkombinationen* [a. a. O., S. 143] oder den *Abbildungsgleichungen* für die Koordinaten [a. a. O., S. 143]. Aus diesen wird die *Abbildungsmatrix*<sup>104</sup> der linearen Transformation entnommen, vgl. [a. a. O., S. 146]. Die Zuordnung selbst bleibt unbenannt, die Beziehung  $\vec{p}' = A\vec{p}$  ist zentral. Orientierende symbolische Diagramme sind daher nicht formulierbar.

### Zusammenfassung

Vor der Folie zweier Verständnis-Barrieren wurden die wichtigen Grund-Konzepte *Vektor* und *lineare Abbildung* nach je einer kritischen genetischen Dekomposition im Sinne der APOS-Theorie im CAS rekonstruiert.

Die *Chamäleon-Barriere* fokussiert dabei das Problem des Wiedererkennens des Gleichen im Verschiedenen, der Invarianz in der Polymorphie. Es wurde gezeigt, dass schon ein ungeeignet eingeführter anschaulicher bzw. algebraischer Vektorbegriff Ursache vielfältiger Irritationen sein kann, die sich bis hin zu Fehlverständnissen im Umfeld von Basistransformationen und Matrixdarstellungen linearer Abbildungen auswirken können.

Der *didaktische Mehrwert der Konstruktion eines CAS-Moduls* (MuPAD-Mikrowelt *Affine-Geo2d/3d*) wurde diskutiert. Dem Lernsubjekt stehen in diesem CAS-Modell des Anschauungsraumes nur drei neue Operatoren  $\sim, \sim>, \circ$  (neben  $+, -, *$ ) als zulässig zur Verfügung. Diese explizieren die geometrische Verständigungssprache von Vektor und Punkt innerhalb der Mikro-Welt. Damit erfährt der experimentierend bzw. spielend in der Mikrowelt Handelnde einen kontrollierten und fehlvorstellungsbereinigten Erfahrungszugewinn. Die Symbolik innerhalb der Mikrowelt wurde dabei in möglichst großer Nähe zu üblichen mathematischen Schreibweisen gewählt:

- algebraische Objekte (*Rechnungen* mit Vektoren, Linearkombinationen, Funktionstermen linearer Abbildungen, etc.) beginnen syntaktisch immer mit  $\sim$  (sprich: „Vektor“)
- geometrische Objekte (*Zeichnungen* von Punkten, Richtungsvektoren, Affinkombinationen etc.) beginnen syntaktisch immer mit  $\circ$  (sprich: „Punkt“) oder  $\sim>$  (sprich: „Richtungs-Vektor“)

<sup>103</sup>Die Begriffe *lineare* oder *affine* Abbildung treten im Lehrwerk nicht auf.

<sup>104</sup>hieraus wird das Matrix-Konzept destilliert, vgl. [a. a. O., S. 146, Mitte]

Der so konstruierte syntaktische Kalkül unterstützt die Ausformung eindeutiger ontologischer Objekte im Bewusstsein des Lernsubjektes und wirkt so der Ausbildung einer Chamäleon-Barriere entgegen. Das CAS-Modul zwingt<sup>105</sup> zu vorstellungsadäquaten Spiel-Handlungen und führt damit zu wünschenswert robusten geometrischen (Konzept-) Vorstellungen im Wissensbereich der Linearen Algebra. Insbesondere verhindert der Kalkül baryzentrischer Punkt-Koordinaten und der zugehörigen Affinkombinationen eine frühzeitige Identifikation von Koordinaten mit Vektoren des Richtungs-Vektorraumes  $\mathbb{R}^n$ . Auch die Entscheidung, lineare Abbildungen des Anschauungsraumes  $\mathbb{E}^n$  zunächst durch zugeordnete Tupel (statt sogleich über ein Matrixprodukt) zu definieren, verhilft zu diskriminationsfähigen Objektbildungen und lässt Repräsentierungen in Koordinaten (Basiswechsel, Matrixdarstellungen) als davon unterscheidbaren Formwandlungsprozess des Ursprungsobjektes verstehen. Es wird empfohlen zur Minimierung des Begriffsapparates auf die explizite Einführung von Koordinaten(vektoren) zu verzichten und stattdessen die Verwendung von Linearkombinationen zu forcieren.

### 3.2.4 Weitere ausgewählte kognitive Verständnis-Barrieren

Neben den oben analysierten zentralen Verständnisbarrieren werden in der Literatur weitere Denkhindernisse benannt. Ich gehe noch auf zwei aus *psychologischer* Sicht interessante Barrieren ein: die sog. *Barriere des Praktischen Denkens* und die sog. *pseudo-konzeptuale Denkhaltung*.

#### Die Barriere des praktischen Denkens

SIERPINSKA [187] berichtet von verschiedenen Lehr-Experimenten u. a. auch mit dem dynamischen Geometriesystem (DGS) CABRI zur Untersuchung der Eigenschaften von Linearkombinationen, linearen Transformationen sowie deren Matrixdarstellungen. Unabhängig vom Zugang zum Thema kommt sie zu dem Schluss, dass die „*Tendenz von Studenten in der Linearen Algebra eher praktisch als theoretisch zu denken der Grund hinter vielen Verständnisproblemen ist - insbesondere mit den strukturellen Aspekten der Theorie*“, vgl. [a. a. O., S. 274]. SIERPINSKA unterscheidet dabei drei Modi des Denkens in der Linearen Algebra: den *synthetisch-geometrischen*, den *analytisch-arithmetischen* und den *analytisch-strukturellen* Denkstil, die entsprechend zu den verschiedenen Beschreibungssprachen<sup>106</sup> und der zugehörigen semiotischen Repräsentationssysteme in der Linearen Algebra unterscheidbar sind:

Während das analytisch-arithmetische Denken auf das Vereinfachen von Rechnungen abzielt [...], zielt das strukturelle Denken auf die Erweiterung unseres Wissens über Konzepte. [...] Mit analytisch-arithmetischem Denken wird ein Objekt definiert durch eine Formel, die es einem erlaubt, es zu berechnen; in analytisch-strukturellem Denken wird ein Objekt am besten

<sup>105</sup>in seiner Beschränkung auf wenige elementare Grundoperationen beachtet es zudem die 7er-Regel von MILLER, s. o.

<sup>106</sup>Diese sind nach obigem: die *visuell-geometrische* Sprache als Rede über den Anschauungsraum, die *arithmetische* Sprache als die Rede von Vektoren, Matrizen, Koordinaten-Listen etc. und die *strukturelle* Sprache als Rede von Vektorräumen und linearen Abbildungen etc.



durch eine Menge von Eigenschaften definiert.<sup>107</sup> [a.a.O., S. 234] Prinzipiell gehören synthetisch-geometrische Argumentationen nicht zur eigentlichen Linearen Algebra. Sie werden aber als heuristische Werkzeuge und in der Lehre zum Zwecke der Visualisierung<sup>108</sup> verwendet. [a. a. O., S. 235].

Das Fehlen einer theoretisch-strukturellen Durchdringung des Themas seitens der Studenten äußerte sich in den Experimenten von SIERPINSKA wesentlich in vier Phänomenen, die als *Vorherrschen einer praktischen Einstellung* konstatiert werden:

- *dem Auftreten von unverständlichen Sprachformen* wie z. B. der *Beobachtung einer „inneren Sprache“* (nach VYGOTSKY) *in schriftlichen Ausführungen*: Die beobachtete Syntax in studentischen Äußerungen ist „hochgradig abgekürzt, kondensiert, fast vollständig prädikativ, agglutinierend, Subjekt und Objekt sind weggelassen“ und in der Semantik überwiegt der Wortsinn die Bedeutung. „Weil geborgte Sprache benutzt wurde, konnten die Studenten ihre eigenen Gedanken nicht ausdrücken, denen es - nicht durch eine verbal elaborierte und explizite Sprache vermittelt - an der notwendigen Unterstützung fehlte, um sich zu voll entwickelten Konzepten zu mauern.“ [a. a. O., S. 216] Diese beobachteten retardierten Sprachformen erinnern an die Formalismus-Barriere.
- *dem Mangel an Sensibilität für die Epistemologie wissenschaftlichen Wissens*, wonach „die direkte Beobachtung durch die Konstruktion technischer Instrumente und Repräsentationssysteme, Begriffe [...] und Theorien ersetzt werden muss“, [a. a. O., S. 220]. Dies äußerte sich „in der Produktion widersprüchlicher Aussagen“ oder dem „Unwillen länger nachzudenken“.
- *dem Denken in prototypischen Beispielen anstelle von Definitionen*: „Theoretische und praktische Denkweisen unterscheiden sich wesentlich in der Art und Weise, wie sie die Bedeutung eines Wortes gründen. Für den praktischen Verstand sind mathematische Objekte 'natürliche Objekte' und keine 'diskursiven Objekte': Definitionen und Theorien können diese nur beschreiben, aber nicht erzeugen oder konstruieren.“ Dies „wurde als Verständnisbarriere für unsere Studenten am auffälligsten im Lernprozess des Begriffs der linearen Abbildung.“, vgl. [a. a. O., S. 222].
- *der Gründung von Argumentationen und Verallgemeinerungen auf Handlungslogik und visuellen Anschauungen*: „Der praktische Verstand ist darauf eingestellt mit Situationen umzugehen anstatt mit Konzepten. Der praktisch veranlagte Student erfasst ein mathematisches Konzept zusammen mit der ganzen didaktischen Situation sowie dem sozialen und psychologischen Kontext [...]“, vgl. [a. a. O., S. 229].

<sup>107</sup>So kann man beispielsweise – *arithmetisch denkend* – eine Matrix  $A$  dadurch als invers zu einer zweiten Matrix  $B$  nachweisen, dass man die Inverse von  $A$  explizit z. B. mit dem Gauss-Algorithmus oder einer Kofaktor-Entwicklung berechnet und mit der Ersten auf elementweise Gleichheit prüft. *Strukturell denkend* kann man aber auch das Produkt beider Matrizen mit der Einheitmatrix vergleichen.

<sup>108</sup>Nach SIERPINSKA sind sowohl die synthetisch-geometrische als auch die strukturelle Denkweise *visuell*: die strukturelle „aber eher metaphorisch und/oder diagrammatisch“, vgl. [a. a. O., S. 236].

Als Folge dieser Barriere berichtet SIERPINSKA von einem erheblichen „Widerwillen sich auf die Struktursprache einzulassen“ und einer „Unfähigkeit zwischen diesen drei Sprachmodi zu wechseln“, vgl. [a. a. O., S. 209]. Der beschriebene *praktisch-orientierte Denkhabitus der Studenten wirkt als epistemologisches Hindernis beim angemessenen Verständnis der allgemeinen Strukturtheorie der Linearen Algebra*:

Moderne akademische Lehrbücher der Linearen Algebra bieten oft strukturelle Argumente an, um gewisse basale Aussagen zu rechtfertigen. Während diese gewöhnlich kurz und elegant sind, stellen sie aber einen Level an theoretischer Sophistikation dar, die den Einsteiger mit dem Gefühl zurücklässt, dass entweder nichts bewiesen wurde oder dass der bewiesene Sachverhalt von geringem Belang ist. [a. a. O., S. 236]

Aus der beobachteten *Inadäquatheit des Currikulums* und der konstatierten *Ineffizienz der Lehrbemühungen* zieht SIERPINSKA die folgende Konsequenz:

Es ist vielleicht höchste Zeit, diese Evidenz und Erfahrung seriös anzunehmen und auf ihr aufzubauen - anstatt sie zu ignorieren oder dagegen zu kämpfen. Für die meisten praktisch orientierten Studenten an unseren Universitäten ist ein 'praktischer' Zugang anstelle eines 'theoretischen' oder sogar 'strukturorientierten' angeraten. Einerseits kann ein 'praktischer' Zugang zur Arbeit mit Anwendungen der Linearen Algebra führen,[...] wo Konzepte nicht explizit durch Definitionen eingeführt werden, sondern implizit als Werkzeuge beim Nachdenken über Probleme in verschiedenen Kontexten. [a. a. O., S. 245]

Die Überlegungen von SIERPINSKA seien hier kurz kritisch kommentiert.

1. Strukturiertes Denken ist – nach dem hier vertretenen Theorieansatz – Denken in thematisierten Schematisierungen, d. h. wesentlich vertikales Mathematisieren, und besitzt eine komplexe Epistemologie ontologischer Bezüge zwischen mentalen mathematischen Objekten. Die beobachtete „Verhaftung der Studenten in praktischem Denken“ kann daher aus der Perspektive der APOS-Theorie auf ein Defizit an Erfahrungen in handelnden Zugängen hindeuten, aus denen Objekte und anschließend strukturelle Konzeptvorstellungen abgelöst werden sollten. Möglicherweise wurden in der Lerntrajektorie daher zu wenig Aktionen und Prozesshandlungen vorgesehen und daher keine reichhaltigen Konzeptvorstellungen gebildet.
2. Die beobachtete Sprachlosigkeit bzw. die wirren formalsprachlichen Formulierungen („Formalismusbarriere“) könnten z. T. in der Nutzung eines DGS<sup>109</sup> zu suchen sein: CABRI ist insofern selbst sprachlos, da zugehörige *point & click*-Aktionen über den probierhandelnden Zugmodus ausgelöst werden. Dagegen ist ein CAS symbol-sprachgesteuert und dialogisch orientiert, d. h. sprachliches Handeln auf theoretisch reflektierender Ebene ist zentral. Damit resultiert beim Benutzen eines CAS eine größere Nähe zur mathematischen Symbolsprache und damit eine bessere Gewöhnung an theoretisches und strukturelles Denken als bei einem DGS. Die didaktischen Probleme eines DGS sind daher völlig andere (und hier nicht Gegenstand der Untersuchung).

<sup>109</sup> „Sie sahen nur, dass 'irgendwas passierte'“, vgl. [a. a. O., S. 216]

3. Die kapitale Idee der De-Arithmetisierung des Anschauungsraumes und seine strukturelle Beschreibung durch Vektoren, „die ihre Koordinaten verloren, welche sie im Zahlbereich verankerten und die so zu abstrakten Elementen [eines Vektorraumes,  $wL$ ] wurden, deren Verhalten durch ein System von Eigenschaften (Axiomen) gesteuert wurde“ [a. a. O., S. 233] ist in einem DGS nicht angemessen modellierbar: Dieses operiert wesentlich mit Koordinaten im Anschauungsraum. Erst ein CAS löst sich hiervon und kann allgemeine algebraische Strukturen betrachten; ein DGS wie CABRI kann daher die falsche Wahl sein, um theoretische und strukturelle Überlegungen zu evozieren.
4. Der Wunsch und die Tendenz der Studenten (und Schüler) praktisch (selbstständig) zu rechnen wird durch ein CAS unterstützt - nicht aber durch ein DGS: Dieses dient dem Konstruieren von geometrischen Objekten, nicht dem Programmieren von Konzepten. Die Komprimierung und Auslagerung von Rechenprozessen (wie Gauss-Algorithmus, Inversenberechnung, Lösungsmengen von LGS, Gruppentafeln etc.) als Routinen im CAS verhilft aber ambivalent zur Distanzierung von eben solchen praktischen „Denk“-Prozessen und lenkt den Blick auf theoretische Reflektionen.
5. In Bemerkung 1. wurde angedeutet, dass die reflexive Abstraktion in der zitierten Lerntrajektorie vermutlich nicht abgeschlossen ist, worauf die beobachtete „Praxisverhaftung“ hindeutet. Nach HARELS Konkretheits-Prinzipien<sup>110</sup> kann man die *Praxisbarriere* von SIERPINSKA als *unerfülltes Konkretheits-Bedürfnis* der Lernenden interpretieren, die deshalb in der konkreten „Rechen“-Praxis verharren, weil „konkret gewordene abstrakte“ Objekte mental noch nicht konstruiert wurden. *Die Sprachlosigkeit vor abstrakten Objekten ist insofern ein Indiz für objektlose Orientierungslosigkeit.*

Es gibt meines Erachtens daher Indizien dafür, dass die *epistemologische Barriere der praktischen Denk-Disposition durch ein CAS abgeschwächt* werden kann.

### Die pseudokonzeptuale Denkhaltung als kognitive Barriere

VINNER [202] berichtet in *Szenen aus Lineare Algebra-Klassen*, dass er gelegentlich seine Studenten die Antworten auf seine verständnis-testenden Fragen aufschreiben lässt: „Ich habe dies mit vielen Klassen und vielen Begriffsbildungen gemacht und die Resultate sind ziemlich ähnlich. Üblicherweise sind sie ziemlich niederschnetternd.“ und „[Diese Ergebnisse -w.L.] lassen einen an der Berufswahl zweifeln.“, vgl. [a. a. O., S. 162].

Die von VINNER beschriebenen Phänomene betreffen die *Bedeutung von Bezeichnungen und Begriffen, Beweisverständnis und logisches Denken* sowie die Gründe für *syntaktische Fehler* und zeigen in diesen typisch mathematischen Aktivitäten nach seiner Ansicht ein spezifisches (Fehl-)Verhalten von Lernern, nämlich ein sog. *pseudo-konzeptuales Denken*. Im Folgenden werden kurz drei ausgewählte Beispiele von Vinner sowie seine Explikation des Begriffs „pseudo-konzeptuales Denken bzw. Verhalten“ zitiert und der Unterschied zum didaktischen Begriff des Fehlverständnisses geklärt. Zusätzlich wird seine These an einer Versuch-Wiederholung verifiziert.

<sup>110</sup>worauf unten noch näher eingegangen wird

(1) **Beispiel** (*pseudo-konzeptuales Notationsverständnis*, [202, S. 163]):

Schreibe die Cauchy-Schwarz-Gleichung  $\|a\| \cdot \|b\| \geq |a^t b|$  ohne die Symbole  $\|a\|$ ,  $\|b\|$ ,  $a^t$ ,  $a$ ,  $b$  zu benutzen.

Die Aufgabe<sup>111</sup> fragt lediglich nach einem Dekodierungsprozess: Eine syntaktische Verdichtung ist zu expandieren, ein memorativer Rückruf auf ein Bezeichnungswissen ist zu leisten. Keine Umformung, keine Argumentation ist verlangt. Simuliert man die Anforderung im CAS-„Gedächtnis“ nach, indem die fraglichen Begriffe codiert und die Aufgabe als Anfrage an das CAS syntaktisch formuliert wird, so erkennt man, dass neben der Matrixmultiplikation lediglich die Definitionen von Länge und Betrag memoriell abzurufen sind:

```

• export(linalg, transpose):
 a:=matrix([a1,a2]); b:=matrix([b1,b2]); // (0)

$$\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$$

• laenge := x -> sqrt(_plus(x[i]^2 $ i=1..nops(x))) // (1)
• abs1 := x -> sqrt(op(x)^2): // (2)
• laenge(a)*laenge(b) >= abs1(transpose(a)*b) // (3)

$$\sqrt{(a1 \cdot b1 + a2 \cdot b2)^2} \leq \sqrt{a1^2 + a2^2} \cdot \sqrt{b1^2 + b2^2}$$


```

Mit Recht weist VINNER darauf hin, dass für eine gelingende unterrichtliche Verständigung ein präzise funktionierendes Notationswissen vorausgesetzt werden muss. Während in der Alltagspraxis oft approximative Erinnerungen an Umstände und Objekte etc. ausreichen, ist in der Mathematik für ein tiefes und volles Konzept-Verständnis auch eine syntaktisch korrekte (nicht: annähernd korrekte) Erinnerung notwendig. Dieser (unreflektierte) Widerspruch zur Lebenspraxis ist oft nicht bewusst und Ausdruck eines pseudo-konzeptualen Verhaltens:

Das Inakkurate, das Vage, das Fuzzyartige ist typisch für die menschliche Gedächtnisfunktion. Besondere mentale Aktionen sind nötig, um das akkurate, klare, fokussierte Bild eines relevanten Gegenstandens zu erhalten. [...] Viele [Lernende] haben nicht die Zeit, die Motivation oder sogar das Verständnis, dass die Fuzzy-Denkweise für das Lernen von Mathematik inadäquat ist. [a. a. O., S. 163]

(2) **Beispiel** (*pseudo-konzeptuales Begriffsverständnis*, [202, S. 164]):

Was ist ein Eigenwert und was ist ein Eigenvektor einer gegebenen Matrix  $A$ ?

Die Analyse der Antworten<sup>112</sup> weist nach, dass die Studenten vielfach „versuchen, zu dem vorgelegten Begriff irgendein Wort oder irgendeine Symbolsequenz zu assoziieren, welche ihnen im Kontext gerade geeignet zu sein scheint“, z. B. „ $(A - \lambda I)$  ist der Eigenwert“. Die Antworten zeigen kein Konzept-Verständnis<sup>113</sup> und demonstrieren daher pseudo-konzeptuales

<sup>111</sup>Nach VINNERS Bericht waren nur 2 Antworten von 19 richtig.

<sup>112</sup>Resultat: Nur 3 Antworten von 17 waren richtig; dabei wurde die Frage von VINNER drei Wochen nach der Konzept Einführung gestellt. – Eigene Befragungen während eines Didaktikseminars an der Universität Duisburg zeigten vergleichbare Befunde. Auf die Mitteilung der Details sei hier verzichtet.

<sup>113</sup>stellen allerdings auch *keine Fehlvorstellungen* dar, s. u.

Verhalten, das sich darin äußert, dass das Lernsubjekt von den befragten Konzepten *so redet oder schreibt, als ob das Konzept verstanden sei*. Irritierend ist zudem die Möglichkeit, dass auch in den „richtigen“ Antworten pseudo-konzeptuales Denken verdeckt vorliegen kann, wenn die korrekte Antwort auf unverstandenem bloßem Auswendiglernen beruht.

**(3) Beispiel** (*pseudo-konzeptuale Syntaxfehler*, [202, S. 169]):

Bringe die Matrix  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$  durch elementare Zeilenumformungen auf Dreiecksgestalt.

Während ein CAS bei logisch-begrifflichen Argumentationsfehlern, in denen ein Verdacht auf das Vorliegen von pseudo-konzeptualem Denken besteht<sup>114</sup>, den Lernprozess nicht stützen kann, ist die Situation bei Syntaxfehlern didaktisch anders.

Die studentische Antwort  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{2}{=} [0 \ 4 \ 0 \ 0]$  auf obige Frage zeigt einen zweifachen Missbrauch des Gleichheitszeichens: An der Argumentationstelle „ $\stackrel{1}{=}$ “ wird die Definition der elementweisen Matrizenungleichheit verletzt und bei „ $\stackrel{2}{=}$ “ sind die verglichenen Matrizen gar nicht vergleichbar, da sie aus verschiedenen Räumen stammen – die „an sich richtige“ Rechnung offenbart pseudo-konzeptuales Denken.

Stellt man die Überlegung im CAS nach, so ergibt sich folgende Situation:

- `matrix([[0,1,4,0],[0,2,8,0]]) = matrix([[0,1,4,0],[0,0,0,0]]) // (1)`  

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- `matrix([[0,1,4,0],[0,2,8,0]]) = matrix([[0,1,4,0]]) // (2)`  

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 1 \ 4 \ 0)$$
- `is(matrix([[0,1,4,0],[0,2,8,0]]) = matrix([[0,1,4,0],[0,0,0,0]])); // (3)`  
`is(matrix([[0,1,4,0],[0,2,8,0]]) = matrix([[0,1,4,0]])) // (4)`  
`false`  
`Error: dimensions do not match`

Die „pseudo-konzeptualen“ Anfragen der Studenten wären vom CAS als „korrekte Eingaben“ in der gleichen Weise akzeptiert worden – mit anscheinend gleichen logischen Konsequenzen: (1) = (2). Die anschließenden „richtigen konzeptualen“ Anfragen (3) bzw. (4) erfordern bereits ein ausgebildetes Konzept-Verständnis von Gleichheit, da hier die *logische Wahrheit der angefragten Gleichheitsaussage vom CAS beantwortet* wird: Wie man an den verschiedenen ausfallenden Reaktionen des CAS sieht, fällt diese Prüfung auf Gleichheit sehr unterschiedlich aus – in (3): keine Gleichheit, in (4) verschiedene Definitionbereiche, Anfrage sinnlos. *Folglich kann ein CAS i. d. R. im Lernprozess konzeptual nur dann stützend hilfreich sein, wenn der Nutzer bereits konzeptual denkt – ein pseudo-konzeptuales Denken kann schon die richtigen Anfragen an das CAS gar nicht stellen und entlarvt sich damit auch im CAS.*

Vor dem Hintergrund der beschriebenen deprimierenden Befundlage weist VINNER auf das didaktische Gebot der Förderung von sog. „*rein*“-konzeptualem Denken zur Konstruktion stabiler Konzeptvorstellungen hin. Denn das beschriebene psychologische Phänomen

<sup>114</sup>wie z. B. bei Fehlschlüssen und elliptischen Schlussweisen oder beim Argumentieren mit nicht-generischen Zahlen-Beispielen anstelle der konzeptualen Nutzung von Variablen in Beweisen.

des *pseudo-konzeptualen Verhaltens von Lernenden kann als Barriere für das Entstehen epistemologisch effektiver Konzeptvorstellungen wirken, indem es dem Lernsubjekt selbst (und dem außenstehenden Beobachter) Verständnis vortäuscht bzw. (s)ein Nichtverständnis nicht erkennt bzw. sich nicht ehrlich eingesteht*. In der Folge bleibt das notwendige Bemühen um die Konstruktion angemessener bzw. die Korrektur fehlerhafter Konzeptvorstellungen aus.

Ausgehend von seiner Unterscheidung zwischen *konzeptualem* und *prozeduralem* Denken im Rahmen der sog. *concept-definition / concept-image*-( $\approx$ APOS)-Theorie wird das konzeptorientierte Denken von VINNER als *rein-konzeptual* betont, um es von dem oben beschriebenen *pseudo-konzeptualen* Denken zu unterscheiden. Rein-konzeptuales Denken geht mit seinen konstruierten mentalen Objekten (O) und den zugehörigen Konzeptvorstellungen thematisch (auf der S-Ebene) verständlich um, während ein pseudo-konzeptuales Verhalten des Lernsubjektes lediglich die *Bezeichner* („O“) *der Objekte redend oder schreibend nutzt, ohne dass überhaupt zugehörige Konzeptvorstellungen im Bewusstsein existieren*<sup>115</sup> (müssen) – Darstellung und Rede<sup>116</sup> erscheinen dem Beobachter sinnlos bzw. sinnleer oder fragmentarisch:

Eine (echt) konzeptuale Verhaltensweise ist das Ergebnis von gedanklichen Vorgängen, in denen Konzepte betrachtet sowie auch Beziehungen zwischen Konzepten bzw. Ideen, in denen diese Konzepte involviert sind, logische Verbindungen u. s. w. Solche Gedankenprozesse konstituieren konzeptuales Denken. [...] Ein Verhalten, welches wie ein konzeptuales aussehen könnte, aber durch mentale Prozesse hervorgebracht wird, die nicht konzeptual sind, nenne ich pseudo-konzeptual.[...] In mentalen Prozessen, die konzeptuales Verhalten produzieren, sind Worte mit Ideen assoziiert, während in mentalen Prozessen, die pseudo-konzeptuales Verhalten produzieren, Worte mit Worten assoziiert sind - Ideen sind nicht involviert. [a. a. O., S. 160]

Im Unterschied dazu ist ein *Fehlverständnis* „Resultat einer konzeptualen Denkweise und sollte als sinnhaftes Verhalten angesehen werden, wohingegen das pseudo-konzeptuale Verhalten ein sinnentleertes Verhalten ist“, vgl. [a. a. O., S. 162].

Die folgende Übersicht stellt diese begriffliche Unterscheidung im Entscheidungsbaum dar:



*Anmerkungen.*

<sup>115</sup>s. o. Beispiel 1.

<sup>116</sup>Als solche Beispiele pseudo-konzeptuellen Verhaltens nennt VINNER das „Kopfnicken“ als Ausdruck des „Als-ob“-Verstehens (also möglicherweise auch dann, wenn man etwas nicht voll verstanden hat) oder das „Alles-Hinschreiben“, was einem zu einer Frage einfällt (also „als-ob“ man etwas verstanden habe – anstatt die Frage tatsächlich zu beantworten).

1. *Die Entstehung von pseudo-konzeptuellem Denken* und Verhalten erklärt VINNER mit dem Wunsch des Individuums nach „einfachen, leichteren und kürzeren mentalen Prozessen, falls die rein-konzeptualen zu kompliziert“ ausfallen, vgl. [a. a. O., S. 161]. Es ist aber auch denkbar, dass nach der 7er-Regel eine Anhäufung<sup>117</sup> neuer Terminologie im (Kurzzeit-)Gedächtnis in der vom Lehrer bereitgestellten Lernzeit nicht internalisiert werden kann und in der Folge sinnhaftige mathematische Kommunikation *objektiv unmöglich* wird. Denn es gibt zu denken, wenn nur 2 von 17 Hörern in Beispiel (1) die gestellte Frage beantworten, wenn man unterstellt, dass StudentInnen im dritten Semester eine Vorlesung mit Interesse und zielbewusst aus- und besuchen. Ohne Einsicht in die konkrete Lerntrajektorie und eine Analyse ihres Designs ist dies aber nicht zu entscheiden.
2. *Zur Aufdeckung von pseudo-konzeptuellem Verhalten* verwendet man nach VINNER die „üblichen operationalen Maße“ wie „schriftliche Examina, Hausaufgaben, Klassendiskussionen und vielleicht auch andere Mittel.“, vgl. [a. a. O., S. 160].
3. Pseudo-konzeptuelles Verhalten ist nicht auf das Lernen von Linearer Algebra beschränkt, sondern tritt auch beim Lernen anderer Wissensdomänen auf. Sie ist hier aber gravierender ausgeprägt, weil durch die beschriebenen diversen Sprachebenen mit wechselnden Terminologien konzeptuelles Verständnis in besonderer Weise bedroht ist.
4. Pseudo-konzeptuales Verhalten ist ein *psychologisches* Phänomen, das sich mittelbar als Barriere für kognitive *mathematische* Lernprozesse auswirken kann. Zur Förderung eines für gelingende Verständnisprozesse wertvoll erachteten rein-konzeptualen Denkens sollte man *die Lernenden auf die ethische Forderung der ehrlichen Selbstreflexion (mit Selbsteinschätzung und Monitoring des Lernprozesses) verpflichten*. In den von mir designten CAS-M<sup>2</sup>AKE-Lerntrajektorien sind dazu zusätzliche Aus- und Rückblicke sowie eingebettete Lehr-Dialoge als rahmende („M<sup>2</sup>“)metakognitive Tätigkeiten vorgesehen, die zusammen mit den AP-Handlungsphasen rein-konzeptuelles Denken als Voraussetzung für wissenschaftliches Arbeiten fördern möchten.

### 3.3 Lösungsansätze aus den fachwissenschaftlichen und didaktischen Communities

Der folgende Abschnitt geht auf Revisionsversuche der universitären Linearen Algebra insoweit ein, als aus den dortigen Befunden und Lehrrevisionen Auf- und Rückschlüsse

<sup>117</sup>Man denke an CARLSONS Metapher vom begrifflichen Nebel; dazu VINNER [a. a. O., S. 159]: „In dem Augenblick, in dem eine Analogie gegründet wird, gibt es keinen weiteren Bedarf an analytischer Erklärung. Metaphern überzeugen intuitiv. [...] In der Psychologie und der Didaktik sind Metaphern oft das Einzige, was wir haben.“ *Metaphern sind insofern wertvolle holistische Sprachkonstrukte*, die – vergleichbar mit holistischen Visualisierungen – über Assoziationen ein *quasi-konzeptuales* Reden bzw. Denken anstoßen. Man denke z. B. an JÄNICHS [131, S. 42 ff] (formal-präzisierte) Metaphern, eine Funktion zu Integrationszwecken „in die Zange zu nehmen“ oder ein *Lösungs-„fahrzeug“ auf Phasenflüssen zu pilotieren*, vgl. [a. a. O., S. 300] oder an ARTMANNs Metapher des Schraubstocks als Quasi-Konzeptvorstellung von Stetigkeit.

für die Konzeption einer schulischen Linearen Algebra erhofft werden können. Zunächst werden die empirischen Lehrversuche der französischen TLAG-Gruppe ausgewertet und anschließend die Empfehlungen der US-amerikanischen LACSG.

### 3.3.1 Die Curriculum-Revision der TLAG (Frankreich)

Resümee der Überlegungen seitens der TLAG-Gruppe [52, S. 275] ist eine Beschreibung der Linearen Algebra, die im Kern Einsichten der APOS-Theorie aufgreift und epistemologische Barrieren berücksichtigt:

Von der allgemeinsten Ebene betrachtet erfordert ein gutes Verständnis der Linearen Algebra ein angemessenes Maß an 'kognitiver Flexibilität' in Bezug auf das Umschalten zwischen den verschiedenen Sprachen (z. B. der Sprache der Matrizen- und der Sprache der Vektorräume), Blickpunkten (kartesisch und parametrisch) und semiotischen Registern. Ein Verständnis der Linearen Algebra verlangt seitens der Studenten auch das Einkapseln substantieller Bereiche vormals individueller Objekte und Handlungen mit diesen Objekten in identifizierbare Konzeptstrukturen (z. B. Funktionen, die als Objekte sui generis betrachtet werden, als Elemente eines Vektorraumes statt als Prozeduren, die Zahlen andere Zahlen zuordnen). Darüberhinaus erfordert ein Verständnis von Linearer Algebra die Fähigkeit, sich auf 'theoretisches Denken' als Kontrollinstrument für Intuitionen, mentalen Vorstellungsbildern und Kontextabhängigkeiten einzulassen, die charakteristisch sind für ein 'praktisches Denken'. Andererseits ist ein 'praktisches Denken' notwendig, um zu vermeiden, dass Lineare Algebra nichts weiter ist als eine fremde, kryptische und formale Sprache, in der man zwar schreiben, aber nicht denken kann.

Vor dieser Theoriefolie werden einige didaktische Experimente und Revisionsvorschläge seitens der TLAG berichtet, die hier aus der Zielperspektive einer Revision der schulischen Linearen Algebra von Interesse sind.

#### Das Kleingruppen-Experiment von ROBERT

ROBERT [52, S. 116 ff] untersuchte 1994 in einem Lehrversuch, ob und wie sich der Bearbeitungserfolg bei der früher untersuchten Problemstellung<sup>118</sup> ändert, wenn das Lehrdesign ausdrückliche Klein-Gruppenarbeit präferiert.

Die Studenten arbeiteten in 4er-Gruppen an Tisch-Inseln im Kursraum. Es wurde ihnen eine Problemstellung ohne methodische Lösungshinweise gegeben und sie hatten die Lösung auszuarbeiten. Eine Sitzung dauerte jeweils 1 1/2 von 2 Stunden. Im Allgemeinen intervenierten die Lehrer nur auf Anfrage, wenn eine andauernde Meinungsverschiedenheit in der Gruppe auftrat, sie auf ein Hindernis stieß oder die Gruppe dachte, dass sie das Problem gelöst hatte. [a. a. O., S. 116]

Die Befunde weisen zwar *mehr explizite Meta-Reflexionen* (wie Planungsüberlegungen vor der Lösung; Aspektwechsel; Variationen der Fragestellungen) auf als in individueller Arbeit beobachtet wurde sowie eine insgesamt *erhöhte Nach-Denkzeit*. Die mathematischen Probleme im Zusammenhang mit den früher beobachteten logisch-mengentheoretischen Schwächen (Formalismus-Barriere) blieben jedoch erhalten. Unverstanden blieb z. B. „dass

<sup>118</sup>s. o., lediglich ergänzt um die zusätzliche Aufforderung, nach zwei Lösungswegen zu suchen: „Vergleiche  $E_3$  und  $E_1 \cap E_2$ . Wenn möglich, gib zwei Wege an. [...]“



eine Gleichung eine Nebenbedingung ist, die eine Teilmenge in einer Menge festlegt und dass ein System von Gleichungen den Durchschnitt aller Teilmengen der Einzelgleichungen beschreibt, scheint nicht erworben“ [a.a.O., S. 121]. Dies verweist auf die erhebliche Starrheit der Implizitheitsbarriere auch bei Änderung der Artikulationsform. Als Gründe werden genannt:

- die in der Schule erworbenen Konzepte werden an der Universität nicht aufgegriffen
- Gleichungen von Geraden sind i. W. nur Gegenstand *algorithmischer* Berechnungen, vgl. [a. a. O., S. 121]
- vor der Behandlung der Linearen Algebra gibt es (zu) wenig Lerngelegenheiten für logische Schulungen.

Als didaktische Konsequenz empfiehlt die Studie

- „[...] dass die Vermittlung der elementaren (naiven) Mengenlehre seriös überdacht werden sollte ebenso wie die Unterrichtung in elementarer Logik [...] eng gekoppelt an den mathematischen Inhalt im aktuellen Kontext.“ [a. a. O., S. 122]
- dass die Vermittlung der analytischen Geometrie mit besonderer Betonung von Schnittproblemen erfolgen sollte, um mentale Bilder für eine Vielzahl von abstrakten Konzepten der Linearen Algebra bereitzustellen.

Aus Sicht der deutschen Fachdidaktik wurde gerade der letzte Punkt unter dem Stichwort „Hieb- und Stichaufgaben“ kritisiert. Eine abgewandelte Form solcher Aufgaben scheint aber wichtig.

### Die Curriculum-Revision von ROGALSKI

ROGALSKI legte einen Curriculum-Entwurf vor, der auf *drei Designhypothesen* zur Ausgestaltung der Lerntrajektorien basierte, vgl. [a. a. O., S. 134 ff]:

- *Formalisierung, Unifizierung, Generalisierung und Simplifizierung* als wissenschaftsprachliches Ziel der mathematischen Konzeptbildungen der Linearen Algebra
- Vermittlung von *Praxiswissen in elementarer Aussagenlogik* und Mengensprache<sup>119</sup> sowie *Praxiserfahrungen in Analytischer Geometrie* zur Bedeutungshinterlegung für ein erfolgreiches Lernen von Konzepten
- dem zusätzlichen Einsatz von vernetzten didaktischen Leitprinzipien wie
  - einem geschickten Gebrauch von sog. „*Meta-Hebeln*“<sup>120</sup>

<sup>119</sup>die *lehrbegleitend* vermittelt werden sollte

<sup>120</sup>Im Original „*meta lever*“ (Vorsicht: **nicht** meta-„*level*“): „In unserem Begriff des *Meta-Hebels* meint ‚meta‘, dass vom Lernenden eine reflexive Grundhaltung bei seinen mathematischen Aktivitäten erhofft wird und *Hebel* weist auf etwas hin, was zum richtigem Augenblick an der geeigneten Stelle eingesetzt wird, um den Lernenden in diesen Reflexionszustand zu versetzen, während er eine mathematische Aufgabe ausführt (was sorgfältige Vorbereitung von Seiten des Lehrers erfordert).“, [a. a. O., S. 136].

- der Fokus auf ein *nachhaltiges und ganzheitliches Kursdesign* im Hinblick auf die Nicht-Linearität des Lernprozesses
- der gezielte Wechsel von *Repräsentationen*<sup>121</sup>, zunächst als Stimulatoren für begriffliche Unifizierungsprozesse und sodann als Stimulatoren in Problemlösungsprozessen.

Der detaillierte Kursplan ist in Abbildung 3.47 dargestellt. Vorlesungsbegleitend wurden

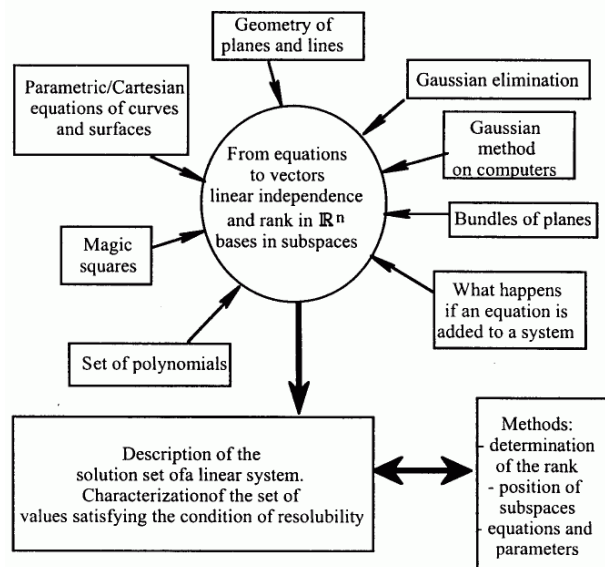


Abbildung 3.47: Die Konzeption eines universitären Kurses in Linearer Algebra nach M. ROGALSKI.

15 zweistündige Workshops im Semester angeboten; dieses Lehrformat sollte die studentische Forschungszeit respektieren und zu diskursivem Gedankenaustausch auf Metaebene ermutigen, vgl. [a. a. O., S. 140]. Dazu wurden spezielle Problem-Kontexte<sup>122</sup> entwickelt, die *klassische mathematische Tätigkeiten mit Metareflexionen zu Kernkonzepten mischten*: „[...] Die Lernenden werden gelegentlich gefragt, nicht nur mathematische Techniken auszuführen, sondern auch die epistemologische Dimension in ihre Arbeit zu integrieren.“, vgl. [a. a. O., S. 141]. Thematisch *beschränkte sich der Reformansatz radikal* auf die Vermittlung von lediglich sechs zu erlernenden Kernkonzepten, vgl. [a. a. O., S. 141]:

1. *eine Basistechnik*: der **Gauss-Algorithmus** zum Lösen von linearen Systemen
2. *ein zentraler Begriff*: der **Rang**, betrachtet von verschiedenen Perspektiven

<sup>121</sup>ROGALSKI [a. a. O., S. 137] spricht von *Blickpunktwechsel* und *Kontextwechsel*; die näheren Erläuterungen zielen z. B. auf die Interpretation einer linearen Gleichung  $1x + 2y + 3z = 0$  als 3-Tupel  $(1, 2, 3)$  zur Ermöglichung einer Rang-Untersuchung.

<sup>122</sup>z. B. zur axiomatischen Definition eines Vektorraumes [a. a. O., S. 143, 156 ff] oder zum Konzept der Linearität [a. a. O., S. 169]

3. *ein systematischer Repräsentationswechsel*: zwischen Gleichungen und Parameterdarstellungen
4. *eine zentrale Modellierung*: durch die lineare Gleichung  $T(X) = Y$
5. *eine durchgängige Strategie*: wähle passende Basen, um ein Problem zu lösen
6. *ein typisches Beweismittel*: wann impliziert Eindeutigkeit die Existenz?

Hinzu kommt

7. *eine Visualisierung*: die des *Gauss-Algorithmus* durch eine lokale Software.

Die *Befunde* [a. a. O., S. 142 ff] zeigten, dass das entscheidende Rang-Konzept überwiegend erworben wurde, dass aber bei Repräsentationswechseln Vorlieben für eine spezielle Sichtweise beobachtet wurden. Dies weist erneut auf die Möglichkeit der Existenz prädikativ-funktionaler Dispositionen hin. Spontane lineare Modellierungen vorgelegter Problemstellungen war nur einer Minderheit der Studenten möglich; ROGALSKI vermutete, dass die zur Verfügung gestellte Reifezeit zur Begriffskonsolidierung unzureichend war.

*Anmerkungen.*

1. Das Konzept des *Meta-Hebels* ist näher ausgeführt in [53]: „Der Ausdruck Meta-Hebel [...] bezeichnet den Einsatz von Informationen oder Wissen *über* Mathematik“, [a. a. O., S. 151] und wird explizit abgesetzt von den Begriffen *Metakognition* und *Metamathematik*, da hiermit ein spezifisches *didaktisches Mittel* bezeichnet wird, vgl. [a. a. O., S. 176, Fußnote 1]:

[...] dies ist eine langfristige Perspektive: Solch eine Lehre kann nur für einen gewissen Zeitraum geplant werden, wenn eine Veränderung studentischer Verhaltensweisen etabliert werden soll. Darüber hinaus schließt eine solche Lehre Situationen des Gebens-und-Nehmens zwischen Lehrer-Intervention und Schüler-Interaktion ein (insbesondere bei Problemlösungsaktivitäten) und kann weder schnell ausgeführt werden noch unmittelbare Resultate zeigen. [a. a. O., S. 154]

Der geschickte Einsatz von Meta-Hebeln<sup>123</sup> ist durchaus problematisch und erfordert viel professionelles Erfahrungswissen. Neben der Einplanung einer ausreichenden Denkzeit ist die *Initiierung*<sup>124</sup> *einer reflexiven Analyse kritisch, die nicht in Worte explizieren darf, was erst noch gelernt werden soll*, vgl. [a.a.O., S. 161]. Auch sind die Lernpersonen auf diese Abänderung des impliziten didaktischen Kontraktes aufmerksam zu machen, der nun nicht mehr nur auf die richtige Lösung eines mathematischen Problems zielt, sondern gleichzeitig einsichtsfördernd über die epistemologische Struktur wichtiger Konzepte der Linearen Algebra nachdenken möchte.

<sup>123</sup>Als Beispiele solcher Meta-Lerntrajektorien werden die Einführung der Vektorraum-Struktur [a. a. O., S. 155 ff], die Behandlung der Interpolationsformel von GREGORY [a.a.O., S. 162 ff] – die bei traditioneller Problemstellung kaum Lösungserfolg zeigte – und die Unterscheidung von Linearität und Nicht-Linearität [a. a. O., S. 169 ff] dargestellt; Letzteres am Studium von  $T(X) = Y$  in einer Aufgabe mit 7 verschiedenen Funktionen  $T$ , die bis auf eine *nicht explizit gelöst* werden sollten.

<sup>124</sup>oft durch den Lehrer sensibel spontan und mündlich improvisiert, [a. a. O., S. 174]

2. ROGALSKI betont, dass die *einleitenden* geometrischen Aktivitäten durch metatheoretische Reflektionen *begleitet* werden müssen, um die Überlegungen auf symbolisch-struktureller Ebene anbahnen zu können. Nach der hier vertretenen Auffassung ist dies als ein ständiger Wechsel der Sprachebenen von Umgangssprache (als Sprache der Metaaktivitäten) und der Ausbildung einer Symbolsprache (Formelsprache) zu interpretieren. Bemerkenswert ist, dass das obige 'Kern'-Problem signifikant besser gelöst wird, „da formale Aspekte nach diesem Curriculum-Konzept als weniger störend empfunden wurden.“, siehe [a. a. O., S. 163]. Dies spricht dafür, *dass die Formalismus-Barriere außer durch CAS-sprachliche Handlungen auch durch explizite Meta-Aktivitäten aus „hebelbar“ sein könnte.*

### Die Revisionsvorschläge von BARDY et al.

BARDY [52, S. 258] et al. vom IREM<sup>125</sup> ziehen aus Untersuchungen von Abschlussexamina zu Lineare Algebra–Vorlesungen den Befund, dass insbesondere

- „das Konzept der Linearen Unabhängigkeit nicht verstanden wurde“
- die „Studenten keinerlei Vorstellung davon hatten, was es bedeutet, einen Beweis zu analysieren [...]. Die Anzahl der Nicht-Antworten [...] zeigte, dass die Studenten faktisch nichts verstanden hatten“
- die Art der Fehler „auf globales Unverständnis“ hindeutete.

Als Gründe werden die „Anzahl der neu zu lernenden Begriffe“ genannt, die „vergleichbar mit denen einer Fremdsprache“<sup>126</sup> seien, die „völlig neue Methoden von Exposition und Demonstration“ und die strukturtheoretische Orientiertheit der Linearen Algebra. Aus den daraus entwickelten Vorschlägen<sup>127</sup> für eine Curriculum-Revision greife ich folgende schulisch bedeutsame heraus:

1. Man beschränke die Zielsetzung auf das *Verständnis weniger basaler Begriffe*, d. h. „man begrenze den Umfang und stelle die Formalisierung gewisser Begriffe zurück“.
2. Man *beschränke Vokabular und Symbolik* auf das „absolut Notwendige und Adäquate“.
3. Man benutze „Beispiele, die von den Studenten schon auf der Schule betrachtet worden sind (Geometrie und Gleichungen). Objekte wie Funktionen und Polynome sind für Einsteiger zu komplex“.
4. Man gestalte „Übungen und Tests, die tiefes Verständnis testen und nicht bloß mechanische Manipulationen“.

<sup>125</sup>Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques in Rennes, Frankreich

<sup>126</sup>vgl. die obigen Ausführungen zur Geheimsprachen-Metapher

<sup>127</sup>vgl. [a. a. O., S. 258]

5. Man gebe den Studenten [multiple; wL] Repräsentationen.

Die aus der Befundlage gezogenen Konsequenzen sind also auch bei BARDY et al. radikal und in der Tendenz mit den Forderungen von HAREL und ROGALSKY vergleichbar.

### 3.3.2 Die curriculare Revision der LACSG (USA)

Aufgrund einer vergleichbar desillusionierenden Befundlage (vgl. z. B. CARLSON, DUBINSKY, VINNER, DAY<sup>128</sup>) über den Lehrerfolg traditioneller Lehrveranstaltungen wie in Frankreich und der zunehmenden Verbreitung von (numerischen und symbolischen) CAS kam es auch in den USA ab 1989 (bis 1997) zu umfangreichen Reformaktivitäten für die Lehre der elementaren Linearen Algebra, die sich in mehreren NSF-Workshops mit hunderten Teilnehmer(inne)n und der Veröffentlichung des Sammelbandes CARLSON et al. [26] der MAA niederschlug. Dort wird die Rolle der Linearen Algebra aus Sicht der Anwender, der Anwendungen und der Didaktik behandelt. Im Folgenden wird für die Zwecke der Beurteilung des Nutzens einiger Teile der LACSG<sup>129</sup>-Empfehlungen für die schulische Lineare Algebra das vorgeschlagene Kern-Curriculum (engl.: core syllabus) dargestellt, die zugrunde liegende epistemologische Philosophie skizziert, die Umsetzung in (US) Lehrbüchern nachgezeichnet und die kritische Aufnahme der LACSG-Empfehlungen andiskutiert.

#### Die fünf LACSG-Empfehlungen von 1990

Die LACSG-Empfehlungen für einen Einführungskurs in die Lineare Algebra wurden im Jahre 1990 auf einem NSF-Workshop in 1990 in Williamsburg formuliert und erstmalig 1993 publiziert<sup>130</sup>. Unter den 16 Unterzeichnern finden sich neben renommierten Lehrbuchautoren wie D. LAY auch Experten für mathematische Computersysteme wie C. MOLER (MatLAB) und Mathematikdidaktiker wie G. HAREL.

Die *fünf Empfehlungen für einen ersten Kurs in Linearer Algebra* lauten: Kursplan und Präsentation sollten

(LA1) die Bedürfnisse der *Klienten-Disziplinen berücksichtigen*,

(LA2) *matrix-orientiert* sein,

(LA3) Bedürfnisse und Interessen der *Studenten als Lerner bedenken*,

(LA4) *Computer-Technologie einsetzen*,

<sup>128</sup>DAY [44, S. 71] berichtet, dass zu den Workshops eingeladene angewandte Mathematiker aus verschiedenen Arbeitsbereichen mitteilten „dass sehr wenige ihrer Kollegen sich überhaupt an irgend etwas aus ihrem Anfängerkurs Lineare Algebra erinnerten. [...] Diese Kollegen konnten sinnvolle Definitionen von Konzepten wie lineare Unabhängigkeit oder Spann nicht geben und ihr geometrisches Verständnis solcher Konzepte war gleich Null.“

<sup>129</sup>kurz für *Linear Algebra Curriculum Study Group*

<sup>130</sup>*College Mathematics Journal* **24** (1993), S. 41–46

(LA5) und *wenigstens einen zweiten Kurs* in Matrixtheorie/Linearer Algebra mit hoher Priorität anbieten und abstrakte Vektorräume und Numerische Lineare Algebra beinhalten.

Die Kernbegründung für die Notwendigkeit der Revision wird wie folgt formuliert:

[...] in vielen Kursen wird die Bedeutung der Linearen Algebra für viele Anwendungsfelder nicht kommuniziert<sup>131</sup> und der Einfluss des Computers wird im Klassenraum nicht spürbar, sowohl in der Auswahl der Themen als auch der Art der Präsentation. Darüber hinaus kann eine überbetonte Abstraktion<sup>132</sup> die Einsteiger bis zu dem Punkt überwältigen, wo sie den Kurs mit wenig Verständnis oder einer geringen Meisterung der Basiskonzepte verlassen, die sie in späteren Kursen und der beruflichen Karriere<sup>133</sup> aber dringend brauchen könnten. [28, S. 53]

Insgesamt bestehe daher ein „[...]Bedürfnis für einen soliden und intellektuell anregenden Kurs mit sorgfältigen Definitionen und Sätzen und Beweisen, die Beziehungen zwischen verschiedenen Konzepten aufzeigen und das Verständnis befördern.“ Es wird dabei geraten, den „technischen Jargon“ zu minimieren, es sollten „Exkursionen in Verallgemeinerungen [...] nur erfolgen, wenn es die Zeit erlaubt“ und es sollten „einige Anwendungen eingefügt werden“.

### Das LACSG–Kerncurriculum

Das *Kerncurriculum Lineare Algebra* schlägt folgende zentrale Kerninhalte vor, die in 26-28 je 50-minütigen<sup>134</sup> Lehrveranstaltungen darstellbar sein sollen:

| Thema                                            | Kerninhalte                                                                                     | Bemerkungen                                                                                                                                                           | Zeit <sup>135</sup> |
|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| <b>1 Matrixaddition und Matrixmultiplikation</b> | Matrizenalgebra; Transposition; algebraische Eigenschaften                                      | motiviere Matrixmultiplikation; drei Sichten des Produktes $A * B$ : 1) als Spalten-Linearkombination, 2) als Zeilen-Linearkombination, 3) als Summe äußerer Produkte | 3                   |
| <b>2 Lineare Gleichungssysteme</b>               | Gauss-Eliminierung; Elementarmatrizen. Existenz- und Eindeutigkeit der Lösungen. Matrixinverse. | reihenreduzierte Eckform „rref“; interpretiert als LU-Faktorisierung                                                                                                  | 4                   |

<sup>131</sup>„Konzepte werden ohne substanzielle Verbindung mit der Vorerfahrung der Studenten eingeführt [...] und ohne signifikante Beispiele oder Anwendungen.“, vgl. [27, S. 40].

<sup>132</sup>CARLSON [27, S. 41] berichtet von Erfahrungen seitens leitender Manager aus Industrie und Wirtschaft, auf die abstrakte Einführungskurse in Lineare Algebra *'turning off'* wirkten, d. h. zum Abschalten und Aussteigen führten.

<sup>133</sup>CHANG [29, S. 25] vom Unternehmen SILICON GRAPHICS berichtet von der Gestaltung von Trainingskursen seitens seiner Firma: „Diese Kurse sind teuer (\$ 1000 und mehr für 2-3 Tage), so dass die teilnehmenden Firmen nur ihre fähigsten Mitarbeiter schicken. Unsere Instrukturen gehen aber erfahrungsgemäß davon aus, dass sich die Teilnehmer an ihren Lineare Algebra-Kurs nicht erinnern. Sogar die Multiplikation von Matrizen wird daher gelehrt oder erinnert. Für mich ist das schockierend.“

<sup>134</sup>also in rund 1400 Minuten; eine 4-stündige Anfängervorlesung im deutschsprachigen Raum hat mit ca.  $13 \times 2 \times 90 \text{ min} = 2340$  Minuten eine 1.6-fache Zeitspanne zur Verfügung. Der Grundkurs-Zeitrahmen in NRW zum Thema umfasst ca.  $30 \times 3 \times 45 \text{ min} = 4050$  Minuten, d. h. ein ca. 2.9-faches Zeitdeputat.

<sup>135</sup>angegeben als Anzahl an Lehrveranstaltungen

|          |                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                              |     |
|----------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>3</b> | <b>Determinanten</b>                               | Cofaktor-Entwicklung; Zeilenoperationen; Multiplikationsatz; Cramer-Regel                                                                                                                                                                                                                                                | $\det$ bekannt aus 2x2- und 3x3-LGS; von dort die elementaren Eigenschaften ableiten; formale Verifikationen vermeiden                       | 2–3 |
| <b>4</b> | <b>Eigenschaften des <math>\mathbb{R}^n</math></b> | Vektoraddition, Multiplikation mit Skalaren. Linearkombinationen; lineare (Un)Abhängigkeit. Basen. Unterräume: Spann, Dimension, Zeilen- und Spaltenraum, Kern. Matrizen als lineare Abbildungen. Rank. Lösungstheorie für LGS. Skalarprodukt: Länge, Orthogonalität, ortho <sup>gonale</sup> / <sub>normale</sub> Basen | $\mathbb{R}^n$ als Menge von n-Tuplen einführen, nicht als formalen Vektorraum. Inhalte mit starker geometrischer Akzentuierung präsentieren | 7–8 |
| <b>5</b> | <b>Eigenwerte und Eigenvektoren</b>                | Gleichung $Ax = \lambda x$ ; charakteristisches Polynom und algebraische Multiplizität; Eigenräume und geometrische Multiplizität; Ähnlichkeit und Diagonalisierung (Betonung auf $AP = PD$ ); symmetrische Matrizen und orthogonale Diagonalisierung, quadratische Formen                                               | Eigenwerte wichtig bei vielen Anwendungen; ausreichend Zeit bereitstellen (!); über geometrische Beispiele anbahnen                          | 6   |
| <b>6</b> | <b>Ergänzungen zur Orthogonalität</b>              | Orthogonalprojektion auf Unterraum; Gram-Schmidt(GS)-Orthogonalisierung; Kleinste-Quadrate-Lösung von inkonsistenten LGS                                                                                                                                                                                                 | GS als QR-Faktorisierung interpretieren; Anwendungen auf Datenfit                                                                            | 4   |
| <b>7</b> | <b>(Ergänzungen)</b>                               | abstrakte VRe; lineare Transformationen; Kongruenz von Matrizen; Singulärwertzerlegung (SVD)                                                                                                                                                                                                                             | Anwendungen auf Markov-Ketten, IO-Modelle, Rekurrenzgleichungen, Differentialgleichungen, lineare Optimierung                                | ?   |

Tabelle 3.7: LACSG-Empfehlungen für ein erstes universitäres Kerncurriculum in Linearer Algebra. Im Folgenden benutzen wir die *Legende*  $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ M & G & D & V & E & O & T & A \end{matrix}$  für die thematische Reihenfolge.

Aus schulischer Sicht sind die Empfehlungen (LA2)...(LA4) relevant sowie die Themen (T1), (T2), (T4) und (T6). Zur Begründung der Empfehlung LA2 (*Matrix-Orientiertheit*) wird argumentiert, dass Matrizen ein „wesentliches Werkzeug für Industriewissenschaftler“<sup>136</sup> seien. Es solcher Kurs könne zudem „von konkreten, und in manchen Fällen praktischen Beispielen zur Entwicklung allgemeiner Konzepte und Prinzipien voranschreiten bis zur begleitenden Theorie, welche die Lineare Algebra vereinfacht, durchsichtig, mächtig und nützlich macht.“, vgl. [a. a. O., S. 55]. Die explizit didaktische Empfehlung LA3 (*Bedürfnis-Orientierung*) ist für ein universitäres Curriculum ungewöhnlich und basiert wesentlich auf den Überlegungen von HAREL (im Anschluss an VINNER). Insbesondere sollen mathematische Aktivitäten wie Problemlösen, Hypothesenbildung und Peer-Kommunikationen Platz

<sup>136</sup> vgl. [a. a. O., S. 54]

finden können. Empfehlung LA4 (*Technologie-Orientierung*) zielt auf den Einsatz von numerischen bzw. symbolischen Mathematiksystemen wie MATLAB oder MAPLE in Übungs- bzw. Hausaufgaben oder Projekten. Es sollte keine *Programmiererfahrung vorausgesetzt* werden.

### Drei didaktische LACSG-Prinzipien: Konkretheit - Bedürfnis - Generalisierbarkeit

Die didaktische Konzeption der LACSG-Empfehlungen beruht wesentlich auf drei didaktischen Leitvorstellungen, die von HAREL als Teilnehmer der Arbeitsgruppe formuliert und als *Konkretheits-Prinzip*, *Bedürfnis-Prinzip* und *Verallgemeinerbarkeits-Prinzip* bezeichnet werden. Dadurch gehen die didaktischen Konzepte der cDcI<sup>137</sup>-Theorie von TALL & VINNER<sup>138</sup> in die Design-Überlegungen eines ersten Lineare Algebra-Kurses explizit mit ein.

1. HAREL schlägt in [118] einen schrittweisen Einstieg in die Lineare Algebra vor, wobei die Vermittlung grundlegender, geometrisch orientierter Kernideen der Linearen Algebra bereits in der Schulmathematik erfolgen sollte. Auf diesen Kenntnissen sollte die hochschulische Lineare Algebra später aufbauen. Reichhaltige und stabile Konzeptvorstellungen zu den Begriffen *Lineare Abhängigkeit*, *Spann*, *Vektorraum* und *Lineare Abbildung* sollten dabei im Umkreis von linearen Gleichungssystemen und analytischer Geometrie bereits auf der Schule erworben werden, vgl. [a. a. O., S. 178]. HAREL empfiehlt dabei die Orientierung des Begriffserwerbs an drei didaktischen Leitprinzipien.

**K: Konkretheits-Prinzip:** Begriffliche Konzepte, die in der abstrakten Sprache der Linearen Algebra formuliert werden sollen, sollten „*vorher den Status von konzeptuellen Entitäten in den Augen der Schüler erreicht haben*“, vgl. [a. a. O., S. 273].

Z. B. sollte eine *Matrix* als multidimensionales Objekt zur Erfassung von Wahrscheinlichkeits- oder Preisvektoren als mentale Entität verstanden und folglich als *ein* Input manipuliert werden können. HAREL warnt hierbei vor einer Gefahr, die seiner Meinung nach bei der Einführung konkret-geometrischer (z. B. Vektor-) Konzepte *vor* der zugehörigen abstrakt-algebraischen besteht: Verbleibt nämlich die Vorstellung der Lernperson im anschauungsgeometrischen Kontext, so können z. B. symbolisch-abstrakt gemeinte Skizzen<sup>139</sup> als aktuelles Objekt der Betrachtung missverstanden<sup>140</sup> werden – anstatt lediglich als Repräsentation einer abstrakten Situation aufgefasst zu werden, vgl. [a.a.O., S. 185].

<sup>137</sup>„cDcI“ steht im Folgenden oft kurz für „concept definition vs concept image“

<sup>138</sup>Die Nähe zu der APOS-Theorie von DUBINSKY et al. wird nicht erwähnt; man kann mutmaßen, ob dies aus der Nutzung (empfehlung) für MOLER's MatLAB statt DUBINSKIY's ISetL durch HAREL herrührt.

<sup>139</sup>wie die Projektion auf eine Ebene, vgl. z. B. BRÖCKER[22, S. 8 od. 31ff] oder JÄNICH [132]

<sup>140</sup>Ähnlich heißt es bei SIERPINSKA [187, S. 229]: „Visualisierungen, die vom Lehrer angeboten werden, werden von den Studenten holistisch aufgefasst ohne den Versuch zu machen zwischen den mathematisch relevanten Besonderheiten zu diskriminieren“ [...]. und weiter: „Es reicht nicht, die strukturellen Inhalte durch Arbeit in niederen Dimensionen oder durch Visualisierungen konkreter zu machen. Tatsächlich sind Veranschaulichungen per se problematisch; sie können zu irrelevanten Interpretationen führen, die das Verständnis erschweren anstatt zu erleichtern.“, vgl. [a. a. O., S. 244].



**B: Bedürfnis-Prinzip:** Damit verständnisorientiert gelernt wird, sollten Lernende „*ein Bedürfnis dafür sehen, was sie lernen sollen.*“<sup>141</sup>

Nach HARELS Ansicht sind z. B. die Axiome eines abstrakten Vektorraumes  $V$  aus dem Modell des  $\mathbb{R}^n$  deshalb nicht sinnvoll extrahierbar, da die Eigenschaften des  $\mathbb{R}^n$  selbst-evident sind und daher kein intellektuelles Bedürfnis zur Ausbildung eines vereinheitlichenden linear-algebraischen Konzeptes auslösen können<sup>142</sup>.

Dagegen seien theoretische Lösungsüberlegungen, wie z. B. die nach der Eindeutigkeit der Lösung der abstrakten Gleichung  $AX = B$  motivierbar, wenn verstanden ist, *warum* die Gleichung  $AX = B$  als Vektorgleichung geschrieben werden kann und *warum* die Relation zwischen  $B$  und den Spalten von  $A$  wichtig ist und daher die abstrakte Begriffsbildung *Linearkombination* „Sinn macht“. Auch können nach HAREL (gezielte) kognitive Konflikte als Mittel der Bedürfnisauslösung eingesetzt werden.

**V: Verallgemeinerungs-Prinzip:** „*Wenn sich die Instruktion mit einem 'konkreten' Modell befasst, d. h. mit einem Modell, welches dem Konkretheitsprinzip genügt, dann sollten die Aktivitäten innerhalb des Modells die Verallgemeinerung der Konzepte erlauben und fördern*“, vgl. [a. a. O., S. 187].

Z. B. sollte nach seiner Meinung eine Basis im  $\mathbb{R}^3$  als minimales Erzeugendensystem<sup>143</sup> definiert werden anstatt als Menge von drei linear-unabhängiger Vektoren, da das erste Konzept besser verallgemeinerbar sei.

Während sich das *Konkretheitsprinzip* aus der Perspektive der APOS-Theorie als eine Betonung der A<sup>→</sup>P-Phase vor der möglichen Ablösung eines mentalen Objektes in der O-Phase und seine Einbettung in die subjektive Ontologie (Begriffsnetz) der Lernperson verstehen lässt, verweist das *Verallgemeinerungsprinzip* auf die oben diskutierten Abstraktionsprozesse der reflexiven bzw. logischen Abstraktion und die Notwendigkeit der zugehörigen Dekontextualisierung und *Dekonkretisierung*.

Das *Bedürfnisprinzip* als psychologisches Prinzip spannt sich dabei als instruktive Verklammerung zwischen Konkretheit und Abstraktheit<sup>144</sup> im Rahmen der anzubahrenden Begriffsbildung. HAREL diskutiert dieses Leitprinzip schon früher im Zusammenhang mit *Überlegungen zur Konstruktion wirkungsvoller Konzept-Vorstellungen* in [117], die die LACSG-Empfehlungen didaktisch und kognitionspsychologisch auf die cDcI-Lerntheorie und epistemologische Forschungsbefunde über das Lehren und Lernen von mathematischen Konzepten zu gründen versucht. Insbesondere beziehen die LACSG-Empfehlungen nach [118, S. 177] durch die starke *Betonung geometrischer Interpretationen und konkreter Modellierungen* die bekannt gewordenen Bedürfnisse und Interessen der Studenten als Lernpersonen mit ein. Während die LACSG-Empfehlungen für die universitäre Ausbildung die Betonung auf verständnisfördernde Beweise legt, wird *für die Schulmathematik der „Einbezug basaler*

<sup>141</sup>Mit „Bedürfnis“ ist dabei ein intellektuelles Bedürfnis gemeint – im Gegensatz zu einem sozialen oder ökonomischen. [a. a. O., S. 185]

<sup>142</sup>vgl. den Vorschlag von DORIER et al. in [52, S. 158]

<sup>143</sup>Nach den Untersuchungen von P. BARDY [52, S. 256] wurde allerdings insbesondere der Begriff des Erzeugendensystems von Studenten „überhaupt nicht verstanden“.

<sup>144</sup>vgl. dazu auch die Überlegungen von KLAPSINO & GRAY in [137]

*geometrisch orientierter Ideen der Linearen Algebra*<sup>145</sup> angeraten. Ziel ist es dabei, die universitäre Lineare Algebra als natürliche Fortsetzung *an schulisch vorgeprägte robuste Konzept-Vorstellungen anzukoppeln*.

2. Aus epistemologischer Sicht interessieren hier daher folgende Fragen, die für eine Konstruktion stabiler Wissens Elemente (insbesondere mit einem CAS) von Bedeutung sind:

- Was ist eine *wirkungsvolle Konzeptvorstellung*, die sich ausgehend von einem konkreten Kontext durch einen Generalisierungsprozess ausprägen soll?
- Wie wird eine wirkungsvolle Konzept-Vorstellung („Grundvorstellung“) angebahnt?
- Was ist aus HARELS Sicht der Nutzen eines numerischen CAS beim Konzept-Aufbau?
- Worin bestehen epistemologische Barrieren beim Konzeptaufbau?
- Welche Lehrformen werden zum Aufbau wirkungsvoller Konzeptvorstellungen empfohlen?

*Ein mathematisches Konzept vertieft verstehen* zu können, bedeutet nach HAREL eine *effektive Konzept-Vorstellung* (engl. effective concept image, „ecI“) eines Konzeptes entwickelt zu haben. Dazu heißt es explizierend in [117, S. 108 ff]:

Eine *Konzept-Definition*<sup>146</sup> gemäß VINNER ist eine verbale Definition, die im Lehrbuch aufgeschrieben oder an der Tafel durch den Instruktor angeschrieben erscheint und die das Konzept in einer nicht-zirkulären Weise korrekt beschreibt. Eine *Konzept-Vorstellung*<sup>147</sup> [...] ist ein mentales Schema, ein Netzwerk, bestehend aus (a) dem, was im Verstand der Lernperson mit dem Konzept assoziiert ist und (b) dem, was die Person in Bezug auf das Konzept tun kann. Es kann z. B. Analogien und Beziehungen zu anderen Konzepten enthalten, Sätze über oder in Bezug zu dem Konzept, Beispiele und Gegenbeispiele, Lösungswege für gewisse Probleme etc. Es sollte der Erwähnung wert sein, dass nicht notwendigerweise räumliche Visualisierungen enthalten sein müssen wie das Wort 'image' suggerieren könnte. Tatsächlich wurde herausgefunden, dass einige Menschen effektive Konzept-Vorstellungen besitzen und doch ist ihre Denkweise rein analytisch und nicht räumlich visuell.

Diese Beschreibung trifft den theoretischen Rahmen der hier zugrunde gelegten APOS-cDcI-Theorie. Als *wichtigster Indikator* für ein erworbenes wirkungsvolles Verständnis eines Konzeptes gilt dabei nach [117, S. 109] die Fähigkeit, mathematische Problemstellungen mit Bezug zum Konzept zu lösen, wobei dem Lerner sowohl bewusst sein muss, „was zu tun ist als auch warum“. Nach HAREL gilt es daher *nicht als Verständnis, wenn lediglich die zugehörige Konzept-Definition erinnernd memoriert werden kann* - vielmehr muss diese auch nach einem natürlichen Vergessensprozess wieder eigenständig rekonstruiert werden können. Weitere Indizien sind die mündliche und schriftliche *Kommunizierung der Konzeptvorstellung in eigenen Worten* (ohne Bezug auf die formale Definition), die *Fähigkeit*

<sup>145</sup>[a. a. O., S. 178]

<sup>146</sup>engl.: concept definition

<sup>147</sup>engl.: concept image

in allgemeinen Begriffen denken zu können und die Fähigkeit zur Vernetzung der Ideen - daher auch die Bezeichnung „Verallgemeinerung“sprinzip.

Die Konstruktion effektiver verständnisorientierter Konzeptvorstellungen erfolgt nach dem Konkretheitsprinzip in vertrauten, 'konkreten' Kontexten. „Solche Kontexte wirken sowohl als Anker für den Aufbau adäquater Konzeptvorstellungen als auch als Sprungbrett für weitere Abstraktionen“, vgl. [a. a. O., S. 111]. Dies allerdings führt zu der *epistemologischen Barriere der Kontextgebundenheit* und zu dem Phänomen, dass Schüler ein Konzept in einem speziellen Kontext verstehen können, aber nicht in einem anderen. Erst das Verallgemeinerungsprinzip fördert hier die notwendige Flexibilität und stößt Abstraktionsprozesse an, die auch zur Vernetzung der isolierten Konzepte führen und die „einzigartige multiperspektivische Natur der Linearen Algebra“ [117, S. 112] erahnen lassen.

**3.** Wirksame Konzeptvorstellungen können innerhalb der mathematischen Fachsprache insbesondere durch *Beweise als konventionelle Form rationaler Argumentation* erworben werden, denn in Beweisen werden begriffliche Zusammenhänge und Abhängigkeiten, Bezugnehmende Sätze und relevante Eigenschaften mathematischer Objekte (von Experten) zu schlüssigen Begründungen verwoben: „Ohne ein Verständnis der Überlegungen, die hinter der Konstruktion eines Konzeptes liegen, würden Studenten am Ende Algorithmen memorieren und Definitionen rezitieren“, vgl. [a. a. O., S. 115]. Es handelt sich aber um fachsprachliche Diskurse auf thematisiertem Schemaniveau (S-Ebene) unter Beachtung logischer Schlussregeln, d. h. die Argumentation verläuft auf der höheren Ebene abstrakter Vernetzungen von Konzepten und setzt daher gefestigte Prozess- und Objektvorstellungen voraus. Daher kann in fachsprachlichen Beweisführungen der Linearen Algebra durch die Formalismusbarriere ein angemessenes Beweisverständnis verstellt werden:

Anstatt allmählich die Vorstellungen der Studenten davon zu verfeinern, was Evidenz in der Mathematik ausmacht, drängen wir ihnen Beweismethoden und Implikationsregeln auf, die in vielen Fällen nicht zu dem gehört, was sie überzeugt. [...] wir präsentieren Beweise als wohlformulierte, in vielen Fällen selbstverständliche Sätze anstatt nach Erkundungen und Vermutungen zu fragen. In der Folge lernen Studenten nicht, dass Beweise vor allem **überzeugende** Argumente sind, dass Beweise und Sätze ein Produkt menschlicher Aktivitäten sind, woran sie teilnehmen können und sollten und dass es ihre Verantwortung ist, Beweise zu lesen und die dahinterliegende Motivation zu verstehen.

HARELS didaktische Vorschläge zur *Förderung von Beweisverständnissen zur Anbahnung von effektiven Konzeptverständnissen* sehen daher u. a. vor, dass Schüler/Studenten

- „einen aktiven Anteil an der Konstruktion von Bezügen zwischen Ideen und bei der Produktion der Rechtfertigung“ erhalten sollten, vgl. [a. a. O., S. 120]
- „Hilfen bekommen, Beweise auf ihren eigenen Intuitionen aufzubauen“
- überhaupt „ermutigt werden, Beweise zu lesen“
- „lernen, dass das Verständnis eines Beweises mehr ist als das Verständnis jedes einzelnen Schrittes“ [a. a. O., S. 123]

- in Hausaufgaben, Klassenübungen und mündlichen wie schriftlichen Prüfungen *neue mathematische Sätze zusammen mit ihren Beweisen vorgelegt*<sup>148</sup> bekommen mit anschließenden „Fragestellungen, die nur von denen beantwortet werden können, die Satz und Beweis gelesen und verstanden haben.“

Ziel ist, auf die *Beweisargumentation* selbst zu fokussieren anstatt wie üblich nur die *Satzaussage* anhand von Beispielen oder Anwendungsaufgaben zu üben.

4. Vorschläge der didaktischen Umsetzung der obigen drei Prinzipien betreffen die *Gestaltung von Lehrbüchern* ebenso wie den Einsatz von mathematischer Software sowie die unterrichtlichen Artikulationsformen. Nach einer kurzen Kritik am Aufbau bekannter Lehrwerke zur Linearen Algebra zieht HAREL die Konsequenz: „Lehrbücher sollten bei Studenten einen Sinn dafür entwickeln, dass die elementare Lineare Algebra um einige wenige zentrale und vereinheitlichende Ideen strukturiert ist“, vgl. [a.a.O., S. 122].

5. Der verständnisfördernde Zweck der *Nutzung eines numerischen matrizenorientierten CAS* im Unterricht besteht aus HARELS Sicht darin, dass

[...] die Schüler im Schreiben von MATLAB Programmen lernen Probleme zu repräsentieren und ihre Lösungen in der Sprache der Vektoren und Matrizen zu designen und zu interpretieren. Dabei müssen sie sich die Aktionen *vorstellen*, die vom Computer als Antwort auf ihre Befehle ausgeführt werden und die Ergebnisse dieser Aktionen *antizipieren*. Diese mentalen Aktivitäten von *Imagination* und *Antizipation* involvieren mentale Manipulationen von Vektoren und Matrizen und konstituieren eine wichtige Komponente der linearen Algebra. [117, S. 117]

6. Als zur Umsetzung des Bedürfnisprinzips geeignete unterrichtliche Lehrform rät HAREL zu einer flexiblen Mischung bekannter Artikulationsformen, wobei er sich von einseitigen Unterrichtsmethoden<sup>149</sup> explizit distanziert:

Der wesentliche Faktor in der Anwendung des Bedürfnisprinzips ist die Verwicklung der Schüler in Problemstellungen, die theoretisch orientiert sind und ihr Verständnis und ihre Kreativität ebenso herausfordern wie die aktive Teilhabe an der Konstruktion von Definitionen, Sätzen und Beweisen. Die Lehrform, die zu diesem Ansatz passt, ist [...] eine *Kombination* aus Kleingruppendiskussionen und Teamprojekten, Diskussionen mit der ganzen Klasse und individuellem Lernen, der Einsatz von Technologie und Lehrervorträgen<sup>150</sup> (ja, Lehrervortrag). Der Fokus liegt hier auf der Balance zwischen diesen Lehrformen - einer Balance, die jeder einzelne Lehrer(in) für sich selbst finden muss. Ich betone diese Kombination der Lehrstile wider den Fanatismus bezüglich eines einzigen Lehrstils, heutzutage entweder der Lehrervortrag oder das kooperative Lernen. [a. a. O., S. 124]

7. Möchte man die schulische Lineare Algebra und Analytische Geometrie aus dem methodischen und konzeptionellen Blickwinkel der LACSG-Empfehlungen unterrichten, so ist die Konstruktion erfolgreicher Konzeptvorstellungen nach HAREL in zweifacher Hinsicht bedroht. *Erstens* benötigt der Aufbau einer effektiven Konzeptvorstellung eine angemessene

<sup>148</sup>Die Idee stammt von Carl COWEN, vgl. [35].

<sup>149</sup>Diese Empfehlung deckt sich mit den empirischen Befunden von WEINERT bzw. den PISA-Empfehlungen.

<sup>150</sup>im Original: lecturing

Zeituteilung, denn ihre „Genese ist komplex“ und „ein langer und schmerzhafter Prozess“. Wegen der zeitlichen Dominanz der Analysis fehlt aber i. Allg. die notwendige Lernzeit für die zentralen Konzepte der Linearen Algebra, in der Folge werden von den Lernenden in der Schule bzw. der Universität keine adäquaten Konzeptvorstellungen aufgebaut. Zu raten sei daher eine Reduzierung des Analysisanteils in der Schule. *Zweitens* besteht der einzige innermathematische Bezug zur Linearen Algebra auf der Schule in der Behandlung von linearen Gleichungssystemen. Dabei würden aber *Matrizen als Bindeglied für alle Themen vernachlässigt*.

### Die Rezeption der LACSG-Empfehlungen

Die obigen Empfehlungen der LACSG fand ihren Niederschlag in einer Reihe von Standardlehrbüchern. Eine kleine Auswahl breit akzeptierter Lehrwerke mit z. T. hohen Auflagen zeigt die folgende Tabelle 3.8. Gelistet werden dabei die Themenstränge, der Umfang (incl. Einleitung und Anhängen), die Anzahl der ausgeführten Beispiele, Übungen und Abbildungen sowie das zugrunde liegende CAS.

| <i>Autor</i>  | <i>Themenstrang</i> | <i>Seiten</i> | <i>Bsp-e; Üb.; Abb.</i> | <i>CAS</i>  |
|---------------|---------------------|---------------|-------------------------|-------------|
| DEEBA[45]     | GMVOTE              | 13+316        | 205; 217; CAS           | Maple       |
| HILL[125]     | $G^{+M}DVTEN$       | 17+445+67     | 220; 1604; 58           | Derive      |
| LARSON[145]   | GMDVOTE             | 14+435+61     | 283; 2294; 108          |             |
| LAY[146]      | $G^{+T}MDVEOQ$      | 20+486+58+12  | 250; 1700               | MatLAB u.a. |
| STRANG [193]  | vGVODETAN           | 8+503         | 165; 1161; 47           | MatLAB u.a. |
| SZABO[194]    | GMDVTEO             | 23+657+131    | 351; 982; 39            | Maple       |
| WILLIAMS[210] | GMDVOVTTN           | 19+512+44     | 260; 1373; 106          | MatLAB      |

Tabelle 3.8: LACSG-Lehrwerke mit Themenfolge. G: Lineare Gleichungssysteme M: Matrizenalgebra D: Determinanten V: Vektorräume E: Eigenwerte O: Orthogonalität Q: Quadratische Formen T: Lineare Transformationen v: Vektorrechnung A: Anwendungen N: Numerik

Dabei ist z. B. in den Büchern von DEEBA, HILL und SZABO das CAS didaktisch voll integriert. Das geht in DEEBA allerdings so weit, dass im Drucktext mathematische Notationen vollständig fehlen, weil sie nach Ausführen im CAS automatisch generiert werden. Auf Details können wir hier aber nicht eingehen.

### Kritik an den LACSG-Empfehlungen

Wesentliche Kritik an den Empfehlungen der LACSG bezieht sich u. a. auf die explizite Matrizenorientierung, den fehlenden Fokus auf die reflexive Abstraktion sowie auf einige Nachteile bei der Nutzung eines numerischen Mathematik-Paketes wie MatLAB.

**1. Die Matrizen–Orientierung als kognitiver Kompromiss.** Soll der Lernprozess auf die Konstruktion konzeptionell vernetzten Wissens abzielen und beabsichtigt man die Lineare Algebra auch als vereinheitlichende (inner)mathematische Konzept-Sprache zu entwickeln, so könnte man gegen die LACSG-Empfehlungen einwenden, dass die starke Kalkülhaltigkeit des Curriculums (als Service für die Anwendungsdisziplinen) den Erwerb abstrakt-struktureller Konzepte der Linearen Algebra in den Hintergrund drängen bzw. behindern könnte. Die Frage ist daher:

- *Ermöglicht ein matrix-orientierter Kurs in Linearer Algebra überhaupt den sinnhaften Aufbau konzeptionellen Wissens?*

VINNER's [202] Überlegungen zur Beantwortung dieser Frage gehen aus von der *Kluft zwischen dem Lehr-Bemühen von Mathematik-Lehrern um konzeptionelle sinnvolle Begriffsverständnisse* bei ihren Studenten und deren *überwiegende Lern-Erfahrungen* (z. B. aus der Schule oder Anfängerkursen) *mit prozeduralem Lernen* und der damit verfestigten Beliefs von Mathematik als „einer Ansammlung inhaltsleerer und unverbundener Regeln, die man kennen sollte, um sie in relevanten Situationen anzuwenden“, vgl. [a. a. O., S. 156]. Auf Grund dieser Vorerfahrungen und der daraus resultierenden Erwartungshaltung der Studenten wäre ein unvermittelt abstrakter Zugang zur Linearen Algebra für die Studenten epistemologisch und lernpsychologisch unvorbereitet und könnte den berichteten mentalen Ausstieg verursachen. VINNER *interpretiert daher den LACSG-Vorschlag* eines matrix-orientierten Erstkurses *sensibel als einen Kompromiss zwischen einem (psychologisch sinnvollen) prozedural-orientierten und einem (mathematisch wünschenswerten) konzeptuell-orientierten Zugang* und hält ihn insofern für strategisch angemessen:

Bei einem solchen Zugang<sup>151</sup> würden sich die Konzepte vom Geometrischen (Vektoren in der Euklidischen Ebene oder Raum) zum Algebraischen ( $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ ) und von den Spezialfällen (Paare oder Tripel reeller Zahlen, ihrer Addition und ihrer Multiplikation mit Skalaren) zum allgemeinen Fall ( $n$ -Tupel reeller Zahlen, ihrer Addition und ihrer Multiplikation mit Skalaren) verschieben. Der Übergang von  $\mathbb{R}^2$  zum  $\mathbb{R}^n$  kann den Studenten als Übung im *Generalisieren* gestellt werden. Das Unangenehme bei diesem Zugang ist, dass die Lernenden dafür intellektuell noch nicht vorbereitet sind. Mit ihren aktuellen Vorstellungen über Mathematik besteht eine mathematische Aufgabe oder Aktivität im Lösen einer Gleichung oder der Ausführung algebraischer Operationen. [...] Ihre Erwartungen an einen Mathematikurs würden nicht erfüllt, wenn ihnen solche mathematischen Ideen präsentiert würden. [...] Nachzudenken, welches Konzept eine Verallgemeinerung eines Paares reeller Zahlen ist und wie die Addition von  $n$ -Tupeln definiert werden sollte [...] sind keine mathematischen Fragen oder mathematischen Aktivitäten für diese Studenten. [...] Ganz im Gegenteil: Sie könnten sogar eine Abneigung gegen einen konzeptualen Zugang entwickeln, der ihnen vom Lehrer angeboten wird und diesen als „Philosophie“ statt Mathematik betrachten und als nutzlos für alle praktischen Zwecke ansehen. [a. a. O., S. 157]

Zieht man mit VINNER zur Erklärung der prozeduralen Fixierung auf Lernerseite SKEMP's Dichotomie zwischen „relationalem Verständnis“ und „instrumentalem Verständnis“ heran, d. h. der Unterscheidung zwischen dem *Wissen, wie* man einen Algorithmus anwendet und dem *Wissen, warum* der Algorithmus das Erwartete liefert, so erkennt man, dass die

<sup>151</sup>nämlich vom  $\mathbb{R}^n$  per Abstraktion zum abstrakten Vektorraum  $V$  zu gelangen

früheren Lernerfahrungen von Studenten und Schülern vielfach auf einem instrumentalen Verständnis beruhen und kein relationales Verstehen ausgebildet wurde. *Es ist diese Barriere der Gewöhnung an instrumentale Verstehensprozesse, welche einem abrupten Umschwenken auf ein relationales rein-konzeptuales Verstehen in einem abstrakt geführten Kurs mental quersteht.* Diese Beliefs können sich so verfestigen, dass es „eine für Mathematiker traurige Tatsache [ist], dass manche Menschen an relationalem Verständnis nicht interessiert sind.“ [202, S. 158].

Aus der Sicht der APOS-Theorie und mit HARELS Konkretheitsprinzip können wir alternativ argumentieren, dass Fixierungen auf instrumentales Verständnis auf übermäßig extensiven konkreten AP-Handlungsphasen beruhen können, wenn im Anschluss das Bemühen um ein relationales Verstehen auf der höheren abstrakteren Betrachtungsebene zu kurz kommt oder ganz unterbleibt, d. h. wenn der reflexive Abstraktionsschritt „ $P \rightsquigarrow O$ “ in Richtung einer Konzeptkonstruktion bzw. Schemavorstellung nicht adäquat vollzogen wird, kurz:

?

$$\text{AP}_{\text{instrumental}}^{(\text{wie?}) \text{ prozedural}} \rightsquigarrow \text{OS}_{\text{relational}}^{(\text{warum?}) \text{ konzeptional}} \left| \begin{array}{l} \text{Vinner} \\ \text{Skemp} \end{array} \right.$$

VINNER formuliert dies wie folgt:

[..] es ist wichtig klar zu machen, dass die konzeptbetonende Behandlung in keiner Weise die Elimination von Prozeduren aus Mathematik-Lehrgängen impliziert. Der konzeptuale Zugang erkennt die Bedeutung und Wichtigkeit von Prozeduren und gesteht zu, dass in vielen Fällen ein Konzeptverständnis unmöglich ist ohne die Meisterung gewisser Prozeduren<sup>152</sup>. Der konzeptuale Zugang wendet sich nur gegen die mechanische Anwendung von Prozeduren, deren Resultate für den Lernenden absolut sinnleer bleiben. [a. a. O., S. 158]

Ein matrix-orientierter Einführungskurs in die Lineare Algebra wird daher im Sinne der APOS-Theorie zwar auf die konkrete prozessuale („prozedurale“) Fundierung der AP-Teile der Lerntrajektorien bedacht sein, dabei aber die absichtsvolle Gründung mentaler Objekte und ihrer Beziehungen (also „relationale“ Konzeptvorstellungen) anstreben. In VINNERS Worten:

Jedoch sollte der Keim eines konzeptualen Zugangs in diesem ersten matrix-orientierten Zugang gepflanzt werden. Als Didaktiker möchte ich gerne die Böden beschreiben, in denen dieses Saatgut eines konzeptualen Zugangs ausgebracht werden sollte. [a. a. O., S. 159]

*Anmerkungen.*

- a. Wie es die französische Schule um BARDY bzw. ROGALSKI fordert, ist auch nach VINNER's Ansicht für die metakognitiven Aktivitäten zum Aufbau von vernetzten Konzeptvorstellungen bewusst geplante Lernzeit zur Verfügung zu stellen:

<sup>152</sup>CHANG [29, S. 25] formuliert ähnlich: „Ich glaube, der erste Kurs in Linearer Algebra sollte matrix-orientiert und sehr praktisch sein. Meine Erfahrung ist: Wenn man lernt wie [etwas gemacht wird; wL], dann lernt man vielleicht auch warum [es so gemacht wird]. Die Regeln und Rezepte für die Matrixmultiplikation bilden die Mittel, in die man seine Intuition einspeisen kann. Ohne das Wie zu kennen kann sich das Warum nicht einstellen.“

Das Kümern um kognitive Belange der oben beschriebenen Art benötigt in jedem Kurs eine beachtenswerte Menge an Zeit. Daher sind die Optionen entweder Mathematik-Kursen mehr Zeit zu geben oder den Lehrplan 'runter zu schneiden'. *Es ist unmöglich die übliche Themenliste eines typischen Kurs-Lehrplanes [nicht: LACSG] in einer sinnhaltigen Weise zu unterrichten*<sup>153</sup>. Solch eine Liste kann nur 'abgedeckt' werden. [...] Andernfalls bleiben diese *Service-Kurse Lippen-Bekennnis-Kurse* wie sie es in zu vielen Fällen sind. [a. a. O., S. 171]

Die Entwicklung von *Kernlehrplänen* in Deutschland im Nachgang zur OECD-PISA-Studie ist eine Variante dieser durchgängigen Einsicht. Es ist allerdings erstaunlich, dass diese lange bekannten Befunde in der Bildungsadministration ohne erkennbare Konsequenzen blieben. VINNERS ehrliche Einschätzung ist für Schule und Hochschule vergleichbar: „Die Tatsache, dass die Mehrheit der Studenten das Abschlussexamen irgendwie passiert, 'hilft' vielen Dozenten das armselige mathematische Denken ihrer Studenten nicht zu beachten.“ [202, S. 159].

- b. Die Probleme der prozessualen Dominanz sind nicht nur eine Frage des Lehrplans oder des geeigneten Lehrbuches, sondern betreffen die Art des eigentlichen Lehr-Lern-Prozesses. Gerade durch die Nutzung eines *symbolischen* CAS ist der für den Lernprozess notwendige prozedurale Anteil reduzierbar und damit das Zeitfenster für reflexive Prozesse vergrößert. Die aus Anwendungssicht benötigten Prozeduren aus der Linearen Algebra sind zudem minimal: „Mein Eindruck [...] ist, das, was sie wirklich in ihrem Beruf benötigen, ist die Sprache der Linearen Algebra und nicht ihr konzeptueller Rahmen. Was sie wirklich brauchen, sind die Matrixmultiplikation und Determinanten.“, vgl. [a. a. O., S. 158].

**2. Der fehlende Fokus auf die reflexive Abstraktion.** Aus dem Blickwinkel der APOS-Theorie analysiert DUBINSKY [73] die LACSG-Empfehlungen, insbesondere die Matrixorientiertheit des Kerncurriculums, und skizziert einen alternativen Curriculum-Vorschlag, der auf den APOS-Instrumenten wie „das Programmieren in einer mathematisch-orientierten Programmiersprache, dem extensiven Einsatz kooperativen Lernens und der Entwicklung von Alternativen zur Vorlesung-Methode“, vgl. [a. a. O., S. 85] basiert.

DUBINSKYS einleitende Kritik, man möge zunächst Forschungsbefunde<sup>154</sup> vorlegen, die über die subjektiven Berichte aus den LACSG-Foren hinaus die vermutete Erfolglosigkeit von Kursen in Linearer Algebra empirisch absichern und so die wissenschaftliche Notwendigkeit einer Revision zu begründen, darf nach den oben zitierten Untersuchungen der französischen TLAG-Gruppe inzwischen als geleistet angesehen werden.

DUBINSKYS *Haupteinwand gegen die LACSG-Design-Hypothese*, wonach die Anfangsschwierigkeiten der Lerner durch die Konkretheit des Matrizenkalkül überwunden werden könnten, wendet sich dagegen „dass das Ziel eines unterrichtbaren Kurses automatisch dann erreicht ist, wenn Koordinatendarstellung von Vektoren und Linearen Transformationen in

<sup>153</sup>Betonung von mir, wL

<sup>154</sup>„Ich denke[...], einige Leute sollten mit sorgfältigen Studien beauftragt werden, welche die Inadäquatheit der derzeitigen Kurse dokumentieren“. vgl. [a. a. O., S. 86]



der Form von Tupeln und Matrizen betont wird.“, vgl. [a. a. O., S. 89]. Nach seiner Ansicht zielen die studentischen Wünsche nach Konkretheit nämlich eigentlich auf die stärkere Vermittlung von Algorithmen und Prozeduren. Er bestätigt damit die oben zitierte Analyse von VINNER, wonach die Studenten zunächst eine pseudo-konzeptuale Denkhaltung bewahren möchten, die sie von dem Schulunterricht gewöhnt sind:

Unsere Studenten verlangen danach, dass der Stoff in einem Kurs weniger abstrakt und mehr konkret sein soll, also „erdverbundener“. Ich glaube, das, was die Studenten oft wirklich fordern ist, dass wir ihnen mehr Rechenprozeduren geben, die sie imitieren können. [...] Also geben wir ihnen ihre Rezepte und taufen das Anwendungen. [...] Mit einem solchen Curriculum werden die Studenten höchstens lernen Matrizenmanipulationen auszuführen, aber sonst wenig. [a. a. O., S. 90]

Damit würde aber die Barriere des pseudo-konzeptualen Denkens durch die Betonung des instrumentalischen Denkens verfestigt und das angestrebte konzeptual-abstrakte Denken nicht gefördert. Mit HAREL sollte die konkrete Nutzung von Matrizen im Anfangskurs über Lineare Algebra als Ausgangspunkt zu Verallgemeinerungsprozessen angesehen werden, d. h. zur Anbahnung von abstrakten Konzeptvorstellungen – und darin liegen nach der Abstraktionsbarriere die eigentlichen Lern-Schwierigkeiten von Schülern und Studenten. Tatsächlich zieht auch DUBINSKY eine ähnliche Folgerung. Er verdeutlicht seine Überlegungen am Beispiel des Begriffs der linearen Abhängigkeit, wobei er zunächst die mentale Akzeptanz von Zeilen oder Spalten einer Matrix als Objekte sui generis betont:

Eine Zeile und eine Spalte einer Matrix ist für die meisten Studenten eine Liste von Zahlen. Es ist nicht so einfach, dies als ein eigenes Objekt zu verstehen, das zusammen mit anderen solchen Objekten in einer Menge betrachtet werden kann. Ich vermute, dass ein Denken von linearer Abhängigkeit in Termen von Zeilenvektoren das Konzept weder konkreter noch zugänglicher macht. [a. a. O., S. 90]

Letztere Ansicht von DUBINSKY kann man kritisch sehen und dies soll durch das Design<sup>155</sup> einer Lerntrajektorie innerhalb des Matrizenkalküls belegt werden. Richtig ist aber, dass solche Lerntrajektorien vermittelt reflexiver Abstraktionen den notwendigen Durchbruch zu den eigentlichen abstrakten Konzeptbildungen, wie z. B. der linearen Unabhängigkeit, leisten müssen, um den „FUGS“<sup>156</sup>igen Charakter der Sprache der Linearen Algebra auch Novizen bewusst zu machen:

Für mich besteht eine riesige Lücke – nicht mathematisch, sondern didaktisch – zwischen den Schwierigkeiten, die Studenten mit linearer Unabhängigkeit, Basen und Unterräumen haben und den vorgeschlagenen Matrix-Operationen der LACSG. *Nach meiner Ansicht gibt es keinen anderen Weg aus dieser didaktischen Klemme zu kommen als durch Abstraktion.* All diese

<sup>155</sup>„Dies impliziert, dass vor der Erwägung didaktischer Strategien, die spezifischen Konzepte der Linearen Algebra, die Studenten besondere Probleme bereiten, epistemologisch analysiert werden müssen. Damit meine ich, dass Forschung benötigt wird, um diejenigen spezifischen mentalen Konstruktionen zu bestimmen, die ein Lernender machen müsste, um diese Konzepte zu verstehen.“, vgl. [a. a. O., S. 89]. Das ist gerade der Zweck einer genetischen Dekomposition.

<sup>156</sup>Diese bündelnde Notation für die **formalisierenden**, **unifizierenden**, **generalisierenden** und **simplifizierenden** Wirkungen der Linearen Algebra als mathematischer Wissenschaftssprache stammt von ROGALSKI.

Kalkulationen vorzuschlagen kehrt die Probleme nur unter den Teppich. *Was gebraucht wird sind einige Ideen, nicht nur darüber, wie man konkret werden kann, sondern darüber, wie man die Studenten dazu bringt, vom Konkreten zum Abstrakten zu gehen*<sup>157</sup>. [a. a. O., S. 91]

Die Ursachen für die Anfangsschwierigkeiten in Linearer Algebra liegen nach DUBINSKY daher nicht in einem Mangel an Konkretheit, der durch eine intensive Nutzung der Matrizenalgebra beseitigt werden könnte, sondern *am mangelhaften Übergang vom Konkreten zum Abstrakten*. Dies hat nach seiner Ansicht insbesondere drei didaktische Gründe, vgl. [a. a. O., S. 93]:

- die *fehlende Eigenkonstruktion* der Konzeptvorstellungen: „der verbreitete didaktische Ansatz in den meisten Lineare Algebra Kursen ist [...] der, den Studenten über Mathematik zu erzählen und ihnen zu zeigen, wie es geht. [...] Die Studenten verstehen diese Konzepte [daher] nicht, weil sie nicht die Chance geboten bekommen, ihre eigenen Vorstellungen dazu zu konstruieren.“
- die *Formalismus-Barriere*, d. h. die fehlenden aussagen- und prädikatenlogischen sowie mengensprachlichen (inclusive des mangelnden Funktionskonzepts) Kompetenzen: „Meine zweite Quelle hat zu tun mit dem Mangel an Hintergrund-Konzepten, die nicht Teil der Linearen Algebra sind, aber zu deren Lernen wesentlich sind.“ Diese Beobachtungen decken sich mit denen von VINNER und der TLAG.
- das non-konstruktivistische *Design der Lerntrajektorien*; stattdessen:

*Ich schlage nicht vor, dass Studenten ihre eigenen Ideen konstruieren und wir es dabei belassen. Die Art, wie es für die Studenten funktionieren müsste, ist vielmehr: Die Studenten machen Konstruktionen mathematischer Konzepte und dann interagieren sie miteinander und mit dem Lehrer im Kontext der Problemsituation, die der Kurs anbietet. Diese Interaktionen bringen Inkonsistenzen, Widersprüche und Unstimmigkeiten hervor. Die Auflösung dieser Konflikte führt dann zu einem Verständnis auf Seiten der Studenten, das konsistent ist mit dem Verständnis auf Seiten der mathematischen Community.*<sup>158</sup>

DUBINSKYS alternative Kurs-Vorschläge verweisen explizit auf den Ansatz von DORIER et al. über Methoden zur Vermittlung von „vereinheitlichenden und generalisierenden Konzepten“ in der Linearen Algebra und auf HARELS Ansatz der graduellen Abstraktion vom Anschauungsraum<sup>159</sup>. Ein ausgearbeiteter frei zugänglicher Vorschlag nach der APOS-Theorie liegt mit COTTRILL et al. [34] zwischenzeitlich vor.

*Anmerkungen.*

- a. Zwar besteht bei einer tupelorientierten (also: matrizen- und koordinatenorientierten) Einführung in die Lineare Algebra die Gefahr, notwendige konzeptuale Wissenskonstruktionen zu vernachlässigen. Es lassen sich aber adäquate Konzeptvorstellungen sehr

<sup>157</sup>Kursivbetonung von mir, wL

<sup>158</sup>Kursivsatz von mir, wL

<sup>159</sup>Ein analoges Konzept findet sich in BANCHOFF & WERMER [10].

erfolgreich mit den Teilobjekten (Zeile, Spalte, Unterräume, etc.) einer Matrix anbahnen, wie z. B. STRANG [193], LAY [146] oder JÄNICH [131] zeigen. Die Matrixbasiertheit führt insbesondere auf der Schule nicht notwendigerweise zur Konzeptvernachlässigung, weil – wie oben ausgeführt – die wesentlichen epistemologischen Barrieren der Linearen Algebra auch hier nachweisbar und behebbbar sind.

- b. DUBINSKY rät den Abstraktionsprozess zu den Begriffen Basis etc. z. B. über die lineare Lösungstheorie für lineare DGLn anzubahnen:

Man kann begründet erwarten, dass die Studenten diesen sehr schönen Satz bis zu dem Effekt entdecken können, dass der Ausdruck einer Anfangsbedingung als Linearkombination der anderen beiden (was schnell und mechanisch erfolgen kann) bereits die richtigen Koeffizienten für den Ausdruck der ganzen Funktion als Linearkombination der anderen zwei Lösungsfunktionen liefert – gültig auf dem ganzen Definitionsbereich. Die Studenten würden den Effekt dieser Linearkombination auf ihren Graphen sehen. Sogar wenn sie den Satz nicht entdecken, wird die Suche danach ihr Verständnis steigern, falls einer der Kommilitonen oder [...] sogar der Dozent es dann erklärt. [a. a. O., S. 104]

Das ist auf Schulniveau nicht machbar. Alternativen werden unten aufgezeigt.

**3. Nachteile der Nutzung eines numerischen Mathematik-Paketes.** Die LACSG-Empfehlungen zitieren häufig das *numerische* Mathematik-Paket **MatLab** von C. MOLER. Dies könnte auf der Beteiligung von MOLER an dem LACSG-Entwurf beruhen. Der grundlegende (und einzige) Datentyp von **MatLab** ist die Matrix, symbolische Rechnungen sind nicht (oder nur mit Zusatzpaketen) möglich. Eine solche Software<sup>160</sup> betont implizit für den Nutzer das Matrixkonzept und verengt somit die Sicht auf Anwendungen in den Ingenieurwissenschaften, der Statistik oder der Ökonomie. Schulisch ist daher ein *symbolisches* CAS geeigneter; hier sind insbesondere symbolische Rechnungen mit Variablen möglich, die insbesondere für die Anbahnung reflexiver Abstraktionen das Mittel der Wahl sind. Daher sind wesentliche *Ansätze der LACSG-Reform mit einem symbolischen CAS*<sup>161</sup> m. E. *vorteilhafter realisierbar*:

- die Konstruktion eigener Datentypen und damit die *Konstruktion eigener algebraischer Gebilde* wie z. B. der endliche Vektorraum  $\mathbb{Z}_7$  ist möglich;
- algebraische Strukturen wie z. B. der Ring der Polynome sind implementiert; damit wird das *Explorationsmaterial vergrößert* und das rein-konzeptuale Verständnis unterstützt: Polynome sind damit genauso konkrete Objekte wie n-Tupel (Listen, Vektoren, Matrizen). Neben dem Anschauungsraum und Matrizenräumen sind damit weitere Vektorräume studierbar, vgl. z. B. HILL& KEAGY [126](mit Derive) oder BLYTH[17](mit Maple).

<sup>160</sup>wie auch die freien Varianten wie GNU **Octave** oder **Euler**

<sup>161</sup>wie z. B. **DERIVE**, **MUPAD** oder GNU **MAXIMA**; zwischenzeitlich (Stand 2010) sind aber symbolische CAS auch in die Matrixsprachen integriert: So enthält **EULER** die CAS **MAXIMA** sowie **YACAS** und in **MATLAB** wurde **MUPAD** integriert.



**Teil II**

**CAS–Kursdesign**



## § 4

# Entwurf eines CAS-intensiven Grundkurses

Ausgehend von den Erfahrungen und Empfehlungen der LACSG sowie der TLAG und gestützt auf die Untersuchung möglicher epistemologischer Barrieren während der Entstehung tragfähiger Konzeptbildungen entwerfe ich nun einen *matrizenorientierten computerintensiven Grundkurs zur Linearen Algebra* für die Sekundarstufe II, der CAS-Lernarrangements („Parcours“) zur Unterstützung der Lernprozesse betont. Unser Kurs schließt an vorhandene Vorkenntnisse der Schüler über das Lösen von Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten aus der Sekundarstufe I an, weitet diesen Themenstrang um algebraische (Matrizen), geometrische (Unterräume), funktionale (lineare Abbildungen) und algorithmische (Gauss-Jordan-Elimination) Stränge auf und zielt auf einen passgenauen Anschluss an universitäre Kurse über Lineare Algebra.

Nach dem Vorschlag von VOLLRATH gliedere ich das strategische Kursdesign in eine *globale Strategie* mit der Angabe der leitenden Entwurfsprinzipien und der Gründung der Themenstränge, in die *regionale Planung* von Unterrichtsequenzen in Form von CAS-Parcours sowie in die *lokale Planung* von reichhaltigen Unterrichtseinheiten („Etappen“) zum Erwerb der Leitbegriffe. Begleitend wird jeweils die Genese der zugehörigen CAS-Kompetenz („Instrumentalgenese“) skizziert. Wir beginnen mit der Explizierung der globalen Kursstrategie.

### 4.1 Globale Kurs-Strategie als Modell der Wachstumsringe

Der hier vorgelegte computerintensive Kurs erstreckt sich über einen Zeitraum von ca. zwei Halbjahren und ist daher Gegenstand einer globalen Planungsstrategie. *Kernthema ist das Lösen von Linearen Gleichungssystemen*, längs ihm strukturiert sich die vertikale Mathematisierung der zentralen Begriffsbildungen und die Auffächerung in parallele Themenstränge mit mehreren Querverbindungen über mehreren Stufen hinweg.

*Kernbegriff* ist das Konzept der Matrix, mit dessen Hilfe Gleichungssysteme  $A * X = B$  unter Nutzung der zentralen algebraischen Operation der Matrizenmultiplikation komprimiert repräsentiert werden. Das inhaltliche Konzeptverständnis soll sich dabei in Form von „Wissens-Wachstumsringen“ entwickeln, bei der jeder „Erkenntnisring“ als Wissenszuwachs im subjektiven Erleben einer Konzepterweiterung interpretiert werden kann.

Während im innersten Wissenskern schon erworbene Vorerfahrungen lediglich neu repräsentiert und CAS-sprachlich expliziert werden, wird bereits mit der Konstruktion der inversen Matrix und der Bestimmung der zugehörigen einpunktigen Lösungsmenge das *zentrale Konstruktions-Werkzeug* des Kurses eingeführt: der GAUSS-JORDAN-Algorithmus. Der anschließende Wachstumsring fokussiert algebraisch auf unterbestimmte Gleichungssysteme und führt damit geometrisch zu dem Konzept von (affinen Lösungs-) Unterräumen sowie auf das zugehörige CAS-Instrument MATLINSOLVE als Variante des GAUSS-JORDAN-Algorithmus.

In der hier vorgestellten globalen Kurs-Strategie schließt sich ein stoffdidaktisch innovativer Themenkreis an: die Untersuchung überbestimmter Gleichungssysteme mit dem zugehörigen algebraischen *Konzept der Pseudoinversen* und seiner geometrischen Interpretation als Orthogonalprojektion auf einen Unterraum. Das CAS-Werkzeug PSEUDOINVERSE wird auch hier für einfache Fälle aus dem GAUSS-JORDAN-Algorithmus (re)konstruiert. Die letzte Konzept-Schale bildet die Einführung des linear-algebraischen Konzeptes des Skalarproduktes<sup>1</sup>, das jetzt auf horizontalen Mathematisierungen aufbaut – z. B. auf den geometrischen Vorerfahrungen über Phänomene der geometrischen Lage von Lösungsräumen, von Lösungen als Orthogonalprojektionen auf Unterräume – und einen Schlussring vertikaler Mathematisierung zur generalisierenden Vernetzung der eingeführten Konzepte wie Länge, Abstand und Senkrecht-Sein setzt.

Die folgende Abbildung 4.1 stellt diese Globalplanung graphisch dar.

Die zentralen Konzepte werden dabei nach dem Konkretheitsprinzip von HAREL bzw. nach dem Vorbild der Realistic Math Education (RME) aus anwendungsnahen Referenzkontexten der subjektiven Erfahrungsbereiche der Schüler gewonnen. Anschließend wird jedes neu erworbene Konzept, wie z. B. die Inverse der Gleichungssystem-Matrix  $A^{-1}$ , zunächst in kontextnah variierten Problemstellungen als Ausdrucks- und Beschreibungsmittel genutzt und dabei i. d. R. die Problem-Dimension von der Zweidimensionalität auf Drei- oder Mehrdimensionalität generalisiert. Didaktische Absicht ist die zeitlich lokale Fixierung des Referenzkontextes an einen neu erworbenen Begriff, bevor eine Ablösung aus dem Hintergrundkontext und die Konstruktion neuer Konzepte in anderen Referenz-Kontexten einsetzt, vgl. Abbildung 4.2.

Eine dazu orthogonale globale Kursplanung würde zunächst die „komplette“ Lineare Algebra im Kleinen (d. h. im Zweidimensionalen mit dem Aufbau aller relevanten Begriffsbildungen wie Unterräumen, Basen, linearen Abbildungen, Eigenwerttheorie, Skalarprodukt etc. in zeitlich dichter Folge) studieren und wiederholend den vollständigen Aufbau (mit dimensionstypischen Ergänzungen) in anschließenden Designzyklen in höheren Dimensionen

<sup>1</sup>Im Verlaufe der dritten Erprobung der Kurskonzeption wurde die Reihenfolge umgestellt und die Pseudoinverse *nach* Einführung des Skalarproduktes aus der Orthogonalprojektion per Analogieschluss gewonnen.



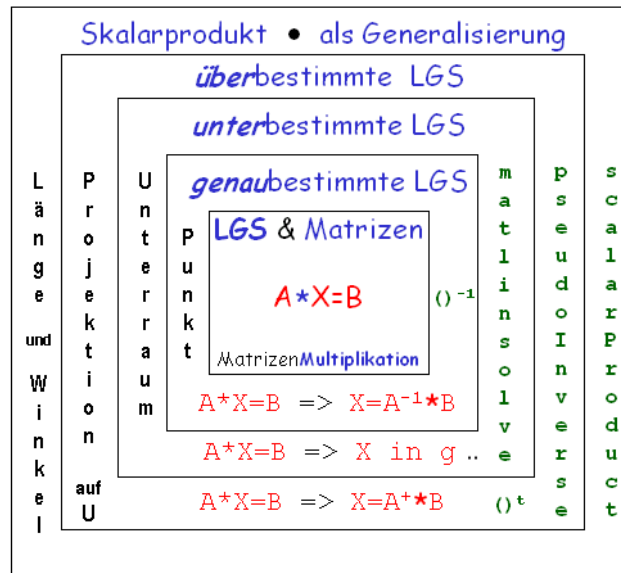


Abbildung 4.1: zur globalen Kursstrategie: das *Schalenmodell der linear-algebraischen Wachstumsringe* als vertikale Mathematisierungsstufen längs des Themenstranges *Lösen von linearen Gleichungssystemen*. Innovativ ist der eingezogene Themenkreis über überbestimmte LGS und das zugehörige Konzept der *Pseudoinversen*  $A^+$

generalisieren. Ein solcher Entwurf wurde z. B. von BANCHOFF & WERMER [10] vorgelegt<sup>2</sup>, vgl. Abbildung 4.3.

Ein globales Kursdesign gemäß dem Modell der Wachstumsringe hat m. E. folgende Vorteile:

- Es ermöglicht ruhige thematische Schematisierungen von eingeführten Konzepten nach der APOS-Theorie und der RME-Theorie, da erst eine breite horizontale Erfahrung (A,P-Phase) aufgebaut wird, bevor weitere neue Konzepte (Objekte) im APOS-Zyklus konstruiert werden;
- der Referenzkontext wirkt über einen längeren Zeitraum und bindet daher das konstruierte mentale Objekt (den neuen Begriff) stabiler an den Kontext; dies sollte einen langhaltigen Lernerfolg begünstigen;
- die simultan erfolgende Instrumentalisierung der parallel vorgestellten CAS-Konzepte kann sich im gleichen Kontext, aber in verschiedenen Dimensionen, zunächst bewähren und stabilisieren;
- die zeitliche Dichte zu vieler vertikaler Mathematisierungen („zu viele Vokabeln in Folge“) würde die moderate Entfaltung der instrumentellen CAS-Sprache gefährden, die spiralförmige Repetition würde ansonsten auf instabilen Schematisierungen gründen.

<sup>2</sup>Ein ähnliches Designkonzept für die *universitäre* Erstausbildung haben zwischenzeitlich z. B. FARIN & HANSFORD [100] vorgelegt.

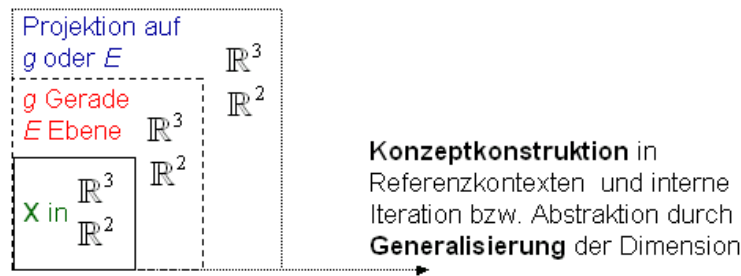


Abbildung 4.2: Erhöhung der Problemdimensionalität als internes Iterations- und Generalisierungsmuster vor Dekontextualisierungen und neuen Konzeptkonstruktionen; z.B. werden erst Unterräume verschiedener Dimension studiert und anschließend Projektionen auf solche Unterräume eingeführt.

Thematisch beschränkt sich der hier vorgestellte *Reformansatz radikal auf die Vermittlung von lediglich sechs zu erlernenden Kernkonzepten*<sup>3</sup>:

1. *eine basale algorithmische Technik*: der Gauss–Jordan–Algorithmus;
2. *ein zentraler Begriff*: die Linearkombination, multiperspektivisch betrachtet;
3. *ein systematischer Repräsentationswechsel*: zwischen Gleichungen und Matrizen;
4. *eine zentrale Modellierung*: durch die lineare Gleichung  $\mathbf{A} * \mathbf{X} = \mathbf{B}$
5. *eine durchgängige Strategie*: die Interpretation von GAUSSJORDAN-Endstellungen<sup>4</sup>
6. *ein grundlegendes Visualisierungsmittel*: das CAS-Modul KOS2d/3d.

## 4.2 Zum CAS–Kursdesign

Bevor das globale Kursdesign mit seinen zugehörigen Kernkonzepten und regionalen Unterrichtssequenzen in Form von CAS-Etappen verfeinert dargestellt wird, weise ich zunächst nach, dass der hier vorgelegte globale Kursplan z. B. den aktuellen Richtlinien für Grundkurse in NRW genügt.

### 4.2.1 das CAS–Kurskonzept im Richtlinienbezug

Ein Unterricht in Linearer Algebra/Geometrie hat sich nach den Richtlinien für die Sekundarstufe II/NRW von 1999 [164] u. a. an folgenden Empfehlungen zu orientieren. Der curriculare Rahmen und die inhaltliche Thematisierung werden dabei auf lediglich 3 Seiten (nämlich S. 21 – 23) recht knapp dargestellt. So heißt es auf S. 21 ff zunächst allgemein:

<sup>3</sup>in Anlehnung an die Ausführungen von ROGALSKI [180, S. 141]

<sup>4</sup>d. h. der sog. row-reduced echelon form, kurz **rref**

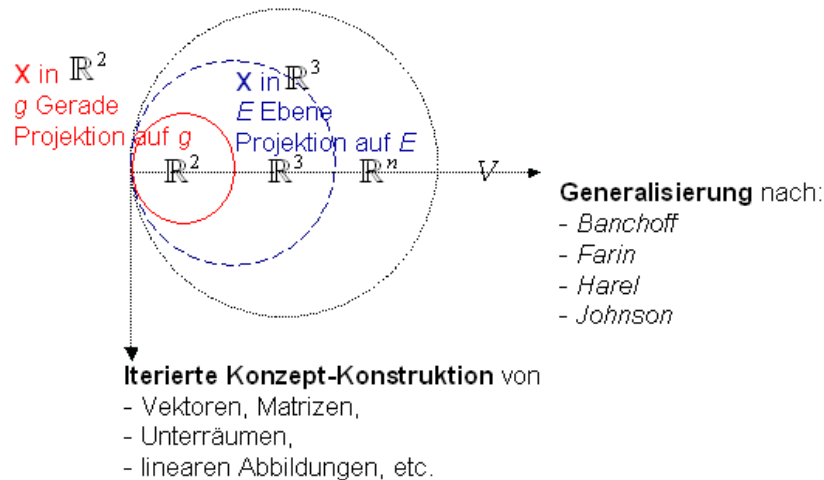


Abbildung 4.3: Orthogonalität von Konzeptkonstruktion und Generalisierung der Dimension; z. B. werden erst Unterräume und Projektionen in der Anschauungsebene eingeführt und anschließend Unterräume und Projektionen im Anschauungsraum (er)neu(t) konstruiert und studiert.

Schülerinnen und Schüler erfassen die Bedeutung der Linearen Algebra/Geometrie durch ihre vielfältigen Anwendungen. Für das Lernen in Kontexten bieten sich zahlreiche Themen an.[..] Schülerinnen und Schüler benutzen (Übergangs-)Matrizen als Werkzeug zur Modellierung in geeigneten außermathematischen Problemstellungen. Es ist ein bedeutsamer Aspekt, dass aus geometrischen Fragestellungen erwachsende mathematische Objekte wie Vektoren und Matrizen sich erfolgreich auf nichtgeometrische Probleme anwenden lassen und umgekehrt. [...] Die vektorielle analytische Geometrie sollte so unterrichtet werden, dass sie mit der Linearen Algebra verzahnt wird. [...] Im Umgang mit Matrizen werden dabei stets algorithmische Aspekte mitbehandelt. [...] Die Lineare Algebra/Geometrie bietet vielfältige Möglichkeiten für das Arbeiten mit dem Computer. Er entlastet den Unterricht vom Drill von Verfahren und von langwierigen Rechnungen und ermöglicht, die Modellbildung, das Herstellen von Bezügen und Finden von Zusammenhängen stärker zu betonen. Er eröffnet experimentelle Arbeitsweisen und gibt vielfältige Möglichkeiten zur Visualisierung.

Die NRW-Richtlinien explizieren dann auf S. 23 den inhaltlichen Themenstrang, der sich mit der von mir oben skizzierten globalen Kursplanung in grober Übereinstimmung sieht:

#### *Lineare Gleichungssysteme und vektorielle Geometrie*

- lineare Gleichungssysteme für  $n > 2$ , Matrix-Vektor-Schreibweise  
systematisches Lösungsverfahren von linearen Gleichungssystemen  
Lösung unterbestimmter linearer Gleichungssysteme
- Rechnen mit Vektoren  
Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen  
Koordinatenform von Ebenengleichungen  
Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
- Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität,  
Winkel und Länge von Vektoren.

Als zusätzlicher Themenstrang wird eine Auswahl angeboten:

*Matrizen (Alternative 1)*

- Abbildungsmatrizen, schräge Parallelprojektion
- Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung.

*Matrizen (Alternative 2)*

- Übergangsmatrizen, Materialverflechtung oder stochastische Matrizen
- Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen. [a. a. O., S. 23]

Diese curricularen Vorgaben findet man in den gängigen Lehrwerken zur Linearen Algebra/Geometrie für die Sekundarstufe realisiert. Die folgende Übersicht stellt einige ausgewählte und verbreitete Lehrbücher gegenüber, vgl. Tabelle 4.4. Zugleich wird die Themenfolge, der Umfang sowie die Aufgabenanzahl verglichen.

| <i>Autor</i>           | <i>Themenstrang</i>                       | <i>Seiten</i> | <i>Aufgaben</i> |
|------------------------|-------------------------------------------|---------------|-----------------|
| GRIESEL <sup>5</sup>   | V <sup>g</sup> S V <sup>E</sup> S G M1 M2 | 142           | 334 -           |
| JAHNKE <sup>6</sup>    | G V S M1 M2 V                             | 336           | 642 -           |
| KROLL <sup>7</sup>     | V S G M1 M2                               | 192           | 540 -           |
| LAMBACHER <sup>8</sup> | G V S M1 M2                               | 198           | 603 (Maple)     |

Tabelle 4.1: Ausgewählte Lehrwerke zur Linearen Algebra/Geometrie für den Grundkurs mit Themenkreisen gemäß der NRW-Richtlinien; G: Lineare Gleichungssysteme V: Vektorrechnung S: Skalarprodukt M1: Matrizen/1 M2: Matrizen/2.

Obigen curricularen Grundkurs-Blueprint spezifizieren wir alternativ zunächst im Hinblick auf die LACSG-Empfehlungen in innermathematisch orientierte regionale Themenkreise. Danach sieht ein möglicher zu realisierender *revidierter Grundkurs-Kern-Lehrplan* zur Linearen Algebra z. B. wie folgt aus<sup>9</sup>:

| <i>Thema</i>             | <i>Kerninhalte</i>                                                                       | <i>Bemerkungen</i>                                                                                                                                                                             |
|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1 Matrizenalgebra</b> | Matrixaddition, Matrixmultiplikation, Transposition, Inverse; algebraische Eigenschaften | motiviere Matrixmultiplikation; zwei Sichten des Produktes $A*B$ :<br>– als Spalten-Linearkombination,<br>– als Zeilen-Linearkombination;<br>Konstruktion der CAS-Routine <code>LinKomb</code> |

<sup>5</sup>vgl. GRIESEL et al. [112]

<sup>6</sup>vgl. JAHNKE et al. [129]; dieses Lehrwerk erschien nach meiner Kurskonzeption.

<sup>7</sup>vgl. KROLL et al. [141]

<sup>8</sup>vgl. BAUM et al. [11]

<sup>9</sup>Zeitangaben werden hier unterdrückt, da ich diese bei der konkreten CAS-Realisierung weiter unten angebe.

|                 |                                                                                        |                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>2</b>        | <b>Lineare Gleichungssysteme I</b>                                                     | Gauss-Eliminierung; Elementarmatrizen. Existenz- und Eindeutigkeit der Lösungen. Matrixinverse.                                                                                                   | reihenreduzierte Eckform <code>rref</code> ; dazu Nutzung der CAS Routinen <code>gaussJordan</code> , <code>matlinsolve</code>                                                                                                         |
| <b>3</b>        | <b>Anschauungsebene <math>\mathbb{R}^2</math> bzw. -raum <math>\mathbb{R}^3</math></b> | Vektoraddition, Multiplikation mit Skalaren. Linearkombinationen: lineare (Un)Abhängigkeit; Basen. Unterräume: Zeilen- und Spaltenraum einer Matrix; Dimension. Elementare Lösungstheorie für LGS | $\mathbb{R}^n$ als Menge von n-Tuplen einführen, nicht als formalen Vektorraum. Inhalte mit starker geometrischer Akzentuierung präsentieren; CAS: <code>LinKomb</code> ; <code>AffineGeom<sub>3</sub>D</code> ; <code>baryKomb</code> |
| <b>4</b>        | <b>Orthogonalität</b>                                                                  | Skalarprodukt: Länge, Orthogonalität, Winkel. Orthogonalprojektionen auf Unterräume                                                                                                               | geometrische Variante des Skalarproduktes ohne <i>cos</i> -Satz herleiten                                                                                                                                                              |
| <b>5</b>        | <b>Lineare Gleichungssysteme II</b>                                                    | Lineare Transformationen. Pseudoinversen-Lösung von inkonsistenten LGS                                                                                                                            | Anwendungen auf Markov-Ketten. Datenfit                                                                                                                                                                                                |
| LEISTUNGS-KURS: |                                                                                        |                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>6</b>        | <b>Determinanten</b>                                                                   | <code>det</code> und Zeilenoperationen; Cramer-Regel; Orientierungen; Spatprodukt                                                                                                                 | Lösungen von 2x2- und 3x3-LGS mit <code>det</code> ; Determinanten und Flächenberechnungen; elementare Eigenschaften geometrisch ableiten                                                                                              |
| <b>7</b>        | <b>Eigenwerte und Eigenvektoren</b>                                                    | Gleichung $Ax = \lambda x$ ; charakteristisches Polynom; Eigenräume;                                                                                                                              | Begriffbildung über geometrische Beispiele (Kegelschnitte) anbahnen                                                                                                                                                                    |

Tabelle 4.2: globale Strategie für ein Grundkurs-Kerncurriculum (mit Zusatzthemen für den Leistungskurs). Im Folgendem benutze ich folgende Legende  $\overset{1}{M} \overset{2}{G} \overset{3}{A} \overset{4}{O} \overset{5}{P} \left( \overset{6}{D} \overset{7}{E} \right)$  für die Kursfolge.

### 4.2.2 das CAS–Kurskonzept als Parcourssequenz

Die skizzierte globale Strategie wurde in APOS-orientierte CAS-Sequenzen („Mikrowelten“) umgesetzt und als ein sechsteiliger Lernparcours (unterteilt in Etappen) gestaltet. Die folgende Übersicht stellt die einzelnen Abschnitte tabellarisch<sup>10</sup> dar.

| <i>Parcour</i>                                | <i>paradigmatischer Referenzkontext und Kernkonzept(e)</i>                                                                                                                                                                                      | <i>CAS-Instrument zum Kernkonzept</i>                                                                                                                                                                                                                                                                          | <i>Zeit</i> |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>1</b> <b>Matrizen und lineare Prozesse</b> | R: <i>Bevölkerungsentwicklung</i><br>K: Gleichungsmatrix u. Matrixgleichung<br><small>Zeilen</small> <b>vektor</b> , <small>Matrix</small> <b>vektor</b> Multiplikation /Addition; erste algebraische Eigenschaften; Streckungen und Scherungen | <code>matrix()</code> ; <code>A*X=B</code> ; <code>*</code> ;<br><code>M:=A.B</code> ;<br><code>matlinsolve()</code><br><code>A+B</code> ; <code><math>\lambda</math>*A</code> ( $\equiv_{\text{math}} \lambda \cdot A$ )<br><code>sk()</code> ; <code>sch()</code> ; <code>SK*..</code> ; <code>SCH*..</code> | 12          |

<sup>10</sup>Die mit \* markierten Abschnitte sind fakultativ und z. B. in einer Projektphase oder im Leistungskurs zusätzlich behandelbar

|                               |                                                                                                                                                                                                                                 |                                               |    |
|-------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|----|
| <b>*2 Stücklisten</b>         | R: <i>Stücklisten</i><br>K: Anbahnung der Kernkonzepte GAUSS-Eliminierung, Linearkombination, Einheitsmatrix, Matrixinverse                                                                                                     | $X-T \cdot X=B$<br>$A^0=Id$<br>$A^{-1}$       | 12 |
| <b>2 genaubestimmte LGS</b>   | R: TORICELLI- <i>Experiment</i> oder R: <i>Herzinsuffizienz</i> (STRANG)<br>K: Linearkombinationen von Spalten und Zeilen einer Matrix; lineare Un/Abhängigkeit; Elementarmatrizen; Konstruktion von $A^{-1}$ und Unitätsbeweis | gaussJordan()<br>LinKomb(); KOS2d<br>EM()     | 12 |
| <b>3 unterbestimmte LGS</b>   | R: LEONARDO's <i>Einkauf</i><br>K: Lösungsmengen als (affine) Unterräume (mit Beweis); homogene LGS und das Phänomen der Orthogonalität; Pseudoinversen-Lösung von unterbestimmten LGS                                          | gaussJordan()<br>matlinsolve()<br>visualCol() | 12 |
| <b>4 überbestimmte LGS</b>    | R: <i>Ganglien-Datenfit</i> oder R: <i>ComputerTomographie (CT)</i><br>K: Orthogonalprojektion auf Spaltenraum einer Matrix als Lösung. Pseudoinversen-Lösung von inkonsistenten LGS                                            | gaussJordan()<br>pseudoInverse()              | 12 |
| <b>5 Skalarprodukt</b>        | R: <i>Geometrie des Schattenwurfs</i><br>K: Skalarprodukt als Generalisierung von Länge, Orthogonalität, Winkel. SKP-Beschreibung der Orthogonalprojektion auf Unterraum                                                        | scalarProduct()                               | 12 |
| <b>*6 Lineare Optimierung</b> | R: <i>Softdrinks; Gartenmaschinen</i><br>K: Tableau, Pivotelement, Basis- vs. Nichtbasis-Variable, Schlupfvariable, Simplex-Algorithmus                                                                                         | maximize()                                    | 12 |

Tabelle 4.3: Globale Strategie für die Parcours-Sequenzierung eines matrizenorientierten CAS-intensiven Grundkurs-Curriculums; die geschätzten Zeitangaben sind in Unterrichtsstunden gemessen.

Im Vergleich zu obigen klassischen Lehrwerken zur Linearen Algebra vergleichen wir unsere Themenfolge, ihren Umfang und ihre Aufgabenzahl mit dem Buch von KAYSER [134].

| <i>Autor</i> | <i>Themenstrang</i>                   | <i>Seiten</i> | <i>Aufgaben</i> |
|--------------|---------------------------------------|---------------|-----------------|
| KAYSER       | $V^{2d}$ M1 $V^{3d}$ M1 G S $V^{VRe}$ | 2+139+15      | 49 Derive       |
| LINDNER      | M1 M2 GV GV GV S M2                   | 226           | 146 MuPAD       |

Tabelle 4.4: Entwürfe zur Linearen Algebra/Geometrie mit CAS für den Grundkurs mit Themenkreisen gemäß der NRW-Richtlinien; G: Lineare Gleichungssysteme V: Vektorrechnung S: Skalarprodukt M1: Matrizen/1 M2: Matrizen/2.

Im Vergleich besitzt die hier vorgeschlagene CAS-Sequenz ca. 1/3 bis 1/5 der üblichen Aufgabenzahl klassischer Bücher zur Linearen Algebra, im Vergleich zum Buch von KAYSER aber ca. die dreifache Anzahl an Aufgaben, Erkundungen und Projekten. Die Bildschirm-Seitenzahl von 226 Seiten meines Entwurfs entspricht dabei ca. 110 Seiten einer Printversion. Die vorgenommene Reduzierung<sup>11</sup> von Umfang und Aufgabenzahl sollte daher ein angemessenes Zeitbudget zur zusätzlichen Nutzung des CAS zur Verfügung stellen.

## 4.3 Regionale Kurs-Strategien zur Konstruktion der CAS-Parcours

In Folgenden wird die didaktische Konzeption der einzelnen Lern-Etappen der fünf zentralen Parcourse genauer elaboriert. Es handelt sich um die Themenkreise *Matrizen und lineare Prozesse*, *genau bestimmte Lineare Gleichungssysteme* (gLGS), *unterbestimmte LGS* (uLGS), *überbestimmte LGS* (üLGS) sowie das *Skalarprodukt*. Dazu wird jeweils die Faserung der globalen Themenstränge in regionale Konzepte aufgezeigt und die Designentwürfe gemäß der hypothetischen Lerntrajektorie bzw. der genetischen Dekomposition nach der APOS-Theorie begründet. Dabei werden die angestrebten Grundvorstellungen, Grundkenntnisse und instrumentellen Grundfertigkeiten beschrieben. Die Kapitelüberschriften entsprechen den regionalen Abschnitten im Lernparcours<sup>12</sup>.

### 4.3.1 Matrizen und Lineare Prozesse

Der regionale Themenkreis *Matrizen und Lineare Prozesse* umfasst folgende Teilabschnitte, die als Etappen in Form von interaktiven CAS-Notebooks konstruiert werden, und dient zunächst der innermathematischen Verankerung der geplanten Themenstränge:

- A Bevölkerungsentwicklung
- B Modellieren mit Matrizen
- C Multiplizieren von Matrizen
- D Matrizen als geometrische Transformationen
- E Produktive Aufgaben und fakultative Miniprojekte

---

<sup>11</sup>Allerdings einschließlich der Aufnahme von Aufgaben zum innovativen Themenstrang 'Pseudoinverse'. Lässt man dieses Thema weg, so ergibt sich eine weitere Konzentration bzw. Reduktion auf entscheidende Konzepte.

<sup>12</sup>Die Etappen A bis U des Parcours sind auf der beigelegten CD in drei Formaten verfügbar: als originale MuPAD Version 3.1 – Sheets, als PDF-Dateien sowie im Word-Format. Die Entwicklungsversion (als MuPAD-Helpfile mit LaTeX-Quelltext in einem speziellen Style geschrieben) als hypertext-verlinkte DVI-Files sind mit dem beiliegenden speziellen Help-Viewer der MuPAD Light Version 2.5 lesbar.

Zentrale Designabsicht im ersten CAS-Parcours ist der Aufbau einer multiperspektivischen Sicht auf das Konzept der Matrix und die zugeordnete Operation der Matrizenmultiplikation, insbesondere die Verflechtung von algebraischen, geometrischen, funktionalen und algorithmischen Sichtweisen auf diese begrifflichen Konstrukte, vgl. Abbildung 4.4.

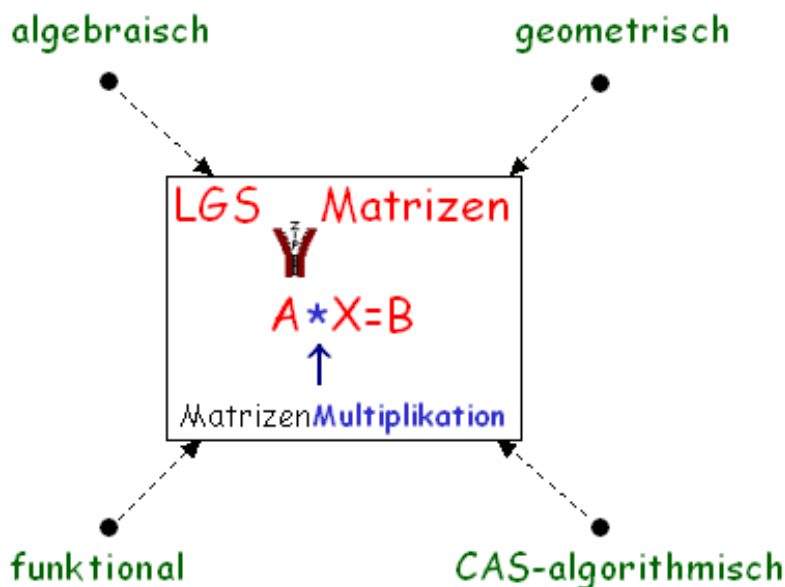


Abbildung 4.4: zur multiperspektivischen Sicht auf die Konzepte *Matrix* und *Matrizenmultiplikation*

Die methodische Ausgestaltung der einzelnen Etappen in Form von Lern-Parcours, die als Aufgabenkomplexe zur situativen Verbindung der einzelnen Themenstränge dienen und die hypothetische Lerntrajektorie konkretisieren, findet der interessierte Leser im Anhang. Insgesamt sollte sich am Ende dieser ersten hypothetischen Lerntrajektorie folgende Grundvorstellung zum Konzept der Matrix ausgebildet haben:

|                         |                                                                                                                              |                          |                  |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|------------------|
|                         | $\begin{bmatrix} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{bmatrix}$                                                                           |                          | Gleichungssystem |
| Komprimieren<br>(„zip“) | $\downarrow \uparrow$                                                                                                        | Expandieren<br>(„unzip“) |                  |
|                         | $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ |                          | Matrixgleichung  |
|                         | $A * X = B$                                                                                                                  |                          |                  |
| Komprimieren<br>(„zip“) | $\downarrow \uparrow$                                                                                                        | Expandieren<br>(„unzip“) |                  |
|                         | $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$                                                                       |                          | Gleichungsmatrix |
|                         | $M := A.B$                                                                                                                   |                          |                  |



Tabelle 4.5: Zur didaktischen Konzeption der simultanen Einführung der Konzepte der Matrix und der Matrixmultiplikation durch eine vertikale bottom-up Mathematisierung mittels einer zweifachen Kompression längs einer instrumentalen Genese im CAS.

Damit ist zugleich *der innerste Wachstumsring der schulischen Linearen Algebra* aus beziehungsreichen Sinnkontexten epistemologisch konstruiert: er enthält als zentralen Wissenskern die wichtige Operation der Matrizenmultiplikation und die Modellierung linearer Prozesse als Matrixgleichungen  $A * X = B$ , siehe Abbildung 4.5.



Abbildung 4.5: der innerste epistemologisch rekonstruierte Wachstumsring der schulischen Linearen Algebra

### 4.3.2 Genaubestimmte LGS

Der regionale Themenkreis *Genaubestimmte LGS*<sup>13</sup> umfasst folgende Teilabschnitte, die als Etappen eines CAS-Lernparcours organisiert sind:

**F** Wasserturm

**G** Linearkombinationen von Spaltenvektoren und die Lösbarkeit von LGS

**H** Linearkombinationen von Zeilenvektoren und der GJ-Algorithmus

**I** Zeilenbild und Matrixbild von linearen Lösungsprozessen

**J** Produktive Aufgaben und fakultative Miniprojekte

<sup>13</sup>Angesichts der aktuellen Entwicklung der Schullandschaft mit der Kürzung der Sekundarstufe um ein Jahr ist mit einer weiteren Beschränkung des curricularen Themenumfangs der Linearen Algebra in der Sekundarstufe II zu rechnen. Unter diesem Aspekt ist der vorliegende Kurs so konzipiert, dass an die Unterrichtseinheit *Matrizen und lineare Prozesse* auch direkt die Einheit *Genaubestimmte lineare Gleichungssysteme* angeschlossen werden kann. Der (fakultative) CAS-Parcours über *Stücklisten* wird als Beispiel einer lokalen Strategie i. S. v. VOLLRATH daher im Anschluss an den Aufriss der computer-intensiven matrizenorientierten Linearen Algebra detailliert beschrieben.

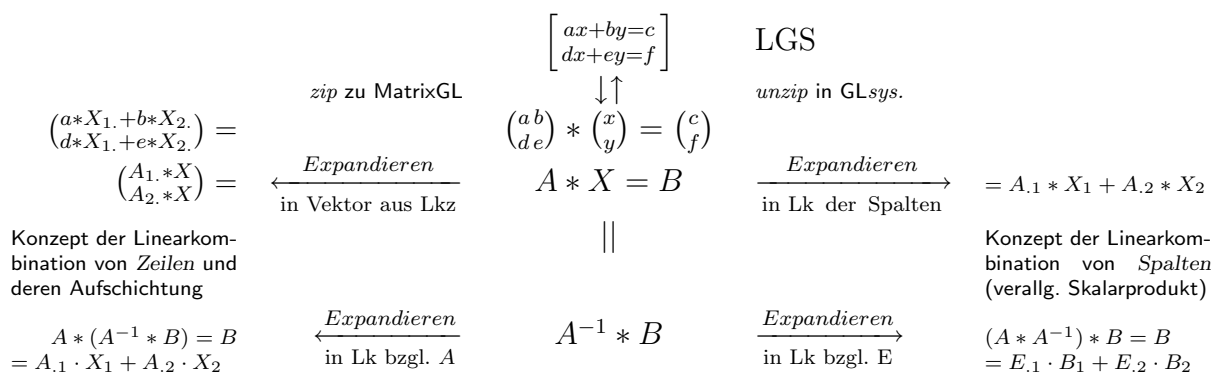
Ich beschreibe die didaktischen Leitlinien dieses Parcours aus Platzgründen etwas knapper, auch weil wesentliche Teile der Lernumgebung zum GAUSS-JORDAN-Algorithmus in LINDNER [154] ausführlich beschrieben sind.

Die zentrale didaktische Leitlinie des zweiten CAS-Parcours F...J besteht in einer multiperspektivischen Sicht auf den *Gauss-Jordan-Algorithmus* als primäre Lösungsmethode für lineare Gleichungssysteme. Dazu wird die *Grundvorstellung der Linearkombination als Mischen von Bestandteilen* und die der *Lösung eines LGS als Rekonstruktion der Anteile der Bestandteile in der Mischung* („Entmischen“) geometrisch und algebraisch vertieft. Der Repräsentationswechsel von der Linearkombinations-sicht des Lösungsprozesses zu einer funktional-matrixorientierten Sicht führt zum Konzept des Matrixbildes und der Lösungsprozessverdichtung im Konzept der inversen Matrix als neuem mathematischem Objekt auf der formalen Schema-Ebene.

Details zur inhaltlichen Ausgestaltung findet die interessierte Leserin in der Anlage.

Zu diesem Zeitpunkt der Lerntrajektorie haben die Lernenden Eigenschaften und Effekte von Elementarmatrizen im beziehungshaltigen algebraisch-geometrischen Kontext des Lösen von linearen Gleichungssystemen exploriert und konstruktiv zum *Prozept der inversen Matrix* (als *Objekt* algebraischen Rechnens und als *Prozess* seiner Herstellung) verdichtet. Die Phase der vertikalen Mathematisierung erlaubt nun auf dem Niveau der schematischen Thematisierung Hypothesen über den Prozess der Invertierung  $(\cdot)^{-1}$  selbst sowie über zugehörige Rechenregeln und Beweise zu generieren. Im Sinne der BUCHBERGER<sup>14</sup>-*Kreativitätsspirale* ist nach der experimentellen CAS-gestützten Aktivitätsphase eine Exaktifizierungsphase erreicht, die ohne CAS-Unterstützung im Klassenraum ablaufen kann. Die hier vorgenommene Rekonstruktion der elementaren schulischen Linearen Algebra aus einer CAS-gestützten und matrizenorientierten Perspektive erlaubt es nun, den technischen Lösungsprozess für LGS auszublenden und die implementierten Routinen `(.)-1` bzw. `gaussJordan` oder `matlinsolve` für das weitere Studium von linearen Gleichungssystemen zu verwenden.

Die folgende Übersicht verdeutlicht das Konzeptnetz auf der Schema-Ebene.



<sup>14</sup>[124, S. 82 ff]

Entwicklung von  $B$   
längs der Spalten von  $A$   
mit der Lösung  $X$  als  
Gewichte

Konzept der  
Basistransformation 15

Entwicklung von  $B$   
längs der Spalten von  $E$   
mit  $B$  als Gewichte

Tabelle 4.6: Das lokale Konzeptnetz zu den Begriffen *Linearkombination* und *Inverse* zeigt die verschiedenen Expansionsformen eines LGS  $A * X = B$  bzw. seiner Auflösung  $X = A^{-1} * B$  sowie die Interpretationen der Linksmultiplikation mit  $A^{-1} = T_A^E$  als Operation der Basistransformationen von der Basis  $E$  zur Basis  $A$ .

### Anmerkungen.

- Das hier vorgelegte Redesign eines Curriculums für die elementare Lineare Algebra betont in diesem Parcours die Untersuchung des GAUSS-JORDAN-Algorithmus aus vielfältigen Perspektiven. Gegenüber der gelegentlich vorgetragenen Forderung, angesichts von CAS-Routinen wie `gaussJordan` bzw. `matlinsolve` auf eine Behandlung des GAUSS-JORDAN-Algorithmus ganz zu verzichten, kann man u. a. folgende Einwände vortragen:
  - Die hier vorgeschlagene epistemologisch-orientierte Behandlung des GAUSS-JORDAN-Algorithmus fördert beziehungsreiche Einsichten (auch in geometrische Zusammenhänge) und rechnet nicht nur mit Zahlen bzw. reduziert nicht auf „black-box“-Rechnen,
  - der Lernprozess wird durch intermediate Resultate (z. B. via Elementarmatrizen) im CAS tutoriell gestaltbar und ermöglicht substanzielle Eigenaktivitäten auf der Schemalebene,
  - linear algebraische Konzeptbildungen, wie z. B. der Begriff der Inversen Matrix und später der Pseudoinversen, werden konstruktiv stimuliert und nicht aus algebraischen Kennzeichnungen extrahiert,
  - algebraisch formulierte Beziehungen werden durch geometrische Interpretationen sinnhaftig und damit als Grundvorstellung stabilisiert,
  - der Gebrauch elementarer Programmieraktivitäten (wie die Definition und der Gebrauch der Elementarmatrizen) ist eine intellektuell herausfordernde geistige Tätigkeit, die als konstruktive Vorbereitung auf mathematische Beweistechniken angesehen werden kann.

<sup>15</sup>Die Linksmultiplikation von  $X (= A^{-1} * B)$  mit  $A (= T_E^A)$  ist wegen  $A * A^{-1} = E$  als Operation der Basistransformationen  $T_E^A$  von der Basis  $A$  zur Basis  $E$  interpretierbar

$$B \xleftarrow{A*} X (= A^{-1} * B) \quad \text{bzw.} \quad B \xrightarrow{A^{-1}*} X (= A^{-1} * B)$$

ist die Linksmultiplikation von  $B$  mit  $A^{-1}$  als Operation der Basistransformationen  $A^{-1} = T_A^E$  von der Basis  $E$  zur Basis  $A$  interpretierbar.

2. Diese Lernumgebung versucht ein produktives, kooperatives und aktivitätsbasiertes CAS-Arrangement für den GAUSS-JORDAN-Algorithmus als Lösungsmethode für Systeme von linearen Gleichungen zu designen. Wichtige mathematische Konzepte werden dabei auf informale Weise aus der Lösungsproblematik von LGS als abstraktes Referenzproblem gewonnen und möchten so helfen, die diskutierten Begriffsbildungsprobleme der elementaren Linearen Algebra zu mildern. *Einfache (semi)automatische MuPAD-Funktionen begleiten die Konstruktion verständniskritischer mathematischer Konzepte algorithmisch, ohne sich in programmier-spezifischen technischen Details zu verlieren.* Dabei werden rein mathematische Existenzbeweise (z. B. die Konstruktion der Inversen Matrix) durch entsprechende algorithmische Konstruktionen ersetzt und prozedurale Denkprozesse auf Schemaebene ermöglicht.
3. Gegenüber dem vorgeschlagenen multiperspektivischen und ein substanzielles Verständnis anstrebenden Weg ist der algebraisch-formale „ $[A \mid E]$ “-Ansatz zur Berechnung der inversen Matrix als Lösung der Gleichung  $A * U = E$  nur bei Zeitmangel anzuraten.

### 4.3.3 Unterbestimmte LGS

Die zentrale didaktische Leitlinie des dritten CAS-Parcours K...P zielt auf eine *epistemologisch orientierte Behandlung von händischen und CAS-gestützten Lösungsmethoden für singuläre lineare Gleichungssysteme*. Dazu wird die *Grundorientierung an Lösungsverfahren für reguläre LGS reorganisiert* und in verschiedenen strategischen Richtungen methodisch adaptiert sowie geometrisch und algebraisch variiert. Das Grundkonzept der inversen Matrix wird dabei zum Konzept der *Pseudoinversen* verallgemeinert. Dieses neu konstruierte mathematische Objekt wird anschließend auf der formalen Schema-Ebene für eine Beweisführung eines allgemeingültigen *Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für die Lösungsmannigfaltigkeiten* (regulärer wie singulärer) linearer Gleichungssysteme herangezogen.

Wurden bisher vornehmlich<sup>16</sup> quadratische *reguläre* lineare Gleichungssysteme  $A * X = B$  studiert, bei denen die Koeffizientenmatrix  $A$  eine Umkehrmatrix  $A^{-1}$  besitzt und die zugehörige eindeutige Lösung  $X = A^{-1} * B$  geometrisch einen Punkt darstellt, so werden nunmehr rechteckige *singuläre* lineare Gleichungssysteme  $A * X = B$  studiert, bei denen die Koeffizientenmatrix  $A$  keine Umkehrmatrix besitzt. Daher sind sowohl die (geometrische) Gestalt der Lösungsmenge als auch geeignete Lösungsverfahren für singuläre LGS Themen dieses Lernparcours.

Als für die epistemologische Entwicklung der lokalen Wissensdomäne paradigmatisches Referenzproblem wird das „*Legierungsproblem*“ aus ARTMANN & TÖRNER [4, S. 4] verwendet. Diese Problemstellung dient i. S. der RME zwar vordergründig als *Modell-zur* Entdeckung geeigneter Lösungsverfahren für singuläre LGS, ist aber hintergründig auch als *Modell-für* den generellen Aufbau einer wissenschaftlichen Theorie zu verstehen. Denn das Scheitern

<sup>16</sup>Eine Ausnahme bildet z. B. das Problem, das DÜRER-Zauberquadrat aus 8 gegebenen basalen Zauberquadraten zusammen zu stellen, vgl. Etappe J.

bewährter Lösungsmethoden am Referenzproblem zwingt die Lernperson dazu, nach neuen Konzepten und Lösungsverfahren zu fahnden, um die fragil gewordene lokale mathematische Theorie neu zu stabilisieren. *Diese Art von Theoriebildung durch die Revision brüchig gewordener Hypothesen<sup>17</sup> im Verlaufe der rationalen Rekonstruktion einer wissenschaftlichen Theorie ist fundamental und wird hier am Beispiel der Linearen Algebra exemplifiziert.* Dieser Lernparcours dient daher nicht nur einer innermathematischen Wissenskonstruktion, sondern verweist auf allgemeine Wissensbildungsprozesse. Das Legierungsproblem als *Modell zur* informalen Revision eines innermathematischen Theorieausschnittes enthält in seinem Kern also eine paradigmatische allgemeine Problemstellung, die *Modell für* allgemeine wissenschaftliche Konzeptbildungen und Erklärungszusammenhänge steht. Damit schließt die Problemstellung K einen ganzen Themenkomplex auf und bietet einen informellen Kontakt mit einer typischen metamathematischen Fragestellung, d. h. sie besitzt zugleich einen explizit allgemeinbildenden Charakter.

Die folgende Abbildung 4.6 stellt die vorangegangenen Überlegungen bildhaft dar.

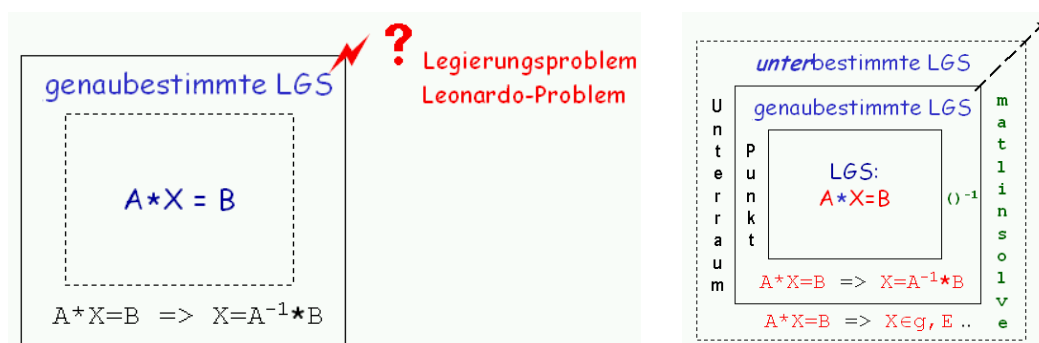


Abbildung 4.6: Die singulären LGS-Problemstellungen „Legierung“ (K) und „Leonardo“ (M) als Modellierungsaufgaben mit epistemologischem Charakter: Beide Problemstellungen sind mit den vertrauten Methoden der lokalen inneren Wissensdomäne nicht lösbar, d. h. dort thematisch nicht verortbar. Diese Widersprüchlichkeit zwingt wissenschaftstheoretisch zur Generierung eines neuen Wissens-Wachstumsrings und instrumental zur Algorithmenadaption.

Dieses epistemologische Phänomen erfordert also eine neue theoretische wie lösungspraktische Verortung und zwingt zur Aufgabe alter und zur Konstruktion neuer Konzepte in einem erweiterten Wachstumsring, d. h. zur Lösung des vorgelegten Problems werden neue Konzepte benötigt. Aus epistemologischer Sicht sind mindestens zwei Theoriekorrekturen denkbar:

- eine *Konzeptadaption* bzw. Konzeptrenovation versucht, die Barriere durch eine Rückführung auf vertraute Methoden und Konzepte bzw. instrumentale Routinen (wie  $A^{-1}$ , gaussJordan, matlinsolve) zu überwinden (vgl. „Permanenzprinzip“);

<sup>17</sup>in den Naturwissenschaften z. B. durch theoriekritische Experimente ausgelöst, vgl. TOULMIN [198] oder LEINFELLNER [148, S. 96 ff]

- eine *Konzeptinnovation* versucht die Problemlösung z. B. durch eine Verallgemeinerung vorhandener Konzepte – hier z. B. einer Generalisierung des Konzeptes der Invertierung – und ihrer theoretischen Absicherung auf einem formal höherem Niveau zu erreichen.

Insofern ist dieser Parcours über singuläre LGS *epistemologisch orientiert*. Er realisiert sein didaktisches Anliegen in folgenden Lernetappen:

- K** Legierungsproduktion (1. Referenzproblem)
- L** Lösungsvariationen zum 1. Referenzproblem
- M** LEONARDO's Einkauf (2. Referenzproblem)
- N** algebraische Lösungsverfahren zur Bestimmung der Lösungsmenge und ihre geometrische Interpretation
- O** Erhöhung der Unterbestimmtheit und Lösungs„ebenen“;  
PseudoInverse als verallgemeinerte algebraische Lösungsmethode
- P** Produktive Übungen zum Wechsel der Darstellungsformen;  
selbstständige Untersuchung von Schnittproblemen und Lagebeziehungen

Im Anhang beschreibe ich kurz die methodische Ausgestaltung der einzelnen Etappen in diesem dritten Lern-Parcours, die als Aufgabenkomplexe zur referenziellen Verbindung der einzelnen Themenstränge dienen und die skizzierte hypothetische Lerntrajektorie konkretisieren.

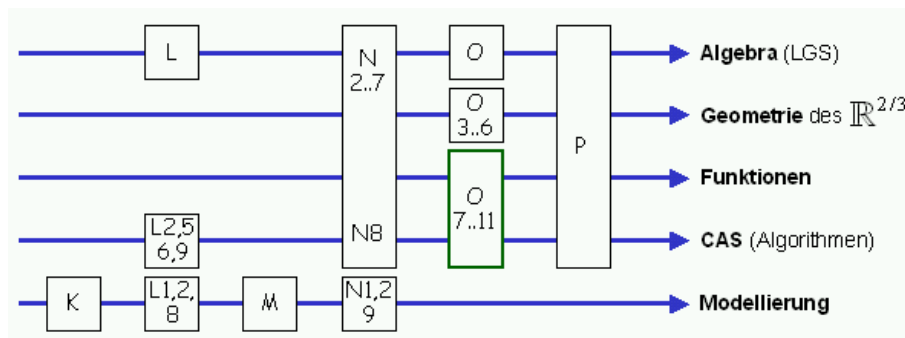


Abbildung 4.7: Auffaserung der Themenstränge im dritten Lernparcours und die Verteilung der einzelnen Stationen auf die thematischen Leitlinien; Themenschwerpunkt ist die Vernetzung algebraischer und geometrischer Leitbegriffe im „Themenkomplex singuläre LGS“

Exemplarisch sei hier die *Leitidee des partiellen Invertierens* am „LEONARDO“-Referenzproblem elaboriert. Es handelt sich dabei um das folgende Problem<sup>18</sup>:

<sup>18</sup>vgl. [4, S. 80]

**Etappe M: LEONARDO's Einkauf.**

LEONARDO FIBBONACCI kauft auf dem Markt Rebhühner, Tauben und Sperlinge ein. Insgesamt bezahlt er 30 Münzen für 30 Vögel. 1 Rebhuhn kostet 3 Münzen, 1 Taube kostet 2 Münzen, 1 Sperling kostet 1 Münze. Wieviel Rebhühner, Tauben und Sperlinge hat er eingekauft?

Abbildung 4.8 zeigt die Modellierung des Problems im CAS sowie die Anwendung der bekannten CAS-Lösungsinstrumente.

```

• A:=matrix([[1,1,1],[3,2,1/2]]);
 X:=matrix([x,y,z]); B:=matrix([30,30]);
 A*X=B;

 (1 1 1) (x+y+z) = (30)
 (3 2 1/2) (3·x+2·y+1/2·z) = (30)

• gaussJordan(A.B); matlinsolve(A.B) ; A^-1*B // (1)

 (1 0 -3/2 -30) [(-30) , [(3/2)]]
 (0 1 5/2 60) [(60) , [(-5/2)]]
 , Error: not square

```

Abbildung 4.8: Modellierung des LEONARDO-Problems im CAS MU-PAD und die Systemantworten nach Aufruf der Prozeduren `gaussJordan()`, `matlinsolve()` bzw.  $()^{-1}$  zur Lösungsberechnung als interpretationsbedürftige Phänomene: `gaussJordan` gibt eine partielle und `matlinsolve` eine komplette Antwort, während die Inversenbildung an der Singularität der Koeffizientenmatrix scheitert.

Dabei zeigen sich je nach Wahl der CAS-Routinen durch die Lernperson drei verschiedene Phänomene, die strategisch zur Bestimmung der Lösungsmenge aufgegriffen werden können. Insofern gründet sich der anschließende Wissenserwerb auf einer didaktischen Phänomenologie i. S. d. RME.

1. Die Routine `gaussJordan` erweist sich als *semiautomatische Lösungsroutine*, die erst *nach mentaler Dekodierung* der Gleichungsmatrix in das zugehörige LGS

$$\begin{array}{rcl} x & - & 3/2z = -30 \\ y & + & 5/2z = 60 \end{array}$$

und *nach Auflösen* dieses vereinfachten LGS nach den „Basisvariablen“

$$\begin{array}{rcl} x & = & -30 + 3/2z \\ y & = & 60 - 5/2z \end{array}$$

und *nach „Zuweisung* eines beliebigen Wertes  $t \in \mathbb{R}$  an die freie Variable  $z$ “

$$\begin{array}{rcl} x & = & -30 + 3/2t \\ y & = & 60 - 5/2t \\ ( & z & = 1t ) \end{array}$$

auf die parametrisierte Lösungsmenge  $[x, y, z] = [-30 + 1.5t, 60 - 2.5t, t]$  führt. Bereits das Unterdrücken der trivialen Substitutionsgleichung  $z = t$ , welche die dritte Komponente der Lösungsmenge bildet, kann bei Novizen zu Fehlverständnissen führen und daran hindern, die Lösungsmenge korrekt anzugeben.

2. Die parametrisierte Lösungsmenge lässt sich am Output von `matlinsolve` in (1) direkt ablesen, so dass sich dieses CAS-Instrument als *vollautomatische Lösungsroutine für singuläre LGS* entpuppt. Dadurch wird dem Nutzer die Interpretation des `gaussJordan`-Outputs abgenommen. In beiden Fällen lassen sich mit dem CAS überzeugende Einsetzproben für das gegebene inhomogene LGS zur Verifikation rechnen, vgl. Abbildung 4.9.

```

• L := t -> matrix([-30+3/2*t, 60-5/2*t, t]): // (1i)
• L(t) $ t=0..2 // (2i)

```

$$\begin{pmatrix} -30 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{57}{2} \\ \frac{115}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -27 \\ 55 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```

• A*L(t) $ t=0..2 // (3i)

```

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Abbildung 4.9: ausgewählte Proben am inhomogenen LEONARDO-LGS

(2i) wählt aus der in (1i) funktional notierten Lösungsmenge  $L$  drei spezielle Lösungspunkte aus, die anstelle des Unbekanntenvektors  $X$  in der Matrixgleichung des LGS eingesetzt werden und diese erfüllen. Analoge Verifikationen lässt man für das zugehörige homogene LGS rechnen, vgl. Abbildung 4.10.

```

• Lo := t -> t* matrix([3/2, -5/2, 1]) // (1h)
• Lo(t) $ t=0..2 // (2h)

```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```

• A*Lo(t) $ t=0..2 // (3h)

```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung 4.10: Proben am homogenen LEONARDO-LGS

In dieser parametrisierten Form ist die Lösungsmenge des LGS unmittelbar im CAS visualisierbar und führt phänomenologisch auf die analytische Definition einer (affinen) *Geraden*,



vgl. Abbildung 4.11. Geraden und Ebenen treten im Kontext einer matrixorientierten Li-

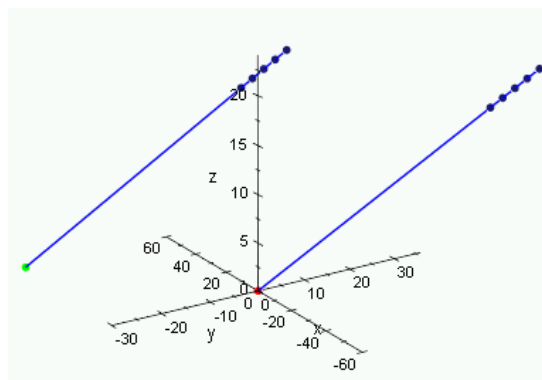


Abbildung 4.11: Darstellung der Lösungsmenge des inhomogenen singulären *Leonardo*-LGS sowie seines homogenen Anteils als affine Gerade parallel zu seinem Richtungs(vektor)raum (Kern). Die blauen Punkte entsprechen ausgewählten Punktproben.

nearen Algebra also sinnhaftig als Lösungsmengen von singulären LGS auf. Erst später werden sie Objekte *sui generis*, s. u. Etappe P.

**3.** Dass die Lösungsberechnung mittels Inversenbildung scheitert, ist aus den Vorerfahrungen der Lernenden aufgrund der nicht-quadratischen Rechtecksgestalt der Systemmatrix erklärbar. Dennoch lässt sich *die Idee der Invertierung retten* und zu neuen Erkenntnissen führen. Während die folgenden Überlegungen ohne CAS kaum sinnvoll sind, bietet eine CAS-gestützte Lernumgebung Ansatzpunkte für neue algebraische Lösungsmethoden. Epistemologisch interessant ist dabei die Möglichkeit, die fehlgeschlagenen CAS-Routinen `gaussJordan` bzw. die  $(\cdot)^{-1}$ -Operation für einen adaptierten bzw. innovativen Lösungsversuch heranziehen zu können, d. h. vorhandenes Wissen für einen Erkenntniszugewinn didaktisch zu nutzen. Ich skizziere hier kurz die zugehörigen Explorationen.

### „Regulärmachen“: die Einführung von 'freien' Variablen als Reorganisation.

Die übliche händische Lösungsmethode für singuläre LGS identifiziert zur Beschreibung der Lösungsmenge „freie“ Variablen und nutzt diese als Lösungsparameter. Die Anzahl der freien Variablen wird dabei oft als *Nullität*<sup>19</sup> bezeichnet und misst die Größe (Dimension) des Lösungsraumes. Dies ist zunächst explorativ am Beispielmateriale erkundbar.

Während bei einer händischen Lösung eines singulären LGS die diagonale Anordnung der Unbekannten bzw. der freien Variablen als lediglich notationstechnische Ästhetik angesehen werden kann, wird deren genaue Positionierung bei einer CAS-gestützten Lösung verständniskritisch. Macht man nämlich die Identifikation der freien Variablen und die zugehörige

<sup>19</sup>Auch die Bezeichnung „Defekt“ ist für die Dimension des Kerns von  $A$  gebräuchlich, d. h.  $\text{Nullität}(A) := \text{Defekt}(A) := \dim_{\mathbb{R}} \text{kern}(A)$ .

Substitution als Parameter im CAS<sup>20</sup> explizit, so wird *das zugehörige neue äquivalente LGS regulär und läßt sich durch Invertierung lösen*; dabei stellen sich aus dieser Perspektive alle drei CAS-Instrumente a posteriori als äquivalent heraus, Abbildung 4.12.

```

• Az := matrix([[1,1,1],[3,2,1/2],[0,0,1]]); // (1)
 Bz := matrix([30,30,t])

 (1 1 1)
 (3 2 1/2)
 (0 0 1)
Az= Bz= (30)
 (30)
 (t)

• gaussJordan(Az,Bz); matlinsolve(Az,Bz); 1/Az * Bz // (2)

 (1 0 0 3/2*t - 30)
 (0 1 0 -5/2*t + 60)
 (0 0 1 t)
 (3/2*t - 30)
 (-5/2*t + 60)
 (3/2*t - 30)
 (-5/2*t + 60)
 (t)

```

Abbildung 4.12: Zur Interpretation der freien Parameterwahl als „reguläres Aufforsten“ der Systemmatrix und die resultierende Output-Gleichheit der Prozeduraufufe. Insbesondere wird die Regularität der um die „Zeilen der freien Variablen“ ergänzten Systemmatrix  $Az$  erkennbar.

Ein vorhergehender Aufruf von `gaussJordan` dient zur Identifikation der Einfügepositionen für die zu ergänzenden Zeilen. Anstatt die freien Variablen lediglich mental abzulesen, werden sie hier vom Lernenden *konstruktiv zur Abänderung der singulären Systemmatrix* verwendet, so dass die theoretische Begrifflichkeit der „freien Variablen“ bzw. das „Konzept der Nullität“ operativ handhabbar gemacht wird.

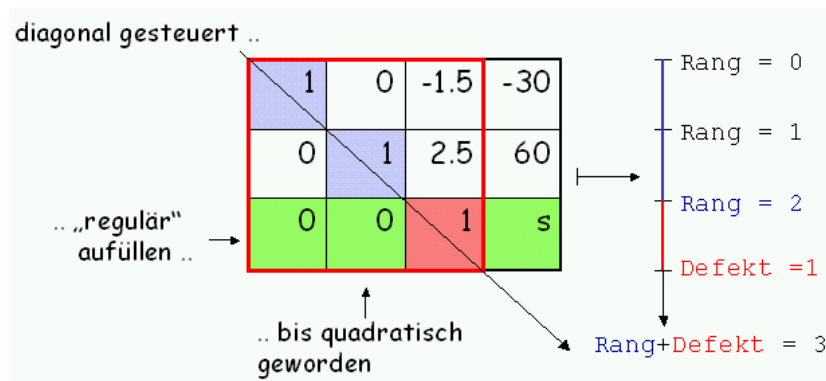


Abbildung 4.13: Zur Interpretation der freien Parameterwahl als „reguläres Aufforsten der singulären Systemmatrix.“

Das Phänomen des Defektes und seine konstruktive Korrektur durch das Einfügen freier Parameter sind die Leitvorstellungen zur Behebung einer nur partiellen Invertierbarkeit.

<sup>20</sup>durch das Einfügen neuer Matrixzeilen mit hauptdiagonal-positionierten Einsen als Platzhalter für die freien Variablen und den zugehörigen Parametern als rechten Seiten

Die *Defektkorrektur* an der singulären Systemmatrix orientiert sich dabei einerseits an den freien Positionen auf der Hauptdiagonalen und andererseits am Zielmuster „Quadratgestalt“. Als didaktische Vorteile dieser Lösungsmethode kann man daher sehen:

- Rang und Defekt der singulären Systemmatrix  $A$  werden in ihrem Zusammenspiel vor ihrer Explizierung informal und operativ erfahrbar gemacht;
- *der Dimensionssatz wird präformal evident*, die „obere Grenze“ als konstant bleibende Summe aus Rang und Defekt wird dabei durch das Erreichen der Quadratgröße (Anzahl der Unbekannten) sinnhaftig markiert;
- die *Grundvorstellungen des Ranges als Pegelstand* bis zum Erreichen der vollen Invertierbarkeit und des Defektes als Maß für den noch fehlenden Rest bis zur Invertierbarkeit werden angebahnt;
- die Anzahl der konstruktiv einzufügenden Zeilen in der singulären Systemmatrix entspricht der Größe des beobachtbaren Defektes, d. h. die Anzahl der freien Variablen wird mit der Dimension des Lösungsraumes in Verbindung gebracht.

In der didaktischen Konsequenz wird damit ein zentraler Sachverhalt der Linearen Algebra elementarisiert und im CAS phänomenologisch erfahrbar gemacht.

### Pseudoinverse: die direkte Nutzung der partiellen Invertierbarkeit.

Die zweite Lösungsvariante ist ebenfalls computerintensiv, zielt auf eine abstrakte Mustererkennung und schult den „Zahlensinn“ der Lernperson. Ausgangspunkt der algebraischen Phänomene ist erneut eine *gaussJordan*-Endstellung, vgl. (3) in Abbildung 4.14.

```

• Ao := matrix([[1,1,1],[3,2,1/2],[0,0,0]]); // (1)
Bo := matrix([30,30,0]); Ao*X=Bo // (2)

```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```

• gaussJordan(Ao.EI(3)) // (3)

```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

• Uo :=matrix([[[-2,1,0],[3,-1,0],[0,0,0]]]; // (4)
Uo, Uo*Ao, Ao*Uo, Ao*Uo*Ao // (5)

```

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung 4.14: Phänomene der partiellen Invertierbarkeit, beobachtet am Referenzproblem *Leonardo*. Der GAUSS-JORDAN-Algorithmus auf der quadratisch gemachten Systemmatrix läßt die Existenz einer partiellen Inversen erahnen.

In diesem Falle wird zunächst versuchsweise eine quadratische Gestalt der Systemmatrix durch *Auffüllen mit Nullzeilen* erzwungen, es entstehen die Matrizen  $A_o$  bzw.  $B_o$ . Diese sind zwar noch singulär, dennoch ist der A.E-Ansatz zur Bestimmung einer inversen

Matrix möglich, vgl. (3). Da im Blockbereich der Einheitsmatrix  $E$  die reguläre Inverse entstehen *würde*, erkennt man in diesem Bereich als Muster den „invertierbaren Kern“  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , welcher der entstandenen partiellen Einheitsmatrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  im Blockbereich von  $A$  entspricht. Setzt man daher als „partielle Inverse“ versuchsweise z. B. die Matrix  $U_0$  an, so zeigt Zeile (5) interessante algebraische Phänomene und löst zugehörige Forschungsfragen für die Lernenden aus:

- $U_0 \cdot A_0$  ist wie erwartet wirkungsgleich zum gaussJordan-Prozess aus (3), d. h.  $U_0$  agiert wie eine partielle (Links-)Inverse und komprimiert den GAUSS-JORDAN-Algorithmus;
- $A_0 \cdot U_0$  zeigt den relevanten Teil der Einheitsmatrix zur Probe (3), d. h.  $U_0$  hat die vertraute Eigenschaft einer partiellen (Rechts-)Inversen;
- $U_0 \cdot A_0 \neq A_0 \cdot U_0$ , d. h. die partielle Inverse  $U_0$  ist zur Ausgangsmatrix  $A$  nicht kommutativ, d. h. man hat Links- bzw. Rechtsinverse zu unterscheiden;
- $A_0 \cdot U_0 \cdot A_0 = A_0$ , eine beobachtete Relation, die später in der Exaktifizierungsphase zu einer Kennzeichnung der *Pseudo-Inverseneigenschaft* dienen wird;
- die Frage, ob  $U_0$  *eindeutig existiert* etc.

Lässt man nun die Quadratgestalt als Vorbedingung des Prozesses einer Inversenbildung fallen und orientiert sich an der originalen rechteckigen  $2 \times 3$ -Ausgangsgestalt von  $A$ , so ist der  $3 \times 2$ -Rechteck„block“  $U$  als „Pseudoinverse“ motiviert, vgl. Abbildung 4.15.

The image shows a CAS interface with the following code and results:

```

• U:=matrix([[[-2,1],[3,-1],[0,0]]]) // (6)
 (-2 1)
 (3 -1)
 (0 0)

• U*B; L := U*B + (E1(3) - U*A)*X // (7)
 (-30) (3*x - 30)
 (60) (-5*x + 60)
 (0) (z)

• A*L // (8)
 (30)
 (30)

```

Abbildung 4.15: Zur mentalen Konstruktion einer Pseudoinversen  $U$  am Referenzproblem *Leonardo* und ihre Aktion zur Produktion einer speziellen Lösung  $U \cdot B$  und der vollen parametrisierten Lösungsmenge  $L$  des zugehörigen singulären LGS.

Die mentale (Neu-)Konstruktion des Konzeptes einer Pseudoinversen  $U$  zum singulären LGS LEONARDO ordnet somit lokal einen reichhaltigen Phänomenmix nicht-trivialer algebraischer Phänomene in einer beziehungshaltigen mathematischen Situation durch genuin mathematische Tätigkeiten, die zudem in der anschließenden Exaktifizierungsphase auf S-Niveau thematisiert und vernetzt werden:

- $U * B$  als Pendant zu  $A^{-1} * B$  erzeugt *eine* spezielle (statt *der* eindeutigen) Lösung;
- *die Lösungsmenge eines singulären LGS ist matrixorientiert formulierbar* und ähnelt in seiner äußeren Form der Parametergleichung  $P + V * t$  einer Geraden.

Die anfangs aufgeworfenen Phänomene im Umfeld der Singularität des Referenz-LGS LEONARDO sind damit sowohl theoretisch geklärt und eingeordnet als auch praktisch gelöst. Die Begriffsbildung der Pseudoinversen wird im Themenkreis der „überbestimmten“ LGS erneut aufgegriffen und dort zu einem vorläufigen Ende gedacht.

Nach dieser Darstellung der Leitidee der partiellen Invertierbarkeit skizziere ich im Anhang die hypothetische Lerntrajektorie, die dem zugehörigen CAS-Lernparcours K ... P zu Grunde liegt. Die hypothetische Lerntrajektorie selbst sei abschließend tabellarisch wie folgt zusammengefasst.

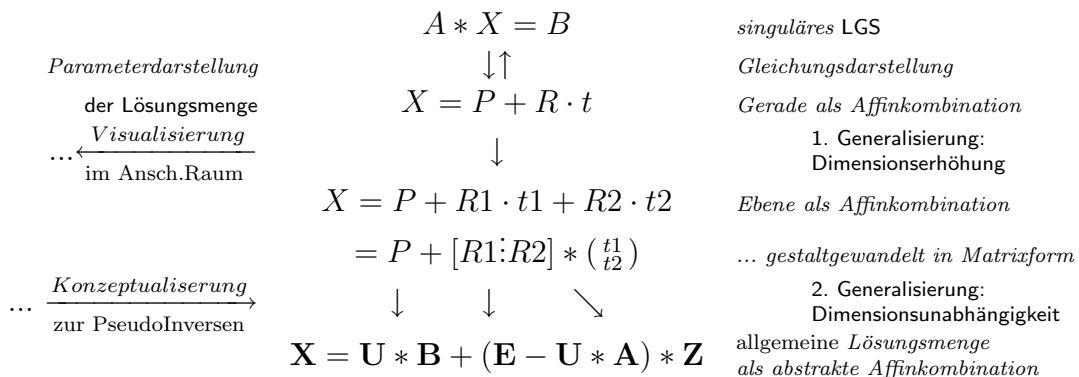


Tabelle 4.7: Zur *musterorientierten* bottom-up-Konstruktion der allgemeinen Lösungsformel für *beliebige* LGS mit Hilfe des Konzeptes der Pseudoinversen;  $U$  ist dabei eine Pseudoinverse von  $A$  und  $Z$  der Parametervektor. Ein Gestaltwandel der Ebenengleichung fördert dabei die Mustererkennung.

Nach der hier vorgeschlagenen CAS-intensiven und matrizenorientierten Revision der schulischen Linearen Algebra wird *auf eine zweite Abstraktionsphase zur invarianten abbildungssprachlichen Formulierung des Gegenstandsbereiches verzichtet* und die Konzepte *Kern, Bild, Rang* etc. bleiben der universitären Ausbildung vorbehalten. Eine zweite Beschreibungssprache für die gleiche lokale Wissensdomäne LGS könnte durch die sprachliche Duplizierung in unmittelbarer zeitlicher Nähe Irritationen provozieren und damit zu einer Beeinträchtigung des concept image „LGS“ führen.

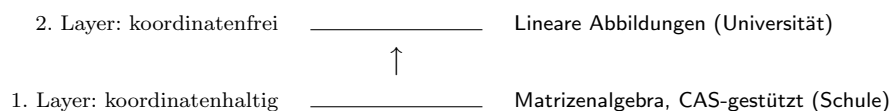




Tabelle 4.8: Zur Beschränkung der schulischen linearen Algebra auf eine CAS-gestützte matrizenorientierte Lösungstheorie von LGS auf einer mittleren Abstraktionsebene

### 4.3.4 Skalarprodukt

Die zentrale didaktische Leitlinie des vierten CAS-Parcours Q ... T zielt auf eine *phänomenologisch orientierte Einführung des Skalarproduktes*, welches direkt in der kompakten Matrixform  $X^t * Y$  aus der Normalenform einer Ebene entnommen und im CAS sowohl funktional als auch prädikativ-relational formuliert wird. Dieses neu konstruierte mathematische Objekt „Skalarprodukt“ wird anschließend zur Konstruktion der abgeleiteten Konzepte wie Länge, Distanz, Winkel oder Orthogonalprojektion auf der Schemaebene herangezogen.

Als für die epistemologische Entwicklung der lokalen Wissensdomäne paradigmatisches Referenzproblem<sup>21</sup> wird das innermathematische Problem der „*geometrischen Interpretation der Koordinatenform*“ eines  $1 \times 3$ -LGS verwendet. Diese Problemstellung fungiert einerseits als *Modell-zur* Entdeckung der algebraischen Beschreibungsform des kanonischen Skalarproduktes, ist aber andererseits auch als *Modell-für* die Einordnung von neuen Begriffen in den Begriffszusammenhang einer wissenschaftlichen Theorie zu verstehen, d. h. der Lernparcours dient nicht nur der innermathematischen Wissenskonstruktion des Euklidischen Anschauungsraumes, sondern verweist erneut auf allgemeine Prozesse der Epistemologie, vgl. Abbildung 4.16.

Ein zweites paradigmatisches Referenzproblem „*Kranbrücke*“<sup>22</sup> führt u. a. auf die Bestimmung des *Abstandes eines Punktes von einer Geraden* und verknüpft das *zentrale geometrische Konzept der Orthogonalprojektion* mit dem algebraischen Konzept des Skalarproduktes. Daraus wird insbesondere die *Grundvorstellung des Skalarproduktes*  $\vec{a} \bullet \vec{b}$  als Produkt der Länge von  $\vec{a}$  und der Länge der Orthogonalprojektion von  $\vec{b}$  auf  $\vec{a}$  (Rechtecksfläche) sowie die Winkelberechnung zwischen zwei Vektoren gewonnen.

Der regionale Themenkreis *Skalarprodukt* ist in folgende Etappen eines CAS-Parcours organisiert und unterbricht nur scheinbar die didaktische Leitlinie „LGS“, da er explizit an den Themenstrang *unterbestimmte LGS* anknüpft und in der Modellierung des *Abstandsproblems* „*Punkt–Gerade*“ als *Projektionsproblem* auf den folgenden Themenstrang der *überbestimmten LGS* verweist:

#### Q Normalenform und Orthogonalität

<sup>21</sup>In der Überarbeitung des Parcours wurde (nach JAHNKE [129, S. 99, A2]) die Modellierung der Bahn einer auf einer schrägen Ebene rollenden Kugel gewählt, vgl. LA-Q1.PDF.

<sup>22</sup>vgl. [11, S. 98, Aufgabe 1]; auch das reichhaltige Problem der „*optimalen Segelstellung*“ aus GLASER [106, S. 65, Aufgabe 14] bietet sich hierfür an; es wird als produktive Aufgabe in T4 behandelt.

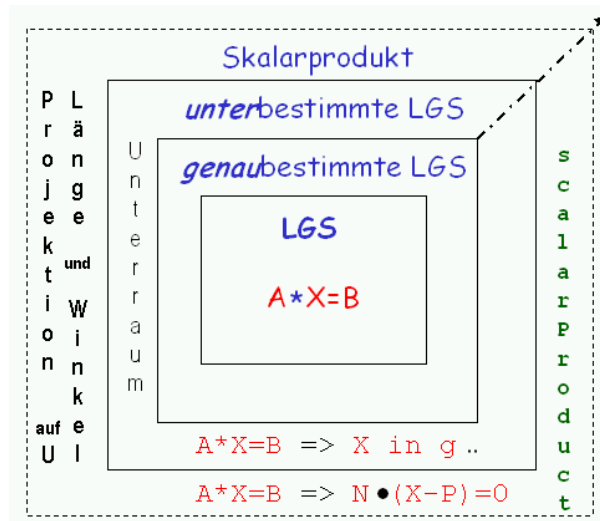


Abbildung 4.16: Die Normalenform  $N \bullet (X - P) = 0$  als *phänomenorientiertes* Referenzproblem zur Einführung des Skalarproduktes unter dem zentralen Aspekt der *Orthogonalität* und seine konsekutive thematische Verortung in der etablierten Wissensdomäne „unterbestimmte LGS“.

**R** Orthogonalität und Skalarprodukt

**S** Orthogonalprojektion, Länge und Abstand

**T** Produktive Aufgaben: Winkel und Vektorräume

Abbildung D.1 zeigt die grobe Verteilung der Aktivitäten in den CAS-Etappen auf die verschiedenen Themenstränge.

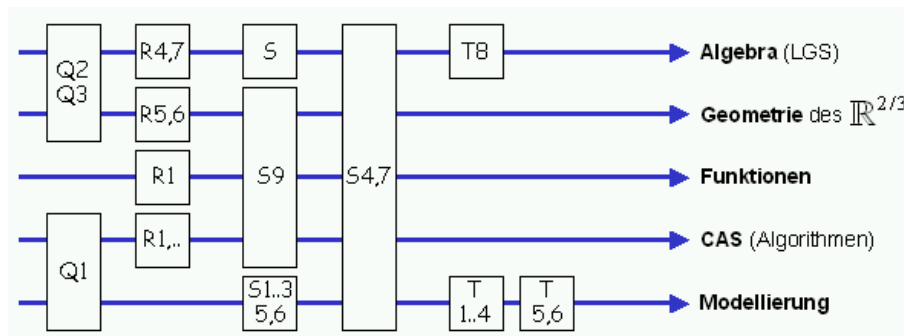


Abbildung 4.17: Zur Auffaserung der Themenstränge im vierten Lernparcours und die Verteilung der Etappenstationen auf die einzelnen thematischen Leitlinien

Im Folgenden elaboriere ich die didaktische Besonderheit dieses CAS-Parcours, begründe die „Unterbrechung“ der Design-Linie „genau → unter → überbestimmte LGS“ und beschreibe danach kurz die Funktion der einzelnen Etappen.

### Das didaktische Spezifikum der CAS-Lerntrajektorie *Skalarprodukt*.

TIETZE et al. [197, S. 185] weisen in ihrer Analyse von Einführungen des Skalarproduktes  $\vec{a} \bullet \vec{b}$  zweier Vektoren vier verschiedene methodische Zugänge nach: einen *geometrischen* via  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$  bzw.  $|\vec{a}| \cdot |\text{Proj}_{\vec{a}}(\vec{b})|$ , einen *arithmetischen* via  $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ , (zwei) *gemischte* via Cosinussatz und einen *axiomatischen* via Produkteigenschaften. Dabei plädieren sie für eine Anbindung des Konzeptes unter der Kernidee des Messens.

Untersucht man neuere matrizen- und anwendungsorientierte einführende Lehrwerke<sup>23</sup>, so findet man dagegen die *fundamentale Idee der Orthogonalität* weniger unter dem Aspekt des Messens eines Winkels als vielmehr dem einer Beziehung zwischen geometrischen Objekten betont. Als inner- und außermathematische Anwendungsfelder dienen dabei insbesondere vielgestaltige *Approximationsprobleme* („least squares“).

Während die klassischen Lerntrajektorien zum Skalarprodukt in deutschen Schulbüchern also auf *theoretischen Herleitungen* via Pythagoras bzw. Cosinussatz oder auf Anlehnungen an physikalische Begriffsbildungen basieren und damit nach eigenen Unterrichtsverfahren latent brüchig<sup>24</sup> verankert sind, orientiert sich die hier vorgeschlagene CAS-Trajektorie an originären *phänomenologischen Explorationen* an  $1 \times 3$ -LGS, d. h. an der vertrauten Koordinatenform bzw. der *Normalenform einer Lösungsebene*, vgl. Abbildung 4.9. Das Untersuchungsobjekt liegt also noch im aktuellen Wachstumsring und an der Schwelle zum nächsten. Die nachfolgende Tabelle 4.9 stellt einige schulbuchtypische Zugänge mit ihrer thematischen Abfolge zusammen. Die letzte Tabellenzeile verdeutlicht die hier vorgeschlagene Lerntrajektorie.

|                                                                                                                                                               |   |                                                                                 |   |                                                                                    |   |                                                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------------------------------------|---|------------------------------------------------------------------------------------|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>LS</b> <sub>[11, S. 96 ff]:</sub><br>Länge; Abstand $d(P, Q)$                                                                                              | ↷ | Projektion; Winkel<br>⊢ geom./algeb.Skp „“                                      | ↷ | Eigenschaften von $\cdot$<br>Beweise mittels $\cdot$                               | ↷ | Normalf. $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ ;<br>Orthogonalität $g \perp E, \dots$<br>Abstände $d(P, g), \dots$<br>Schnittwinkel $\angle(g, E), \dots$ |
| <b>EdM</b> <sub>[112, S. 60-86]:</sub><br>Länge; Abstand                                                                                                      | ↷ | Orthogonalität $\vec{u} \perp \vec{v}$<br>⊢ algebraisches Skp *<br>Rechenregeln | ↷ | Projektion ⊢ geom.Skp<br>Winkel $\angle(\vec{u}, \vec{v})$<br>Abstände zu/zw. $g$  | ↷ | Normalf. $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ ;<br>Abstände zu/zw. $E$ ; ...<br>Winkel $\angle(g, E), \dots$                                             |
| <b><math>\Sigma</math></b> <sub>[106, S. 61-78]:</sub><br>Normalform <sup>S.28</sup> :<br>$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$<br>Länge; Abstand <sup>S.31</sup> | ↷ | algeb.& geom. Form<br>des Skp $\vec{a} \cdot \vec{b}$ <sup>S.62</sup>           | ↷ | Rechenregeln für ... · ...                                                         | ↷ | Normalf. $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ ;<br>Winkel $\angle(g, E), \dots$<br>Abstände mit HESSEnf                                                  |
| <b>KRV</b> <sub>[141, S. 55-62]:</sub><br>Abstand <sup>S.11</sup><br>Hesse-Nf <sup>S.18,37,...</sup>                                                          | ↷ | algebraisches Skp $\vec{u}\vec{v}$<br>alg. Eigenschaften <sup>S.56</sup>        | ↷ | geom. Eigenschaften:<br>Orthogonalität, Länge,<br>Winkelberechnung <sup>S.56</sup> | ↷ | Normalf. $\vec{n}(\vec{x} - \vec{p}) = 0$<br>Abstände zu/zw. $E$ <sup>S.56</sup>                                                                            |

<sup>23</sup>wie z. B. LAY [146], STRANG [192], DEEBA [45] oder WILLIAMS [210]. LAY leitet den Themenkreis über eine Motivation mit *überbestimmten* LGS ein (am Beispiel der Neuvermessung der USA, vgl. [a. a. O., S. 367]), betitelt das Kapitel „Orthogonality and Least-Squares“ und versteht das Konzept der *Orthogonalprojektion* als die fundamentale Leitidee. Die ATLAST-Group nennt ihr einschlägiges Kapitel „Orthogonality“ – und nicht etwa „Inner Products“, vgl. [149, S. 123]. Auch in meinem Ansatz führen alle zentralen Projektaufgaben wie das *Wasser-Kontaminations-Projekt* [a. a. O., S. 134] auf überbestimmte LGS.

<sup>24</sup>Der Cosinussatz wird an vielen Schulen nicht mehr behandelt bzw. liegt ca. 1,5 Jahre zurück und Physik haben viele SchülerInnen in der Sekundarstufe II abgewählt.



|                                                                                                        |   |                                                                                                                                       |   |                                                                           |   |                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------------------------------|---|-------------------------------------------------------------------------------|
| <b>A&amp;T</b> [4, S. 98-112]:<br>Länge u. Abstand <sup>S.100</sup><br>Orthogonalität <sup>S.102</sup> | ↷ | alg.-geo. Skp <sup>S.105</sup> $\vec{x} * \vec{y}$<br>alg. Eigenschaften <sup>S.107</sup>                                             | ↷ | geom. Eigenschaften:<br>Orthogonalität, Länge,<br>Winkel <sup>S.107</sup> | ↷ | Normalform: —<br>Abstände: —                                                  |
| <b>hLT</b> :<br>S.v.Pyth. ⊢ Abstand<br>Orthog. ⇔ S.v.Pyth.                                             | ⇒ | Definition Skp •                                                                                                                      | ⇒ | algebr. Eigenschaften:<br>pos.def., symmetrische<br>Bilinearform          | ∧ | geom. Konzepte:<br>Orthogonalität,<br>Abstände, Winkel, ...                   |
| <b>CAS<sub>wL</sub></b> :<br>Normalf. $ax+by+cz=d$ ,<br>Orthogonalität und „ho-<br>mogene“ Lösungen    | ↷ | alg. Skp: $X \bullet Y \xleftrightarrow{\text{CAS}} X \sim * Y$<br>Fundamentalerkenntnis:<br>„ $\text{Kern}(A) \perp \text{Row}(A)$ “ | ↷ | Konzeptkonstruktionen:<br>Länge, Abstand, Projek-<br>tion, Winkel         | ↷ | Orthogonalprojektion<br>und MP-Pseudoinverse;<br>Anbahnung von $\ddot{u}$ LGS |

Tabelle 4.9: Zur didaktischen Inversion bei der Einführung des Konzeptes des Skalarproduktes; klassische Lerntrajektorien ausgewählter Schulbücher basieren auf *theoretischen Herleitungen* via Pythagoras bzw. Cosinussatz, die hier vorgeschlagene CAS-Trajektorie dagegen auf *phänomenologischen Explorationen* an der Normalenform als unterbestimmtem LGS.

Dieser hier vorgeschlagene „fünfte“ epistemologisch-phänomenorientierte Zugang zum Skalarprodukt nutzt entscheidend die Visualisierungsfunktion eines CAS zu einer Exploration der Orthogonalitätsbeziehung und der resultierenden Einsicht in die Evidenz einer fundamentalen Eigenschaft homogener LGS, den sog. *zweiten Fundamentalsatz*<sup>25</sup> der Linearen Algebra:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \quad \text{Kern}(A) \perp \text{Bild}(A) \quad \wedge \quad \text{Kern}(A) \oplus \text{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$$

### Ein phänomenologisch orientierter Zugang zum Skalarprodukt.

Will man *Phänomene von Orthogonalität* mathematisch erfassen und beschreiben, benötigt man als theoretisches Rahmenkonzept den *Prähilbertraum*, also einen Vektorraum mit einem inneren Produkt (Skalarprodukt). Dieses Setting erlaubt dann die Modellierung von Situationen, die auch jenseits der vertrauten Rechtwinkligkeit im Anschauungsraum liegen. Das Referenzproblem *Normalenform* in Etappe Q nutzt solche Orthogonalitätsphänomene zur Anbahnung der Begriffsbildung Skalarprodukt aus. Ausgangspunkt ist die Fragestellung:

Kann man die Zahlen 1,2,3,4 in der impliziten Ebenengleichung  $E : 1x + 2y + 3z = 4$  geometrisch deuten, d. h. sich diese Zahlen anschaulich vorstellen bzw. zur Skizzierung der Ebene verwenden?

Interpretiert man die Ebenengleichung als Frage nach der Lösungsmenge des unterbestimmten  $1 \times 3$ -LGS  $1x + 2y + 3z = 4$  mit der Matrixgestalt  $A * X = B$ , also hier

$$(1 \quad 2 \quad 3) * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (4)$$

<sup>25</sup>vgl. z. B. [144, S. 185]

so ist man für eine geometrische Darstellung im CAS gezwungen, die *einzeilige Matrix*  $(1\ 2\ 3)$  als *einspaltigen Vektor* zu interpretieren, da vereinbarungsgemäß nur Spaltenvektoren gezeichnet werden können. Die Ausgangsfrage führt somit zwangsläufig auf die Exploration des „Koeffizientenvektors“  $N := (1\ 2\ 3)^t = A^t$  der Ebene  $E : 1x + 2y + 3z = 4$ . Lässt man vom CAS eine Auswahl der Lösungen  $[4 - 2y - 3z, y, z]$  sowie den Normalvektor  $N$  plotten, so erhält man folgende Visualisierungssequenz, die zu vielfältigen unerwarteten Entdeckungen Anlass gibt, siehe Abbildung 4.18.

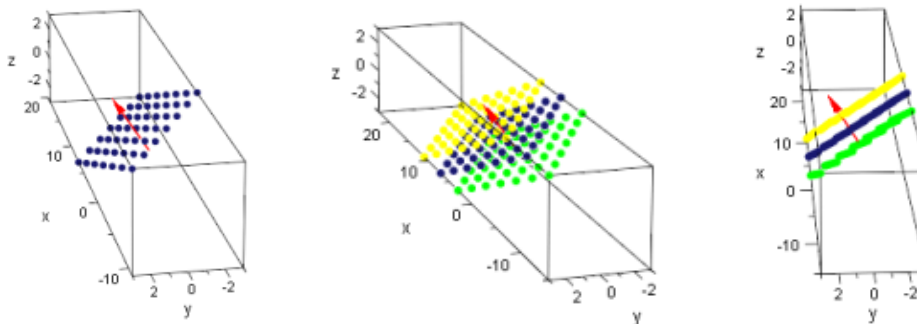


Abbildung 4.18: Die Normalenform als Ankervorstellung zum Konzept der Orthogonalität und zum algebraischen *Skalarprodukt*: Lösungsmenge  $[4 - 2y - 3z, y, z]$  und Normalvektor  $N := (1\ 2\ 3)^t$  der Ebene  $E : 1x + 2y + 3z = 4$  (er)scheinen orthogonal; die Variation der rechten Seite 4 zu 8 bzw. 0 verschiebt die Lösungsmenge nur parallel, wie die per Hand im CAS gedrehten Szenen demonstrieren.

Während die Visualisierung der *Lösungsmenge als Punktmenge* das Phänomen der Orthogonalität von Kern und Zeilenraum zeigt, so gilt es doch, die Besonderheit des Kerns im Vergleich zu den „inhomogenen Lösungen“ zu betonen: Lässt man die *Lösungsmengen als Vektoren* zeichnen, so erweist sich bei dieser (er)weiter(t)en Erkundung lediglich der Kern als orthogonal zum Zeilenraum, vgl. siehe Abbildung 4.19. Diese Einsicht ist fundamental und wird im hier gewählten Referenzkontext simultan mit der Konstruktion des Skalarproduktkonzeptes entwickelt.

Die Explorations werden nun zu den algebraisch formulierten Konzepten der Orthogonalität und des *Skalarproduktes zweier Vektoren als ein für geometrische Betrachtungen und Untersuchungen uminterpretiertes Produkt zweier Matrizen* (einer Zeile mit einer Spalte) verdichtet:

- `skp :=(X,Y) -> op( transpose(X)*Y ); //selbstgebautes SKalarProdukt`
- `skp( ~[1,2,3], ~[1,2,3] ) //für zwei (Spalten-)Vektoren`

14

Dabei wird die Analogie ausgenutzt, dass man zur geometrischen Veranschaulichung im CAS die *einzeilige Matrix*  $X$  vertikal als Vektor(spalte) notieren muss und dann das *typographische Senkrecht-zueinander-Schreiben*  $(1\ 2)$ , „ $\perp$ “  $\ast \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  der Matrizen des Matrizenproduktes *als geometrisches Senkrecht-Stehen*  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , „ $\perp$ “  $\bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  der zugehörigen Spalten-Vektoren

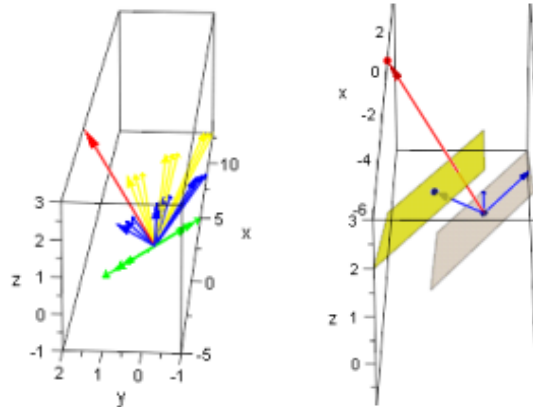


Abbildung 4.19: Zur Vermeidung einer Fehlvorstellung zeigt die Visualisierung der Lösungsmenge als *Vektormenge* im Einklang mit dem 2<sup>ten</sup> Fundamentalsatz das Phänomen, dass nur *die Lösung(svektoren)* (grün) des zugehörigen homogenen LGS  $1x+2y+3z=0$  auf dem Normalvektor (rot) senkrecht stehen. Das rechte Bild visualisiert den Kern (grau) als Spann der zwei Basislösungen und den affinen Lösungsraum (ocker), auf den eine spezielle Lösung (blau) weist.

interpretieren kann – und zwar beobachtungs- (und nachfolgend definitions-) gemäß genau dann, wenn das so definierte Skalarprodukt Null ergibt.

Notiert man das funktional formulierte, selbst konstruierte Skalarprodukt `skp` symbolsprachlich im CAS (oder auch in der Handrechnung) z. B. durch das selbst erfundene Symbol  $\sim *$ <sup>26</sup>

- `operator("~*", skp, Nary, 1799): //lies: ~* als Skalar-Produkt`

so gestattet der so erklärte CAS-Operator als neues Multiplikationszeichen<sup>27</sup> das Skalarprodukt wie üblich als binäre Relation prädikativ zu notieren. Damit sind die fachsprachlichen Konventionen im CAS gespiegelt und z.B. die algebraischen Eigenschaften des Skalarproduktes oder die Normalenform geeignet formulierbar, siehe z.B. Abbildung 4.20.

Damit ist *das zentrale Konzept des Skalarproduktes phänomenologisch aus einer angeleiteten Exploration der Orthogonalität (auch im CAS) matrizenorientiert rekonstruiert* und an

<sup>26</sup>Liest man die Tilde  $\sim$  als das „transponierte S“ im ersten Buchstaben des Wortes „Skalar“ und den Multiplikationsstern  $*$  als „Produkt“, so buchstabiert sich das Symbolaggregat  $\sim *$  wörtlich als **SkalarP**rodukt.

<sup>27</sup>Die Wahl (k)eines Operationszeichens kann verständniskritisch sein; wie obige Übersicht 4.11 zeigt, verwenden LS und  $\Sigma$  als Zeichen für das Skalarprodukt das Symbol „·“ (Punkt), EdM und A&T das Symbol „\*“ (Stern) und KRV das leere Symbol „“(Konvention des Weglassens eines Multiplikationszeichens). Eine verständnisorientierte Exaktifizierung (z. B. die Herleitung der Projektionsformel, s. u.) auf der formalen Schemaebene, die zwischen Matrizenmultiplikation, Skalarprodukt und gewöhnlichem Produkt mental pendelt, setzt aber eine klar diskriminierende symbolsprachliche Notation für die diversen mentalen Objekte voraus.

```

• X:=~[x,y,z]; N:=~[1,2,3]
• 1*x+2*y+3*z=4 // Koordinatenform von E
• N ~* X - 4 = 0
• P:=~[0,2,0]; N~*X - N~*P =0
 (0)
 (2)
 (0) x+2·y+3·z-4=0
• N ~* (X - P) =0 // Normalenform von E
 x+2·y+3·z-4=0

```

Abbildung 4.20: Die Normalenform der Ebene  $E : 1x + 2y + 3z = 4$ , im CAS formuliert mit Hilfe des selbst konstruierten binären Skalarproduktoperators  $\sim *$

den Themenstrang der *unterbestimmten* LGS  $A * X = 0$  algebraisch und geometrisch angekoppelt. Ein solcher phänomenologischer Zugang zum Skalarprodukt ist CAS-frei kaum denkbar, da die Erzeugung von händischen Skizzen ein Wissen um die Orthogonalität bzw. die Kennzeichnung der Orthogonalität mit Hilfe des Satzes von Pythagoras a priori voraussetzt, Orthogonalität also nicht beobachtbar machen kann.

Im Einklang mit der innermathematischen „Lineare Algebra“-theoretischen Lerntrajektorie<sup>28</sup> sind nun die Konzepte der Länge, des Abstandes und der Orthogonalprojektion als abgeleitete Begriffe aus dem Skalarprodukt konstruierbar.

### Die Orthogonalprojektion als zentrale Grundkonstruktion.

Der im Folgenden laborierte Vorschlag einer CAS-gestützten Behandlung der Orthogonalprojektion als zentrale geometrische Grundkonstruktion mit Hilfe des Skalarproduktes weist folgende didaktische Spezifika auf:

1. Die *Einbettung* in einen angereicherten situativen Referenzkontext „*Kranbrücke*<sup>29</sup>“, der eine verifizierende CAS-Animation der Grundvorstellung gestattet;
2. die *matrizensprachliche dimensionsfreie Darstellung* der klassischen 1-dimensionalen Projektionsformel als Anker vielfältiger Verallgemeinerungen (z. B. GRAM-SCHMIDT-Prozess, QR-Zerlegung) und Anwendungen (z. B. Abstands- und Regressionsberechnungen) sowie als Ausgangspunkt einer *analogiebasierten Entdeckung der expliziten Pseudoinversenformel*;
3. die *Exaktifizierung* beider Darstellungsformen durch eine CAS-angebahnte Schematisierung, die beide Betrachtungslinien auf hohem formalem Niveau zusammenführt;

<sup>28</sup>vgl. Abbildung 4.11, Zeile hLT.

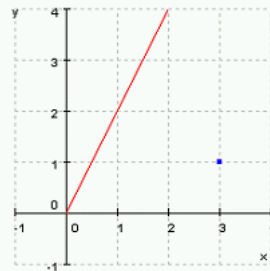
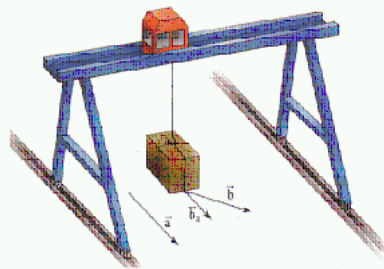
<sup>29</sup>bzw. Kugelbahn auf schräger Ebene

4. die Identifikation einer speziellen Pseudoinversen als algebraischer Kern einer Orthogonalprojektion und damit die Anbindung an die Theorie der unterbestimmten LGS und die Anbahnung von überbestimmten LGS;
5. die Verstetigung der Grundvorstellung einer Linearkombination, welche die Orthogonalprojektion auf einen Unterraum aus den Basisvektoren des Unterraumes „orthogonalitätserhaltend zusammenmischt“<sup>30</sup>;
6. die Grundvorstellung des Wertes des kanonischen Skalarproduktes als Rechtecksfläche  $|\vec{a}| \cdot |\text{Proj}_{\vec{a}}(\vec{b})|$ .

Diese sechs Aspekte beschreiben wir nun etwas genauer.

**ad 1: Der Referenzkontext „Kranbrücke“.** Laufkatze und Brücke einer Kranbrücke<sup>31</sup> in Etappe R8 bewegen sich senkrecht zueinander und gestatten so jede Position im Schienenbereich anzusteuern. Denkt man sich einen Sonnenlichteinfall parallel zur Brücke, so wird die punktuell in der Spitze von  $\vec{b}$  gedachte Last als Schatten senkrecht auf die Bewegungsrichtung  $\vec{a}$  projiziert, vgl. Abbildung 4.21.

### 8 Kranbrücke vs. Abstand eines Punktes von einer Geraden



1 Mit dem Brückenkran soll eine Last an die Spitze von Vektor  $\underline{b}$  verschoben werden. Dazu wird die Kranbrücke um einen Vektor  $\underline{b}_a$  in Richtung des Vektors  $\underline{a}$  verschoben. Gleichzeitig wird die Laufkatze, an der die Last hängt, senkrecht dazu bewegt.

2 Welchen Abstand hat der Punkt  $P(3;1)$  von der Geraden mit der Gleichung  $g: y=2x$ ?

Haben beide Fragestellungen miteinander zu tun?  
Versuche mehrere Lösungsideen zur Lösung von 2 entwickeln.

Abbildung 4.21: Die Kranbrücke als situatives Referenzproblem zur Anbahnung des concept image „Orthogonalprojektion von ... auf ...“ und das parallel gestellte Problem der Abstandsberechnung.

<sup>30</sup>Die Liste der „Mischungsgewichte“ (d. h. die *Fourierkoeffizienten* nach der Unterraum-Basisentwicklung), die, distributiv verteilt auf die Basisvektoren des Unterraumes, genau die orthogonale Projektion auf den Unterraum produziert, wird als sog. *Ausgleichslösung* eines überbestimmten LGS berechnet. Dies ist Thema eines fakultativen abschließenden Parcours.

<sup>31</sup>[11, S. 98]

In der simultan betrachteten Dekontextualisierung dieser Grundvorstellung wird der Ortsvektor der Projektionsgeraden im Gedankenexperiment so gestreckt (d. h. 1-dimensional linear kombiniert), dass der Richtungsvektor vom zu projizierenden Punkt  $P$  zur Spitze  $F$  des gestreckten Vektors orthogonal zur Projektionsgeraden steht. Die algebraische Formulierung dieser Situation führt bekanntlich über den Ansatz

$$\overrightarrow{FP} \bullet \overrightarrow{AB} = 0 \quad \text{bzw.} \quad (P - F) \bullet (B - A) = 0 \quad (4.1)$$

$$F \in g \quad \text{bzw.} \quad F = A + t \cdot (B - A) \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad A, B \in g \quad (4.2)$$

auf die Explizitformel für die Orthogonalprojektion von  $P$  auf die Gerade  $g = AB$ , die CAS-sprachlich codiert wird durch

$$\bullet \text{proj1} := (P, A, B) \rightarrow A + (P - A) \sim (B - A) / (B - A) \sim (B - A) * (B - A)$$

Damit lässt sich der Referenzkontext im CAS modellieren und animieren. Abbildung 4.22 zeigt in (1), wie der Lotfußpunkt  $F$  berechnet wird und nutzt dabei die `proj1`-Funktion als generischen Organizer. In (2) wird der gesuchte Streckfaktor  $t$  automatisch ermittelt und in der Szene zur Animation genutzt: Die Abbildung zeigt drei Schnappschüsse aus der Animation, die taktgleich den Punkt  $P$  auf  $F$  und den Schattenwurf  $\overrightarrow{O(a \cdot F)}$  von  $\overrightarrow{O(a \cdot P)}$  (mit  $a$  als Animationsparameter, der als Streckfaktor „stetig“ von 0 auf 1 anwächst) auf  $\overrightarrow{OF}$  zuwandern lässt. Damit ist die Situation durch die Wahl anderer Daten vielfältig explorierbar, z. B. ist erkennbar, dass die Größe von  $t$  von der Wahl von  $A$  und  $B$  abhängt (hier erkennbar  $\frac{1}{3}$  der Länge von  $\overrightarrow{AB}$ ).

**ad 2: Matrixdarstellung der Projektionsformel.** Die Lernenden untersuchen nun eine *vorgegebene* alternative Formel (0) für die Orthogonalprojektion, die komplett aus den Matrizen der beteiligten Objekte aufgebaut ist, und die in (1) den gleichen algebraischen Wertverlauf und in (2) die gleiche geometrische Szene erzeugt wie obige Explizitformel `proj1`. Diese Beobachtung legt die Hypothese nahe, dass `proj` und `proj1` das gleiche mathematische Objekt beschreiben, vgl. Abbildung 4.23.

**ad 3: Exaktifizierung der Evidenz.** Die starke Evidenz, dass beide Projektionsformeln `proj` = `proj1` äquivalent sind, wurde durch eine Wertverlaufsgleichheit erzeugt. Die gebildete Hypothese kann nun unterrichtlich durch eine abstrakt-exakte formale Beweisrechnung CAS-frei im Unterricht verifiziert werden. Sind nämlich  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  und  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  beliebig, so gilt<sup>32</sup>:

<sup>32</sup>In [10, S. 18, 22, 34] wird lediglich die Gültigkeit von  $\stackrel{1}{=}$  und  $\stackrel{2}{=}$  begründet. Die anschließenden Umformungen bieten dagegen den Anschluss an die allgemeine *dimensionsunabhängige* Beschreibung der Orthogonalprojektion auf einen Spaltenraum, vgl. z.B. [144, S. 191] Corollary 5.24 oder [a. a. O., S. 198 ff].

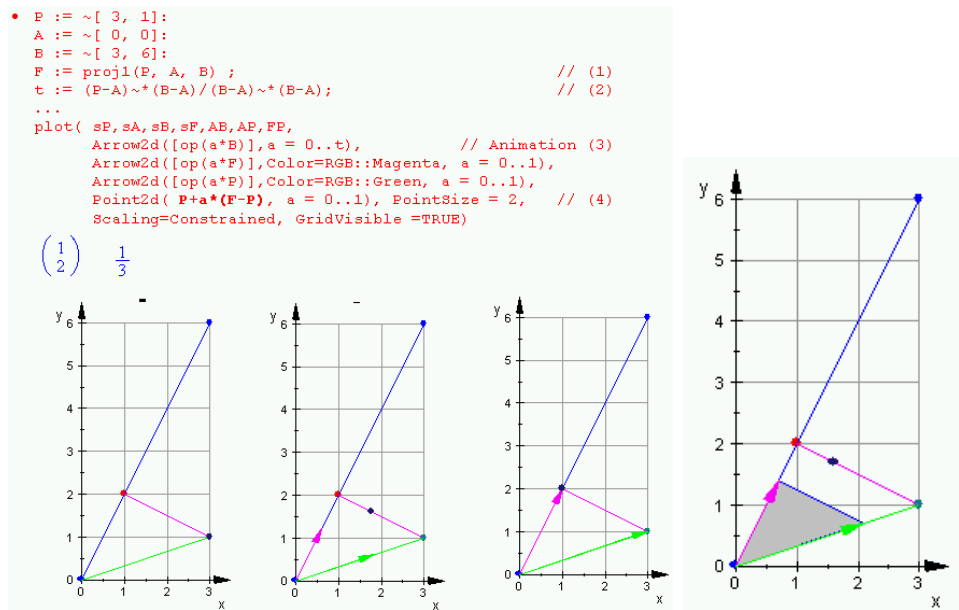


Abbildung 4.22: Drei Standbilder aus einer Animation des Referenzkontextes. Gleichung (4) läßt den Punkt  $P$  mittels der Geradengleichung  $P + a \cdot \vec{PF}$  senkrecht auf die Projektionsgerade  $AB$  fallen. - Das Bild rechts animiert einen wandernden Schattenwurf.

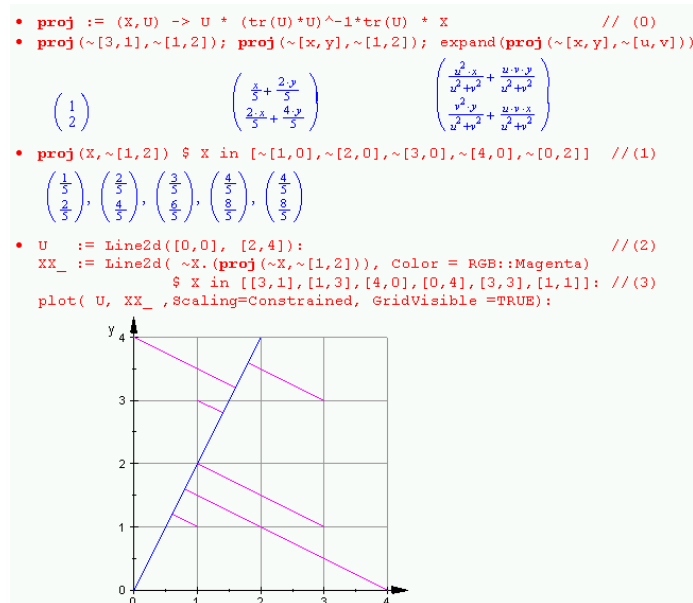


Abbildung 4.23: Die Matrixdarstellung der Orthogonalprojektion  $\text{proj}$ ;  $XX$  sind die Projektionslinien  $X$ -beliebiger Punkte der Anschauungsebene mit ihren Bildpunkten  $\underline{X}$  unter der Projektion.

$$\begin{aligned}
\text{Proj}(X, U) &\stackrel{1}{=} \frac{X \bullet U}{U \bullet U} \cdot U = \frac{ux + vy}{u^2 + v^2} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
&\stackrel{2}{=} \begin{pmatrix} \frac{ux+vy}{u^2+v^2} \cdot u \\ \frac{ux+vy}{u^2+v^2} \cdot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{u^2+v^2} & \frac{vu}{u^2+v^2} \\ \frac{uv}{u^2+v^2} & \frac{v^2}{u^2+v^2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&\stackrel{3}{=} \frac{1}{u^2 + v^2} \cdot \begin{pmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{u^2 + v^2} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} * (u \ v) * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&\stackrel{4}{=} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} * \frac{1}{u^2 + v^2} \cdot (u \ v) * X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} * \frac{1}{(u \ v) * \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} \cdot (u \ v) * X \\
&\stackrel{5}{=} U * (U^t * U)^{-1} * U^t * X \\
&\stackrel{6}{=} U * \mathbf{U}^+ * X
\end{aligned}$$

Diese Umformung begründet nicht nur eine im CAS phänomenologisch gewonnene Hypothese, sondern liefert zugleich eine *dimensionsunabhängige explizite Projektionsformel*, die Projektionen auf Anschauungsebenen und die Lösung zugehöriger Abstandsberechnungen liefert. Die für die Schule zu komplizierten expliziten Konstruktionen solcher Projektionen als  $\text{Proj}_U = Q * Q^t$ <sup>33</sup> mittels einer GRAM-SCHMIDT-orthonormalisierten Spaltenraumbasis  $Q$  von  $U$  bzw. aus einer gleichwertigen QR-Zerlegung  $U = Q * R$  von  $U$  wird so vermieden. Jedoch können analog z. B. auch 2-dimensionale Projektionsformeln von den Lernenden verifiziert und so der Verdacht auf die allgemeine Gültigkeit der Formel  $\stackrel{5}{=}$  verstärkt werden. Man beachte auch, dass bei dem hier gewählten Zugang, nämlich zwei Hypothesen über die Darstellbarkeit einer Projektion konkurrieren zu lassen, das Ziel der Beweisführung an beiden Enden vor Augen steht und so die Beweistechnik „ $\rightarrow \leftarrow$ “ des „aufeinanderzu“-Rechnens ausgehend von beiden Enden sinngemäß ist. Stünde die Matrixform nicht zur Verfügung, müsste man die Termumformung deus ex machina „blind“ darauf hin führen. Zu erwägen ist, dass man andererseits deduktiv gemäß dieser Umformung zur allgemeinen Matrixform der Projektion hinführen könnte.

**ad 4: Identifizierung der MOORE-PENROSE-Pseudoinversen.** Abbildung 4.24 zeigt die automatisierte CAS-Berechnung der Projektionsmatrix<sup>34</sup> einer Orthogonalprojektion auf einen Unterraum  $U$ . Einerseits sind damit z. B. Projektionen auf beliebige 1-dimensionale Richtungen in der Anschauungsebene (vgl. (2) und (3)) formulier- und studierbar. Andererseits ist der Matrixfaktor  $(U^t * U)^{-1} * U^t$  aus der Projektionsmatrix  $\text{Proj}(U)$  in (1) gedanklich abspaltbar und als  $\text{mpi}(U)$  benennbar. Dieser so identifizierte Faktor eines Projektors  $\text{Proj}(U) = U * \text{mpi}(U)$  stellt sich als eine Pseudoinverse heraus, die sog. MOORE-PENROSE-Pseudoinverse. Dies wird in der Etappe explorativ entfaltet und bietet so einen Anschluss an die Theorie der unterbestimmten LGS.

<sup>33</sup>vgl. [a. a. O., S. 201]

<sup>34</sup>ARTMANN&TÖRNER sprechen in [4, S. 133] von einem „Projektor.“



- `Proj := U -> U*(tr(U)*U)^-1 * tr(U)` // (1)  

$$U \rightarrow \frac{U \cdot \text{tr}(U)}{\text{tr}(U) \cdot U}$$
- `Proj(~[1,2]), Proj(~[u,v])` // (2)  

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} \frac{u^2}{u^2+v^2} & \frac{u \cdot v}{u^2+v^2} \\ \frac{u \cdot v}{u^2+v^2} & \frac{v^2}{u^2+v^2} \end{array} \right)$$
- `Proj(~[1,2]) * ~[3,1]; Proj(~[u,v]) * ~[x,y]` // (3)  

$$\left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \frac{u^2 \cdot x}{u^2+v^2} + \frac{u \cdot v \cdot y}{u^2+v^2} \\ \frac{v^2 \cdot y}{u^2+v^2} + \frac{u \cdot v \cdot x}{u^2+v^2} \end{array} \right)$$

Abbildung 4.24: zur vollautomatischen Berechnung der Projektionsmatrix  $\text{Proj}(U)$  auf einen Unterraum  $U$  (als „Projektor“)

Zusätzlich wird damit aber auch die synthetische Projektor-Eigenschaft  $P^2 = P$  einer Orthogonalprojektion  $P$  im CAS und auch händisch leicht nachweisbar, vgl. Abbildung 4.25. Da sowohl `proj` als auch `proj1 = Proj` diese Eigenschaft besitzen, ist die Allgemeingültigkeit von `proj = proj1` auch aus höherer Sicht durch eine Charakterisierung auf Schemaebene a posteriori begründet.

- `simplify ( Proj(~[u,v]) * Proj(~[u,v]) )`  

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{u^2}{u^2+v^2} & \frac{u \cdot v}{u^2+v^2} \\ \frac{u \cdot v}{u^2+v^2} & \frac{v^2}{u^2+v^2} \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} \frac{u^4}{(u^2+v^2)^2} + \frac{u^2 \cdot v^2}{(u^2+v^2)^2} & \frac{u \cdot v^3}{(u^2+v^2)^2} + \frac{u^3 \cdot v}{(u^2+v^2)^2} \\ \frac{u \cdot v^3}{(u^2+v^2)^2} + \frac{u^3 \cdot v}{(u^2+v^2)^2} & \frac{v^4}{(u^2+v^2)^2} + \frac{u^2 \cdot v^2}{(u^2+v^2)^2} \end{array} \right)$$

Abbildung 4.25: Die synthetische Projektionseigenschaft  $P^2 = P$  wird im CAS nach einer automatischen Ausdrucksvereinfachung des inneren komplizierten Terms per `simplify` erkennbar. Die fehlenden, vom CAS unterdrückten Termumformungsschritte bieten sich für eine händische Verifikation an.

**ad 5: Die lineare Kombination einer Orthogonalprojektion** aus der Unterraumbasis  $U$  wurde als zentrale Grundvorstellung schon angesprochen und wird fokussierend im letzten Parcours *Überbestimmte LGS* im Rahmen von Abstandsproblemen und Regressionsproblemen bedeutsam.

**ad 6: Das Skalarprodukt als Rechtecksfläche.** Mit Hilfe der Explizitformeln für die Orthogonalprojektion lässt sich nun die weitere Grundvorstellung vom *Wert des kanonischen Skalarproduktes*  $\vec{a} \bullet \vec{b}$  als *Fläche eines Rechtecks* geometrisch veranschaulichen und algebraisch explorieren und verifizieren. Damit ist insbesondere der Anschluss an die Vorstellung eines gewöhnlichen Zahlenproduktes  $a \cdot b$  als Fläche eines Rechtecks gesichert und das Skalarprodukt als Generalisierung eines Produktes zweier Zahlen<sup>35</sup> erkennbar. Ein erstes geometrisches Indiz für die Interpretation des Skalarproduktes als eine Rechtecksfläche liefert eine Ergänzung des situativen Referenzkontextes, vgl. Abbildung 4.26.

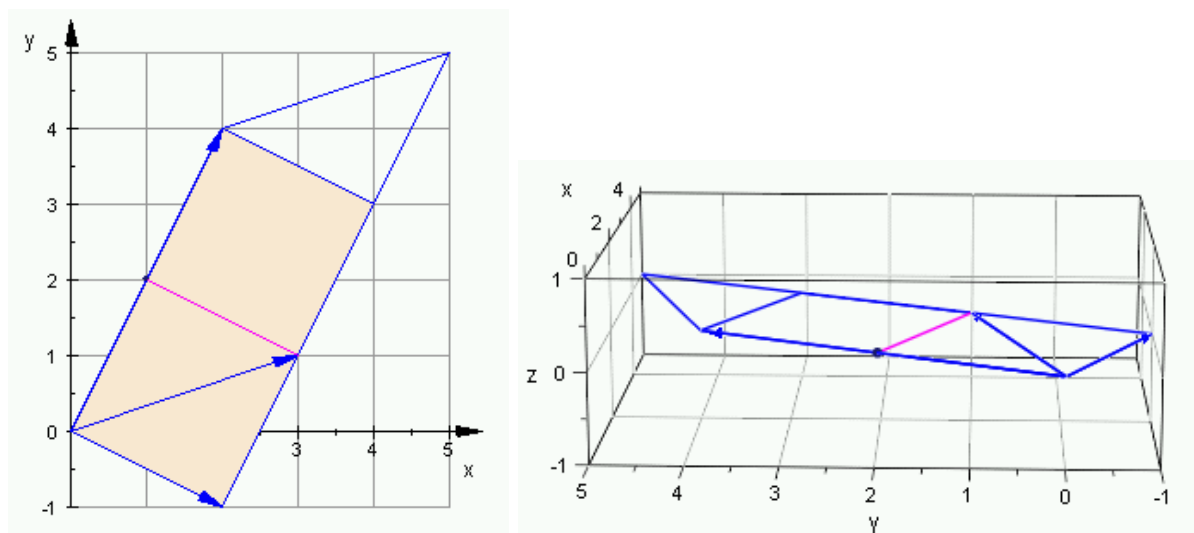


Abbildung 4.26: Die *Rechteckvorstellung des Skalarproduktes* im Referenzkontext (links) und in 3D-Positionierung (rechts); letztere weckt das Verständnis dafür, dass die zwischen den Faktor-Vektoren aufgespannte Parallelogrammfläche für den Skalarproduktwert relevant ist.

Ein zweites Indiz wird der Lernperson durch eine Anreicherung des variierten Referenzkontextes um einen algebraischen Termvergleich angeboten, vgl. Abbildung 4.27, Formel (1) bzw. (3),(4). Wählt man die Komponenten der Vektoren  $A$  und  $B$  allgemein, so ergibt der CAS-Output bereits den notwendigen Beweis der Vermutung, dass generell  $|\vec{a}| \cdot |Proj_{\vec{a}}(\vec{b})|$  ist.

Insgesamt weist der vierte CAS-Parcours also eine Fülle an reichhaltigem produktivem Lernmaterial auf, welches CAS-aktivitätsbasiert und phänomenologisch fundiert zu einer stabilen Konzeptvorstellung vom Skalarprodukt führen möchte.

Die hypothetische Lerntrajektorie sei abschließend tabellarisch wie folgt zusammengefasst.

$$\text{Normalenform} \quad N \bullet (X - P) = 0 = A * X \quad \text{als unterbestimmtes LGS}$$

<sup>35</sup>Das Produkt zweier  $1 \times 1$ -Matrizen  $A = (a)$ ,  $B = (b) \in \mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$  ist  $(a)^t * (b) = (ab) \equiv ab = (a) \bullet (b) = \sum_{i=1}^1 a \cdot b$

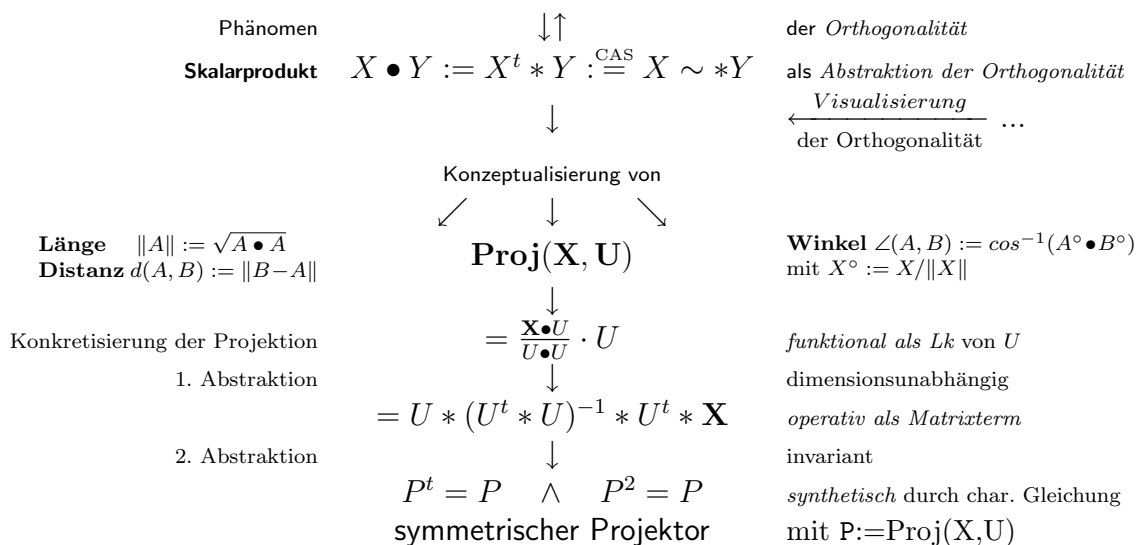


Tabelle 4.10: Zur *phänomenorientierten* bottom-up-Konstruktion des Skalarproduktes und seiner thematischen Derivate Länge, Abstand und Orthogonalprojektion.

### 4.3.5 Überbestimmte LGS

Dieser Themenkreis liegt in Form des Skriptums LINDNER [153]<sup>36</sup> vor und wird daher hier nur um die Explikation seiner didaktischen Leitlinie und die begründete Auswahl eines paradigmatischen Referenzproblems ergänzt.

Die hypothetische Lerntrajektorie des fünften Themenkreises zielt auf die *epistemologisch orientierte Behandlung* von CAS-gestützten *Lösungsmethoden für überbestimmte lineare Gleichungssysteme*. Die *Grundorientierung an Lösungsverfahren für singuläre LGS* wird zunächst dadurch in Frage gestellt, dass die bekannten Instrumente **gaussJordan** bzw. **matlinsolve** solche überbestimmten LGS oft als „*nicht lösbar*“ einschätzen, indem z. B. die leere Menge als Antwort präsentiert wird. Sich in den zugehörigen Problemkontexten damit nicht zufrieden zu geben, sondern zunächst intuitiv und danach systematisch nach Lösungen bzw. Lösungsmethoden zu forschen, darf als eine erhebliche Herausforderung an den Lerner betrachtet werden. Diese Situation kann zugleich als prototypisch für eine reale Forschungssituation und damit für einen allgemeinen Wissensbildungsprozesse betrachtet werden.

**Paradigmatische Referenzprobleme** des Themenkreises *überbestimmte LGS* könnten u. a. die „*Entwicklung der Gewichtszunahme bei Säuglingen*“ aus WERNER [207, S. 590,

<sup>36</sup>vgl. dazu die dortigen Abschnitte 1.1, 1.7 und Kapitel 2.

**b)** Berechne für die Daten aus dem Modell nun einerseits das Skalarprodukt  $A \cdot B$  und andererseits u.a. das Produkt  $|A| \cdot |\text{proj}(B, A)|$ :

```

• B := [3,1]: // Koordinaten der Vektorspitzen
 A := [2,4]:
 ~A ~* ~B; // (1)
 Laenge(proj(~B,~A)); // (2)
Laenge(~A) * Laenge(proj(~B,~A)); // (3)
Laenge(~B) * Laenge(proj(~A,~B)) // (4)

10, sqrt(5), 10, 10

```

Vergleiche die Ergebnisse. Was fällt auf? Erkläre.  
 Welche Konsequenz kann man aus (2) und (3) ziehen?  
 Wie kann man sich *das Skalarprodukt* zweier Vektoren "*anschaulich vorstellen*"?

**c)** Versuche eine allgemeingültige Begründung für die Beobachtungen zu geben.

Abbildung 4.27: Der CAS-algebraische *Nachweis der Rechteckvorstellung eines Skalarproduktwertes*: Die Seiten(vektoren) des gedachten Rechtecks bestehen aus einem der Faktoren und der orthogonalen Projektion des anderen Faktors auf den Ersten. Das Produkt der zugehörigen Längen ist gleich groß wie der Wert des Skalarproduktes.

Beispiel (3-52), 2.] oder die *Modellierung der Computertomographie*<sup>37</sup> sein. Die didaktische Funktion dieser situativen Kontexte besteht u. a.

- in der Erfahrung und Exploration des *Phänomens der Überbestimmtheit* eines LGS;
- im *Modell-zur* Entwicklung geeigneter Lösungsverfahren für überbestimmte LGS, hier der Erkenntnis der Wiederverwendbarkeit der MOORE–PENROSE–Pseudoinversen und der Implementation eines neuen iterativen Lösungsalgorithmus;
- im *Modell-für* die Revision einer wissenschaftlichen Theorie, die angesichts neuartiger Phänomene eine Justierung ihrer Konzepte betreiben muss.

Diese metakognitiven Fragestellungen mit ihrem allgemeinbildenden Charakter legen – anregt durch die unerwarteten epistemologischen Phänomene und der *denkwürdigen Frage nach Lösungen „unlösbarer“ linearer Gleichungssysteme* – einen weiteren Wachstumsring im lokalen Wissensbereich an, vgl. die folgende Abbildung 4.28<sup>38</sup>.

**CAS-Parcours.** Ein zugehöriges interaktives, *epistemologisch orientiertes* Lernarrangement könnte sein didaktisches Vorhaben in einem Parcours mit folgenden Etappen organisieren:

U Phänomene der Überbestimmtheit (z. B. Computer-Tomographie)

<sup>37</sup>vgl. z. B. das MuPAD-Notebook von G. VOM STEIN

<sup>38</sup>Die Bilder der Röntgenaufnahme eines Tumors und seines mathematischen Falschfarbenmodells findet man im Notebook von VOM STEIN.

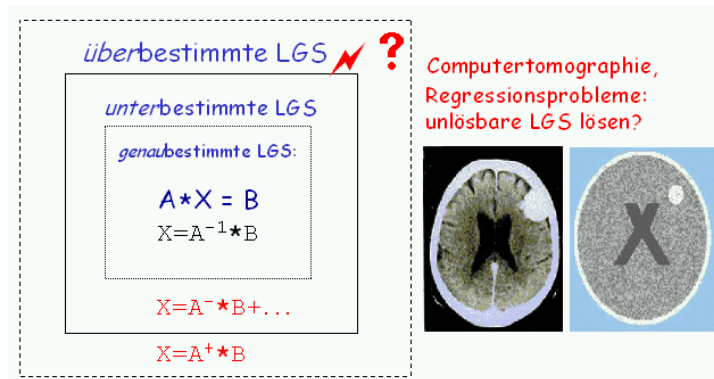


Abbildung 4.28: Das paradigmatische Referenzproblem „*Computertomographie*“ als Modellierungsaufgabe mit epistemologischem Charakter: Die Problemstellung führt auf ein *überbestimmtes* LGS. Solche LGS sind mit den Methoden der inneren Wissensdomäne nicht lösbar, d. h. dort thematisch nicht vertretbar. Diese epistemologische Barriere erfordert wissenschaftstheoretisch die Anlage eines neuen Wissens-Wachstumsrings und eine Revision der Lösungsmethoden.

V optimale Näherungslösungen und die MOORE-PENROSE-Pseudoinverse (MPI)

W iterativ-algorithmische Lösungsmethode(n)

X Produktive Aufgaben

**Etappe U** sollte ein Problemensemble anbieten, deren Probleme aus verschiedenen Kontexten bzw. Perspektiven auf überbestimmte LGS führen und erste *Lösungsintuitionen ausbilden*: Abstandsprobleme, Regressionsprobleme, Schnittprobleme im Anschauungsraum. Eine mögliche Auswahl prototypischer Problemstellungen findet sich in LINDNER [a. a. O., S. 10–12]. Als Modellierungsproblem wird die Computer-Tomographie behandelt<sup>39</sup>.

Obige Problemstellungen sollten das folgende Forschungsmotiv verdeutlichen: Selbst wenn ein lineares Gleichungssystem  $A * X = B$  inkonsistent ist, so sucht man in praktisch wichtigen Fällen nach einem Weg, wenigstens eine „beste“ Näherungslösung zu finden. Anstatt im Wissen um die Unlösbarkeit von  $A * X = B$  einfach aufzugeben, geht man einen Kompromiss ein und versucht einen Vektor  $X_o$  zu finden, so dass  $A * X_o$  wenigstens so „nahe wie möglich“ an  $B$  liegt: kurz  $B_o := A * X_o \approx B$ .

Damit sind die Konzepte *Ausgleichslösung*  $X_o$  und *Bestapproximation alias Proximum*  $B_o$  im neuen Wissenring eingeführt und unterscheidbar. Aktivitätsbasiert kann man nun Ausgleichslösungen und zugehörige Proxima zunächst theoriefrei durch „probierendes Schießen mit dem CAS“ auf das „Ziel“  $B$  näherungsweise berechnen und nach systematischen Lösungsmethoden fahnden lassen, vgl. LINDNER [a. a. O., S. 16 ff].

<sup>39</sup>In [111, S. 143] wird die CT-Modellierung durch ein eindeutig lösbares LGS interpretiert und damit ihrer eigentlichen epistemologischen Phänomenologie beraubt: der *Überbestimmtheit*.

**Etappe V** studiert und löst matrixorientiert eine datenreduzierte Version<sup>40</sup> eines Regressionsproblems, an der geometrische Zusammenhänge und begriffliche Vernetzungen CAS-gestützt visualisiert werden können:

Problem: Finde die zu den drei Punkten (0; 3), (1; 0) und (2; 0) am „nächsten“ verlaufende Gerade.

Abbildung 4.29 skizziert verkürzt prinzipielle CAS-Explorationen des Problems: Ein geometrisch orientierter Lösungsansatz nutzt zur *Bestapproximation* die Erfahrung der *Orthogonalität* bzw. die Methode der Orthogonalprojektion und ein algebraisch orientierter Ansatz die Erfahrung der Lösbarkeit quadratischer LGS bzw. die *Methode des Quadratischmachens mittels Transponierung*, d. h. die sog. „Normalgleichung“  $A^t * A * X = A^t * B$  zu  $A * X = B$ .

Das Phänomen, dass in allen explorierten Fällen sowohl eine Orthogonalprojektion als auch die Normalgleichung die (gleiche) Ausgleichslösung  $X_o$  produzieren, führt die Lernenden auf die *Forschungshypothese der Gleichwertigkeit beider Methoden* und die Frage nach den mathematischen Gründen dafür. Die zugehörige nachgelagerte Exaktifizierung bildet den Erkenntniszugewinn im neuen Wissensring und vernetzt die Konzepte auf S-Niveau.

```

• A:=matrix([[0,1],[1,1],[2,1]]);
 X:=matrix([m,b]);
 B:=matrix([3,0,0]);
 A*X=B // (1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• matlinsolve(A,B); // (2)
 []

• Xo:=mpi(A)*B; matlinsolve((tr(A)*A).(tr(A)*B)) // (3)

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

• proj(B,A); proj(B,A)-B; Xo[1]*col(A,1)+Xo[2]*col(A,2) // (4)

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

• proj(B,A) ~* (proj(B,A)-B); // (5a)
 tr(proj(B,A)) * (proj(B,A)-B) // (5b)
 0 (0)

```

Abbildung 4.29: Das vereinfachte paradigmatische Referenzproblem „Ausgleichsgerade“ zu den drei Punkten (0; 3), (1; 0) und (2; 0) als *überbestimmtes* LGS.

Aus dem Ansatz  $g: y = mx + b$  und  $(0; 3) \in g \Leftrightarrow m \cdot 0 + b \cdot 1 = 3$  etc. kann die Lernperson in (1) das zugehörige *überstimmte* LGS gewinnen. (2) zeigt seine *Unlösbarkeit* und (3) die Be-

<sup>40</sup>vgl. [193, S. 184 ff]

rechnung der Ausgleichslösung  $X_o$  mit Hilfe der geometrisch motivierten MOORE-PENROSE-Inversen bzw. alternativ mit dem algebraischen Normalgleichungsansatz. Die Skript-Zeile (4) berechnet die Orthogonalzerlegung der rechten Seite  $B$  mit Hilfe der Orthogonalprojektion auf den Spaltenraum  $Col(A)$  von  $A$  und verifiziert, dass die Projektion  $proj(B, A)$  sich linear aus den Spalten von  $A$  kombinieren lässt – und zwar mit den Koordinaten der Ausgleichslösung  $X_o$  als Entwicklungskoeffizienten! Die Prüfung der Orthogonalität erfolgt in (5a) mit dem implementierten Skalarprodukt  $\sim *$  und in (5b) äquivalent matrixsprachlich. Die geometrische Visualisierung der algebraischen Resultate im Anschauungsraum zeigt Abbildung 4.30 im linken Teilbild.

```

• A:=matrix([[0,1],[1,1],[2,1]]);
 X:=matrix([m,b]);
 B:=matrix([3,0,0]);
 A*X=B // (1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• matlinsolve(A,B) // (2)
[]
• Xo:=mpi(A)*B // (3)

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

• proj(B,A); proj(B,A)-B // (4)

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$


```

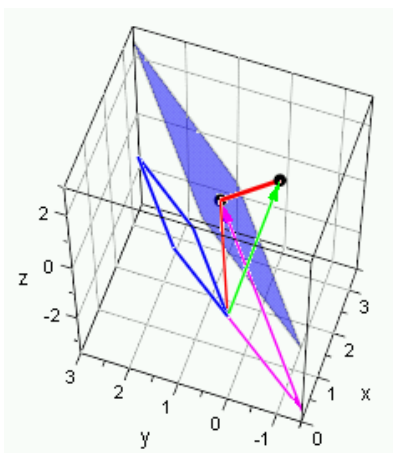


Abbildung 4.30: Vernetzende Interpretationen am Referenzkontext „Ausgleichsgerade“

Die CAS-Routine `visualCol`<sup>41</sup> visualisiert dem Lerner automatisch den Spaltenraum der Koeffizientenmatrix  $A$  des LGS als blau gerändertes Parallelogramm, dessen Kantenvektoren die Spalten von  $A$  sind. Die CAS-Routine `visualProj` zeichnet in diese Szene die Orthogonalprojektion  $proj(B, A)$  der rechten Gleichungsseite  $B$  auf den Spaltenraum von  $A$  sowie die dazu orthogonale Komponente  $proj(B, A) - B$  in Rot ein. Zur Verdeutlichung wird der Spaltenraum als blau gefülltes Parallelogramm zusätzlich um den Projektionsfußpunkt gelegt, der Ortsvektor  $\overrightarrow{OB}$  zur rechten Seite des LGS grün eingezeichnet sowie die Linearkombination  $Proj_A(B) = X_{o1} \cdot A_1 + X_{o2} \cdot A_2$  bzw.  $proj(B,A)=Xo[1]*col(A,1)+Xo[2]*col(A,2)$  in CAS-Notation in der Farbe Magenta zur Kontrolle eingetragen. Diese geometrische Deutung der Lösung des überbestimmten LGS wird dabei zusätzlich im rechten Teilbild um die *Interpretation der Lösung im Modell* angereichert; dabei kann die Lernperson vielfältige Beziehungen erkennen und Vernetzungen knüpfen:

<sup>41</sup>aus dem selbst implementierten MuPAD-Modul `mpi.mu`, vgl. [153, S. 107 ff].

- Das Proximum  $B_o := A * mpi(A) * B = Proj(B, A)$  ist die Orthogonalprojektion der rechten Seite  $B$  auf den Spaltenraum  $Col(A)$  von  $A$  und enthält als ihren algebraischen Lösungskern die Berechnung der Ausgleichslösung  $X_o := mpi(A) * B$  mit Hilfe der MOORE-PENROSE-Pseudoinversen  $mpi(A)$ , d.h.  $B_o = A * X_o \approx B$ .
- Die *Koordinaten der Projektion* von  $B$  auf  $A$  sind die Ordinatenlängen bis zur Ausgleichsgeraden und die vertikalen Distanzen der Datenpunkte zur Ausgleichsgeraden sind interpretierbar als *Koordinaten des Fehler(vektor)s*  $B - B_o = B - proj(B, A)$ .
- Der Fehler(vektor)  $B - B_o$  ist geometrisch interpretierbar als Richtungsvektor von  $B$  zum Projektions„fuß“punkt  $B_o$  und die *Größe des Fehlers* als seine Länge  $|B - B_o|$ .
- Das Proximum  $B_o = Proj(B, A)$  ist *aus den Spalten von  $A$  linear kombinierbar und seine Entwicklungskoeffizienten sind die Koordinaten der Ausgleichslösung  $X_o$* : das ist der tiefere Sinn der Interpretation der Matrix-Gleichung  $B_o = A * X_o$  als Darstellung einer Linearkombination.

**Etappe W** entwickelt, implementiert und erprobt ein iteratives Lösungsverfahren für das Normalgleichungssystem eines überbestimmten LGS nach dem Vorschlag von VOM STEIN, s. o.

**Etappe X** bietet einen Problempool an produktiven Aufgaben, vgl. [153, S. 54–68].

**Exaktifizierungsphase.** Dieser Lernparcours führt zu einem Höhepunkt der matrizenorientierten schulischen Linearen Algebra, weil die Kernidee der partiellen Invertierung einer Matrix zu einer Pseudo-Inversen sowohl algebraische als auch geometrische Einsichten verknüpfen hilft. Die spezielle MOORE-PENROSE-INVERSE – geometrisch entpuppt als Faktor einer Orthogonalprojektion – erweist sich als „kanonisches“<sup>42</sup> *Lösungsinstrument für überbestimmte LGS* und insbesondere für Ausgleichsrechnungen.

Abschließend gilt es die Äquivalenz der *impliziten Charakterisierung der Ausgleichslösung*  $X_o$  durch die Normalgleichung  $A^t * A * X = A^t * B$  und ihre explizite Berechnung durch die MOORE-PENROSE-INVERSE  $X_o = mpi(A) * B$  durch eine mathematische Argumentation zu verifizieren. Diese verortet die gewonnenen mathematischen Einsichten systematisch im lokalen Wissensnetz.

Anstatt die Ausgleichslösung über die für Schüler schwierig zu verifizierende Bedingung als Minimum der Menge  $\{X \mid |A * X_o - B| \leq |A * X - B|\}$  zu beschreiben<sup>43</sup>, wurde der leichtere Weg über die Lösung der Normalgleichung gegangen. Grundlegend dafür ist das folgende Kriterium, vgl. [144, S. 188, Theorem 5.22]:

<sup>42</sup>Damit wird die Berechnung von Regressionsgeraden etc. auf hohem Niveau zum begrifflichen und CAS-expliziten „Einzeiler“ *komprimiert* und in einem gewissen Sinne (bei „Wegdenken“ der vielfältigen thematischen Querbezüge) auch *trivialisiert*: Auch ohne Verständnis der fundamentalen Zusammenhänge ist eine „blinde“ Lösungsermittlung möglich.

<sup>43</sup>Diese Definition lag aber implizit der Schussmethode aus Etappe U zugrunde und die Distanz-Funktion lieferte dort das Maß für die Güte der Approximation.



**Satz (Normalgleichungskriterium für das Proximum)** Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^m$ . Dann ist  $X_o \in \mathbb{R}^n$  genau dann ein Proximum von  $A * X = B$ , wenn  $X_o$  eine Lösung der Normalgleichung  $A^t * A * X = A^t * B$  ist.

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Sei dazu  $B$  orthogonal zerlegt in seine Komponente  $B_o := \text{proj}_A(B)$  parallel zu (in)  $\text{Col}(A)$  und die dazu orthogonale Komponente  $B_n := B - B_o$ , d. h.  $B = B_o + B_n \in \text{Col}(A) \oplus \text{Kern}(A^t)$ . Insbesondere ist dann  $B_n \perp \text{Col}(A)$ , d. h.  $A^t * B_n = 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} X_o \text{ ist ein Proximum} & \stackrel{p.d.}{\Leftrightarrow} A * X_o = B_o := \text{proj}_A(B) \\ & \Rightarrow A * X_o - B = A * X_o - (B_o + B_n) = -B_n \\ & \stackrel{A^t *}{\Rightarrow} A^t * A * X_o - A^t * B = A^t * (-B_n) = 0 \\ & \Rightarrow A^t * A * X_o = A^t * B \\ \text{d.h.} & \quad X_o \text{ löst die Normalgleichung } A^t * A * X_o = A^t * B \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt:

$$\begin{aligned} X_o \text{ löse } A^t * A * X = A^t * B & \Rightarrow 0 = A^t * A * X_o - A^t * B = A^t * (A * X_o - B) \\ & \Rightarrow 0 = A^t * (A * X_o - B_o - B_n) \stackrel{A^t * B_n = 0}{=} A^t * (A * X_o - B_o) \\ & \Rightarrow 0 = A * X_o - B_o \quad [\in \text{Kern}(A^t) \cap \text{Col}(A) = \{0\}] \\ & \Rightarrow A * X_o = B_o \stackrel{p.d.}{=} \text{proj}_A(B) \\ & \Rightarrow X_o \text{ ist ein Proximum von } A * X = B \end{aligned}$$

□

Diese Argumentation wird in LINDNER [153, S. 65] in Form eines mathematischen Dialoges für die Schule elementarisiert. Nimmt man an, dass die Spalten von  $A$  linear-unabhängig sind, so ist  $A$  injektiv und das zugehörige LGS  $A * X = B_o$  ist eindeutig lösbar, vgl. [144, S. 191]. Insbesondere gelten dann die Explizitformeln  $\text{proj}_A(B) = A * \text{mpi}(A) * B$  und  $\text{mpi}(A) = (A^t * A)^{-1} * A^t$ . Beschränkt man sich für die Schule auf diesen (Haupt)Fall, so hat man folgende elementare Argumentation für obiges Kriterium:

$$\begin{aligned} X_o \text{ ist ein Proximum} & \stackrel{p.d.}{\Leftrightarrow} A * X_o = B_o := \text{proj}_A(B) = A * \text{mpi}(A) * B \\ & \Leftrightarrow A * X_o = A * (A^t * A)^{-1} * A^t * B \\ & \Leftrightarrow A^t * A * X_o = A^t * A * (A^t * A)^{-1} * A^t * B \\ & \Leftrightarrow A^t * A * X_o = A^t * B \\ \text{d.h.} & \quad X_o \text{ löst die Normalgleichung } A^t * A * X_o = A^t * B \quad \square \end{aligned}$$

Die hypothetische Lerntrajektorie sei abschließend tabellarisch wie folgt zusammengefasst.

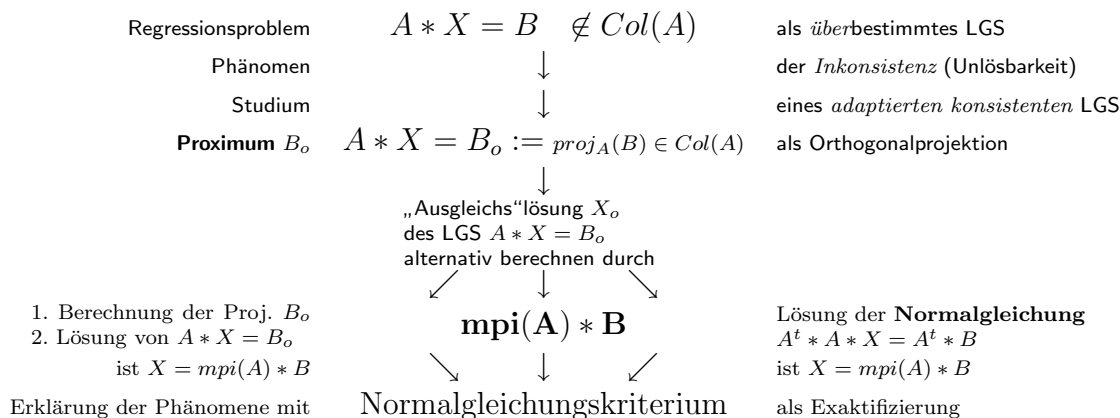


Tabelle 4.11: Zur *phänomenorientierten* bottom-up-Konstruktion der Ausgleichslösung und des Proximums eines überbestimmten LGS alternativ mittels Orthogonalprojektion, MOORE-PENROSE-Pseudoinverse oder Normalgleichung sowie das Normalgleichungskriterium als Äquivalenznachweis.

Damit liegt ein geschlossenes Konzept für eine matrixorientierte und CAS-gestützte schulische Lineare Algebra vor.

## 4.4 Lokale Kurs-Strategien am Beispiel des Stücklistenproblems

Das Stücklistenproblem ist eine Perle der schulischen Linearen Algebra. Es ist das Verdienst des Buches von ARTMANN & TÖRNER [4, S. 171 ff] hierzu eine elementare *schulunterrichtliche* Behandlungsmöglichkeit aufgezeigt zu haben. Spätere Darstellungen findet man z. B. in KROLL et. al. [141, S. 162 ff]; eine didaktische Einordnung wird in TIETZE et al. [197] vorgenommen<sup>44</sup>. Eine frühe computer-nutzende Darstellung in der prozeduralen Programmiersprache PASCAL findet sich in [147, S. 199–203]. Üblicherweise wird das Stücklistenproblem dabei zur Anwendung der „erworbenen Kenntnisse“ [4, S. 171] eingesetzt oder man möchte „an verschiedenen Beispielen zeigen, wie man Matrizen verwenden kann“, [141, S. 159]. Daher kommt das Stücklistenproblem erst gegen Ende oder im späten Verlauf des Curriculums zur Anwendung, *nachdem alle* für den Modellierungs- und Lösungsprozess *wesentlichen Begriffsbildungen wie Matrix, Linearität, Einheitsmatrix, inverse Matrix, Gauß-Algorithmus* etc. *abgeschlossen sind*.

<sup>44</sup>auch in JAHNKE [129, S. 234 ff] findet man neuerdings das Stücklistenproblem als Arbeitsauftrag

### Das Stücklistenproblem als Anwendungsproblem.

In TIETZE et al. [197] wird das Stücklistenproblem auf S. 46 ff, S. 48 und S. 107 als Problemstellung einer *anwendungsorientierten Linearen Algebra* fachdidaktisch diskutiert. Dort heißt es auf S. 40: „Zentrale Mathematisierungsmuster sollen den Anwendungsaspekt im Mathematikunterricht repräsentieren.“ und auf S. 45: „Wir diskutieren drei typische Anwendungssituationen aus den Wirtschaftswissenschaften: [...]“. Das Stücklistenproblem wird dabei am Einführungsbeispiel von ARTMANN/TÖRNER [4, S. 171] behandelt<sup>45</sup>.

### Das Stücklistenproblem zur Konzeptkonstruktion.

Im Unterschied zur traditionellen Behandlung des Stücklistenproblems als Anwendungsproblem möchte ich hier in der Anlage eine Möglichkeit aufzeigen, das Stücklistenproblem *vor* der Behandlung des Gaußschen Algorithmus und *vor* der Einführung z. B. des Konzeptes der inversen Matrix gerade zum *Erwerb* dieser Konzepte zu verwenden, statt *Wissensanwendung* ist also *Wissenskonstruktion* intendiert. In Spießumkehr soll also das *Stücklistenproblem als ein Modell(ierungs)problem zur kontextbezogenen Anbahnung der angesprochenen Konzepte* fokussiert und geeignete CAS-Mikrowelten<sup>46</sup> zum Konzepterwerb konstruiert werden.

In der Staatsexamensarbeit<sup>47</sup> von R. KLEIN wurde eine MUPAD-Realisierung des Stücklistenproblems vorgenommen, erprobt und evaluiert. Ausgehend von dieser Vorarbeit wird in der Anlage ein komplettes Redesign vorgestellt, in das auch die Erprobungserfahrungen in einer Lehrerfortbildungsveranstaltung eingeflossen sind. Das komplette Lernarrangement wurde in einer Referendargruppe und einer Schulklasse abschließend evaluiert. Die Anlage zeigt die zugehörige genetische Dekomposition des Stücklistenproblems, die Verwendung von Stücklisten in der Praxis, begründet ihre geänderte curriculare und fachdidaktische Positionierung und analysiert ihre epistemologische Struktur als wertvollen Lerngegenstand im Unterricht der Linearen Algebra. Damit liegt abschließend auch ein Beispiel für eine Realisierung einer lokalen Kursstrategie im computer-intensiven Unterricht vor. Insbesondere demonstriere ich dabei die Kraft mathematischer Analogieschlüsse und skizziere eine methodische Umsetzung der vorgenommenen genetischen Dekomposition.

---

<sup>45</sup>Es soll hier aber angemerkt werden, dass ARTMANN/TÖRNER auch wesentlich an einer *verständnisorientierten Linearen Algebra* interessiert waren *unter Nutzung von* Anwendungskontexten und realitätsnahen Problemstellungen; sie bekennen sich [a. a. O., S. 188] explizit zu der Leitidee von G. STRANG: „*verstehbar erklären ist wichtiger als vollständig zu deduzieren*“.

<sup>46</sup>TALL spricht auch von „generischen Organizern“ vgl. [195].

<sup>47</sup>von mir seinerzeit mitbetreut



## Teil III

# Empirische Untersuchungen und Befunde



## § 5

# Empirische Befunde zu Unterrichtsepisoden

Grundlage der folgenden empirischen Studien zur Beantwortung der noch ausstehenden Forschungsfragen ist ein umfangreiches Datenmaterial, das in Form von mehreren hundert Eigenproduktionen der Lernenden als elektronische Sheetbearbeitungen, Stundenaufträge, Hausaufgaben, Klausuren unter Einsatz von CAS und 5 Abiturprüfungen mit CAS sowie als Beantwortung von zwei Fragebögen zum Mathematik- bzw. CAS-Weltbild gesammelt wurde. Zusätzlich wurden über 100 komplette Unterrichtsstunden mit Diktiergeräten bzw. MP3-Playern mitgeschnitten und ausgewertet, mit Digitalkameras wichtige Tafelbilder aufgenommen und ausgewählte Unterrichtsepisoden mit der eingebauten Videofunktion (bis zu ca. 15 Minuten Länge) aufgezeichnet.

Das vorliegende Kapitel berichtet zunächst über die *Designzyklen* in der Konstruktion des Lehrmaterials, die sich notwendigerweise mit der Weiterentwicklung der CAS-Instrumente und unter den Felderfahrungen ergaben, sowie über die zugehörige Performance der Kursgruppen im jeweiligen CAS-Abitur. Es folgt die Analyse einiger transskribierter *Unterrichtsepisoden* mit den Methoden der interpretativen Unterrichtsforschung, die in Nahaufnahmen exemplarischen Aufschluss geben möchte über die Ausbildung von Wissen unter den Bedingungen eines intensiven Computereinsatzes. Schließlich wird die *epistemologische Überzeugungsstruktur* der Lernenden hinsichtlich der Mathematik und des CAS analysiert, wie sie sich in den Fragebögen niederschlagen hat.

## 5.1 Designzyklen

Der skizzierte Entwurf der Linearen Algebra wurde in den Jahren 1997 bis 2007 erprobt und wiederholt revidiert. Im Folgenden bezeichne ich mit „Gxy“ bzw. „Lxy“ die Erprobung des didaktischen Entwurfs in einem Grund- bzw. Leistungskurs im Jahre 19xy bzw. 20xy. Die folgende Tabelle zeigt die Phasierung im Überblick.

- ↔**G97** 1. Pilotprojekt: Lineare Algebra mit DERIVE 4.05 unter DOS – Entwicklung von CAS-integrierten Selbstlerneinheiten auf Papierarbeitsblättern
- ↔**L98** 1. Evaluation: Lineare Algebra mit DERIVE unter DOS – Fortentwicklung und Erprobung der integrierten Selbstlerneinheiten
- ↔**G99** 1. Revision: Lineare Algebra mit DERIVE 4.11 unter Windows
- ↔**G01** 2. Evaluation und Revision des Designs mit Derive 5.06 - Entwicklung von CAS-integrierten Selbstlerneinheiten in Gestalt elektronischer Arbeitsblätter
- ↔**G02** 2. Pilotprojekt: Lineare Algebra mit MuPAD Light 2.0 unter Windows – Entwicklung von hyperTeX-verlinkten LaTeX-basierten und MuPAD-integrierten Selbstlerneinheiten als elektronisches Buch
- ↔**G05** 2. Revision: Umstellung der CAS-integrierten Selbstlerneinheiten auf individualisierbare MuPAD-Worksheets; Kommunikation der Schüler untereinander und mit der Lehrkraft via `lo-net.de`
- ↔**G06** 3. Evaluation und Revision: Überarbeitung der Selbstlerneinheiten sowie Umstellung des außerunterrichtlichen Kontaktes auf direkte Email-Kommunikation
- ↔**L06** 3'. Evaluation und Revision: Anreicherung durch Problemstellungen für den LK; Umstellung auf Email-Kommunikation
- ↔**L07** 4. Evaluation und Revision: parallele *CAS-additive* Flankierung eines Lehrbuchs zur Vorbereitung auf das Zentralabitur

Tabelle 5.1: Zur Entwicklung der CAS-integrierten Unterrichtseinheiten zur Linearen Algebra in aufsteigenden Designzyklen '↔' von Papierarbeitsblättern zu elektronischen Arbeitsblättern mit flankierender Emailkommunikation von 1997 bis 2007 in Grund(G)- und Leistungskursen(L).

Im Folgenden beschreibe ich die Projekte etwas detaillierter.

### Das Pilotprojekt G97–G01

Zur Realisation einer matrizenorientierten und CAS-integrierten schulischen linearen Algebra wurden lineare Abbildungen vor dem Gauß-Algorithmus behandelt, um diesen geometrisch interpretieren zu können. Folglich rückte auch die Untersuchung von Lagebeziehungen geometrischer Objekte und Schnittproblemen nach hinten. Das Kapitel über Determinanten wurde dabei nur im Leistungskurs L98 behandelt und § 6 über Computergrafik wurde aus Zeitgründen nicht realisiert.

Die *Kursplanung* G97 bis G01 sah daher folgende Sinnabschnitte vor:

#### 1 Matrizen

- 1.1 Erscheinungsformen und Darstellungen
- 1.2 Zugriffe; Typ; einfache Operationen
- 1.3 Matrizenmultiplikation



**2** Lineare Transformationen<sup>1</sup>

2.1 Koordinatensysteme; Basen und die inverse Matrix 2.2 Transformationen in der Ebene; Determinanten 2.3 Verkettungen von Transformationen; Homogenisierung per Lift und Drop 2.4 3D-Grafik und Projektionen 2.5 Lineare und affine Abbildungen (§ 2 sollte ergänzt werden um Aufgaben aus der Fraktalen Geometrie.)

**3** Determinanten<sup>2</sup>

3.1 Cramer-Regel; Cofaktorentwicklung; Adjungierte 3.2 Dach-Produkt als vektorielle Produktform der Determinante 3.3 Vektorielle Produktbildungen - das Kreuz- und das Spatprodukt 3.4 Orientierung und Volumen

**4** Lineare Gleichungssysteme<sup>3</sup>

4.1 Elementarmatrizen 4.2 Gauß-Algorithmus: matrizengeometrisch 4.3 Lösungsmengen von LGS 4.4 Pseudoinverse<sup>4</sup> zur Lösung allgemeiner LGS 4.5 Darstellungen und Schnittgebilde von Geraden und Ebenen

**5** Ausgleichsrechnung<sup>5</sup>

5.1 Euklidische Geometrie: Skalarprodukt, Länge und Winkel 5.2 Lösung von Abstandsproblemen mit Pseudoinversen 5.3 Ausgleichsrechnung mit Pseudoinversen

**6\*** Computergrafik

6.1 Parallel- und Zentralprojektionen 6.2 Clipping- und Hidden-Line-Verfahren 6.3 Darstellung räumlicher Körper in der Computergrafik

Als unterrichtliche *Orchestrierung* in der Pilotphase dienten Schülerarbeitsblätter als Selbstlernmaterial im direkten Unterrichtseinsatz. Jedes Arbeitsblatt enthielt die Darstellung einer mathematischen Konzeption mit einer integrierten CAS-Erkundung, die durch ausgewählte Stundenübungen bzw. Hausaufgaben ergänzt wurde. Knappe Lösungsvorschläge konnten i. d. R. dem folgenden Arbeitsblatt in der nächsten Sitzung entnommen werden. Jede Sequenz (z. B. § 3.1) wurde abgeschlossen durch eine Sammlung von ca. einem Dutzend vermischter Übungen zur freien Bearbeitung.

Diese Arbeitsblätter waren ergänzbar durch schülereigene designgleiche Ausarbeitungen („Lerntagebuch“) mittels einer zugehörigen WORD97-Dokumentvorlage. Das Bündel der bearbeiteten Arbeitsblätter sollte zusammen mit den CAS-Skripten und DEMO-Files ein vom Schüler partiell selbst erstelltes „interaktives Lernbuch“ ergeben. Geplant war eine Anreicherung des Aufgabenpools durch stärker anwendungsorientiertes Aufgabenmaterial in der zweiten Projekterprobungsphase. Abbildung 5.1 zeigt zwei Beispiele von Arbeitsblättern.

<sup>1</sup>Eine nach dem CAS MuPAD portierte Version dieses Kapitels wurde veröffentlicht in [155].

<sup>2</sup>Eine im CAS DERIVE geschriebene Version von Teilen dieses Kapitels wurde veröffentlicht in [151] und findet sich auf der dort beiliegenden CD.

<sup>3</sup>Eine nach dem CAS MuPAD portierte und gekürzte Version wurde veröffentlicht in [154].

<sup>4</sup>Eine frühe Darstellung der Erprobung mit DERIVE findet sich in [150].

<sup>5</sup>Eine nach dem CAS MuPAD portierte Version dieses Kapitels wurde veröffentlicht in [153].

LSW: Schulversuch CAS Arbeitsgruppe K&H

Lineare Algebra / Geometrie: CRAMERregel!!!  
© Wolfgang Lindner 9/98 v.2.0

**(8) DERIVE-Labor: Tiefere Einsicht in den inneren Aufbau der inversen Matrix  $A^{-1}$ .**

Öffne die Datei CRAMER3@.MTB durch **Eile Open** (DID: TGA, TLD).

- Bearbeite das Worksheet durch **Simplify** von #11 und #13.

#2: `LOWE("CRAMER3.MTB")`

#3: "....."

#4: "FRAGE: wenn man die Lösungen von  $A \cdot X = B$  mit der Inversen von  $A$

#5: "..... berechnen kann und nach CRAMER auch mit ADJOINT.

#6: "WELCHE Beziehung besteht dann zwischen INVERSE und ADJOINT ?

#7: "....."

#8: "Betrachte:"

#9:  $A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

#10: `DET(A) = -46`

#11: `A * A^-1`

#12:  $A \cdot \text{ADJOINT}(A) = \begin{bmatrix} -46 & 0 & 0 \\ 0 & -46 & 0 \\ 0 & 0 & -46 \end{bmatrix}$

#13:  $A \cdot \frac{\text{ADJOINT}(A)}{\text{DET}(A)}$

#14: "Was zeigt der Vergleich?"

- Welche Konsequenz erlaubt der Vergleich von #11 und #12?
- Läß von DERIVE die Inverse  $A^{-1}$  und die Adjungierte  $\text{ADJOINT}(A)$  von  $A$  interaktiv angeben. Rechne #11 und #13 zum Verständnis schriftlich nach!
- Damit ist die *Konstruktion der inversen Matrix zu einer gegebenen Matrix* abschließend durchschaut; insbesondere haben wir erkannt, dass
  - die Determinante eine entscheidende Rolle für die Existenz der inversen Matrix spielt
  - im CRAMER-Prozess die *Inversenbildung der Matrix  $A$  implizit versteckt* ist, so dass diese Lösungsmethode letztlich doch nichts anderes darstellt als  $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$
  - eine (berühmte) Beziehung zwischen der Determinante  $\text{DET}(A)$ , der Adjungierten  $\text{ADJOINT}(A)$  und der INVERSE  $A^{-1}$  einer Matrix  $A$  besteht:

$$A^{-1} = \frac{\text{ADJOINT}(A)}{\text{DET}(A)}$$

Seite 10 von 18

LSW: Schulversuch CAS Arbeitsgruppe K&H

Lineare Algebra / Geometrie: CRAMERregel!!!  
© Wolfgang Lindner 9/98 v.2.0

12. Die Spur einer Matrix und der Satz von CAYLEY.

Unter der *Spur* einer Matrix  $M$  versteht man die Summe ihrer „Haupt“diagonalelemente, z.B.:

$$\text{SPUR} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 1 + 3 = 4$$

a) Definiere die Funktion SPUR in DERIVE.  
b) Seien  $A, B$  Matrizen vom Typ  $2 \times 2$ . Zeige mit Hilfe von DERIVE folgenden *Multiplikationssatz für Determinanten*:

$$\text{DET}(A \cdot B) = \text{DET}(A) \cdot \text{DET}(B) \quad (M)$$

Teste (M) an selbstgewählten Beispielen!

c) Seien  $A, B$  Matrizen vom Typ  $2 \times 2$ . Zeige mit Hilfe von DERIVE folgenden *Additionssatz für Determinanten*:

$$\text{DET}(A + B) = \text{DET}(A) + \text{DET}(B) + \text{SPUR}(\text{ADJOINT}(A) \cdot B)$$

Unerwartet erweist sich der Additionssatz für Determinanten als schwieriger als der Multiplikationssatz (M).  
Wann gilt mir die „erwartete“ Formel  $\text{DET}(A+B) = \text{DET}(A) + \text{DET}(B)$  ?  
Teste an selbstgewählten Beispielen!

d) Sei  $M$  eine beliebige  $2 \times 2$  Matrix und  $E$  die  $2 \times 2$  Einheitsmatrix.  
Zeige mit DERIVE den sogenannten *Satz von CAYLEY*:

$$M^2 - \text{SPUR}(M) \cdot M + (\text{DET}(M)) \cdot E = 0$$

Was bezeichnet hier die 0 ?  
Überprüfe die Gültigkeit des Satzes von CAYLEY an selbstgewählten Beispielen!

- Hinweis: Die Funktion SPUR ist unter dem Namen TRACE in Derive vordefiniert.

*Die Spur einer Matrix und der Satz von CAYLEY werden demnächst bei unserem Studium einer Klassifikation linearer und affiner Abbildungen der Ebene eine entscheidende Rolle spielen.*

13. DET3 und SPAT als DET.  
Schreibe die Funktionen  $\text{DET}(a,b,c)$  bzw.  $\text{SPAT}(a,b,c)$  mit Hilfe von DERIVE eingebauter DET-Funktion.  
Damit erkennen wir, dass die *SPAT-Funktion letztlich nichts weiter als die gewöhnliche DETERMINANTE* ist – lediglich spezialisiert auf Vektoren im Anschauungsraum  $S^3$ , die nicht als Matrixspalten, sondern als drei individuelle Vektoren aufgefäht werden.

14. Zusammenfassende Wiederholung.  
Studiere zur vertiefenden und zusammenfassenden Wiederholung die Demonstrationsdatei CRAMER\_3.DMO.  
Lade wie bekannt mit **Eile Load Demo** (DID: TLD) die Datei `cramer_3`.

Seite 8 von 8

Abbildung 5.1: Beispielseiten aus den Arbeitsblättern mit integriertem CAS Derive 4.05; *links* ein Arbeitsblatt, *rechts* ein Auszug aus den *Vermischten Aufgaben*.

Die Erprobung im Grundkurs verlief unter den *Randbedingungen* des „*BLK-Modellversuchs Erprobung von Computer-Algebra-Systemen in der gymnasialen Oberstufe*“, der vom LSW<sup>6</sup> in einem dreijährigen Erprobungszeitraum<sup>7</sup> durchgeführt wurde. Der Einsatz des Computers mit Derive 4.05 für DOS (bedingt durch die veraltete Hardwareausstattung der Schule mit MS-DOS-Rechnern) war durchgängig gegeben; die Schüler verfügten durch eine Schullizenz auch zu Hause über das Programm. Die Klausuren in 13-1 und 13-2 wurden am PC durchgeführt. Der PC-Raum war - bedingt durch Belegungen des parallelen Informatikunterrichts - in 13.1 nur an einer Stunde pro Woche zugänglich. Auf Grund der unterrichtlichen Erfahrungen wurde das Skript einer unterrichtsbegleitenden Revision unterzogen und für den Einsatz für den GK01 partiell umgearbeitet, optimiert und gestrafft.

Der Kurs orientierte sich inhaltlich an den NRW-Richtlinien für Mathematik von 1999; so wurde z. B. das Matrixkonzept durchgängig benutzt und Modellierungs- und Anwendungsbezüge einbezogen. Die zugehörigen Sozialformen (z. B. Partnerarbeit am PC) führten im Verbund mit der integrierten CAS-Instrumentalisation jedoch im Vergleich zu traditionellem Unterricht zu zeitaufwändigeren Unterrichtsphasen.

Als *Evaluation* dienten u.a. Eigenproduktionen der Schüler in und außerhalb der Klausuren. Die *Abituraufgaben* wurden aus Kapazitätsgründen *ohne CAS* bearbeitet; es zeigten sich keine auffälligen Unterschiede im Bearbeitungserfolg im Vergleich zu den 'CAS-freien' Jahren davor.

*Exemplarisch* seien hier ein Auszug aus einer Klausurbearbeitung in K13.1 und eine eigenproduzierte Toolbox eines Schülers gezeigt. Von Abbildung 5.1 war in der Klausur die (noch unbekannte) Aufgabe 12 (als Klausur-Aufgabe 5) zu bearbeiten.

Die Bearbeitung, vgl. Abbildung 5.2, zeigt exemplarisch sowohl die erfolgreiche Instrumentation des Schülers als auch die Problematik der Benutzung von Derive 4<sup>8</sup> auf.

In Zeile #66 wird die Gültigkeit der Gleichung durch den Vergleich der Differenz zu 0 getestet, ein geschicktes Beweismittel. Das Ergebnis 0 wird von Derive auf die Anfrage „ $\text{DET}(A \cdot B) - \text{DET}(A) \cdot \text{DET}(B) =$ “ automatisch ergänzt. Das ist für den Leser des Outputs zunächst nicht ohne weiteres erkennbar. Zeile #68 und #71 lassen erkennen, dass dem Schüler der Unterschied der Nullobjekte (Matrix vs. Zahl) sehr wohl bewusst ist.

Der gezeigte Bildschirmausdruck zeigt aber auch software-technische Schwächen des CAS Derive, die auf Seiten des Lehrers sowie des Schülers die kognitive Ladung im Sinne der Belastung des Kurzzeitgedächtnisses unerwünscht erhöhen:

- ⊖ Zeile #60 zeigt, dass der Schüler die Zeichnung nicht speichern konnte, sondern dem Lehrer zum kontrollierenden Nachvollzug (per Imperativ „Zeichnen“) überlässt: Derive4 gestattet kein Speichern der Anweisungsfolge zur Erzeugung der Grafik bzw.

<sup>6</sup>Landesinstitut für Schule und Weiterbildung, Soest

<sup>7</sup>Auszüge meiner Erprobung wurden vom Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW in der Schrift *Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen (CAS)* veröffentlicht, vgl. [151].

<sup>8</sup>Die Klasse hatte sogar nur die DOS-basierte Version 4.05 zur Verfügung, deren noch rudimentärere Benutzeroberfläche hier schlechter lesbar wäre.

```

Algebra C:\Derive405\KLAUSURjh.MTH
#58: F2(A, B, C) = 5
#59:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

#60: "ZEICHNEN"
#61: "-----"
#62: "5)"
#63: A :=
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

#64: B :=
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

#65: "5a"
#66: DET(A * B) - DET(A) * DET(B) = 0
#67: "5b"
#68: DET(A + B) - (DET(A) + DET(B) + TRACE(ADJOINT(A) * B)) = 0
#69: "5c"
#70: M := B
#71:
$$M^2 - \text{TRACE}(M) \cdot M + \text{DET}(M) \cdot \text{IDENTITY_MATRIX}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$


```

Abbildung 5.2: Auszug aus einer Klausuraufgabenbearbeitung mit dem CAS Derive4 mit vom Schüler gelöschten Outputs.

der Zeichnung im Sheet (nur als externe Grafik), sondern verlangt das jeweils erneute interaktive und ressourcenraubende Rekonstruieren der Zeichnungen über eine Menüauswahl- und Einstellungsabfolge.

- ⊖ Der *Eingabe-Editor* (über dem [OK]-Button) besteht aus einer einzigen Zeile begrenzter Länge, die komplexe längere Terme wie die markierte Eingabe #71 nicht voll erfasst. Das notwendige Vor- und Rückwärtsscrollen im Einzeileneditor erwies sich insbesondere bei der Fehlersuche in Stresssituationen (z. B. Klausuren) als hochgradig fehleranfällig.
- ⊖ Das Originalsheet des Schülers enthielt 101 Zeilen. Diese waren durch Kommentarzeilen wie #61 oder #65 nachträglich mustergültig gegliedert. Löst man aber zur Kontrollrechnung z. B. die Zeile #66 durch *Simplify* aus, so wird der Output nicht etwa direkt nach dem Input eingefügt, sondern als Zeile #102 neu ans Ende der Befehlsfolge angehängt. In der Folge verliert man durch die Zersplitterung des Zusammenhangs von Befehl und zugehörigem Output die Orientierung über die logische Abfolge - erneut eine sinnlose kognitive Belastung, die von der eigentlichen Aufgabe ablenkt und distraktive Aktivitäten wie Umnummerierungen etc. notwendig macht. Auf Lehrerseite wird die Fehlersuche im Schülerskript dadurch teilweise unmöglich gemacht.

Die *eigenproduzierte Routinensammlung* des Schülers in Abbildung 5.3 zeigt die klare Durchdringung des Themas 'Untersuchung der Lagebeziehungen geometrischer Objekte mit Hilfe der vektoriellen Produktbildungen'. Es werden eigene Bezeichner erfunden

wie PWERT bzw. PWERT2, die sich interpretativ als gesuchte 'Parameter WERTe' des Schnitts einer Geraden und einer Ebene in #8 bzw. als Schnittgerade zweier Ebenen #11 rekonstruieren lassen. Der Identifier  $t$  in den Zeilen #9 - #11 bezeichnet hier offenbar den ersten Basisvektor der ersten Ebene und nicht einen Parameter, diese Rolle spielt die freie Variable  $r$  in #10. Man beachte die verständnisvolle logische Abfolge in der markierten Funktion Lage\_EE (*Lage von Ebene zu Ebene*), welche die möglichen Lagebeziehungen durch eine Volumenuntersuchung vornimmt.

```

#1: [InputMode := Word, CaseMode := Sensitive]
#2: SPAT(a, b, c) := a · CROSS(b, c)
#3: p : Aufpunkt der Geraden
#4: u : Richtungsvektor der Geraden
#5: q : Aufpunkt der Ebene
#6: v, w : Richtungsvektor der Ebene
#7: PWERT(p, q, u, v, w) := $\frac{(p - q) \cdot \text{CROSS}(v, w)}{-1 \cdot u \cdot \text{CROSS}(v, w)}$
#8: DURCHSTOSSPUNKT(p, u, q, v, w) := p + PWERT(p, q, u, v, w) · u
#9: PWERT2(p, t, u, q, v, w) := $\frac{(p - q) \cdot \text{CROSS}(v, w) + r \cdot \text{CROSS}(v, w) \cdot t}{\text{CROSS}(v, w) \cdot u \cdot (-1)}$
#10: RAUMGERADE(p, t, u, q, v, w) := p + r · t + PWERT2(p, t, u, q, v, w) · u
#11: LAGE_EE(p, t, u, q, v, w) :=
 If SPAT(t, u, v) = 0
 If SPAT(p - q, t, u) = 0
 "Ebenen sind identisch"
 "Ebenen sind parallel"
 RAUMGERADE(p, t, u, q, v, w)

```

Abbildung 5.3: schülereigene Prozedurensammlung mit Befehlen zur automatisierten Berechnung von Lagebeziehungen und Schnittberechnungen mittels Spat- und Kreuzprodukten. Aus Gründen der Lesbarkeit erfolgt hier der Ausdruck des Utility-Files in Derive5.

**G99–G01:** Die erste Wiederholung der Erprobung *G99/G01* zeigte trotz der Umrüstung des schulinternen PC-Pools auf das Betriebssystem Windows und auf das CAS Derive für Windows (DfW4.11 bzw. DfW5.06) keinen entscheidenden Fortschritt in der Instrumentalisierung des CAS Derive: Die oben beschriebenen Nachteile mit Auswirkungen auf die kognitive Belastung der Lernenden (Einzeileneditor, fehlender plot(.)-Befehl, starre zeilennummerierte Benutzeroberfläche) waren erneut beobachtbar.

Die Abiturklausur 2001, an der insgesamt 13 Lernende teilnahmen [darunter 10 Schülerinnen und 3 Schüler], wurde mit Derive 5.0 geschrieben. Die 5 besten Noten erzielten

ausschließlich Mädchen, die im Mittel mit 9 (von 15) Punkten mit den Jungen etwa gleich<sup>9</sup> gut abschnitten.

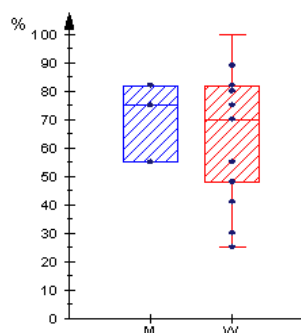


Abbildung 5.4: Ergebnisse im Abitur 2001 mit CAS Derive.

Für die erste Erprobung wurden insgesamt 177 Seiten Lernmaterial in Form von Arbeitsblättern erstellt; zieht man davon den für den LK gedachten § 3 über *Determinanten* ab, so verbleiben 141 Seiten für den GK. Dies erwies sich für einen GK als zu umfangreich, wobei ca. 40 % des Materials auf die Förderung der integrierten CAS-Instrumentation der Schüler(innen) entfiel. Insbesondere die notwendigen Beschreibungen zur Erzeugung von Matrizen nebst der notwendigen Zugriffe auf Teilstrukturen sowie die Unterweisung zur Erzeugung der 2D/3D-Grafiken verursachte durch die notwendige Darstellung der Tastfolgen in den verschachtelten Menüs einen erheblichen Aufwand.

Die Materialentwicklung nahm etwas über ein Jahr in Anspruch und benötigte einen Zeitaufwand von mehr als 500 Arbeitsstunden auf Lehrerseite.

Es erwies sich daher als sinnvoll, die CAS-Instrumentation auf noch weniger Befehle zu beschränken bzw. ein anderes CAS in Betracht zu ziehen.

## Das Pilotprojekt G02

Die obigen Gründe hatten die Suche nach einem alternativen CAS provoziert. Im September 2000 besuchte ich im Rahmen einer CAS-Tagung in Münster einen MuPAD 2.0 $\beta$  Workshop. Ein Teilnehmer des Kurses war Herbert MOELLER, der mich im Gespräch auf seine Routinen-Sammlung<sup>10</sup> `allial.mu` zur algorithmischen Linearen Algebra sowie auf seine Untersuchungen über Pseudoinverse<sup>11</sup> aufmerksam machte.

<sup>9</sup>Ein im Mittel etwas besseres Ergebnis der Mädchen wurde lediglich durch den Umstand verhindert, dass eine schwangere Kursteilnehmerin im (CAS-)Unterricht fast überhaupt nicht anwesend war und in der Folge die Abiturklausur sehr schlecht abschloss.

<sup>10</sup>vgl. [162]; diese Prozeduren waren zunächst nur für die Version 1.4.1 von MuPAD geschrieben.

<sup>11</sup>vgl. [162, S. 154 und S. 325]

**Wechsel zum CAS MuPAD.** Die im Workshop vorgestellten Funktionalitäten von MuPAD versprachen die *Lösung des Instrumentalisationsproblems*<sup>12</sup>:

- ⊕ Die gesamte sichtbare Benutzeroberfläche ist als Eingabeeditor für Texte, Befehle und externe Objekte (wie z. B. Tabellen, Grafiken, Formeln etc.) ausgelegt, jede Bildschirmposition kann mit dem Cursor frei angesteuert und am Platz bearbeitet werden.
- ⊕ Grafiken werden über einen mächtigen `plot(.)`-Befehl mit zahlreichen Optionen rekonstruierbar erzeugt.
- ⊕ *Outputs* werden *unmittelbar nach der jeweiligen Eingabe* in einer besonderen Farbe erkennbar eingefügt; auch bei einer Befehlsneuausführung verbleiben beide an ihrer jeweiligen Position.
- ⊕ Es gibt eine umfassende hypertext-verlinkte und in Buchdruckqualität verfasste LaTeX-Online-Hilfe, die zu jedem Befehl einkopierbare (und damit direkt fehlerfrei ausführbare) Beispiele bietet.
- ⊕ Es gibt<sup>13</sup> eine *kostenfreie*, mathematisch funktionsgleiche (lediglich in der Nutzer-Oberfläche eingeschränkte) Version `MuPADLight` für den schulischen und akademischen Bereich.
- ⊕ *MuPAD ist syntaxorientiert an Maple*, viele Befehle sind in beiden CAS gleich; damit sind Umlernprozesse bei dem Übergang von der Schule zur Universität bzw. Fachhochschule minimiert.

Da MuPAD erst seit 1989<sup>14</sup> entwickelt wird, ist dieses CAS, verglichen mit DERIVE (ab ca. 1988), MAPLE (ab ca. 1983) und MATHEMATICA (ab ca. 1988), das jüngste System und kann „die Stärken verschiedener Vorläufer mit modernen, eigenen Konzepten“<sup>15</sup> verbinden. Zudem zeigten diverse Tests<sup>16</sup> und Benchmarks<sup>17</sup>, dass MuPAD im Vergleich zu seinen Konkurrenten (insbesondere auf Schulniveau) mathematisch i. w. funktionsäquivalent ist. Diese Gründe führten zur Einführung von `MuPADLight2.0` im Unterricht und zur Idee des Umschreibens der CAS-Lernumgebungen in LaTeX(DVI)-Buchform nach dem Muster des hervorragenden Online-Tutorials von MuPAD.

<sup>12</sup>MuPAD hatte in der Version 4.0 (2006) ein für die Betriebssysteme Windows, Linux, Mac und Mac/Intel funktionsgleiches Worksheetkonzept, während Derive nur für Windows erhältlich ist. Dies hat im Nachhinein die getroffene Entscheidung zusätzlich gerechtfertigt, da schulische Nutzer auf unterschiedlichen häuslichen Plattformen arbeiten.

<sup>13</sup>Diese Version ist nur bis Version 2.5.3 erhältlich gewesen.

<sup>14</sup>Das erste offizielle Release 1.0 erschien 1992, vgl. [105, S. 2].

<sup>15</sup>vgl. [37, S. 4]

<sup>16</sup>vgl. z. B. B. SIMON in [208, S. 1 ff]

<sup>17</sup>vgl. z. B. den bekannten Test von M. WESTER [208, S. 25–60]

**HyTeX-Lernumgebung zur Linearen Algebra.** Da die `MuPADLight`-Oberfläche eine umgangssprachliche Kommentierung nur über den mehrzeiligen Programmkommentar `/*...*/` oder als Einzeilenkommentar<sup>18</sup> `//...` gestattet, entstand die Designidee, die bisherigen Lernumgebungen von Papierarbeitsblättern auf ein papierloses Online-Buch nach dem Muster der `MuPAD`-Hilfe zu gestalten. Die `MuPAD`-Forschungsgruppe stellte zur Portierung des Lernmaterials freundlicherweise ihre `MuPAD-Help-Stylefiles` zur Verfügung. Dennoch nahm der Portierungsprozess<sup>19</sup> nochmals fast ein komplettes Schuljahr in Anspruch. Dabei wurde u. a. auch die ursprüngliche Einführung in die Matrizenrechnung durch die mehr anwendungsorientierte `DiGraph`-Umgebung<sup>20</sup> mit Themen aus der diskreten Mathematik ersetzt. Als Vorteile dieser `HyTeX`-Lernumgebung „Lineare Algebra“ sah ich u. a.

- die ressourcenschonende papierlose Verteilung des Lernmaterials auf Diskette;
- die Einsparung der Kopierzeit bei der Lehrperson und der Verteilungszeit im Unterricht;
- die Flexibilisierung der Lernprozesse auf Schülerseite, da das Material kapitelweise zur Verfügung gestellt und als (Mehr-)Stundenauftrag bzw. als integrierte Hausaufgabe genutzt werden konnte;
- die Möglichkeit, ästhetisch ansprechendes Lernmaterial in Buchdruckqualität zu produzieren;
- das automatische Einkopieren<sup>21</sup> von vorbereiteten Codestrecken in das Eingabefenster von `MuPADLight` (z. B. zur Erzeugung von Visualisierungen oder zur Vorgabe von Hilfskonstrukten wie z. B. die Definition der Elementarmatrizen `Em(.)`) per Doppelklick auf das grüne Promptzeichen `[>>]`;
- die Seitengröße von ca. DIN A6 war auf den PC-Bildschirm so abgestimmt, dass störendes Scrollen vermieden werden konnte. Der Aufgabentext blieb zudem während der Bearbeitung durch die Lernperson fixiert auf dem Bildschirm stehen, was das Hin- und Herschwenken des Betrachterauges zwischen Problemstellung und Überlegung im Lösungsprozess unterstützte.

Dennoch waren auch Nachteile sowohl a priori als auch a posteriori erkennbar:

- Die Materialerstellung war hochkomplex: Jede textliche Änderung (Fehlerkorrektur, Zusatz etc.) verlangte einen erneuten `LATEX`-Kompilierungsvorgang, der nicht wie z. B. in `MS Word on the fly` vor Ort vorgenommen werden konnte;
- die Schüler konnten das Lehrmaterial nicht verändern, eine parallele Textverarbeitung zur Dokumentation der Eigenproduktionen wurde notwendig;

<sup>18</sup>das entspricht grob dem `annotate`-Befehl von `DERIVE`

<sup>19</sup>obwohl ich über erhebliche Kenntnisse im Umgang mit `(LA)TEX` verfügte

<sup>20</sup>vgl. den Bericht in [152]

<sup>21</sup>dadurch waren insbesondere Abschreibfehler ausgeschlossen



- die DVI-Files konnten von den Schülern nicht ausgedruckt werden (auch von mir nicht; dazu war die Produktion einer speziellen Druck-Version notwendig). Gedrucktes Material zum Nachlesen wurde von den Schülern aber als wichtig angesehen: Dies war nur über Screenshots etwas umständlich möglich;
- Versionsänderungen des Herstellers, die sich auf die Befehlssyntax auswirkten (z. B. wurde von Version 2.0 auf Version 2.5 die gesamte Grafiklibrary neu geschrieben) verursachten aufwändige Änderungen in der gesamten Folge der Lernumgebungen.

Abbildung 5.5 zeigt zur Verdeutlichung zwei Beispielseiten aus dem Skript:

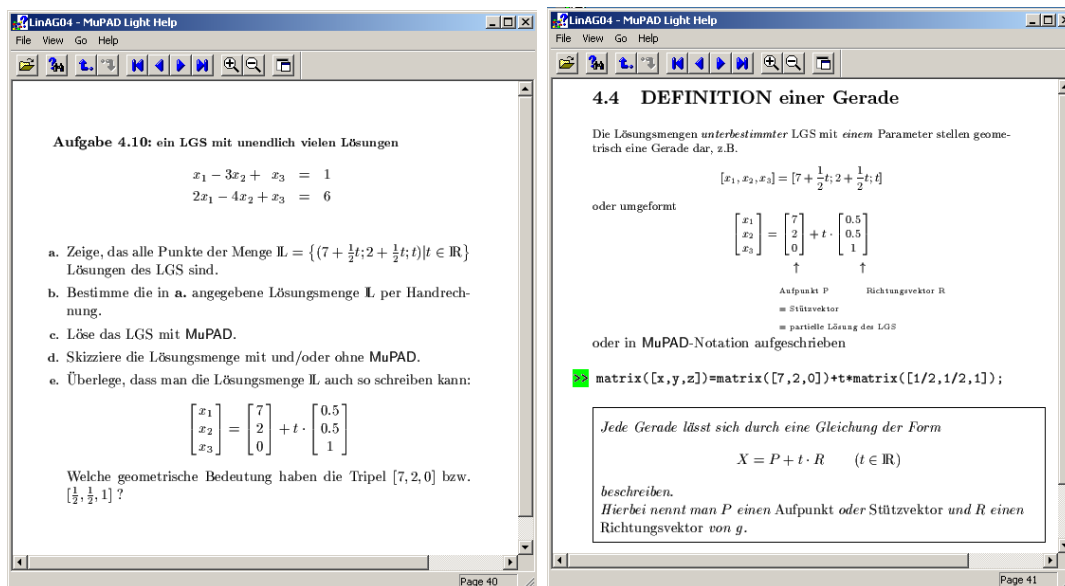


Abbildung 5.5: Zwei aufeinander folgende Seiten aus dem Kapitel über 'Unterbestimmte Gleichungssysteme' des HyTeX-Skriptes 'MuPAD-Labor zur Linearen Algebra'.

■ **Orchestrierung.** Für den Zeitraum der Erprobung wurde ein eigener, direkt neben dem Informatikraum abseitig gelegener Klassenraum exklusiv für den Kurs reserviert. In der rückwärtigen Ecke des Raumes wurde ein PC-Pool von 8 unvernetzten 486-PC<sup>22</sup> eingerichtet, der während der Selbstarbeitsphasen zusätzlich zum PC-Raum mit 16 PC zur Verfügung stand. Die Kursteilnehmer konnten sich während der Arbeitszeit wahlweise zwischen beiden Räumen bewegen. Zweck war, eine dem Berufsleben nachempfundene Arbeitsatmosphäre zu schaffen. Durch die reservierte Raumnutzung lief die Anlage i.W. beschädigungs- und störungsfrei, auch bei Netzausfällen in PC-Raum konnte wenigstens auf den 8er-Block zurückgegriffen und die CAS-Nutzung durchgängig sichergestellt werden.

<sup>22</sup>Diese waren als ausrangierte PC von der Wermelskirchener Industrie gespendet worden.

Der Kursraum verfügte zudem über zwei Wandtafeln für Präsentations- oder Klassendiskussionsphasen und genügend Arbeitstische für CAS-freie Arbeit (ohne störende Lüftergeräusche!) an den mathematischen Problemstellungen.

Die Klausuren wurden ebenfalls in diesem Raum geschrieben, vgl. Abbildung 5.6 links, die vier Personen bei der PC-Nutzung zeigt. Jeder Teilnehmer bekam ein „CAS-Zeitkonto“, das bei 24 Lernpersonen und einer zweistündigen Klausur einer CAS-Nutzungszeit von ca. 20 min pro Person entsprach. Das Konto wurde von der Klausuraufsicht zusätzlich zur Aufzeichnung der Toilettenzeiten verwaltet. Jeder Nutzer setzte sich bei Bedarf einfach an einen freien PC. Diese Regelung führte zu einer effektiven und wohlüberlegten Nutzung des CAS während der Klausuren, „Stauungen“ vor dem PC-Pool wurden nicht beobachtet.



Abbildung 5.6: PC-Nutzung während einer Klausur (links) und in einer Selbsttätigkeitsphase im nebenliegenden Informatik-Raum.

■ **Instrumentation.** Als Beispiel sei eine selbsttätige Lernphase aus K13.1 zum Thema Abstandsprobleme nach Einführung des Skalarproduktes skizziert. Neben Zeitplanungsempfehlungen erhielten die Kursteilnehmer folgenden Auftrag in Form einer Projektaufgabe:

*Ziel:* Du sollst dir den Lernstoff zum Thema 'Abstandsprobleme' selbstständig und eigenverantwortlich in Kooperation mit einem/r Partner/in und dem MUPAD als Werkzeug erarbeiten. Dazu sollst du die Beispiele und Aufgaben des Literaturauszugs nach der Handrechnung zusätzlich mit MUPAD nachrechnen bzw. nachzeichnen und mit deinem/einem Partner(in) aus dem Kurs besprechen. Dabei sollten im Unterschied zur Vorlage, die auf eine händische Rechnung des Lernenden abzielt, moderne matrizenorientierte Lösungsmethoden Verwendung finden. Hausaufgaben stellst du dir während dieser 12 U-Stunden selbst.

*Materialien:*

- Online-Lernmaterial: Hypertext-Skript 'Interaktive Lineare Algebra', 4.32 ff;
- zugehörige Beispiele aus dem Lehrbuch 'Analytische Geometrie' selbst aufsuchen und studieren;
- Übungsaufgaben, z. B. aus den Rückblicksaufgaben des Lehrbuchs (mit Kontrolllösungen im Anhang), selbstständig auswählen

*Erwartungen:*

- schriftliche Zeitplanungsübersicht (ToDo-Liste oder Agenda der geplanten Arbeit: 'Was will ich wann mit wem arbeiten?');

- schriftliche Dokumentation der konkreten Lernarbeit in einer Übersicht (Stunde ./ . Aktivitäten);
  - Abgabe einer individuellen 'Lernmappe' mit Unterlagen und zugehörigen Ausarbeitungen.
- Die Beispiele bzw. Aufgaben sollten durch umgangssprachlichen erklärenden Begleittext kommentiert sein; reine MuPAD-Rechnungsausdrücke ohne Kommentierung reichen also nicht. Es sollte immer klar werden, warum was wie und womit gemacht wird. Man vergleiche dazu die ausgegebenen Handreichungen zu den Anforderungen im Abitur. Auch reflektierende Beschreibungen von Lernschwierigkeiten sind eine Leistung.
- Abgabe:* Diskette mit den MuPAD-Worksheets, DOC-Files etc.

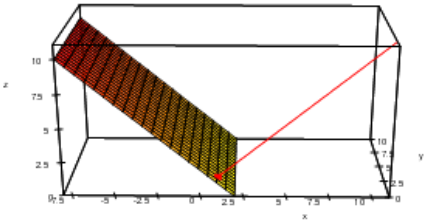
Nach Abgabe der Lernmappe erfolgte im Plenum eine Diskussion offener Fragen und ein zusammenfassender Rückblick mit gemeinsamen Tafelübungen *ohne* CAS. Danach erfolgte eine schriftliche Lernkontrolle zum Abschluss der Lernphase.

Abbildung 5.7 zeigt eine während dieser Selbstarbeitsphase entstandene *Eigenproduktion* eines Schülerinnenpaares.

Stefanie Art & Anna Domke:  
**AUFGABEN ZUM ÜBEN UND WIEDERHOLEN:**

Nummer 5  
 Gegeben ist eine Gerade  $g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden  $h$ , die orthogonal zu  $g$  ist und durch den Punkt  $P(1/1/1)$  geht.



Bestimmung der Gleichung der Ebene E, in der  $h$  liegt:  
 $E: 1x + 0y + 1z = d$   
 Einsetzen von  $P$  in  $E: 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = d$   
 $\Leftrightarrow d = 2$   
 $\Leftrightarrow E: x + z = 2$   
 Schnittpunkt von  $E$  und  $g$ :

```

• solve({(1+t*1)+(1+t*1)-2})
 {t = 0}
1+0*1=1
1+0*0=1 => S(1/1/1)
1+0*1=1

```

Um die Gerade  $h$  zu bestimmen benötigen wir den Aufpunkt und einen Richtungsvektor.  $S$  liegt auf  $h$  (also Aufpunkt), die Ebene hat zwei Richtungsvektoren:

```

• linalg:matlinsolve(matrix([[1,0,1,2]]))

```

|   |   |    |
|---|---|----|
| 2 | 0 | -1 |
| 0 | 1 | 0  |
| 0 | 0 | 1  |

$h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ 1 \end{pmatrix}$       oder       $h = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1+t & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Abbildung 5.7: Eigenproduktion eines Schülerinnenpaares zum Thema Abstandsprobleme.

*Kommentar:* Die Schülerinnen verfassen ihre Produktion mit der windowsinternen Textverarbeitung Wordpad; sie zitieren kursiv abgesetzt den Aufgabentext<sup>23</sup>, um die Aufgabe vom Lehrbuch unabhängig lesbar zu halten. Statt der Vektorklammern im Text stapeln sie die Koordinaten senkrecht. Anstelle der Notation „ $g : \vec{x} = \dots$ “ aus dem Lehrbuch notieren sie missverständlich „ $g(x) = \dots$ “ statt konsequenterweise<sup>24</sup> „ $g(t) = \dots$ “. Da diese Gleichung aber nicht an MuPAD übergeben wurde, fällt der Syntaxverstoß nicht weiter auf. Die MuPAD-Grafik wurde offenbar aus dem Grafikfenster von MuPAD per Copy&Paste eingekopiert. Die Konstruktion der Grafik selbst ist nicht rekonstruierbar, da der Quellcode von den Schülerinnen nicht mit eingekopiert wurde – ein Nachteil von MuPAD<sup>Light</sup>. Es lässt sich aber rekonstruieren, dass offenbar die plot-Option `Scaling=Constrained` vergessen wurde, da die Gerade die Ebene scheinbar nicht senkrecht schneidet. Die Lösungsdarstellung mischt Planungen, Handrechnungen und CAS-ausgelagerte Rechnungen. Die Berechnung von  $t$  wird dabei unnötigerweise und eher spielerisch an MuPAD übergeben. Die Lösung wird weiter verkürzt in der Form  $h = \dots$  formuliert. Die Schülerinnen erwähnen nicht, dass sie zugleich die fehlerhafte Lösung im Lehrbuch korrigieren (dort war nur eine Gerade als Lösung angegeben). Im Unterrichtsgespräch wurde später verdeutlicht, dass es sogar unendlich viele Geraden gibt, die der Aufgabenstellung genügen. Insgesamt deutet die Ausarbeitung den Erwerb von nutzbringenden Präsentationstechniken an.  $\square$

■ **Evaluation.** Wir ergänzen obige Eigenproduktion durch die Bearbeitung der zugehörigen Abituraufgabe derselben Schülerin, welche die gelungene Instrumentation am Ende der Schulzeit dokumentiert. Abbildung 5.8 zeigt den letzten Teil d der zweiten Abituraufgabe.

d) Betrachten Sie nun die folgenden zwei Ebenen in Koordinatenform und die Gerade  $g$ :

Eb1:  $x + 2y + 3z = 10$   
 Eb2:  $3x + 4y + 2z = 19$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene Eb1 an.  
 Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Ebenen Eb1 und Eb2 und bestimmen Sie ihre Schnittmenge  $S$ .  
 Welchen Abstand hat der Punkt  $P(1,2,1)$  von der Geraden  $g$ ?

Abbildung 5.8: Aufgabenstellung des letzten Teils der 2. Abituraufgabe aus 2002.

Das zugehörige CAS-Sheet zeigt die überaus knappe und auf das sinnvollste beschränkte Nutzung des Systems, welche die klare gedankliche Lösungsplanung zielsätzig in lediglich 5 zweckmäßigen Anfragen widerspiegelt, vgl. Abbildung 5.9 links.

Die erste Anfrage erlaubt unmittelbar die Parameterdarstellung der ersten Ebene Eb1 abzulesen, die zweite Eingabe berechnet den Schnitt beider Ebenen über ein unterbestimmtes

<sup>23</sup>siehe Aufgabe 5a in [11, S. 193]

<sup>24</sup>so formuliert z. B. FARIN [100, S. 37]

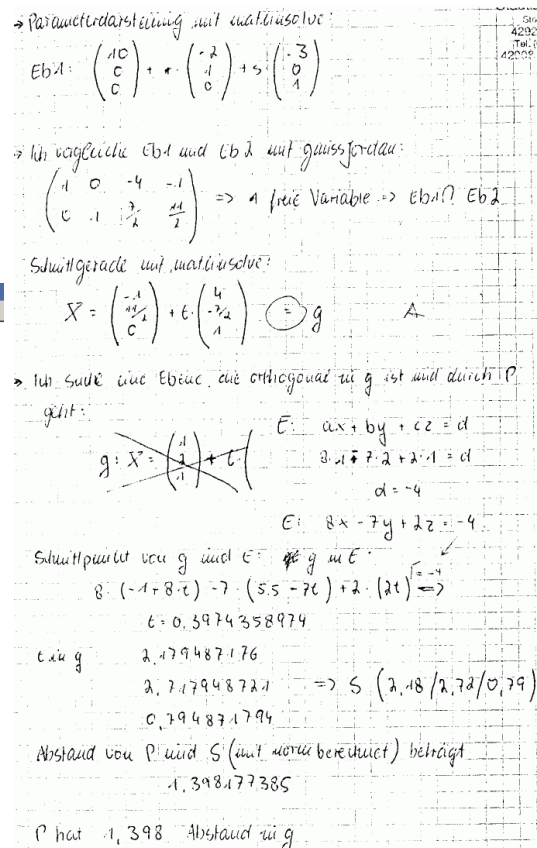
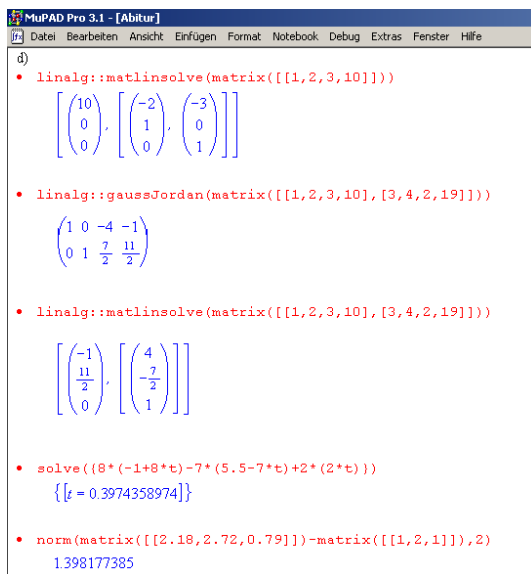


Abbildung 5.9: Bearbeitung des letzten Teils der 2. Abituraufgabe im Heft von Schülerin G0203. Links: Auszug aus dem MuPAD-Worksheet. Rechts: zugehörige Niederschrift auf dem Papierbogen.

lineares Gleichungssystem, die dritte Anfrage ist eine Variante der Zweiten und gibt zur Probe die Lösungsmenge unmittelbar als Geraden-Gleichung an. Die letzten beiden Systemanfragen dienen der Abstandsberechnung: Die vierte Anfrage berechnet schlagartig den Durchstoßpunkt (Lotfußpunkt) von  $g$  mit einer gedachten Hilfeebene senkrecht zum Richtungsvektor von  $g$  (wobei diese durch die vergessene rechte Seite fälschlicherweise durch den Nullpunkt<sup>25</sup> geht) und die letzte Anfrage berechnet dessen Entfernung zum gegebenen Punkt  $P$ . Die Schülerin verzichtet im Sheet bemerkenswert auf jegliche hilfreichen Konnotationen wie  $P$ ,  $g$ ,  $Eb1$ <sup>26</sup> für auftretende Objekte wie Punkte, Geraden oder Ebenen wie z. B.  $P:=\text{matrix}([1,2,1])$ , sondern formuliert die Anfragen direkt – was eine klare gedankliche Durchdringung erkennen läßt. Die Nutzung des CAS ist optimal und demonstriert eine überaus gelungene Instrumentation.

Die offenbar parallel zur CAS-Nutzung geführte Heftmitschrift der Schülerin zeigt Abbildung 5.9, rechts. Man sieht, wie die Schülerin zwischen MuPAD-Anfragen und knappen kommentierenden Hefteintragungen wechselt: Der erste und dritte MuPAD-Output wird richtig zu je einer Parameterdarstellung von  $E$  bzw.  $g$  decodiert. Sinnvollerweise löst die Schülerin G0203 den dritten Aufgabenteil ohne CAS, weil eine analytische Lösung der Hilfeebene  $E$  ( $\perp g$ ) ohne CAS Nutzung schnell erzielt werden kann. Die CAS-Lösung der Gleichung geht wegen der fehlenden rechten Seite zwar fehl, ist aber prinzipiell richtig, s. o. Im Übrigen fiel den Klausurteilnehmern die Lösung des Aufgabenteils 2c schwer: nur 2 von 17 SchülerInnen lösten diese Aufgabe, darunter obige Schülerin G0203, vgl. Abbildung 5.10.

In einem Betrieb werden aus den Einzelteilen T1 und T2 die Zwischenprodukte Z1 und Z2 und aus diesen die Endprodukte E1, E2 und E3 gefertigt. Die Produktionszahlen sind jeweils ganzzahlig. Die folgenden Tabellen geben an, wieviele Einzelteile bzw. Zwischenprodukte je Endprodukt verarbeitet werden:

|           |           |           |           |  |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|--|-----------|-----------|-----------|-----------|
|           | <i>E1</i> | <i>E2</i> | <i>E3</i> |  |           | <i>E1</i> | <i>E2</i> | <i>E3</i> |
| <i>T1</i> | 11        | 16        | 12        |  | <i>Z1</i> | 1         | 2         | 3         |
| <i>T2</i> | 7         | 12        | 14        |  | <i>Z2</i> | 3         | 4         | 2         |

a) Es sollen 30 Endprodukte E1, 40 Endprodukte E2 und 20 Endprodukte E3 hergestellt werden. Wieviele Einzelteile T1 und T2 werden dazu benötigt?

b) Wieviele Endprodukte können aus 10 Zwischenprodukten Z1 und 19 Zwischenprodukten Z2 hergestellt werden?

c) Berechnen Sie die Matrix, die den Bedarf an Einzelteilen je Zwischenprodukt angibt. Diskutieren Sie, ob eine Lösung unter Benutzung einer inversen Matrix möglich ist.

Abbildung 5.10: Aufgabenstellung des ersten Teils der 2. Abituraufgabe aus 2002.

Hier ist ihre Argumentation, vgl. Abbildung 5.11. Sie überträgt eine diagrammatische Modellierung der Situation in eine Matrixgleichung, die durch kommentierende Notationen im Heft mit Sinn aufgeladen wird. Die zugehörige Rechnung wird aber in eine CAS-Anfrage

<sup>25</sup>Das CAS interpretiert die fehlende rechte Seite als default-Wert 0; der Schülerin fällt der Irrtum daher nicht auf! Dies könnte man als einen didaktischen Nachteil von internen CAS-Voreinstellungen ansehen.

<sup>26</sup>die zwar einen formalen Overhead erzeugen würden, aber in der Redundanz-erhöhung zum Verständnis hilfreich sein könnten. Die Schülerin bedarf dessen offenbar nicht.

ausgelagert, vgl. Abbildung 5.11, Prompt 1. Die zweite Frage wird durch das CAS beantwortet. Die dritte Frage wird erst mathematisch in der Niederschrift geklärt, ehe der so gewonnene Ansatz im CAS gelöst wird. Auch hier wird der sinnvolle Einsatz des Instruments erkennbar.

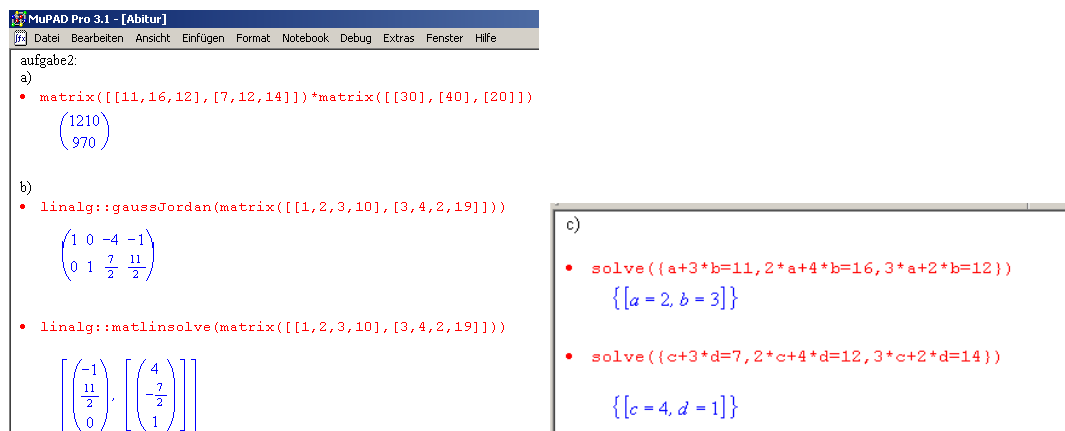


Abbildung 5.11: Bearbeitung der ersten Teile der 2. Abituraufgabe im CAS-Worksheet von Schülerin G0203.

Die Klausur wurde von 17 Teilnehmern geschrieben, darunter 13 Mädchen und 4 Jungen. Der Leistungsdurchschnitt lag bei 7,9 Punkten von max. 15 möglichen. Die drei besten Leistungen wurden von Mädchen erbracht, siehe Abbildung 5.13. Erneut wählen ein CAS-begleitetes Abitur etwa dreimal soviel Mädchen wie Jungen an.

### Anmerkungen.

1. Eine genauere Analyse und Evaluation einer Abiturklausur wird bei den Kursen L06 und L07 bzw. L08 vorgenommen, da hier ein direkter Vergleich mit einem Parallelkurs ohne CAS-Nutzung bzw. mit zentraler Abiturstellung möglich war.
2. Gegen Ende der Erprobung G02 wurde das CAS MuPAD *Pro* 2.0 angeschafft. Dadurch konnte während der Abiturklausur das gleiche CAS mit einer professionellen Benutzeroberfläche genutzt werden. Der Übergang von MuPAD *Light* zu MuPAD *Pro* erwies sich als problemlos.

### Zur Revision G05, G06 und L06

Alle drei Kurse fanden in erneuerten PC-Räumen statt: Ein PC-Raum trat durch einen Anbau hinzu, beide PC-Räume verfügten nunmehr über je 16 intern vernetzte PC mit Internet-Zugang. Damit war eine kollisionsfreie Nutzung mindestens eines PC-Equipments gesichert. Zusätzlich wurde ein pädagogisches Netz installiert, welches eine starke Kontrolle über die Aktivitäten an den Schülerarbeitsplätzen erlaubte. Hierdurch wurde es insbesondere möglich, Beobachtungen bzw. Aufzeichnungen des Lösungsverhaltens aller Schüler vom Lehrerrechner aus vorzunehmen.

*Aufgabe 2:*

2) 
$$\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \end{matrix} \begin{matrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \end{matrix} \begin{matrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Es werden  $1 \cdot 10 T_1$  und  $9 \cdot 70 T_2$  benötigt.

3) Lösung: Gauß-Jordan (Matrix  $\left[ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & 2 & 19 \end{bmatrix} \right]$ )  
 $\Rightarrow$  es gibt eine freie Variable!  
 mit Matrixinversion ergibt sich folgende Gleichung:  

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 Wie groß muss  $t$  sein, damit ich eine ganzzahlige Lösung erhalte?  
 mit  $t=1$  können  $3 E_1$ ,  $2 E_2$  und  $1 E_3$  hergestellt werden

c) 
$$A_{T2} \cdot A_{2E} = A_{TE}$$
  

$$X \cdot A = B$$
 Lösung mit inverser Matrix ist nicht möglich, weil  $A_{2E}$  keine Quadratmatrix ist, also keine Inverse hat.  

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1a + 3b = 1 \\ 2a + 4b = 16 \\ 3a + 2b = 12 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{mit} \\ \text{solche} \\ \text{gelöst} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ b = 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1c + 3d = 7 \\ 2c + 4d = 12 \\ 3c + 2d = 14 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c = 4 \\ d = 1 \end{matrix}$$

$$A_{T2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Abbildung 5.12: schriftliche Bearbeitung der ersten Teile der 2. Abituraufgabe im Heft von Schülerin G0203.

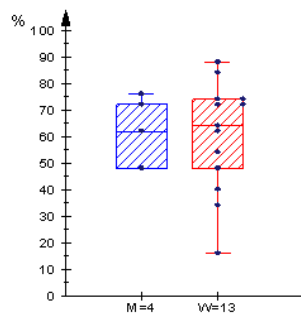


Abbildung 5.13: Ergebnis der CAS-Abiturklausur G02 als Boxplot bei N=17 mit M=4 und W=13.



Das vorhandene CAS MuPAD wurde auf Version 3.0 bzw. 3.1 aktualisiert: damit wurden nunmehr *Animationen zentraler mathematischer Konzepte* (z. B. des Skalarprodukts, s. u.) möglich. Diese konnten aber nur innerhalb eines Worksheets realisiert werden. Daher wurde das HyTeX-Buch 'Interaktive Lineare Algebra' aus der vorherigen Erprobung in alphabetisch geordnete MuPAD-Worksheets LA-A.mnb bis LA-U.mnb zerlegt und überarbeitet. Je 4 bis 5 Sheets (z. B. LA-A bis LA-E) bildeten eine thematische Einheit.

Die Einführung in die Vektor- und Matrizenrechnung anhand der DiGraph-Lernumgebung aus der diskreten Mathematik bzw. via Stücklistenproblemen wurde durch eine *Einführung anhand von Markoff-Prozessen* ('Bevölkerungswachstum') ersetzt. Dies ermöglichte einen frühen Fokus auf Lösungsprozesse von linearen Gleichungssystemen in einem Kontext, der Modellierungen mit Bezug auf künftige Aufgabenstellungen im (auch: kommenden *zentralen*) Abitur erlaubte. Die DiGraph- bzw. Stücklisten-Lernumgebung blieb als freiwillig bearbeitbare Erkundung im Programm, wurde aber von den Lernenden wenig gewählt.

■ **Die LA–A..Z–Lernumgebungen zur Linearen Algebra.** Die MuPAD<sup>Pro</sup> Benutzeroberfläche unterscheidet drei Regionen: eine Textregion (standardmäßig: schwarz) für umgangssprachliche Kommentierungen und externe Graphiken, eine Input-Region (rot) für Anfragen an den Rechenkern sowie die jeweils zugehörige Ausgabe-Region (blau).

Durch geschickte Nutzung der Textregion konnte das HyTeX-Lernmaterial aus der Erprobungsphase G02 auf vom Lernenden frei editierbare MuPAD-Sheets portiert und daher vorteilhafter eingesetzt werden, u. a.

- zur ressourcenschonenden Verteilung der Lerneinheiten per Internet bzw. per Schulnetz durch die Lehrperson;
- zur Flexibilisierung und Kontinuitätssteigerung des Arbeitsprozesses auf Schülerseite, da die bearbeiteten Lerneinheiten aus dem PC-Raum per Email nach Hause geschickt oder auf einem USB-Speicher mitgenommen werden konnten<sup>27</sup>;
- zum Einüben (semi-)professioneller Arbeitsweisen (Email-Verkehr, Datenhaltung etc.) der externen Berufswelt;
- zur Bereitstellung von Konzept-Visualisierungen oder von CAS-Hilfswerkzeugen (wie versteckte oder offen gelegte Prozedur-Definitionen);
- zur stetigen Kontrolle der Hausaufgaben und zur Dokumentation des Arbeitsfortschritts, die der Lehrperson jederzeit per Email zugeschickt werden konnte.

Damit wurde allerdings u. a. die Verweildauer der Lernenden vor dem PC erhöht, da die Aufgabenbearbeitung bzw. Lösung direkt in das Sheet geschrieben wurde.

<sup>27</sup>Dies wurde gelegentlich bei umfangreichen Sheets mit Bildern, Animationen oder Grafiken nötig.

■ **Orchestrierung.** Für den Zeitraum der Erprobung G05 bzw. G06 und L06 wurde ein Informatikraum für den Kurs reserviert. Der PC-Raum verfügte über eine Whiteboard für Präsentations- oder Klassendiskussionsphasen. Für Präsentationen von Schüler-Lösungen zu den Lernumgebungen wurde zur Verteilung eines individuellen Schülerbildschirms an alle Kurs-Teilnehmer ein pädagogisches Netz<sup>28</sup> genutzt. Im Grundkurs wurde die Doppelstunde jeweils für selbstständige Arbeit<sup>29</sup> am PC genutzt, die Einzelstunde i. d. R. für mathematische Aktivitäten in kooperativen Lernformen<sup>30</sup> ohne PC-Einsatz.

Die Klausuren wurden ebenfalls in diesem Raum geschrieben, jeder Teilnehmer verfügte dabei über einen eigenen<sup>31</sup> PC.

■ **Evaluation.** Die Abitur-Klausur G5(G6) wurde von 15(15) Teilnehmern geschrieben, darunter 11(10) Mädchen und 4(5) Jungen. Der Leistungsdurchschnitt lag bei jeweils ca. 60% der erreichbaren Punktzahl, siehe Abbildung 5.14. Das CAS-begleitete Abitur G05(G06) wählen etwa dreimal soviel Mädchen wie Jungen.

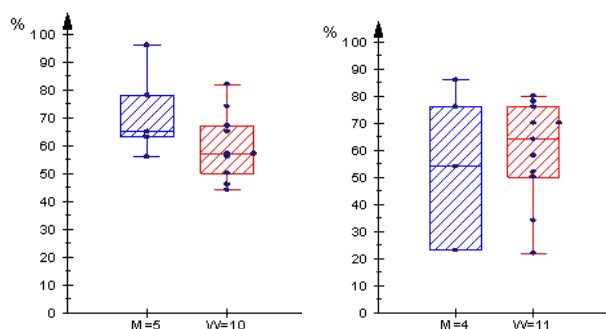


Abbildung 5.14: Ergebnis der CAS-Abiturklausuren G05 und G06 als Boxplot bei  $N=15$  mit  $M=4$  und  $W=11$ .

Der Leistungskurs L06 wurde parallel zu einem CAS-freien Leistungskurs eines Kollegen geführt. Im schriftlichen Abitur wurden in beiden Kursen 2 von 3 Aufgaben gleich gestellt: Die Aufgaben des LK<sup>mitCAS</sup> wurden aber um je einen weiteren Aufgabenteil *ergänzt*, um eventuelle Zeit-Vorteile bei Nutzung eines CAS auszugleichen.

Die Abbildung 5.15 zeigt von links nach rechts die Daten der CAS-Kurse allein, aufgeschlüsselt nach Genderunterschieden sowie den Vergleich LK<sup>mitCAS</sup> vs LK<sup>ohneCAS</sup>: Dabei zeigt das mittlere Bild den Gesamtausfall und das rechte nur den Vergleich der gemeinsamen Aufgabe zur analytischen Geometrie. Im Ergebnis lassen sich möglicherweise Vorteile bei der CAS-Nutzung ablesen. Allerdings wurden weitere mögliche Erfolgsvariablen (z. B. der event. Einfluß von Lehrperson, Lehrkonzept, Lehrmaterial etc.) hier nicht untersucht.

<sup>28</sup>eingesetzt wurde das sog. MNS, das 'Modulare Netz für Schulen'

<sup>29</sup>i. d. R. als kooperative Paare an einem Rechner

<sup>30</sup>oft nach der '(Listen-)Think-Pair-Share'-Methode, vgl. ähnlich auch B. BUCHBERGER's 'Lesen-Schreiben-Sprechen'-Methode in der studentischen Ausbildung

<sup>31</sup>In K12 wurde dabei ab gewissen Kursgrößen die Nutzung eines zweiten PC-Raumes mit einer Zusatz-

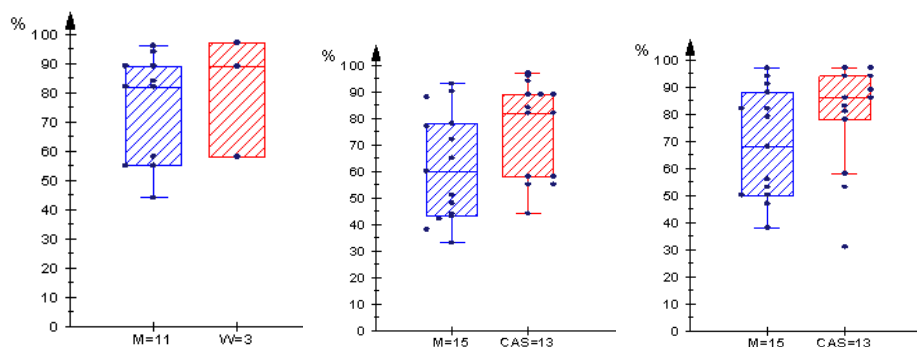


Abbildung 5.15: Ergebnis der CAS-Abiturklausuren  $L06^{mitCAS}$  vs  $L06^{ohneCAS}$  als Boxplot mit  $(N=14, M=11, W=3)$  vs  $(N=16, M=7, W=8)$ .

■ **Spezielle Befunde.** Die Sichtung der Eigenproduktionen in Stundenbearbeitungen, Hausaufgaben und Klausuren ergab u. a. folgende globalen Befunde.

1. Die Forderung nach der *Zusendung* der bearbeiteten Hausaufgaben mit kommentierten Lösungen oder der Angabe von Lösungshindernissen *per Email* sowie die Festlegung von Deadlines offenbarte, dass SchülerInnen die Hausaufgaben oftmals 'auf den letzten Drücker' anfertigen. Die Lösungen gingen überwiegend sehr spät (zum großen Teil weit nach Mitternacht) ein. Die Verteilung längerfristig gestellter umfassenderer Arbeitsaufträge sollte daher sehr kritisch gesehen werden.
2. Die Nutzung der Auslagerungsfunktionalität des CAS führt z. T. zu einem deutlich *gestiegenen Umfang der Kommentierung* und zu einer erhöhten Betrachtung des eigenen mathematischen Tuns. Die in den Sheets erbetene umgangssprachliche Darlegung der Lösungsheuristiken findet ihren Niederschlag ungefragt auch in Leistungsüberprüfungen. Schriftliche Ausführungen in solchem Umfang ließen sich in einem CAS-freien Unterricht nicht beobachten.

Dazu ein Beispiel aus der G05-Klausur des Schülers<sup>32</sup> G06-11, die 21 Seiten zusätzlich (sic!) zu seinem CAS-Sheet umfasst, siehe Abbildung 5.16.

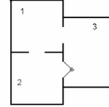
3. Nachweisbar ist auch die verstärkte Beifügung von nicht geforderten Skizzen, die zu geometrischen Fragestellungen schülerseitig angefertigt werden. Diese dienen – trotz des erhöhten Zeitaufwandes – offenbar zur quasi-empirischen Absicherung der Resultate. Dabei wird das Selbstwertgefühl gestärkt, falls die Resultate stimmig sind, andernfalls kann ein zielgenaues Bugfix angestoßen werden.

aufsicht oder die Bereitstellung einiger zusätzlicher Laptops notwendig.

<sup>32</sup>Dieser Schüler hatte auf meine Anregung eine 140-seitige Lösungs-Broschüre zu dem im Unterricht erprobten Lehrwerk [213] verfasst, in dem er *alle* Aufgaben der behandelten Kapitel mit MuPAD gelöst hatte.

In einem Versuchslabor mit den Räumen 1, 2 und 3 werden Mäuse ausgesetzt, deren Bewegungsverhalten untersucht werden soll. Zwischen den Räumen befinden sich Durchgänge - allerdings kann der Durchgang von Raum 2 nach Raum 3 durch eine Klappe nur in Richtung nach Raum 3 benutzt werden, nicht umgekehrt. Im Verlauf der Beobachtung wird die Anzahl der Mäuse in den jeweiligen Räumen in jeder Minute protokolliert. Eine Forschungsperson erhält für den beobachteten Prozess folgende

$$\text{Übergangsmatrix: } A = \begin{bmatrix} 0,50 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,50 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{bmatrix}$$



a) Zeichne den zugehörigen Übergangsgraphen und interpretiere die Zahleinträge.

...  
g) Von einer weiteren Versuchswiederholung mit einer Hamsterpopulation sind nur noch einige

$$\text{Einträge der zugehörigen Übergangsmatrix } U \text{ bekannt: } U = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 & c \\ 0,2 & a & d \\ 0,2 & b & d \end{bmatrix}$$

Allerdings erinnert man sich noch, dass die stationäre Verteilung in den drei Räumen 50 %, 30 % und 20 % betrug.

Kann der Forscher die unbekanntes Einträge  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  der Übergangsmatrix  $U$  daraus rekonstruieren? Begründe deine Antwort.

Es gilt  $ab = 0,33 \Rightarrow \text{MuPad} \Rightarrow$

$$0,2c + 0,33 = 0,5$$

$$0,3a + 0,2d + 0,1 = 0,3$$

$$0,3b + 0,2d + 0,1 = 0,2$$

Des Weiteren handelt es sich um ein geschlossenes System, daher muss die Summe der Spalten der Übergangsmatrix  $= 1$  sein (100% der alten Verteilung werden neu aufgeteilt). Es ergibt sich als Bedingungen für

$$U = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & c \\ 0,2 & a & d \\ 0,2 & b & d \end{pmatrix} :$$

$$0,1 + a + b = 1$$

$$c + 2d = 1$$

Wir lösen mithilfe dieser fünf Bedingungen das System nach  $a, b, c$  und  $d$  auf  $\Rightarrow$  MuPad

Die gesuchten Größen sind:

$$a = 0,61\bar{6}$$

$$b = 0,28\bar{3}$$

$$c = 0,8\bar{5}$$

$$d = 0,07\bar{5}$$

g) Ja, dies ist möglich, und zwar mit dem gleichen Ansatz, den ich in e) gewählt habe: Wir wissen, dass bei Gleichverteilung die Übergangsmatrix multipliziert mit der Übergangsmatrix  $U$  wieder die Übergangsmatrix ergibt. Dies gilt auch für die Prozentzahlen. Setze ich bei 50% für Raum 1 in  $U$  ein, so erhalte ich bei stationärer Verteilung auch 50% zurück.

Es ergibt sich als gesamte Matrix

$$U \Rightarrow \text{MuPad} \Rightarrow$$

Wir können diese Matrix überprüfen, in dem wir die Prozentzahl Verteilung einzeln  $\Rightarrow$  MuPad  $\Rightarrow$

Die Anfangswerte werden reproduziert, offensichtlich wenn die Matrix richtig ist.

Abbildung 5.16: Ausarbeitung des Schülers G05-11 zur zweiten Abituraufgabe, vgl. Bild oben. Die Auslagerung ans CAS wird von ihm durch „ $\Rightarrow$  MuPad“ gekennzeichnet.

Ein typisches Beispiel zeigt Abbildung 5.17. Der Schüler L06-07 hat zudem selbstständig die zusätzliche CAS-Kompetenz erworben, in 3D-Skizzen die auftretenden Objekte zur Kennzeichnung und Orientierung mit Namen zu versehen.

Gegeben seien die Punkte  $P(1|2|3)$  und  $P'(-1|0|1)$  sowie die Punkte  $D_t(t|2t|t)$  mit  $t > 0$ .

- Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene  $E_1$  bezüglich der die Punkte  $P$  und  $P'$  spiegelbildlich liegen.
- Bestimme  $t$  so, dass sich die Geraden  $PD_t$  und  $P'D_t$  orthogonal schneiden.

Für die weiteren Aufgabenteile c) bis e) sei nun  $t=1$ .

Welchen Winkel schließt die Gerade  $PD_1$  mit der Ebene  $E_1$  ein?

- Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene  $E_2$ , die parallel zu  $E_1$  verläuft und durch den Punkt  $A(5|3|2)$  geht. Bestimme den Abstand von  $E_1$  und  $E_2$ .  
(Zwischenergebnis zur Kontrolle:  $E_2: x + y + z = 10$ )
- Die Punkte  $P$ ,  $P'$  und  $D_1$  bilden ein Dreieck. Sei  $M$  der Mittelpunkt der Seite  $PP'$  und  $T$  teile  $PD_1$  im Verhältnis 5:1. In welchem Verhältnis teilt  $S$  die Strecken  $MD$  und  $TP$ ?

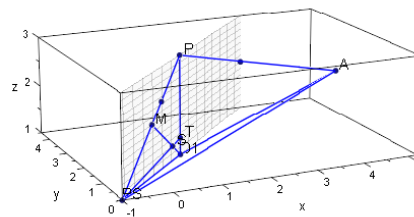


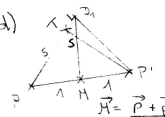
Abbildung 5.17: Aufgabenstellung im schriftlichen Abitur 2006 und zusätzliche begleitende Visualisierung der Lösung durch den Schüler L06-07.

- Nicht feststellbar war z. B. ein Verlust an Termumformungskompetenzen oder Darstellungskompetenzen. Ich zeige dazu exemplarisch die Ausarbeitungen der beiden erfolgreichsten Schülerinnen dieser beiden Kurse zum gleichen Aufgabenteil d, vgl. Abbildung 5.18.

Die Schülerin L06-05 *mit* CAS notiert zwar die Definition der Geradengleichungen als definierende Gleichheit  $g3 = \dots$  abweichend von der Lehrbuch-Notation  $g3: \dots$  analog zur CAS-Syntax  $g3 := \dots$ , notiert dafür aber die Suche nach dem Schnitt korrekt funktional als  $g3(t) = g4(s)$ . Eine Skizze entsteht wohl im Kopf, diese wird später im Sheet realisiert. Die Schülerin L06-05 *ohne* CAS benötigt nach der Formulierung der Idee ca.  $2/3$  der schriftlichen Ausführungen allein zur Darstellung der rechentechnischen Lösung.

- Trotz Vorgabe kompletter beispielhafter Codestrecken mit optimierten symbolischen Notationen wie z. B.  $\circ()$  für „zu zeichnenden Punkt“, nutzen die SchülerInnen lieber die *vorhandenen ausführlicheren umgangssprachlichen Objekt-Notationen*, wie z. B. `Point()`. Offenbar wird ein zweiter Notations-Layer intuitiv abgelehnt, wenn er nicht stark überzeugt. Deshalb wurde auch die Nutzung von MuPAD-Paketen wie `AgLa` umgangen, die gewisse Berechnungen noch stärker automatisieren können: z. B. könnte

d)



$P(1|2|3)$   
 $P'(-1|0|1)$   
 $D_1(1|2|1)$

$\vec{M} = \frac{\vec{P} + \vec{P}'}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{T} = \vec{P} + \frac{5}{6} \vec{PD}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

gerade: Vektorzug  $P \rightarrow H \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow P$

$$\frac{1}{2} \vec{PP'} + k \cdot \vec{HD_1} + r \cdot \vec{PT} + \frac{5}{6} \vec{D_1P} = \vec{0}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \text{I} & -1 + k + 2r = 0 \\ \text{II} & -1 + k + 2r = 0 \\ \text{III} & -1 - k + \frac{4}{3}r + \frac{5}{3} = 0 \end{cases} \text{ gleich}$$

I  $\rightarrow k = 1 - 2r$

in III:  $-1 + 2r - 1 + \frac{4}{3}r + \frac{5}{3} = 0$

$$2\frac{4}{3}r = \frac{1}{3}$$

$$r = \frac{1}{7}$$

$$k = 1 - 2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$$

S teilt  $\vec{HD_1}$  im Verhältnis 5:2  
und  $\vec{TP}$  im Verhältnis 1:6

d) die Koordinaten von M lauten:

$$M = P + \frac{1}{3}(P' - P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T = P + \frac{5}{6}(D_1 - P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

S ist der Schnittpunkt der Geraden  $g_3$  und  $g_4$ :

$$g_3: \vec{x} = M + s \cdot (D_1 - M)$$

$$g_4: \vec{x} = P + t \cdot (T - P)$$

$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Kann nicht S

$g_3(s) = g_4(t)$

$$s = \frac{5}{7}$$

$$t = \frac{6}{7}$$

Abbildung 5.18: Auszug aus den Bearbeitungen von Aufgabe 2d im Leistungskurs-Abitur 2006 (s.o.) durch die jeweils beste Schülerin beider Kurse. Links L06-16 ohne CAS und rechts L06-05 mit CAS. Lediglich die Berechnung des Schnittpunkts der Geraden wird bei Nutzung von CAS ausgelagert.

man mit Hilfe dieser Funktionsbibliothek die Schnittpunktsberechnung zweier Geraden wie folgt abhandeln:

```

• g := Gerade(v(2,2,2), v(1,0,-3), r);
 A := v(3,2,-1): B := v(4,3,-2):
 h := Gerade(A, B-A, s)
 g :: schnitt(h);

```

Dagegen ziehen wir die wiederholte explizite algebraische Objektkonstruktion vor, auch um den Formelaufbau mit seiner geometrischen Semantik permanent zu assoziieren und stabile Grundvorstellungen auszuprägen:

```

• g := ~[2,2,2] + r* ~[1,0,-3];
 A := ~[3,2,-1]: B := ~[4,3,-2]:
 h := A +s*(B-A);
 solve(g=h);

```

Im Abitur wurde daher nur ein kleiner, extensiv unterrichtlich genutzter 4-zeiliger Befehlssatz mit den 4 Bezeichnern  $\sim$ ,  $^\circ$ ,  $\text{xx}$  und  $\text{Proj}$  zur Verfügung gestellt, der Abkürzungen für die Bildung von *Spaltenvektoren*, des *Skalarprodukts*, des *Kreuzprodukts* sowie der *Orthogonalprojektion* bereitstellte:

```

• vektor:=A->linalg::transpose(matrix([A])): operator("~",vektor,Prefix,1800):
 skp:=linalg::scalarProduct assuming Type::Real:operator("°", skp, Nary, 1799):
 krp:=linalg::crossProduct: operator("xx", krp, Nary, 1799):
 Proj := U -> U * linalg::pseudoInverse(U):

```

6. Auch gab es Schüler, die *frühe Grundvorstellungen* wie z. B. die Darstellung von „Ebenen als Ansammlung von Lösungs-Punkten“ bis ins Abitur *präferierten*: Statt Ebenen mittels `Plane()` als Parallelogrammflächen darzustellen, wurden mittel `PointList()` (auf der Ebene liegende) diskrete Gitterpunkte gezeichnet.
7. Gelegentlich wurde von den SchülerInnen auch der Umstand bemängelt, dass „die Sheets zu rot seien“, d. h. *zu viele CAS-Codestrecken* enthielten. Während bei der Konstruktion der Sheets von Lehrerseite intendiert war, z. B. Graphiken statt als fertiges Bild (ohne Code zur Erzeugung desselben) nur über den erzeugenden Code anzugeben (der das Bild auf Knopfdruck erzeugte und daher auch Speicherplatz sparte), wirkte dies möglicherweise partiell abschreckend – wenngleich ausdrücklich formuliert wurde, dass diese Befehle nicht gelernt werden brauchten.

Diese Erfahrungen gingen in die Konzeption der Erprobung L08 ein.



### Zur Revision (mit Alternativkonzeption) L08

Die Erprobung L08 stand unter den Randbedingungen des zentralen Abiturs in NRW. Aus den vorhergehenden Erprobungen der Unterrichtskonzeption eines CAS-intensiven Mathematik-Kurses wurden daher einige Konsequenzen gezogen, die im Folgenden aufgeführt sind.

**Die L08-Lernumgebung** zur Linearen Algebra war u. a. durch folgende Adaptionen gekennzeichnet:

- Nur noch ca. 1/5 der CAS-Lernumgebungen aus den vorhergehenden Erprobungen wurde eingesetzt. Diese beschränkten sich jetzt auf *paradigmatische Problemstellungen (oft: Modellierungsaufgaben) mit zugehörigen prototypischen CAS-Codestrecken*: U. a. behandelt wurden GJ-Algorithmus, geometrische Grundobjekte und deren Lagebeziehungen, Skalarprodukt, Projektionen. Die Verteilung der Sheets erfolgte weiterhin per Internet bzw. per Schulnetz.
- Die übrigen Aufgaben wurden aus *wenigen* Beispielen des Lehrbuchtexes, dem *Aufgabenset der sog. Rückblickseiten* (ca. je 8 Aufgaben) sowie einem Dutzend *ausgewählter „Vermischter Aufgaben“* mit kompetenzsteigernden Problemstellungen aus dem eingeführten Lehrbuch (per Absprache mit den SchülerInnen) zusammengestellt und nicht mehr innerhalb von Worksheets angeboten.
- Möglichst jeder Auftrag (Beispiel, Aufgabe, Problem) sollte in einer *ersten Phase ohne PC/CAS-Unterstützung* und dann *zusätzlich* in einer *zweiten Phase erneut mit Hilfe des CAS* gelöst werden. Im Effekt wurde also *jeder Auftrag zweimal* bearbeitet, jedoch forderte diese implizite Wiederholung als CAS-Realisierung eine variierte, vertiefende Beschäftigung. Diese *Entschleunigungseffekte im duplizierten Lernprozess* erforderten aus Zeitgründen eine radikale Beschränkung im Umfang des Aufgabenpools.
- Die CAS-Aufträge wurden möglichst knapp auf einer einzigen Bildschirmseite dargestellt. Der Anteil an MuPAD-Codestrecken wurde auf das zur Bearbeitung der prototypischen oder paradigmatischen Aufgaben Notwendigste beschränkt. Die zugehörige Instrumentalisation sollte zur Bearbeitung der nachfolgenden Aufgaben anregen und ggfs. durch die MuPAD-Hilfe selbstständig ergänzt werden. Ein Beispiel zeigt Abbildung 5.19.
- Wie bei Erprobung L06 mussten die Lösungen per Email zugeschickt werden, jedoch war als Deadline immer der Sonntagabend<sup>33</sup> 11:00 Uhr gesetzt ('Wochenplanarbeit'). Damit waren zwar Bearbeitungsfreiräume eröffnet, diese waren aber nicht mehr allzu langfristig gewählt.

<sup>33</sup>Mit Beginn der Moderationstätigkeit des Autors im Rahmen des sog. „*Sprintstudium Mathematik NRW*“ wurde der Dienstagabend 11:00 Uhr gewählt.



Abbildung 5.19: Beispiel einer verschlankten CAS-befehlsreduzierten Lernumgebung.

**Orchestrierung.** Auch für die Erprobung L08 wurde der Informatikraum für den Kurs permanent reserviert. Die Schüler konnten aber den Anteil der CAS-Nutzung stärker frei bestimmen, da nicht mehr alle Aufträge in Form von CAS-Worksheets verteilt wurden und damit am PC gelesen werden mussten. Nach wie vor blieben *alle zentralen Aktivitäten in kooperativen Lernformen organisiert*, sowohl als 'Think-Pair-Share'-Methode im Klassengespräch als auch in der kooperativen Arbeit als Schülerpaar<sup>34</sup> vor dem PC. Die Klausuren wurden weiterhin am PC verfasst, ein Zwang zur Nutzung des CAS bestand aber nicht. Grund war, dass sich die Gruppe möglichst lange offen halten wollte, ob die zentrale Abiturklausur mit oder ohne CAS-Nutzung geschrieben werden sollte. Die Entscheidung für eine Nutzung von CAS im Abitur erfolgte vor der Vor-Abiturklausur mit einem Votum von 15:4 pro „CAS im Abi“.

**Evaluation.** Die zentrale Abitur-Klausur L08 wurde von 19 Teilnehmern geschrieben, darunter 5 Mädchen und 14 Jungen. Der Leistungsdurchschnitt lag bei 77 % der erzielbaren Gesamtpunktzahl, 6 SchülerInnen erzielten die Note 'sehr gut' und 9 die Note 'gut', insgesamt ergab sich die Verteilung (  $\begin{matrix} \text{Note:} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \text{Anzahl:} & 6 & 9 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{matrix}$  ), siehe auch Abbildung 5.20. Diese Leistungsdichte<sup>35</sup> war NRW-weit sehr gut positioniert.

<sup>34</sup>Im Falle von Einzelarbeit vor dem PC (z. B. auch zu Hause) diene das CAS selbst als Kooperationspartner (Experte).

<sup>35</sup>Die Klausuren wurden von einer unbekanntem Koreferentin zweitkorrigiert; es gab nur minimale nicht-notenändernde Abweichungen im Vergleich zu der Erstkorrektur.

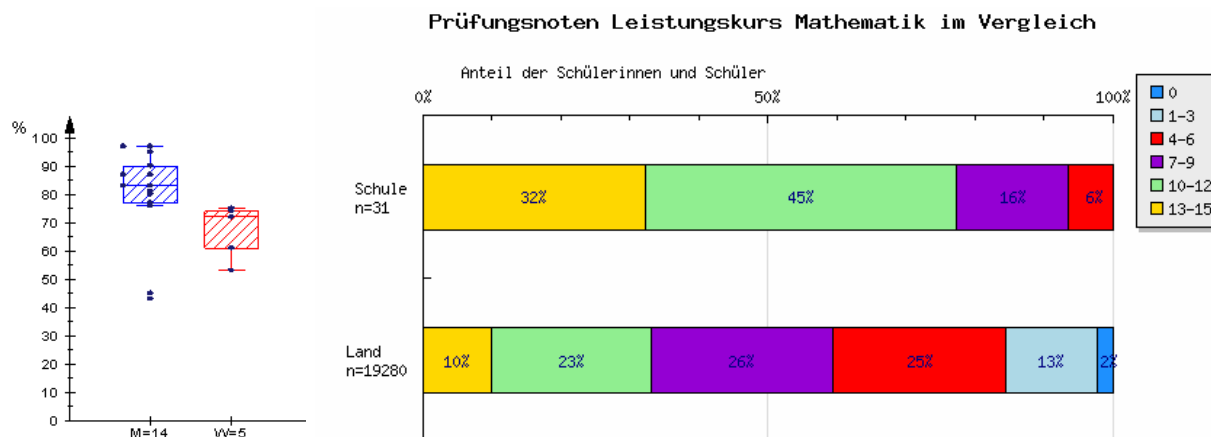


Abbildung 5.20: *Links*: Ergebnis der CAS-Abiturklausur L08 als Boxplot bei  $N=19$  mit  $M=14$  und  $W=5$  mit einer durchschnittlichen Bilanz von 77% (= 'gut'). *Rechts*: offizieller Vergleich der Notenverteilung an der Schule (incl. L08) mit der Notenverteilung im Land NRW 2008.

## 5.2 ausgewählte transkribierte Unterrichtsepisoden

Wie oben ausgeführt wurden die CAS-Lernumgebungen LA-A. .Z zur Linearen Algebra im ersten Parcours LA-A. .E durch eine Problemstellung zu Markoff-Prozessen eingeleitet. Die vermischten Aufgaben am Ende von LA-E enthielten – nach dem Studium des Rechnens mit Matrizen in LA-E1 – in LA-E3 das Problem 'Matrixmauern' und in LA-E4 die Aufgabe 'Magische Matrizen'. Diese beiden Aufgabenstellungen aus der Anfangsphase des Lehrgangs werden im Folgenden gemäß der interpretativ-hermeneutischen Methode der sog. Interpretativen Unterrichtsforschung nach J. VOIGT exemplarisch einer detaillierteren Betrachtung unterzogen.

### 5.2.1 Matrizenmauern

Am Ende der Selbstlerneinheit über *Matrizen und LGS* sollte vertieft über einige algebraische Eigenschaften des Vektorraumes der Matrizen nachgedacht werden. Insbesondere stand die Kommutativität sowie die Invertierung von Matrizen im Fokus. Ziel war die Kontrastierung von Null- bzw. Einselement im Kontext von Addition bzw. Multiplikation. *Methode*. Die SchülerInnen hatten zuvor Gelegenheit, die in Frage stehenden Probleme in vorangegangenen U-Stunden am PC in kooperativer Partnerarbeit zu bearbeiten. Nun sollten die individuellen Vorerfahrungen kollektiv konsolidiert werden. Nicht alle SchülerInnen hatten beide Aufgaben zu diesem Zeitpunkt schon bearbeitet.

*Episode*. Der Kurs hat sich zu Unterrichtsbeginn im *Stuhlkreis* um die Whiteboard versammelt. An der Tafel sind zwei Matrizenmauern vor Unterrichtsbeginn vom Lehrer aufgeschrieben worden.

Die folgende Episode beginnt 02:11 Minuten nach Stundenbeginn. Zunächst wird der linke



Abbildung 5.21: Matrizenmauern: Stuhlkreisbildung im PC-Raum zur bewussten Konzentrierung auf die Tafelarbeit; die 16 Rechner sind abgeschaltet.

Matrizenturm als Übung zum Rechnen mit Matrizen von einem Schüler vervollständigt.

*Danach wird gefragt, wie man die Matrix unten rechts wählen muss, damit die mittig darüber stehende Matrix in der Matrizenmauer aus lauter Nullen besteht.*

Notation: L: Lehrer; S, R, T, ...: Schüler/Schülerin

- 1 **L:** Können wir mal eben wischen? Also .. ich wisch mal weg .. nach Stefan's Bemerkung wisch ich das hier auch weg. [*löscht die Einträge in der Matrixmauer rechts unten und in der Mitte rechts*] ... und äh muss ich hier oben auch wischen? [*zeigt auf die Einträge in der Matrix an der Spitze*]
- 2 **S:** [*Gemurmel, leise Bemerkungen wie 'Ne!', 'Ja, wenn da Null sein soll ..'*]
- 3 **L:** Muss ich wischen?
- 4 **SS:** [*diverse Zurufe wie 'ne', 'ja'*]
- 5 **L:** Wenn hier Null is? [*zeigt auf die rechte Matrix in der mittleren Zeile der Matrixmauer*]
- 6 **SS:** Ja.
- 7 **L:** Ja, nich!?
- 8 **L:** Warum? ... Warum, Felix?
- 9 **F:** Ja, die werden ja noch mal addiert ... also können die ja nicht gleich bleiben.
- 10 **L:** Also, was füllen wir hier aus, ja? Ihr wisst, was rauskommen muss. Wer kann das jetzt mal eben durchführen? Ja, Beate, machst du's vorne? Du darfst dir ne Farbe nehmen, die dir gefällt. [*hält vier verschiedenfarbige Boardmarker in der Hand.*]
- 11 **S:** Ja, wenn hier überall ne Null sein muss .. dann muss man hier überlegen, mit welcher Zahl man die äh 1 addieren muss, damit Null rauskommt und dann muss man eigentlich von den ganzen Zahlen einfach bloß die negativen Zahlen nehmen ... also ... weil wenn man 1 plus -1 rechnet, dann kommt man auf Null.
- 12 **L:** Ähm, und oben?
- 13 **S:** Ja, oben kommt das Gleiche raus wie da. [*zeigt auf die linke Matrix in der Mitte*]
- 14 **L:** Ok, das war ne Zahlenmauer zur Addition. Richtig. Fragen dazu? ... Ok, im Prinzip klar. Rechts sehen wir eine Zahlenmauer zur Multiplikation. Es sind die gleichen Daten da, die wir eben hatten. Was war die gestellte Aufgabe? [*im Sheet E3.*] Phase eins? Phase zwei? [*meint die beiden in E3b gestellten Aufgabenteile.*] Tom!

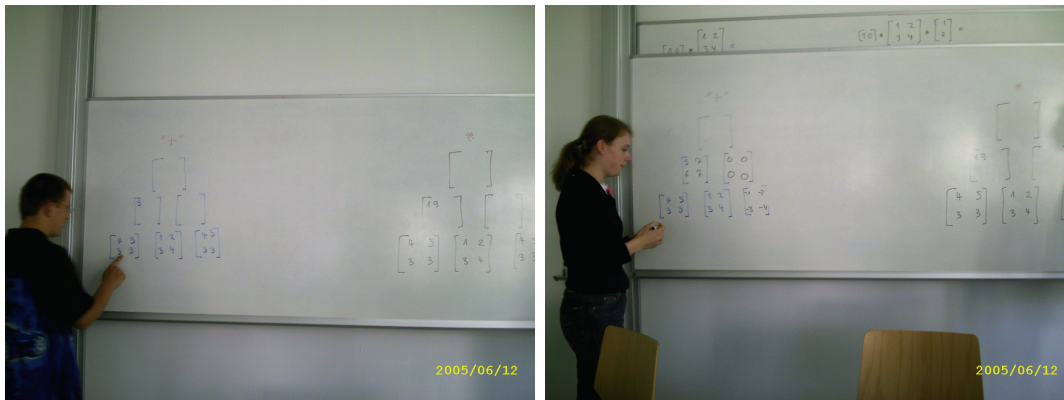


Abbildung 5.22: Matrizenmauern: Addition und Nullelement ('Nullmatrix').

- 15 **T:** Ausfüllen!
- 16 **L:** Könnt ihr hier mal eben füllen? [*Rita meldet sich neben weiteren SchülerInnen*] Ja, Rita!
- 17 **R:** [5:40; *R geht zur Tafel.*] ehm ehm 4 mal 2 sind 8 ... plus äh 5 mal 4 sind 28 und ... ehm 3 plus 9 sind 12 ... plus 6 plus 12 sind 18 ... ehm 4 plus 6 sind 10 ... [*Gemurmel; ein Schüler: 'Sind 20 .. ach ne.'*] ist das ne 5?
- 18 **L:** Jou.
- 19 **R:** ... ok, ehm ... ehm ... 5 plus 6 sind 11 ... und 12 plus 12 sind 24 ehm ... und 15 plus 12 sind 27.
- 20 **L:** Ok. – Oben ist's schwierig, ja? Aber wie es geht, wüsste man – sag mal wie es gehen würde.
- 21 **R:** [*R spricht nun sehr schnell.*] ehm ... indem man 19 mal 10 plus 28 mal 24, das kommt dann hierhin ... und plus 19 mal 11 plus 28 mal 27, das kommt dann hierhin ... und plus 12 mal 10 plus 18 mal 24, das kommt dann hierhin und plus 12 mal 11 plus 18 mal 27 ein kommt 15 plus 12 sind 27, das kommt dann hierhin [*zeigt jeweils die Produktbildung und deutet auf die Position des Eintrags in der Matrix an der Spitze der Pyramide.*]



Abbildung 5.23: Matrizenmauern: Multiplikation und Einselement ('Einheitsmatrix').

- 22 **L:** Richtig. Jetzt war ne Zusatzfrage gestellt. Wer weiß noch, worum das .. [*schaut in die Runde*] .. worum es sich handelte – bei der Zusatzfrage? ... Habt ihr's gemacht? [*Gemurmel: 'mal probiert'*,

- 'konnte ich nicht so richtig'] Ok, aber gemacht haben wir was, nicht wahr? [Christa meldet sich als einzige] Christa!
- 23 C: Es ging darum, wie man die Matrix unten rechts wählen muss, damit in der Matrix, die ganz oben steht, immer das gleiche rauskommt, wie in der 19-er Matrix.
- 24 L: Richtig, das ist die Idee dahinter, ja! Kannst du mal durch Wischen zeigen, was dazu passieren müsste, Christa?
- 25 C: Äh ...[Leises Gemurmel im Kurs u. a. 'Eins muss rauskommen'.] äh von hier oben gesehen [ergänzt an der Spitze die Matrix Mitte links] ... muss man hier [zeigt auf die Matrix Mitte rechts]  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  haben, wenn man das hier oben wieder rausbekommen möchte.
- 26 L: Richtig! Wie kriegt man das jetzt raus, Christa .. weißt du das, Christa?
- 27 C: Indem wir ... [S und L sprechen gleichzeitig]
- 28 L: ... lass uns das mal rekonstruieren .. ähm
- 29 C: Wir wissen ja, dass ähm die hier mal das, was da steht, das hier ergeben muss, also [schreibt die betrachteten Matrizen neben dem Matrixturm als Matrixgleichung  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$  an die Tafel] und dann ergibt das diese [ergänzt  $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ].
- 30 L: Prima!
- 31 C: Die übrigen sind dann gleich dieser Matrix. Dann kann man beispielsweise einen Teil der Lösung an der Matrix hier schon ablesen ...
- 32 L: Jaahh??
- 33 S: Z. B. dass ähm  $x_1 = 1$  ist und .. 1 mal  $x_1$  plus ähm .. 2 mal  $x_2$  ist gleich [Gemurmel in der Gruppe: 'Kannst du eine bisschen lauter'] ... ähm eh ne
- 34 L: Warum kann man das nicht machen? Das, was man ablesen möchte? Kann jemand sagen, warum das nicht gehen kann? .. Selbst!
- 35 C: Ja, weil das dann schon ohne das da [deutet auf den linken Faktor  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  der Matrixgleichung] das Ergebnis wäre.
- 36 L: Hmm. Ja, was machen wir dann, um die Zahlen rauszukriegen?
- 37 C: Man kann einfach die Gleichungen aufstellen und dann auflösen.
- 38 L: Schreibst du das mal an?
- 39 S:  $x_1$  plus 2 mal  $x_2$  gleich 1 [schreibt jetzt still weiter.] ... .. Und hier kann man das auch machen.
- 40 L: Ja, schreibst du drüber?
- 41 S: 1 mal  $y_1$  plus 2 mal  $y_2$  gleich 0 und ähm 3 mal  $y_1$  plus 4 mal  $y_2$  gleich 1.
- 42 L: Jawoll! Wer sagt mal, wie wir im Prinzip lösen können – wie man im Prinzip löst, Beate?
- 43 ... .. [Gemurmel, kurzes Lachen einiger.]
- 44 L: Tobias?
- 45 T: Man kann jetzt zum Beispiel die obere Gleichung zum Beispiel nach  $x_1$  auflösen und dann in der nächsten für  $x_1$  einsetzen.
- 46 L: Ja! ... Oder? ... Wer könnte eine automatische Lösungsmethode vorschlagen, wenn man weiß, wie es im Prinzip geht und möchte das nicht mehr selbst machen? ... Tom!
- 47 S: `linsolve` oder `solve` nehmen!





Abbildung 5.24: Matrizenmauern: Anbahnung und Berechnung der inversen Matrix.

*Kommentar:* Die Episode ist in zwei Phasen unterteilbar. In Phase 1 von Zeile 1 bis Zeile 14 wird der schon fertige additiv konstruierte Matrixturm auf Aufforderung der Lehrperson einer Untersuchung auf *additive Inverse* ('Negative') und das *Nullelement* bzgl. der Addition von Matrizen unterzogen. Durch die Operation des Auswischens von Matrixeinträgen wird zunächst gezielt der Umfang der Auswirkung im Matrixturm ausgelotet (Zeile 9). Beate erfasst intuitiv die Gestalt der additiven Inversen, die Sprechweise bleibt aber notgedrungen ostentativ, da eine zugehörige Begriffsbildung erst im kontrastierenden Nachgang zu den Erfahrungen am Matrixturm erfolgen soll.

Die zweite Phase ist wiederum in zwei Problemstellungen unterteilt. Zunächst baut die Schülerin Rita den Matrixturm multiplikativ auf. Es zeigt sich, dass die in der Selbstständigkeitsphase gewonnenen Einsichten stabil sind, insbesondere die vom konkreten Rechnen befreite Beschreibung des algorithmischen Vorgehens bei der Matrizenmultiplikation (Zeile 21) weist dies auf. Die mündliche Rede ('4 mal 2 sind 8 ... plus äh 5 mal 4 sind 28') mischt allerdings Zwischenergebnisse ('sind 8') mit unterdrückten Zwischenrechnungen zu Endergebnissen ('plus äh 5 mal 4 sind 28') – hier ist das Zwischenergebnis 20 im Kopf gehalten und wird mit dem Zwischenergebnis '8' zum Teilergebnis '28' addiert. Zur Erleichterung der kognitiven Ladung kommt es zu verstärkten Zeigehandlungen wie '.. das kommt *hierhin*'.

In Zeile 22 bis 47 wird in Analogie zum ersten Matrixturm durch Löschen von Einträgen die Situation verfremdet und invertiert: Es sind *Matrizen am Boden des Turms zu rekonstruieren*. Man bedenke, dass das Konzept des multiplikativen Inversen noch nicht gebildet ist, sondern hier absichtsvoll angestoßen wird. Ausgangspunkt ist ein Auftrag im Worksheet E3b, der von der Schülerin Christa richtig erinnert wird. Christa war nach Durchsicht aller eingegangenen Eigenproduktionen zu diesem Zeitpunkt die einzige Person im Kurs, die diese Problemstellung bearbeitet hatte. Diesmal nimmt die Schülerin selbst die notwendigen Änderungen am konstruierten Matrixturm vor: Sie führt das Einselement bzgl. der Matrixmultiplikation ('Einheitsmatrix') beschreibend ein (Zeile 25) und formuliert damit zutreffend die charakterisierende Bedingung  $A * X = E$  für die unbekannte inverse Matrix

X (Zeile 29). Zeile 33 zeigt einen psychologisch erklärbaren Kurzschluss: Christa fixiert ihren Augenfokus offenbar in der Nähe des Gleichheitszeichens und führt einen Vergleich der unmittelbar um das Gleichheitszeichen stehenden Matrizen auf elementweise Gleichheit durch. Dies führt zu der falschen Konsequenz, dass  $x_1 = 1$  ist. Hieraus möchte sie offenbar zunächst weitere Folgerungen ziehen, aber durch die unruhig werdende Gruppe wird sie zögerlich. Die Lehrkraft greift daher möglicherweise in Zeile 34 zu früh ein, denn in Zeile 35 vermag Christa den Grund in der unausgeführten Multiplikation auf der linken Seite der Matrixgleichung zu erkennen. In Zeile 37 bis 41 kann Christa die *Aufteilung der Matrixgleichung vorausschauend in zwei 2x2-Gleichungssysteme entkoppeln* – eine algebraische Modellierungsleistung, die zu diesem Zeitpunkt<sup>36</sup> nicht zu erwarten gewesen wäre. Die richtige Benennung der händischen Lösungsmethode (Zeile 45) und die computergestützte<sup>37</sup> Methode (Zeile 47) lassen die erfolgreiche Instrumentalisierung erkennen.

Zum Vergleich ziehen wir die zugehörige schriftliche Eigenproduktion derselben Schülerin Christa heran, vgl. Abbildung 5.25.

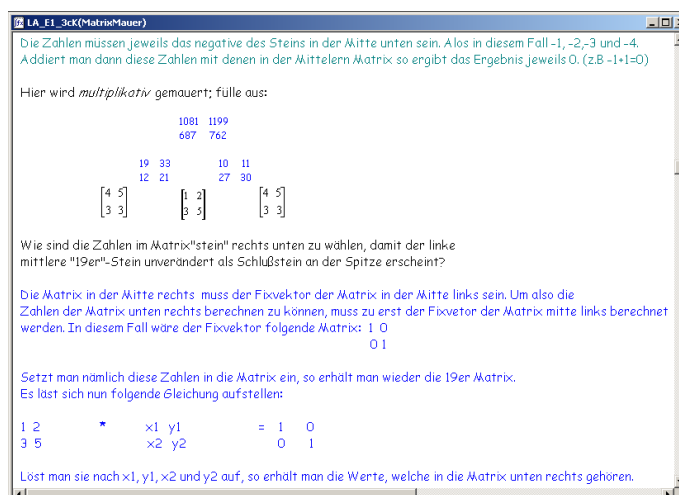


Abbildung 5.25: Zur Entdeckung von Einselement und inverser Matrix im Matrixenturm durch Christa

Zunächst stellt man fest, dass der gebildete Matrixturm Rechenfehler enthält. Diese bleiben unkorrigiert, da die Schülerin Christa das CAS zur Ergebnis-Kontrolle nicht einsetzt, obwohl dies im Auftrag E2 unmittelbar vorher demonstriert worden war. Möglicherweise war sie sich der 'Evidenz' zu sicher. In der „*Sprache des Verstehens*“ nennt Christa die Einheitsmatrix den 'Fixvektor der 19-er Matrix'. Sie stellt sich möglicherweise vor, dass die Multiplikation mit dieser Matrix die '19-er Matrix' nicht verändert, d. h. fix hält. Der Begriff 'Fixvektor' wurde in der Lernumgebung LA-A (Bevölkerungswachstum; Markowprozesse) eingeführt, die u. a. von stabil werdenden Bevölkerungsentwicklungen handelte. Die

<sup>36</sup>Aufgaben dieser Art wurden erst in einem nachfolgenden Teil der Selbstarbeitsphase thematisiert.

<sup>37</sup>Die in der einführenden Modellierung 'Bevölkerungswachstum' zur Rückrechnung auf den Vorjahresbestand benutzte inverse Matrix  $A^{-1}$  war nicht im Antwortfokus.

charakteristische Gleichung zur Berechnung der Inversen wird korrekt formuliert und in den mathematischen Begriffszusammenhang zwischen betrachteter Matrix, ihrer Inverser und der Einheitsmatrix eingestellt. Denkbar ist, dass die Schülerin zu diesem Zeitpunkt ihrer individuellen Begriffsgenese vorsichtigerweise noch glaubt, dass jede Matrix ihre eigene Einheitsmatrix ('Fixvektor') haben könnte, denn sie schreibt vom 'Fixvektor der Matrix Mitte links'. Die zentrale Vorstellung, dass die verallgemeinerte „ $\underline{1}$ “ bei der Matrizen(!)-Multiplikation  $X * \underline{1} = X$  den anderen Faktor nicht verändert, ist aber klar erfasst.

*Anmerkungen.*

1. Die von der Schülerin angegebene Charakterisierung der inversen Matrix lässt sich im CAS explizit ausrechnen:

```
• A:=matrix([[1,2],[3,4]]);
 X:=matrix([[x1,y1],[x2,y2]]);
 Eins:=matrix([[1,0],[0,1]]);
 solve(A*X=Eins)
```

```
[x1 = -2, x2 = 3/2, y1 = 1, y2 = -1/2]
```

2. In obiger Episode hätte die Lehrperson direkt im Anschluss an das Klassengespräch im Kontrast zwischen den additiv resp. multiplikativ konstruierten Matrizentürmen die Gemeinsamkeiten bzw. Verschiedenheiten der neutralen Elemente bzw. der Inversen fokussieren können. Dies erfolgte im konkreten Unterricht nach den Feldnotizen zu Beginn der nächsten Unterrichtsstunde während der 5-minütigen 'Hochfahrpause' des Lehrerservers, da das Tafelbild noch unverändert zur Verfügung<sup>38</sup> stand. Dieses Zeitfenster wird im CAS-unterstützten Unterricht sinnvollerweise für Rückbesinnung, Verständnisfragen o. ä. genutzt.

### 5.2.2 Magische Matrizen

Die folgende *Episode* zur Lösung von LA-E7 'magische Matrizen' wurde im Kurs L06 mit Hilfe eines kleinen batteriebetriebenen Diktiergerätes aufgezeichnet. Dieses Gerät wurde dann in Schülernähe postiert, wenn Gesprächsaufzeichnungen der kooperierenden Paare oder Lehrer-Schüler-Dialoge am Platz mitgeschnitten werden sollten.

In der folgenden Episode wird Bezug genommen auf eine vorher im Kurs bekannt gemachte Schülerlösung, die wesentlich auf einem geschickten trial-und-error Verfahren zur Lösungssuche basiert und damit eine das CAS intensiv nutzende Methode verwendet: Denkarbeit bei wachsamer Beobachtung des sich ändernden Outputs. Diese Lösung sei daher hier in der originalen Schülerlösung angegeben, siehe Abbildung 5.26.

Zum Verständnis der 'Dürerquadrat'-Episode betrachte man die beiden Screenshots in Abbildung 5.27, auf die die Protagonisten der nachfolgenden Szene Bezug nehmen.

<sup>38</sup>Ggfs. hätte das fotografierte Tafelbild an die Einzelplatz-Rechner der Gruppe verteilt werden können.



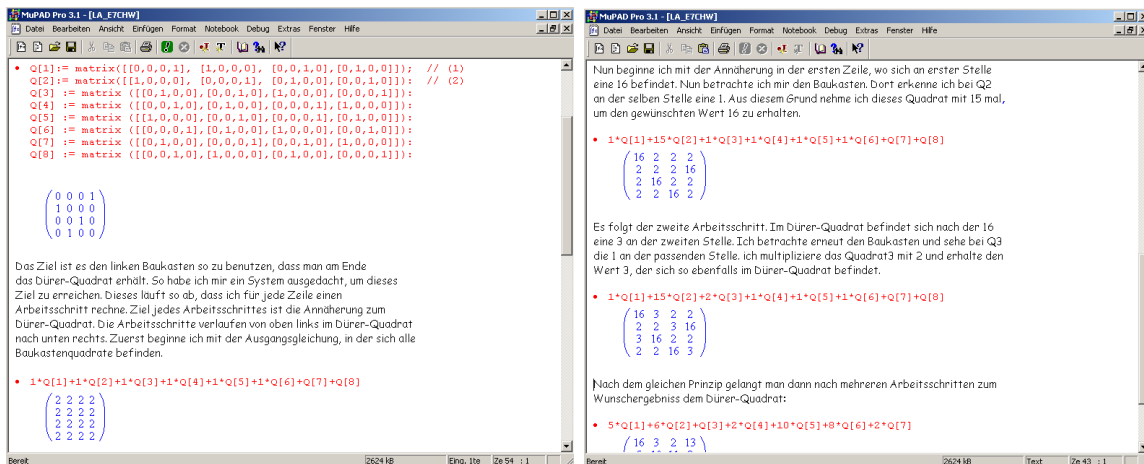


Abbildung 5.26: Magische Quadrate: eine systematische Darstellung des DÜRER-Quadrates als Linearkombination per trial-and-error im CAS.

### Episode.

Die Szene beginnt kurz nach Stundenbeginn.

- 1 **SS:** Wir haben es!
- 2 **L:** Was?
- 3 **R:** Doch, wir haben es. [*Jubeln. Lachen. Glucksen.*]
- 4 **L:** Sag bloß!
- 5 **SS:** Juhu - wir ha-ben es! [..]  
[*L geht zu dem Schülerpaar R. und C.*]
- 6 **R:** Habe ich letzte Woche nicht schon gesagt, wir müssen es mit ganz viel Variablen machen ..  
[*Lachen.*]
- 7 **C:** Wir könnten theoretisch ja auch auch einfach mal Q7 nehmen, das ist dann für Q8, ne, mal probieren.
- 8 **R:** Ja, aber, wie war jetzt grad
- 9 **C:** Wir speichern das erst mal. [*probieren weiter. [..]*]
- 10 **R:** Da mussten wir erst mal hier. .
- 11 **C:** Ja, mach einfach da die 7 weg [*tippen im Sheet; probieren weitere Variablenbelegungen aus. [..]*]  
[*1:41; L kommt.*]
- 12 **L:** Lasst mich gucken .. [*R und C sprudeln vor Aufregung ..*] jajajaj - also?
- 13 **R:** Ok, also, wir haben erst auch so ausprobiert wie der Chris, dann waren wir auch so am zweifeln [*glucksen*] uhm dann haben wir noch versucht hier das mit Variablen zu machen.
- 14 **L:** Jaa?
- 15 **C:** Und mit solve
- 16 **R:** Und dann hatten wir erst noch Q8, haben wir also alle genommen, aber da kam dann wieder nur ne Abhängigkeit raus, so dass irgendwie rauskommt  $a=5-h$  oder so ..

- 17 C: Ne Abhängigkeit von h kam da raus.
- 18 L: Aha
- 19 R: Genau, und wir haben erst noch eins weggelassen und dann hatten wir so ne prima Lösung hier  
[zeigt auf den Output im MuPAD-Sheet]
- 20 L: aha!
- 21 C: Und dann haben wir die auch eingesetzt, und dann kam auch das Duerer raus.
- 22 R: Und dann haben wir nämlich grad' nochmal versucht, wenn wir für Q7 eben Q8 jetzt vielleicht mal reintun, also hier mal 'nen anderes ähm Q weglassen, dann kommen andere Lösungen raus, aber dann kommt auch das Dürer-Quadrat raus.
- 23 C: Also wenn wir was anderes einsetzen, dann kommt das so raus.  
[2:23; SS zeigen L nochmals das Vorgehen und diskutieren mit L im Zwiegespräch einen Ansatz, der Q8 enthält. Eine klare Abhängigkeit kann nicht gefunden werden, die SS zeigen L online ihre Beispielrechnungen. - 3:47]
- 24 L: Das habt ihr schön gemacht! Wie kamt ihr jetzt da drauf?
- 25 R: Wahllos .. wir haben mal gedacht, wir können auch solven [lachen] .. ne, wir hatten erst die ganze Zeit gedacht, das irgendwie .. die Quadrate .. irgendwie äh gleich Dürer sein müssen .. aber da wir 8 Quadrate haben, war das ein bisschen schwer, das alles so in so Gleichungen zu bringen.
- 26 L: Genau, könnt ihr mal ein Beispiel machen, wo das andere Quadrat mit dabei war, wie ihr erzählt habt .. also Q7 mit dabei war.
- 27 R: Ach so, ja.
- 28 L: Die Abhängigkeit, von der ihr erzählt habt.  
[10:31; L bittet die SS um einen Lösungsvortrag im Plenum. Dazu wird der Schüler-Bildschirm von R. u. C. über das pädagogische Netz an alle anderen SS verteilt. 11:12]
- 29 L: Eure Idee, ihr Zwei!
- 30 R: Wir haben hier .. [L vergewissert sich, ob alle SS Zugriff auf den aktuellen Bildschirm haben.]
- 31 L: Könnt ihr den Schirm sehen?
- 32 R: Ähm, wir haben hier zunächst ähm das Dürerquadrat, ähm eben auch ähm die Matrix ähm hier aufgeschrieben.
- 33 R: Und dann haben wir nach langem Hin- und Herüberlegen ähm uns gedacht, dass es ja eigentlich auch ähm so gehen müsste, dass, wenn wir alle ähm Quadrate, also alle Q-Quadrate auflisten und mit Variablen versehen, also mit Variablen praktisch multiplizieren und das gleich Dürer setzen, dass da eben mit solve auch ne Lösung rauskommen muss.
- 34 C: Und da haben wir eben hier so eine erste Lösung, aber hier haben wir wie ähm man ähm sieht Q8 weggelassen ähm weil es ja auch mit 7 Qs geht.
- 35 R: Und im Prinzip könnte man auch äm hier noch irgendwo minus oder so einstreuen [tippt die Änderung live ein und demonstriert die Reaktion des Systems.] .. dann würde halt ne andere Lösung hier rauskommen [streicht mit der Maus über den neuen Output.]
- 36 R: Aber man würde eben auch hier diese äh a, b, c, d, e, f, g [tippt diese sieben Variablen ein] äh würde man eben auch aufgelöst bekommen.
- 37 C: Und dann haben wir das hier eben als Lösung eingesetzt, und hier unten haben wir das mal gemacht, dass wir eben für Q7 Q8 eingesetzt haben - wir kriegen natürlich ne andere Lösung, aber auch eine Lösung, die, wenn man sie einsetzt das Dürerquadrat ergibt.  
[tippt Werte ein]

Kannst du Dürer's magisches Quadrat im Kupferstich "Melancholia" von 1514 aus  $Q_1$  bis  $Q_8$  "zusammenmischen"?

```

• Duener:=matrix([[16,3,2,13], [5,10,11,8], [9,6,7,12], [4,15,14,1]]);
solve(Q[1]*a+Q[2]*b+Q[3]*c+Q[4]*d+Q[5]*e+Q[6]*f+Q[7]*g=Duerer);
loes1 := 5*Q[1]+6*Q[2]+Q[3]+2*Q[4]+10*Q[5]+8*Q[6]+2*Q[7];

[[a = 5, b = 6, c = 1, d = 2, e = 10, f = 8, g = 2]]

[[a = 5, b = 6, c = 1, d = 2, e = 10, f = 8, g = 2]]
[[a = 5, b = 6, c = 1, d = 2, e = 10, f = 8, g = 2]]

• solve(Q[1]*a+Q[2]*b+Q[3]*c+Q[4]*d+Q[5]*e+Q[6]*f+Q[7]*g=Duerer);
7*Q[1]+8*Q[2]+3*Q[3]+4*Q[4]+8*Q[5]+6*Q[6]+2*Q[8];

[[a = 7, b = 8, c = 3, d = 4, e = 8, f = 6, g = -2]]

[[a = 7, b = 8, c = 3, d = 4, e = 8, f = 6, g = -2]]
[[a = 7, b = 8, c = 3, d = 4, e = 8, f = 6, g = -2]]

```

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{[a = 7, b = 8, c = 3, d = 4, e = 8, f = 6, g = -2]\}$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

```

• solve(Q[1]*a+Q[2]*b+Q[3]*c+Q[4]*d+Q[5]*e+Q[6]*f+Q[7]*g+Q[8]*h=Duerer);
loes:=h->(5-h)*Q[1]+(6-h)*Q[2]+(1-h)*Q[3]+(2-h)*Q[4]+(h+10)*Q[5]
+ (h+8)*Q[6]+(h+2)*Q[8]=Duerer;

[[a = 5-h, b = 6-h, c = 1-h, d = 2-h, e = h+10, f = h+8, g = h+2]]

h -> (5-h) * Q1 + (6-h) * Q2 + (1-h) * Q3 + (2-h) * Q4 + (h+10) * Q5 + (h+2) * Q8

• loes(-2)=Duerer;
is(loes(-2)=Duerer)

[[a = 7, b = 8, c = 3, d = 4, e = 8, f = 6, g = -2]]
[[a = 7, b = 8, c = 3, d = 4, e = 8, f = 6, g = -2]]
[[a = 7, b = 8, c = 3, d = 4, e = 8, f = 6, g = -2]]

```

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 4 & 13 \\ 7 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

FALSE

Abbildung 5.27: Magische Quadrate: eine Darstellung des DÜRER-Quadrates als Linearkombination von Quadrat-Bausteinen mittels `solve()`.

38 R: Dann haben wir jetzt hier unten das, was wir am Anfang eigentlich stehen haben, nur für die ersten Q, also die von 1 bis 8, genommen hatten und dann kriegt man ja hier [zeigt auf die Formel im Sheet], dass die alle in Abhängigkeit von h rauskommen, also die ganze Lösung und h selber jetzt hier ja sichtbar ist .. dann kommen alle in Abhängigkeit von h raus .. und dann haben wir versucht, das ähm das kann man hier sehen [zeigt auf den neuen Input] das einfach in Anhängigkeit von h aufzuschreiben .. allerdings kommen da falsche Zahlen raus.

*Kommentar.* Die Episode zeigt zwei Phasen: Eine Schüler-Lehrer-Interaktion Szene 1–28, die über Fragen von L das neu gefundene Wissen erkundet, und eine Plenumspräsentation Szene 29–36, die erklärend mit Hilfe verteilter Bildschirme das neue Wissen an die Peers verbreitet.

Die Schülerinnen haben eine Linearkombinationsdarstellung des Dürerquadrats gefunden, welche im Unterschied zur 'unbefriedigenden' und aufwändigen trial-error-Lösung einen systematischen, knappen Ansatz nutzt und daher subjektiv Freude auslöst. Die Schülerinnen suchen nun in 6 nach einer weiteren Lösung, ersetzen dazu den Index 8 durch eine 7 und tauschen so das basale Quadrat  $Q[8]$  durch  $Q[7]$  aus, vgl. die jeweils zweite Zeile in den beiden ersten Anfragen.

Szene 13 verweist auf die vorhergehende Schülerlösung und lässt erkennen, wie die Lernenden den konkreten 'a point' Austausch der Koeffizienten im Linearkombinationsansatz durch unbekannt Variable ersetzen. In 16 berichten sie, dass im Lernprozess zunächst der 'volle' Ansatz mit allen Basisquadraten verwendet wurde - dieser aber keine konkrete Lösung brachte ('a=5-h'), siehe vorgreifend Abbildung 5.27. Daher wurde die Linearkombination reduziert, was darauf verweist, dass die Schülerinnen ein erstes intuitives Wissen für die Unterbestimmtheit des Ansatzes ausbilden und auch dafür, dass die Hinzunahme eines weiteren Quadrates ('Vektors') zu den 7 gewählten die Abhängigkeit verursacht: Eine wichtige Einsicht aus der Theorie endlicher Vektorräume bildet sich aus.

In 22 und 23 wird deutlich, dass ein systematischer Austauschprozess von linear-unabhängi-

gen<sup>39</sup> Vektoren<sup>40</sup> vorgenommen wird, der jeweils zu neuen Lösungen für die Parameter  $(a, b, \dots, f)$  führt. Offenbar hatte das Schülerpaar zunächst vor, vgl. 25, eine Anzahl von Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten  $(a, b, \dots, f)$  zu gewinnen.<sup>41</sup>

Szene 33 bestätigt diese Interpretation: Der entscheidende Linearkombinationsansatz wird motiviert, die Notwendigkeit der Linearen Unabhängigkeit der gewählten Vektoren zur Erzwingung einer eindeutigen Lösung mit eigenen Worten aber noch unklar formuliert ('weil es ja auch mit 7 Quadraten geht').

In Szene 38 decken die Schülerinnen ihre Grundvorstellung vom Beginn auf: Verwendet man alle 8 angegebenen Quadrate, so erhält man einen 'allgemeinen Term in Abhängigkeit von einer Variablen'. Diese richtige Kernidee testen sie an einem Beispiel, können aber das Dürer-Quadrat nicht erzeugen - *der gefundene Term produziert nicht die erhoffte Lösung*. Die Schülerinnen halten aber den *Term* zunächst offenbar für eine *Parametrisierung der allgemeinen Lösung*.

Insgesamt zeigt diese Episode eindrucksvoll, wie *selbstständige Erkundungen mit CAS wichtige Grundkonzepte und Grundvorstellungen anbahnen* können.

### 5.2.3 Die rollende Kugel

Die folgende Episode bezieht sich auf eine einführende paradigmatische Problemstellung zum Skalarprodukt. Es handelt sich um die Einheit LA\_Q aus dem letzten Teil der Parcourssequenz. Dazu wurde die Aufgabenstellung A2 aus [129, S. 99] um eine Modellierungsaufgabe erweitert, welche die gefundene Lösung in der virtuellen Realität des CAS verifizieren sollte.

Es werden im Folgenden auszugsweise zwei Dokumente vorgestellt und hinsichtlich einiger Befunde analysiert.

*Problemstellung* LA\_Q. Abbildung 5.28 zeigt die Aufgabenstellung und einen Modellierungshinweis: Dieser bestand in dem Quellcode zur Erzeugung eines Autos, das eine schiefe Ebene hinunterfährt.

Die SchülerInnen beschäftigten sich mit dieser Aufgabe selbstständig für den Zeitraum einer Woche (d. h. im LK für 5 Stunden). Nach 3 Stunden wurden zwei unterschiedliche Schülerlösungen im Plenum vorgestellt und an der Whiteboard nebeneinander gestellt.

*Lösungsvariante 1 von Schülerin L06-05*. Diese Schülerin findet eine analytische Lösung, vgl. Abbildung 5.29, die sie selbstständig in ihrem Worksheet ausführlich beschreibt und an der Tafel knapp skizziert. Die Formel für die euklidische Länge eines Vektors wird selbstständig gefunden. Diese Längenformel wird zum Abstand vom gegebenen festen Punkt A zu einem variablen Punkt auf der Schnittgeraden von der schiefen Ebene mit

<sup>39</sup>Man verifiziert, dass  $a * Q1 + b * Q2 + \dots + f * Q7 = 0_{4 \times 4}$  nur die triviale Lösung  $a = b = \dots = f = 0$  hat.

<sup>40</sup>vgl. Austauschatz von STEINITZ

<sup>41</sup>Diese Kernidee wird später von anderen Schülern auch realisiert. Der Nachweis der Gleichwertigkeit dieser Ansätze verlangte nach einem geschickten Repräsentationswechsel, der sich für die Schüler als nicht-trivial herausstellte.

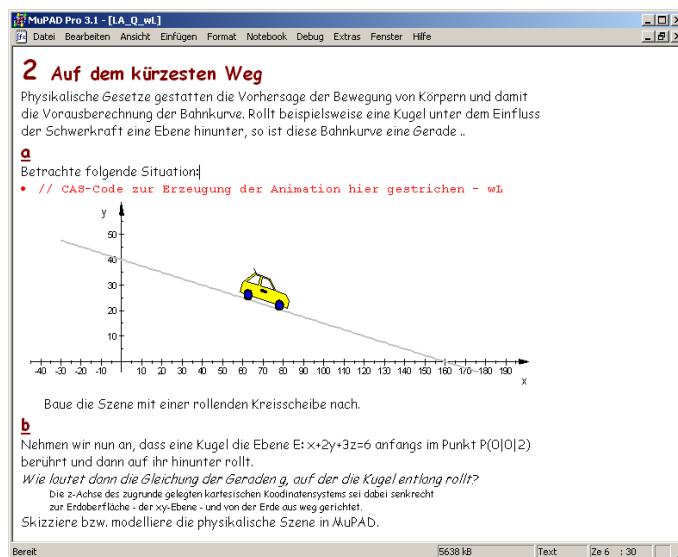


Abbildung 5.28: Aufgabenstellung zum Problem der rollenden Kugel

der Bodenfläche spezialisiert. Diese Abstandsfunktion wird auf ihr Minimum<sup>42</sup> untersucht. Fünf Zeilen CAS-Code lösen das Problem. Die modellierende Animation beschränkt sich in wenigen Zeilen auf das Wandern eines Punktes längs der gefundenen Bahn. Die von der Schülerin angesprochene fehlende Maßstabstreue wurde durch Setzen der Zeichenoption 'Scaling=Constrained' behoben - das Bild links zeigt schon die so korrigierte Version. Die Schülerin bewertet diese „Q-te Etappe des LinAlg-Parcours“ in Schulnoten für Verständlichkeit mit 1 („sehr gut“), im Schwierigkeitsgrad mit 2 („leicht“), in Faszination mit 1 und gibt einen Zeitbedarf von ca. 180 Minuten für die Lösung an.

*Lösungsvariante 2 von Schüler L06-07.* Dieser Schüler sucht eine realitätsnähere Simulation. Dazu betrachtet er zusätzlich zur gefragten Berührkurve der Kugel auf der Ebene die dazu parallele Bahn des Mittelpunktes der Kugel. Zur Lösung erfragt er von der Lehrperson als Input, wie man einen auf einer Ebene senkrechten Vektor bekommt. Die Antwort war: „Einen auf einer Ebene senkrechten Vektor nennt man 'Normalenvektor'. Schau dazu bitte in der MuPAD-Hilfe unter 'crossProduct' nach.“ Nach diesem Hinweis gelang dem Schüler eine vollständig linear-algebraische Lösung zusammen mit einer Animation, vgl. Abbildung 5.30.

Der Schüler denkt bereits komplett im CAS: Er beginnt mit einer drehbaren, von allen Seiten betrachtbaren 3D-Darstellung der Situation (vgl. Abbildung 5.30, unten rechts), die er in seiner Präsentation an der Tafel als Querschnitt zeichnet. Die Lösung im Sheet besteht aus 16 MuPAD-Inputs, die er sehr spärlich nur mit den folgenden integrierten Zeilenkommentaren beschreibt:

```
//Schnittpunkt Ebene mit Fallgerade [...] //Schnittpunkt Spur mit dem Boden [...]
```

<sup>42</sup>In ähnlicher Weise löst die Schülerin später z. B. das Problem der Abstandsberechnung bei windschiefen Geraden.

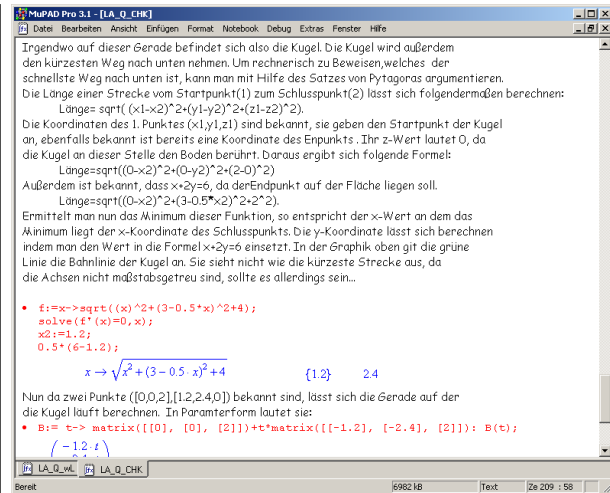
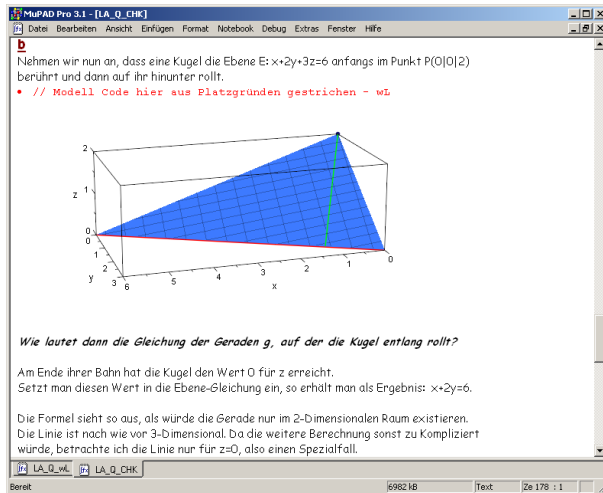
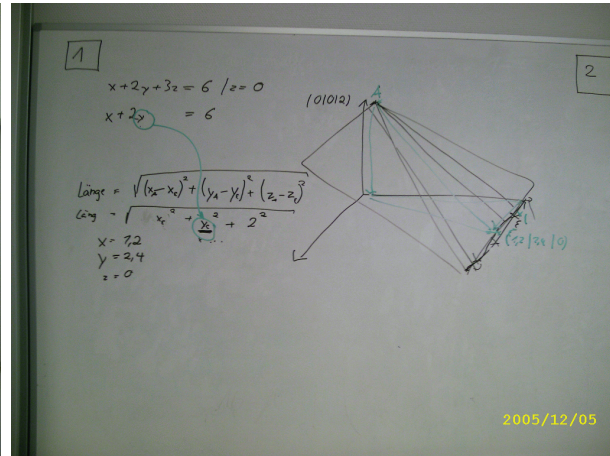
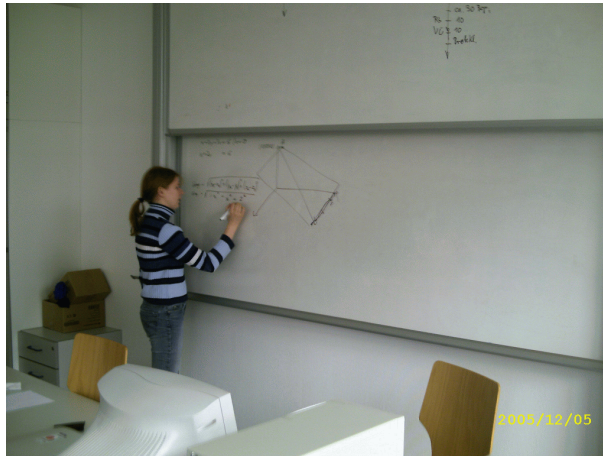


Abbildung 5.29: Lösung einer Schülerin zum Problem der eine Ebene herabrollenden Kugel



//Schnittpunkt Kugelmittenspur mit Boden [..] Bodenspur:=a-> [..]

Die Geometrie des Problems wird voll erfasst, die Lösungsdauer beträgt ca. 3 Stunden, Zwischenarbeitsstände werden stolz per Email an die Lehrkraft geschickt.

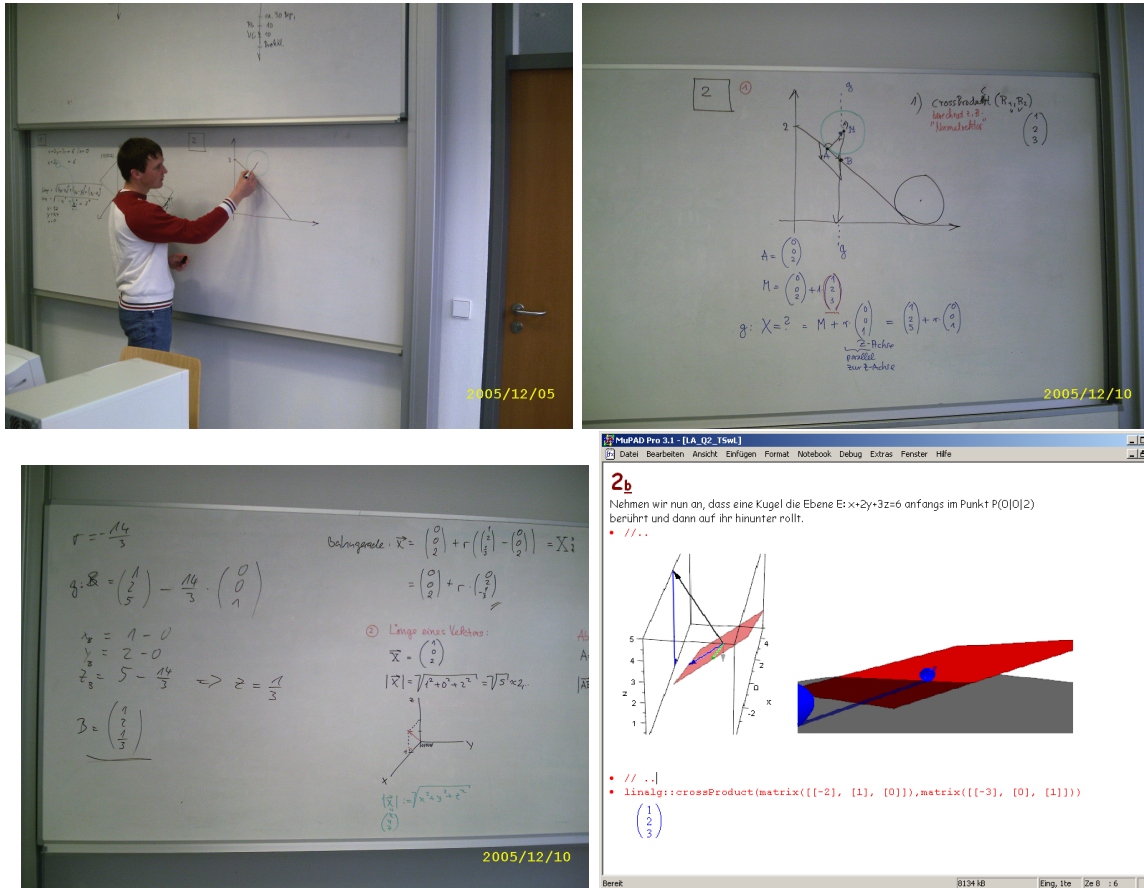


Abbildung 5.30: Lösung des Schülers L06-07 zum Problem der eine Ebene herabrollenden Kugel.

Eine Zusammenfassung des Gedankenganges durch eine Schülerin sei hier als Transskript einer Audiosequenz von 2:30 Dauer dokumentiert:

*L bittet um eine Zusammenfassung der vorgetragenen Lösungsüberlegungen von Schüler L06-07.*

- 1 L: Also - wer wiederholt das nochmal? ... Rita! [24:54]
- 2 S: Ja, also, die Aufgabe gewesen war ja, dass wir eine Kugel hatten ehm, die den Punkt A zum Anfangspunkt hatte - der war  $(0, 0, 2)$  - und ehm dort auch schon auf einer Ebene liegt, die definiert ist durch die Gleichung ehm  $x + 2y + 3z = 6$ . Und wir wollten jetzt ehm die Bahn der Kugel bestimmen, und das war ja auch eine Gerade. Und dann sind wir davon ausgegangen, dass die Kugel senkrecht auf der Ebene liegen muss. Und dann ehm haben wir ehm rausbekommen, dass dieser Vektor eben mit  $(1, 2, 3)$  ehm gegeben ist, was wir mit crossproduct gemacht haben. Und dann fiel denn auf, dass dieser Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht, eben genau die Zahlen enthält, die eigentlich auch in

der Ebene ehm schon vorkommen und den nennt man eben auch Normalvektor. Und dann konnten wir jetzt auch den Mittelpunkt der Kugel bestimmen - also wir haben dazu den Normalvektor genommen, wir haben den Radius 1 genommen und der Mittelpunkt ist ja ähm das ist ähm .. da haben wir als Richtungsvektor eben den Normalvektor genommen [*3 Sek akustisch unverständlich*]. Und dann wollten wir nämlich auch noch den Vektor bestimmen, der ehm senkrecht zum Boden ehm parallel zur z-Achse vom Mittelpunkt ausgeht, der die Ebene schneidet, um den zweiten Punkt ehm auf der Gerade zu finden, um die Gerade eben aufstellen zu können. Und dann ehm haben wir eben dann die Parallele zur z-Achse gezogen, um ehm - das ist dies hier [*zeigt auf die Gerade g in der Skizze an der Tafel*] - und die haben wir dann eben rausbekommen, indem wir den Parallelvektor zur z-Achse genommen haben und mit der Ebene geschnitten haben - ja. Und dann haben wir für  $r$  auch was raus. Dann haben wir  $r$ . Und den Parameter  $r$  haben wir dann ehm in die Geradengleichung eingesetzt, so dass wir den Punkt  $B$  halt haben. Und dann haben wir ähm die Gerade bekommen, ja, indem wir als Aufpunkt  $A$  genommen und dann eben als Richtung  $B$  minus  $A$  genommen haben. [27:13]

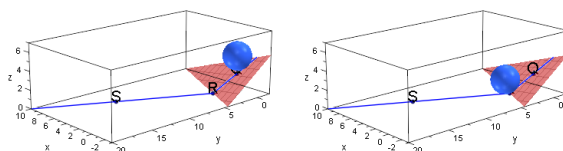


Abbildung 5.31: Eine gelungene Animation durch einen dritten Schüler: In dieser Simulation läuft die Kugel nach Verlassen ihrer Bahn auf der schiefen Ebene auf der Bodenfläche noch ein Stück weiter.

Der Unterricht handelte im Anschluss an obiges Modellierungsproblem vertieft von der Normalenform einer Ebene sowie Abstandsproblemen geometrischer Objekte.

### *Befunde.*

1. 'Realistische' Modellierungsprobleme obiger Art nehmen erhebliche Unterrichtszeit in Anspruch: Erfolgreiche Schüler können daraus Motivation ziehen, nicht erfolgreiche wegen der langen Lösungsdauer aber erhebliche Frustration<sup>43</sup> erleiden. Es ist daher aus Gründen eines effektiven classroom managements angeraten, spätestens nach ca. 1-2 U-Stunden im Plenum erste Lösungsideen zu diskutieren. Obige Aufgabe LA\_Q konnten nur 5 von 16 SchülerInnen innerhalb einer Woche lösen.
2. Obige Modellierung kann auch als exemplarische A.C.(E.)-Aktivität betrachtet werden. Die hier getätigten Aktivitäten incl. der Klassendiskussion wirkten sich sinnstiftend im

<sup>43</sup>Eine von der Arbeitsgruppe HUSSMANN im Kurs G05 durchgeführte Erprobung des Versuchs des selbstständigen Lösens von zwei Problemstellungen („Batterie in den Bergen“ und „Buxtehuder SV wird Meister!“) aus der diskreten Mathematik dauerte ca. *4 Wochen für lediglich 2 Aufträge*. Eine anschließende Befragung per Fragebogen zeigte, dass die SchülerInnen mehrheitlich eine solche U-Gestaltung nicht nochmals wünschten. Als Feldbeobachter konnte man erhebliche negative Effekte wie fehlende häusliche Weiterbeschäftigung, aufkommende unterrichtliche Langeweile, Diskussionsarmut der kooperativen Paare, abnehmendes Anregungspotential der Ausgangsprobleme etc. beobachten. Die Anfertigung eines sog. individuellen 'Forschungsheftes' vermochte dagegen wenig auszurichten.



Vorfeld einer systematischeren Themenbehandlung aus. Gleichzeitig wurde die wachsende Lösungsdauer bei realitätsnäheren Problemstellungen emotional erfahren.

3. In Kurs L06 saßen 11 (von 13) Lernpersonen (mit Ausnahme also eines einzigen Schülerinnenpaares) im gesamten Zeitaum von 2 Jahren *allein vor dem jeweiligen PC*, während im Kurs L08 von 19 Lernpersonen nur 5 alleine arbeiteten (7 Paare). Erstaunlicherweise ist ein darauf gründender signifikanter Unterschied sowohl in der erfolgreichen Instrumentation als auch im Abiturklausurerfolg nicht feststellbar.

Dies lässt vermuten, dass eher die aktive Beschäftigungsdauer pro Problem und mit dem CAS relevant ist als die Art der Kooperation (*Paar* vor PC vs. *Individuum* vor PC). Gelingt es dem Lerner sich in einen „Flow“-Zustand zu versetzen, reicht die Faszination eines Problems sowie die Kooperation mit dem CAS für die Überwindung von Durststrecken aus.

#### 5.2.4 Abstand windschiefer Geraden

Als Auftrag LA-S wurde in der Erprobung G05 die Bearbeitung der Rückblicksaufgaben im Grundkursband [11, S. 139] gestellt. Die zugehörigen Konzepte waren selbstständig zu erarbeiten. Ich zeige hier exemplarisch die Bearbeitung von Aufgabe 6 durch den Schüler G05-04. Es gelingt ihm eine *kreative CAS-Lösung*, die in der didaktischen Schulbuchliteratur m. W. so noch nicht zu finden ist.

Die ursprüngliche Lösung war kaum verständlich, wie zugehörige Audioaufzeichnungen der mündlichen Erläuterung des Schülers aus der Feldstudie belegen. Der Schüler wurde daher gebeten, seine Lösung schriftlich zu elaborieren. Das Resultat findet sich in folgendem MuPAD-Worksheet, das hier in 5 Teilen gezeigt wird, vgl. die Abbildungsfolge 5.32 und 5.33.

Der Schüler überlegt sich zunächst, dass es in der Ebene zu einer Geraden  $g$  und einem Punkt  $P$  auf  $g$  genau eine Orthogonale gibt, im Raum aber unendlich viele: Er stellt sich diese Orthogonalen offenbar wie die Speichen eines Rades um die Nabe als Gerade vor.

Am ersten Input //1 definiert er die beteiligten geometrischen Objekte. Die Bezeichnung  $Gg$  für die Gerade namens  $g$  ist unüblich, in seinem gedanklichen Kosmos aber sinnvoll. Er definiert sich zudem eine eigene Winkelberechnungsfunktion `Winkel` (im Gradmaß), die er auf die eingebaute Routine `angle` (im Bogenmaß) aufsetzt und geeignet 'umbiegt'. Diese wendet er sogleich auf die Richtungsvektoren der beteiligten Geraden an, um deren Nichtparallelität zu prüfen.

Am zweiten Input //2 wird ein allgemeiner Richtungsvektor „ $Vuog$ “ (vielleicht für: 'ein Vektor  $u$  orthogonal zu  $g$ '), dessen Winkel zur Richtung von  $g$  mit  $LD$  bezeichnet wird. Er lässt die Orthogonalitätsbedingung (' $LD = 90^\circ$ ') in Abhängigkeit von der zweiten Komponente  $r$  lösen und erhält die Relation  $r = x + s/2$ . Damit wird in //3 der Vektor  $Vuog$  mit 2 Variablen formulierbar und nunmehr neu als  $Vuog2$  bezeichnet, die Bezeichnung nimmt somit den internen Gedankengang auf. Entsprechend werden die Winkelberechnungsformel und die Lösung upgedatet. Da nach //3 eine Lösung für jedes  $x$  existiert (Lösungsmenge:  $\mathbb{R}$ ), ist  $Vuog2 = (x, x + s/2, s)$  die gesuchte allgemeine Darstellung des Lotvektors.

..... **Aufgaben zum Üben und Wiederholen**

6 Berechnen Sie:

a) den Abstand des Punktes  $R(-2|3|5)$  von der Ebene  $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ ,

b) den Abstand des Ursprungs  $O$  von der Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

c) den Abstand der Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  von der Geraden  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**Lösung zu 6c S. 139:**  
**Berechnung des Abstandes zweier windschiefer Geraden im Raum**  
 von Christian Gebauer, 26.2.05, gk:m3/Lindner

Grundlage der Lösung für 6c) ist die Überlegung das eine Gerade immer die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten darstellt. Da Punkte im Raum keine Richtung haben sondern eben nur Punkt sind gibt es auch nur eine mögliche Gerade um beide zu verbinden. Bei Geraden gibt es unendlich Möglichkeiten sie mit einer Geraden zu verbinden, aber die kürzeste Verbindung erhält man nur wenn die Verbindungsgerade orthogonal zu beiden ist.

Wie in der Zeichnung auch zu sehen ist, gibt es unendlich viele orthogonale Geraden im zweidimensionalen Raum, solange beide Geraden parallel sind. Sind sie es nicht, gibt es keine gemeinsame Orthogonale. Auch gibt es im zweidimensionalen Raum auch nur eine Orthogonale pro Punkt auf der Geraden. Geht man nun in die dritte Dimension, hat man auch pro Punkt unendlich viele Orthogonale zu einer Geraden.

Der rote Punkt stellt eine vom Betrachter weglaufende Gerade dar, mit verschiedenen Orthogonalen im dreidimensionalen Raum (schwarz).

Um man die kürzesten Abstand der Geraden  $g$  und  $h$  zu finden ist es also nötig die gemeinsame Orthogonale zu finden, insofern beide Geraden nicht ohnehin parallel sind.

Abbildung 5.32: Aufgabenstellung 'Abstand zweier windschiefer Geraden' und erste Vorüberlegungen zur Lösung durch den Schüler G05-04

In //5 lässt er diese Schar  $Vuog2$  von Vektoren zusätzlich auch auf  $h$  senkrecht stehen: Das ergibt die Funktion  $LDh$ . Die gleiche Bedingung des Senkrechtstehens (geprüft über die Winkelfunktion statt wie üblich mit dem Skalarprodukt) ergibt eine weitere Bedingung an  $Vuog2$ , womit eine weitere Variable (hier:  $s$ ) eliminiert wird.  $Vuog2$  hängt nun nur noch von  $x$  ab (denn  $s = -11/2 \cdot x$ ) und wird nun als  $Voghp$  (vielleicht für: 'Vektor orthogonal zu  $g$  und  $h$  abhängig von einem Parameter') bezeichnet. Der Richtungsvektor des gemeinsamen Lotes ist damit z. B.  $Voghp(1)$ .

In //6 löst er das entscheidende Gleichungssystem mit 3 Unbekannten, deren Bedeutung er sinnvoll interpretiert.

The figure consists of four screenshots from the MUPAD Pro 3.1 software interface, showing the step-by-step solution of a distance problem between two skew lines.

- Top-left screenshot:** Shows the initial setup of two lines  $g$  and  $h$  in a 3D coordinate system. The direction vectors  $Vg$  and  $Vh$  are defined. A vector  $Vuog2$  is introduced, and the condition for it to be orthogonal to both lines is set up using the angle function. The resulting equation is  $\{s + \frac{1}{2}\} \setminus \{solve(r \cdot \vec{r} = -x^2 - s \cdot \vec{s}, r) \cup discont(\vec{r}, r, Undefined) \cup discont(\vec{s}, s, Undefined)\}$ .
- Top-right screenshot:** Shows the derivation of the orthogonal vector  $Voghp$  by solving the system of equations. The result is  $Voghp(x) = \begin{pmatrix} x \\ -5x \\ -\frac{11}{2}x \end{pmatrix}$ . The common perpendicular vector is identified as  $Voghp(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$ .
- Bottom-left screenshot:** Shows a 3D diagram illustrating the geometric interpretation. Two lines,  $g$  (green) and  $h$  (red), are shown in a 3D space. A common perpendicular line (brown) is drawn, along with its orthogonal projections onto lines  $g$  and  $h$  (pink and blue respectively). The text explains that the vector  $x$  is used to find the point on line  $g$  that is orthogonal to line  $h$ .
- Bottom-right screenshot:** Shows the final step of solving the system of equations for  $x$ . The equation  $solve(Gg(r) + e \cdot Voghp = Gh(x))$  is solved, yielding the solution  $\{[e = 2, r = 1, x = 1]\}$ . The final distance is calculated as  $laenge(Gg(1) - Gh(1)) = 15$ .

Abbildung 5.33: Fortsetzung der Lösung zum Abstandsproblem zweier windschiefer Geraden durch Schüler G05-04

*Befund:* Traditionell löst man das Abstandsproblem über Bedingungen an das Skalarprodukt. Da der euklidische Winkel über das Skalarprodukt definiert wird, kann der Schüler den für ihn anschaulicheren individuellen und kreativen Weg über Winkelbedingungen

wählen. Es ist erstaunlich, zu welchen Leistungen das CAS hier anstachelt: Die Wahl sinngebender Bezeichner, das konsequente Durchhalten eines zweifach problemreduzierenden Lösungsplans und das Lösen eines komplexen 3x3-LGS lassen die Nutzung des CAS zur Erweiterung der Wissensbasis als sinnvoll erscheinen.

Weitere Belege finden sich in intelligenten Alternativlösungen z. B. im Kurs L06, wo Lösungen des obigen Abstandsproblems mit Mitteln der Differentialrechnung *zweier* Veränderlicher gefunden werden.

### 5.3 Fallstudie: zur Pseudoinverse via sensibler Formelinspektion

In einer abschließenden Fallstudie aus dem Ende des unterrichtlichen Lehrgangs demonstrieren wir die Nutzung des CAS zur *Wissensgewinnung mit Hilfe eines Analogieschlusses*, hier am Beispiel der Pseudoinversen. Nach POLYA [174] stimmen „analoge Dinge *in gewissen Beziehungen* zwischen ihren entsprechenden Teilen *überein*.“ Dabei verwendet man oft „vage, mehrdeutige, unvollständige oder unvollständig geklärte Analogien, aber Analogie kann auch die hohe Stufe mathematischer Gewissheit erreichen“. POLYA bemerkt dazu:

Beim Lösen einer vorgegebenen Aufgabe können wir oft die Lösung einer einfacheren analogen Aufgabe benutzen; wir können ihre Methode oder ihr Resultat oder beides anwenden. [a. a. O., S. 57]

Im Falle der Pseudoinversen wurde unterrichtlich der 1-dimensionale Spezialfall durch einen *Analogieschluss über den Aufbau der Explizitformel* verallgemeinert und die so heuristisch gewonnene dimensionsunabhängige Formel durch das CAS mit Evidenz aufgeladen. In POLYA's Terminologie nutzen wir also eine *resultatgeleitete Analogie*.

Wir skizzieren im Folgenden die Trajektorie, den Ausgangspunkt des Analogieschlusses im Unterrichtsgespräch mit Tafelprotokoll sowie die anschließende Umsetzung im CAS-Worksheet.

Die *Lern-Trajektorie* startet mit der Behandlung eines konkreten Beispiels<sup>44</sup>, vgl. Abbildung 5.34 links. Die protokollierte Schülerlösung zeigt den Gedankengang von der planerischen Skizze über die beiden Bedingungen des *Senkrechtseins* ( $R \perp \vec{PQ}$ ) und des *Lagehabens* ( $Q \in g$ ) zur mathematischen (blau) und CAS-gestützten (rot) Lösung.

Die allgemeine Lösung des Projektionsproblems durch einen anderen Schüler orientiert sich analogisierend am Vorgehen im konkreten Beispiel ('*methodische*' Analogie) und gewinnt so die eingerahmte abstrakte Projektionsformel. Rechts (grün) findet sich der Analogieschluss auf die dimensionsunabhängige Projektionsformel ('*resultatorientierte*' Analogie).

Abbildung 5.35 zeigt mögliche Phasen des Analogieschlusses: Ausgehend von der 1-dimensionalen Explizitformel  $Y = A + k \cdot X$ , die sorgsam die auftretenden Rechenarten (Multiplikation von Zahlen „ $\cdot$ “ vs. Skalarprodukt<sup>45</sup> „ $\circ$ “ von Vektoren) unterscheidet, wird zunächst

<sup>44</sup>vgl. [12, S. 138], wo dieses Beispiel 3 auf ein Schnittproblem einer Geraden und einer Hilfsebene reduziert wird

<sup>45</sup>Entsprechend der von mir definierten Infix-Notation für MuPAD.

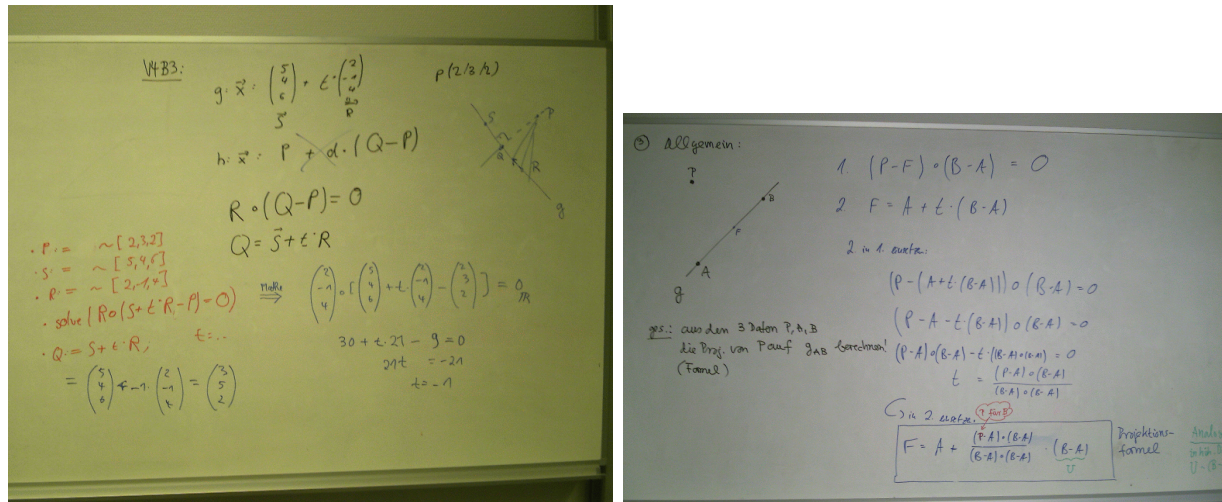


Abbildung 5.34: senkrechte Projektion: an einem Beispiel studiert (links) und als abstrakte 1-dimensionale Explizitformel formuliert (rechts) - selbstständige Schülerlösungen

eine Vereinfachung der Formel vorgenommen. Dazu wird die geometrische Konfiguration auf den Ursprung bezogen, indem als Betrachtungszentrum der Ursprung<sup>46</sup>  $A := \vec{O}$  gewählt wird. Danach wird der Formelaufbau abgeändert: Der Faktor  $k$  wird nachgestellt, der Nenner als Kehrwert notiert und ein kommutativer Faktorentausch bringt  $X$  in Rechtsstellung und erzeugt so einen 'funktionalen' Aufbau der Formel. In dieser Gestalt kann die Formel dimensionsfrei verallgemeinert werden. Einsichtsvorgreifend – aber an der elementarisierten Formel als Muster gestaltlich orientiert – wird der Term gesplittet in  $B$  und den 'Rest': Dieser Formelrest wird funktional mit  $mpi$  benannt und 'spielt analog die Rolle des Streckfaktors  $k$ '. Diese Umformungsschritte sollten von den SchülerInnen *partiell* selbst beschreibbar bzw. nachvollziehbar sein.

$$\begin{array}{l}
 Y = A + \frac{(X-A) \circ (B-A)}{(B-A) \circ (B-A)} (B-A) \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_k \\
 \text{Formel elementarisieren (Rückzug auf } A=0\text{)} \\
 \text{Formelaufbau ändern} \\
 Y = B \cdot \frac{X \circ B}{B \circ B} = B \cdot \frac{1}{B \circ B} \cdot (P \circ B) = B \cdot (B \circ B)^{-1} \cdot (B \circ X) \\
 \text{Formelaufbau analogisieren} \\
 Y = B * (B^t * B)^{-1} * (B^t * X) \\
 \text{Formelaufbau interpretieren} \\
 Y = B * mpi(B) * X \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_k
 \end{array}$$

Abbildung 5.35: Trajektorie zum Analogieschluss auf die dimensionsunabhängige Projektionsformel und zur Einführung der MOORE-PENROSE-Pseudoinversen  $mpi$ .  $X$  ist der zu projizierende Punkt und  $Y$  der Fußpunkt der Projektion.

<sup>46</sup>Man kann die Trajektorie auch direkt mit einer Ursprungsgeraden starten.

Die folgende Tabelle fasst die wesentlichen Analogiebezüge zusammen.

| Projektionsformel - Analogien |                                 |
|-------------------------------|---------------------------------|
| <i>eindimensional</i>         | <i>mehrdimensional</i>          |
| Basisvektor $B$               | Basisvektoren $B$               |
| Streckfaktor $k$              | Pseudoinverse $mp(i)$           |
| Skalarprodukt                 | Matrizenprodukt mit $(\cdot)^t$ |
| Kehrwert $(\cdot)^{-1}$       | Inverse Matrix $(\cdot)^{-1}$   |

*Erste Episode.* Abbildung 5.36 zeigt das Tafel-Protokoll des Analogieschlusses zur Gewinnung einer Formel für die Pseudoinverse bzw. die verallgemeinerte Projektion<sup>47</sup> aus der vorherigen Unterrichtsstunde. Gegen Ende konnte die Analogie nur kurz angerissen werden und wird nun nochmals aufgegriffen. Die nachfolgende Episode beginnt 06:08 Minuten nach Stundenbeginn.

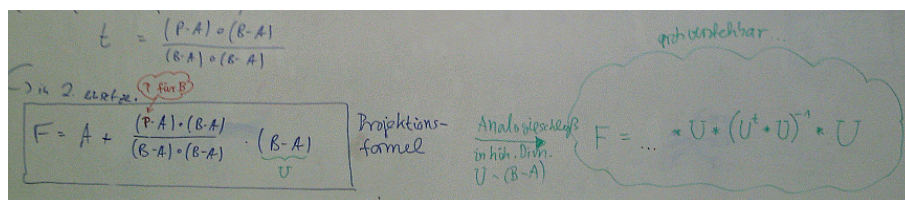


Abbildung 5.36: Analogieschluss auf die dimensionsunabhängige Projektionsformel als 'resultatorientierte' Analogie

Das Tafelbild zeigt nur noch die eingerahmte eindimensionale Projektionsformel. Die matrixnotierte verallgemeinerte Projektionsformel ist zu Stundenbeginn weggewischt worden. Es wurde kurz wiederholt, wie die eindimensionale Projektionsformel lautet, wenn  $A$  der Nullpunkt ist.

- 1 **L:** Jetzt übersetzen wir eben mal *diese* Formel [zeigt auf die eingerahmte Formel am Whiteboard] noch mal in *die* Formel, wo wir uns vorstellen, dass jetzt  $B$  nicht nur *eine* Spalte ist, also ein Basisvektor, sondern dass  $B$  mehrere Spalten enthalten kann. Dann ist das hier [zeigt auf das Skalarproduktzeichen im Zähler] ja nicht mehr als Skalarprodukt deutbar, ja, und dann hatte ich versucht, euch zu erklären, wie man diese Formel jetzt analog schreibt, wenn man jetzt denkt, dass das  $B$  ersetzt wird durch ne größere Basis  $U$ , etwa von einer Ebene, die jetzt statt einen Vektor zwei Vektoren hat.

Wer kann das mal versuchen .. ja?

[Einige Sekunden vergehen .. Conny meldet sich.]

- 2 **L:** Conny!

- 3 **C:** [7:19] Ja .. also eigentlich steht das ja schon hier unten – mehr oder weniger. [zeigt auf die eingerahmte Formel am Whiteboard] .. ähm  $P$  ... ähm das Skalarprodukt ist zwei mal da [zeigt auf die rechts stehenden gleichen Faktoren  $(B - A)$  in Zähler und Nenner] .. kann man das kürzen? Eigentlich schon, oder?

- 4 **L:** Denk mal erst mal nach!

- 5 **C:** Also ok ..  $P$  mal  $B$  .. Skalarprodukt mit  $B$  .. das kann man in Klammern schreiben [notiert  $(P \circ B)$ ]..  $B$  transponiert mal  $B$  .. also das Matrizenprodukt immer .. [notiert  $(P \circ B)(B^t \circ B)$ ]

<sup>47</sup>Eine Herleitung auf Universitätsniveau findet sich z. B. in [144, S. 196 ff]. Diese lässt aber die mögliche Entdeckung dieses Formel-Wissens und seine Verankerung in vertrauter Formel-Umgebung im Dunkeln.

- 6 **L:** Aber dann musst du besser Stern schreiben, mach mal nen Stern, Matrizenmultiplikation .. Stern, da [*C. ersetzt die Rechenzeichen  $\circ$  im bisher notierten Term jeweils durch ein  $*$ .*] .. ja genau!
- 7 **C:** [*schreibt die Formel weiter um:*] hoch minus 1 hatten wir gesagt .. [*notiert  $(P * B)(B^t * B)^{-1}$* ] entspricht, wenn man hier teilt [*zeigt auf den Nenner in der alten Projektionsformel*] .. man kann ja eigentlich nicht durch Matrizen teilen ..
- 8 **L:** Ok.
- 9 **C:** ... und hier dann noch mal  $B$  [*notiert  $(P * B)(B^t * B)^{-1} * B$* ].
- 10 **L:** Ja.
- 11 **C:** Das war' s eigentlich schon .. und .. so würde das funktionieren. [6:30]

*Kommentar:* Der Schüler L06-13 signalisiert zunächst ein gefühltes Verständnis ('mehr oder weniger', vgl. Zeile 1) der gesamten Formelumstellung, stutzt aber nach der Notation von  $P$  und argwöhnt, ob er – wie beim Rechnen mit Zahlen – die Terme  $(B - A)$  'kürzen' kann. Offenbar hat er in diesem Moment einen zu formal-algebraischen Blick auf die Formel, ohne die beteiligten Objekte als Vektoren bzw. Matrizen wahrzunehmen. Den Impuls zum 'Nachdenken'<sup>48</sup> greift er nicht auf, sondern fährt mit dem Umschreiben der Formel fort. Während er im zweiten Faktor richtigerweise die Matrix  $B$  transponiert, lässt er dies im ersten Faktor unbeachtet<sup>49</sup> – vielleicht weil  $P$  ein Vektor ist. Die Invertierung von Matrizen wird korrekt als Pendant zur Zahlendivision erkannt.

Der Ausschnitt zeigt neben interessanten Fehlverständnissen aber ein grundsätzliches Verständnis für den algebraischen Aufbau der verallgemeinerten Formel.

*Bemerkung:* In der Erprobung L08 wurde der Analogieschluss anhand des Beispiels 'Projektion einer Pyramidenspitze auf seine Grundfläche' aus dem unten gezeigten Worksheet zunächst *konkret* durchgeführt. Dabei waren die beteiligten Objekte (Vektoren, Matrizen) und Rechenoperationen (Skalarprodukt, Zahlenprodukt, Matrizenprodukt) optisch erkennbar, so dass bei der konkreten Durchführung der Rechnungen insbesondere klar wurde, wo Transponierungen vorgenommen werden mussten.

*Episode 2.* Völlige Klarheit und Evidenz erzeugte schließlich die nachfolgende Realisation im CAS. Eine Exaktifizierungsphase (Beweis) der mehrdimensionalen Projektionsformel könnte sich anschließen. Die folgende zweite Episode stammt aus derselben Stunde wie die erste Episode.

*Die SchülerInnen sollten zur Übung der verallgemeinerten Projektionsformel einige Aufgaben vom 'Rückblick' bearbeiten (deren Lösungen im Lehrbuch angegeben waren) sowie einige Beispiele aus dem Lehrbuch zum Thema 'Abstandsprobleme' nach Wahl. Einige Lösungen sollen nun besprochen werden. L. verteilt dazu den Bildschirm des Schülers T. – der zwischenzeitlich einige Aufgaben gelöst hatte – an alle Kursteilnehmer, so dass alle Schüler das Worksheet von T. vor sich sehen.*

- 1 **L:** [26:07] Rufen wir eben mal Toni's Sheet .. Eigene Dateien .. Mathe .. ja .. Toni!
- 2 **T:** [26:24] Jo, also äh der Conny hat ja eben erklärt, wie wir auf diese Formel kommen können ähm diese hier, dieses F gleich  $preu$ <sup>50</sup> U mal ...

<sup>48</sup>Therapeutisch könnte man eine „Nimm Stellung“-Aufgabe (nach SLUITS) oder eine Konsequenzuntersuchung („Was-wäre-wenn“-Aufgabe) anschließen.

<sup>49</sup>Dies wird lt. Audiomitschnitt im folgenden Unterrichtsabschnitt aufgegriffen.

<sup>50</sup>Der Schüler versucht die Notation  $proj(U)$  aus dem Sheet 'englisch' auszusprechen.

- 3 L: *Projektion!* Man liest Projektion .. Projektion *auf*  $U$  .. von *wem*, ja?
- 4 T: Genau. Und damit können wir dann eigentlich die ganzen äh ganzen Aufgaben auf diesem Blatt relativ schnell rechnen, wir müssen halt immer  $P$  definieren, also der Punkt der projiziert werden soll, den äh Aufpunkt von der Geraden und den Richtungsvektor der Geraden ..
- 5 L: .. oder der Ebene!
- 6 T: Ja genau .. und dann müssen wir einfach immer nur diese  $F$  äh diese .. diese Formel anwenden mit diesen Zahlen, die wir vorher definiert haben .. und bekommen immer den Punkt  $P$  auf die Gerade projiziert ..
- 7 L: .. oder auf die Ebene .. wie hier vorne, ja?
- 8 T: .. oder auf die Ebene. Ja, um dann zum Beispiel .. ja, den Abstand zu berechnen, müssen wir dann halt nur noch diesen Abstand berechnen .. mit dieser Norm .. Norm zwei<sup>51</sup>, das ist eigentlich .. das hatten wir ja glaub ich schon mal besprochen
- 9 L: Richtig!
- 10 T: Ja, dieser Abstand [*scrollt nach dem weiter oben stehenden Term*  $|F - P|$  .]
- 11 L: Ja, da oben ..  $P$  nach  $F$  .. Norm davon!
- 12 T: Genau, und falls wir jetzt mal ne Ebene haben sollten – das war irgendwie .. beim Beispiel 1 glaub ich, war ne Ebene gesucht, die projiziert werden sollte .. und dann ..
- 13 L: .. *auf* die!
- 14 T: .. *auf* die projiziert werden sollte, dann hab ich irgendwie die Ebene, die war in Normalform angegeben, die hab ich mir erst mal in Koordinatenform umgewandelt und dann in äh Parameterform. Und als Parameterform konnte ich dann äh konnte ich dann die ganzen Sachen wieder so definieren, wie wir das für die Formel brauchen .. also hier [*markiert mit dem Cursor die verallgemeinerte Projektionsformel*]
- 15 L: Ehem.
- 16 P: Dann wieder  $P$  aus der Aufgabe, den Aufpunkt - den hab ich dann wieder aus der Normalform genommen, die steht ja ebenfalls in der .. in der Aufgabe und als  $U$  habe ich jetzt nicht nur einen Richtungsvektor genommen, sondern die beiden Richtungsvektoren von der Ebene, also .. hier -2 1 1 und -2 0 1 .. und hab die verbunden zu einer Matrix .. und dann erhalten wir diese .. diese Matrix hier als  $U$ . Und dieses  $U$  können wir dann wieder in der Formel verwenden und erhalten dann diesen Projektionspunkt.
- 17 L: Ähem.
- 18 T: Und dann wieder den Abstand von  $F$  zu  $P$  berechnet, ergibt dann  $14/3$ . Das stimmt dann auch mit den Zahlen überein, die in der .. die in dem Beispiel<sup>52</sup> vorgegeben wurden. Ja, und eigentlich dieses Schema hier, das kann man eigentlich so kopieren [*markiert die entsprechenden Befehle mit der Maus*] und wieder äh für die nächste Aufgabe einfügen und nur die Zahlen verändern. Und dann kommt immer wieder das Richtige raus, eigentlich quasi, ja, und das habe ich dann auch mit den ganzen anderen Aufgaben von dem Blatt so gemacht und das hat eigentlich immer gestimmt. [29:12]

*Kommentar:* Die Episode zeigt, wie schnell sich eine Lösungspraxis ausbildet und wie sich die gleiche methodische Analogie (der Schüler L07-11 spricht in Zeile 18 von einem 'Schema', das er im CAS durch cut&paste kopiert) durch die Aufgabensequenzen des Lehrbuches zieht. - Im Anschluss war folgendes abschließendes Worksheet zu bearbeiten, das seinen

<sup>51</sup>gemeint ist die MuPAD-Funktion  $\text{norm}(\dots, 2)$ , also die euklidische Norm.

<sup>52</sup>[12, S. 145, Beispiel 1]



Fokus auf die *inhaltliche Interpretation des mpi-Faktors in der Projektionsformel* richtet. Es sei hier in der überarbeiteten Fassung als Lösung eines Schülers aus der Erprobung L08 in seinen wesentlichen Auszügen gezeigt, vgl. Abbildung 5.37. Die Aufgabenstellung ist in wenigen Schritten lösbar: Nach Eingabe der Punkte wird die Basis  $U$  der Projektionsfläche bestimmt und mit Hilfe des Projektions-Operators  $Proj(U)$  der projizierte Richtungsvektor  $Y$  bzw. der Projektionsfußpunkt  $F$  berechnet. Damit berechnet sich leicht der Höhenvektor  $F - S$  und die Höhe als dessen Länge. Formel (4) und (5) demonstrieren die Bedeutung des Faktors  $mpi(U)$  (Pseudoinverse) als schlagartige Berechnung des verallgemeinerten Streckfaktors  $k$  – nämlich zur simultanen Berechnung der *beiden* Koeffizienten der  $U$ -Basisdarstellung von  $F - S$ .

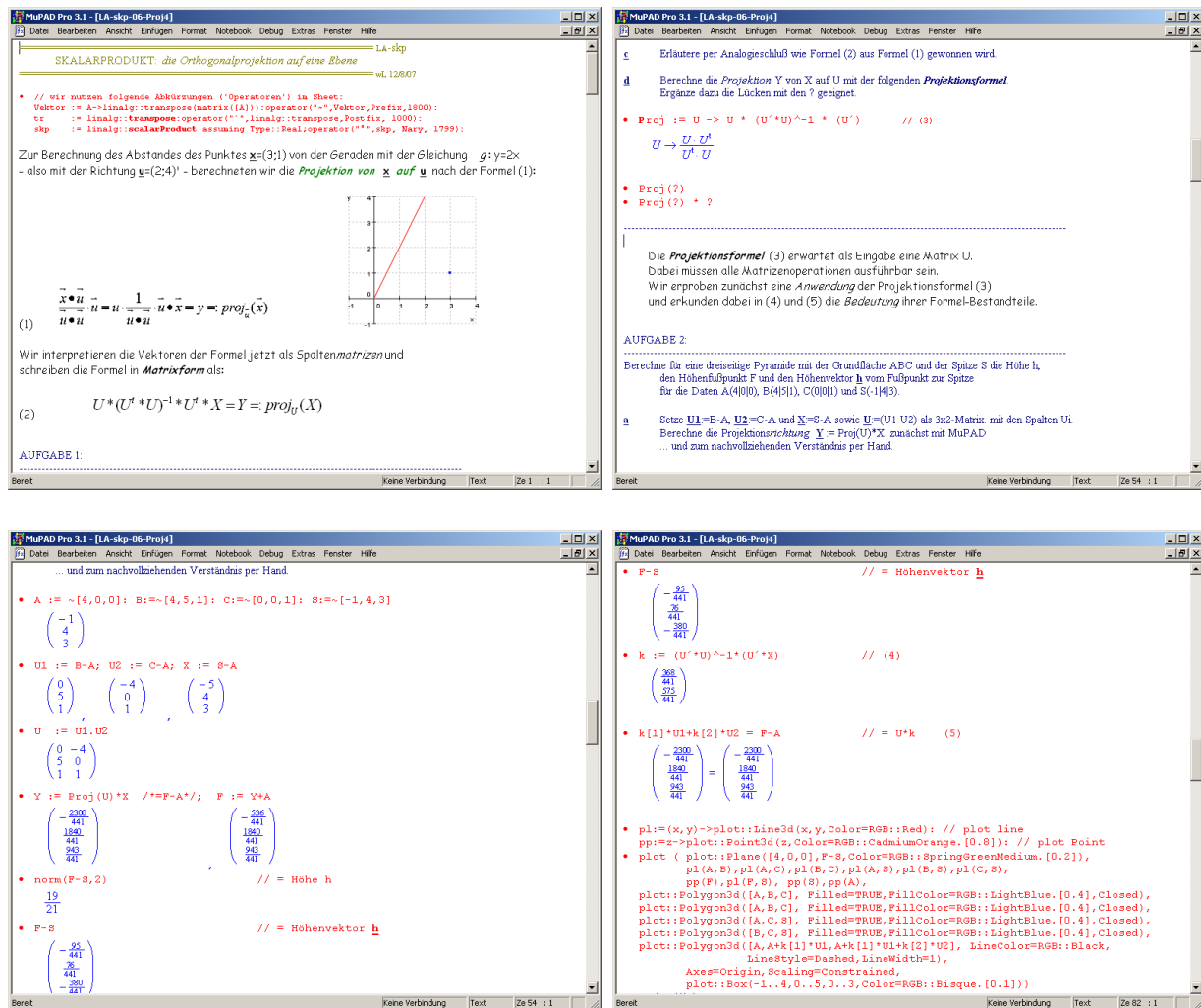


Abbildung 5.37: mehrdimensionale Projektion und Pseudoinverse: Aufgabenstellung 2 - Erprobung der Projektionsformel an einem Lehrbuchbeispiel

Die Bedeutung von  $mpi(U) * X$  bzw.  $U * mpi(U) * X$  als *Streckfaktoren*berechnung bzw. *Basisdarstellung* des projizierten Vektors  $X$  wird in der CAS-Grafik klar, vgl. Abbildung

5.38: Der gestrichelte Weg zeigt anschaulich die Darstellung des Projektionsvektors als Linearkombination aus den Spannvektoren der Ebene und verifiziert die Rechenergebnisse.

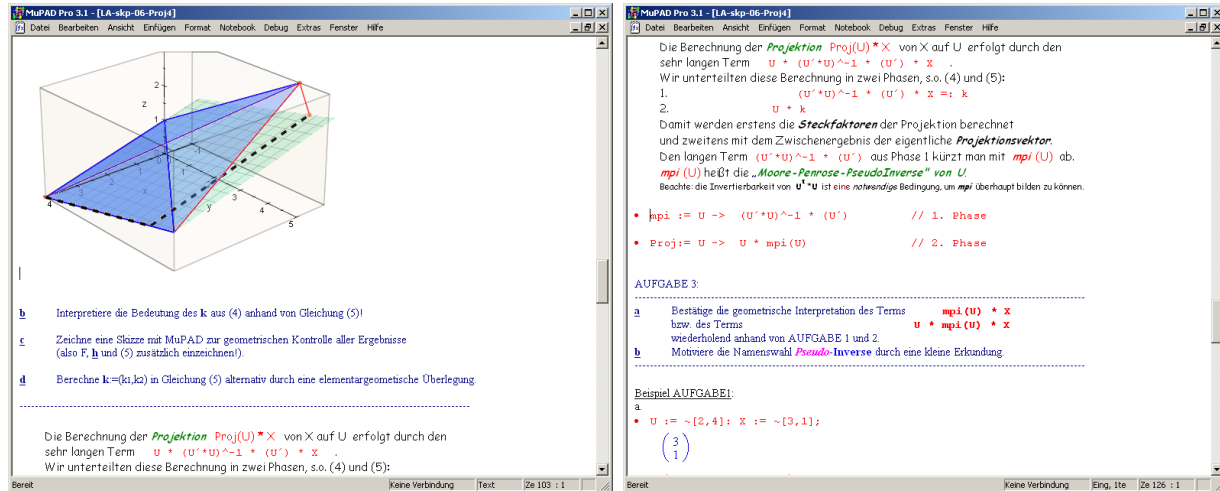


Abbildung 5.38: mehrdimensionale Projektion und Bedeutung der Pseudoinverse: Aufgabenstellung 2 - graphische Visualisierung im CAS

### Anmerkungen.

1. Die Wirkung der Pseudoinversen zur Lösung eines überbestimmten Gleichungssystems bleibt bei diesem analogisierenden Zugang zunächst verborgen. Die Gleichung  $\text{mpi}(U) \cdot X = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} =: k$  zur unmittelbaren Bestimmung der Streckfaktoren ist aber alternativ aus dem Linearkombinations-Ansatz  $Y = U \cdot k = (U_1; U_2) \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = U_1 \cdot k_1 + U_2 \cdot k_2$  für den Projektionsvektor  $Y$  aus der Bedingungen des Senkrechtstehens von  $U_1$  und  $U_2$  zum Normalvektor der Ebene im 2-dimensionalen Falle elementargeometrisch mittelbar zu gewinnen. So war dies in Aufgabe.2.d im Worksheet auch erbeten.
2. Die verallgemeinerte Projektionsformel trivialisiert die üblichen Abstandsprobleme<sup>53</sup> der schulischen linearen Algebra und fokussiert stattdessen auf eine methodische Reduktion. Da die schulische lineare Algebra ansonsten Projektionen nur am Rande behandelt<sup>54</sup>, wird hier eine gangbare unterrichtliche Implementierung aufgezeigt.
3. Die aus der Form der Formel durch einfühlsame *Muster(wieder)erkennung* ('pattern recognition') entnommene Analogie ist eine kreative genuin mathematische Tätigkeit, welche alle drei WINTERSCHEN Grunderfahrungen<sup>55</sup> integriert. Die 'Wissensform des Formelwissens' (Hefendehl) findet hier ein faszinierendes Exempel: Die sensible Analyse

<sup>53</sup>wie der Schüler in Episode 2 richtig bemerkt hatte

<sup>54</sup>[197, S. 202 ff]

<sup>55</sup>vgl. z.B. [40, S. 6 ff]

der Ausgangsformel mit der Aufdeckung und dem Bewusstwerden von beteiligten Objekten und getätigten Operationen führt diverse linear-algebraische Aspekte zusammen und ebnet über die erkenntnisleitende Analogie den Weg zur Verallgemeinerung. Die nachgängige Analyse der verallgemeinerten Formel wiederum zerlegt die algebraische Formel sinngemäß in seine geometrisch interpretierbaren Bestandteile - die Koeffizientenberechnung und die Linearkombinationsdarstellung der Projektion. Selbst die Pseudoinverse als zweiter Faktor wäre auf höherer Ebene weiter sezierbar.

Aus fachdidaktischer Sicht erweist sich also das Nach- und Hineindenken in diese mathematische Formel als wertvolle Quelle des mathematischen Erkenntnis- und Wissenszuwachses sowie seiner ordnenden Bezüge (Vernetzung).

4. *Vertikal-vernetzende* ('ordnende') *Analogien* können die Projektionsformeln z. B. mit den Formeln der Geradengleichungen  $y = mx$  bzw.  $y - f(a) = m(x - a)$  und die wiederkehrende Grundidee der Orientierung am Ursprung ('Ortsvektorraum') vergleichend in den Blick nehmen.

*Befund.* Von drei unterrichtlich erprobten Zugängen zur Pseudoinversen (CAS-Experimente, überbestimmte lineare Gleichungssysteme, heuristische Analogie) erwies sich der analogiebasierte über die Verallgemeinerung der eindimensionalen Projektionsformel als erfolgreichster. Innerhalb einer Unterrichtswoche und mit *einem einzigen* relativ kurzen flankierenden CAS-Worksheet waren wesentliche Aspekte der Begriffsbildung zu gewinnen. Neben den stoffdidaktischen Vorteilen *erwies sich das heuristische Mittel der Analogiebeachtung als einsichtsförderndes Element der Wissensgewinnung und die CAS-Realisierung als fundierende Evidenzsicherung* während der Erprobung.



## § 6

# Epistemologische Überzeugungsstrukturen

In diesem Kapitel wird die vierte Forschungsfrage untersucht:

FF4: Wie verändern sich die bekannten Mathematik-Weltbilder unter dem langzeitlichen Einfluss eines CAS im regulären Mathematikunterricht?

Zur Beantwortung dieser Frage werden die Ergebnisse einer mehrfach in CAS-Kursen durchgeführten Befragung mit den Ergebnissen der GRIGUTSCH-Erhebung von 1994 verglichen, vgl. [113]. Diese *Längsschnittuntersuchung* zur Veränderung des Mathematik-Weltbildes (kurz: M-Weltbild) unter intensiver CAS-Nutzung wird zusätzlich um die Ermittlung eines „*Belief-Index*“ ergänzt, mit dem die Veränderungen im globalen Mathematik-Weltbild eines Kurses zu verschiedenen Zeitpunkten bzw. mit externen Kohorten quer-vergleichbar gemacht wird.

Zusätzlich wird ein „CAS“-Fragebogen entwickelt, eingesetzt und ausgewertet, mit dem das parallel zum Mathematik-Weltbild entstandene „*CAS-Weltbild*“ (und sein zugehöriger „CAS-Belief-Index“) messbar wird. Daraus werden Rückschlüsse bzw. Hypothesen zur Erklärung der Veränderungen im mathematischen Weltbild der untersuchten Kohorten gewonnen.

## 6.1 Querschnittsuntersuchung zum M-Weltbild

Im Folgenden werden die Ergebnisse einer wiederholt erhobenen Befragung (mit dem originalen Fragebogen von GRIGUTSCH) präsentiert, mit der untersucht werden sollte, ob bzw. inwieweit sich das Mathematik-Weltbild von Schülerkohorten unter intensiver Computernutzung im Vergleich zur GRIGUTSCH-Erhebung verändert hat. Das Weltbild der Schüler wurde dabei von GRIGUTSCH auf folgende fünf entscheidende *Faktoren* reduziert:

**F:** Wie hoch schätzen Schüler den formalen Charakter der Mathematik ein?  
(*Formalismus-Aspekt*)

- S:** In welchem Maße ist die Mathematik aus Schülersicht von Rechenregeln und Kalkülen bestimmt? (*Schema-Aspekt*)
- P:** In welchem Maße spiegelt der Mathematikunterricht für die Schüler einen Prozess des Entwickelns und des (Nach-)Erschaffens von Mathematik wider? (*Prozess-Aspekt*)
- A:** Wie hoch schätzen Schüler die Anwendbarkeit und den Nutzen der Mathematik ein? (*Anwendungsaspekt*)
- R:** Wie stark wird das Lernen von Mathematik von Prüfungszwängen beeinflusst? (*rigide Schemaorientierung*)

Unter einem 'mathematischen Weltbild' wird dabei nach GRIGUTSCH u. a. das von einem Schüler im Laufe seiner Schulzeit (individuell verschiedene) Bild davon verstanden, was Mathematik sei<sup>1</sup>. Dieses mathematische Weltbild bündelt als Einstellungsstruktur eine Fülle von vielschichtigen (positiv oder negativ besetzten) Kognitionen, Affektionen und Dispositionen gegenüber der Mathematik, die aus dem Fragebogen extrahiert und als ein *5-dimensionalen Beliefvektor* ( $F, S, P, A, R$ ) codiert wird.

### Zur Erhebung und methodischen Aufbereitung der Daten

Die Schüler und Schülerinnen von drei Grundkursen Mathematik wurden jeweils zur Mitte des 12. Schuljahres vor Beginn eines *intensiven* CAS-Einsatzes und nochmals am Ende des 13. Schuljahres (kurz vor dem Abitur) mit dem geschlossenen Fragebogen<sup>2</sup> von GRIGUTSCH (vgl. Anhang) nach ihrem Mathematik-Weltbild befragt. Damit kann einerseits ein Vergleich der aktuellen Stichproben (2000 bis 2008) mit den Querschnittsdaten aus der GRIGUTSCH-Stichprobe von 1994 vorgenommen werden, deren Mathematik-Weltbild dazu mit dem Referenz-Mathematikbild aus der GRIGUTSCH-Untersuchung kontrastiert wird. Andererseits wird eine 3-fach iterierte Längsschnittanalyse möglich, die eine mögliche Veränderung des Beliefvektors unter dem Einfluss eines intensiven CAS-Einsatzes in der gleichen Gruppe zu weit auseinander liegenden Zeitpunkten untersucht.

#### 6.1.1 Vergleich des Referenz-Mathematikbildes mit den CAS-M-Weltbildern

Im Folgenden werden die fünf Dimensionen ( $F, S, P, A, R$ ) der Weltbilder zunächst isoliert untersucht. Dazu werden die Fragen zitiert, die die jeweilige Dimension erfassen. Anschlie-

<sup>1</sup>In der fachspezifischen Literatur auch als 'subjektive Theorie', 'subjektiver Erfahrungsbereich' oder 'Vorstellungssystem' (belief system) bezeichnet. Das theoretische Konzept des 'mathematischen Weltbildes' fußt wiederum auf dem psychologischen Begriff der 'Einstellung', wodurch ein 'mathematisches Weltbild' zu einem Einstellungssystem wird. Solche attitudes sind konsistente zeitstabile (oft unbewusste) Orientierungen im Gegensatz zu spontan gebildeten unbeständigen Einstellungen.

<sup>2</sup>Dieser Fragebogen war als Instrument zur Erfassung von mathematikbezogenen Einstellungen u. a. in einer Stichprobe 1994 über 1.500 Schülern an 20 Gymnasien im Regierungsbezirk Düsseldorf vorgelegt worden, darunter 338 Schüler aus 20 Grundkursen der Jahrgangsstufe 12.2.

End wird der Referenz-Befund von GRIGUTSCH mit den aktuellen Befunden verglichen und interpretiert.

Der GRIGUTSCH-Fragebogen enthält 72 Fragen, davon beziehen sich die Fragen 1 bis 69 auf das Mathematik-Weltbild. Jede einzelne Frage (Item) ist skaliert durch die Antwortmöglichkeiten 5 = „stimmt genau“, 4 = „stimmt größtenteils“, 3 = „unentschieden“, 2 = „stimmt nur teilweise“, 1 = „stimmt gar nicht“.

Für jede der fünf Dimensionen ( $F, S, P, A, R$ ) wird für jeden Schüler ein Skalenwert errechnet, wobei jede Dimension nach der Faktorenanalyse von GRIGUTSCH durch 3 bis 9 Fragen operationalisiert wurde. Für jeden befragten Schüler werden seine Punkte in den Items einer Dimension addiert und anschließend transformiert. Jeder Befragte besitzt dadurch in jeder der 5 Dimensionen ( $F, S, P, A, R$ ) einen Wert auf einer Skala von 0 bis 50, der seine Einstellung gegenüber der Mathematik in der jeweiligen Dimension markiert. Es ergeben sich folgende Bereiche:

| <i>Einstellung</i> | <i>Skalenwert</i> |
|--------------------|-------------------|
| völlige Ablehnung  | 0 – 10            |
| Ablehnung          | 10 – 20           |
| Indifferenz        | 20 – 30           |
| Zustimmung         | 30 – 40           |
| völlige Zustimmung | 40 – 50           |

### Der Formalismus-Aspekt

Folgende Items des Fragebogens operationalisieren den Formalismus-Aspekt in der Dimension F, deren transformierter Skalenwert durch die gewichtete Punktschwere  $F := ((F3 + F8 + F12 + F17 + F28 + F30 + F32) \cdot \frac{10}{7} - 10) \cdot \frac{5}{4}$  berechnet wird:

| F:  | <i>Formalismus-Aspekt im Mathematik-Weltbild</i>                                             |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| F3  | Im Mathematikunterricht muss man streng logisch und präzise (sehr genau) denken.             |
| F8  | Im Mathematikunterricht muss man alles ganz genau ausdrücken.                                |
| F12 | Im Mathematikunterricht muss man alles ganz genau begründen.                                 |
| F17 | Im Mathematikunterricht muss man die Fachausdrücke, und zwar korrekt, verwenden.             |
| F28 | Kennzeichen von Mathematik sind sehr genaue Fachausdrücke und sehr genaue Begründungen.      |
| F30 | In der Mathematik ist es sehr wichtig, dass man immer streng logisch und genau denkt.        |
| F32 | Die Mathematik kann auf eine exakte und genaue Fachsprache (Fachausdrücke) nicht verzichten. |

Tabelle 6.1: Die sieben Items  $(Fn)_{n=3,8,12,17,28,30,32}$  zur Erhebung des *Formalismus-Aspekts* F

Gemäß dieser Items wird die Mathematik durch strenge, exakte und präzise Begrifflichkeiten, Sprechweisen und Argumentationen charakterisiert. Die Reliabilität der Skala beträgt nach GRIGUTSCH 0,75 (Cronbachs Alpha).

Die *Kontrollgruppe*<sup>3</sup> zeigte folgenden *F-Befund*:

Die Formalismus-Verteilung ist leicht linksschief und weist Parameter der zentralen Tendenz im Bereich der Zustimmung auf (arithmet. Mittel = 36,8; Median = 37,5; Modus = 39,2). [...] Im Grundkurs lehnen nicht einmal 4% der Schüler einen Formalismus-Aspekt ab, und 13% sind unentschieden. Hingegen ist für 84% der Schüler der Formalismus-Aspekt ein Element des Mathematikbildes; dabei stimmen 48% größtenteils und 36% vollends zu. Mathematik besitzt somit für die große Mehrheit der Schüler im Grundkurs einen deutlichen formalen Aspekt. [a. a. O., S. 115.]

Die folgende Tabelle<sup>4</sup> zeigt die Daten der Kontrollgruppe (N=331) und die Daten meiner aktuellen CAS-Gruppen<sup>5</sup> der Jahrgangsstufen 12 (N=95) und der Jahrgangsstufen 13.2 (N=81).

| <i>F-Komponente</i> | <i>Mittelw. <math>\bar{F}</math></i> | <i>Std.abw. <math>s_F</math></i> | <i>..10</i> | <i>..20</i> | <i>..30</i> | <i>..40</i> | <i>..50</i> |
|---------------------|--------------------------------------|----------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Kontrollgr. GK      | 36.8                                 | 7.9                              | 0.3         | 3.3         | 12.7        | 47.7        | 35.9        |
| CAS-Gruppe GK 12    | 32.42                                | 7.98                             | 0           | 7.4         | 28.4        | 44.2        | 20.0        |
| CAS-Gruppe GK 13.2  | 30.86                                | 7.94                             | 0           | 9.9         | 39.5        | 35.8        | 14.8        |

Abbildung 6.1 visualisiert den aktuellen Befund für die CAS-Gruppen durch Histogramme mit der jeweils zugehörigen überlagerten Dichtefunktion (Standard-Normalverteilung zu den Parametern  $(\bar{F}, s_F)$ ).

*Interpretation. Ausweislich der Befundlage zeigt sich ein verändertes Mathematik-Weltbild in der Formalismus-Dimension.* Die Formalismus-Verteilung ist in den CAS-Gk 12 kaum noch linksschief und weist Parameter der zentralen Tendenz näher im Bereich der Indifferenz auf. Im CAS-Grundkurs 12 lehnen ca. 10% der Schüler einen Formalismus-Aspekt ab und 28% sind unentschieden. Nur noch für 64% der Schüler ist der Formalismus-Aspekt ein Element des Mathematikbildes; dabei stimmen 44% größtenteils und 20% (gegenüber 36% der Kontrollgruppe) vollends zu. Mathematik besitzt für die Mehrheit der Schüler im CAS-Grundkurs 12 einen *abgeschwächten formalen* Aspekt.

Die Formalismus-Verteilung erweist sich in den CAS-Gk 13 nochmals ausgeglichener normalverteilt. Indifferenz überwiegt mit 39% und ist damit dreimal so hoch wie in der Kontrollgruppe. Im CAS-Grundkurs 13 lehnen ca. 10% der Schüler einen Formalismus-Aspekt ab. Nur noch für ca. 50% der Schüler ist der Formalismus-Aspekt ein wesentliches Element des Mathematikbildes; dabei stimmen 36% größtenteils und 15% (gegenüber 36% der Kontrollgruppe) vollends zu. Mathematik besitzt für die Mehrheit der Schüler im CAS-Grundkurs 13 einen *milden formalen* Aspekt. *Der F-Mittelwert zeigt sich um eine volle Standard-Abweichung in Richtung Normalverteilung verschoben.*

<sup>3</sup>also die 331 Schüler und Schülerinnen aus Grundkursen der GRIGUTSCH-Umfrage aus dem Jahre 1994

<sup>4</sup>darin bezeichnet „Mittelw.“ das arithmetische Mittel (mean) und „Std.abw.“ die Standardabweichung vom Mittelwert sowie z. B. „..10“ das Intervall  $[0, 10]$  der „völligen Ablehnung“, s. o.

<sup>5</sup>Hier und im Folgenden sprechen wir von „CAS“-Gruppen 12, weil diese Lerngruppen in der Folgezeit einen intensiven CAS-Gebrauch erfahren und zum Zeitpunkt 12.2 schon geringe CAS-Einflüsse (aus der Behandlung der Analysis) vorliegen.



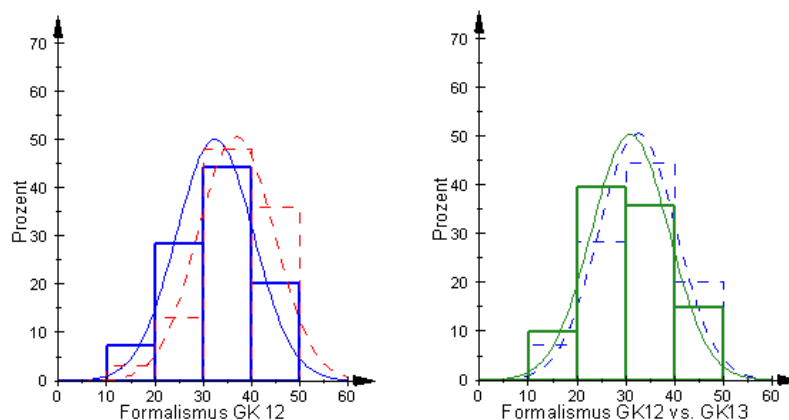


Abbildung 6.1: *Linkes Bild:* F(ormalismus)-Komponente im Mathematikbild der Kontrollgruppe (rot) und den CAS-gestützten Grundkursen (blau)  
*Rechtes Bild:* Ausprägung der F-Komponente im Mathematikbild CAS-gestützter Grundkurse in JgSt 12 (blau) und am Ende der Schulzeit in JgSt 13.2 (grün)

### Schema-Aspekt

Folgende Items des Fragebogens operationalisieren den Schema-Aspekt in der Dimension S, deren transformierter Skalenwert durch die gewichtete Punktschme  $F := ((F24 + F34 + F39 + F44) \cdot \frac{10}{4} - 10) \cdot \frac{5}{4}$  berechnet wird:

| S:  | <i>Schema-Aspekt im Mathematik-Weltbild</i>                                                                    |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F24 | Mathematik ist eine Sammlung von Rechenverfahren und Rechenregeln, die genau angeben, wie man Aufgaben löst.   |
| F34 | Für Mathematik muss man viel üben, um die Rechenregeln und Rechenverfahren zu befolgen und anzuwenden.         |
| F39 | Mathematik besteht darin, Regeln, Formeln, Fakten und Rechenverfahren (Rechenwege) zu behalten und anzuwenden. |
| F44 | Mathematik besteht darin, dass man Dinge lernt, behält, sich an sie erinnert und sie anwendet.                 |

Tabelle 6.2: Die vier Items  $(Fn)_{n=24,34,39,44}$  zur Erhebung des *Schema-Aspekts* S

Gemäß der vier S-Items wird Mathematik als eine Sammlung von Algorithmen und Rechenregeln charakterisiert, die genau angeben, wie man Aufgaben löst. Mathematisches Handeln besteht dann darin, diese Regeln, Formeln, Fakten und Rechenwege zu memorieren und anzuwenden. Mathematik besteht in diesem Verständnis aus Lernen, Üben, Erinnern und dem Anwenden von schematisierten Prozeduren. Die Reliabilität dieser Skala beträgt nach GRIGUTSCH 0,59. Die *Kontrollgruppe* zeigte folgenden *S-Befund*:

Die Häufigkeiten in der Schema-Skala sind symmetrisch und „normal“ verteilt; die Mittelwerte liegen im Bereich der Zustimmung (arithmet. Mittel = 34,5; Median = 34,4; Modus = 37,5). [...] Fast drei Viertel (73%) aller Schüler sehen den Schema-Aspekt als wesentlichen Teil der Mathematik, während 20% unentschieden sind und nur knapp 7% eine ablehnende Einschätzung äußern. Der Schema-Aspekt ist somit im Grundkurs ein bedeutsames Element des Mathematikbildes. [a. a. O., S. 116.]

Die folgende Tabelle zeigt die Daten der beteiligten Gruppen

| <i>S</i> -Komponente | Mittelw. $\bar{S}$ | Std.abw. $s_S$ | ..10 | ..20 | ..30 | ..40 | ..50 |
|----------------------|--------------------|----------------|------|------|------|------|------|
| Kontrollgr. GK       | 34.5               | 8.7            | 0.6  | 6.0  | 20.0 | 41.5 | 31.9 |
| CAS-Gruppe GK 12     | 33.9               | 9.8            | 0    | 10.5 | 17.9 | 40.0 | 31.6 |
| CAS-Gruppe GK 13.2   | 32.3               | 6.6            | 0    | 1.2  | 31.7 | 53.7 | 13.4 |

und Abbildung 6.2 visualisiert den Befund.

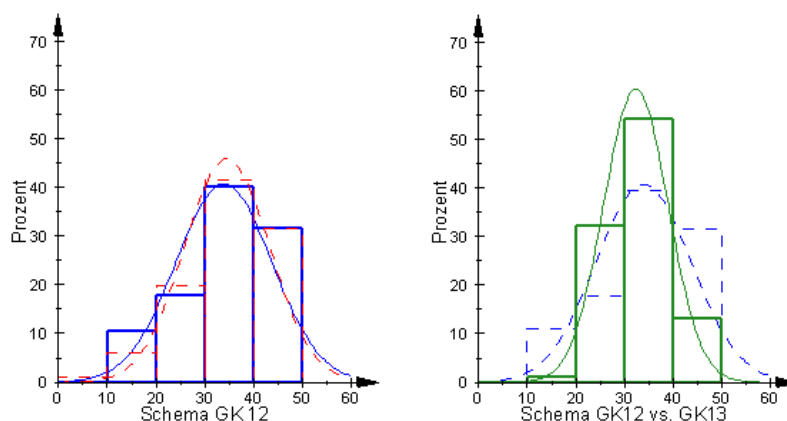


Abbildung 6.2: *Linkes Bild:* *S*(chema)-Komponente im Mathematikbild der Kontrollgruppe (rot) und den CAS-gestützten Grundkursen (blau)  
*Rechtes Bild:* Ausprägung der *S*-Komponente im Mathematikbild CAS-gestützter Grundkurse in JgSt 12 (blau) und am Ende der Schulzeit in JgSt 13.2 (grün)

*Interpretation.* Die Befunde zeigen ein kaum verändertes Mathematik-Weltbild in der Schema-Dimension der CAS-gestützten Grundkurse 12.

In den CAS Grundkursen 13.2 bleibt die Schema-Verteilung zwar normalverteilt und symmetrisch. Die Indifferenz ist allerdings mit 32% um ein Drittel höher, die völlige Zustimmung auf ein Drittel gefallen und die relative Zustimmung auf 53% gestiegen. Mathematik besitzt für die Mehrheit der Schüler im CAS-Grundkurs 13 einen *erkennbaren, aber weniger extremen Schema-Aspekt*.

### Prozess-Aspekt

Folgende Items des Fragebogens operationalisieren den Prozess-Aspekt in der Dimension P, deren transformierter Skalenwert durch die gewichtete Punktschumme  $P := ((F25 + F27 + F31 + F33 + F35 + F37 + F41 + F43 + F46) \cdot \frac{10}{9} - 10) \cdot \frac{5}{4}$  berechnet wird:

| P:  | Prozess-Aspekt im Mathematik-Weltbild                                                                                       |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F25 | Mathematik ist eine Tätigkeit, über Probleme nachzudenken und dann Ideen und Lösungen zu finden und zu verstehen.           |
| F27 | Mathematik besteht darin, gute Ideen zu haben und Zusammenhänge einzusehen.                                                 |
| F31 | Mathematik lebt von Einfällen und neuen Ideen.                                                                              |
| F33 | In der Mathematik ist es wichtiger, inhaltlich zu denken und zu argumentieren, als etwas zu rechnen oder Regeln anzuwenden. |

|     |                                                                                                            |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F35 | Mathematische Tätigkeit besteht darin, Mathematik zu erfinden oder nachzuerfinden (wiederzuentdecken).     |
| F37 | Mathematik betreiben heißt: Sachverhalte verstehen, Zusammenhänge sehen, Ideen haben.                      |
| F41 | In der Mathematik kann man viele Dinge selber finden und ausprobieren.                                     |
| F43 | In der Mathematik muss man vor allem Einfälle und Intuition haben.                                         |
| F46 | Im Vordergrund der Mathematik steht das Denken mit Inhalten, weniger das Rechnen mit Verfahren und Regeln. |

Tabelle 6.3: Die neun Items  $(Fn)_{n=25,27,31,33,35,37,41,43,46}$  zur Erhebung des *Prozess*-Aspekts P

Die neun P-Items charakterisieren die Mathematik als „Prozess“. Es handelt sich um das Nachdenken über Problemstellungen und um das Auffinden von Lösungsideen. In zugehörigen Erkenntnisprozessen werden mathematische Einsichten gewonnen und Konzepte erschaffen bzw. wiederentdeckt. Dabei sind Ideen, Intuitionen und Probierhandlungen wesentlich. Zu diesem Prozessbild gehört auch das Erkennen von Zusammenhängen und das Verstehen von Sachverhalten. Insgesamt wird Mathematik durch diese Items als ein problembezogener Erkenntnis- und Verstehensprozess beschrieben, der mit seiner konstruktivistischen Orientierung die dynamische Entwicklung der Mathematik ausdrückt. - Die Reliabilität der Skala beträgt nach GRIGUTSCH 0,84.

Die *Kontrollgruppe* zeigte folgenden *Befund*:

Die Häufigkeitsverteilung für den Prozess-Aspekt ist symmetrisch und „normal“. Die Mittelwerte liegen in der Skalenmitte (arithmet. Mittel = 25,2; Median = 25; Modus = 22,2) - der Prozess-Aspekt wird im Durchschnitt indifferent eingeschätzt. [...] Gegenüber der Frage, inwieweit der Prozess-Aspekt zur Mathematik gehört bzw. die Mathematik zutreffend kennzeichnet, nimmt der größte Teil der Schüler, nämlich 39%, eine unentschiedene Stellung ein, während 28% eine ablehnende und 33% eine zustimmende Position vertreten. In der durchschnittlichen Einschätzung hat der Prozess-Aspekt somit nur eine mittelmäßige Relevanz zur Charakterisierung der Mathematik. Im Grundkurs ist der Prozeß-Aspekt damit zwar im durchschnittlichen Mathematikbild enthalten, prägt es jedoch nicht. [a. a. O., S. 115.]

Die folgende Tabelle zeigt die Daten der Kontrollgruppe (N=326) und die Daten der CAS-Gruppen der Jahrgangsstufen 12 (N=95) und der Jahrgangsstufen 13.2 (N=81).

| <i>P-Komponente</i> | <i>Mittelw. <math>\bar{P}</math></i> | <i>Std.abw. <math>s_P</math></i> | ..10 | ..20 | ..30 | ..40 | ..50 |
|---------------------|--------------------------------------|----------------------------------|------|------|------|------|------|
| Kontrollgr. GK      | 25.2                                 | 7.9                              | 6.1  | 22.1 | 39.0 | 27.6 | 5.2  |
| CAS-Gruppe GK 12    | 33.4                                 | 9.8                              | 0    | 10.1 | 17.9 | 40.0 | 31.6 |
| CAS-Gruppe GK 13.2  | 31.7                                 | 7.5                              | 0    | 8.5  | 25.6 | 53.7 | 12.2 |

Abbildung 6.3 visualisiert den aktuellen Befund für die CAS-Gruppen durch Histogramme mit der jeweils zugehörigen überlagerten Dichtefunktion (Standard-Normalverteilung zu den Parametern  $(\bar{P}, s_P)$ ).

*Interpretation.* Die *Befunde* zeigen ein gravierend verändertes *Mathematik-Weltbild* in der *Prozess-Dimension*. Die Prozess-Verteilung ist in den CAS-Grundkursen 12 linksschief und weist Parameter der zentralen Tendenz näher im Bereich der Zustimmung auf. Im CAS-Grundkurs 12 lehnen nur ca. 10% der Schüler einen Prozess-Aspekt in der Mathematik ab und 18% sind unentschieden. Aber für 72% der Schüler ist der Prozess-Aspekt nun ein wichtiges Element des Mathematikbildes; dabei stimmen 40% größtenteils und 32%

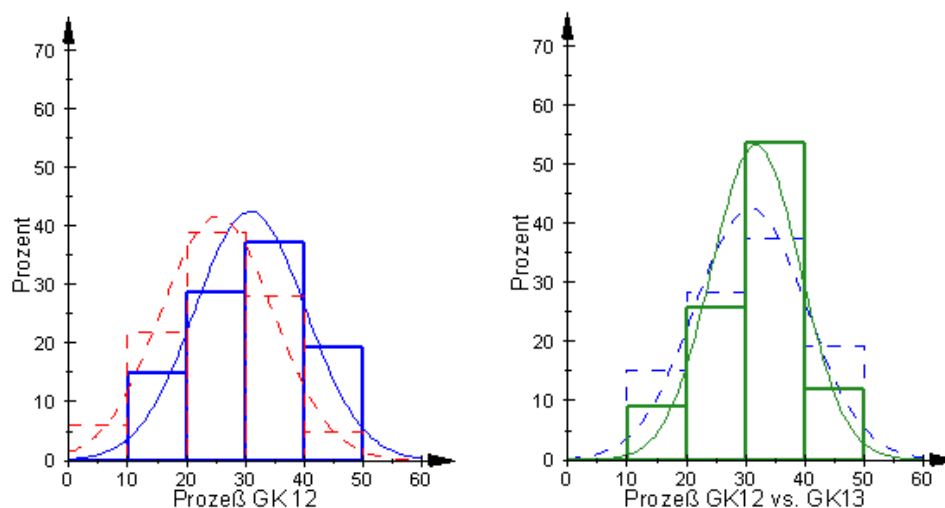


Abbildung 6.3: *Linkes Bild:* P(rozess)-Komponente im Mathematikbild der Kontrollgruppe (rot) und den CAS-gestützten Grundkursen (blau)  
*Rechtes Bild:* Ausprägung der P-Komponente im Mathematikbild CAS-gestützter Grundkurse in JgSt 12 (blau) und am Ende der Schulzeit in JgSt 13.2 (grün)

(gegenüber 5% der Kontrollgruppe) vollends zu. Mathematik besitzt für die Mehrheit der Schüler im CAS-Grundkurs 12 einen *erheblichen prozessualen* Aspekt.

Die Prozess-Verteilung erweist sich auch in den CAS Grundkursen 13.2 erkennbar linksverteilt. Indifferent äußern sich 26% und damit fast die Hälfte weniger als in der Kontrollgruppe. Im CAS-Grundkurs 13 lehnen nur ca. 9% der Schüler einen Prozess-Aspekt ab. Aber für ca. 50% der Schüler ist der Prozess-Aspekt ein wesentliches Element des Mathematikbildes; dabei stimmen 54% größtenteils und 12% vollends zu. Mathematik besitzt für die Mehrheit der Schüler auch im CAS-Grundkurs 13 einen *deutlich prozesshaften* Aspekt. *Der P-Mittelwert zeigt sich um ca. volle Standard-Abweichung in Richtung Zustimmung verschoben.*

### Anwendung-Aspekt

Folgende Items des Fragebogens operationalisieren den Anwendung-Aspekt in der Dimension A, deren transformierter Skalenwert durch die gewichtete Punktsomme  $A := ((F60 + F61 + F63 + F65 + F66 + F68) \cdot \frac{10}{6} - 10) \cdot \frac{5}{4}$  berechnet wird:

| A:  | <i>Anwendung-Aspekt im Mathematik-Weltbild</i>                                                                                                                                                     |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F60 | Im Mathematikunterricht lernt man einige Fähigkeiten, die auch in der Wirklichkeit weiterhelfen (z. B. das konkrete Rechnen, das allgemeine klare Denken in abstrakten und komplexen Situationen). |
| F61 | Viele Teile der Mathematik haben einen praktischen Nutzen oder einen direkten Anwendungsbezug.                                                                                                     |
| F63 | Kenntnisse in Mathematik sind für das spätere Leben der Schüler wichtig.                                                                                                                           |
| F65 | Mathematik ist nützlich in jedem Beruf.                                                                                                                                                            |
| F66 | Mathematik hilft, alltägliche Aufgaben und Probleme zu lösen.                                                                                                                                      |

F68 Im Mathematikunterricht beschäftigt man sich mit Aufgaben, die einen praktischen Nutzen haben.

Tabelle 6.4: Die sechs Items  $(Fn)_{n=60,61,63,65,66,68}$  zur Erhebung des *Anwendung*-Aspekts A

Gemäß der sechs A-Items wird der Mathematik ein lebenspraktischer Nutzen oder ein direkter Anwendungsbezug zugesprochen. Kenntnisse in Mathematik gelten als wichtig für das berufliche bzw. alltägliche Leben. - Die Reliabilität der Skala beträgt nach GRIGUTSCH 0,78.

Die *Kontrollgruppe* zeigte folgenden *A-Befund*:

Die Mittelwerte der Anwendungs-Verteilung liegen im unteren Bereich der Indifferenz, die Verteilung ist relativ symmetrisch und auch „normal“ (arithmet. Mittel = 23,5; Median = 22,9; Modus = 22,5). [...] 40% der Schüler im Grundkurs sehen keinen Nutzen in der Mathematik, während nur 28% eine gegenteilige Meinung vertreten. Schon hierin wird deutlich, dass die Frage der Anwendbarkeit tendenziell ablehnend beantwortet wird. Tatsächlich liegt auch das Schwergewicht der Verteilung in den Bereichen der Indifferenz und der weitgehenden Ablehnung, auf die fast je ein Drittel (31,8%) der Antworten entfallen. Für zwei Drittel der Schüler der Grundkurse besitzt Mathematik damit kaum oder nur einen mäßigen Nutzen. [a. a. O., S. 115.]

Die folgende Tabelle zeigt die Daten der Kontrollgruppe (N=330) und die Daten der CAS-Gruppen der Jahrgangsstufen 12 (N=95) und der Jahrgangsstufen 13.2 (N=81).

| <i>A-Komponente</i> | <i>Mittelw. <math>\bar{A}</math></i> | <i>Std.abw. <math>s_A</math></i> | ..10 | ..20 | ..30 | ..40 | ..50 |
|---------------------|--------------------------------------|----------------------------------|------|------|------|------|------|
| Kontrollgr. GK      | 23.5                                 | 10.3                             | 7.9  | 31.8 | 31.8 | 24.2 | 4.2  |
| CAS-Gruppe GK 12    | 25.4                                 | 10.4                             | 4.2  | 21.1 | 38.9 | 29.5 | 5.3  |
| CAS-Gruppe GK 13.2  | 29.2                                 | 8.7                              | 1.2  | 13.4 | 35.4 | 37.8 | 12.2 |

Abbildung 6.4 visualisiert den aktuellen A-Befund für die CAS-Gruppen durch Histogramme mit der jeweils zugehörigen überlagerten Dichtefunktion (Standard-Normalverteilung zu den Parametern  $(\bar{A}, s_A)$ ).

*Interpretation.* Ausweislich der Befundlage zeigt sich auch ein deutlich verändertes *Mathematik-Weltbild in der Anwendung-Dimension*. Die Anwendungs-Verteilung ist in den CAS-Grundkursen 12 symmetrisch und „normal“. Im CAS-Grundkurs 12 lehnen nur noch 25% der Schüler einen Anwendungs-Aspekt ab und 40% sind unentschieden. Aber für 35% der Schüler ist der Anwendungs-Aspekt ein Element des Mathematikbildes. Mathematik besitzt für die Mehrheit der Schüler im CAS-Grundkurs 12 einen *erkennbaren Anwendungs-Aspekt*. Die Anwendungs-Verteilung erweist sich in den CAS-Grundkursen 13 nochmals ausgeglichener und normalverteilt. Zustimmung überwiegt mit 38% und ist damit wesentlich höher als in der Kontrollgruppe und auch im CAS Grundkurs 12. Im CAS-Grundkurs 13 lehnen nur noch ca. 15% der Schüler einen Anwendungs-Aspekt ab. Aber für 50% der Schüler ist der Anwendungs-Aspekt ein wesentliches Element des Mathematikbildes; dabei stimmen 38% größtenteils und 12% (gegenüber 4% der Kontrollgruppe) vollends zu. Mathematik besitzt für die Mehrheit der Schüler im CAS-Grundkurs 13 einen *wichtigen Anwendungs-Aspekt*. Der *A-Mittelwert zeigt sich um eine halbe Standard-Abweichung in Richtung Normalverteilung verschoben*.

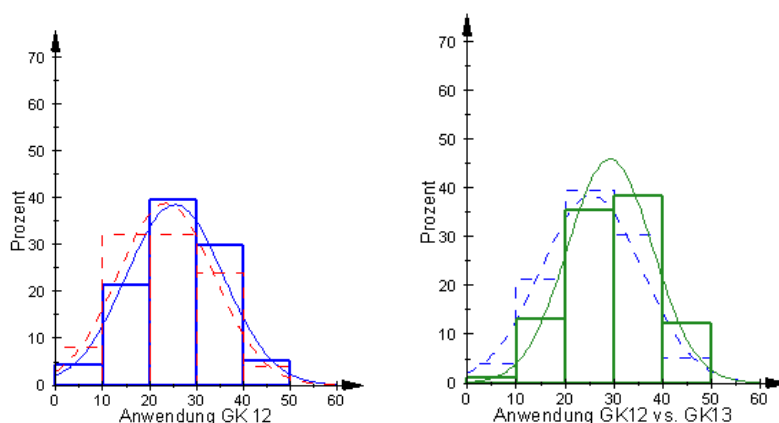


Abbildung 6.4: *Linkes Bild:* A(nwendung)-Komponente im Mathematikbild der Kontrollgruppe (rot) und den CAS-gestützten Grundkursen (blau)  
*Rechtes Bild:* Ausprägung der A-Komponente im Mathematikbild CAS-gestützter Grundkurse in JgSt 12 (blau) und am Ende der Schulzeit in JgSt 13.2 (grün)

### Rigide Schema-Orientierung

Folgende Items des Fragebogens operationalisieren den Aspekt der *rigiden Schema-Orientierung* in der Dimension R, deren transformierter Skalenwert durch die gewichtete Punktschritte  $R := ((F2 + F11 + F18) \cdot \frac{10}{3} - 10) \cdot \frac{5}{4}$  berechnet wird:

| R:  | Aspekt der rigiden Schema-Orientierung im Mathematik-Weltbild                                                            |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F2  | Nur der Teil der Mathematik, der in Tests und Klassenarbeiten getestet wird, ist mir wichtig und wissenswert.            |
| F11 | Im Mathematikunterricht reichte es mir bislang, nur das zu lernen, was in der Klassenarbeit verlangt wird.               |
| F18 | Wie eine Regel entsteht und warum sie richtig ist, ist für mich unwichtig; entscheidend ist, dass ich sie anwenden kann. |

Tabelle 6.5: Die drei Items  $(Fn)_{n=2,11,18}$  zur Erhebung des Aspekts R der *rigiden Schema-Orientierung*

Gemäß der drei R-Items wird Mathematik als kurzfristig wirksames Aneignen von fertigem, oft unverstandenem Wissen verstanden. Wesentlich für die Schüler ist die Einstellung, nur die Kenntnisse und Fertigkeiten zu lernen, die in der Klassenarbeit benötigt werden. Herleitungen oder Begründungen erscheinen unwichtig. Zielführend ist das Anwenden (auch unverstandener) Routinen.  
 - Die Reliabilität der Skala beträgt nach GRIGUTSCH 0,63.

Die *Kontrollgruppe* zeigte folgenden *Befund*:

Die Häufigkeitsverteilung der Skalenwerte der rigiden Schemaorientierung besitzt ihr arithmetisches Mittel mit 24,2 und ihren Median mit 25 genau im Skalenmittelpunkt der Indifferenz, der Modus liegt jedoch im Bereich der Zustimmung bei 33,3. [...] Die Häufigkeiten verteilen sich - im Vergleich zu den anderen Skalen und Klassenstufen - relativ gleichmäßig über die gesamte Skala. Fast ein Drittel (31%) nimmt eine unentschiedene Stellung ein, während fast 36% eine ablehnende und 33% eine zustimmende Einschätzung abgaben. Dabei werden auch die Randbereiche - völlige Zustimmung und völlige Ablehnung - relativ häufig gewählt. Die Frage, inwieweit ihr Mathematikunterricht von einer rigiden Schemaorientierung geprägt sei, wird also im Grundkurs höchst unterschiedlich beurteilt und im Schnitt mittelmäßig eingeschätzt. [a. a. O., S. 115.]

Die folgende Tabelle und Abbildung 6.5 zeigen die R-Daten der beteiligten Gruppen.

| <i>R</i> -Komponente | Mittelw. $\bar{R}$ | Std.abw. $s_R$ | ..10 | ..20 | ..30 | ..40 | ..50 |
|----------------------|--------------------|----------------|------|------|------|------|------|
| Kontrollgr. GK       | 24.2               | 7.9            | 16.8 | 18.9 | 31.1 | 20.4 | 12.8 |
| CAS-Gruppe GK 12     | 24.3               | 11.5           | 9.5  | 20.0 | 40.0 | 20.0 | 7.4  |
| CAS-Gruppe GK 13.2   | 26.1               | 11.5           | 11.0 | 15.9 | 39.0 | 18.3 | 15.9 |

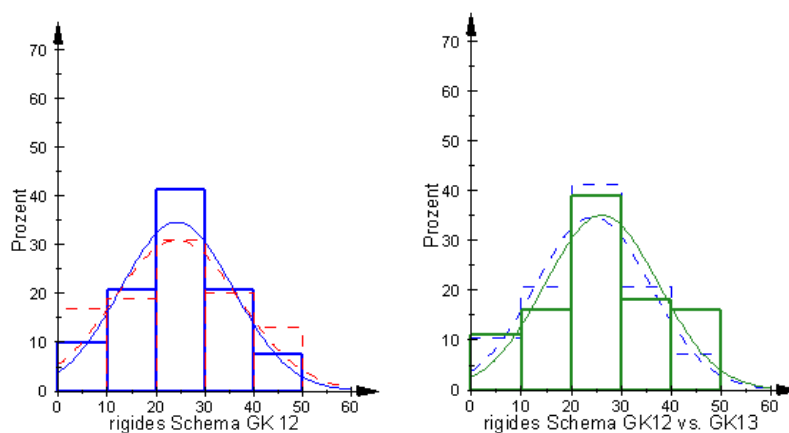


Abbildung 6.5: *Linkes Bild:* R(igide Schema)-Komponente im Mathematikbild der Kontrollgruppe (rot) und den CAS-gestützten Grundkursen (blau)  
*Rechtes Bild:* Ausprägung der R-Komponente im Mathematikbild CAS-gestützter Grundkurse in JgSt 12 (blau) und am Ende der Schulzeit in JgSt 13.2 (grün)

*Interpretation.* Die Verteilung der rigiden Schemaorientierung ist in den CAS Grundkursen 12 völlig symmetrisch und normal. Im CAS-Grundkurs 12 lehnen ca. 30% der Schüler eine rigide Schemaorientierung ab und 27% stimmen zu. 40% sind gegenüber einer rigiden Schemaorientierung indifferent eingestellt. Die Mehrheit der Schüler im CAS-Grundkurs 12 haben gegenüber der Mathematik eine *mittlere indifferente* rigide Schemaorientierung.

Die Verteilung der rigiden Schemaorientierung erweist sich auch in den CAS-Gk 13 wenig verändert. Indifferenz überwiegt mit 39%. Im CAS-Grundkurs 13 lehnen zwar ca. 27% der Schüler einen Aspekt der rigiden Schemaorientierung ab, aber auch 34% der Schüler sehen in der rigiden Schemaorientierung ein wesentliches Element ihres Mathematikbildes; dabei stimmen 18% größtenteils und 16% (gegenüber 13% der Kontrollgruppe und 7% der CAS-Gk 12) vollends zu. Mathematik besitzt für die Mehrheit der Schüler im CAS-Grundkurs 13 eine mittelmäßige indifferente rigide Schemaorientierung. *Der R-Mittelwert bleibt annähernd unverändert.* Man darf annehmen, dass die gedankliche Ausrichtung auf die Abiturklausuren die wachsende Ausprägung der Extreme verursacht.

## 6.2 Längsschnittsuntersuchung der M—Weltbilder

Die Untersuchung von GRIGUTSCH stellte eine *Querschnittsaufnahme* des Mathematik-Weltbildes von Grundkursen der Jahrgangsstufe 12 zu einem bestimmten Zeitpunkt (1994) dar. Im Folgenden fasse ich die oben isoliert untersuchten Weltbild-Aspekte in einer *Längsschnittanalyse* zusammen. Dabei analysieren wir die Entwicklung der einzelnen Komponenten des Weltbildvektors ( $F, S, P, A, R$ ) der CAS-intensiven Grundkurse im Verlaufe von

1,5 Jahren untereinander und in Bezug auf die Kontrollgruppe.

Abschließend definiere ich einen *Belief-Index*, mit dem wir eine *Verdichtung* der fünf Dimensionen auf einen charakteristischen Wert vornehmen und so eine *Rangordnung* bzw. Wertung der globalen Mathematik-Weltbilder ermöglichen.

### 6.2.1 Belief-Längsschnitte

Abbildung 6.6 zeigt die Mittelwerte (als Punkte) zusammen mit den zugehörigen Standardabweichungen (als Balken) aller fünf Dimensionen der Mathematikbilder der Kontrollgruppe (schwarz), der CAS-Grundkurse 12 (blau) und der CAS-Grundkurse 13.2 (rot).

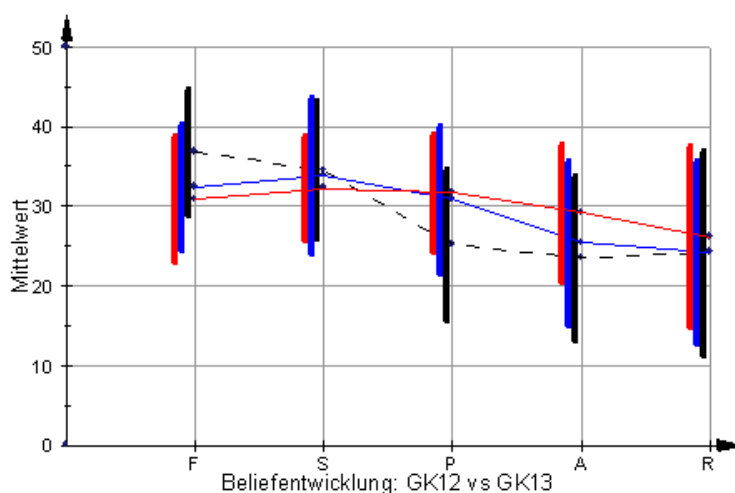


Abbildung 6.6: Zur Entwicklung des 5-dimensionalen Mathematik-Weltbildvektors ( $F, S, P, A, R$ ) im Grundkurs 12 (blau) vs Grundkurs 13.2 (rot) im Vergleich mit der Kontrollgruppe (schwarz)

Man erkennt, dass sich die (**F**)ormalismus-Komponente im CAS-bestimmten Mathematik-weltbild sowohl in Bezug auf die Kontrollgruppe als auch im Laufe der Zeit zunehmend in Richtung Indifferenz verschiebt und sich damit abschwächt. Die (**S**)chema-Komponente bleibt unter CAS-Einfluss zunächst annähernd unverändert, verschiebt und konzentriert sich aber leicht in Richtung Indifferenz gegen Ende der Schulzeit. Die (**P**)rozess-Komponente wächst von Indifferenz in der Kontrollgruppe unter CAS-Einfluss im Grundkurs 12 zunächst massiv in Richtung Zustimmung und verdichtet sich leicht im Grundkurs 13.2. Die (**A**)nwendung-Komponente wächst von Indifferenz in der Kontrollgruppe im Grundkurs 12 zunächst leicht an und verstärkt sich unter dem intensivierten Einsatz von CAS im Rahmen der linearen Algebra nochmals in Richtung Zustimmung in der 13.2. Die (**R**)igide-Schemaorientierung bleibt im Bereich der Indifferenz (Kontrollgruppe) auch unter CAS-Einfluss im Laufe der Zeit annähernd konstant.

Zusammenfassend sind die stärksten Auswirkungen des intensiven CAS-Einsatzes in *posi-*



tiven<sup>6</sup> Veränderungen der (F,P,A)-Komponenten im Weltbild diagnostizierbar.

## 6.2.2 Belief-Index

Es erscheint wünschenswert, die wechselseitigen Veränderungen im globalen Mathematik-Weltbild eines Kurses messbar und damit quer-vergleichbar zu machen. Dazu wird einem Mathematik-Weltbildvektor  $(F, S, P, A, R)$  eine kennzeichnende Zahl  $mbi(F, S, P, A, R)$  als *Mathematik-Belief-Index* zugeordnet.

Dieser Index ist wie folgt motiviert: Eine Verschiebung des Mittelwertes der (F,S,R)-Komponenten in Richtung Indifferenz bzw. Ablehnung soll als *positive* Färbung des Weltbildes gelten, da hierdurch eine Abnahme einer formalen bzw. schematischen bzw. rigiden Sicht auf den Mathematikunterricht zum Ausdruck kommt. Gleichzeitig wird auch eine Verschiebung des Mittelwertes der (P,A)-Komponenten in Richtung Zustimmung als *positive* Entwicklung des Weltbildes gewertet, weil dies eine Zunahme einer prozessualen bzw. anwendungsorientierten Sicht auf den Mathematikunterricht beschreibt. Zusätzlich wird die Konzentration um den Mittelwert durch eine ggfs. verringerte Standardabweichung positiv berücksichtigt.

Dies führt zu einer „vorzeichenbehafteten Distanzfunktion“ (z. B. von der Kontrollgruppe oder von Kursen relativ zueinander) im 5-dimensionalen Raum der Mathematik-Weltbilder. Die folgende (in MuPAD) definierte Funktion realisiert diese Überlegungen:

```

• mbi := (L,G) ->
 sqrt(
 sign(G[1]-L[1])*(G[1]-L[1])^2 + sign(G[2]-L[2])*(G[2]-L[2])^2
 + sign(G[3]-L[3])*(G[3]-L[3])^2 + sign(G[4]-L[4])*(G[4]-L[4])^2
 - sign(G[5]-L[5])*(G[5]-L[5])^2 + sign(G[6]-L[6])*(G[6]-L[6])^2
 - sign(G[7]-L[7])*(G[7]-L[7])^2 + sign(G[8]-L[8])*(G[8]-L[8])^2
 + sign(G[9]-L[9])*(G[9]-L[9])^2 + sign(G[10]-L[10])*(G[10]-L[10])^2
):

```

Beispielsweise ergibt sich für die Daten der Mathematikbilder der Leistungskurse GL94<sup>7</sup> der Kontrollgruppe mit dem Weltbildvektor<sup>8</sup>

$$GL = (F_{8.1}^{37.4}, S_{9.7}^{30.6}, P_{7.9}^{32.0}, A_{9.0}^{29.7}, R_{10.8}^{17.1})$$

im Vergleich zu den CAS-Leistungskursen LL0608<sup>9</sup> mit dem Weltbildvektor

$$LL = (F_{5.3}^{32.8}, S_{9.0}^{26.3}, P_{6.2}^{35.1}, A_{6.3}^{33.4}, R_{12.9}^{22.9})$$

der *Belief-Index*  $mbi(LL, GL) = 6.59$ :

<sup>6</sup>hier im Sinne von didaktisch *wünschenswerten* Veränderungen im Weltbild eines Schülers

<sup>7</sup>vgl. [a. a. O., S. 126]; GL94 meint die GRIGUTSCH-Erhebung im Leistungskurs von 1994.

<sup>8</sup> $F_{8.1}^{37.4}$  steht für eine Formalismus-Komponente mit dem Mittelwert 37.4 und der zugehörigen Standardabweichung 8.1.

<sup>9</sup>LL0608 bezeichnet die Leistungskurse aus LINDNER's Untersuchung von 2006 und 2008.

- $L := [32.8, 5.3, 26.3, 9.0, 35.1, 6.2, 33.4, 6.3, 22.9, 12.9]$  :
- $G := [37.4, 8.1, 30.6, 9.7, 32.0, 7.9, 29.7, 9.0, 17.1, 10.8]$  :
- $mbi(L, G)$

6.588626564

Die linke Spalte der folgenden Tabelle 6.6 zeigt die Belief-Indizes der Weltbildvektoren von Grundkursen der vorliegenden Untersuchung<sup>10</sup> im Vergleich mit dem Weltbildvektor GM von Grundkursen der Untersuchung von GRIGUTSCH. In der rechten Spalte sind u. a. die Belief-Indizes der Weltbildvektoren von vier Grundkursen 12 der vorliegenden Untersuchung im relativen Vergleich mit dem geänderten Grundkurs-Weltbildvektor 13 der jeweils gleichen Population (also ein Jahr später) berechnet.

| <i>Vergleichsgruppen</i> | <i>Belief-Index</i> | <i>Vergleichsgruppen</i> | <i>Belief-Index</i> |
|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| (LM0012, GM)             | 8.86                | (LM12, GM)               | 7.74                |
| (LM0113, GM)             | 10.22               | (LM13, GM)               | 11.13               |
| (LM0112, GM)             | 6.82                | (LM0113, LM0012)         | 2.71                |
| (LM0213, GM)             | 10.04               | (LM0213, LM0112)         | 6.01                |
| (LM0412, GM)             | 7.72                | (LM0513, LM0412)         | 7.37                |
| (LM0513, GM)             | 13.54               | (LM0613, LM0512)         | 12.45               |
| (LM0512, GM)             | 12.04               | (LM13, LM12)             | 5.78                |
| (LM0613, GM)             | 16.40               |                          |                     |

Tabelle 6.6: Belief-Indizes  $mbi(.,.)$  der Weltbildvektoren der CAS-Grundkurse LMjkkk vs der Kontrollgruppe GM. LM12 bzw. LM13 bezeichnet den Weltbildvektor aller CAS-Grundkurse 12 bzw. 13 der aktuellen Untersuchung.

Abbildung 6.7 visualisiert die zeitliche Entwicklung der Belief-Indizes der Weltbildvektoren LMjkkk der CAS-Grundkurse jeweils gegenüber der Kontrollgruppe GM (GRIGUTSCH-Grundkurse 12).

Ausweislich der Wertetabelle und deren graphischer Darstellung *erleben alle CAS-Grundkurse eine (mehr oder weniger ausgeprägte) positive Entwicklung ihres Mathematik-Weltbildes* im Verlaufe des CAS-intensiven Unterrichts von Jahrgangsstufe 12 bis Ende der Jahrgangsstufe 13. Die Grundkurse 12/13 der Jahre 2000/01 bzw. 2001/02 zeigen eine schwache Prosperität ihres (CAS-gefärbten) Weltbildes um ca. 1 bzw. 3 „Punkte“ (Einheiten). Vermutlich ist dies durch den Wechsel des CAS (im laufenden Kurs) von Derive 4 nach MuPAD 2.0 begründet. Zudem befand sich das Unterrichtsmaterial in der Entwicklung und Erprobung.

Die Grundkurse 12/13 der Jahre 2004/05 bzw. 2005/06 zeigen eine starke positive Entwicklung ihres mathematischen Weltbildes um ca. 6 bzw. 5 „Punkte“ (Einheiten). In diese Zeit

<sup>10</sup>hier mit LMjkkk bezeichnet. Z. B. bezeichnet LM0012 den Grundkurs im Jahre 2000 der Jahrgangsstufe 12 der vorliegenden Untersuchung von LINDNER.

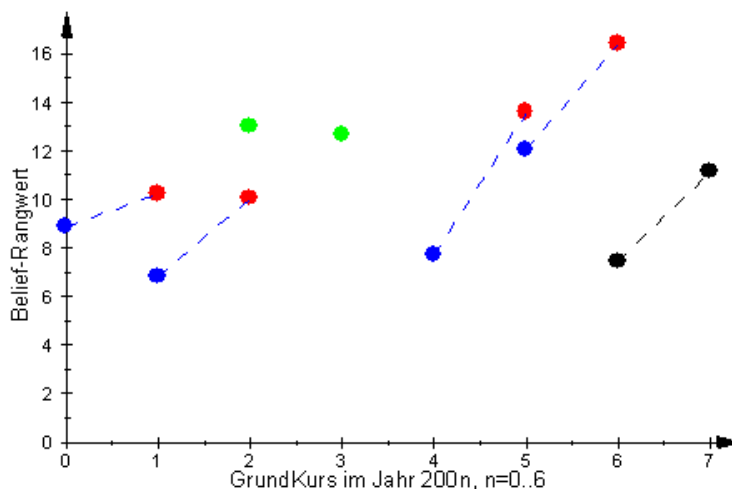


Abbildung 6.7: zeitliche Entwicklung der Belief-Indizes der Weltbildvektoren der CAS-Grundkurse LMjjkk bzgl. der Kontrollgruppe GM. Blauer Punkt: GK 12. Roter Punkt: zugehöriger GK 13. Fortgeführte Kurse mit gleicher Population sind gestrichelt verbunden. Schwarz: LM12 vs. LM13 kumuliert

fällt die Umstellung des Unterrichtsmaterials ab 2004 auf interaktive MuPAD-Sheets bzw. ab 2005 auf die Möglichkeit der Nutzung eingebetteter Animationen. Weitere Aufschlüsse kann man von der nachfolgenden Untersuchung des „CAS-Weltbildes“ erhoffen.

#### Anmerkungen:

1. Die x-Achse in der Grafik 6.7 markiert das Nullniveau, d. h. der Beliefindex des Mathematikweltbildes der GRIGUTSCH-Kontrollgruppe ist p.d. Null:  $\text{mbi}(\text{GM}, \text{GM})=0$ . Daher mag es verwundern, dass alle CAS-Grundkurse zu Beginn der Erhebung in der Jahrgangsstufe 12 schon ein um mehr als 6 Punkte verbessertes Weltbild bzgl. der Kontrollgruppe mitbringen. Es ist aber zu bedenken, dass einige Teilnehmer dieser Kurse aus den Grundkursen der Jahrgangsstufe 11 schon CAS-Erfahrungen aus der Grundlegung der Analysis mitbringen. Auch wurde in Jahrgangsstufe 12.1 das CAS für die Fortführung der Analysis (z. B. Integralrechnung, RIEMANN-Summen etc.) gelegentlich benutzt. Es ist auch nicht auszuschließen, dass Lehrpersonen „ein Ruf vorausseilt“, der das Weltbild partiell präjudiziert.

Der *zusätzliche Effekt in der Weltbildveränderung, der sich in der gestiegenen Performance von JgSt 12 nach JgSt 13 ausdrückt*, und der in der Größenordnung des Abstands des Ausgangswertes vom Nullniveau liegt, lässt sich aber sinnvoll nur durch den CAS-intensiven Unterricht im Verlaufe der letzten 1.5 Jahre erklären. Denn die wesentlichen äußeren Randbedingungen wie Lehrperson, Unterrichtsmaterial, Unterrichtsraum etc. blieben konstant. Insofern besteht *der entscheidende Befund darin, dass sich das Mathematik-Weltbild durch einen CAS-intensiven Mathematikunterricht in linearer Algebra in den Dimensionen (F,P,A) um ca. eine Beliefindex-Verdoppelung verbessern*

lässt.

2. Man könnte einwenden, obige Verbesserung des Weltbildvektors sei lehrpersonabhängig. Dazu betrachten wir zusätzlich z. B. den Weltbildvektor aus einem CAS<sup>11</sup>-Grundkurs 12 bzw. 13 von N. ESPER<sup>12</sup>. Der dort mit dem gleichen Instrument (GRIGUTSCH-Fragebogen) erhobene Weltbildvektor  $Esper0212 = (F_{6.6}^{36.6}, S_{8.1}^{30.1}, P_{7.6}^{33}, A_{8.6}^{27.1}, R_{8.4}^{18.1})$  in einem CAS-Grundkurs 12 aus dem Jahre 2002 (N=21) hat einen Beliefindex  $mbi(Esper0212, GM) = 12.6$  und liegt dabei in vergleichbarer Höhe mit den hier gemessenen Weltbildwerten. Auch der in seinem Grundkurs 13 (N=14) aus dem gleichen Jahr ermittelte Weltbildvektor  $Esper0213 = (F_{7.5}^{32.5}, S_{7.2}^{25.9}, P_{5.9}^{32.5}, A_{7.7}^{23.5}, R_{12.8}^{24.7})$  hat einen Beliefindex

$$mbi(Esper0213, GM) = 12.96$$

und hat damit ebenfalls eine vergleichbare Größe. Beide Beliefindizes sind zum Vergleich mit den hier erhobenen Daten in Abbildung 6.7 als grüne Punkte über der Jahreszahl (x-Wert) eingetragen.

### 6.2.3 Exkurs: Mathematikweltbild im Zentralabitur (LK)

Von 2007 bis 2008 wurde vom Autor ein Leistungskurs in Mathematik betreut, der eine intensive CAS-Nutzung zusammen mit dem eingeführten (CAS-freien) Lehrbuch [12] nutzte, um auf das zentrale Abitur zu führen. Dabei wurden nur wenige ausgewählte MuPAD-Sheets eingesetzt. Zwar liegen daher leider keine Daten aus der Jahrgangsstufe 12 vor, wohl aber wurde am Ende der Jahrgangsstufe 13 (N=16) das erworbene Mathematikbild LM0813Lk erhoben. Dieses Weltbild wird abschließend mit der Kontrollgruppe der Leistungskurse 12 (N=302) von Grigutsch GM9412Lk verglichen, vgl. [a. a. O., S. 121-126].

Die folgende Tabelle zeigt die Datensätze der jeweiligen Komponenten im Weltbildvektor der Leistungskurs-Kontrollgruppe (N=303) und der CAS-Gruppe der Jahrgangsstufe 13.2/2008 (N=16) detaillierter.

| Komponente: | Mittelw.: | Std.abw.: | ..10 | ..20 | ..30 | ..40 | ..50 |
|-------------|-----------|-----------|------|------|------|------|------|
| F-GM9412Lk  | 37.4      | 8.1       | 0.7  | 3.6  | 11.3 | 43.9 | 40.5 |
| F-LM0813Lk  | 33.0      | 4.3       | 0    | 0    | 18.8 | 75.0 | 6.3  |
| S-GM9412Lk  | 30.6      | 9.7       | 2.3  | 14.7 | 25.5 | 38.5 | 19.3 |
| S-LM0813Lk  | 28.9      | 7.5       | 0    | 18.8 | 31.3 | 37.5 | 12.5 |
| P-GM9412Lk  | 32.0      | 7.9       | 0.3  | 6.0  | 33.1 | 42.0 | 18.5 |
| P-LM0813Lk  | 35.1      | 6.3       | 0    | 0    | 25.0 | 56.3 | 18.8 |
| A-GM9412Lk  | 29.7      | 9.0       | 0.3  | 13.9 | 33.8 | 40.1 | 11.9 |
| A-LM0813Lk  | 32.3      | 6.0       | 0    | 0    | 31.3 | 56.3 | 12.5 |
| R-GM9412Lk  | 17.1      | 10.8      | 31.0 | 25.5 | 32.7 | 8.8  | 2.0  |
| R-LM0813Lk  | 27.1      | 14.1      | 18.8 | 12.5 | 31.3 | 6.3  | 31.3 |

<sup>11</sup>Nach meiner Kenntnis hatte (der zwischenzeitlich verstorbene) Kollege N. ESPER den Taschenrechner TI-92 mit dem adaptierten CAS Derive genutzt.

<sup>12</sup>der dem Autor freundlicherweise von S. GRIGUTSCH mitgeteilt wurde

*Befunde.* Auf Grund der kleinen aktuellen Stichprobe sei hier auf die Darstellung der ( $F, S, P, A$ )-Histogramme verzichtet. Stattdessen wird die Veränderungstendenz<sup>13</sup> in Bezug auf die Kontrollgruppe knapp kontrastiert.

In Bezug auf die *Formalismus*-Komponente des Mathematikweltbildes im Leistungskurs bleibt der  $F$ -Aspekt symmetrisch verteilt mit einer zentralen Lage im Bereich der Zustimmung. Allerdings kann man eine Verschiebung in Richtung überwiegender Zustimmung (44% vs 75%) feststellen. Der *Schema*-Aspekt tendiert von Zustimmung leicht in Richtung Indifferenz bei annähernd gleichem Mittelwert. Die *Prozess*-Komponente wächst leicht in Richtung stärkerer Zustimmung (60% vs 75%). Die *Anwendung*-Komponente im Mathematikbild wächst ebenfalls leicht in Richtung stärkerer Zustimmung (52% vs 69%).

In der *rigiden Schemaorientierung* zeigen sich erstaunlicherweise die gravierendsten Differenzen zur Kontrollgruppe. Die Kontrollgruppe weist eine symmetrische Verteilung um das Zentrum „Ablehnung“ (nur 11% der Schüler der Kontrollgruppe schreiben dem Mathematikunterricht eine rigide Schemaorientierung zu) auf, im aktuellen Leistungskurs stimmen 37% der Schüler einer rigiden Schemaorientierung zu. Der Prozentsatz der völligen Ablehnung dieser  $R$ -Orientierung fällt gleichzeitig von 31% auf 19% ab.

Während in der Kontrollgruppe der *Formalismus*-Aspekt das Weltbild dominierte, ist es nunmehr der *Prozess*-Aspekt. Zwar bleibt die rigide Schemaorientierung am wenigsten bedeutsam, ist aber deutlich verstärkt. Man darf vermuten, dass das Zentralabitur mit seinen rigiden Vorgaben möglicherweise diese Tendenz verursacht hat. Abbildung 6.8 fasst die Beobachtungen zusammen.

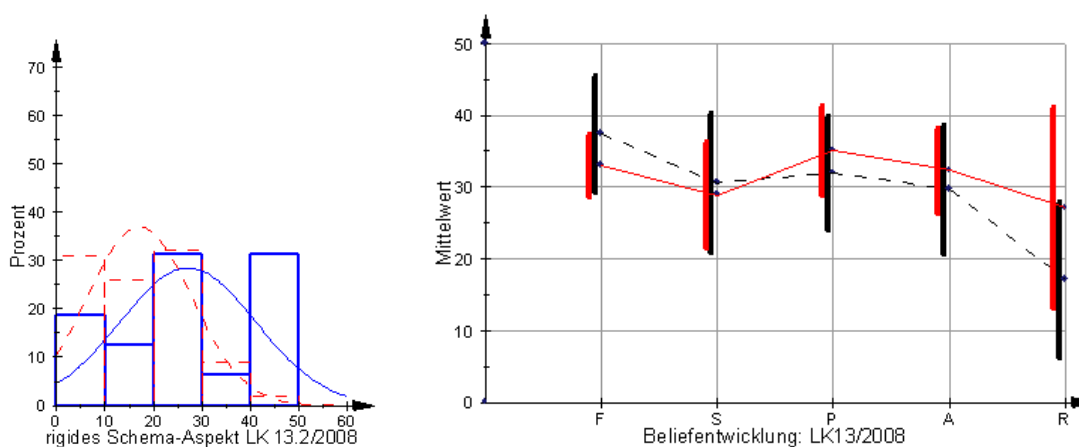


Abbildung 6.8: *Links:* R-Komponente im Leistungskurs. *Rechts:* Weltbildveränderung im Leistungskurs 13.2/2008 (rot) vs Kontrollgruppe (schwarz). Die Balken stellen jeweils die Standardabweichung dar.

<sup>13</sup>Man beachte aber, dass hier Daten aus mehreren Leistungskursen 12 mit denen eines aus 13.2 verglichen werden.

*Beliefindex.* Die Mathematik-Weltbildvektoren beider Kohorten lauten, s. o.:

$$LM0813Lk = (F_{4.3}^{33.0}, S_{7.5}^{28.9}, P_{6.3}^{35.1}, A_{6.0}^{32.3}, R_{14.1}^{27.1})$$

$$GM9412Lk = (F_{8.1}^{37.4}, S_{9.7}^{30.6}, P_{7.9}^{32.0}, A_{9.0}^{29.7}, R_{10.8}^{17.1})$$

Berechnet man daraus den Beliefindex, so ergibt sich ein *negativer (imaginärer) Wert*

$$mbi(LM0813Lk, GM9412Lk) = 6.45 \cdot i.$$

Dieser reflektiert die starke Zunahme in der rigiden Schemaorientierung im Mathematikbild des getesteten Leistungskurses bei zusätzlich vergrößerter Streuung (Standardabweichung). Abbildung 6.9 verdeutlicht die Situation graphisch.

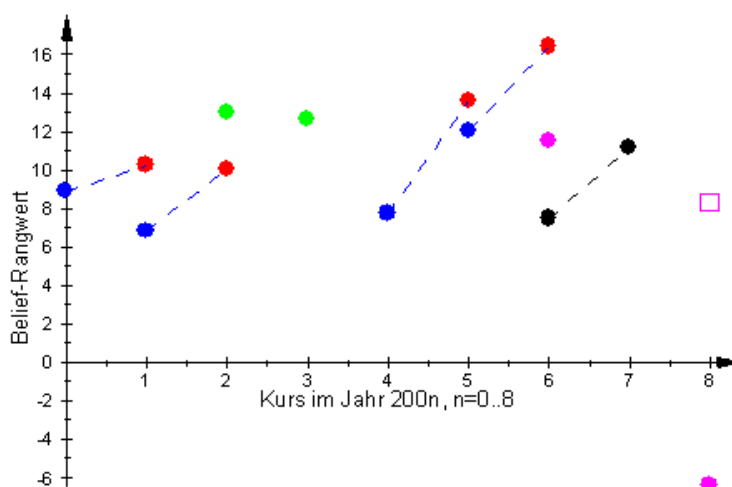


Abbildung 6.9: *Blau, rot, grüne Punkte:* Werte der Beliefindizes der CAS-Grundkurse. *Violetter Punkt über x=8:* Beliefindex im Leistungskurs 2008. *Violetteres Quadrat über x=8:* Beliefindex im Leistungskurs 2008 bei Nichtberücksichtigung der R-Komponente (markiert eine leicht positive Entwicklung in den Dimensionen  $(F, S, P, A)$ ). *Violetter Punkt über x=6:* Beliefindex im CAS-Leistungskurs 2006 eines Kollegen zum Vergleich (letzter Leistungskurs ohne Zentralabitur)

*Anmerkung.* Der CAS-Leistungskurs LM0813Lk erzielte im Zentralabitur hervorragende Leistungen und lag 75% über Landesschnitt, s.o. Möglicherweise verweist hier eine erhöhte R-Komponente lediglich auf eine seriöse und intensive Vorbereitung auf das Zentralabitur und nicht zwangsläufig auf eine negative Einfärbung des mathematischen Weltbildes. Dies könnte Thema einer speziellen Untersuchung sein.

## 6.3 Vorüberlegungen zu einem CAS–Weltbild

Abschließend seien einige *Vorüberlegungen zur Konstruktion eines CAS-Weltbildes* ange stellt. Es ist zu hoffen, dass daraus einige Hypothesen zur Erklärung der Veränderungen im mathematischen Weltbild der untersuchten Kohorten gewonnen werden können. Methodisch setze ich dazu Elemente einer explorativen Datenanalyse ein. Eine volle statistische Analyse der (kleinen) Datenmenge würde den Rahmen dieser Untersuchung vollends sprengen.

### 6.3.1 CAS-Fragebogen und Datenerhebung

Die Schüler und Schülerinnen obiger Grund- und Leistungskurse Mathematik wurden je weils zeitgleich zum GRIGUTSCH-Fragebogen mit einem ergänzenden „CAS“-Fragebogen zu ihren Einstellungen zur intensiven Nutzung des CAS im Mathematikunterricht befragt. Konstruktion, Aufbau, Skalierung und Auswertung des CAS-Fragebogens orientierte sich dabei eng am Fragebogen von GRIGUTSCH. Die Ergänzung enthielt 39 zusätzliche Fra gen, wobei jede einzelne Frage (Item) analog zur Umfrage von GRIGUTSCH durch die Ant wortmöglichkeiten 5 = „stimmt genau“, 4 = „stimmt größtenteils“, 3 = „unentschieden“, 2 = „stimmt nur teilweise“, 1 = „stimmt gar nicht“ skaliert wurde. Die folgende Tabelle 6.7 enthält alle 39 zusätzlichen<sup>14</sup> Fragen.

| <i>Fragen zu CAS-Aspekten im Mathematik-Weltbild</i> |                                                                                                                     |
|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F73                                                  | Mit Computerunterstützung kann ich herkömmliche Mathematikaufgaben bes ser lösen.                                   |
| F74                                                  | Man sollte mehr traditionellen Unterricht im Klassenraum machen und weniger Zeit am PC zubringen.                   |
| F75                                                  | MuPAD finde ich in der Handhabung zu kompliziert.                                                                   |
| F76                                                  | Ein zeitgemäßer Mathematikunterricht muss Schüler/innen mit Werkzeugen wie MuPAD vertraut machen.                   |
| F77                                                  | Klausuraufgaben sollte man mit MuPAD lösen dürfen.                                                                  |
| F78                                                  | Der Einsatz von MuPAD bietet lernschwachen Schülern/innen Förderung und erlaubt erfolgreich mitzuarbeiten.          |
| F79                                                  | Mit Hilfe von MuPAD kann ich im Unterricht selbstständiger arbeiten.                                                |
| F80                                                  | Im Abitur sollte man MuPAD verwenden dürfen.                                                                        |
| F81                                                  | Die Arbeit mit MuPAD im Mathematikunterricht macht mir Freude.                                                      |
| F82                                                  | Die graphischen Veranschaulichungen mathematischer Sachverhalte am PC fin de ich hilfreich.                         |
| F83                                                  | Ich glaube, dass in meinem späteren Beruf Mathematik oder Mathematik am Computer nicht von Bedeutung ist.           |
| F84                                                  | Mathematik mit Computerunterstützung finde ich schwerer als normale Ma thematik.                                    |
| F85                                                  | Beim Lösen konkreter Aufgaben überlegt man nicht, sondern probiert erst ein mal, welches Ergebnis MuPAD liefert.    |
| F86                                                  | Beim Arbeiten mit MuPAD denke ich oft nicht mehr nach, ob und wie Aufgaben auch ohne Computer gelöst werden können. |

<sup>14</sup>Daher wird die Fragenliste ab der letzten Frage mit der Nummer 72 aus dem Fragebogen von GRI GUTSCH fortgeführt.

- 
- F87 Ich finde, dass die Arbeit mit MuPAD in den Informatik- und nicht in den Mathematikunterricht gehört.
- F88 Ich habe zu Hause ständig einen Computer zur Verfügung.
- F89 Die Arbeit im Computerraum ist insgesamt erholsam.
- F90 Die künftige Entwicklung erfordert, dass man lernt, Computer zur Lösung mathematischer Probleme einzusetzen.
- F91 Für mich wird der Mathematikunterricht interessanter, wenn man Computer einsetzt.
- F92 Es macht mir keinen Spaß, den Computer zur Lösung von Mathematikaufgaben zu verwenden.
- F93 Ich wünsche mir, dass es Taschenrechner gäbe, die Schüler von umständlichen Rechnungen entlasten (Gleichungen lösen, Graphen zeichnen, Ableitungen berechnen etc.).
- F94 MuPAD kann prinzipiell sämtliche Mathematikaufgaben der Jahrgangsstufe lösen, wenn man es richtig bedient.
- F95 Wer gut rechnen kann, braucht keinen Computer.
- F96 Der Mathematikunterricht wird leichter, wenn man MuPAD einsetzt.
- F97 Die Bedienungsfreundlichkeit von MuPAD und des Computers müssen noch verbessert werden.
- F98 Ich habe häufig Tippfehler bei der Eingabe gemacht.
- F99 Die Antwort (Ausgabe) von MuPAD war oft unverständlich.
- F100 Ich habe MuPAD nicht genügend ausführlich kennen gelernt, um es sicher zu verwenden.
- F101 Ich brauche meist Hilfestellung, wenn ich Aufgaben mit MuPAD lösen will.
- F102 Wenn ich mit MuPAD arbeite, ergeben sich oft Probleme, da ich das System nicht richtig beherrsche.
- F103 Beim Mathematikunterricht mit Computer muss man weniger nachdenken.
- F104 Mir erscheint der Einsatz von Computern im Mathematikunterricht wenig nützlich.
- F105 Wenn Computer mit MuPAD vorhanden sind, müssen Schüler kein so umfangreiches mathematisches Wissen besitzen.
- F106 MuPAD hat mir geholfen, mathematische Begriffe (z. B. Funktion, Matrix, Ableitung) besser zu begreifen.
- F107 Ich habe durch die Arbeit mit MuPAD am PC sehr viel Mathematik gelernt.
- F108 Insgesamt gesehen nützt mir im Mathematikunterricht der Taschenrechner mehr als der PC mit MuPAD.
- F109 PCs mit MuPAD sind insgesamt eine gute Hilfe für den Mathematikunterricht.
- F110 In Mathematikunterricht und für Hausaufgaben sollten nicht grundsätzlich immer PCs mit MuPAD zur Verfügung stehen.
- F111 Es wäre nicht gut, wenn in sämtlichen Mathematikarbeiten (Klausuren) PCs mit MuPAD zur Verfügung stünden.
- 

Tabelle 6.7: Die 39 zusätzlichen Items  $(Fn)_{n=73,\dots,111}$  zur Erhebung des CAS (hier: MuPAD)-Bildes im Mathematikunterricht

Eine tabellarische Auflistung der absoluten Antworthäufigkeiten der untersuchten CAS-Grundkurse auf diese Fragen zu Beginn der Jahrgangsstufe 12 (N=95) bzw. gegen Ende der Schullaufbahn in 13.2 (N=81) findet sich im Anhang. Eine erste explorative Analyse der



Ergebnisse ermöglichen folgende Boxplotsequenzen<sup>15</sup> in Abbildung 6.10.

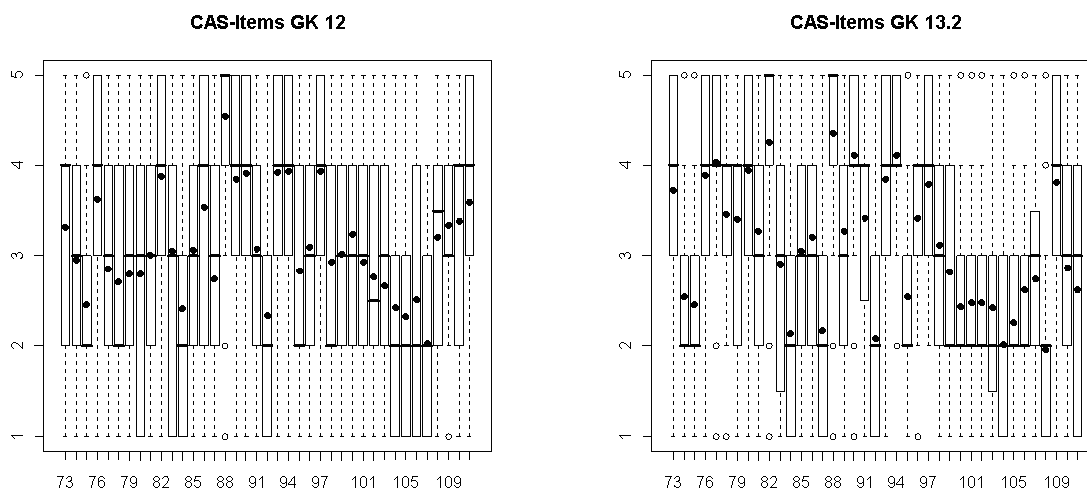


Abbildung 6.10: *Links:* Boxplotsequenz der Items F73 bis F111 in den Grundkursen 12 (N=95). *Rechts:* Boxplotsequenz der Items F73 bis F111 in den Grundkursen 13.2 (N=81). Die Punkte „●“ markieren zusätzlich den jeweiligen Antwort-Mittelwert.

Dieses CAS-Weltbild der Schüler wurde – ausgehend von diesen Boxplots und den zugehörigen Histogrammen – zu folgenden *acht Clustern* verdichtet, welche die wesentlichen Einstellungen zu einem intensiven CAS-Gebrauch im Mathematikunterricht abbilden sollen.

- E:** Wie hoch schätzen Schüler den Experten- bzw. Unterstützungscharakter eines Computeralgebrasystems (CAS) im Mathematikunterricht ein?  
(*Expertensystem-Aspekt*) Als zugehörige Items wurden die 6 Fragen F73, F78, F79, F82, F94, F109 ausgewählt.
- L:** In welchem Maße wird das Lernen von Mathematik durch ein CAS erleichtert?  
(*Lernaspekt bzw. Scaffolding-Aspekt*) Als zugeordnete Items wurden die 4 Fragen F84\*<sup>16</sup>, F96, F106, F107 betrachtet.
- M:** In welchem Umfang sollte aus Schülersicht auf die Nutzung eines CAS im Mathematikunterricht verzichtet werden?  
(*Mathematikprimat*) Die 5 zugehörigen Items sind F74, F87, F95, F104, F108.

<sup>15</sup>Die Boxplots sowie die nachfolgenden statistischen Auswertungen wurden mit der freien Software R Version 2.7.1 erstellt.

<sup>16</sup>Items mit Stern (\*) wurden invertiert gewertet, da sie die negierte Orientierung zum gleichen Aspekt zum Ausdruck bringen.

- I:** Wie erfolgreich hat sich die Werkzeugkompetenz unter der intensiven Nutzung von CAS entwickelt? (*Instrumentalisierungsaspekt*) Als zugehörige 6 Items wurden F75, F98, F99, F100, F101, F102 ausgewählt.
- K:** Wie hoch schätzen Schüler die professionelle Bedeutung und den beruflichen Nutzen einer intensiven CAS-Nutzung im Mathematikunterricht ein? (*Kohärenzaspekt*) Als zugehörige 3 Items wurden F76, F83\*, F90 ausgewählt.
- A:** Wie stark ist der Wunsch nach der Verwendung von CAS in Prüfungssituationen ausgeprägt? (*Assessmentaspekt*) Als zugehörige 4 Items wurden F77, F80, F110\*, F111\* ausgewählt.
- F:** In welchem Umfang löst die Nutzung von CAS positive Gefühle (auch gegenüber der Mathematik) aus? („Freude“- bzw. *Flowaspekt*) Als zugehörige 3 Items wurden F81, F91, F92\* ausgewählt.
- S:** In welchem Umfang wird das CAS ohne begleitende Kontroll- bzw. Denkprozesse benutzt? (*CAS-Schema-Aspekt*) Als zugehörige 4 Items wurden F85, F86, F103, F105 ausgewählt.

### Analyse des Expertensystem-Aspektes im CAS-Weltbild

Folgende Items des Fragebogens operationalisieren den *Expertensystem-Aspekt* in der Dimension E des CAS-Weltbildes, deren transformierter Skalenwert durch die gewichtete Punktsomme  $E := ((F73 + F78 + F79 + F82 + F94 + F109) \cdot \frac{10}{6} - 10) \cdot \frac{5}{4}$  berechnet wird.

|      |                                                                                                             |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F73  | Mit Computerunterstützung kann ich herkömmliche Mathematikaufgaben besser lösen.                            |
| F78  | Der Einsatz von MuPAD bietet lernschwachen Schülern/ innen Förderung und erlaubt erfolgreich mitzuarbeiten. |
| F79  | Mit Hilfe von MuPAD kann ich im Unterricht selbstständiger arbeiten.                                        |
| F82  | Die graphischen Veranschaulichungen mathematischer Sachverhalte am PC finde ich hilfreich.                  |
| F94  | MuPAD kann prinzipiell sämtliche Mathematikaufgaben der Jahrgangsstufe lösen, wenn man es richtig bedient.  |
| F109 | PCs mit MuPAD sind insgesamt eine gute Hilfe für den Mathematikunterricht.                                  |

Tabelle 6.8: Items zur Erhebung des (E)xpertensystem-Aspekts im CAS-Weltbild

Gemäß der sechs E-Items soll das CAS von den Schülern als willkommene Hilfe im Mathematikunterricht eingeschätzt werden. Gefragt wird, ob die selbstständige Anfertigung der geforderten typischen Problemstellungen gefördert wird, Visualisierungen und Lösungshilfen als nützlich angesehen werden und eine Unterstützung schwächerer Schüler geleistet wird. Abbildung 6.11 zeigt die *Befunde* im Vergleich.

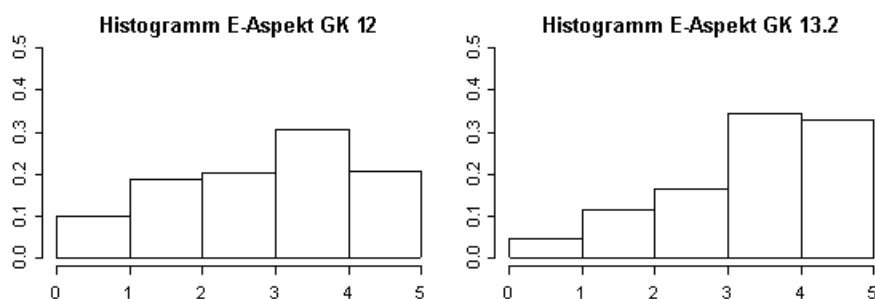


Abbildung 6.11: Prozentuale Verteilung der Antworten auf die Items zum CAS-Expertensystem-Aspekt im Grundkurs. *Links*: zu Beginn des intensiven CAS-Einsatzes in JgSt 12 (N=95). *Rechts*: am Ende der Schullaufbahn in JgSt 13.2 (N=81)

Die Häufigkeitsverteilung der Skalenwerte des Expertensystem-Aspektes im Grundkurs 12 besitzt ihr arithmetisches Mittel mit 28.7 und ihren Median mit 29.2 leicht oberhalb des Skalenmittelpunktes der Indifferenz. Die Häufigkeiten verteilen sich über die gesamte Skala mit leichter Tendenz zur Zustimmung. Ein Fünftel (20.2%) nimmt eine unentschiedene Stellung ein, während fast 39% eine ablehnende und 51% eine eher zustimmende Einschätzung abgaben. Dabei werden auch die Randbereiche - völlige Zustimmung und völlige Ablehnung zu 30% angewählt. Die Frage, inwieweit der Mathematikunterricht von der Nutzung eines CAS als Expertensystem profitiert, wird also im Grundkurs 12 recht unterschiedlich beurteilt und im Schnitt nur leicht über dem Mittelmaß eingeschätzt.

Im Grundkurs 13.2 sind arithmetisches Mittel mit 34.9 und Median mit 35.5 deutlich in den Bereich der Zustimmung verschoben. Zwar nehmen 16% noch eine unentschiedene Stellung ein und 5% lehnen entschieden ab, aber 67% stimmen zu (davon 33% ausdrücklich).

| Expertensystem: | Median: | Mean: | SD:  | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|-----------------|---------|-------|------|------|------|------|------|------|
| E-12gk:         | 29.17   | 28.67 | 9.26 | 10.0 | 18.7 | 20.2 | 30.4 | 20.6 |
| E-13gk:         | 35.48   | 34.88 | 9.78 | 4.5  | 11.6 | 16.4 | 34.6 | 32.9 |

*Interpretation.* Die Befunde für den E-Aspekt im CAS-Weltbild zeigen für die Grundkurse 12 und 13 eine deutliche Verschiebung der Mittelwerte in den Bereich der Zustimmung nach intensiver CAS-Nutzung. Das CAS-Weltbild in Bezug auf die Einschätzung eines CAS als hilfreiches Expertensystem verändert sich in Richtung Zustimmung um eine halbe Standardabweichung (SD).

### Analyse des Lernhilfe-Aspektes im CAS-Weltbild

Folgende Items des Fragebogens operationalisieren den *Lernhilfaspekt* in der Dimension L, deren transformierter Skalenwert durch die gewichtete Punktsumme  $L := ((6 - F84) + F96 + F106 + F107) \cdot \frac{10}{4} - 10) \cdot \frac{5}{4}$  berechnet wird.

---

F84\* Mathematik mit Computerunterstützung finde ich schwerer als normale Mathematik.

|      |                                                                                                         |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F96  | Der Mathematikunterricht wird leichter, wenn man MuPAD einsetzt.                                        |
| F106 | MuPAD hat mir geholfen, mathematische Begriffe (z. B. Funktion, Matrix, Ableitung) besser zu begreifen. |
| F107 | Ich habe durch die Arbeit mit MuPAD am PC sehr viel Mathematik gelernt.                                 |

Tabelle 6.9: Items zur Erhebung des (L)ernhilfsaspekts im CAS-Weltbild

Gemäß der vier L-Items soll das CAS von den Schülern als Hilfe beim Erlernen mathematischer Konzepte beurteilt werden. Gefragt wird zusätzlich, ob der Mathematikunterricht bei (intensiver) Nutzung eines CAS als leichter empfunden wird. Abbildung 6.12 fasst die Beobachtungen zusammen.

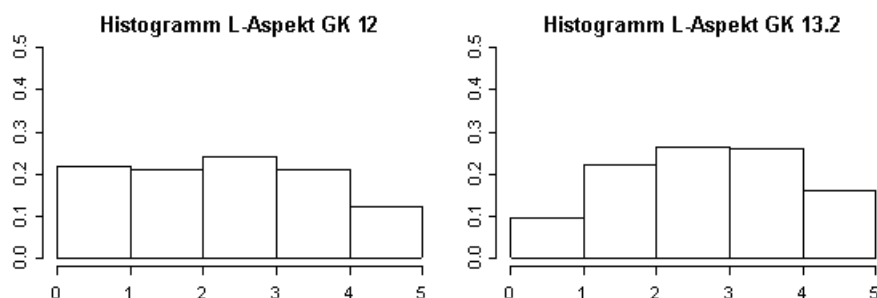


Abbildung 6.12: Prozentuale Verteilung der Antworten auf die Items des L-Aspektes im Grundkurs. *Links*: zu Beginn des intensiven CAS-Einsatzes in JgSt 12. *Rechts*: am Ende der Schullaufbahn in JgSt 13.2

Die Häufigkeitsverteilung der Skalenwerte des Lernhilfe-Aspektes im CAS-Weltbild besitzt im Grundkurs 12 ihr arithmetisches Mittel mit 22.6 und ihren Median mit 21.9 leicht unterhalb des Skalenmittelpunktes 25 der Indifferenz. Die Häufigkeiten verteilen sich über die gesamte Skala mit leichter Tendenz zur Ablehnung. Ein Viertel (24.2%) der Schüler nimmt eine unentschiedene Stellung ein, während 43% eine ablehnende und 32% eine zustimmende Einschätzung abgaben. Die Frage, inwieweit ihr Mathematikunterricht durch Nutzung eines CAS „leichter“ wird, wird also im Grundkurs 12 in der Tendenz abgelehnt.

Im Grundkurs 13.2 sind arithmetisches Mittel mit 27.1 und Median mit 28.1 leicht über den Bereich der Indifferenz verschoben. Zwar nehmen ein Drittel (32%) der Schüler noch eine ablehnende Stellung ein und 10% lehnen entschieden ab, aber 42% stimmen zu (davon 16% vollständig).

| Lernhilfsaspekt: | Median: | Mean: | SD:   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|------------------|---------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| L-12gk:          | 21.88   | 22.60 | 10.76 | 21.7 | 21.0 | 24.2 | 21.0 | 12.1 |
| L-13gk:          | 28.12   | 27.07 | 9.77  | 9.8  | 22.0 | 26.3 | 25.9 | 16.1 |

*Interpretation.* Die Befunde zum Lernhilfsaspekt eines CAS zeigen eine spürbare Verschiebung der Mittelwerte in den Bereich der leichten Zustimmung unter intensiver CAS-Nutzung. Das CAS-Weltbild in Bezug auf die Einschätzung eines CAS als Hilfe beim

Lernen von Mathematik verändert sich dabei in Richtung Zustimmung um mehr als eine halbe Standardabweichung (SD-Wert).

### Analyse des Mathematikprimat-Aspektes im CAS-Bild

Folgende fünf Items des Fragebogens operationalisieren den Aspekt des *Mathematikprimates* in der Dimension **M**, deren transformierter Skalenwert durch die gewichtete Punktsumme  $M := ((F74 + F87 + F95 + F104 + F108) \cdot \frac{10}{5} - 10) \cdot \frac{5}{4}$  berechnet wird.

|      |                                                                                                       |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F74  | Man sollte mehr traditionellen Unterricht im Klassenraum machen und weniger Zeit am PC zubringen.     |
| F87  | Ich finde, dass die Arbeit mit MuPAD in den Informatik- und nicht in den Mathematikunterricht gehört. |
| F95  | Wer gut rechnen kann, braucht keinen Computer.                                                        |
| F104 | Mir erscheint der Einsatz von Computern im Mathematikunterricht wenig nützlich.                       |
| F108 | Insgesamt gesehen nützt mir im Mathematikunterricht der Taschenrechner mehr als der PC mit MuPAD.     |

Tabelle 6.10: Items zur Erhebung des (**M**)athematikprimats im CAS-Weltbild

Die Items des *Mathematikprimates* wollen also u. a. erfragen, ob die Schüler unter bzw. nach den Erfahrungen der (intensiven) Nutzung eines CAS einen „traditionellen Mathematikunterricht mit Tafel und Kreide im Klassenraum“ (statt des Computerraums) bevorzugen und ihnen dabei der (nicht-graphische) Taschenrechner als Hilfe genügt. Gefragt wird auch, ob Rechnen und Denken ohne Computernutzung präferiert werden. Abbildung 6.13 fasst die *Befundlage* zusammen.

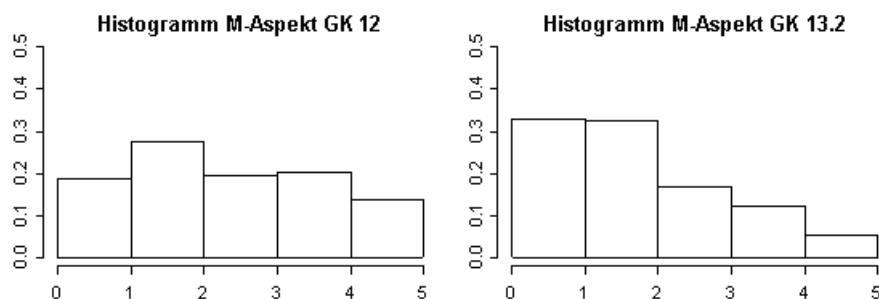


Abbildung 6.13: Prozentuale Verteilung der Antworten auf die Items des Mathematikprimates im Grundkurs. *Links*: vor Beginn des intensiven CAS-Einsatzes in JgSt 12. *Rechts*: am Ende der Schullaufbahn in JgSt 13.2

Die Häufigkeitsverteilung der Skalenwerte des Mathematikprimates im Grundkurs 12 besitzt ihr arithmetisches Mittel mit 22.8 und ihren Median mit 22.5 leicht unterhalb des Skalenmittelpunktes der Indifferenz. Die Häufigkeiten verteilen sich annähernd gleichmäßig

über die gesamte Skala mit einer geringen Tendenz zur Ablehnung. Ein Fünftel (19%) der Schüler nimmt eine unentschiedene Stellung ein, während fast 47% eine eher ablehnende und 34% eine eher zustimmende Einschätzung abgaben. Dabei werden auch die Randbereiche - völlige Zustimmung und völlige Ablehnung - zu 33% angewählt. Ein traditioneller Mathematikunterricht wird also im Grundkurs 12 zwiespältig eingeschätzt.

Im Grundkurs 13.2 sind arithmetisches Mittel mit 15.7 und Median mit 12.5 deutlich in den Bereich der Ablehnung verschoben. Zwar nehmen noch 17% der Schüler eine unentschiedene Stellung ein und 5% stimmen definitiv zu, aber 62% lehnen nun einen traditionell geführten Unterricht ab (davon 33% ausdrücklich).

| Mathematikprimat: | Median: | Mean: | SD:   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|-------------------|---------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| M-12gk:           | 22.50   | 22.85 | 12.13 | 18.8 | 27.5 | 19.3 | 20.4 | 14.0 |
| M-13gk:           | 12.50   | 15.65 | 11.40 | 33.0 | 32.3 | 17.0 | 12.2 | 5.4  |

*Interpretation.* Die Befunde für den Aspekt Mathematikprimat im CAS-Weltbild zeigen für die Grundkurse 12 und 13 eine erhebliche Verschiebung der Mittelwerte in den Bereich der deutlichen Ablehnung eines traditionellen Mathematikunterrichts nach intensiven CAS-Erfahrungen. *Das von intensivem CAS-Gebrauch geprägte Mathematik-Weltbild weicht das Mathematikprimat annähernd um eine volle Standardabweichung auf.*

### Analyse des Instrumentalisationsaspektes im CAS-Weltbild

Folgende Items des Fragebogens operationalisieren den *Instrumentalisationsaspekt* in der Dimension I, deren transformierter Skalenwert durch die gewichtete Punktsumme  $I := ((F75 + F98 + F99 + F100 + F101 + F102) \cdot \frac{10}{6} - 10) \cdot \frac{5}{4}$  berechnet wird.

|      |                                                                                                    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F75  | MuPAD finde ich in der Handhabung zu kompliziert.                                                  |
| F98  | Ich habe häufig Tippfehler bei der Eingabe gemacht.                                                |
| F99  | Die Antwort (Ausgabe) von MuPAD war oft unverständlich.                                            |
| F100 | Ich habe MuPAD nicht genügend ausführlich kennen gelernt, um es sicher zu verwenden.               |
| F101 | Ich brauche meist Hilfestellung, wenn ich Aufgaben mit MuPAD lösen will.                           |
| F102 | Wenn ich mit MuPAD arbeite, ergeben sich oft Probleme, da ich das System nicht richtig beherrsche. |

Tabelle 6.11: Items zur Erhebung des (I)nstrumentalisationsaspektes im CAS-Weltbild

Die sechs I-Items fragen nach der Kompetenz im technisch-instrumentalen Umgang mit dem CAS, der Kompliziertheit von Anfragen an das CAS und Interpretationsproblemen seiner Ausgaben sowie der Abhängigkeit von externen Hilfestellungen (z. B. seitens der Lehrperson). Abbildung 6.14 fasst die *Befunde* zusammen.

Die prozentualen Histogrammwerte verteilen sich über die gesamte Skala mit leichter Tendenz zur Ablehnung einer misslungenen Instrumentalisation. Fast ein Fünftel (18%) der Schüler nimmt eine unentschiedene Stellung ein, 36% stimmen der Einschätzung von Problemen bei der Instrumentalisation zu und 46% lehnen dies eher ab. Die transformierte

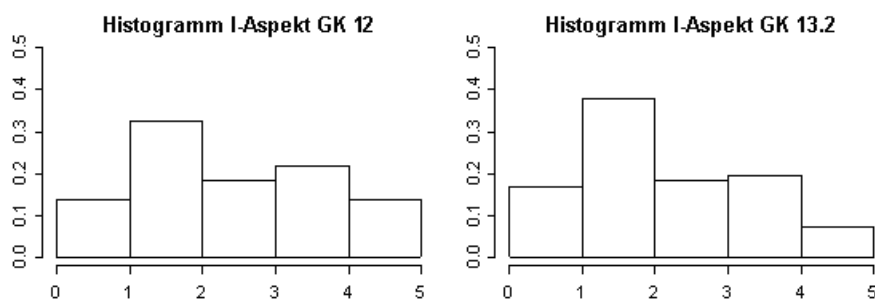


Abbildung 6.14: Prozentuale Verteilung der Antworten auf die Items des I-CAS-Aspektes im Grundkurs. *Links*: zu Beginn des intensiven CAS-Einsatzes in JgSt 12. *Rechts*: am Ende der Schullaufbahn in JgSt 13.2

Häufigkeitsverteilung der Skalenwerte des Instrumentalisationsaspektes im Grundkurs 12 besitzt ihr arithmetisches Mittel bei 23.7 und ihren Median bei 22.9, d. h. in der unteren Nähe zum Skalenmittelpunkt 25 der Indifferenz.

Im Grundkurs 13.2 sind arithmetisches Mittel mit 20.4 und Median mit 18.8 etwas weiter in den Bereich der Ablehnung verschoben. Zwar nehmen unverändert 18% der Schüler eine unentschiedene Haltung ein, aber 55% lehnen diese Einschätzung ab und nur noch 27% stimmen dem zu (davon nur noch die Hälfte 7% ausdrücklich).

| Aspekt: | Median: | Mean: | SD:   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|---------|---------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| I-12gk: | 22.92   | 23.66 | 11.49 | 13.7 | 32.5 | 18.2 | 21.8 | 13.7 |
| I-13gk: | 18.75   | 20.40 | 10.12 | 16.8 | 37.8 | 18.5 | 19.6 | 7.4  |

*Interpretation.* Die Befunde für den Instrumentalisationsaspekt im CAS-Weltbild zeigen für die Grundkurse 12 und 13 trotz der intensiven CAS-Nutzung eine geringfügige Verschiebung des Mittelwertes in den Bereich der Ablehnung von Instrumentalisationsproblemen. Man darf daher annehmen, dass die Schüler leichte, aber tolerierbare Probleme bei einer durchgängigen Nutzung des CAS empfinden.

### Analyse des Kohärenz-Aspektes im CAS-Weltbild

Folgende Items des Fragebogens operationalisieren den *Kohärenz-Aspekt* in der Dimension K, deren transformierter Skalenwert durch die gewichtete Punktschwere  $K := ((F76 + (6 - F83) + F90) \cdot \frac{10}{3} - 10) \cdot \frac{5}{4}$  berechnet wird.

---

|      |                                                                                                              |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F76  | Ein zeitgemäßer Mathematikunterricht muss Schüler/innen mit Werkzeugen wie MuPAD vertraut machen.            |
| F83* | Ich glaube, dass in meinem späteren Beruf Mathematik oder Mathematik am Computer nicht von Bedeutung ist.    |
| F90  | Die künftige Entwicklung erfordert, dass man lernt, Computer zur Lösung mathematischer Probleme einzusetzen. |

---

Tabelle 6.12: Items zur Erhebung des (K)ohärenz-Aspektes im CAS-Weltbild

Gemäß der drei K-Items soll die Bedeutung eines CAS als wichtiges Werkzeug für kommende Generationen („mathemattikkulturelle Kohärenz“) von den Schülern eingeschätzt werden. Dazu wird insbesondere nach der Einschätzung der professionellen Verwendung von CAS zur Lösung mathematischer Probleme gefragt. Abbildung 6.15 fasst die zugehörigen *Befunde* zusammen.

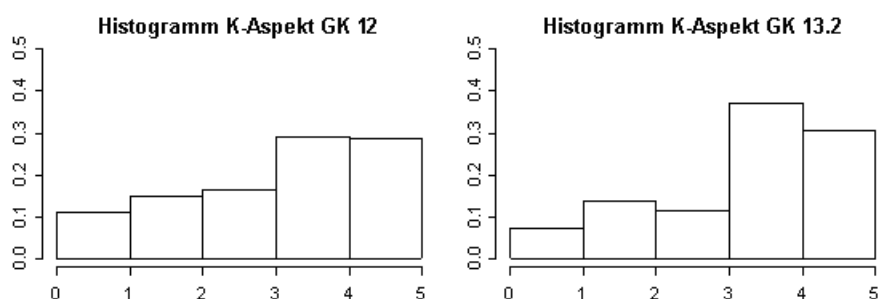


Abbildung 6.15: Prozentuale Verteilung der Antworten auf die Items des Kohärenz-Aspektes im Grundkurs. *Links*: zu Beginn des intensiven CAS-Einsatzes in JgSt 12. *Rechts*: am Ende der Schullaufbahn in JgSt 13.2

Die Häufigkeitsverteilung der transformierten Skalenwerte des Kohärenz-Aspektes im Grundkurs 12 besitzt ihr arithmetisches Mittel mit 31.2 und ihren Median mit 33.3 leicht im Bereich der Zustimmung. Die Häufigkeiten verteilen sich über die gesamte Skala: 17% der Schüler nimmt eine unentschiedene Stellung ein, 26% geben eine ablehnende und 58% eine zustimmende Einschätzung. Dabei werden auch die Randbereiche mit 11% völliger Ablehnung und 29% völliger Zustimmung zur beruflichen Relevanz eines CAS angewählt. Im Grundkurs 13.2 ist das arithmetische Mittel nur leicht erhöht. Es haben 11% der Schüler noch eine unentschiedene Meinung und 21% lehnen eine berufliche Bedeutung ab, aber 69% stimmen einer beruflichen Relevanz eher zu (davon 31% ausdrücklich).

| Kohärenz: | Median: | Mean: | SD:   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|-----------|---------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| K-12gk:   | 33.33   | 31.22 | 11.99 | 11.0 | 14.8 | 16.5 | 29.1 | 28.7 |
| K-13gk:   | 33.33   | 33.55 | 9.95  | 7.4  | 13.6 | 11.4 | 36.9 | 30.7 |

*Interpretation.* Die K-Befunde für die CAS Grundkurse 12 und 13 zeigen nahezu konstante Mittelwerte im Bereich der leichten Zustimmung zur beruflichen Relevanz eines CAS. Das CAS-Weltbild wird durch eine intensive CAS-Nutzung im Mathematikunterricht also keineswegs in Richtung einer verstärkten Erwartung einer professionellen Nutzung von CAS verändert.



### Analyse des Assessment-Aspektes im CAS-Weltbild

Folgende Items des Fragebogens operationalisieren den *Assessment-Aspekt* in der Dimension **A**, deren transformierter Skalenwert durch die gewichtete Punktschätzung  $A := ((F77 + F80 + (6 - F110) + (6 - F111)) \cdot \frac{10}{4} - 10) \cdot \frac{5}{4}$  berechnet wird.

|       |                                                                                                                    |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F77   | Klausuraufgaben sollte man mit MuPAD lösen dürfen.                                                                 |
| F80   | Im Abitur sollte man MuPAD verwenden dürfen.                                                                       |
| F110* | In Mathematikunterricht und für Hausaufgaben sollten nicht grundsätzlich immer PCs mit MuPAD zur Verfügung stehen. |
| F111* | Es wäre nicht gut, wenn in sämtlichen Mathematikarbeiten (Klausuren) PCs mit MuPAD zur Verfügung stünden.          |

Tabelle 6.13: Items zur Erhebung des (**A**)ssessment-Aspekts im CAS-Weltbild.

Die vier A-Items fragen danach, wie die Verfügbarkeit eines CAS von den Schülern in Prüfungssituationen (Klausuren, Abitur) und bei der Anfertigung von Hausaufgaben eingeschätzt wird. Gefragt wird insbesondere, ob das CAS in allen Situationen von Leistungserbringung zur Verfügung stehen sollte. Abbildung 6.16 fasst die Befunde zusammen.

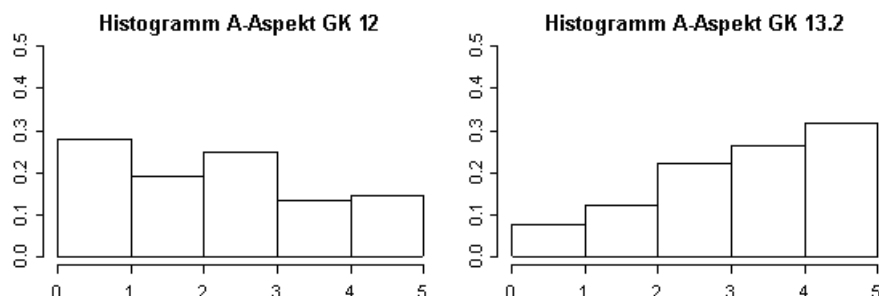


Abbildung 6.16: Prozentuale Verteilung der Antworten auf die Items des Assessment-Aspektes im Grundkurs. *Links*: zu Beginn des intensiven CAS-Einsatzes in JgSt 12. *Rechts*: am Ende der Schullaufbahn in JgSt 13.2

Die Häufigkeitsverteilung der transformierten Skalenwerte des Assessment-Aspektes besitzt im Grundkurs 12 ihr arithmetisches Mittel mit 20.9 und ihren Median mit 21.9 leicht im Bereich der Ablehnung. Ein Viertel (25%) der Schüler nimmt eine indifferente Haltung ein, aber fast die Hälfte (47%) wünscht keine Klausuren/Abiturarbeiten unter Nutzung von CAS. Nur 28% gaben eine eher zustimmende Einschätzung ab.

Im Grundkurs 13.2 sind arithmetisches Mittel mit 32.8 und Median mit 31.3 gravierend in den Bereich der Zustimmung verschoben. Zwar haben 22% noch eine unentschiedene Einstellung und 8% lehnen Assessments mit CAS-Nutzung entschieden ab, aber 58% stimmen nach intensiven Erfahrungen mit dem CAS zu (davon mit 32% ein Drittel ausdrücklich).

| Assessment: | Median: | Mean: | SD:   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|-------------|---------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| A-12gk:     | 21.88   | 20.85 | 13.54 | 27.9 | 19.2 | 25.0 | 13.5 | 14.4 |
| A-13gk:     | 31.25   | 32.79 | 12.19 | 7.6  | 12.3 | 22.0 | 26.3 | 31.8 |

*Interpretation.* Die Befunde für den Assessment-Aspekt im CAS-Weltbild für die Grundkurse 12 und 13 zeigen eine erhebliche Verschiebung des Mittelwertes von überwiegender Ablehnung in den Bereich der mehrheitlichen Zustimmung zu Assessments mit CAS-Nutzung. Das CAS-Weltbild verändert sich dabei um eine volle Standardabweichung in Richtung einer Zustimmung zu CAS-gestützten schriftlichen Leistungsüberprüfungen. Dies spricht für überwiegend positive Erfahrungen der Schüler in Klausuren mit CAS-Unterstützung.

### Analyse des Flow-Aspektes im CAS-Bild

Folgende Items des Fragebogens operationalisieren den *Flow-Aspekt* in der Dimension F, deren transformierter Skalenwert durch die gewichtete Punktschumme  $F := (F81 + F91 + (6 - F92)) \cdot \frac{10}{4} - 10) \cdot \frac{5}{4}$  berechnet wird.

|      |                                                                                        |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| F81  | Die Arbeit mit MuPAD im Mathematikunterricht macht mir Freude.                         |
| F91  | Für mich wird der Mathematikunterricht interessanter, wenn man Computer einsetzt.      |
| F92* | Es macht mir keinen Spaß, den Computer zur Lösung von Mathematikaufgaben zu verwenden. |

Tabelle 6.14: Items zur Erhebung des (F)low-Aspektes im CAS-Weltbild.

Gemäß der drei F-Items soll das CAS von den Schülern als Quelle zusätzlicher positiver Gefühle (Freude, Flow) im Mathematikunterricht eingeschätzt werden. Gefragt wird, ob das Arbeiten mit CAS im Mathematikunterricht Freude bereitet bzw. der Unterricht interessanter wird. Abbildung 6.17 fasst die Befunde zusammen.

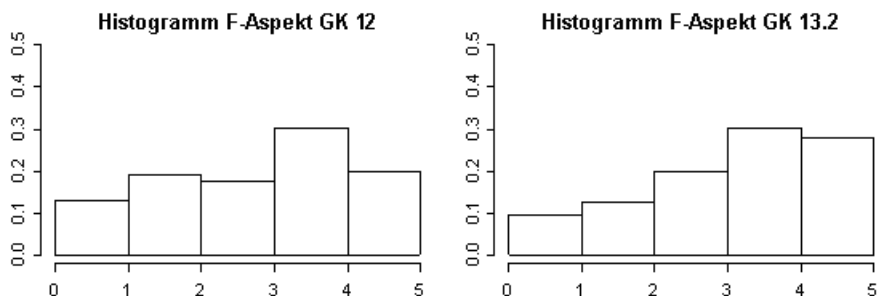


Abbildung 6.17: Prozentuale Verteilung der Antworten auf die Items des Flow-Aspektes im Grundkurs. *Links:* vor Beginn des intensiven CAS-Einsatzes in JgSt 12. *Rechts:* am Ende der Schullaufbahn in JgSt 13.2

Die Häufigkeitsverteilung der Skalenwerte des Flow-Aspektes im Grundkurs 12 besitzt ihr

arithmetisches Mittel mit 28.1 und ihren Median mit 29.2 leicht oberhalb des Skalenmittelpunktes der Indifferenz. Die Häufigkeiten verteilen sich über die gesamte Skala mit leichter Tendenz zur Zustimmung. 18% der Schüler nehmen eine indifferente Haltung ein, 50% stimmen eher zu (darunter ein Fünftel ausdrücklich). Eine ablehnende Einschätzung gaben aber 31% zu erkennen.

Im Grundkurs 13.2 sind arithmetisches Mittel mit 31.6 und Median mit 33.3 in den Bereich der Zustimmung verschoben. Zwar geben weiterhin 20% eine unentschiedene Stellungnahme ab und 23% lehnen einen Zugewinn an Freude bzw. Interesse im Mathematikunterricht ab, aber 58% stimmen zu (davon 28% ausdrücklich).

| Flow-Aspekt: | Median: | Mean: | SD:   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|--------------|---------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| F-12gk:      | 29.17   | 28.11 | 14.07 | 13.1 | 19.0 | 17.7 | 30.4 | 19.8 |
| F-13gk:      | 33.33   | 31.61 | 13.63 | 9.7  | 12.5 | 19.9 | 30.1 | 27.8 |

*Interpretation.* Die Befunde für den Flow-Aspekt im CAS-Weltbild zeigen für die Grundkurse 12 und 13 eine leichte weitere Verschiebung des Mittelwertes um eine halbe Standardabweichung in den Bereich der Zustimmung zu einem Gewinn an Freude bzw. Interesse am Mathematikunterricht bei intensiver CAS-Nutzung.

### Analyse des Schema-Aspektes im CAS-Weltbild

Folgende Items des Fragebogens operationalisieren den *CAS-Schema-Aspekt* in der Dimension **S**, deren transformierter Skalenwert durch die gewichtete Punktsomme  $S := ((F85 + F86 + F103 + F105) \cdot \frac{10}{4} - 10) \cdot \frac{5}{4}$  berechnet wird.

|      |                                                                                                                     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F85  | Beim Lösen konkreter Aufgaben überlegt man nicht, sondern probiert erst einmal, welches Ergebnis MuPAD liefert.     |
| F86  | Beim Arbeiten mit MuPAD denke ich oft nicht mehr nach, ob und wie Aufgaben auch ohne Computer gelöst werden können. |
| F103 | Beim Mathematikunterricht mit Computer muss man weniger nachdenken.                                                 |
| F105 | Wenn Computer mit MuPAD vorhanden sind, müssen Schüler kein so umfangreiches mathematisches Wissen besitzen.        |

Tabelle 6.15: Items zur Erhebung des (S)chema-Aspekts im CAS-Weltbild

Gemäß der vier S-Items soll die schemaorientierte Nutzung des CAS seitens der Schüler eingeschätzt werden. Gefragt wird, ob man bei CAS-Nutzung nach Meinung der Schüler weniger Wissen benötigt als im normalen Mathematikunterricht und ob man dabei weniger nachdenken muss, um eine Lösung zu erhalten. Gefragt wird auch, ob die Schüler trotz der Lösungsfindung mit Hilfe des CAS noch über einen Lösungsablauf ohne Nutzung des CAS reflektieren. Abbildung 6.18 fasst die Befunde zusammen.

Die Häufigkeitsverteilung der Skalenwerte des CAS-Schema-Aspektes im Grundkurs 12 besitzt ihr arithmetisches Mittel mit 23.7 und ihren Median mit 25.0 in etwa im Skalenmittelpunkt 25 der Indifferenz. Die prozentualen Häufigkeiten verteilen sich über die gesamte Skala mit leichter Tendenz zur Ablehnung. 19% der Schüler zeigen eine unentschiedene

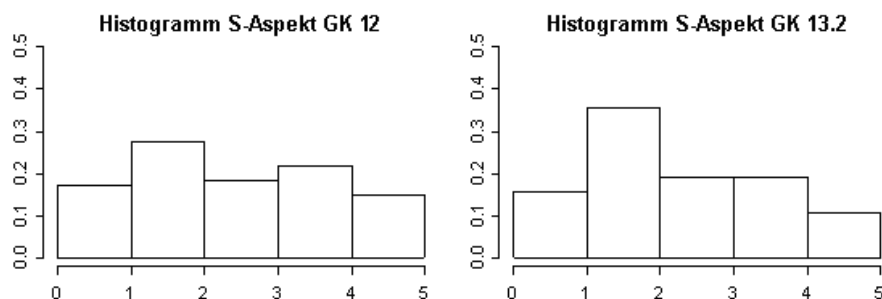


Abbildung 6.18: Prozentuale Verteilung der Antworten auf die Items des (CAS)Schema-Aspektes im Grundkurs. *Links*: vor Beginn des intensiven CAS-Einsatzes in JgSt 12. *Rechts*: am Ende der Schullaufbahn in JgSt 13.2.

Einstellung, 45% haben eine ablehnende und 37% eine eher zustimmende Einschätzung. Im Grundkurs 13.2 sind arithmetisches Mittel mit 21.7 und Median mit 21.9 weiter in den Bereich der Ablehnung verschoben. Zwar nehmen weiterhin 19% eine unentschiedene Stellung ein und 30% stimmen einer tendenziell schematischen Nutzung des CAS zu, aber 51% lehnen eine solche Einschätzung ab (davon 10% ausdrücklich).

| Schema-Aspekt: | Median: | Mean: | SD:   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|----------------|---------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| S-12gk:        | 25.00   | 23.68 | 10.76 | 17.2 | 27.4 | 18.5 | 22.0 | 15.0 |
| S-13gk:        | 21.88   | 21.66 | 10.44 | 15.7 | 35.6 | 19.1 | 19.1 | 10.6 |

*Interpretation.* Die Befunde für den Schemaaspekt im CAS-Weltbild weisen für die Grundkurse 12 und 13 eine weitere Verschiebung des Mittelwertes in den Bereich der Ablehnung schematischer Nutzungsweisen auch bei intensiver CAS-Verwendung auf. *Selbst unter verstärkter CAS-Nutzung nimmt also die Einstellung einer schematischen Verwendung des CAS zur Lösung mathematischer Probleme tendenziell ab.*

### 6.3.2 Performance der CAS-Mathematik-Weltbilder

Die vorangegangene Untersuchung stellte die einzelnen Aspekte des CAS-beeinflussten Mathematik-Weltbildes von Grundkursen der Jahrgangsstufe 12 bzw. 13.2 im Einzelnen dar. Im Folgenden analysiere ich diese acht CAS-Weltbild-Aspekte ( $E, L, M, I, K, A, F, S$ ) noch kurz bezüglich der einzelnen untersuchten Kurse und betrachte abschließend die geschlechtsdifferenzierte Entwicklung des CAS-Weltbildes. Abschließend definieren wir einen *CAS-Belief-Index*, mit dem wir eine weitere *Verdichtung* der acht CAS-Weltbild-Aspekte auf einen charakteristischen Wert vornehmen und so eine globale Performanceaussage der CAS-Mathematik-Weltbilder erhalten.

#### CAS-Weltbilder der konsekutiven Grundkurse

Abbildung 6.19 zeigt die oben bestimmten Mittelwerte (als Punkte) der acht untersuchten CAS-M-Weltbild-Aspekte ( $E, L, M, I, K, A, F, S$ ) aller CAS-Grundkurse 12 (blau) und

aller CAS-Grundkurse 13.2 (rot).

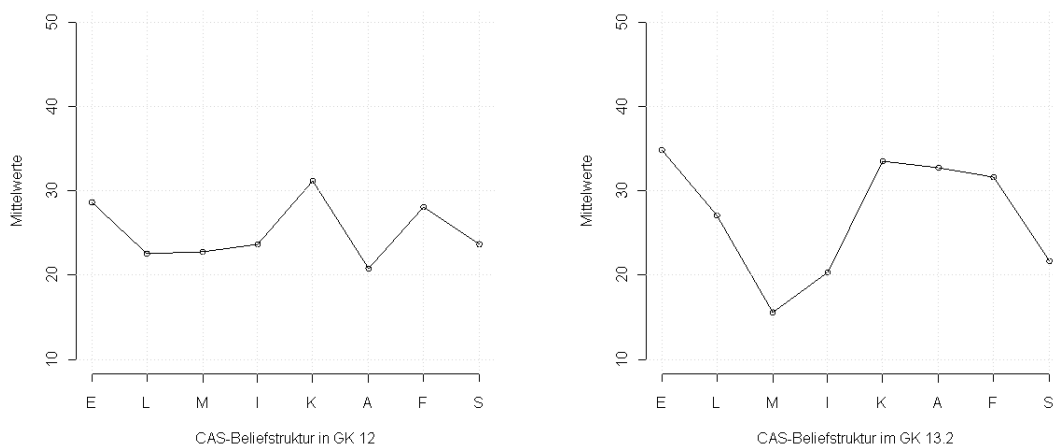


Abbildung 6.19: Performance der CAS-Weltbilder ( $E, L, M, I, K, A, F, S$ ) unter intensiver CAS-Nutzung. *Links*: in Grundkursen der Jahrgangsstufe 12 ( $N=95$ ). *Rechts*: in Grundkursen der Jahrgangsstufe 13.2 ( $N=81$ )

Wir diagnostizieren für die Grundkurse 12 ein Mäandrieren der Mittelwerte um den Indifferenzwert 25. Man erkennt die leichte Ablehnung des (M)athematikprimates und der (A)ssessments mit CAS-Einsatz. Der globale Verlauf ähnelt einer „ $- \wedge \wedge$ “-Kurve. Dagegen weist die CAS-Aspekt-Kurve gegen Ende der Schullaufbahn in 13.2 einen typischen „ $\vee \wedge$ “-Verlauf auf, der die gravierende Veränderung insbesondere im Mathematikprimat und dem Assessment-Aspekt widerspiegelt.

Die folgende Abbildung 6.20 weist diese typische Verlaufsstruktur für alle individuell untersuchten Grundkurse (zusätzlich auch: zweier Leistungskurse) nach. Blautonig sind die Grundkurs-12-CAS-Beliefs und rotfarbig die GK-13-CAS-Beliefs eingezeichnet. Der Leistungskurs 13.2 aus 2008 (Zentralabitur) ist zusätzlich in Grün eingetragen, der mit dem gleichen CAS MuPAD (aber einem eigenen Unterrichtskonzept) geführte Leistungskurs eines Kollegen der gleichen Schule aus dem Jahre 2006 in Magenta.

*Anmerkung.* Ausweislich der Daten zeigen für den Leistungskurs 2008 alle Aspektwerte ( $E, L, M, I, K, A, F, S$ ) gegenüber allen Grundkursen eine 'best performance' auf. Insbesondere weisen der Instrumentalisations-, der Kohärenz-, der Flow- sowie der Schema-Mittelwert wünschenswerte Tendenzen eines Mathematikunterrichtes unter intensiver CAS-Einwirkung auf.

### Genderaspekte in der CAS-Beliefstruktur

Betrachtet man die geschlechtsspezifische Entwicklung des CAS-Beliefvektors, so sind lediglich geringe Abweichungen diagnostizierbar. Zeigt der Zustandsvektor zu Beginn im Grundkurs 12 noch kleine, aber nachweisbare Unterschiede in Instrumentation (die Mädchen zei-

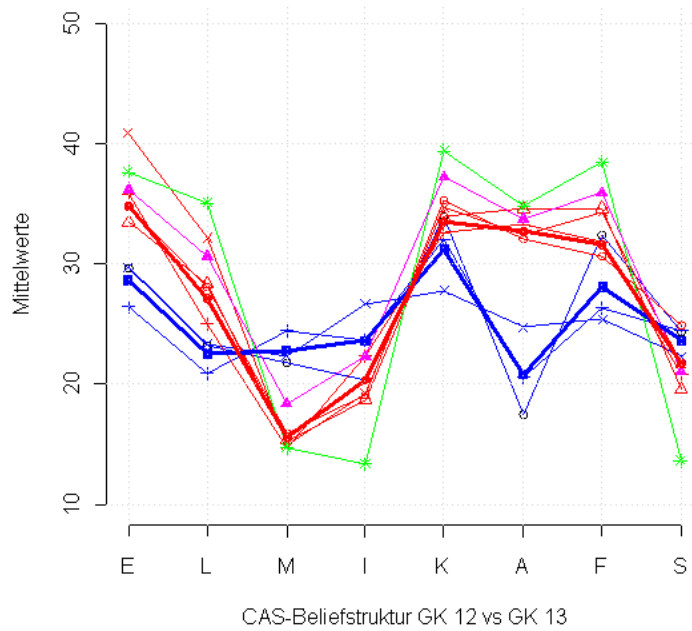


Abbildung 6.20: Zustand (blau) der CAS-Beliefstruktur ( $E, L, M, I, K, A, F, S$ ) in den Grundkursen 12 aus 2000( $\circ$ ), 2001(+), 2004( $\times$ ) sowie die Entwicklung (rot) zu den Grundkursen 2001( $\circ$ ), 2002(+), 2005( $\times$ ) und 2006( $\Delta$ ). Aspektwerte der Leistungskurse aus 2006(\*, magenta) und des LK aus 2008 (\*, grün) unter Zentralabiturbedingungen. Zusätzlich und zum Vergleich eingetragen sind die globalen Verlaufskurven aus Abb. 6.19 (verdickt in blau bzw. rot).

gen eine etwas höhere Zustimmung zu Problemen im Handling), Kohärenz (die Mädchen erwarten im Mittel eine noch geringere Bedeutung von CAS für ihren Beruf) und Flow-Werten (die Mädchen empfinden etwas weniger Freude bei der Nutzung von CAS im Mathematikunterricht als die Jungen) auf, so sind die Werte unter einem unterrichtlich intensiven CAS-Gebrauch am Ende der Jahrgangsstufe 13 angeglichen - erstaunlicherweise schätzen die Mädchen nun aber den Gebrauch von CAS in Prüfungen (A-Wert) etwas höher ein als die Jungen, vgl. Abbildung 6.21.

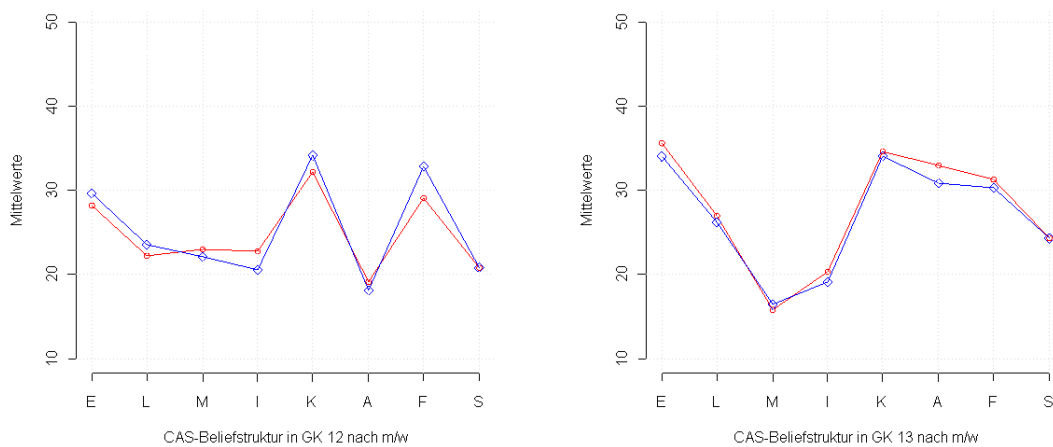


Abbildung 6.21: Differenzierte CAS-Beliefentwicklung von Mädchen (w, rot) und Jungen (m, blau) im Grundkurs. Grundkurse 12:  $N^w=53$ ,  $N^m=23$ . Grundkurse 13:  $N^w=41$ ,  $N^m=18$

## CAS-Beliefindex

Analog zum Mathematik-Beliefindex  $mbi$  (s.o.) sollen abschließend die wechselseitigen Veränderungen im globalen CAS-Weltbild eines Kurses messbar und vergleichbar gemacht werden. Dazu wird einem CAS-Aspektvektor  $(E, L, M, I, K, A, F, S)$  eine kennzeichnende Zahl  $cbi(E, L, M, I, K, A, F, S)$  als *CAS-Belief-Index* zugeordnet.

Dieser Index ist wie folgt definiert: Eine Verschiebung des Mittelwertes der  $(E, L, K, A, F)$ -Komponenten in Richtung 'Zustimmung' soll als *positive* Entwicklung des CAS-Weltbildes gelten, da hierdurch eine Zunahme der expertenhaften professionellen Nutzung für das Lernen von Mathematik mit gesteigerter Freude und erhöhter Akzeptanz des CAS in Prüfungen zum Ausdruck kommt. Eine Verschiebung des Mittelwertes der  $(M, I, S)$ -Komponenten in Richtung 'Ablehnung' wird ebenfalls als *positive* Entwicklung des CAS-Weltbildes gewertet, weil dies eine Abnahme eines rigiden Mathematikprimates sowie reduzierte Instrumentationsprobleme und verringerte schematische CAS-Nutzungen misst.

Dies führt zu einer „vorzeichenbehafteten Distanzfunktion“  $cbi(\cdot, \cdot)$  vom Indifferenzwert

25 auf dem 8-dimensionalen Raum der CAS-Weltbilder. Die folgende (in der Statistik-Software R Version 2.7.1) definierte Funktion `cbi` realisiert diese Überlegungen:

```
> cbi <- function(mw)
 { ((mw[1]-25)+(mw[2]-25)+(25-mw[3])+(25-mw[4])
 +(mw[5]-25)+(mw[6]-25)+(mw[7]-25)+(25-mw[8]))/8+25 }
> # mw1 ist der Mittelwertvektor (E,L,M,I,K,A,F,S) des Gk12 aus 2000
> mw1<-c(29.64744, 23.26389, 21.85185, 20.43269,
 33.95062, 17.47685, 32.40741, 24.30556)
> cbi(mw1) #cas-belief-index
[1] 27.51951
```

Die folgende Tabelle zeigt die CAS-Belief-Indizes der Aspektvektoren von Grundkursen 12<sup>17</sup> der vorliegenden Untersuchung im Vergleich mit den Aspektvektoren von Grundkursen der 13.2.

| <i>cbi</i> : | G00/01 | G01/02 | G04/05 | G06  | alle GK | L06  | L08  |
|--------------|--------|--------|--------|------|---------|------|------|
| 12 (pre):    | 27.5   | 25.5   | 26.2   | NA   | 26.4    | NA   | NA   |
| 13 (post):   | 31.4   | 31.3   | 33.6   | 32.6 | 31.5    | 36.7 | 32.7 |

Abbildung 6.22 visualisiert die zeitliche Entwicklung der CAS-Indizes der Aspektvektoren aller untersuchten Grund- und Leistungskurse.

Gemäß der Wertetabelle und deren graphischer Darstellung *erfahren alle CAS-Grundkurse eine (mehr oder weniger ausgeprägte) positive Entwicklung ihres CAS-Weltbildes* im Verlaufe des Unterrichts von der gelegentlichen Nutzung eines CAS vor Eintritt in die Jahrgangsstufe 12 durch die CAS-intensive Nutzung bis Ende Jahrgangsstufe 13. Aus einer (erwarteten) Position der Indifferenz (Indexwert=25) kommend wird nach Ende der Maßnahme in der Regel der Bereich der gemäßigten Zustimmung eingenommen. *Ursächlich ist dabei nach der obigen Detailanalyse vor allem die wachsende Akzeptanz des CAS als in den Unterricht integriertes Expertenwerkzeug und seiner Wertschätzung als Hilfe in Prüfungssituationen. Der 'Spaßfaktor' (F-Aspekt) oder die Lernunterstützung (L-Aspekt) spielen dabei nur eine Nebenrolle.*

Zusammenfassend kann man daher folgern, dass ein langwährender CAS-intensiver Mathematikunterricht zu einer positiv gefärbten Einstellung gegenüber dem CAS führt und vermutlich dabei das begleitende Mathematik-Weltbild ebenfalls positiv beeinflusst.

<sup>17</sup>NA (not available) bezeichnet (wie in R) nicht vorliegende Daten.



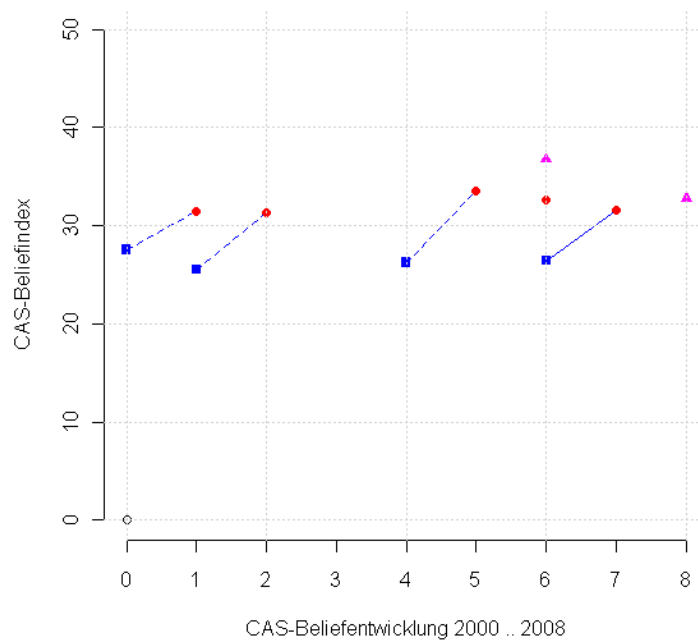


Abbildung 6.22: zeitliche Entwicklung der CAS-Belief-Indizes der CAS-Aspektvektoren ( $E, L, M, I, K, A, F, S$ ) von Grund- und Leistungskursen bei intensiver CAS-Nutzung im Mathematikunterricht. Blauer Punkt: GK 12. Roter Punkt: konsekutiver GK 13. Fortgeführte Kurse mit gleicher Population sind gestrichelt verbunden. Magenta: Leistungskurse in Jahrgangstufe 12 bzw. 13. Die x-Achse markiert die jeweilige Jahreszahl 200x.



**Teil IV**  
**Ausblick**



## § 7

# Epilog – Resumé, Ausblick und Empfehlungen

Abschließend werden die wesentlichen Befunde und Forschungsergebnisse zusammengestellt und einige Empfehlungen für weitere Untersuchungen gegeben.

## 7.1 Resumé

Die **APOS-Theorie** als lerntheoretische Folie erwies sich sowohl zur interpretierenden Analyse der Daten als auch zur Konstruktion der Lernpfade mit Hilfe genetischer Dekompositionen (hypothetischer Lerntrajektorien) als erfolgreich. Die gelegentliche Aufnahme von Einsichten der *concept definition* vs. *concept image* Dichotomie von TALL und VINNER als zusätzliche Erklärungskonzepte war genauso hilfreich wie die Modellierungssicht der RME.<sup>1</sup>

Die damit designten *M<sup>2</sup>AKE-Lernumgebungen*, die z. T. als CAS-Mikrowelten (generic organizer) mit semiautomatischen Prozeduren (wie dem GAUSS-JORDAN-Algorithmus) vorliegen oder Wissensmodule (wie z. B. Begriffsbildungen zum Skalarprodukt) präsentierten, führten – gemessen an den Ergebnissen im Zentralabitur bzw. der Beliefontwicklungen – zu einer erfolgreichen Performance der Lerngruppen. Unter den dabei eingesetzten Design-Prinzipien eines CAS-intensiven, epistemologisch orientierten Mathematikunterrichts erwiesen sich die drei Prinzipien der virtuellen Erfahrungsverankerung (CAS-Experimente), der strukturierten Repräsentation mathematischen Wissens in Modulen sowie das SONG-Prinzip (Window Shuttling) als besonders fruchtbar.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Auch unter dem Aspekt der limitierten kognitiven Ladung wurde diese kompakte APOS-Lerntheorie von ausgebildeten und erfahrenen Lehrer(inne)n im Rahmen des sog. „Sprintstudiums Mathematik“ gut aufgenommen und bei der Konstruktion von Lernumgebungen bedacht. Auch als lerntheoretisches Fundament zum dort eingesetzten Lehrwerk *Analysis verständlich unterrichten* von DANKWERTS und VOGEL war sie m. E. besonders geeignet. Insbesondere die dort wiederholt erkennbare Produkt-Prozess-Dialektik ist aus der APOS-Perspektive bekannt und damit vertieft interpretierbar.

<sup>2</sup>Allein schon die konsequente Nutzung des SONG-Prinzips – wonach jedes einzuführende mathematische Konzept simultan symbolisch, als versprachlichtes (verdichtet pointiertes) Motto, CAS-numerisch

**Die identifizierten Verständnisbarrieren** in der Linearen Algebra konnten durch die Konstruktion geeigneter CAS-Lernumgebungen abgemildert werden. Als Explikationsfeld und geometrische Verständigungssprache zur Konstruktion stabiler und verallgemeinerungsfähiger (Grund-)Vorstellungen dient eine CAS-Mikrowelt, in der grundsätzlich die kanonische Basis  $(e_1, e_2, \dots)$  sowie die affinen Basispunkte  $(E_1, E_2, \dots)$  vorgezeichnet sind und in der alle Vektoren „Orts“-vektoren sind, die konsequent am Nullpunkt ansetzen.<sup>3</sup> Insbesondere zur didaktischen Therapie der Chamäleonbarriere sollte möglichst lange die elongierte Linearkombinationsnotation  $x \cdot E_1 + y \cdot E_2$  der Physiker<sup>4</sup> mit ihrer anschaulichen Interpretationsmöglichkeit anstelle der kompakten matrixorientierten Tupelnotation  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  der Mathematiker unterrichtlich verwendet werden, bevor die abstrahierende Identifikation  $x \cdot E_1 + y \cdot E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  vollzogen wird. Beides war im CAS realisierbar.

**Das fachdidaktische Design der CAS-Parcours** orientierte sich an Empfehlungen der Fachcommunity, insb. an Ratschlägen zur radikalen Reduzierung des Curriculums nach ROGALSKI. Die dazu von mir vorgenommene Orientierung an *epistemologischen Wachstumsringen*, die sich natürlich längs der beobachtbaren reichhaltigen Phänomene in Bezug auf die Lösungsvielfalt und die Geometrie von linearen Gleichungssystemen ausprägte, erwies sich als äußerst tragfähig. Insbesondere mit Blick auf die anlaufende Verkürzung der Schulzeit („G8“) erscheint die oben beschriebene Beobachtung, dass ein überraschender Erfolg im Zentralabitur auch mit einem Dutzend gezielt ausgewählter, knapper „Anker“-CAS-Sheets<sup>5</sup> erzielbar war, lässt eine noch konsequentere Reduzierung auf mathematische Kernbegriffe und zugeordnete CAS-Konzepte möglich erscheinen.

Unter den *stoffdidaktischen Innovationen* der vorliegenden Untersuchung erwies sich die didaktische Rekonstruktion und Elementarisierung der Pseudoinverse (nebst ihrer Anwendungen) als besonders fruchtbar. Rückblickend scheint aber angeraten, die Moore-Penrose-Inverse erst nach dem Studium des Skalarproduktes aus einer Analogieüberlegung aus der 2-dimensionalen Projektionsformel zu destillieren. Erst danach sollte sich die Matrixdarstellung von Projektionen mit Hilfe der Pseudoinversen und ggfs. eine Darstellung der Lösungsmengen unter- und überbestimmter linearer Gleichungssysteme mit Pseudoinversen anschließen.

**Die Untersuchung der epistemologischen Überzeugungsstrukturen** im Umkreis der dritten zentralen Forschungsfrage erbrachte in Bezug auf das Mathematikbild von Grundkurschülern wichtige neue Befunde.

So zeigte sich ein verändertes Mathematik-Weltbild in der *Formalismus-Dimension*. Ma-

---

und graphisch-visuell (ggfs. animiert) der Lernperson repräsentiert werden sollte – führte im oben zitierten Sprintstudium sowohl bei der moderierten Ergänzung der Vorlesung als auch in der Didaktikveranstaltung zu substanziellen Erkenntnisgewinnen und zu verbesserten Prüfungsergebnissen.

<sup>3</sup>Auf die Explizierung affiner Sachverhalte mit Hilfe baryzentrischer Koordinaten in lokalen Koordinatensystemen kann man dann ggfs. verzichten.

<sup>4</sup>die dafür oft  $x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$  schreiben

<sup>5</sup>die im unmittelbaren zeitparallelen Nachvollzug („Duplizierung“) zur handgelösten Problemstellung bearbeitet wurden

thematik besitzt für die Mehrheit der Schüler im CAS-Grundkurs (natürlich unter Einfluss der oben konstruierten CAS-Lernarrangements) 13 nurmehr einen *abgeschwächten formalen Aspekt*: Die Indifferenz überwiegt mit 39% und ist damit dreimal so hoch wie in der Kontrollgruppe. *Der F-Mittelwert ist um eine volle Standardabweichung in Richtung Ablehnung verschoben.*

Bezüglich der Schema-Dimension zeigt sich am Ende des CAS-gestützten Grundkurses, dass die Indifferenz mit 32% um ein Drittel höher ausfällt als in der Kontrollgruppe der GRIGUTSCH-Untersuchung, die völlige Zustimmung auf ein Drittel gesunken und die relative Zustimmung auf 53% gestiegen ist. Mathematik besitzt für die Mehrheit der Schüler im CAS-Grundkurs 13 einen erkennbaren, aber *weniger extremen Schema-Aspekt*.

Ein gravierend verändertes Mathematik-Weltbild ließ sich in der Prozess-Dimension nachweisen: Indifferent äußern sich 26% und damit fast die Hälfte weniger Schüler als in der Kontrollgruppe, nur ca. 9% der Schüler lehnen noch einen Prozess-Aspekt in der Mathematik ab. Für ca. 50% der Schüler im CAS-Grundkurs 13 besitzt die Mathematik nunmehr einen deutlich prozesshaften Aspekt. *Der P-Mittelwert zeigt sich um ca. eine volle Standardabweichung in Richtung Zustimmung verschoben.*

Ausweislich der Befundlage zeigte sich auch ein deutlich verändertes Mathematik-Weltbild in der Anwendung-Dimension: Die Anwendung-Verteilung erweist sich in den CAS-Grundkursen 13 ausgeglichener und normalverteilt. Die Zustimmung überwiegt mit 38% und ist damit wesentlich höher als in der Kontrollgruppe. Nur noch ca. 15% der Schüler lehnen einen Anwendung-Aspekt ab. Aber für 50% der Schüler ist der Anwendung-Aspekt ein wesentliches Element des Mathematikbildes. *Der A-Mittelwert zeigt sich um eine halbe Standardabweichung in Richtung Normalverteilung verschoben.*

Lediglich die *Verteilung der rigiden Schemaorientierung* erweist sich in den CAS-Grundkursen 13 wenig verändert. Indifferenz überwiegt mit 39%. Zwar lehnen ca. 27% der Schüler einen Aspekt der rigiden Schemaorientierung ab, aber auch 34 % der Schüler sehen in der rigiden Schemaorientierung ein wesentliches Element ihres Mathematikbildes. *Mathematik besitzt auch für die Mehrheit der Schüler im CAS-Grundkurs 13 eine mittelmäßige rigide Schemaorientierung.* Der R-Mittelwert bleibt annähernd unverändert. Man darf annehmen, dass die gedankliche Ausrichtung auf die Abiturklausuren die wachsende Ausprägung der Extreme verursachte.

Die *Längsschnittanalyse der Mathematik-Weltbilder* lässt zusätzlich erkennen, dass sich die (F)ormalismus-Komponente im CAS-bestimmten Mathematikweltbild sowohl in Bezug auf die Kontrollgruppe als auch im Laufe der Zeit zunehmend in Richtung Indifferenz verschiebt und sich damit abschwächt. Die (S)chema-Komponente bleibt unter CAS-Einfluss zunächst annähernd unverändert, verschiebt und konzentriert sich aber leicht in Richtung Indifferenz gegen Ende der Schulzeit. Die (P)rozess-Komponente wächst unter CAS-Einfluss im Grundkurs 12 zunächst massiv in Richtung Zustimmung und verdichtet sich leicht im Grundkurs 13.2. Die (A)nwendung-Komponente wächst von Indifferenz zunächst leicht an und verstärkt sich unter dem intensivierten Einsatz von CAS im Rahmen der linearen Algebra nochmals in Richtung Zustimmung in der 13.2. Die (R)igide-Schemaorientierung bleibt im Bereich der Indifferenz (Kontrollgruppe) auch unter CAS-Einfluss im Laufe der Zeit annähernd konstant. Zusammenfassend sind die stärksten Auswirkungen des inten-

siven CAS-Einsatzes in positiven Veränderungen der (F,P,A)-Komponenten im Weltbild diagnostizierbar.

Der entscheidende Befund ist, dass sich das Mathematik-Weltbild durch einen CAS-intensiven Mathematikunterricht in linearer Algebra in den Dimensionen (F,P,A) um ca. eine Beliefindex-Verdoppelung verbessern lässt.

**Die Beliefaspekte in Bezug auf das CAS** wurden in acht Faktoren gebündelt: dem (E)xpertensystem-Aspekt, dem (L)ernhilfsaspekt, dem (M)athematikprimat, dem (I)nstrumentalisationsaspekt, dem (K)ohärenzaspekt, dem (A)ssessment-Aspekt, dem (F)low-Aspekt sowie dem (S)chema-Aspekt. Die Messwerte wurden jeweils zu Beginn von K12 sowie am Ende von K13 erhoben.

Die Befunde für den *Expertensystem-Aspekt* im CAS-Weltbild zeigen für die Grundkurse 12 und 13 eine deutliche Verschiebung der Mittelwerte in den Bereich der Zustimmung nach intensiver CAS-Nutzung. Das CAS-Weltbild in Bezug auf die Einschätzung eines CAS als hilfreiches Expertensystem verändert sich in Richtung Zustimmung dabei um eine halbe Standardabweichung.

Die Verteilung zum *Lernhilfsaspekt* eines CAS zeigt eine spürbare Verschiebung der Mittelwerte in den Bereich der leichten Zustimmung unter intensiver CAS-Nutzung. Das CAS-Weltbild in Bezug auf die Einschätzung eines CAS als Hilfe beim Lernen von Mathematik verändert sich dabei in Richtung Zustimmung um mehr als eine halbe Standardabweichung. Das *Mathematikprimat* im CAS-Weltbild zeigt eine erhebliche Verschiebung der Mittelwerte von K12 nach K13 in den Bereich der deutlichen Ablehnung eines traditionellen Mathematikunterrichts nach intensiven CAS-Erfahrungen. Das von intensivem CAS-Gebrauch geprägte CAS-Mathematik-Weltbild weicht das Mathematikprimat annähernd um eine volle Standardabweichung auf.

Die Befunde für den *Instrumentalisationsaspekt* im CAS-Weltbild weisen nach der intensiven CAS-Nutzung nur eine geringfügige Verschiebung des Mittelwertes in den Bereich der Ablehnung von Instrumentalisationsproblemen. Man darf daher annehmen, dass die Schüler in K12 und K13 durchgängig leichte, aber tolerierbare Probleme bei einer langfristigen Nutzung des CAS erfahren.

Der *Kohärenz-Aspekt* weist nahezu konstante Mittelwerte im Bereich der leichten Zustimmung zur beruflichen Relevanz eines CAS auf. Das CAS-Weltbild wird durch eine intensive CAS-Nutzung im Mathematikunterricht also keineswegs in Richtung einer verstärkten Erwartung einer professionellen Nutzung von CAS verändert.

Der *Assessment-Aspekt* im CAS-Weltbild zeigt eine erhebliche Verschiebung des Mittelwertes von überwiegender Ablehnung in K12 in den Bereich der mehrheitlichen Zustimmung zu Assessments mit CAS-Nutzung in K13. *Das CAS-Weltbild verändert sich dabei um eine volle Standardabweichung in Richtung einer Zustimmung zu CAS-gestützten schriftlichen Leistungsüberprüfungen. Dies spricht für überwiegend positive Erfahrungen der Schüler in Klausuren mit CAS-Unterstützung.*

Der *Flow-Aspekt* im CAS-Weltbild zeigt für die Grundkurse 12 und 13 eine leichte Verschiebung des Mittelwertes um eine halbe Standardabweichung in den Bereich der Zustimmung



zu einem Gewinn an Freude bzw. Interesse am Mathematikunterricht bei intensiver CAS-Nutzung.

Der *Schemaaspekt* im CAS-Weltbild weist für K12 nach K13 eine Verschiebung des Mittelwertes in den Bereich der Ablehnung schematischer Nutzungsweisen bei intensiver CAS-Verwendung auf. *Selbst unter verstärkter CAS-Nutzung nimmt also die Einstellung einer schematischen Verwendung des CAS zur Lösung mathematischer Probleme tendenziell ab.*

In Bezug auf *Genderspekte in der CAS-Beliefstruktur* waren keine gravierenden Unterschiede nachweisbar. Allerdings schätzen die Mädchen am Ende der Schulzeit aber den Gebrauch von CAS in Prüfungen (A-Wert) etwas höher ein als die Jungen.

Nach den obigen Befunden erfahren alle CAS-Grundkurse eine (mehr oder weniger ausgeprägte) positive Entwicklung ihres CAS-Weltbildes im Verlaufe des Unterrichts von der gelegentlichen Nutzung eines CAS vor Eintritt in die Jahrgangsstufe 12 durch die CAS-intensive Nutzung bis Ende Jahrgangsstufe 13. Aus einer Position der Indifferenz (Indexwert=25) kommend wird nach Ende der Maßnahme in der Regel der Bereich der gemäßigten Zustimmung eingenommen. Ursächlich scheint dabei vor allem die wachsende Akzeptanz des CAS als in den Unterricht integriertes Expertenwerkzeug und seiner Wertschätzung als Hilfe in Prüfungssituationen. Der „Spaß“-faktor (F-Aspekt) oder die Lernunterstützung (L-Aspekt) spielen lediglich eine untergeordnete Nebenrolle.

Zusammenfassend kann man daher feststellen, dass ein langfristiger CAS-intensiver Mathematikunterricht – zumindest längs der aufgezeigten Konzeption – zu einer positiv gefärbten Einstellung gegenüber dem CAS führt und vermutlich dabei das begleitende Mathematik-Weltbild ebenfalls positiv aufhellt.

## 7.2 Ausblick und Empfehlungen

**Weitergehende Reduzierungen im Hinblick auf G8** scheinen möglich und sinnvoll. Will man zeitintensive Instrumentationsprozesse auf Schülerseite vermeiden, so bietet sich einerseits die radikale Beschränkung auf wenige CAS-Befehle und die Ausgabe weniger zentraler CAS-Sheets zur Konzeptprägung und zur Konzeptvisualisierung an. In diesem Falle würde man stärker längs eines eingeführten Lehrwerks unterrichten und auf die Konstruktion eines lehrbuchunabhängigen CAS-Parcours verzichten. Davon bleibt das Prinzip des inkrementellen CAS-Spracherwerbs unberührt. Lediglich Anzahl und Umfang der Mikrowelten, der CAS-Wissensmodule und der Semiautomatismen müsste revidiert werden. Sehr bewährt hat sich allerdings z. B. die semiautomatische matrixorientierte Lösung von LGS mit Hilfe von Elementarmatrizen. Statt der Nutzung der symbolisierten EM-Funktion und deren Studium in einer CAS-Mikrowelt, kann man  $EM(2, 1, 2, 2)$  auch direkt als  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  konstruieren und die händische Lösung durch Einkopieren der konkreten Umformungsmatrizen begleiten. Das mag bereits im Falle dreidimensionaler Matrizen unhandlich und unübersichtlich werden, wäre aber für wenige Stunden der Konzeptbildung des GAUSS-JORDAN-Algorithmus tolerierbar. Jedenfalls könnte man so insbesondere die inverse Matrix konstruieren und den Lösungsprozess bei unterbestimmten LGS bis zur Treppennormal-

form vorantreiben.

**Eine minimal-invasive „QuasiCAS“-Nutzung** in Gestalt einer *radikalen Auslagerung des Numerischen* gelingt aktuell (Stand: Herbst 2010) auch durch Verwendung *matrixenorientierter Taschenrechner* wie z. B. dem CASIO FX-991 ES mit einer  $31 \times 96$  punktigen vierzeiligen und „zweidimensionalen“ Flüssigkristallanzeige<sup>6</sup>. Dieser Rechner arbeitet mit einer internen Genauigkeit von 15 Stellen und erlaubt eine natürliche Eingabe mathematischer Terme mit einer Korrekturmöglichkeit in der aktuellen Zeile (oder einer Zeile im „Rechnungsrückrufr Speicher“) mittels einer [DEL]-Taste. Man kann leicht z. B. Wertetabellen von Funktionstermen erstellen, nichtlineare Gleichungen (näherungsweise) lösen, *bestimmte* Integrale und Ableitungen an *bestimmten* Stellen approximativ berechnen.

Zudem hat man einen sog. Vektor- und einen Matrix-Modus zur Verfügung. Im **Matrix-Modus** stehen drei Matrixspeicher („Variablen“) **MatA**, **MatB** und **MatC** für die Dateneingabe zur Verfügung sowie ein Antwortspeicher **MatAns**. Man kann maximal  $3 \times 3$ -Matrizen eingeben und *numerisch* alle Grundrechenarten für Matrizen ausführen sowie die Determinante (**Det**), die Transponierte (**Trn**), die Inverse ( $\cdot \cdot^{-1}$ ) sowie das Quadrat ( $\cdot \cdot^2$ ) bzw. den Kubus ( $\cdot \cdot^3$ ) einer Matrix berechnen.

Der **Vector-Modus** stellt drei Vektorspeicher („Variablen“) **VctA**, **VctB** und **VctC** für die Dateneingabe (von Zeilenvektoren) zur Verfügung sowie einen Antwortspeicher **VctAns**. Man kann maximal  $3 \times 1$ -Vektoren eingeben und numerisch alle Grundrechenarten ausführen sowie das Skalarprodukt (**Dot**), das Kreuzprodukt ( $\times$ ) sowie die euklidische 2-Norm (**Abs**) eines Vektors berechnen.

Ein solcher *numerischer nicht-programmierbarer* (also: non-CAS) „Matrix“-TR bietet daher m. E. ebenfalls die Möglichkeit, die komplette Elementargeometrie der Anschauungsebene und des Anschauungsraumes auf Schulniveau mit erheblicher Reduzierung der Rechenlast zu betreiben.

*Beispielsweise* kann man den Abstand der beiden windschiefen Geraden  $g : X = [1, -1, 0] + r[4, 6, -1]$  und  $h : X = [-10, -1, -1] + s[-4, -5, 2]$  durch die Explizit-Lösung eines überbestimmten LGS (Ausgleichsproblem) mit Hilfe der Pseudoinversen wie folgt berechnen (was auf Schulniveau eine hochgradig rechenintensive Aufgabe ist und ohne CAS bisher nicht ökonomisch zu bewältigen war):

*Lösung* mit dem CASIO FX-991 ES im MAT-Modus:

$$\left[ \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \right] \rightarrow \text{MatA}$$

$$\left[ \begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right] \rightarrow \text{MatB}$$

$$\left[ (\text{Trn}(\text{MatA}) \times \text{MatA})^{-1} \times \text{Trn}(\text{MatA}) \times \text{MatB} \right] \rightarrow \text{MatAns}$$

$$\left[ \text{MatA} \times \text{MatAns} - \text{MatB} \right] \rightarrow \text{MatAns}$$

$$[7 \quad -4 \quad 4]$$

<sup>6</sup>aktueller Klassensatzpreis ca. 20 EUR pro TR

$$[\text{Trn}(\text{MatAns}) \times \text{MatAns}] \quad [81]$$

$$[\sqrt{(81)}]$$

9

Die Lösungszeit incl. aller Eingaben betrug nur ca. 4 min.<sup>7</sup>

Ein solcher Matrixrechner gestattet somit einen erheblichen Performancegewinn durch die Auslagerung des *numerisch* Operativen, nicht möglich ist jedoch die Auslagerung des *symbolisch* Operativen: Es ist keine freie Bezeichnerwahl implementiert. Verwendet man parallel zu einem solchen Matrixrechner ein freies CAS (wie z. B. EULER/MAXIMA) u. a. zur Anfertigung zusätzlicher Visualisierungen, so ist die Frage, wie sich ein solcher *minimalinvasiver CAS-Gebrauch in Kooperation mit einem matrixorientierten Numeriktaschenrechner* auswirkt.

Ich formuliere daher folgende anschließende

**Forschungshypothese:** Ein numerischer *matrixorientierter* Taschenrechner zusammen mit einem *minimalinvasiven* (also auf das didaktisch sinnvollste reduzierten) punktuellen CAS-Gebrauch gestattet einen matrixorientierten Grund- oder Leistungskurs in Linearer Algebra/Analytischer Geometrie gemäß der hier vorgestellten didaktischen Konzeption und führt zu einer mindestens gleich guten Performance der Kohorten in Bezug auf Assessmentleistungen und Befehlsprägungen.

Zur Untersuchung dieser Forschungshypothese bietet sich an, die didaktische Wirkung von Matrix-Taschenrechnern gezielt zu untersuchen. Obiger Matrixrechner löst nur eindeutig lösbar LGS, reagiert aber sowohl bei unterbestimmten als auch bei nicht-lösbaren LGS lediglich mit einer gleichartigen ERROR-Anzeige. Dies ergibt ebenfalls interpretationswürdige Einstiege zu den oben beschriebenen epistemologischen Wachstumsringen. Unterbestimmte LGS können matrixorientiert durch Linksmultiplikationen mit konkreten Elementarmatrizen gelöst werden, s. o.<sup>8</sup>

Daher stellen sich u. a. folgende Einzelfragen:

- Unterstützen Matrixtaschenrechner linear-algebraische Konzeptbildungsprozesse in ähnlicher Weise wie ein CAS? Wie wirkt sich das Fehlen symbolischer Operationen bzw. Abstraktionen zu CAS-Funktionen aus? Sind „Merkblätter“<sup>9</sup> als Wissenspeicher ein adäquater Ersatz für CAS-Wissensmodule?

<sup>7</sup>Zum Vergleich betrug die Lösungszeit mit dem (MatLAB-ähnlichen) Numerik-Tool EULER Version 8.6/2009 nur ca. 2 min und bestand aus folgenden beiden Inputzeilen:

```
> A=[4,4;6,5;-1,-2] B=[-11; 0; -1]
```

```
> norm(A.inv(A'.A).A'.B - B)
```

<sup>8</sup>Also:  $A \cdot X = B$  wird gelöst durch Iteration von  $\text{MatC} \times \text{MatA} \rightarrow \text{MatA}_{\text{neu}}$  (Ergebnis zwischenskopieren nach A) sowie  $\text{MatC} \times \text{MatB} \rightarrow \text{MatB}_{\text{neu}}$  (Ergebnis zwischenskopieren nach B), wobei  $\text{MatC}$  jeweils eine geeignete Elementarmatrix darstellt.

<sup>9</sup>Allerdings könnte ein mit dem Lernzuwachs ständig aktualisiertes selbst verfasstes Merkblatt in Klausuren als Wissensmodul auch Bezeichner zur Konzeptbenennung aufführen, z. B.

$\text{Proj}(A,B) : \text{MatA} \times (\text{Trn}(\text{MatA}) \times \text{MatA})^{-1} \times \text{Trn}(\text{MatA}) \times \text{MatB}$  („Projektion von B auf A“)

Damit ist ggfs. ein sinnvolles Outsourcing des Memorativen und eine Reduzierung des Workload gewährleistet.

- Wie sind die MAKE-Lernumgebungen<sup>10</sup> für eine minimalinvasive<sup>11</sup> CAS-Nutzung anzupassen? Welche à point Ankersheets wirken prophylaktisch gegen die Ausprägung der aufgezeigten epistemologischen Barrieren? Lässt sich der „isolierte“ Einsatz der CAS-Mikrowelten (z. B. zur Ermöglichung von Experimentierhandlungen) mit der anschließenden Nutzung des Matrixrechners in Einklang bringen?
- Wie wirkt sich die in Klausuren fehlende Möglichkeit zur Visualisierung auf die Performance der Kohorte im Vergleich zur CAS-Nutzung aus? Genügt die Anfertigung von qualitativen Kontroll- bzw. Plan-Skizzen („Kopfzeichnen“) in Gegenwart numerisch verlässlicher Resultate?
- Wie entwickeln sich die Beliefstrukturen in Bezug auf das generelle Mathematik-Bild und das spezifische „CAS“-Mathematikbild?

Am Ende des Feldversuchs sollte die Performance der Kohorten im Zentralabitur untereinander und in Bezug auf den Landesschnitt verglichen werden. Zusätzlich kann das Ranking der Kohorten durch die zugehörigen Beliefindices bestimmt werden.

Es ist zu hoffen, dass die radikale (aber in Bezug auf den Erhalt händischer Fähigkeiten maßvolle) Auslagerung des Numerischen zusammen mit einem nicht-intensiven CAS-Gebrauch ebenfalls den Weg zu einem verständlicheren Mathematikunterricht mit einem aufgehellten Mathematikweltbild weist.

---

<sup>10</sup>Die qualitativ hochwertigen L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Texte sind als ausgeschnittene png-Images leicht in EULER integrierbar. Damit sind die erstellten MUPAD-Notebooks partiell wiederverwertbar. Man betrachte z. B. die Mikrowelt zum Erlernen des prozeduralen Ablaufs des Lösen einer linearen Optimierungsaufgabe im EULER-Notebook `LineareProgrammierung.en`. Siehe EULER-Distribution unter <http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/euler/>

<sup>11</sup>die also auf keine spezifische CAS-Kompetenz zielt, die in Klausuren zur Wirkung käme

**Teil V**  
**Anhänge**



# Anhang A

## Zu den Lernetappen über Matrizen und lineare Prozesse

Im Folgenden beschreibe ich kurz die methodische Ausgestaltung der einzelnen Etappen im ersten Lern-Parcours *Matrizen und lineare Prozesse*, die als Aufgabenkomplexe zur situativen Verbindung der einzelnen Themenstränge dienen und die hypothetische Lerntrajektorie konkretisieren, vgl. Abbildung A.1.

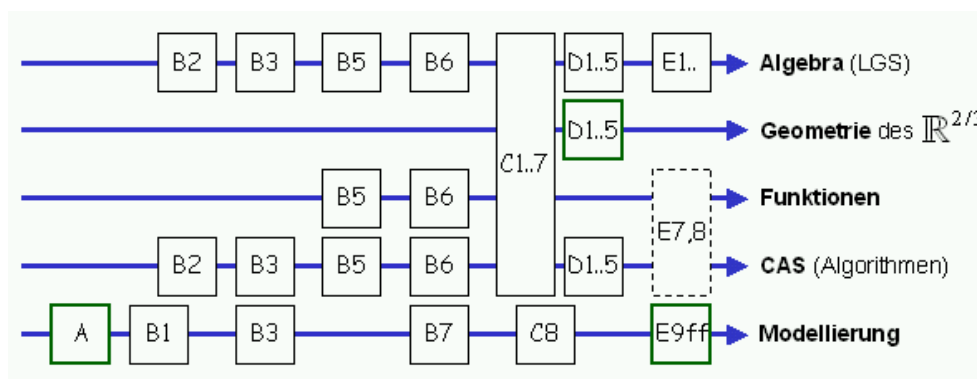


Abbildung A.1: Auffaserung der Themenstränge im ersten Lernparcours und Verteilung der Etappenstationen auf die einzelnen thematischen Leitlinien

### Etappe A: Bevölkerungswachstum

Als erkenntnisleitendes paradigmatisches Problem wird die modellmäßige Entwicklung der Bevölkerung von Texas<sup>1</sup> gewählt, vgl. A1<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>vgl.[125, S. 4]; HILLS Beispiel wurde um CAS-Aspekte ergänzt. Wahlweise kann man authentische Daten wählen, z. B. eine Karte von NRW mit bevölkerungsspezifischen Daten.

<sup>2</sup>Im Folgenden bezeichnet ein Großbuchstabe die „Nummer“ der Lernetappe (d. h. das jeweilige MuPAD-Notebook bzw. den betreffenden Anhang in dieser Arbeit), die folgende Zahl die Aufgabennummer

Im Sinne der RME dient diese Problemstellung zunächst der Anbahnung des Übergangs vom *Modell-zur* zur *Modell-für*<sup>3</sup> Perspektive: Das Problem des Bevölkerungswachstums wird zunächst kontext-spezifisch in einer bedeutungshaltigen Situation präsentiert und bearbeitet, wobei eigene Interpretationen und methodisch offene Lösungsversuche möglich sind. In diesem Sinne ist die vorgestellte Modellierungsaufgabe zunächst als *situational-referentiell* charakterisierbar.

Dieses *Modell zur* informalen Untersuchung einer Bevölkerungsentwicklung enthält in seinem Keim aber allgemeinere Problemstellungen, die *Modell für* allgemein linear-algebraische Konzeptbildungen und zugehörige CAS-Instrumentalisierungen stehen:

- ein lineares Gleichungssystem in A1b
- ein lineares Substitutionsproblem („Einsetzaufgabe“) in A1c
- ein lineares Inversionsproblem („Umkehraufgabe“) in A1d
- ein lineares Eigenwertproblem („Fixvektorsuche“) in A1e
- ein lineares Markovkettenproblem („Matrizensequenz“) in A1f

Damit eröffnet Problemstellung A einen ganzen Themenkomplex und bietet einen ersten informalen Ein- und Überblick in typische Aufgabenstellungen der Linearen Algebra.

## Etappe B: Modellieren mit Matrizen

Die nachfolgende Etappe verbleibt im situativen Kontext, also in der Modell-zur-Relation zum Problem, reichert diesen aber ergänzend durch passende CAS-Werkzeuge zur Untersuchung an. Die angebotenen CAS-Aktivitäten extrahieren den Matrixbegriff aus dem referenzkontext-bezogenen linearen Gleichungssystem in einem zweifachen Komprimierungsprozess. Die erste Kompression in B2 separiert dabei begrifflich die Daten  $A$ , die Unbekannten  $X$  und die rechte Seite  $B$  des LGS in eine *Matrixgleichung*  $A * X = B$  und hinterlegt simultan dem Operator  $*$  der Matrizenmultiplikation (s)einen (ersten) Sinn: Dieser besteht im Verständnis des zugehörigen inversen Dekompressionsprozesses, der aus der Matrixgleichung die gekoppelten linearen Gleichungen rekonstruiert. Die zweite Verdichtung abstrahiert zusätzlich von der Benennung der Unbekannten und formt die Gleichungsmatrix  $M$  zunächst als *ein* CAS-sprachliches und dann als mentales Objekt in der lokalen Wissensdomäne der Lernperson. Die ontologische Entität „Gleichungsmatrix“ wird dabei durch die CAS-Konstruktion der Verschmelzung „ $A.B$ “ flankierend CAS-syntaktisch unterstützt und fördert dadurch die Vorstellung eines LGS als einem mentalen Objekt (O), auf dem man später Operationen und Prozesse (P) wirken lassen kann. Didaktisches Ziel ist somit ein lokal *stabiles Grundverständnis einer Matrix als verdichtet notierte, gekoppelte lineare Gleichungen*, d. h. als ein lineares Gleichungs„system“.

in dieser Etappe und der nachfolgende Kleinbuchstabe zitiert eine Teilaufgabe: **A1b** meint also Aufgabe 1, Teil **b** aus dem Schüler-Notebook LA-A.MNB bzw. der Datei LA-A.pdf der CD.

<sup>3</sup>vgl. z. B. [55, S. 54 ff] oder [109, S. 91, 100 ff, 180 ff]



Man beachte: *Eine definitorische formale Begriffsbestimmung des Begriffs „Matrix“ erfolgt bewusst nicht.* Eine Formulierung wie in [141, S. 146] „Unter einer  $(m, n)$ -Matrix verstehen wir ein rechteckiges Zahlenschema mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten.“ wirkt sinnleer und beschreibt nur, was das Auge der Lernperson prima facie sieht und was im Dialog mit dem CAS als Output sichtbar entsteht. Im hier gewählten Ansatz ist das Konzept der *Matrix dagegen ein apodeiktischer Grundbegriff*, der seine Ausschärfung im Betrachten und Benutzen des Konzeptes durch die Lernperson erfährt und einer „In-Worte-Fassung“ nicht bedarf. Insbesondere können die üblichen Explizierungen der Matrizenmultiplikation wie z. B.

Eine  $(m, n)$ -Matrix  $A$  kann mit einem Vektor [...] multipliziert werden [...] Dabei ist die  $j$ -te Komponente des Produkt-Vektors [...] das Skalarprodukt der  $j$ -ten Zeile von  $A$  mit dem Vektor [...] [a. a .O., S. 146]

verfrühte konzept-definitorische Fixierungen fördern und die später dringend notwendige Flexibilität beim Gestaltwandel eines Gleichungssystems in unterschiedliche Arten von Linearkombinationen behindern. Hier will die Designabsicht im Lernparcours eine mögliche Repräsentationsbarriere vermeiden<sup>4</sup>.

Die im Schülertext gewählten Formulierungen `zip` und `unzip` für den Verdichtungsprozess betonen die Vorstellung, dass die definitorische Kompaktifizierung eines LGS zu *einer* Matrix ohne Informationsverlust<sup>5</sup> vorgenommen wird; denn erfahrungsgemäß<sup>6</sup> werden ge„zip“t verschickte Dokumente beim Empfänger verlustfrei 1:1-entpackt.

Aktivität B3 führt die zum Matrixbegriff passende CAS-sprachliche Lösungsroutine `matlinsolve7(A,B)` bzw. `matlinsolve(A.B)` zur automatisierten Lösung des Inversionsproblems „ $A \cdot X = B$  mit  $X = ?$ “ ein.

B5 löst die Problematik der iterativen Einsetzung von Zwischenergebnissen zur Langzeitanalyse des Bevölkerungswachstums zunächst funktional mit dem vertrauten Maschinenmodell (d. h. der zugehörigen linearen Abbildung  $f = A_{linAbb}$ ) und dem Verkettungsprozess<sup>8</sup> aus der Analysis, aber – unter Wechsel auf den Themenstrang Algebra – auch simultan mit *Matrizenpotenzen*: Erst diese gestatten auf diesem Kenntnisstand die effektive, zeitpunktgenaue Bestimmung des Eigenvektors durch Angabe der zutreffenden Hochzahl als Jahreszahl. Hier sind bereits mathematische Aktivitäten und Reflektionen auf höherem Niveau anstoßbar, die vom Referenzkontext zum *abstrakten 'Modell-für' mathematische Reflektionen*<sup>9</sup> wie z. B. der Assoziativität der Matrizenmultiplikation animieren: Die hier grundgelegten CAS-Erfahrungen weisen das iterierte Einsetzen

$$A * A * \dots * A * X = A * (A * \dots (A * X) \dots)$$

← ... ←

<sup>4</sup>vgl. die Diskussion zur Chamäleon-Barriere

<sup>5</sup>Der Begriff *Kompression* als solcher könnte auch einen Informationsverlust mitdenken, vgl. z. B. Bildkompressionen wie das `gif`-Format, die mit Informationsverlusten einher gehen.

<sup>6</sup>solche Erfahrungen befinden sich im subjektiven Erfahrungsbereich der Lernpersonen.

<sup>7</sup>als Akronym für **matrix-formulated linear system solve**, d. h. „löse das matrizen sprachlich formulierte lineare Gleichungssystem“

<sup>8</sup>dabei wird der mathematische Verkettungsoperator  $\circ$  in MuPAD sinnfällig als `@` notiert

<sup>9</sup>bzw. zur thematischen Schematisierung der Matrizenmultiplikation gemäß der APOS-Theorie

als äquivalent zur schlagartigen Evaluation zur Produktmatrix<sup>10</sup>

$$A * A * \dots * A * X = (A * A * \dots * A) * X$$

...  $\longrightarrow$

nach, die zugleich als neues mathematisches Objekt<sup>11</sup>  $(A * A * \dots * A) =: A^n$  sui generis konstruiert wird. Dass man erst ein neues komplexes Objekt wie  $A^n$  konstruieren und dieses wirkungsgleich zur n-fachen Iterierung auf den Startvektor  $X$  operieren lassen kann, war ohne CAS im geistigen Entwurf zwar *denkbar*, wird mit CAS aber als eine algebraische Grunderfahrung *realisierbar* und experimentell *beobachtbar*.

B6 nutzt das neu konstruierte Objekt Potenzmatrix zur animierten Visualisierung der Bevölkerungsentwicklung als Bahn im Phasenraum. Daran anschließend zielt die hypothetische Lerntrajektorie in B7a auf die eigenaktive Erkundung der kennzeichnenden Eigenschaft einer Markov-Matrix sowie deren CAS-sprachlicher Formulierung. B7c, B8 und B9 regen das eigene Monitoring des abgelaufenen Lernprozesses durch metakognitive Aktivitäten an.

Zusammenfassend ergibt sich folgender multiperspektivischer Fokus auf das Konzept der Matrix und der Matrizenmultiplikation, Abbildung A.2:

Dazu wird ein vorgelegtes lineares Gleichungssystem auf seine wesentlichen Daten reduziert und in einer sog. *Matrixgleichung* komprimiert ("gezippt") dargestellt:

$$\begin{matrix} 0.8x + 0.1y = u \\ 0.2x + 0.9y = v \end{matrix}$$

**Y**

Komprimierung des LGS zu einer *Matrixgleichung*  $A * X = B$ : die Bestandteile des LGS aus Daten A, Unbekannte X und rechte Seite B bleiben erkennbar

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

↓     ↓     ↓  
A     X     B  
Daten   Variablen   RechteSeite

**Y**

nachmalige Komprimierung des LGS zu einer *einzigsten Gleichungsmatrix M*: die Unbekannten des LGS werden dabei weggelassen, Daten und rechte Seite müssen gedanklich unterschieden werden

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Beide Komprimierungsarten kann man in MuPAD hinschreiben:

```
A := matrix([[0.8,0.1], [0.2,0.9]]) // Zeile (1)
```

Nach 2 müssen wir dazu in unserem mathematisches Modell

$$\begin{matrix} 0.8x + 0.1y = u \\ 0.2x + 0.9y = v \end{matrix}$$

einen berechneten Endbestand (u,v) wieder als Anfangsbestand (x,y) verwenden. Dieser wird nach gleichen Muster als neue Eingabe weiterverarbeitet. Hier ist eine Rechen-Maschine ("Transformation")  $f$ , die dies leistet:

$$\begin{matrix} (50,220) & (62,208) & (70.4,199.6) & \dots \\ \downarrow f & & & \\ (62,208) & (70.4,199.6) & & \dots \end{matrix}$$

$f =$  „setze in die linke LGS-Seite ein und rechne aus“

a) Prüfe die Ausgaben der Maschine  $f$  nach.  
b) Lass die Rechenmaschine 2 Arbeits-Takte weiterarbeiten. Wie lauten die Ergebnisse?  
c) Hier ist der Nachbau ("Implementation") der Rechenmaschine in Gestalt einer MuPAD-Funktion  $f$ . Beobachte ihre Wirkung:

```
f := (x,y) -> (0.8*x + 0.1*y, 0.2*x + 0.9*y); // (1)
f(50,220)
62.0, 208.0
```

Abbildung A.2: Ausschnitte aus Lern-Etappe B: Zur zweifachen Verdichtung eines LGS zum Matrixbegriff bzw. zur Matrizenmultiplikation und seiner multirepräsentativen Verankerung in den Themensträngen. Links: algebraisch-algorithmischer Fokus. Rechts: funktional-operativer Fokus

<sup>10</sup>d. h. zur n-ten Potenz  $A^n$  von  $A$

<sup>11</sup>Dies wird für die Lernperson dadurch erfahrbar, dass als CAS-Output eine Matrix vom Ausgangstyp beobachtet wird. Das linksassoziative Klammern wird als fortlaufende Substitution prozessual erfahrbar, die a priori Konstruktion von  $A^n$  als davon verschiedener Konstruktionsprozess eines eigenen Objektes erlebt. Assoziativität wird zum Gegenstand der Betrachtung einer „Algebra als Prozess“.

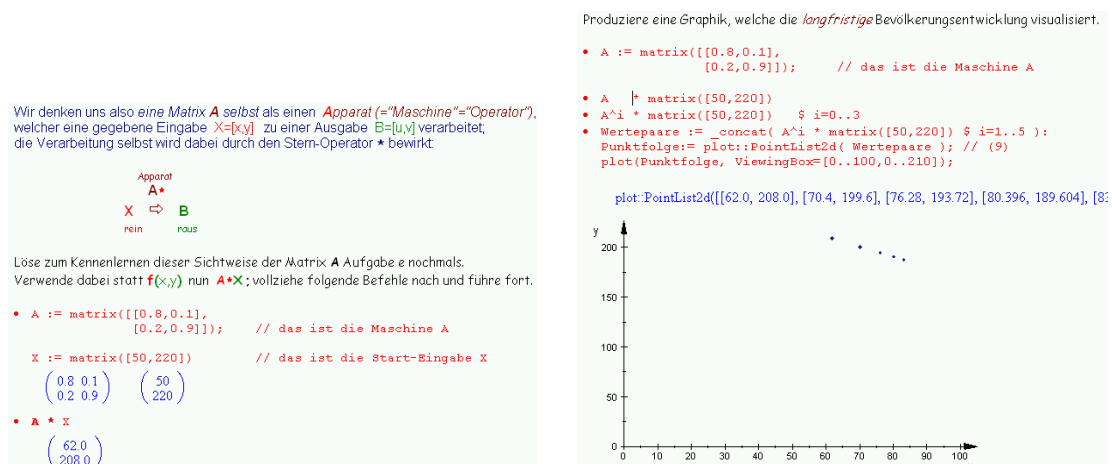


Abbildung A.3: Ausschnitte aus Lern-Etape B: algebraisch-operativer Fokus vs. geometrischer Fokus

## Etape C: Multiplizieren von Matrizen

Etape C löst sich nunmehr vom ursprünglichen Referenzproblem und die kontextfreie Betrachtung von Eigenschaften der Matrizenmultiplikation  $*$  wird in den Fokus genommen. Das Modell der linearen Gleichungssysteme dient als abstrakter gewordene Folie für die Erklärung der beobachteten formalen Phänomene wie z. B. der Nicht-Kommutativität von  $*$  und als stabilisierende Stütze der Konzeptbildung. Die Übungsformen wollen produktiv i. S. v. WITTMANN<sup>12</sup> sein: die CAS-materialgestützten *Einübungen der neuen Wissens Elemente werden mit der Förderung des allgemeinen Lernziels eines substantiellen Verständnisses der Matrizenmultiplikation*<sup>13</sup> verbunden. Aus diesen prozessual aktiv-übenden und entdeckenden Erfahrungen werden dabei ganz im Sinne der APOS-Theorie erste Schematisierungen im Umkreis von  $*$  gewonnen und vertikale Mathematisierungen eingeleitet.

So *üben* die Abschnitte C1 (als dialogische Spielform) bis C3 die Matrizenmultiplikation CAS-gestützt *in Koppelung an Matrizen Gleichungen*  $A * X = B$  ein, wobei die Positionierung der gesuchten Zahlen variiert wird und den wechselnden Fokus aus Etappe A auf formalem Niveau wieder aufnimmt:

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  wird in C3b interpretiert als *doppelte Einsetzprobe in Paare von Gleichungssystemen* – und nicht als Auftrag zum reinen Ausrechnen
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$  adressiert Vorwärts- und Rückwärtsrechnen zur Bestimmung der Unbekannten

<sup>12</sup>vgl. z. B. [186, S. 17]

<sup>13</sup>Die Operationen der Addition zweier Matrizen bzw. der Multiplikation einer Matrix mit einem Faktor aus dem Skalkörper werden als intuitiv verstehbare Operation im Zusammenhang mit Magischen Quadraten und Linearkombinationen in E eingeübt. Die Matrizenmultiplikation ist uns hier die zentrale Operation zwischen Matrizen, weil sie reichhaltige und erwartungsinkonforme Phänomene zeigt.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  fragen nach den Lösungen von je zwei Paaren von Gleichungssystemen. Beide Lösungsmatrizen zeigen aber ein frappierendes algebraisches Phänomen:
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -15 & -22 \\ 19 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Während die erste Lösung mit seinem linken Faktor nicht kommutiert, ist dies bei dem zweiten LGS – der direkten Bestimmung der Inversen zum linken Faktor – sehr wohl der Fall. *Die bisher tragende intuitive Erwartung der Kommutativität von  $*$  wird erschüttert.* Hier sind in der Folge Ursachenforschungen und Hypothesenbildungen anstoßbar, die später bei der expliziten Konstruktion der inversen Matrix  $U$  (zu  $A$ ) und ihrer charakterisierenden Gleichung  $A * U \stackrel{!}{=} U * A = E$  aufgegriffen werden können.

C4 variiert Multiplikationsaufgaben algebraisch zu speziellen sog. „LU-“Faktorisierungen, bei denen eine vorgelegte Matrix in zwei *einfache Matrix-Faktoren mit erkennbarem Formmuster* aufgesplittet werden soll: Hier kann man nach der Art des *Zerlegungsmusters* und – weil die Multiplikation  $*$  mental an die komprimierte Vorstellung eines komprimierten LGS gekoppelt ist – nach Konsequenzen für die Lösungsfindung daraus hergestellter LGS forschen lassen. Damit wird zugleich das Verständnis für die prinzipielle Wirkungsweise des später behandelten GAUSS-Algorithmus anbahnend vorbereitet. C5 und C6 vertiefen in der Form variierender Multiplikationsaufgaben die Substitutionsproblematik, die als Variante der Multiplikationsoperation erscheint. Die Übungen in C zielen insgesamt auf einen flexiblen Umgang mit der Matrizenmultiplikation, der auf vielfältigen algebraischen Erfahrungen basiert und erst gegen Ende der Etappe in C6c behutsam zu einer selbst formulierten vorläufigen Rechen-Regel vordringt.

## Etappe D: Matrizen als Objekte und Transformationen

Diese CAS-Lernumgebung wechselt vom algebraisch orientierten Themenstrang C zu dem explizit geometrischen Strang D: Sie thematisiert und interpretiert Matrizen nun statisch als geometrische *Figuren* (Objekte) bzw. dynamisch als geometrische *Transformationen* (Funktionen). Didaktisches Ziel ist die Erweiterung des aktuellen Concept Image „Matrix“ um eine geometrische Facette. Instrumental dient der `matrix`-Datentyp des CAS hierbei sowohl zum Speichern der Figuren als auch zur Beschreibung geometrischer Abbildungen. Die Lernenden explorieren speziell Achsenstreckungen (inkl. Achsenspiegelungen) und Scherungen als den geometrischen Bausteinen des Gauß-Algorithmus.

Die Experimentierhandlungen in D1 und D2 benutzen zunächst vorgefertigte CAS-Materialien, um die instrumentelle Kompetenz zur Anfertigung von geometrischen Szenen zu fördern und damit geometrische Phänomene bzw. Figurenmuster studieren zu können. D6 und D7 interpretieren anschließend die Matrizenmultiplikation als Komposition linearer Abbildungen, wodurch die algebraische Nicht-Kommutativität von  $*$  seine geometrische Begründung erfährt.

Syntaktisch werden Skalierungen und Scherungen von Figuren im CAS als parametrisierte Matrizen definiert:

```
Sk := (r,s) -> matrix([[r,0],[0,s]]) // Skalierungsmatrix
Sch := (r,s) -> matrix([[1,r],[s,1]]) // Scherungsmatrix
```

Dies erlaubt anschließend die Einwirkung einer speziell gewählten Skalierung auf ein geometrisches Objekt per \* zu studieren<sup>14</sup>:

```
Turm := matrix([[1,1,2,3,3],[0,6,9,6,0]]) // Originalfigur 'Turm'
Turm_ := Sk(2,0.5) * Turm // Bildfigur 'Turm_'
```

In D7b werden Scherungen und Skalierungen alternativ als *lineare Funktionen* formuliert, die punktweise operieren:

```
sch := (x,y) -> (x+2*y, y+0.5*x); // Scherungsfunktion (1)
sk := (x,y) -> (2*x, 0.5*y); // Skalierungsfunktion (2)
sk(1,0); sch(1,0) // Bildpunkte
(sch @ sk)(1,1) // Scherung eines skalierten Punktes
```

Damit wird auf der Schema-Ebene eine Reflexion der Vor- bzw. Nachteile von Funktions- bzw. Matrix„sprache“<sup>15</sup> möglich, so dass am Ende der Etappe in der Rückschau DΣ die Grundvorstellung einer Matrix thematisch um den Abbildungsaspekt erweitert ist, vgl. Abbildung A.4.

In Analogie zu WITTMANNs Konzept des *Blitzrechnens*<sup>16</sup> zur Automatisierung von algebraischen Fertigkeiten regen die Etappen-Übungen zum *Blitzzeichnen* („überschlägiges im Kopf-Zeichnen“) als stabile Verständnisgrundlage geometrischer Prozesse an: Das CAS stützt solche gedanklichen a-priori-Vorstellungen durch nachgängige kontrollierende CAS-Grafiken flankierend ab. Typische Aktivierungselemente sind daher:

- z. B. in D2:

Betrachte die folgende Figuren-„Schablone“:  $F(k) := [[0,0],[k,0],[k,k],[0,k],[0,0]]$  .  
Für jeden konkreten Zahlen-Wert für k erhält man eine konkrete Figur F(k). Überlege als Kopf-Zeichnung (anlog zum Kopf-Rechnen):  
Was stellt die Figur F(1) geometrisch dar? Wie sieht F(3) aus?  
Überprüfe nun deine Vorstellung im Kopf durch MuPAD: [..]

<sup>14</sup>Will man die Skalierung als Abbildung deuten, die einer Figur F eine Bildfigur F<sub>-</sub> zuordnet, so müsste man im CAS prozedural unter Nutzung der Option escape formulieren: `Sk := proc (r,s) option escape begin F -> matrix([[r,0],[0,s]])*F end_proc` und könnte dann den Aufruf bzw. das Bild als `F_- := Sk(2,0.5)(F)` anstelle von `F_- := Sk(2,0.5) * F` notieren. Auf diese in LINDNER [155, S. 59 ff] vorgenommene Implementierung wird hier elementarisierend verzichtet.

<sup>15</sup>Man beachte: Syntaktisch erlaubt das CAS durch seine Unterscheidung von Groß- und Kleinschreibung die Ausdifferenzierung von `Sk(2,0.5)` als Skalierungsmatrix (Leitbuchstabe „S“ groß) zu den Parametern 2 und 0.5 von `sk(1,0)` als fester Skalierungsabbildung (Leitbuchstabe „s“ klein) zu den in der Formel (2) „verdeckten“ Parametern 2 und 0.5, die hier den Punkt (1,0) abbildet.

<sup>16</sup>vgl. [186, S. 17]

Matrix als *Prozess*,  
Abbildung,  
Maschine, ..

Matrix als *Objekt*,  
Figur,  
Datenmenge, ..

Bei der Interpretation einer *Matrix als Abbildung* stellt man sich dabei

- ▶ die links vom Multiplikations-Stern  $*$  stehende "*Abbildungsmatrix*" *zeilenweise* gefasert
- ▶ die rechts daneben stehende "*Objektmatrix*" *spaltenweise* gefasert vor.

Abbildung A.4: Zur Anreicherung des concept image „matrix“ um den Abbildungsaspekt

- oder in D3a:

Probiere am Rechen-Prompt • aus, was die Matrix  $A := [[1, 0], [0.5, 1]]$  bewirkt, wenn sie mittels  $*$  von links auf eine Figur einwirkt: ...

Versuche dir nun die Figur  $A * F(1)$  im Kopf vorzustellen, bevor du MuPAD zeichnen lässt

...

Fasse die geometrische Wirkung von  $A$  in Worte.

- in D5:

Variiere zum Vertrautwerden mit den Scherungen die Parameter  $r$  und  $s$ .

Welche Wirkungen haben  $r:0$ -Scherungen, welche  $0:r$ -Scherungen?

Welche geometrische Wirkung hat eine  $0:0$ -Scherung? Begründe.

Fertige einen kleinen Untersuchungsbericht an. Vergleiche auch mit 1.

Kannst du die gescherten Figuren vorab *im Kopf zeichnend vorhersehen*?

## Etappe E: Produktive Aufgaben und fakultative Mini-projekte

Didaktisches Ziel dieser CAS-Etappe ist die Stabilisierung des Concept Image „Matrix und Matrixmultiplikation“ durch vielfältige Aktivitäten und die Fortschreibung seiner Schematisierung um die *systematische musterbasierte Konstruktion spezieller Matrizen* wie z.B. Einheits-, HILBERT-, PASCAL-, Zufalls- oder LESLIE-Matrizen. Instrumental unterstützt der *matrix*-Typ des CAS dabei vornehmlich die Modellierung von Referenzkontexten (s. u. Modellierungsaufgaben) und die Erkundung algebraischer Phänomene (s. u. Zauberquadrate).

Für Details der CAS-Lernumgebung sei auf den Anhang E verwiesen. Hier wird nur die Vielfalt der Problemstellungen angedeutet und der didaktische Zweck der *magischen Quadrate mit Nutzung von CAS* etwas genauer betrachtet.

**Die Stabilisierung des Concept Image „Matrix“** wird u. a. durch folgende Aktivitäten erreicht:

- E1 erweitert die Rechenoperationen mit Matrizen um die Addition zweier Matrizen und die Multiplikation mit einem Skalar („Vervielfachung“) zur *Algebra der Matrizen*. Eine formale Definition der Operationen erfolgt nicht; vielmehr wird die mathematische Intuition der Lernenden durch die Kontrolle der Ergebnisse mit dem CAS MuPAD gestärkt.
- E2 und E3 stellen mit dem additiven bzw. multiplikativen Aufmauern von Matrixsteinen zu einer Pyramide *problemhaltige algebraische Situationen* vor, wobei z. B. die Frage

Wie sind die Zahlen im „Matrixstein“ rechts unten zu wählen, damit der linke mittlere „19er“-Stein unverändert als Schlussstein an der Spitze erscheint?

auf die strategische Einfügung einer Einheitsmatrix abzielt, wozu vorab implizit die passende multiplikativ-inverse Matrix berechnet werden muss.

- E4 will methodisch neben der *Schulung der Blitz(Kopf)rechnen-Kompetenz* auch das Konzept der Einheitsmatrix im algebraischen Problemkontext anbahnen.
- E8 nimmt sich in einer *Matrix-Fabrikation* der mathematischen Analyse und der automatisch CAS-gestützten Produktion von speziellen Matrizen an, die nach bestimmten (Rechen-)Mustern<sup>17</sup> oder zu Testzwecken zufällig erzeugt werden.

Didaktisch fungieren die in der „Matrix-Fabrik“ erzeugten HILBERT-Matrizen später der Stabilitätsanalyse von Lösungsverfahren<sup>18</sup>, die Einheitsmatrizen  $e(n)$ <sup>19</sup> dienen später der CAS-Formulierung algebraischer Prozesse, Definitionen, Phänomene und Gesetze und die PASCAL-Matrizen<sup>20</sup> bilden ein geeignetes beziehungsreiches Experimentiermaterial.

**Die instrumentelle Genese** der Lernenden wird dabei um die Konstruktion von Matrizen ergänzt, deren  $(i, j)$ -tes Element das Ergebnis des Funktionsaufrufs  $f(i, j)$  für  $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$  mit dem Zeilen- und Spaltenindex ist:

```
hilbert1 := n -> array(1..n, 1..n, [[1/(i+j-1) $ j=1..n] $ i=1..n]);
hilbert2 := n -> matrix(n,n, (i,j) -> 1/(i+j-1));
pascal := n -> matrix(n, n, (i,j)-> binomial(i + j - 2, j - 1));
```

<sup>17</sup>die Untersuchung von Mustern ist z. B. ein Anliegen von WITTMANN

<sup>18</sup>vgl. z. B. ARTMANN & TÖRNER [4, S. 36 ff]

<sup>19</sup>Da im CAS MuPAD der Bezeichner E für die EULERSche Zahl  $e$  reserviert ist, notieren wir hier entgegen der sonstigen Konvention die  $n$ -dimensionale Einheits-Matrix mit einem kleinen  $e$ .

<sup>20</sup>vgl. z. B. STRANG a. a. O.

Dabei ist  $(i, j) \rightarrow 1/(i+j-1)$  die matrixfüllende „erzeugende“ Zuordnungsvorschrift.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

**Die Modellierungsaufgaben** entstammen unterschiedlichen Anwendungsfeldern wie z.B. der Ökonomie, der Medizin, der Demoskopie oder der Soziologie und möchten der Lernperson die Aspektvielfalt mathematischer Anwendungen in Richtung des eigenen möglichen Berufsfeldes aufzeigen. Man beachte, dass *keineswegs alle Problemstellungen zu bearbeiten* sind, sondern eine begründete Auswahl persönlich interessierender, z. T. offener Aufgaben frei auszuwählen ist, die im vorgegebenen Zeitrahmen von ca. 6 Unterrichtsstunden<sup>21</sup>, d. h. in einem Unterrichtszeitraum von ca. 14 Tagen, zu bearbeiten ist. Als Eigenproduktion ist je Modellproblem ein ca. 1-seitiger knapper „Forschungsbericht“<sup>22</sup> zu erstellen:

- E11 ist ein MARKOV-Prozess mit Gratifikation<sup>23</sup>, in dem das klassierte Führungspersonal einer Firma (Büroleitung, Abteilungsleitung und Dezernatsleitung) je nach ihrem Jahres-Erfolg permanent auf- bzw. abgestuft wird. Fraglich ist hierbei z. B., ob ein Unterschied der Gratifikationen besteht, wenn eine Person schon als Dezernatsleitung oder als Büroleitung gestartet ist.
- E12 studiert mit Hilfe von LESLIE-Matrizen<sup>24</sup> ein diskretes Zeitmodell für den *Altersaufbau der Bevölkerung eines Landes* oder einer Gemeinde. Solche Prognosen sind z. B. von Bedeutung für die Planung von Rentenbeiträgen oder der Erforschung von Fisch- oder Freiwildbeständen in der Biologie. Hier ist aktuelles authentisches Datenmaterial einbeziehbar.
- E15 simuliert Produktionsprozesse in der Wirtschaft, bei der Produktionen sowie die gegenseitigen Verflechtungen in sog. *Input-Output-Tabellen* (Matrizen) repräsentiert werden.

**Aktivitäten an magischen Quadraten** bahnen die epistemologische Gründung des Konzeptes der Linearkombinationen an. Ich bespreche daher die Aufgabensequenz E7 etwas ausführlicher. Nach der Analyse des Phänomens des „Magisch-Seins“ anhand von  $3 \times 3$ -Zauberquadraten<sup>25</sup> und der eigenaktiv entdeckten konstanten Zaubersumme in Zeilen, Spalten und Hauptdiagonalen von magischen Matrizen zielt E7b auf die Linearkombination des DÜRER-Quadrates aus 8 „Basis“-Zauberquadraten ab, vgl. Abbildung A.5.

<sup>21</sup>Hier ist die Zeit für die Anfertigung der „Hausaufgaben“, d. h. der weiteren Bearbeitung der im Unterricht begonnenen Aufgaben hinzu zu rechnen.

<sup>22</sup>Als Mustervorlage dienen Kopien von authentischen Poster-Präsentationen, wie sie z. B. auf professionellen oder wissenschaftlichen Tagungen Standard sind.

<sup>23</sup>vgl. z.B. [20, S. 24 ff]

<sup>24</sup>vgl. z. B. CHEN, GIBLIN & IRVING [30, S. 24 ff]

<sup>25</sup>Bei [4, S. 164] finden sich diese Beispiele im Kapitel über Vektorräume. BAUM [11] greift dieses Beispiel auf S. 52 auf.



Prüfe, dass  $Q_1$  bis  $Q_8$  magisch sind. Nach welchem Muster wurden  $Q_1$  bis  $Q_8$  konstruiert?  
 Was ist  $2Q_1 + 5Q_3 - 2Q_5$ ? Ist dieses Quadrat wieder magisch? Warum?  
 Kannst du Dürer's magisches Quadrat im Kupferstich "Melancholia" von 1514 aus  $Q_1$  bis  $Q_8$  "zusammenmischen"?  
 Kann man jedes beliebige magische  $4 \times 4$ -Quadrat aus  $Q_1$  bis  $Q_8$  herstellen?  
 Begründe deine Antwort.

Implementiere den Baukasten für magische Quadrate in MuPAD:

- $Q[1] := \text{matrix}([[0,0,0,1], [1,0,0,0], [0,0,1,0], [0,1,0,0]])$
- $Q[2] := \text{matrix}([[1,0,0,0], [0,0,0,1], [0,1,0,0], [0,0,1,0]])$
- $2*Q[1]+3*Q[2]$

Abbildung A.5: Zur Konstruktion des magischen  $4 \times 4$  – „Melancholie“-Quadrates von DÜRER als eindeutige Linearkombination von elementaren magischen  $4 \times 4$ -Zauberquadraten

Die Metapher des *Baukastens*<sup>26</sup> adressiert sinnfällig das Zusammen„basteln“ des gesuchten DÜRER-Quadrates aus elementaren Bauteilen, hier aus den Zauberquadraten  $Q_1$  bis  $Q_8$ . Diese bergen schon in sich selbst viele zu entdeckende Eigenschaften (Symmetrien). Dass sie darüber hinaus eine *nicht-kanonische*<sup>27</sup> Basis eines Unterraumes des Matrizenraumes der  $8 \times 8$  - Matrizen  $\mathbb{R}^{8 \times 8}$  der Dimension 64 bilden, lässt sich später zur Einführung der Begriffe Basis und Dimension vorteilhaft nutzen.

Während systematisches Probieren im vorliegenden Falle i. d. R. nur zeitintensiv zur Lösung führt, bietet die hier erstmals auftretende *Grundvorstellung der Linearkombination als eines Zusammenmischens von gegebenen Bestandteilen zu einem gewünschten Resultat* einen algebraisch und algorithmisch verwertbaren Ansatz. Diese Idee wird durch das Rechnen mit Zauberquadraten vorbereitet, vgl. Abbildung A.6.

Syntaktisch gestattet das CAS MuPAD die automatische Indizierung von Objekten durch Eck-Klammern wie z. B.  $Q[1]$ . Dabei wird im Arbeitsspeicher automatisch eine Tabelle („table“) generiert, deren Bezeichner aus dem ersten indizierten Objekt (hier  $Q[1]$ ) entnommen wird: Die Tabelle der indizierten basalen Zauber Matrizen heißt also  $Q$  und kann unter diesem Namen angesprochen werden, vgl. (4). Die durchindizierten Objekte (d. h. die basalen Zauberquadrate) der Tabelle werden durch die Eckklammer referenziert, vgl. die Notation der Linearkombination in (3).

Hat man die vollständige Tabelle  $Q$  als CAS-Implementation des Baukastens aller 8 basa-

<sup>26</sup>Diese griffige Modellvorstellung entnehme ich WELLSTEIN et al. [205, S. 128 ff].

<sup>27</sup>und damit nicht-trivial zu entdeckende Basis, vgl. [180]. ROGALSKI verweist mit Recht auf den darin begründeten didaktischen Vorteil.

```

• 2*Q[1]+3*Q[2] // (3)
 (3 0 0 2)
 (2 0 0 3)
 (0 3 2 0)
 (0 2 3 0)

• Q // (4)
 1 = (0 0 0 1)
 (1 0 0 0)
 (0 0 1 0)
 (0 1 0 0)
 2 = (1 0 0 0)
 (0 0 0 1)
 (0 1 0 0)
 (0 0 1 0)

• Q[8]:= matrix([[0,0,1,0], [1,0,0,0], [0,1,0,0],[0,0,0,1]])
• DQ1:=5*Q[1]+6*Q[2]+1*Q[3] // (5)
 (6 1 0 5)
 (5 0 1 6)
 (1 6 5 0)
 (0 5 6 1)

```

Abbildung A.6: Zur Repräsentation der Linearkombination zweier Zauberquadrate aus einer indizierten Tabelle von basalen Zauberquadrate im CAS MuPAD.

len Zauberquadrate  $Q[i]$  definiert, so lässt der Linearkombination-Ansatz für das DÜRER-Quadrat

$$x_1 \cdot Q[1] + x_2 \cdot Q[2] + x_3 \cdot Q[3] + x_4 \cdot Q[4] + x_5 \cdot Q[5] + x_6 \cdot Q[6] + x_7 \cdot Q[7] + x_8 \cdot Q[8] = DQ$$

erste Proberhandlungen zu, z. B. zeigt (5) drei richtige Einträge des DÜRER-Quadrates aus (6). Der naheliegende Ansatz (7) führt allerdings auf 16 Gleichungen für 8 Unbekannte Zahlen, vgl. Abbildung A.7.

Will man ein Gleichungssystem der gewohnten Form  $A \cdot X = B$  aufstellen, so enthält der Spaltenvektor  $X$  die 8 Unbekannten  $x_1, \dots, x_8$  und die rechte Seite  $B$  ist das DÜRER-Quadrat. Wie aber lautet die Systemmatrix  $A$ ? Da  $X$  die Länge 8 hat, muss jede Zeile von  $A$  die Länge 8 haben. Die Konstruktion von  $A$  läuft daher darauf hinaus, die quadratische Struktur der 8 basalen Zauberquadrate  $Q[i]$  temporär in lineare Spalten der Länge  $4 \times 5 = 16$  aufzubrechen, vgl. (8) in Abbildung A.8. Die vom CAS ausgegebene Lösung erlaubt weiterführende Interpretationen in Bezug auf die Lösungsvielfalt (Anbahnung der Idee unterbestimmter LGS) sowie den Rückbezug auf die Zaubersumme zur eindeutigen Lösbarkeit des Problems. Das Beispiel der Zauberquadrate verweist insofern auf die Fähigkeit zu flexiblen Repräsentationen als Voraussetzung für erfolgreiches Problemlösen und erweist sich als ein beziehungs- und ertragreicher Problemkomplex.

- $DQ := 5 \cdot Q[1] + 6 \cdot Q[2] + 1 \cdot Q[3] + 2 \cdot Q[4] + 10 \cdot Q[5] + 8 \cdot Q[6] + 2 \cdot Q[7] + 0 \cdot Q[8] \quad // (6)$

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

- $x_1 \cdot Q[1] + x_2 \cdot Q[2] + x_3 \cdot Q[3] + x_4 \cdot Q[4] + x_5 \cdot Q[5] + x_6 \cdot Q[6] + x_7 \cdot Q[7] + x_8 \cdot Q[8] = DQ \quad // (7)$

$$\begin{pmatrix} x_2 + x_5 & x_3 + x_7 & x_4 + x_8 & x_1 + x_6 \\ x_1 + x_8 & x_4 + x_6 & x_3 + x_5 & x_2 + x_7 \\ x_3 + x_6 & x_2 + x_8 & x_1 + x_7 & x_4 + x_5 \\ x_4 + x_7 & x_1 + x_5 & x_2 + x_6 & x_3 + x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbildung A.7: Ein ineffektiver direkter Linearkombinationsansatz für die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten des Dürer-Quadrates bzgl. der basalen Zauberquadrate

- $Q[8] := \text{matrix}([0,0,1,0, 1,0,0,0, 0,1,0,0, 0,0,0,1])$
- $MQ := Q[1] \cdot Q[2] \cdot Q[3] \cdot Q[4] \cdot Q[5] \cdot Q[6] \cdot Q[7] \cdot Q[8] \quad // (8)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $X := \text{matrix}([x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}])$
- $DQ := \text{matrix}([16, 3, 2, 13, 5, 10, 11, 8, 9, 6, 7, 12, 4, 15, 14, 1])$
- $\text{linalg}::\text{matlinsolve}(MQ, DQ) \quad // (9)$

$$\left[ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 10 \\ 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Abbildung A.8: Die Re-Repräsentation der basalen Zauberquadrate in einer linearen Spalten-Struktur führt auf eine kanonische instrumentelle CAS-Lösung des ursprünglichen Darstellungsproblems.



# Anhang B

## Zu den Lernetappen im Parcours über genaubestimmte LGS

Im Folgenden beschreibe ich die didaktische Funktion der einzelnen Etappen im regionalen Themenkreis *Genaubestimmte LGS*.

Die Themenstränge sind dabei wie folgt verwoben, siehe Abbildung B.1.

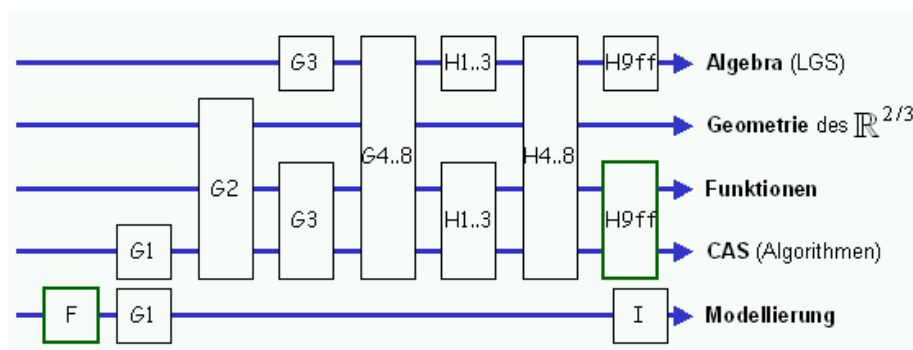


Abbildung B.1: Themenstrang-Aufteilung der Aktivitäten in den Parcours-Etappen F...I

### Etappe F

stellt die Lernperson vor ein einfaches *physikalisches Realexperiment*, das *Wasserturmproblem*<sup>0</sup>, vgl. Abbildung B.2.

EXPERIMENT: Beschaffe dir eine Plastikflasche mit annähernd konstanter Querschnittsfläche analog zur Skizze. Bringe eine „0“-Marke einige Zentimeter über dem Flaschenboden an und bohre ein kleines Loch in Höhe dieser Nullmarke. Markiere die Höhe in 1 cm Schritten von der 0-Marke bis zur Höhe von 10 cm. Halte den Finger auf das Loch und fülle die Flasche bis zur 10 cm Markierung mit gefärbtem Wasser.

- Lass eine Stoppuhr mitlaufen, sobald du den Finger vom Bohrloch nimmst.

<sup>0</sup>nach F. VEST, *Mathematics and the City Water Tower*, COMAP Nr. 62, 1997

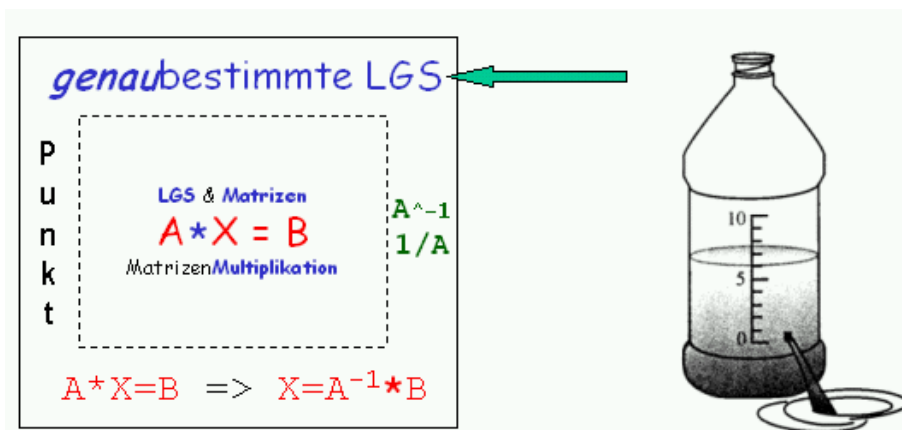


Abbildung B.2: Versuch „Abfluss aus dem aufgebohrten Wasserturm“ als Modellierungsaufgabe mit lokal paradigmatischem Lösungsprozess für LGS. Das Problem ist im erweiterten innersten Wachstumsring epistemologisch vertortbar, d. h. zu seiner Lösung werden keine neuen Konzepte benötigt.

- Miss die Zeit, die die Wasseroberfläche benötigt, um die 8 cm, 6 cm, 4 cm Marke zu erreichen.
- Kann man den Zeitbedarf zum Erreichen einer bestimmten Höhe vorher, „berechnen“?
- Liegen alle Messwerte auf einem Funktionsgraph, d. h. modelliert ein Gesetz (Formel) den Versuchsablauf? [...]
- Wiederhole das Experiment: Schätze und messe den Zeitwert für das Erreichen der Skalenmitte und das Nullniveau. Wie genau war deine Vorhersage?
- Finde selbst weitere Fragen<sup>1</sup> und untersuche diese.

Die Daten der Problemstellung werden schülerabhängig authentisch in einer vorab gestellten Hausaufgabe individuell gewonnen. Nach der RME-Theorie ist das Wasserturmproblem daher zunächst ein sinnhaftes *situational-referentielles* 'Modell-zur' *informalen methoden-offenen Lösung* einer physikalischen Problematik, wird aber im Verlaufe des CAS-Parcours zu einem *Modell-für* eine Lösung mit dem lokalen linear-algebraischen Lösungskonzept der inversen Matrix  $A^{-1}$  bzw. dem zugehörigen CAS-Instrument  $A^{-1}$  oder  $1/A$  aufgeweitet<sup>2</sup>. Die Fortsetzung des geometrischen Themenstrangs deutet die eindeutige Lösung als Punkt<sup>3</sup> und die des algebraischen<sup>4</sup> bündelt die fortgeschrittene formale Schematisierung in der abstrakt-formalen Gleichung  $A * X = B \Rightarrow X = A^{-1} * B$ .

## Etappe G

zeigt in G1 eine holistische Ganzschau des GAUSS-JORDAN-Algorithmus auf einer Gleichungsmatrix  $M$  und regt zu metakognitiven Reflexionen über das Lösungsprinzip an. Simultan

<sup>1</sup>Diese können den Einfluss der Bohrlochgröße, der Flaschendicke und Flaschenform etc. in die Untersuchung einbeziehen. Es wird klar, dass man daher schnelle, automatisierte Lösungsverfahren benötigt.

<sup>2</sup>siehe die rechte äußere „CAS-Instrument“-Spalte in Abbildung B.2

<sup>3</sup>vgl. die linke äußere „Geometrieaspekt“-Spalte in Abbildung B.2


<sup>4</sup>in der untersten „Algebraaspekt“-Zeile in Abbildung B.2

wird die CAS-Routine `gaussJordan(M)` als Lösungsinstrument eingeführt; diese hat als einzigen Parameter  $M$  die erweiterte Systemmatrix  $M:=A.B$  eines LGS  $A*X=B$ . Damit ist auch die Einführung des Begriffs der Gleichungsmatrix von Instrument her motiviert. Der tragende Begriff der *Linearkombination* wird dann im Kontext des LöSENS von LGS rekonstruiert.

G2 konstruiert zunächst anhand eines interaktiven CAS-Spiels<sup>5</sup> eine prozesshafte Grundvorstellung des Konzeptes der Linearkombination<sup>6</sup>. Die hier möglichen operativen Handlungen zum Studium der „geometrischen Auswirkung der algebraischen Einwirkungen“ auf die Steuer-Parameter werden in G3 im Repräsentationswechsel algebraisch flankiert, vgl. Abbildung B.3.

```

• M := matrix([[2, 4, 0], // (1)
 [3, 1, 5]])

• col(M,2) // col = column=(engl.)Spalte [einer Matrix]
 (4)
 (1)
 
• col(M,1)+col(M,2)
 (6)
 (4)
• 2 * col(M,1) - 3 * col(M,2)
 (-8)
 (3)
• Lks := (r,s,M) -> r*col(M,1)+s*col(M,2)
 // Linearkombination der Spalten
• Lks(2,-1,M)
 (0)
 (5)

```

Abbildung B.3: Die CAS-Funktion `Lks` zur algebraischen Exploration der Grundvorstellung einer Linearkombination als Mischen von Bestandteilen, hier dem Zusammenmischen der ersten beiden Spaltenvektoren einer Matrix zum dritten Spaltenvektor. Das Zahlenpaar  $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  ist Lösung der Gleichung  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$  bzw. gibt äquivalent die richtigen Gewichtsanteile in der Mischung von  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  zu  $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$  an. Im CAS gilt: `Lks(2,-1,M) = col(3,M)`

Eigenaktive geometrische bzw. algebraische Experimente mit anderen Spielmatrizen  $M$  stabilisieren sowohl die Grundvorstellung des Konzeptes „Linearkombination von Spal-

<sup>5</sup>als generic organizer i. S. v. TALL

<sup>6</sup>Auf die Verwendung von Vektorpfeilen wird aus den oben diskutierten Gründen verzichtet und stattdessen punktierte Streckenzüge gezeichnet.

tenvektoren“ (einer Matrix) als Mischungsprozess als auch die der Lösung als gesuchte Streckfaktoren bzw. Gewichtsanteile zum Treffen eines Zielpunktes bzw. der rechten LGS-Seite. Damit wird eine erster *Repräsentationswechsel der Matrixmultiplikation* vollzogen, die nunmehr im Falle  $A * X$  der linken Seite eines LGS  $A * X = B$  als Linearkombination  $A_1 \cdot x_1 + \dots + A_n \cdot x_n$  interpretiert wird. Dieser bewusst vollzogene Gestaltwandel *von der Zeilensicht zur Spaltensicht* von  $A * X$  beugt wiederum der Chamäleonbarriere in Lösungsprozessen didaktisch vor. Der logische Existenzquantor in der Existenzaussage

$$B \text{ ist Lks von } (A_1, \dots, A_n) : \Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} : A_1 \cdot x_1 + \dots + A_n \cdot x_n = B$$

wird dabei in der CAS-Definition

- `Lks := (r,s,A) -> r*col(A,1)+s*col(A,2)`

funktional handlungsorientiert und CAS-dialogisch formuliert: Der User hat im Dialog mit dem CAS einen geeigneten Eingabe-Satz an Parametern ( $r; s$ ) zur Kombination der Matrix-Spalten im Aufruf `Lks` anzugeben und damit „als existent“ nachzuweisen. Operativ wird mit dem CAS im Anschluss erfahrbar, dass die sinnhaltige Aussage (1) mathematiksprachlich als (2) formuliert wird und zur Matrixgleichung (3) äquivalent ist:

- `x1*col(A,1) + x2*col(A,2) = B;` // (1)
- `Lks(x1,x2,A) = B;` // (2)
- `A * X = B` // (3)

Didaktisch ist damit die Prozessphase durch die concept-image-Prägung des Begriffs „Linearkombination“ vollzogen und zugleich als eine Facette der Matrixmultiplikation  $A * X$  identifiziert.

G4 verallgemeinert diese Grundvorstellung sogleich operativ durch eigentätige CAS-Aktivitäten auf räumliche Linearkombinationen und problematisiert die Eindeutigkeit der Darstellung („Führen viele Wege zum Ziel?“): Diese wird eine erkenntnisleitende Argumentationsfigur für Reflexionen im Zusammenhang der Lösungsvielfalt von LGS werden.

G5 ff visualisieren den Lösungsprozess eines LGS unter vorgreifender Benutzung von Ortsvektoren (Spaltenbild-Grundvorstellung des Lösungsprozesses). Dabei wird das Phänomen beobachtbar, dass die gesuchten Streckfaktoren der Linearkombination der Matrixspalten im Lösungsprozess des GAUSS-JORDAN-Algorithmus invariant bleiben und an der Endstellung in der kanonischen Standard-Basis direkt ablesbar sind, siehe Abbildung B.4.

Damit ist eine multirepräsentative Prozesssicht auf den Lösungsablauf begründet. G8 diskutiert auf formalem Schema-Niveau den Spezialfall der eindeutigen Lösbarkeit der homogenen Gleichung  $A * X = O$  und gelangt so zum Begriff der linearen Unabhängigkeit der Spalten von  $A$ . Dieser Begriff wird als Funktion (genauer: Prädikat) CAS-sprachlich expliziert:

- `o := d -> matrix(d,1, 0): // Nullvektor der Dimension d`
- `unabh2 := A -> if matlinsolve(A, o(nrows(A)) ) = o(nrows(A)) // (LU)  
then "unabhängig" else "abhängig" end_if:`



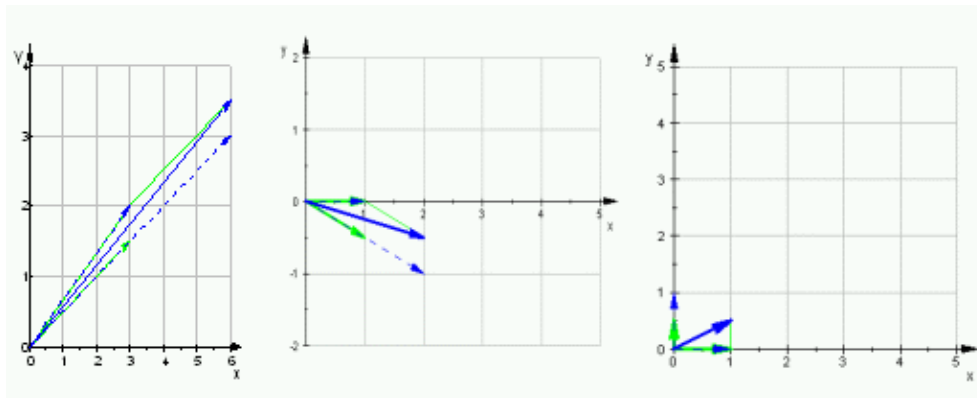


Abbildung B.4: Ausschnitt des Lösungsprozesses des LGS  $\{3x + 6y = 6 \wedge 2x + 3y = 3.5\}$  bzw.  $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 3.5 \end{pmatrix}$  in *Spaltenbild*-Grundvorstellung und das Phänomen der Invarianz der Entwicklungskoeffizienten

- `unabh2( matrix([[2, 4, -2], [3, 1, -2]]) );`  
`unabh2( matrix([[2, 4],[3, 1]]) )`

$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  "abhängig"  
 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  "unabhängig"


Zeile (LU) vergleicht dabei das Rückgaberesultat von `matlinsolve` (d. h. der automatisch berechneten CAS-Lösung von  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = 0$ ) daraufhin, ob es mit dem Nullvektor entsprechender Dimension identisch ist. Der Lernende kann damit zur Schulung seiner Vorstellungskraft mit dem Begriff „*linear-unabhängig*“ im CAS experimentieren.

## Etappe H

Während in G das Konzept der Linearkombination als Grundvorstellung eines Mischens von Bestandteilen zu einem algebraischen Resultat bzw. einer geometrischen Resultierenden grundgelegt und zur Spaltensicht des Lösungsprozesses benutzt wurde, werden Linearkombinationen in H zur *Mischung von Zeilenvektoren benutzt und damit die Lösungsmethode des GAUSS-JORDAN-Algorithmus selbst mit dem gleichen begrifflichen Werkzeug verstehbar rekonstruiert*. Die semi-automatische Darstellung des GAUSS-JORDAN-Algorithmus motiviert später zur Darstellung des Lösungsprozesses in Matrixform und zur Matrix- bzw. *Zeilensicht* des Lösungsprozesses. Gleichzeitig werden Skalierungen und Scherungen zu *Elementarmatrizen* verallgemeinert, die den Lösungsprozess nunmehr rein algebraisch formulieren lassen und daraus das *Konzept der inversen Matrix als Prozessverdichtung konstruktiv* gewinnt. Didaktisch ist die Rekonstruktion der üblichen Äquivalenzumformungen<sup>7</sup> des GAUSS-JORDAN-Algorithmus entscheidend: siehe Abbildung B.5.

<sup>7</sup>siehe z.B. [11, S. 8], wo es heißt: „(2) eine Gleichung mit einer Zahl  $c \neq 0$  multiplizieren, (3) eine Gleichung durch die Summe oder Differenz eines Vielfachen von ihr und einem Vielfachen einer **anderen** Gleichung ersetzen.“

- `row(M,1), row(M,2), 1/3*row(M,1)`  
 $(3 \ 6 \ 6), (2 \ 3 \ 3.5), (1 \ 2 \ 2)$


 $+$   $2*$   $=$   $?$  *wahin soll ich die neue Zeile speichern?*

- `1*row(M,1) + 2*row(M,2)` // (1)  
 $(7 \ 12 \ 13.0)$
- `M1 := stackMatrix( 1/3*row(M,1) , row(M,2) )` // (2)  
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3.5 \end{pmatrix}$
- `-2*row(M1,1) + 1*row(M1,2)`  
 $(0 \ -1 \ -0.5)$
- `M2 := stackMatrix( 1*row(M1,1) + 0*row(M1,2), |`  
 $\qquad\qquad\qquad -2*row(M1,1) + 1*row(M1,2) ) // (3)  
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Abbildung B.5: Rekonstruktion des kritischen Lösungsschrittes im GAUSS-JORDAN-Algorithmus am Beispiel des LGS  $\{3x + 6y = 6 \wedge 2x + 3y = 3.5\}$  bzw.  $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6.0 \\ 2 & 3 & 3.5 \end{pmatrix}$ . Zeile (2) zeigt den Normierungsschritt für die erste Zeile der Ausgangsgleichung und (3) den ersten Eliminationschritt am Zwischenresultat M1

Während die Anwahl der  $i$ -ten Gleichung alias der  $i$ -ten Matrixzeile der Gleichungsmatrix  $M$  durch  $\text{row}(i,M)$  sowie die Summe von Gleichungen oder das Vielfache einer Gleichung intuitiv und analog zu den Spaltenoperationen bildbar sind<sup>8</sup>, muss im CAS *das veränderte LGS zur Fortsetzung des Lösungsprozesses explizit konstruiert werden*. Dazu werden *die relevanten Gleichungen* (Matrixzeilen) mit dem CAS-Befehl `stackmatrix` in der *gewünschten Reihenfolge zum neuen LGS übereinander gestapelt*, vgl. (2) bzw. (3). Dieser Prozess wird beim händischen Rechnen nur implizit vollzogen, hier aber im halbautomatischen<sup>9</sup> Prozessnachbau verständnisfördernd bewusst gemacht. Damit kann ein vorgelegtes LGS halbautomatisch gesteuert und gezielt mitdenkend gelöst werden. Zeile (3) des CAS-Skripts verdeutlicht aber auch, dass der kritische Schritt im GAUSS-JORDAN-Algorithmus im *Stapeln zweier Linearkombinationen von Matrixzeilen*, d. h. dem *zielführenden Mischen zweier Gleichungszeilen* besteht. Die Kernidee der Linearkombination findet sich also im GAUSS-JORDAN-Algorithmus selbst wieder.

Da das Hinschreiben der kompletten gestapelten Linearkombinationen von Zeilenumformungen CAS-syntaktisch lästig ist, wird diese Handlung im CAS zu einer Funktion `Lkz` abstrahiert: Denn es kommt nur auf die „Mischfaktoren“ an, mit der von jeder Zeile „etwas beigemischt“ wird.

```

• Lkz := (Z, A) -> Z[1]*row(A,1) + Z[2]*row(A,2); // (4)
 M1 := stackMatrix(Lkz([1/3,0],M), Lkz([0,1],M)); // (5)
 M2 := stackMatrix(Lkz([1,0],M1),
 Lkz([-2,1],M1)) // (6)

```

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 3.5 \end{pmatrix} \quad M1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3.5 \end{pmatrix} \quad M2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Um die Generalisierung des Konzeptes der Linearkombination anzubahnen wird die Linearkombination von Zeilenvektoren in (4) indiziert formuliert und damit der Normierungsschritt  $M1$  in (5) und die erste Elimination in (6) CAS-sprachlich formuliert. Z. B. bedeutet (6), dass  $M2$  eine Matrix ist, die aus zwei gestapelten und vermischten Gleichungszeilen von  $M1$  besteht: Die erste Zeile der neuen Matrix (des neuen LGS)  $M2$  besteht aus der Summe des 1-fachen der 1-ten Zeile von  $M1$  und des 0-fachen der zweiten Zeile von  $M1$ , *die neue zweite Zeile von  $M2$  besteht aus der Mischung des (-2)-fachen der 1-ten Zeile von  $M1$  zum 1-fachen seiner zweiten Zeile*.

Die entscheidende Erkenntnis ist nun, das *sowohl die Stackbildung als auch der GAUSS-JORDAN-Schritt simultan durch eine Linksmultiplikation* mit einer („Elementar-“)Matrix ausgedrückt werden können. Dieses Phänomen wird für die Lernperson im CAS beobachtbar gemacht, siehe Abbildung B.6.

Die Lernperson konstruiert ihr Verständnis der Elementarmatrix aus den beobachteten Phänomenen und dem erkennbaren algebraischen Muster, wonach nur das Vielfache  $k$  und die Position  $(i, j)$  seiner Einpflanzung in die Einheitsmatrix eine Rolle spielt:

<sup>8</sup>vgl. Abbildung B.5, (1)

<sup>9</sup>Auf die mögliche Verwendung der Systemroutine `addRow` wird verzichtet, da hierbei die Konstruktion der Elementarmatrizen des GAUSS-JORDAN-Algorithmus nicht verständlich würde. `addRow(A, i, j, s)` gibt eine Kopie von  $A$  zurück, in der  $j$ -te Zeile von  $A$  durch  $s \cdot \text{row}(A, i) + \text{row}(A, j)$ , d. h. der Summe aus dem  $s$ -fachen der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Zeile ersetzt ist. Auch auf die Bildung der neuen Matrix durch eine Transponierung von Spalten wird verzichtet, da die direkten Zeilenoperationen thematisiert sind.

```

• matrix([[1/3,0]]) * M // eine Lkz bilden (7)
 (1 2 2)

• matrix([[0 ,1]]) * M // eine Lkz 'ohne' Wirkung (8)
 (2 3 3.5)

• matrix([[1/3,0], [0,1]]) * M // beide Lkz's stapelnd zusammenfügen (9)
 // ergibt eine "Umformungsmatrix"
 (1 2 2)
 (2 3 3.5)

• M2 := matrix([[1,0], [-2,1]]) * M1 (10)
 // 1.Zeile von M1 unverändert lassen und
 // 2.Zeile von M1 durch -2*Zeile1 + 1*Zeile2 ersetzen
 (1 2 2)
 (0 -1 -0.5)

```

Abbildung B.6: Stackbildung und GAUSS-JORDAN-Schritt als Linksmultiplikation mit einer („Elementar“)matrix am Beispiel des LGS  $\{3x + 6y = 6 \wedge 2x + 3y = 3.5\}$  bzw.  $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6.0 \\ 2 & 3 & 3.5 \end{pmatrix}$ . Zeile (7) und (8) demonstrieren die operative Äquivalenz der Linksmultiplikation mit einem *Zeilenvektor* zu einer Linearkombination von *Zeilen*. (9) bzw. (10) zeigen *das stapelnde Zusammenfügen zweier Zeilen-Mischungen zur Umformungsmatrix*, der „Elementarmatrix“  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

- der Zeilenindex  $i$  gibt an, dass die  $i$ -te Zeile der umzuformenden Matrix ersetzt wird;
- der Spaltenindex  $j$  gibt an, dass die  $j$ -te Zeile der umzuformenden Matrix  $ver-r$ -facht und zur ausgewählten  $i$ -ten Zeile addiert („gemischt“) wird;
- im Spezialfall  $i = j$  findet eine Normierung (Skalierung) am Platz statt.

Das didaktische Problem ist, dass die Lernperson die gewohnte algebraische Rechenregel zur Matrizenmultiplikation  $*$  als „*Zeile mal Spalte*“ im Kontext des GAUSS-JORDAN-Algorithmus flexibel<sup>10</sup> uminterpretieren muss als *als Verteilung von Zeilenelementen als Mischanteile an Zeilen*, d. h. die ursprünglich punktuell-elementweise Konstruktion der Produktmatrix wird nun durch eine blockartig-zeilenweise Konstruktion ersetzt: Statt an das Muster „ $. * . + . * . = .$ “ ist nun an ein anderes algebraisches Rechen-Muster „ $. * - + . * - = -$ “ zu denken. Mit anderen Worten: Die Skalarprodukt-*Sicht* „*Zeile • Spalte*“ von  $*$  wird durch eine Linearkombination-*Sicht* auf komplette Zeilen abgelöst – gleichwohl bleibt die Rechenregel für  $*$  unverändert gültig. In der „alten“ Sicht wäre jedoch die Wahl der Elemente einer Elementarmatrix nicht verstehbar, diese erklären sich nur aus dem Eliminationswunsch im Lösungsprozess und dieser nimmt dazu die Zeilen (Gleichungen) einer Matrix explizit in den Fokus, siehe Abbildung B.7.

<sup>10</sup>Auch aus diesem Grunde wurde in Etappe C auf eine zu starke Betonung der Rechenregel für die Matrixmultiplikation  $*$  verzichtet. Dies hätte in einer zu starken Fixierung auf die schematische Regel resultieren können.

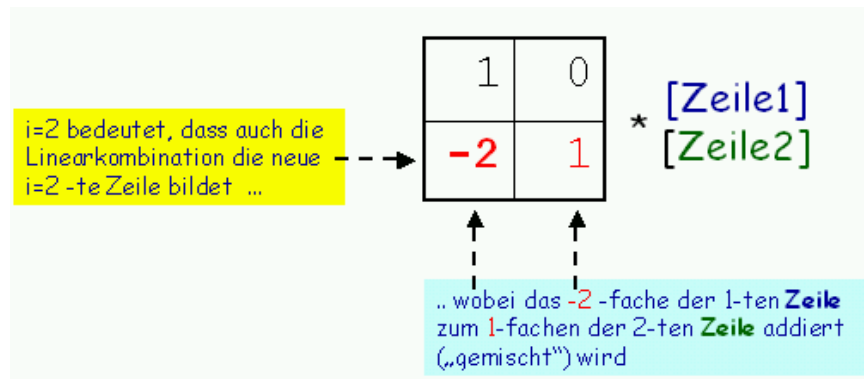


Abbildung B.7: Zur Konstruktion und Interpretation einer  $2 \times 2$ -Elementarmatrix als Umformungsschritt im GAUSS-JORDAN-Algorithmus. Die übliche Skalarproduktinterpretation von  $*$  als „Zeile mal Spalte“ wird dabei aufgegeben zu Gunsten der Interpretation von  $*$  als *Mischung von Zeilen* mit den Elementen einer Elementarmatrixzeile als Mischungsanteile.

Die Implementation des Konzeptes einer Elementarmatrix<sup>11</sup>  $Em$  im CAS ist nun leicht und orientiert sich an den beobachteten Phänomenen. Das folgende Skript stellt in (0) eine quadratische Einheitsmatrix  $M$  der Dimension  $d$  bereit und ändert dessen  $(i, j)$ -tes Element in (1) zu  $k$  ab:

```
• Em := (i,j,k,d,M) -> (M:=matrix(d,d,1,Diagonal); // (0)
 M[i,j] := k; return(M)); // (1)
```

```
R := Em(1,2,-2,2)*Em(2,2,-1,2)*Em(2,1,-2,2)*Em(1,1,1/3,2)*M; // (2)
```

```
G := Em(1,2,-2,2)*Em(2,2,-1,2)*Em(2,1,-2,2)*Em(1,1,1/3,2) // (3)
```

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix} \quad G := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Zeile (2) zeigt den *halbautomatischen* Lösungsprozess des LGS  $\begin{pmatrix} 3x+6y = 6 \\ 2x+3y = 3.5 \end{pmatrix}$  bzw.  $M := \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3.5 \end{pmatrix}$  durch ein Folge von im Kopf zielführend gewählten Elementarmatrizen<sup>12</sup>.

Jeder (algebraischen) Elementarmatrix entspricht – geometrisch-funktional interpretiert – eine Skalierungs- oder eine Scherungsabbildung. Die algebraischen Objekte „Elementarmatrizen“ generalisieren also die in Etappe D explorierten geometrischen Phänomene, die hier

<sup>11</sup>Die Lernpersonen spielen dazu in H4 als Aktivitätselement ein *Elementar-Matrix-Spiel* im CAS, um informal (d. h. ohne explizite Wortdefinitionen) Konzept und Eigenschaften zu studieren: Dabei werden u. a. die Parameter spielerisch variiert und die Reaktionen prognostiziert. Die Effekte bei einer Linksoperation der Elementarmatrizen auf Objektmatrizen (dem LGS) werden in einem kooperativen *Effekt-auf-Matrix-Spiel* in H5 erfahrbar gemacht. Damit wird die Konstruktion von Elementarmatrizen in Kopfrechnung mit Wirkungsantizipation gefördert.

<sup>12</sup>Man vergleiche dazu die CAS-Etappen H3 .. H6, die diese Umformungen methodisch als dialogische Spielhandlungen realisieren.

in H4 zur lokalen Ordnung wieder aufgegriffen werden und ein geometrisches Verständnis des Lösungsprozesses ermöglichen, siehe Abbildung B.8. Während die Zeilen- und Spaltenperspektive als visuelle Repräsentationen des GAUSS-JORDAN-Algorithmus wohlbekannt sind<sup>13</sup> wird hier eine andere Sichtweise auf den Lösungsprozess eines linearen Gleichungssystems  $M$  vorgeschlagen, welche die Repräsentation ein drittes Mal ändert: Das „Matrixbild“ von  $M$  visualisiert die Spalten von  $M$  durch einen *Polygonzug*, der die Spalten von  $M$  (als Punkte markiert) von der ersten bis zur letzten verbindet und die Endposition durch eine Raute markiert. Abbildung B.8 zeigt z. B. eine Folge von Matrixbildern, die in einer szenischen Sequenz den Lösungsprozess aus (2) visualisiert, vgl. dazu die Lernetappen H7 und H8.

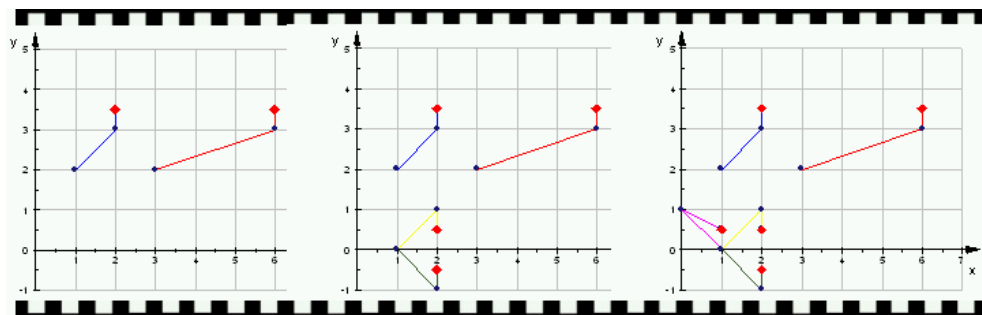


Abbildung B.8: Geometrische Interpretation des Lösungsprozesses eines  $2 \times 2$ -LGS  $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.0 \\ 3.5 \end{pmatrix}$  durch eine Folge von CAS-Matrixbildern. In dieser Sichtweise transformiert der GAUSS-JORDAN-Algorithmus eine *Startkonfiguration* (linke Szene, Fig. rechts oben) in die *Standardkonfiguration* (Standard-Basis), die von  $[1; 0]$  über  $[0; 1]$  zum Lösungspunkt  $[1; 0.5]$  (rechte Szene, Fig. links unten) führt und an der die *Lösung des LGS als Endpunkt des Polygonzuges* an der Rautenposition abgelesen werden kann.

Die GAUSS-JORDAN-Transformationsschritte werden in ihrer Beschreibung durch Elementarmatrizen als lineare Abbildungen erfahren, die auf dem Gleichungssystem (Matrix) operieren. Dabei lassen sich Scherungen, Streckungen und Spiegelungen an den Koordinatenachsen identifizieren.

Im gleichen Referenzkontext wird in (3) die *inverse Matrix*  $G$  zur Systemmatrix  $A := \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  des LGS aus der algebraischen Ablösung des Lösungsprozesses *als Produkt der Elementarmatrizen explizit konstruiert*, vgl. auch das *Invertierungsspiel* als zugehörigen generischen Organizer in H9, siehe Abbildung B.9.

Zur Anreicherung der Konzeptvorstellung der inversen Matrix  $A^{-1}$  auf der Schemaebene empfiehlt sich nach dem Vorschlag von TREFETHEN<sup>14</sup> und unter Rückbezug auf die Grundvorstellung von Linearkombinationen die *Interpretation der Lösung*  $A^{-1} * B$  *als eindeutig*

<sup>13</sup>vgl. z.B. [192, S. 22]

<sup>14</sup>vgl. [200, S. 8-9], wo es heißt: „Wenn man das Produkt  $x = A^{-1}b$  hinschreibt, ist es wichtig, dass die Inverse-Matrix-Notation nicht verdunkelt, was wirklich passiert! Anstatt an  $x$  als das Resultat der Anwendung von  $A^{-1}$  auf  $b$  zu denken, sollten wir es verstehen als den eindeutigen Vektor, der die Gleichung  $Ax = b$  erfüllt. [...] D. h.  $x$  ist der Vektor der Koeffizienten der eindeutigen Linearkombination von  $b$  in der Basis der Spalten von  $A$ . Dieser Gesichtspunkt kann nicht genug betont werden, also wiederholen wir:

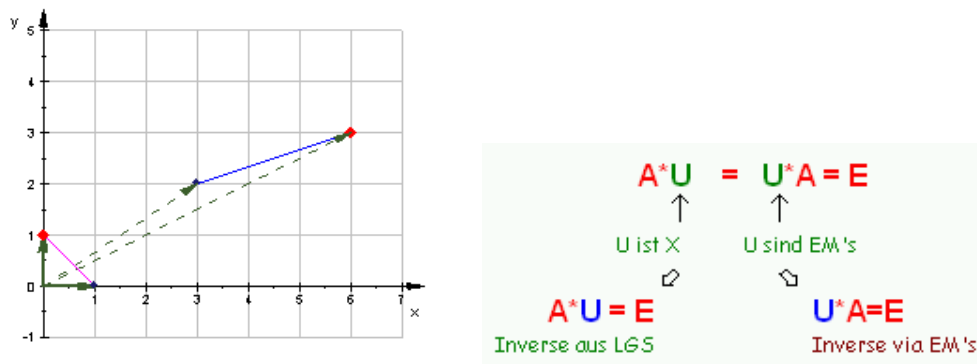


Abbildung B.9: Zur geometrischen und algebraischen Interpretation der inversen Matrix und der Links-Multiplikation mit  $A^{-1}$  als Operation des Basiswechsels

*bestimmte Entwicklungsfaktoren in der Linearkombination von  $B$  aus den Spalten von  $A$  als Basis.*

H10 deutet die inverse Matrix algebraisch als eindeutige Lösung  $U$  des LGS  $A * U = E$  mit der Einheitsmatrix  $E$  als rechter Seite und führt das CAS-Instrument  $1/A$  bzw.  $A^{-1}$  zur automatischen Berechnung ein. Die beiden Gleichungsseiten der charakterisierenden Gleichung  $A * U = U * A = E$  der Inversen  $U$  können im konstruierten Kontext jenseits der formalen algebraischen Bedingung aber mit unterschiedlichem Sinn hinterlegt werden, vgl. Abbildung B.9:

- $U$  ist algebraisch-*implizit* als Lösung der Gleichung  $A * U = E$  *gekennzeichnet*;
- $U$  ist geometrisch-*konstruktiv* das Produkt von Elementarmatrizen  $E_1 * \dots * E_n = U$  mit  $U * A = E$ .

Insbesondere wird damit per Konstruktion *verstehbar*, *warum* eine inverse Matrix mit ihrer Datenmatrix kommutiert, s. o.

In H11 wird die algebraische Kennzeichnung  $A * U = E$  zu dem bekannten  $A.E$ -Ansatz zur Inversenberechnung angesetzt und im CAS mittels `gaussJordan` gelöst.

## Etappe I

dient der Konsolidierung der erworbenen Konzepte und stellt dazu produktive (Modellierungs)Aufgaben<sup>15</sup> bereit.

$A^{-1}b$  ist der Vektor der Koeffizienten in der Entwicklung von  $b$  längs der Basis aus den Spalten von  $A$ . Die Multiplikation mit  $A^{-1}$  ist eine Operation des *Wechsels der Basis* [...].“

TREFETHEN schlägt hier also eine sinngebende Interpretation für die formale algebraische Operation des Auflörens der Gleichung  $A * X = B$  nach  $X$  vor.

<sup>15</sup>diese sind i. W. dem Buch [4] entnommen

I1 trägt die aus der Sekundarstufe I bekannte Hyperebenen-Darstellung von Gleichungssystemen im CAS nach, deutet aber dieses „Zeilenbild“ eines LGS neu unter dem Aspekt der Invarianz der Lösung unter den Umformungsschritten: Im Zeilenbild der Anschauungsebene wird jede Zeile einer Gleichungsmatrix  $M$  visuell als eine Gerade repräsentiert und die eindeutige Lösung ist der Schnittpunkt dieser Geraden. Die Koordinaten dieses Lösungspunktes bleiben invariant während des GAUSS-JORDAN-Algorithmus, der aus dieser Perspektive die Geraden des LGS in eine Standardposition parallel zu den Koordinatenachsen transformiert, an der die Lösung des LGS direkt an den Koordinatenlinien abgelesen werden kann, siehe Abbildung B.10.

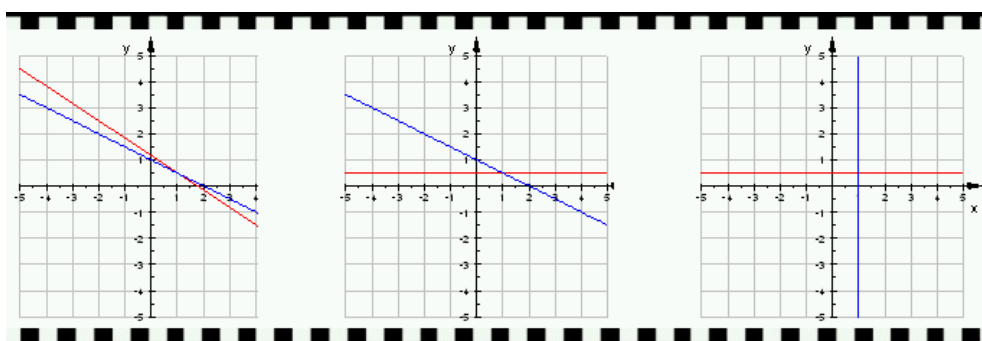


Abbildung B.10: der Lösungsprozess des  $2 \times 2$ -LGS  $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.0 \\ 3.5 \end{pmatrix}$  im Zeilenbild und das Phänomen der Koordinateninvarianz des Lösungspunktes  $(1; 0.5)$

I5 (nach STRANG) zielt auf die flexible Nutzung vielfältiger Lösungsmethoden für  $2 \times 2$ -LGS sowie ihre multirepräsentative Darstellung im Zeilenbild, Spaltenbild und Matrixbild ab (auch ohne CAS). Es sind aber bereits unterbestimmte LGS eingestreut, die nach möglichen Gründen für Lösungs-Hindernisse forschen lassen.

Die meisten Modellierungen wie z. B. der historische „Chinesische Beamtentest“<sup>16</sup>, die „Re-galkomposition“, „Bastelbedarf“ und „Zahlenlotto“ führen auf  $n \times n$ -LGS mit mindestens  $n = 4$  Dimensionen und sind daher für die Lösung mit einem CAS geeignet. Abschließend wird in I9 das „Wasserturm“-Problem aus G gelöst, wobei gemessene und theoretisch-prognostizierte Werte verglichen werden.

**Etappe IX** bietet ein fakultatives CAS Mini-Projekt, dass auf eine Implementation des GAUSS-JORDAN-Algorithmus als funktionales Programm im CAS zielt. Die Codierung greift die erworbenen theoretischen Einsichten über Elementarmatrizen auf und nutzt sie zur Konstruktion des Algorithmus. Ein Mehrwert gegenüber den professionellen built-in-Routinen des CAS MuPAD besteht in der Implementation tutorieller Elemente durch die Anzeige von Zwischenresultaten.

In diesem Programmier-Projekt werden die einzelnen Phasen des GAUSS-JORDAN-Algorithmus als allein stehende MuPAD-Funktionen **Eliminieren**, **Normieren** und **Substituieren**

<sup>16</sup>ein historisches Problem von Liu Hui (nach ARTMANN/TÖRNER)



realisiert, wodurch jede Einzelphase des gesamten GAUSS-JORDAN-Algorithmus identifizierbar, individuell testbar und aufrufbar wird. Diese Teilfunktionen werden am Ende durch eine mathematische Komposition funktional verkettet, z. B. ist dann folgender Aufruf möglich:

```

• M := matrix([[2, 4,-2, 2],
 [4, 9,-3, 8],
 [-2,-3, 7,10]]);
Substituieren(Normieren(Eliminieren(M)));

```

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Genauer entnehme man dem Worksheet zur Etappe IX bzw. [154].

## Etappe J

bietet zur Stabilisierung der Begriffsbildungen eine Auswahl fakultativer Mini-Projekte in realitätsnahen Referenzkontexten wie z. B. in J1 die Zusammenmischung einer CAMBRIDGE-Diät, in J2 die Modellierung einer Skiflugschance mit einem polynomialem Ansatz bzw. in J3 als kubischer Spline (mit Vernetzung zur Analysis), eine Pannenanalyse in einem Netzwerk verbundener Wasserleitungen (J4) oder einer offenen Selbstproduktion mit Eigenrecherche in J8 zum Leontief-Modell  $X-T*X=Y$  einer Ökonomie.



# Anhang C

## Zu den Lernetappen im Parcours über singuläre LGS

Dieser Anhang skizziert kurz die hypothetische Lerntrajektorie zur Entfaltung der Leitidee der partiellen Invertierbarkeit, die dem zugehörigen CAS-Lernparcours K ... P zu Grunde liegt:

**K** Legierungsproduktion (1. Referenzproblem)

**L** Lösungsvariationen zum 1. Referenzproblem

**M** LEONARDO's Einkauf (2. Referenzproblem)

**N** algebraische Lösungsverfahren zur Bestimmung der Lösungsmenge  
und ihre geometrische Interpretation

**O** Erhöhung der Unterbestimmtheit und Lösungs„ebenen“;  
Pseudoinverse als verallgemeinerte algebraische Lösungsmethode

**P** Produktive Übungen zum Wechsel der Darstellungsformen;  
selbstständige Untersuchung von Schnittproblemen und Lagebeziehungen

Im Folgenden beschreibe ich kurz die methodische Ausgestaltung der einzelnen Etappen in diesem dritten Lern-Parcours, die als Aufgabenkomplexe zur referenziellen Verbindung der einzelnen Themenstränge dienen und die skizzierte hypothetische Lerntrajektorie konkretisieren.

**Etappe K** führt am situativen Kontext „Management in der Metallurgie<sup>1</sup> (Legierungsberechnung)“ in den Themenkomplex singulärer LGS ein und stellt – unabhängig von den Schülerlösungen – in Etappe L das Standard-Verfahren zur Lösung singulärer LGS vor. Dabei werden die Konzepte *Pivotspalte*, *Basis*- und *Freie Variable* eingeführt und die

---

<sup>1</sup>vgl. [4, S. 7 bzw. S. 72]

CAS-Instrumentalisierung durch flexible Verwendung der Routinen `gaussJordan()` bzw. `matlinsolve()` verstetigt. Diese Problemstellung wurde ausgewählt, weil in der Zusatzfrage „Wie ist die Beschaffung am billigsten zu gestalten?“ die Existenz eines freien Parameters als Lösungs-Instrument genutzt und der Themenkomplex Lineares Optimieren angestoßen werden kann.

**Etappe M** stabilisiert anhand produktiver Aufgaben sowohl die Modellierung diverser situativer Kontexte als auch die CAS-Instrumentalisierung. Auch zeigen die Aufgaben das Mischungsparadigma der Linearen Algebra nochmals auf, wie z. B. M1 „Expeditionsbedarf“<sup>2</sup>, M2 „Fluss in Netzen“<sup>3</sup>, M4 „Das Gleichgewicht unveränderbarer Bestandteile in der Chemie“<sup>4</sup>. M7 „Leonardo kauft auf dem Markt ein“ leitet dagegen als niedrig-dimensionales Problem die Problematik der Visualisierung der Lösungsmengen und die neue Konzeptformation der Pseudoinversen ein. Auch hier ist die Nebenbedingung der Ganzzahligkeit der Lösung von Bedeutung, nutzt sie doch die Eindimensionalität der Lösungsmenge entscheidend aus. Erst mit dieser Problemstellung löst sich die hypothetische Lerntrajektorie vom ursprünglichen Referenzproblem und dringt zur kontextfreien, formalen Betrachtung von Invertierungsbarrieren vor. Die Behandlung der singulären Linearen Gleichungssysteme wechselt ihren Fokus von der Betrachtung algorithmischer Lösungsmethoden auf die Frage nach der Größe bzw. nach dem abstrakten Muster der Lösungsmenge.

**Etappe N** führt in N2b die Parameterdarstellung der Lösungsmenge funktional als CAS-Zuordnung

```
• L := t -> matrix([-30+3/2*t,60-5/2*t,t])
```

ein und visualisiert diese Menge sowie den Lösungsraum des zugehörigen homogenen LGS in N2d als Geraden im Anschauungsraum. Diese Erfahrungen werden bis N5 erweitert, ehe in N6 die Standardbeschreibung  $g : X = p + R \cdot t$  sowie die CAS-Notationen für Punkte ( $^\circ \dots$ ), (geometrische) Richtungsvektoren ( $\sim > \dots$ ) und (algebraische) Vektoren ( $\sim \dots$ ) als Beschreibungssprache für den Kontext eingeführt werden. N8 bringt eine erste Exploration im Themenkreis der Pseudoinversen, die zunächst mustererkennend aus dem `gaussJordan`-Endstand abgelesen wird. Hier wird zunächst die qualitativ zielführende Intuition aus dem mentalen Ableseprozess des CAS-Outputs und die algebraische Analogie zu den Eigenschaften der regulären Inversen aufgebaut. Die Einheit schließt mit der Pseudoinversen-Lösungsformel für das LEONARDO-Problem, das damit zum abstrakten Referenzkontext für singuläre LGS wird.

**Etappe O** weitet die Vor-Erfahrungen – nun vom Referenzkontext gelöst – auf höhere Dimensionen aus. In O1 wird dazu die erkenntnisleitende Frage gestellt: „Was passiert, wenn

<sup>2</sup>vgl. [11, S. 15]

<sup>3</sup>vgl. [141, S. 106]

<sup>4</sup>vgl. [141, S. 108]

wir (eine) weitere Gleichung(en) weglassen, d. h. die Unterbestimmtheit nochmals vergrößern?“ Die Antwort auf diese Leitfrage (ab O2) kann nunmehr multi-konzeptionell (Konzept der freien Variablen, Pseudoinverse), multi-instrumentell (`gaussJordan`, `matlinsolve`, `1/...`) und multi-repräsentativ (algebraisch, geometrisch) von den Lernenden weitgehend selbst untersucht werden. Die Visualisierung der Lösungsmengen führt auf Ebenen im Anschauungsraum, vgl. O3 ff. Dabei wird in O5 und O6 eine von zwei Parametern abhängige Koordinatenliste  $[x1, x2, x3] = [3+2r-1/2s; r; s]$  zunächst klassisch als Affinkombination notiert

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und diese äquivalent in Matrixgestalt gewandelt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

Dieser Gestaltwandel ist in der CAS-freien Schulbuchliteratur nicht üblich, erweist sich aber im Matrixkontext als verständnisfördernd, da hierdurch *die später vorzunehmende Abstraktion zur Lösungsformel mit Pseudoinversen musterprägend vorbereitet* wird.

Das Design des Lernarrangements lehnt sich im Folgenden an [153, S. 69 ff] an. Vielfältige Hypothesen über die Wirkung der eingeführten Instrumente werden verifiziert, die Einheit dringt daher an ihrem Ende zur Exaktifizierung der Beobachtungen durch eine vertikale Mathematisierung auf abstraktem Schemaniveau vor, über die in der Sprache des CAS – und in der Folge davon auch fachsprachlich – sinnhaftig geredet werden kann:

- experimentelle CAS-Analysen von *Eigenschaften* einer regulären Inversen  $A^{-1}$ , die auf Pseudoinverse  $A^{-}$  übertragbar sind (Tragfähigkeitsanalyse des Permanenzprinzips);
- *Entdecken der charakterisierenden Gleichung*  $A * V * A = A$  für Pseudoinverse, vgl. O8c;
- *Herleitung eines Kriteriums für die Lösbarkeit* eines (singulären bzw. beliebigen) LGS  $A * X = B$  bzw. die *Angabe einer expliziten Formel für die Lösungsmenge* in weitestgehender Analogie zur Explizitformel  $X = A^{-1} * B$  für ein reguläres  $A$ , vgl. O11;
- *Konstatierung der Nicht-Eindeutigkeit* einer Pseudoinversen zur Systemmatrix  $A$  im Gegensatz zur regulären Inversen, vgl. O9.

Diese vielfältigen algebraischen Aktivitäten schärfen den mathematischen Kontrast zu den Eigenschaften regulärer Inversen, die wechselseitige Betrachtung der jeweiligen algebraischen Eigenschaften und Beziehungen vertieft das Verständnis der zugehörigen algebraischen Sachverhalte. Die traditionelle Fixierung der Schule auf reguläre Matrizen im Falle eindeutiger Lösbarkeit und die unsystematische Behandlung singulärer LGS sowie das vollständige Ausblenden überbestimmter Systeme dehnt das concept image zu LGS nicht flexibel genug und setzt die jeweiligen Besonderheiten nicht wünschenswert klar gegeneinander ab.

Der Einsatz des CAS macht nicht nur die obigen algebraischen Objektstudien erst möglich, sondern fasst die zentralen Begrifflichkeiten in dialogfähige Funktionen:

- Das Kriterium für Pseudoinvers-Sein wird als wahrheitswertige Funktion `isPINV` expliziert, die auf die (An-)Frage „Ist  $A_{-}$  eine PseudoINVerse zu  $A$ ?“ mit „wahr“ oder „falsch“ antwortet:

- `isPINV := (a_,a) -> is (a* a_ * a = a)`

Diese Funktion kann alternativ als logische Infix-Relation mit dem (frei gewählten) Namen `pinv_zu` implementiert werden:

- `operator("pinv_zu", isPINV, Binary, 1000):`

Damit kann die Lernperson – statt funktional „`isPINV(V,A)`“ zu fragen – nun auch relational-prädikativ „`V pinv_zu A`“ (d. h.: 'Ist  $V$  pseudoinvers zu  $A$ ') schreiben.

- Die Lösbarkeitsbedingung (Lb) des Hauptresultates (s. u.) wird als eine Funktion `loesbar(A,B,U)` definiert,

- `loesbar := (A,B,U) -> if A*U*B=B and isPINV(U,A) then "loesbar!" else "NICHT-loesbar" end_if`

die im Falle der Lösbarkeit des LGS  $A \cdot X = B$  die Meldung „LGS loesbar“ und im Falle der Nicht-Lösbarkeit „Nicht loesbar“ antwortet. `loesbar` empfängt dabei als Eingaben die Systemmatrix  $A$  und die rechte Seite  $B$  des LGS sowie *irgendeine*(!) Pseudoinverse  $U$  von  $A$ .

- Die explizite Darstellung der Lösungsmenge im Hauptresultat (s. u.) wird als eine Funktion `Loesungsmenge(A,B,V,Z)` formulierbar.

- `Loesungsmenge := (A,B,U,Z) -> U*B + ((U*A)^0 - U*A ) * Z`

O10 formuliert als mathematisches Hauptergebnis dieser Erkundung den zentralen *SATZ über die Lösbarkeit und die Lösungsgesamtheit von  $A \cdot X = B$* :

Ist ein beliebiges  $m \times n$ -LGS  $A \cdot X = B$  vorgegeben, so gilt folgende *Alternative*:

- Ist  $A$  invertierbar, so hat das LGS  $A \cdot X = B$  die eindeutige einzige Lösung der expliziten Form  $X = A^{-1} \cdot B$ .
- Zur Probe gilt:  $A \cdot (A^{-1} \cdot B) = B$ .
- Ist  $A$  nicht invertierbar, so ist  $A$  pseudo-invertierbar mit  $A^{-}$  als einer beliebigen Pseudo-Inversen und  $X = A^{-} \cdot B$  ist eine spezielle Lösung.
- Zur Probe gilt:  $A \cdot (A^{-} \cdot B) = B$
- Kurz:  $A \cdot A^{-} \cdot B = B \iff A \cdot X = B$  lösbar (Lb)

- 
- Gilt die Aussage (Lb), so ist  $X = A^- * B + Z - A^- * A * Z$  (L)  
 die mit dem Parametervektor  $Z$  notierte allgemeine Lösung von  $A * X = B$ .

Diese Alternative stellt eine ästhetisch wie didaktisch befriedigende lokale Ordnung des Gegenstandsbereichs dar, die neben Erklärungen der beobachteten Phänomene zugleich explizite Berechnungsmöglichkeiten zur Verfügung stellt. Zudem ist der begriffliche Aufwand minimal und kommt mit dem Konzept der Pseudoinversen aus. Die konkrete Berechnung der Lösungsmenge kann sich dabei wahlweise auf die *halbautomatische Defektbeseitigung* („freie Variablen“) unter Nutzung der regulären Inversen bzw. auf die vollautomatische Lösungsroutine `matlinsolve` stützen oder *alternativ* auf die mentale Konstruktion einer Pseudoinversen aus einer verständnisvollen Inspektion des `gaussJordan`-Outputs und anschließender Substitution in der Lösungsformel.

**Etappe P** macht Geraden und Ebenen, die bisher im Kontext von Modellierungsaufgaben als Lösungsmengen von singulären linearen Gleichungssystemen in Erscheinung traten, selbst zum Gegenstand von *Objektstudien*. Dabei werden implizite und explizite Darstellungsformen dieser geometrischen Objekte genutzt, um ihre gegenseitige Lage in der Anschauungsebene bzw. dem Anschauungsraum selbsttätig zu studieren. Diese Untersuchungen werden von den Lernenden jeweils in selbstständigen Projekten vorgenommen: P1 fokussiert den flexiblen Wechsel der Darstellungsformen von Geraden und Ebenen, P2 adressiert Schnittprobleme und Lagebeziehungen, die in P3 lokal ordnend zu einer strukturierten Übersicht geführt werden. Dabei sollen auch (CAS-)Kriterien dafür angegeben werden, dass der jeweilige Fall eintritt. Übungen zu Pseudoinversen runden die produktiven Übungen ab.





# Anhang D

## Zum regionalen Themenkreis über das Skalarprodukt

Der regionale Themenkreis *Skalarprodukt* ist in folgende Etappen eines CAS-Parcours organisiert:

- Q Normalenform und Orthogonalität
- R Orthogonalität und Skalarprodukt
- S Orthogonalprojektion, Länge und Abstand
- T Produktive Aufgaben: Winkel und Vektorräume

Abbildung D.1 zeigt die grobe Verteilung der Aktivitäten in den CAS-Etappen auf die verschiedenen Themenstränge.

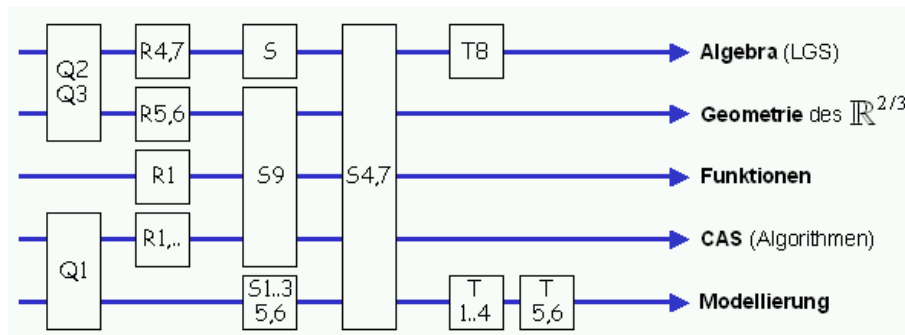


Abbildung D.1: Zur Aufgliederung der Themenstränge im vierten Lernparcours und die Verteilung der Etappenstationen auf die einzelnen thematischen Leitlinien

Im Folgenden beschreibe ich kurz die didaktische Funktion der einzelnen Etappen. Die didaktische Zielsetzung und die methodische CAS-Ausgestaltung für die phänomenorien-

tierte Einführung des Skalarproduktes und der Orthogonalprojektion als zentraler Operation wurden oben ausführlich elaboriert. Daher werden hier nur einige Ergänzungen aus CAS-Sicht angefügt. Details entnimmt man den CAS-Etappen, vgl. die beigegefügte CD.

**Etappe Q** stellt neben den Erfahrungen zur Orthogonalität im Umkreis der Normalform einer Ebene zusätzlich die auch im händischen Rechnen wertvolle *Spurform* einer Ebene vor und visualisiert bzw. automatisiert sie als CAS-Routine (Q2b). Weitere Aktivitäten studieren die überraschenden Orthogonalitätsphänomene der Lösungsmengen homogener unterbestimmter LGS in Q3 zusätzlich an Geraden in der Anschauungsebene.

**Etappe R** konstruiert das kanonische Skalarprodukt (R1) und nutzt es für vielfältige Beschreibungsformen (R3) einer Ebene, die den Objektcharakter einer Ebene unabhängig von ihrer algebraischen Gestalt betonen. R4 realisiert den Übergang von der Parameterform zur Koordinatengleichung *ohne Verwendung des Vektorproduktes* nach dem Vorschlag von KROLL [141] im CAS. R5 fordert die Lernenden auf, mit den erworbenen Grundkenntnissen selbstständig besondere Lagebeziehungen von Ebenen und Geraden im Anschauungsraum zu untersuchen, R7 fokussiert die Unterschiede der Geometrie homogener und inhomogener LGS.

**Etappe S** formuliert in S1 und S2 die Konzepte *Länge* und *Abstand* als Derivate des Skalarproduktes im CAS innerhalb des gegebenen Referenzkontextes:

```

• Laenge := X -> sqrt(skp(X,X)); // funktional oder
 Laenge := X -> sqrt(X ~* X); // operativ
 Abstand := (X,Y) -> Laenge(X-Y);

```

An die Darstellung der *Orthogonalprojektion als Prozess* in R4 schließt sich die Berechnung spezieller Abstände (Punkt-Ebene in R5, windschiefe Geraden in R6) an.

In R7 wird die Konstruktion der *Orthogonalprojektion als mentales Objekt* vorbereitet, wobei zunächst die funktionale CAS-Implementation  $\text{proj} := (X, U) \rightarrow U * (\text{tr}(U) * U)^{-1} * \text{tr}(U) * X$  der prozessual vorgestellten Projektion *von X auf U* prädikativ formulierbar gemacht wird:

```

• operator(".|", proj, Nary, 1798); // (1)
 F := |[3,1] .| |[3,2] // (2)

```

$$\begin{pmatrix} 33 \\ 13 \\ 22 \\ 13 \end{pmatrix}$$

In diesem Sinne betont Aussage (2) schon die Tatsache, dass  $F$  als *Ergebnis der Projektion von  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  auf  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$*  ein selbstständiges neues Objekt „ist“ – die Konstruktionsprozedur als solche ist also bereits in das Symbol ausgelagert und kann vergessen werden. Gleichzeitig erinnert aber die symbolsprachliche Sequenz „.|“ *piktogramatisch* noch an den (mental) abgelaufenen Herstellungsprozess von  $F$  als senkrechter „*Projektion eines Punktes auf eine Gerade*“. Schließlich erlaubt die Unterdrückung des zu projizierenden Objektes an die „*Projektion auf Etwas*“ als *eigenständiges mentales Objekt* zu denken:

$$\text{Proj} := U \longrightarrow U * (\text{tr}(U) * U)^{-1} * \text{tr}(U).$$

Diese algebraische CAS-sprachliche Formulierung lässt einerseits erkennen, dass das Objekt `Proj` allein aus `U` konstruiert ist und gestattet andererseits mit dem neuen Objekt `Proj` selbst zu operieren, z. B. die Projektor-Eigenschaft  $Proj^2 = Proj$  auf formaler Schemaebene zu thematisieren (vgl. R7d) oder bedeutungshaltige Konstruktionsbestandteile wie den MOORE-PENROSE-Faktor  $\text{mpi}(U) := (\text{tr}(U) * U)^{-1} * \text{tr}(U)$  zu identifizieren (R7e) und anschließend sinnhaftig mit ihm zu operieren (R7f). Überdies produziert der CAS-Output die zugehörige *Darstellungsmatrix* und verstärkt so die mentale Vorstellung eines korrespondierenden Objektes.

**Etappe T** zitiert in T1 erneut das situative Referenzproblem Kranbrücke und konstruiert in diesem Kontext den Winkelbegriff zwischen zwei Vektoren aus den bereits gebildeten Konzepten Länge und Skalarprodukt. Nach dem Vorschlag von FARIN [100] wird der Cosinussatz aus der geometrischen Szene implizit hergeleitet (also nicht aus Klasse 10 „zitiert“)

$$|A - B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2|A||B|\cos(\alpha) \quad (1)$$

und die Winkelformel  $\cos(\alpha) = \frac{A \bullet B}{|A||B|}$  aus der im CAS beobachteten Ergebnisgleichheit von (2) und (3) aus (1) gefolgert:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ expand( Laenge(A-B)^2 )} & \quad // (2) \\ \text{Laenge(A)^2 + Laenge(B)^2 - 2* skp(A,B)} & \quad // (3) \end{aligned}$$

$$a_1^2 - 2 a_1 b_1 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2$$

Die einfache Erhöhung der Anzahl der Komponenten von  $A$  und  $B$  macht die Dimensionsunabhängigkeit der Äquivalenzaussage im CAS beobachtbar.

Es folgen in T2 bis T4 produktive Modellierungsaufgaben wie „Segeln mit Windkraft“, „Abschleppen“ und „Kräfteverteilung“, vgl. GLASER [106]. Abschließend werden die neu konstruierten Begriffe nachträglich *axiomatisch charakterisiert*: die Länge als *Norm* (T6), der Abstand als *Distanz* (T7) und das Skalarprodukt als *positiv-definite symmetrische Bilinearform* (T8). Nach diesen Erfahrungen mit der charakterisierenden Axiomatik wird das Konzept des *Vektorraumes* axiomatisch formuliert, in dem Merkwort KANI1234 verdichtet gespeichert und vertraute Vektorraum-Modelle aus den Parcours theoretisch eingeordnet. Damit ist die höchste, kursinterne Abstraktionsstufe auf Schemaebene erreicht.

---

<sup>1</sup>Man beachte, dass das CAS eine Sortierung des Terms nach internen Ordnungskriterien vornimmt, welche die gewünschte Erkenntnis nicht sofort algebraisch evident macht: Der Lernende hat den Output des Expertensystems noch gedanklich umzusortieren.



# Anhang E

## Zur genetischen Dekomposition des Stücklistenproblems

Im Unterschied zur traditionellen Behandlung des Stücklistenproblems als Anwendungsproblem möchte ich in diesem Anhang eine Möglichkeit aufzeigen, das Stücklistenproblem *vor* der Behandlung des Gaußschen Algorithmus und *vor* der Einführung z. B. des Konzeptes der inversen Matrix gerade zum *Erwerb* dieser Konzepte zu verwenden, statt *Wissensanwendung* ist also *Wissenskonstruktion* intendiert. In Spießumkehr soll also das *Stücklistenproblem als ein Modell(ierungs)problem zur kontextbezogenen Anbahnung der angesprochenen Konzepte* fokussiert und geeignete CAS-Mikrowelten zum Konzepterwerb konstruiert werden.

## Zur genetischen Dekomposition des Stücklistenproblems

Im Folgenden skizziere ich die Verwendung von Stücklisten in der Praxis, begründe ihre geänderte curriculare und fachdidaktische Positionierung und analysieren ihre epistemologische Struktur als wertvollen Lerngegenstand im Unterricht der Linearen Algebra.

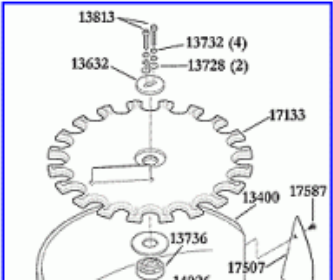
### Stücklisten als Ordnungsmittel der betriebswirtschaftlichen Praxis

Stücklisten sind in der professionellen und industriellen Praxis benutzte spezielle Verzeichnisse, die zugehörige elaborierte Theoriebildung ist Thema der Wirtschaftswissenschaften und neuerdings auch der Wirtschaftsinformatik<sup>1</sup>. Insbesondere werden Stücklisten als Hilfsmittel in **P**roduktions**p**lanungs- und -steuerungssystemen (PPS) verwendet, wo sie z. B. zur Arbeitsplatzbelegung, zur Reihenfolgebestimmung (technologische bzw. organisatorische), zur Feinterminierung oder zur Fortschrittskontrolle dienen oder in der Prozessindustrie als Rezepturlisten, Zutatenlisten oder Verflechtungsmodelle Verwendung finden.

---

<sup>1</sup>Ein Teil der folgenden Informationen basiert auf einem Skript der Technischen Universität Dresden, Fakultät Wirtschaftswissenschaften vom WS 2002/2003.

Click on schematic to see [larger version](#).



| Part# | Description                |
|-------|----------------------------|
| 13400 | Casefeed Bowl              |
| 13473 | Casefeed Motor - 4 RPM     |
| 13539 | Casefeed Cord Set          |
| 13540 | Casefeed Motor Cover       |
| 13632 | Casefeed Upper Disc Clutch |
| 13685 | 1/4-20x5/8 BHCS            |
| 13732 | 10-32x1.00 SHCS            |
| 13736 | Clutch                     |
| 13738 | SS Washers                 |
| 13779 | Micro Switch               |
| 13813 | Lockwashers                |
| 13833 | 1/4 Terminal Connector     |

Abbildung E.1: Beispiel einer originalen Stückliste (Ausschnitt) der U.S. Firma Dillon

Eine Explikation des Begriffs Stückliste findet man in der Industrienorm DIN 199 Teil 2 Nr. 51:

„Die *Stückliste* ist ein für den jeweiligen Zweck vollständiges, formal aufgebautes Verzeichnis für einen Gegenstand, das alle zugehörigen Gegenstände unter Angabe von Bezeichnung, Sachnummer, Menge und Einheit enthält.“

Stücklisten werden nach der Art bzw. dem Grad ihrer Strukturierung oder nach ihrer Funktion eingeteilt und gestatten so unterschiedliche Perspektiven auf denselben Gegenstand. In der Fertigungsindustrie unterscheidet man z. B.

- *Mengenübersichtsstückliste* (auch: *Materialstückliste*), die lediglich ein Verzeichnis aller in einer Einheit enthaltenen Komponenten darstellt;
- *Strukturstückliste*, die alle in das betrachtete Teil eingehenden Teile mit der Gesamtzahl, mit der sie (direkt *und* indirekt) in das betrachtete Teil eingehen, auflistet;
- *Baukastenstückliste*, die teilstrukturierend direkt untergeordnete Teile mit der Anzahl, mit der sie (direkt) in das betrachtete Teil eingehen, auflistet („direkter Aufwand“).

| Mengenübersicht            |          | Strukturstückliste         |         | Baukasten Strukturstückliste |    |            |      |
|----------------------------|----------|----------------------------|---------|------------------------------|----|------------|------|
| Erzeugnis:<br>20-er BioPen |          | Erzeugnis:<br>20-er BioPen |         | Erzeugnis:<br>20-er BioPen   |    |            |      |
| enthält:                   |          | besteht aus:               |         | Box BioPen                   |    | Baugruppe: |      |
| BioPen                     | Stkz. 20 | Box BioPen                 | Stkz. 1 | BioPen                       | 1  | Mine       |      |
| Box BioPen                 | 1        | BioPen                     | 20      | BioPen                       | 20 | Graphit    | gr 5 |
| Ton                        | gr100    | Stifthälfte                | 40      | Mine                         | 1  | Ton        | gr 5 |
| Stifthälfte                | 40       | Mine                       | 20      |                              |    |            |      |
| Graphit                    | gr100    | Graphit                    | gr100   |                              |    |            |      |
| Mine                       | 20       | Ton                        | gr100   |                              |    |            |      |
| Ungeordnete Aufstellung    |          | Strukturierte Ordnung      |         |                              |    |            |      |

Abbildung E.2: Stücklistenarten am Beispiel der Produktion von Bleistiften nach R. THOME.

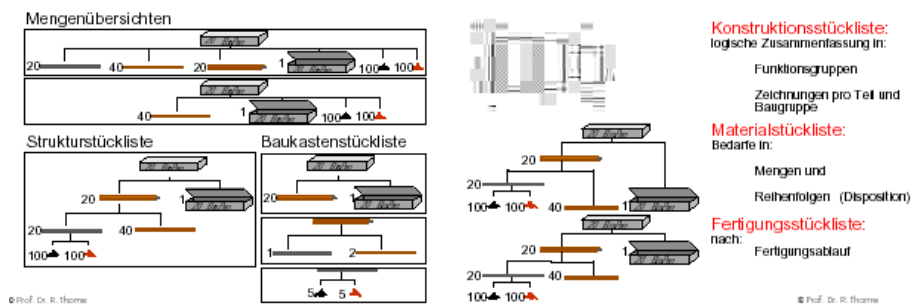


Abbildung E.3: Stücklistenfunktionen am Beispiel der Produktion von Bleistiften; nach R. THOME, a.a.O.

Eine anschauliche Darstellung der verschiedenen Funktionen von Stücklisten gibt der Foliensatz in Abbildung E.3.

Die Verwaltung und Auswertung der in einer Stückliste strukturiert gespeicherten Daten erfolgt z.B. in der Prozessindustrie über die bekannte Matrixgleichung (1) und deren Lösung (2):

$$B = X - T * X = (E - T) * X \quad (\text{E.1})$$

$$X = (E - T)^{-1} \quad (\text{E.2})$$

wobei

- $B$  den sog. *Primärbedarf*(smatrix vom Typ  $n \times 1$ ),
- $X$  die sog. *Gesamtproduktionsmenge* (Primär- und Sekundärbedarf) als  $n \times 1$ -Matrix,
- $T$  die sog.  $n \times n$ -Matrix des *direkten Produktionsverbrauchs* an selbst hergestellten Produkten sowie  $E$  die dimensionsgleiche Einheitsmatrix bezeichnen.

Neben der mathematischen Modellierung der Datenstruktur einer Stückliste wird im Folgenden die Herleitung der Modellgleichung (1) und ihre Lösung (2) fachdidaktisch diskutiert.

## Curriculare Positionierung

Im hier vorgeschlagenen revidierten Curriculum der schulischen Linearen Algebra wird das Stücklistenproblem direkt nach dem Lernarrangement über *Matrizen & Prozesse*<sup>2</sup> bzw. alternativ *Matrizen & Graphen*<sup>3</sup> behandelt. Auf beiden Wegen wird eine *Matrix* (bzw. das eine Matrix repräsentierende Symbol) *als Prozept*<sup>4</sup> begriffen, d. h. situationsabhängig

<sup>2</sup>Vgl. den CAS-Parcours A bis E; dort wurde die Matrizenmultiplikation über die lineare Substitution von Linearen Gleichungssystemen ineinander motiviert, wobei jede Faktormatrix als codiertes „gezipptes“ LGS interpretiert wurde.

<sup>3</sup>Vgl. den „alternativen“ CAS-Parcours A' bis E'; dort wurde die Matrizenmultiplikation mittels Di-Graphen und Operationen auf ihnen enaktiv eingeführt, vgl. [152, S. 199 ff].

<sup>4</sup>Vgl. [110, S. 67]; dort heißt es : „When the symbols act freely as cues to switch between mental concepts to think about and processes to carry out operations, they are called *procepts*.“

ambivalent-flexibel als Prozess oder als Objekt angesehen. Da die Lernperson an diesem curricularen Punkt als Lernvoraussetzungen lediglich über das Matrixkonzept i. o. S. und erste Operationen auf Matrizen (Multiplikation, Addition, Potenzbildung) verfügt, *mutiert das Stücklistenproblem vom formalen Anwendungsproblem*, auf dem bekannte Routinen ausgeübt werden<sup>5</sup>, *zur Lerngelegenheit mit epistemologischen Hindernissen*, kurz: Es wird konstruktivistisch umgebogen und gewinnt so tieferen Gehalt und höheren Lernwert. Das Exerzieren von *Rezepten* wird substituiert durch die Konstruktion von *Konzepten*. Die zugrunde liegende modellierende Matrix-Gleichung  $X - TX = B$  fungiert dabei gleichsam als *globaler advance organizer* i. S. v. AUSUBEL<sup>6</sup> auf später vertieft zu erwerbende Konzepte der linearen Algebra (wie die Inverse oder den Gauß-Algorithmus) und als lokale Leitlinie in einem Lösungsplan. Die nachfolgende Abb. E.4 verdeutlicht diese gewandelte didaktische Funktion des Stücklistenproblems.

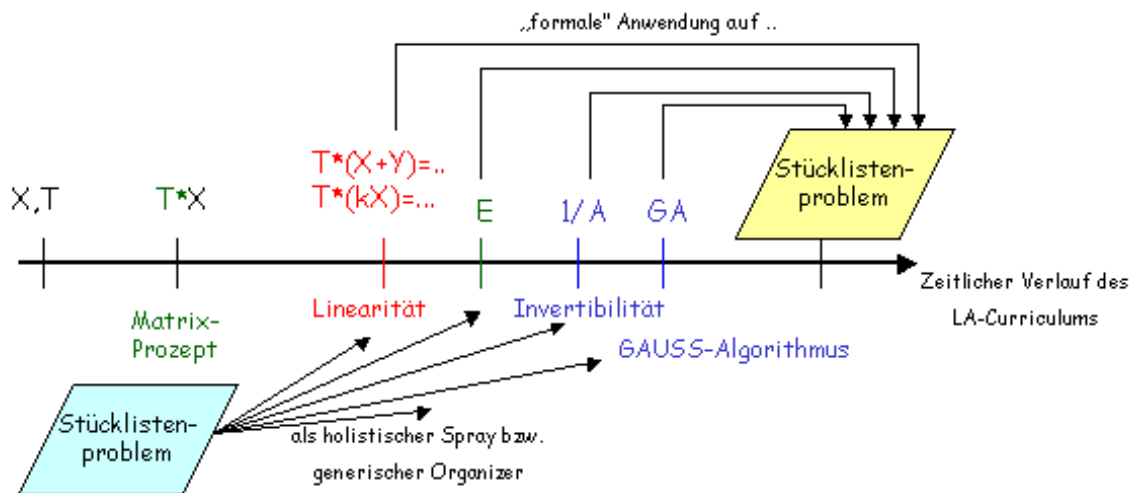


Abbildung E.4: Das curriculare Vorziehen des Stücklistenproblems eröffnet konstruktivistische Lerngelegenheiten. In seinem Praxiskontext werden wichtige Begriffsbildungen der elementaren linearen Algebra in das Wissensnetz eingeflochten.

## Analyse der epistemologischen Struktur und antizipierbarer Barrieren

Bei einer einfachen Materialverflechtung, die durch eine Matrizenmultiplikation beschreibbar ist „lassen sich die verschiedenen Produktionsebenen klar voneinander trennen. Ist

<sup>5</sup>nach einer vorgelagerten Modellierungsphase

<sup>6</sup>Dies ist zugleich ein Beispiel für das *Prinzip des vorwegnehmenden Lernens* und das *Prinzip der Fortsetzbarkeit* von E. WITTMANN, [211, S. 86].



das nicht der Fall, gehen z. B. Rohstoffe nicht nur über die Zwischenprodukte, sondern auch direkt in die Endprodukte ein, so ist ein komplexeres mathematisches Modell notwendig.“[197, S. 46]. Letzteres liegt beim Stücklistenproblem vor; dahinter steht als *prototypische Grundaufgabe* i. S. v. TÖRNER [4] das *Entflechten von Verflechtungen* bzw. das *Entmischen von Vermischtem*.

Die genetische Dekomposition hat hier mindestens drei Aspekte zu betrachten und die zugehörigen Lernprozesse ins Auge zu fassen:

1. die *explizite Explikation* des Begriffs „Stückliste“;
2. die *Datenstruktur* der Verflechtung, d. h. die Technologiematrix  $T$ ;
3. die *Modellierung* der Problemstellung, d. h. die Matrixgleichung  $X - T * X = B$ ;
4. den algebraischen (Auf-)Lösungsprozess der Modellgleichung, d. h. die Berechnung von  $X$ .

Zur Übersicht für die weitere Analyse dient Abbildung E.5.

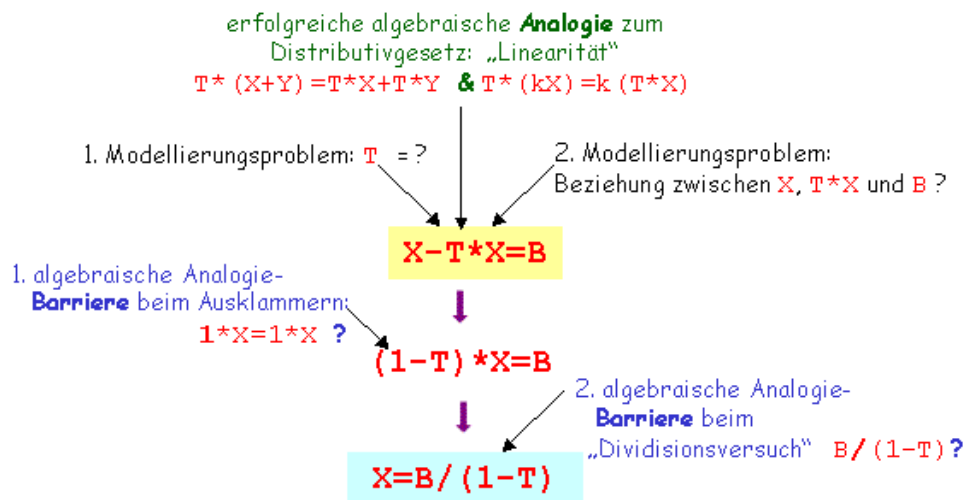


Abbildung E.5: Im Stücklistenproblem lassen sich drei Analogiebetrachtungen zur elementaren Algebra durchführen, von denen zwei epistemologische Barrieren aufweisen und zu neuen Einsichten und Konzepten führen. Vorgeschaltet sind zwei Modellierungsprobleme, welche die Datenstruktur der Technologiematrix  $T$  und das Aufstellen der Modellgleichung adressieren.

Im Zentrum der genetischen Dekomposition wie auch der späteren Lerntrajektorie steht dabei die Analyse und der Transfer der – aus Lernersicht harmlos und (*ana*)logisch erscheinenden – *fehlerhaltigen* Implikation

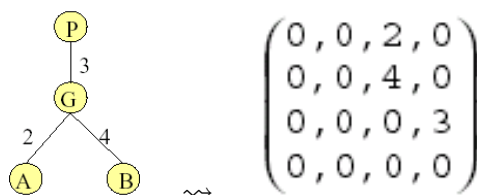
$$X - T * X = B \rightsquigarrow (1 - T) * X = B \rightsquigarrow X = B / (1 - T)$$

auf die Matrizenalgebra. Die didaktische Designaufgabe ist es, die längs dieser Analogie fragil werdenden Konzepte der Eins „1“ und des Kehrwertes „ $1/a$ “ durch adäquate Konzepte zu ersetzen und damit das vorhandene Concept Image zu erweitern. Die anschließende hypothetische Lerntrajektorie zeigt didaktische Möglichkeiten auf, CAS-gestützt unter Konstruktion entsprechender Mikrowelten die obigen Barrieren und Probleme anzugehen.

**ad 1: Explizite Explikation des Konzeptes der Stückliste.** In der Erprobung zeigte sich, dass die Lerngruppen (unabhängig von Vorbildung und Alter) ein effektives Verständnis einer Stückliste auf Aktions- bzw. Prozessniveau aus einer verbalen Definition (Internet bzw. Lehrbuch etc.) nicht zweifelsfrei-eindeutig herauschälen konnten. Als verständniskritisch erwies sich dabei die Frage, *ob ein bestelltes Bauteil selbst zur Stückliste zu zählen ist* oder nicht. Diese implizite Frage wird deshalb vorab an einem Beispiel rekonstruierbar beantwortet und damit das Stücklistenkonzept selbst expliziert. Anschließende Aktivitäten zum Aufstellen von Stücklisten (mit Lösungen zur Selbstkontrolle) stellen neben der handlungsbasierten Begriffserfahrung zugleich ein Datenmaterial von vier Bestellungen mit zugehörigen Stücklisten bereit, an denen in der Folge Strukturuntersuchungen vorgenommen werden.

**ad 2: Modellierung – zur Matrix-Repräsentation der Technologiematrix.** Die Teile- und Anzahlbeziehungen im Stücklistenproblem werden den Lernenden in Wortform, als Teilebedarfsliste oder als DiGraph in einer von drei üblichen verschiedenen Repräsentationsformen vorgegeben. Diese Darstellungsform muss zur algebraischen Behandlung in eine Matrixform konvertiert werden, um das erste Modellierungsproblem zu lösen. Dabei ist zu beachten, dass nach obiger Unterscheidung die *Stückliste als Baugruppenstückliste* vorliegen sollte, die zu den verschiedenen Teilen bzw. Erzeugnissen jeweils *nur die Mengen der direkt eingehenden Vorprodukte* angibt. Hierbei handelt es sich im allgemeinen um Baugruppen, die ihrerseits auf vorgelagerten Produktionsstufen aus Teilen oder Baugruppen zusammengesetzt werden. *Nur Baugruppenstücklisten entsprechen den Spalten* der Direktbedarfsmatrix bzw. Verflechtungsmatrix. Dass eine Matrix zur Repräsentation des Beziehungsgeflechtes in Frage kommt, ist dabei deshalb naheliegend, da in den vorangegangenen Lernarrangements **A'** und **C'** schon DiGraphen explizit als Datenstruktur zur Modellierung herangezogen wurden. Die folgenden Überlegungen seien an einem möglichst einfachen Beispiel konkretisiert.

*Beispiel:* Die Fertigung eines Produktes P benötige 3 (Bau)Gruppenstücke G, die wiederum jeweils aus 2 (Bau)Teilen A und 4 Teilen B bestehen sollen. Eine Baugruppe G und 3 Produkte sollen gefertigt werden. Frage: Wieviel Teile A, B und G werden benötigt?, vgl. [Thome, a. a. O.]



Das *didaktische Problem* ist: Wie konstruiert man die rechts im Bild sichtbare Technologiematrix  $T$ ? Um den (en)aktiven Konzepterwerb „Technologiematrix“ handelnd mit virtueller Erfahrung zu hinterlegen, nutzen wir die Konstruktionsmöglichkeit von  $T$  mit dem Konkatenationsoperator  $\dots$  von MuPAD. Dabei unterstützt die CAS-Syntax die zugrunde liegende Semantik. Der Screenshot in Abb. E.6 demonstriert das prinzipielle Vorgehen.

```

a b g p
• p:=matrix([0,0,3,0]) #1# // P besteht aus 3 "Stücken" von G
 (0)
 (0)
 (3)
 (0)

• g:=matrix([2,4,0,0]) #2# // G besteht aus 2 Stück A und 3 Stück B
 (2)
 (4)
 (0)
 (0)

• a:=matrix([0,0,0,0]):
• b:=matrix([0,0,0,0]):
• T:= a.b.g.p #3# //
 (0 0 2 0)
 (0 0 4 0)
 (0 0 0 3)
 (0 0 0 0)

• b.a.g.p #4#
 (0 0 2 0)
 (0 0 4 0)
 (0 0 0 3)
 (0 0 0 0)

```

Abbildung E.6: Enaktiver Zusammenbau der Technologiematrix  $T$  aus ihren Spalten mittels Konkatenation löst das 1. Modellierungsproblem.

Zeile #1# zeigt die *CAS-Formulierung des Teilebedarfs für ein Produkt P*. Die folgenden Definitionen bereiten den Fokus auf die Spaltenstruktur der Technologiematrix  $T$  vor. Die rechte Seite von Zeile #3# vollzieht dann den expliziten Aufbau der Technologiematrix  $T$  als *Prozess* des Zusammensetzens aus den vorher definierten einzelnen Spalten (Baugruppen) und symbolisiert den zeitlichen linearen *Herstellungsprozess* durch explizite Angabe der technologischen Reihenfolge in Form der Taktung per Koncat-Punkt. Insbesondere kann durch einfache *Cut & Paste*-Operationen die technologische Reihenfolge in der Konkatenation *umkopiert* werden: Die Auswirkungen sind sofort an der CAS-Ausgabe der Technologiematrix zu beobachten. Aus diesem *Aktionsverständnis* der Technologiematrix erwächst das gewünschte Objektverständnis und kann als flexibles *Prozept „Technologiematrix“* in das Symbol  $T$  auf der linken Seite von #3# komprimiert werden.

**ad 3: Modellierung – zur Entdeckung des Zusammenhangs  $X = T * X + B$ .** Der Vorteil der *expliziten spaltenweisen Konstruktion* der Technologiematrix  $T$  gegenüber einer möglichen einfachen Codierung als „unstrukturiert gedachte“ Matrix zeigt sich beim Aufdecken der Linearität des Stücklistenproblems in der zweiten Modellierungsphase sowie beim Erkunden von Zusammenhängen zwischen gesuchter Stückliste  $X$ , internem Teilebe-

darf  $T * X$  und externer Bestellung  $B$ . ARTMAN/TÖRNER leiten die zugehörige Überlegung mit folgenden Worten ein [4, S. 173]<sup>7</sup>.

Entscheidend ist nun die folgende Beobachtung. Durch die Montage der einzelnen Baugruppen innerhalb des Konzerns wird ein Teil der Produktion [...] intern verbraucht, so dass die Produktion [...] sowohl die interne Nachfrage  $\vec{y}$  als auch die externe Nachfrage  $\vec{b}$ , d. h. die Bestellungen der Kunden, decken muss, also (1)  $\vec{x} = \vec{y} + \vec{b}$ .<sup>8</sup>

Weiter heißt es bei HAMACHER et al. [115, S. 13 ff]<sup>9</sup>:

Darüber hinaus besteht offensichtlich ein linearer Zusammenhang zwischen der internen Materialanforderung  $\vec{d}$  und der vorgegebenen Produktion  $\vec{z}$ , d.h.  $\vec{d} = P \cdot \vec{z}$ .

Nach Feld-Beobachtungen in den Lerngruppen lag genau hierin das didaktisch kritische Problem: Es geht um das *Ermöglichen von geeigneten Beobachtungen* und um das *Offenlegen des Offensichtlichen*. Beide Erfahrungen (also Homogenität und Linearität von  $T$ ) lassen sich jedoch als virtuelle Erfahrungen in einer geeigneten CAS-Mikrowelt anbahnen.

• **Die Homogenität** von  $T * X$  in der Variablen  $X$  ist im Kontext der benötigten Teilstücke evident<sup>10</sup>; sie wird durch Probierhandlungen im CAS bestätigt<sup>11</sup>, siehe Abbildung E.7.

#4# und #5# lassen im Stücklistenkontext beobachten, dass  $T * X$  (für  $X = k * E_i$ ) den internen Teilebedarf zurückgibt, der benötigt wird, um  $k$  Teile der  $i$ -ten Sorte („Spalte“) herzustellen. Zeile #4# demonstriert die CAS-Formulierung der Anfrage zur Ermittlung des internen Teilebedarfs bei Bestellung  $B$  eines Teiles (Spalte), #5 und #6# weisen die Homogenität auf, die eine Bestellung von  $k$  Teilen auf zwei verschiedene Arten zu formulieren gestattet. Die doppelte Bestellmenge wirkt sich als Verdopplung der *entsprechenden* Spalteneinträge in der Technologiematrix aus: Dies ist die unmittelbare Erfahrung der Proportionalität (Homogenität). Der provozierte Blick auf  $T$  in seiner Spaltenfaserung erweist sich als epistemologisch förderlich.

• **Beim Sichtbarmachen der Additivität** erweist sich *die spezielle Gestalt der Technologiematrix* als obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonalen ebenfalls als *epistemologisch vorteilhaft* und für die Anbahnung des Verständnisses als überaus hilfreich. Zwar ist jede Matrix als Repräsentant einer linearen Abbildung additiv, hier aber tritt diese Eigenschaft deshalb unmittelbar ins Auge und wird im CAS schlagartig erkennbar, da *jede Bestellung in einer Position einer Spalte lediglich zu Änderungen oberhalb dieses Eintrages in der gleichen Spalte* von  $T$  führt, siehe Abbildung E.8.

<sup>7</sup>Man verwende folgendes Lexikon:  $\begin{matrix} w.L.: & X & T * X & B \\ A\&T: & \vec{x} & \vec{y} & \vec{b} \end{matrix}$

<sup>8</sup> Sehr ähnlich heißt es dann in [115, S. 13 ff]: „Aus der in Abb 2.5. dargestellten Fertigungsstruktur wird deutlich, dass die Produktion - dargestellt als Vektor  $\vec{z}$  - nun sowohl die interne Nachfrage  $\vec{d}$  als auch die externe Nachfrage  $\vec{x}$ , d. h. die Bestellungen der Kunden decken muss. Es folgt somit  $\vec{z} = \vec{d} + \vec{x}$  (2.5)“

<sup>9</sup>man verwende folgendes Lexikon:  $\begin{matrix} A\&T: & \vec{x} & \vec{y} & T \\ H.: & \vec{z} & \vec{d} & P \end{matrix}$

<sup>10</sup>ohne über den „Umweg“ der Konstruktion der zugehörigen linearen Abbildung  $L_T(X) := T * X$  zu gehen

<sup>11</sup>Auch hier sind die Einträge leicht veränderbar und die Reaktionen studierbar.

```

• T:= a.b.g.p #3#
 (0 0 2 0)
 (0 0 4 0)
 (0 0 0 3)
 (0 0 0 0)

• B:= matrix([0,0,1,0]): // 1 G soll angefertigt werden #4#
 B, T*B // .. man benötigt 2 A's und 4 B's
 (0) (2)
 (0) (4)
 (1) (0)
 (0) (0)

• 2*B, T*(2*B) // .. "Homogenität" wird angebahnt #5#
 (0) (4)
 (0) (8)
 (2) (0)
 (0) (0)

• 2*(T*B), T*(2*B) // 2 G sollen angefertigt werden #6#
 // ..man benötigt doppelt so viele Einzelteile
 (4) (4)
 (8) (8)
 (0) (0)
 (0) (0)

```

Abbildung E.7: Zur Beobachtung der *Homogenität* der Technologiemarkt im Stücklistenproblem anhand von einfachen Manipulationen der Bestellung

Zeile #7# zeigt die Additivität bei der Überlagerung (Bestellung) von zwei verschiedenen Sorten. Denn 3 bestellte Produkte  $P$  lösen - zusätzlich zu dem bestellten einen (1) Gerät - einen internen Bedarf nach weiteren 9 Geräten aus, so dass man nun 10 Geräte benötigt. Die *mental* additiv und homogen aus den Teilberechnungen zusammengestellte Gesamt-Stückliste  $X$  lässt sich in Zeile #8# somit in die Sprache des CAS syntaktisch-symbolisch „1:1“-übertragen und das CAS-Resultat beobachten.

**ad 4: Eine „probierhandelnde“ Lösungsmethode** für das Stücklistenproblem basiert auf diesen Handlungserfahrungen, die in einfachen Fällen vom Schüler im CAS effektiv *durch Aufsteigen im Spaltenvektor* ausführbar ist. Hat man die Lösung (partiell) gewonnen, so lässt sich z. B. aus einer Retrospektive #9# die *lineare Überlagerung* des internen Bedarfs  $T * X$  mit der Bestellung  $B$  zur gesuchten Gesamt-Stückliste  $X$  verifizieren. Daraus wird die gesuchte modellierende Gleichung in einer von zwei äquivalenten Formen als  $X - T * X = B$  oder  $X = T * X + B$  ablesbar. Auf dieser Einsicht wird das Design der hypothetischen Lerntrajektorie ansetzen und ein CAS-Spiel als generic organizer anbieten.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die *Technologiemarkt* ein sehr durchsichtiges, einfaches und praxisrelevantes Studienobjekt für Linearitätserkundungen abgibt. Sie erweist sich insofern als *Keim wichtiger Linearitätserfahrungen* in einem durchgängig interpretierbaren Anwendungskontext. Auch die Herleitung der Stücklistengleichung  $X - T * X = B$  basiert wesentlich auf einer sorgfältigen Analyse der Technologiemarkt und ihrer Linearitätseigenschaften.

```

• B:= matrix([0,0,1,0]): // 1 Gerät und
C:= matrix([0,0,0,3]): // 3 Produkte werden geordert
T*B, T*C, B+C, T*(B+C), T*B+T*C // .. also: "Additivität" #7#

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• T*B + T*C + T*(9*B) + B + C // gesamter Teilebedarf #8#

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

• B:= matrix([0,0,1,3]): // Bestellung
X:= matrix([20,40,10,3]): // Teil-stückelbedarf
X, T*X, B, X-T*X=B, X= T*X + B // Stücklistengleichung #9#

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$


```

Abbildung E.8: Das beobachtbare Phänomen der *Additivität* der Technologiematrix im Stücklistenproblem anhand von einfachen Manipulationen der Bestellung

## Die Stücklisten-Gleichung $X - T * X = B$ als Leitlinie des algebraischen Lösungsprozesses.

Wurde die Inverse im Unterricht bereits behandelt, so [...] gestaltet sich dieser Vorgang<sup>12</sup> weitgehend problemlos. Andernfalls bedient man sich der Korrespondenz von Matrizen und Zahlen hinsichtlich Ihrer Rechenoperationen [...].[115, S. 17]

Ausführungen zur im Zitat angesprochenen „Korrespondenz“ finden sich z. B. in [4, S. 176] oder [197, S. 107; 176]; eine CAS-basierte Lösung, die zugleich eine vollautomatisierte Lösungsformel angibt, zeigen wir weiter unten. Im Kern läuft der obige Vorschlag allerdings auf die *rezeptartige Verwendung der inversen Matrix* auf das LGS  $X - T * X = B$  hinaus. Da im Rahmen dieser genetischen Dekomposition aber ein möglichst epistemologisch verständnisfördernder Wissenserwerb der problemrelevanten Konzepte aufgezeigt werden soll, sollen die Schüler diese 'Rezeptur' experimentell durch die Analyse eines Analogieschlusses erkunden, dabei die wirkenden Phänomene aufspüren und so en passant die notwendigen konstruktiven Korrekturen am vorläufigen Concept Image „algebraischer Rechenregeln für Matrizen“ vornehmen. Das Vorgehen orientiert sich dabei an einem vorgelegten knappen Lösungs'rezept', das bekannte typische Fehlvorstellungen explizit aufgreift und daher aus Schülersicht zunächst akzeptabel und einsichtig wirkt. *Im Verlaufe der Erkundung führt eine sensible Fehlerkorrektur dieser hypothetischen Analogien zur Aufdeckung der mathematischen Ursachen der Missverständnisse und löst konstruktivistisches Lernen aus*, vgl. Abb. E.9.

<sup>12</sup>gemeint ist der Lösungsprozess der Gleichung  $X - T * X = B$

Hier ist *eine algebraische Lösungsidee* ..

$$X = B + T \cdot X$$

↓ isolieren

$$X - T \cdot X = B$$

↓ ausklammern

$$(1 - T) \cdot X = B$$

↓ auflösen

$$X = B / (1 - T)$$

.. in Analogie zur Algebra:

$$x = 4 + 3 \cdot x$$

↓ isolieren

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$x =$$

Verstehst du die Lösungsidee?

Ergänze die analoge Rechnung.

Siehst du eventuelle Barrieren, die bei Verfolgung der Lösungsidee hinderlich sein könnten?

Abbildung E.9: Eine analogiebasierte fehlerhaltige Implikationsfolge als vorstrukturierte Erkundungs-Leitlinie

Zur Falsifikation der impliziten algebraischen Hypothesen und zur Verifikation der anschließend konstruierten Konzepte wird das CAS als Expertensystem eingesetzt.

Auf die didaktische Bedeutung von Analogie-Schlüssen weisen auch ARTMANN & TÖRNER in [4, S. 176] hin:

Wie schon an mehreren Stellen im Kurs lassen wir uns durch Analogie-Argumente zwischen dem Matrixkalkül einerseits und dem Rechnen mit Zahlen andererseits anregen, wovon übrigens der Mathematiker bei seiner Forschungsarbeit laufend Gebrauch macht.

**1. Analogie-Barriere: das Ausklammern der „richtigen“ Eins.** Die erste epistemologische Barriere besteht in der Beobachtung, dass in der Matrizenalgebra verschiedene Objekte die Rolle einer „1“ spielen, vgl. Abb. E.10.

Zeile #1# verifiziert die Gültigkeit des Stücklisten-Ansatzes, während #2# und #3# die Nicht-Äquivalenz der versuchten Umformungsschritte thematisieren. Die linke Seite von #3# legt dabei aus der Reaktion des CAS die Untersuchung des Faktors  $(1 - T)$  als Ursache nahe. Selbst wenn vom Lerner a priori erkannt werden kann, dass die Zahl 1 und die Matrix  $T$  verschiedene Dimensionen haben bzw. verschiedenen Gegenstandsbereichen angehören, bleibt die Frage nach dem richtigen Substitut<sup>13</sup> der 1 offen, siehe Abb. E.11.

Zeile #4# erzeugt automatisch die *richtige* 1 als korrekt dimensionierte Einheitsmatrix; eine explizite Konstruktion der Einheitsmatrix über eine Diagonalmatrix o. ä. erweist sich im Expertensystem MuPAD als unnötig – der entsprechende Analogieschluss „etwas hoch Null ist das Einselement“ ist erfolgreich. #5# verifiziert die Existenz zweier verschiedener Eins-Objekte und kann im Unterricht (Plenum) zur Diskussion von Skalarkörper (Viel-fachenbildung, Homogenität s. o.) und Matrizenraum genutzt werden<sup>14</sup>. #6# verifiziert

<sup>13</sup>R. KLEIN schlägt dazu in seiner Staatsexamensarbeit eine kleine Untersuchung vor, vgl. [138] bzw. mein Lernarrangement I5.

<sup>14</sup>s. u. die typische falsche Implikation  $1X = E * X \Rightarrow 1 = E$

```

MuPAD Pro - [SL-analogie.mnb]
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Notebook Debug Extras Fenster Hilfe

• B:=matrix([[0,0,1,3]]): // Bestellung
 X:=matrix([a,b,g,p]): // Teilebedarf (=Stückliste)

• T:=matrix([[0,0,2,0],
 [0,0,4,0],
 [0,0,0,3],
 [0,0,0,0]]): // Technologiematrix

• X-T*X=B // Versteht MuPAD die Stücklistengleichung? #1#
 (a-2·g)
 (b-4·g) = (0)
 (g-3·p) (1)
 p (3)

• 1*X-T*X=B // X-T*X = (1-T)*X ? #2#
 (a-2·g)
 (b-4·g) = (0)
 (g-3·p) (1)
 p (3)

• (1-T)*X=B #3#
 Fail = (0)
 (0)
 (1)
 (3)

```

Abbildung E.10: Zur Falsifikation der ersten Umformungshypothese im CAS

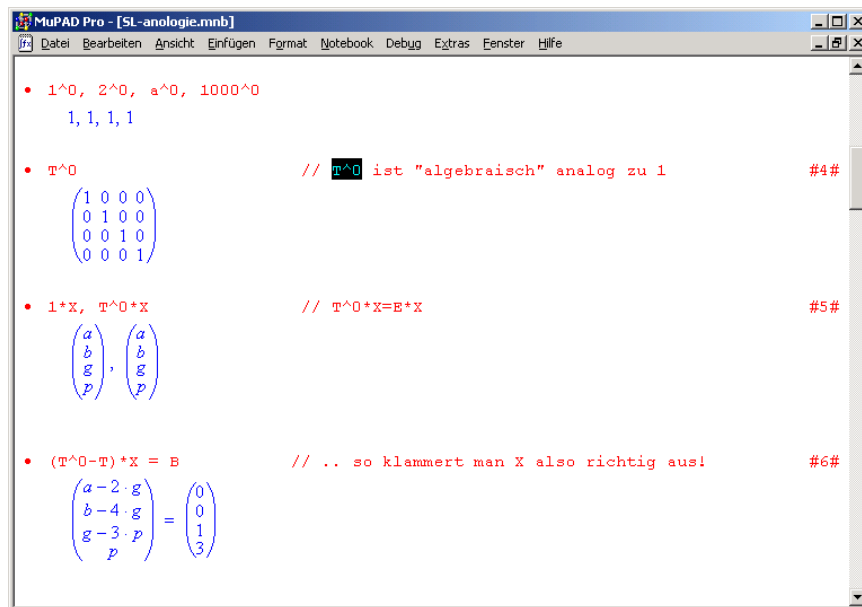
die korrekte Umformung des LGS unter Verwendung des neu entdeckten Einselementes  $T^0 =: E$ , die sich im Vergleich als syntaktisch äquivalent zu #1# erweist. (Von hier aus ist das Stücklistenproblem z. B. durch Rückwärtseinsetzen leicht lösbar.)

**2. Analogie-Barriere: die „richtige“ Kehrwert-Bildung.** Durch die parallel verlaufene Analogierechnung auf  $\mathbb{R}$  werden die Schüler zu Divisionsversuchen bzw. Kehrwertbildungen motiviert. Entsprechende Lösungsversuche auf Matrixniveau schlagen aber fehl, vgl. Zeile #7# in Abb. E.12.

Dennoch erweist sich die Hypothese als nicht ganz falsch: MuPAD bietet in Zeile #9# auf Anfrage – wie bei dem erfolgreichen Analogieexperiment mit dem Einselement – eine Matrix als inverses Element an, dessen Bedeutung aus dem benutzten Symbol zwar erschließbar ist, dessen Konstruktion aber natürlich noch offen ist. #10# adressiert eine weitere häufige Fehlvorstellung: Die Auflösung des LGS nach  $X$  muss durch eine *Linksmultiplikation* mit dem Inversen erfolgen, da der fragliche Faktor links von  $X$  stand – die Multiplikation von Matrizen ist nicht-kommutativ und dieses Phänomen wird im Kontext des Stücklistenproblem an einer interessanten Stelle nochmals deutlich. #11# berechnet dann tatsächlich die richtige schon bekannte Lösung.

*Bemerkung:* Bei den Erkundungen zum Einselement bzw. zu inversen Elementen im Matrizenraum wurde das CAS als mathematisches Expertensystem ausgenutzt, deren Designer einen möglichst *mathematik-affinen Symbolapparat* mit dahinter liegender konventioneller Semantik anbieten. Sonst wären Analogieschlüsse, die auf Symbolähnlichkeit wie  $1/a \sim 1/A$  bzw.  $a^{-1} \sim A^{-1}$  basieren, nicht möglich. Dies ist zunächst nur im speziell gewählten CAS MuPAD nachgewiesen; für andere CAS ist die Übertragbarkeit dieses An-





```

• 1^0, 2^0, a^0, 1000^0
 1, 1, 1, 1

• T^0 // T^0 ist "algebraisch" analog zu 1 #4#
 (1 0 0 0)
 (0 1 0 0)
 (0 0 1 0)
 (0 0 0 1)

• 1*x, T^0*x // T^0*x=E*x #5#
 (a) (a)
 (b) (b)
 (g) (g)
 (p) (p)

• (T^0-T)*x = B // .. so klammert man X also richtig aus! #6#
 (a-2*g) (0)
 (b-4*g) (0)
 (g-3*p) (1)
 (p) (3)

```

Abbildung E.11: Zur Exploration des Einselementes im Matrizenraum und die Entdeckung der Einheitsmatrix.

satzes unter dem Symbolaspekt zu prüfen.

**3. Ein Analogie-Schluss auf eine Lösung des Stücklistenproblems.** Die Lösung des Stücklistenproblems mittels einer Inversen löst viele Folgefragen aus, die im nachfolgenden Unterricht aufgegriffen werden können. Die Frage nach der Erzeugung bzw. Berechnung der Inversen im Stücklistenproblem führt hier zunächst auf eine weitere Analogie: die Darstellung der Inversen als eine explizite Partialsumme von Potenzen der Technologiematrix in Analogie zur geometrischen Reihe bei reellen Zahlen. Die zugehörige CAS-Funktion `tele` weist zudem syntaktische Ähnlichkeit mit der Potenzsummenberechnung der Wegeanzahlen<sup>15</sup> in Digraphen auf, die die Schüler in Lernarrangement D' kennengelernt haben – eine Gelegenheit zur kreativen Wiederentdeckung, vgl. Abb. E.13.

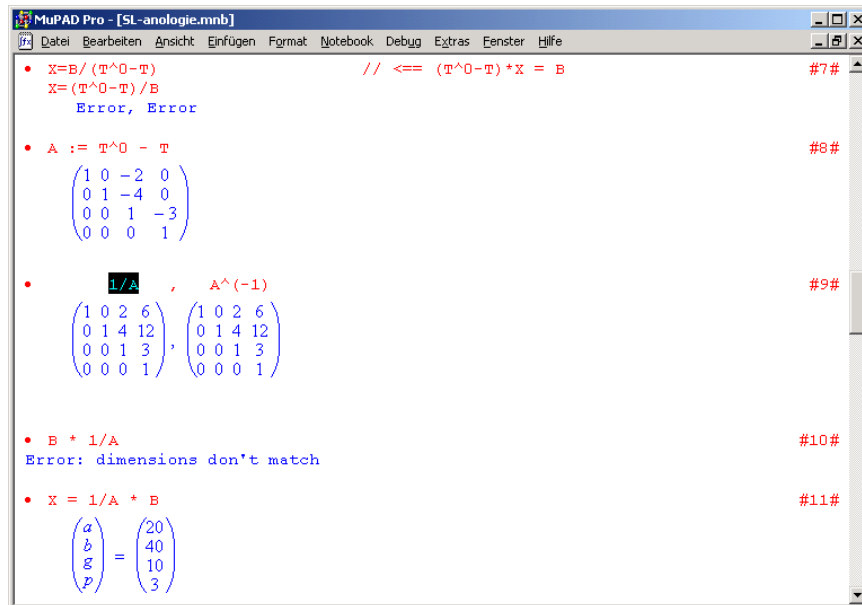
Die Voraussetzung der Nullpotenz von  $T$  wird in #12# beobachtet. #13# und #14# bereiten die „Teleskop“-Summe vor, das korrekte Ausklammern sollte nach den vorhergehenden Erkenntnissen gelingen. #15# abstrahiert den Invertierungsprozess im Stücklistenproblem zu einer Formel und kompaktifiziert ihn in das exekutierbare CAS-Symbol `tele`<sup>16</sup>; zugleich bietet #14# Gelegenheiten zur Reflektion über Eigenschaften und Zusammenhänge von inverser Matrix und Einheitsmatrix (dies wird in der Lerntrajektorie aufgenommen).

Damit wird es abschließend möglich, die Lösung des Stücklistenproblems allein aus den gegebenen Daten  $B$  und  $T$  explizit anzugeben und im CAS als Surplus *halb*-automatisch<sup>17</sup>

<sup>15</sup>vgl. auch [152]

<sup>16</sup>Dies in Anlehnung an die beobachtete *Teleskop*-Summe. Zur Betonung einer speziellen Inversenbildung könnte man stattdessen z. B. auch den Identifier `SLinv` für **StückListeninverse** nennen.

<sup>17</sup>*Halbautomatisch* deshalb, weil der Nutzer der Funktion `tele` noch den Exponenten  $n$  anzugeben hat,



```

MuPAD Pro - [SL-analogie.mnb]
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Notebook Debug Extras Fenster Hilfe

• X:=B/(T^0-T) // <== (T^0-T)*X = B #7#
X:=(T^0-T)/B
Error, Error

• A := T^0 - T #8#
(1 0 -2 0)
(0 1 -4 0)
(0 0 1 -3)
(0 0 0 1)

• 1/A , A^(-1) #9#
(1 0 2 6) (1 0 2 6)
(0 1 4 12) (0 1 4 12)
(0 0 1 3) (0 0 1 3)
(0 0 0 1) (0 0 0 1)

• B * 1/A #10#
Error: dimensions don't match

• X = 1/A * B #11#
(a) (20)
(b) (40)
(g) (10)
(p) (3)

```

Abbildung E.12: Zur Exploration der Division bzw. der Reziprokbildung im Matrizenraum und die Entdeckung der Inversen Matrix

berechnen zu lassen, vgl. Zeile 18#. Zusätzlich lässt sich als weiteres Lösungsverfahren die GAUSS-Elimination anreißern, die hier im Vorgriff sehr gut thematisierbar ist, da die Technologiematrix im Stücklistenproblem per Konstruktion eine obere Dreiecksmatrix darstellt, vgl. Abb. E.14.

**Resümee.** Die genetische Dekomposition des Stücklistenproblems schlägt eine Folge von heuristischen Analogieüberlegungen längs des Ansatzes  $X - T * X = B$  vor, die kontextbezogen über Falsifikationsprozesse unter Einbezug von CAS ein vorläufiges Concept Image zu den wichtigen Begriffsbildungen der Linearität, der inversen Matrix und der Einheitsmatrix konstruieren. Die Einheitsmatrix wird dabei informell aus dem Problem des Ausklammerns extrahiert, während die inverse Matrix ebenfalls informell aus einem Divisionsversuch destilliert wird. Die das Stücklistenproblem dominierende Technologiematrix wird in einem Modellierungsprozess CAS-enaktiv aus dem Verfechtungsgraph (Digraph) abgeleitet; an ihr werden Linearitätsphänomene exploriert. Gleichzeitig werden weitere linear-algebraische Fragestellungen aufgeworfen.

---

bis zu dem er die Berechnung der Potenzsumme vornehmen lassen möchte. Eine *voll*automatische Lösung würde den Exponenten  $n$  noch so lange in einer Schleife hochzählen, bis keine Veränderung am Ergebnis mehr eintritt. Dies kann man als eine kleine Programmieraufgabe für Interessent(inn)en stellen.

```

• T^0, T^1, T^2, T^3, T^4 #12#
(1 0 0 0), (0 0 2 0), (0 0 0 6), (0 0 0 0), (0 0 0 0)
(0 1 0 0), (0 0 4 0), (0 0 0 12), (0 0 0 0), (0 0 0 0)
(0 0 1 0), (0 0 0 3), (0 0 0 0), (0 0 0 0), (0 0 0 0)
(0 0 0 1), (0 0 0 0), (0 0 0 0), (0 0 0 0), (0 0 0 0)

• T^0+T^1+T^2, (T^0+T^1+T^2), T * (T^0+T^1+T^2) #13#
(1 0 2 6), (1 0 2 6), (0 0 2 6)
(0 1 4 12), (0 1 4 12), (0 0 4 12)
(0 0 1 3), (0 0 1 3), (0 0 0 3)
(0 0 0 1), (0 0 0 1), (0 0 0 0)

• (T^0-T) * (T^0+T^1+T^2) #14#
(1 0 0 0)
(0 1 0 0)
(0 0 1 0)
(0 0 0 1)

• tele := (X,n) -> _plus(X^i $ i = 0 .. n) #15#

• tele(T,2) #16#
(1 0 2 6)
(0 1 4 12)
(0 0 1 3)
(0 0 0 1)

```

Abbildung E.13: Zur „Teleskopsummen“-Darstellung der inversen Matrix im Stücklistenproblem

## Zum Design einer hypothetischen Lerntrajektorie

Im Folgenden wird eine Skizze der methodischen Umsetzung der obigen genetischen Dekomposition im computer-intensiven Unterricht gegeben. Diese orientiert sich am modifizierten M.A.K.E.-Design der APOS-Theorie und schlägt eine hypothetische Lerntrajektorie vor, die als eine Sequenz von vier arrangierten CAS–MuPAD-Notebooks **F\***, **G\***, **H\***, **I\***<sup>18</sup> vorliegen und daher hier nur grob skizziert werden, vgl. Abb. E.16.

Designleitlinie ist die Konstruktion eines realitätsnahen kontextbasierten Lernarrangements, das an einem durchgängig benutzten prototypischen Beispiel mehrere Erkundungsstränge zusammenführt und isolierte Betrachtungen vermeidet. Die Dauer der Lernarrangements beträgt ca. 8 – 12 Unterrichtsstunden (einschließlich der Reflektionsphasen im Klassenverband).

**Make: F\*.** In der M(odellierungs)-Phase wird den Schülern die Bedeutung des Stücklistenproblems an Beispielen aus der professionell–industriellen Praxis gezeigt, dessen Relevanz durch einen WEB-Suchauftrag bestätigt wird. In realistischer, wenn auch reduzierter Form wird im ersten MuPAD-Parcours **F\*** ein kleines echtes Stücklistenproblem gestellt: der Bau eines Weinregals<sup>19</sup>. Die Unterscheidung von Bestellung und Stückliste wird durch handelndes Ausfüllen von Excel-Tabellen geklärt. Hier wird auch der Begriff Stückliste durch Handlungserfahrungen expliziert. Der – unvollständig angegebene – Verflechtungsgraph

<sup>18</sup><http://www.mupad.de/schule/mikrowelten> bzw. beiliegende CD.

<sup>19</sup>Dieses Beispiel findet sich in [138].

```

MuPAD Pro - [SL-analogie.mmb]
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Notebook Debug Extras Fenster Hilfe

• (T^0-T)*X = B // Stücklistenproblem mit X=? #17#

$$\begin{pmatrix} a-2 & g \\ b-4 & g \\ g-3 & p \\ p & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

• = tele(T,3)*B // Lösung X = 1 #18#

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ g \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

• (T^0-T).B // Dreiecksgestalt des Stücklistenproblems (17) #19#

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

• linalg::gaussJordan((T^0-T).B) // 2. automatische Lösung als Ausblick #20#

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$


```

Abbildung E.14: Halbautomatische CAS-Lösung des Stücklistenproblem und ein Ausblick auf die GAUSS-Elimination

wird reflektiert und *enaktiv* ergänzt. Eine konkrete Fragestellung fordert zur Berechnung einer Stückliste auf. Zusätzlich wird gefragt, ob der Verflechtungsgraph kompakt in einer Matrix  $T$  *codiert gespeichert* werden kann und ob dies neue Lösungsmöglichkeiten eröffnet.

#### Bemerkungen:

1. Das Problem ist *offen gestellt*, die Schüler versuchen *zunächst eine eigene informelle Lösung* (z. B. mittels des Netzplans) zu gewinnen. Metakognitive Reflektionen über das eigene tatsächliche bzw. geplante Vorgehen sowie über die Existenz, Unität und Methode der Lösung schließen die M-Phase ab.
2. Die M-Phase ist in wesentlichen Teilen CAS-frei, das Notebook wird fast ausschließlich als Textdokument benutzt und dient hauptsächlich als Protokollinstrument („Lerntagebuch“) für die Aktivitäten der Schüler. Daher könnte das Notebook als Papierausdruck auch im Klassenraum eingesetzt werden, d. h. diese M-Phase kann sowohl im Klassenraum als auch im PC-Raum ablaufen.

**make: F\*.** Je nach Bearbeitungserfolg wird man die Schüler ihre Lösungsversuche im Klassenverband vorstellen lassen. Zeigt die Beobachtung der M-Phase keine verwertbaren Resultate, schließt man die erste **Aktivitäts-Phase** mit dem Notebook **G\*** direkt an.

**make: G\*.** [Die Lerngruppe befindet sich zur Durchführung der folgenden Aktivitäten im PC-Raum.] Die Erprobung zeigte, dass die Schüler den Repräsentationswechsel vom Verflechtungsgraphen auf die Technologiematrix  $T$  i. d. R. nicht selbstständig bewältigen können. Dies ist dadurch zu erklären, dass Methoden- oder Repräsentationswechsel als Elemente des

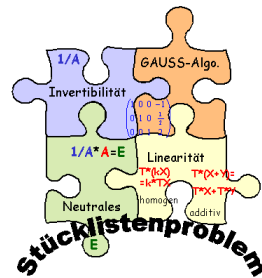


Abbildung E.15: Mögliches Concept Image zur Matrizenalgebra nach dem Stücklistenproblem .

Expertenwissens eher der vertikalen Mathematik zuzuordnen sind. Daher wird die Technologiematrix  $T$  im zweiten MuPAD–Parcours  $G^*$  enaktiv-konstruktiv aus ihren Spalten per Konkatenation zusammengesetzt und die Lösung zusätzlich in einer Powerpoint-Video-Animation betrachtet; der Inhalt dieses Videos ist anschließend zu verbalisieren. Damit ist die Technologiematrix multirepräsentativ eingeführt.

Zentral ist die Suche nach einer Beziehung zwischen dem Output  $T^*X$ , dem Bestellvektor  $B$  und der gesuchten Stückliste  $X$ ; dazu wird die Stückliste mit Hilfe des CAS systematisch und gezielt variiert. Aus ihren Beobachtungen entdecken die Schüler die gewünschte Beziehung, vgl. Abb. E.17.

Im Anschluss lässt man die gefundene Beziehung in einer CAS-Spielhandlung explorieren, wobei insbesondere das strategische Vorgehen im Lösungsprozess fokussiert wird. Dieses Spiel greift der später folgenden Begründung über den Dreiecksaufbau der Technologiematrix bewusst vor und schafft zunächst zugehörige Beobachtungen und experimentelle Erfahrungen, siehe Abbildung E.18.

Anschließend ist das Bestellproblem ggfs. nochmals auf möglichst unterschiedlichen Wegen (z. B. direkt aus dem Netzplan oder als einfaches  $9 \times 9$ –LGS) zu lösen. Die Strategiefrage „Hast du eine Idee, wie man die von dir gefundene Beziehung zwischen  $T^*X$ , dem Bestellvektor  $B$  und der Stückliste  $X$  zu einem systematischen Lösungsverfahren für das Stücklistenproblem nutzen könnte?“ leitet die Prozess-Phase zur abstrakten algebraischen Lösungsfindung ein. Die gewonnenen virtuellen Handlungserfahrungen werden in der folgenden Klassen–Phase zu Begrifflichkeiten verdichtet. Die Technologiematrix wirkt dabei als „generic organizer“ in Bezug auf die Erkundung der Stücklistengleichung.

**make:  $G^*$ .** Im Klassen-Plenum wird die Beziehung  $X-T^*X=B$  reflektiert und ggfs. über weitere alternative Lösungen der gestellten Aufgabe gesprochen. Die Begriffe *Additivität*, *Homogenität* und *Linearität* als fundamentale Begriffe der Linearen Algebra werden - fußend auf der vorgelagerten CAS-Erfahrung - nun expliziert. Anschließend kann der Stand des Modellierungsprozesses in Bezug auf das Stücklisten-Problem und seine

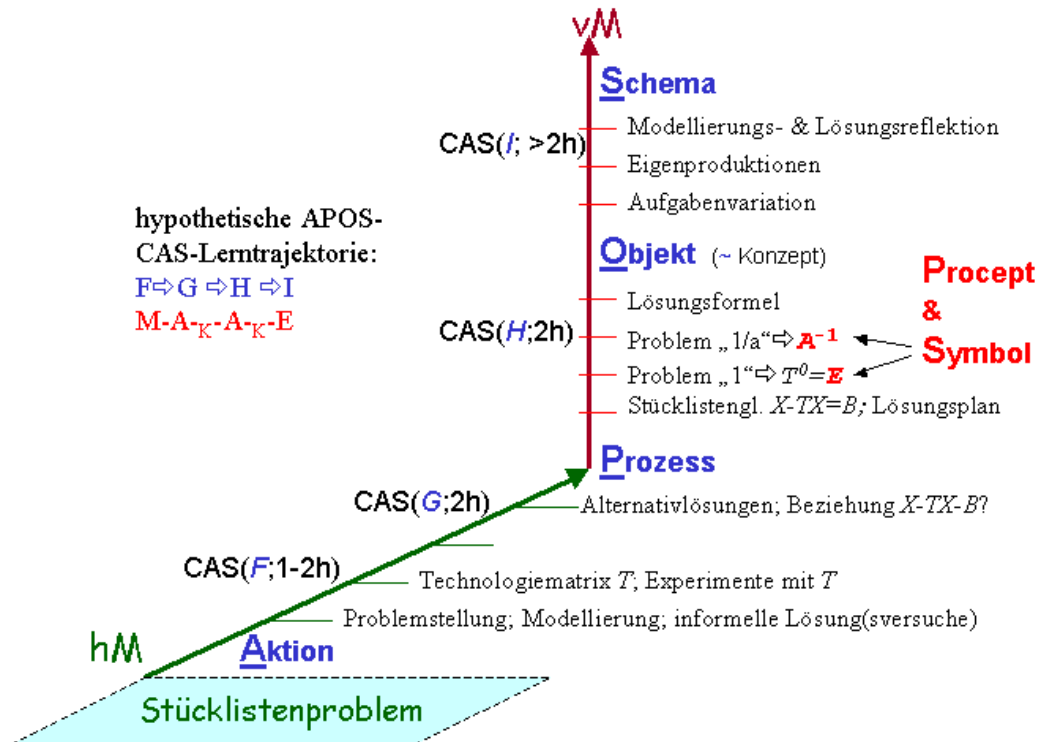


Abbildung E.16: Hypothetische Lerntrajektorie zum Stücklistenproblem nach der APOS-Theorie mit der entsprechenden Zuordnung der CAS-Notenbücher; CAS( $X;n$ ):=„Notebook  $X$  mit Zeitaufwand  $n$  UStd.“; **hM** :=„horizontale Mathematik“ und **vM**: „vertikale Mathematik“ i. S. d. RME

Lösung diskutiert werden. Händisch bearbeitet die Lerngruppe in Form kooperativer Paare einen kleinen fiktiven Verflechtungsgraph, repräsentiert ihn als Technologiematrix und stellt die zugehörige Stücklistengleichung auf. Erste Analogieüberlegungen zur Lösung dieser Matrizen-Gleichung  $X-T^*X=B$  können sich anschließen.

**mAke: H\***. [Die Lerngruppe befindet sich zur Durchführung der folgenden CAS-Aktivitäten wieder im PC-Raum.] Das MuPAD-Lernarrangement **H\*** wird in der Sozialform kooperativer Paare bearbeitet. Gemäß der genetischen Dekomposition werden die geplanten Analogieüberlegungen wie beschrieben durchlaufen und führen zu einem Prozessverständnis der Einheitsmatrix  $E$  bzw. der inversen Matrix  $A^{-1}$ . Die „Teleskopsummen“darstellung der Inversen führt zu Verknüpfungen zwischen den diversen Prozessvorstellungen und komprimiert die abgelaufenen Prozesse in den Funktionsnamen **tele**, der damit objekt-konstruierend wirkt. Die unterschiedlichen Symbolisierungen ( $T^0$  bzw.  $E$  und  $1/A$  bzw.  $A^{-1}$  bzw. **tele**) flexibilisieren die Proceptbildung und fördern das thematische Schemaverständnis bzw. das concept image, vgl. Abb. E.19 und Abb. E.20.

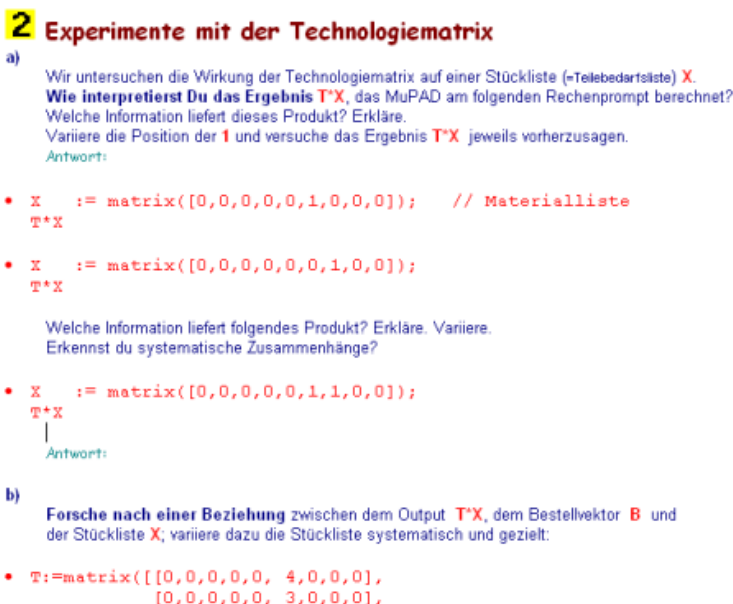


Abbildung E.17: Screenshot aus dem CAS-Notebooks G\*, Scene 3

**make: H\***. Schülerpräsentationen im Klassenplenum blicken reflektierend zurück und schließen – begleitet durch die Lehrperson – die vorläufige Konzept- und Symbolbildung ab. Ein kleines Stücklistenproblem wird händisch durchgerechnet (z. B. aus dem MuPAD-Notebook I vorgezogen).

**make: I\***. In der Übungs(Exercise)-Phase stellt man den Paaren aus der Lerngruppe frei, ob sie im Klassenraum oder im PC-Raum arbeiten möchten. Auch der Wechsel zwischen den Räumen ist gestattet. Dazu sind einige Papierausdrucke des CAS-Parcours I\* vorzuhalten. Die Lernenden wählen frei aus dem vorgeschlagenen Aufgabenpool. Sie werden gebeten, bei jeder Aufgabe bewusst den Modellierungszyklus zu durchlaufen und die Lösung so zu strukturieren, dass für den Leser erkennbar wird, in welcher Phase der Modellierung man sich befindet. Einige wenige Aufgaben sollten mit mindestens zwei unterschiedlichen Methoden gelöst werden. Eigenproduktionen, wie z. B. in I3 angeregt, „Suche in einem Lehrbuch oder im Internet nach einem interessanten Stücklistenproblem. Löse dein SL-Problem; erstelle eine kommentierte Musterlösung für den Kurs.“ wird Raum gegeben. Ausgewählte theoretische Argumentationen zum Ausbau des Schemaverständnisses schließen sich an und weiten das concept image zusätzlich auf:

- Hängen inverse Matrix und Einheitsmatrix miteinander zusammen?
- Gibt es eine Formel zur Berechnung der inversen Matrix zu einer beliebigen allgemeinen  $2 \times 2$ -Matrix  $A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  mit den Elementen  $a, b, c$  und  $d$ ?
- Existiert immer eine inverse Matrix? Begründe deine Antwort.

c) **Das Stücklistenspiel**

Trage die in **b** gefundene Beziehung am folgenden Prompt in Zeile (3) ein.

- ☉ Die Spieler ersetzen *abwechselnd* in der Stückliste **x** in Zeile (2) *eine* der vorgegebenen Nullen durch eine selbstgewählte Zahl.
- ☉ Nach jeder einzelnen Änderung ("Spielzug") wird eine Neuberechnung durch [!] ausgelöst.
- ☉ Nach *jedem* Zug muss *mindestens in einer weiteren Zeile in der Beziehung (3) eine Gleichheit* auftreten. Dafür erhält man einen Punkt; Stillstand bzw. Fehlersuch führen zu einem Punktabzug.
- ☉ Das Spiel ist zu Ende, wenn in Zeile (3) eine *komplette Gleichheit* in allen Zeilen beobachtet wird. Gewonnen hat, wer zu Spielende die meisten Punkte erreicht hat.

Schnick-Schnack-Schnuck: wer fängt an?

*Stücklistenspiel*

---

```

• B:= matrix([[10,4,2,5,1,4,0,3,2]]): // Bestellung (1)
X:= matrix([0,0,0,0,0,23,5,3,2]): // Stückliste (2)
X - T*X = B // Lösung? (3)

```

$$\begin{pmatrix} -92 \\ -69 \\ -69 \\ -460 \\ -40 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Skore:  
Spieler 1: 0  
Spieler 2: 0

---

- ▶ Im Wiederholungsspiel wird die Bestellung **B** geändert (nur *einestellige* Einträge zulässig).
- ▶ Die Spielregel wird geändert:  
die Spieler ersetzen in der Stückliste **x** in Zeile (2) *schrittweise von rechts nach links* - beginnend ab der Zahl **2** - abwechselnd jede vorgegebene Null durch eine selbstgewählte Zahl. Play!
- ▶ Was beobachtest du? Erkläre. Ist das Stücklistenspiel "fair"?
- ▶ Kann man das Spiel in **X** auch "von links nach rechts" spielen? Spiele. Erkläre.
- ▶ Was hat *Stücklisten-Spiel* mit dem Stücklistenproblem zu tun?
- ▶ Hast du eine Idee, wie man die Beobachtungen im Spiel zu einer systematischen

Abbildung E.18: CAS-Spiel zum Stücklistenproblem als generic organizer

**Make: I\*.** Im Klassenverband werden ausgewählte Lösungen aus der kooperativen Übungsphase vorgetragen. Der abschließende Rückblick auf den Modellierungs- und den algebraischen Lösungsprozess im Stücklisten-Problem löst die aufgefundenen algebraischen Barrieren explizit auf. Die Gruppe verdichtet die gewonnenen Erkenntnisse in einer Mind- bzw. Conceptmap des Lernarrangements.

*Anmerkungen:*

1. In den CAS-Parcours stehen i. d. R. nur Fragestellungen, Arbeitsaufträge oder Instruktionen. Es finden sich dort keine Lösungen, denn diese werden im Dialog mit dem CAS durch die kooperierenden Paare erarbeitet. Deshalb ist es sinnvoll, die CAS-Lerneinheiten in Einzelteile aufzubrechen und zeitlich nacheinander zu bearbeiten<sup>20</sup>, da nachfolgende Lernarrangements Hinweise oder Lösungen zu vorhergehenden Teilen enthalten können. Z. B. wird die Stücklistengleichung  $X - T \cdot X = B$  zu Beginn

<sup>20</sup>und auch nacheinander zu verteilen; eine Ausgabe aller Lernarrangements en bloc schließt den Lernprozess kurz und ist m. E. kontraproduktiv



**2 Ist 1 = 1 ?**

a) Durchlaufe folgende Testsuite. Beobachte und analysiere dabei die Resultate:

```

• X:= matrix([s, a, t, d, h, m, b, k, g]):
T:= matrix([
 [0,0,0,0,0, 4,0,0,0],
 [0,0,0,0,0, 3,0,0,0],
 [0,0,0,0,0, 3,0,0,0],
 [0,0,0,0,0,20,0,0,0],
 [0,0,0,0,0, 0,8,0,0],
 [0,0,0,0,0, 0,1,2,4],
 [0,0,0,0,0, 0,0,1,1],
 [0,0,0,0,0, 0,0,0,0]
]):

• 1*X
• 1*X-T*X #1#
• (1-T)*X #2#
• 1-T
• 2^0, a^0, 1000^0, EI^0
• T^0 #0#
• 1=T^0
•

```

► Inwiefern ist die Gleichung  $1*X=X$  unterschiedlich interpretierbar, d.h. " $1 \neq 1$ "?

► Warum akzeptiert MuPAD Zeile #1#, verweigert sich aber Zeile #2#?

► Was haben diese Phänome mit dem Ausklammern von X in  $X-T*X=B$  zu tun?

Antwort:

► Kannst du X in  $X-T*X=B$  ausklammern? Welchen Wert hat die Klammer?

Abbildung E.19: Screenshot aus dem CAS-Notebooks H\*, Scene 2 zum Prozessverständnis

- von Parcours H\* notiert, da sie im vorhergehenden Lernarrangement G\* von der Lerngruppe erarbeitet und anschließend im Plemun besprochen worden ist.
- Die Artikulation des Unterrichtsverlaufs wird durch die MuPAD-Notebooks gesteuert, die Tätigkeit der Lehrperson fokussiert daher wesentlich auf die beschriebenen Metakognitionsprozesse und die Förderung angemessener Objektverständnisse (Procepte) in den K-Phasen. Die Lehrerrolle befreit sich dadurch von routinehaltigen Orchestrierungen des Unterrichts. Die Lehrperson moderiert sinngebende Verständigungsprozesse im Plenum, die Prozesse zu Objekten verdinglichen helfen und thematisiert dazu explizit die ambivalente Rolle von Symbolen als Prozesskompaktifizierungen oder Konzeptträger. Das Plenum ist zudem der geeignete Ort für theoretische Erörterungen wie Argumentationen, zusätzliche Beweisführungen etc.
  - Da die mathematischen Objekte und Operationen in dieser anwendungsorientierten Mikrowelt ihre inhaltliche Bedeutung in Bezug auf das Modellproblem durchgehend beibehalten, verlaufen Konzeptentwicklung und Konzeptanwendung rückgekoppelt und sinnstiftend parallel.
  - Während die Aktions- und Prozessphasen in den Etappen F\*, G\*, H\* des Lernarrangements bei einem erneuten Einsatz in der nächsten Lerngruppe (bis auf Optimierungen) konstant bleiben können, tauscht man die Aufgabensequenz aus dem Übungsteil I\* sinnvollerweise durch neue Problemstellungen aus. Der Arbeitsaufwand für die unterrichtende Lehrperson bleibt so akzeptabel.

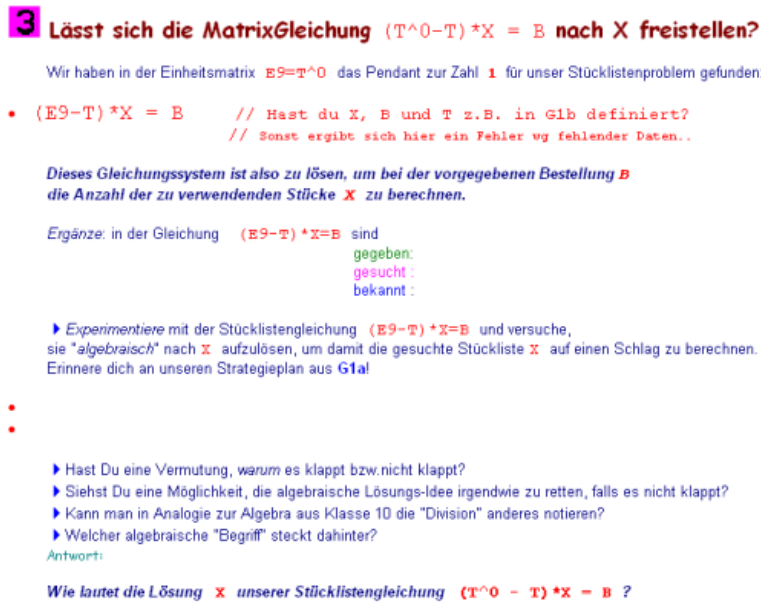


Abbildung E.20: Screenshot aus dem CAS-Notebooks H\*, Scene 3

## Erprobungsfassung und Tests des Stücklistenproblems

In seiner Staatsexamensarbeit berichtet R. KLEIN [138, S. 100 ff bzw. S. 109 ff] von der Erprobung des Lernarrangements *Stücklisten* im Rahmen des Projektes *NaT-Working Mathematik NRW* der ROBERT-BOSCH-STIFTUNG, die unter Betreuung des Verfassers als MuPAD-Evaluationsversion verfasst wurde. Die ersten beiden Abschnitte dieser Erprobungsfassung wurden bei zwei Gelegenheiten eingesetzt: im Rahmen eines *NAT-Working-Workshops* mit insgesamt 14 Schülerinnen und Schülern und bei einer *MINT-EC-Tagung* mit 24 erfahrenen Lehrerinnen und Lehrern. Bei beiden Veranstaltungen war das Stücklistenproblem der zweite Parcours, vorgeschaltet war jeweils eine kurze CAS-Einheit über lineare Gleichungssysteme. Zu den Rahmenbedingungen im Schüler-Workshop

[...] ist zu sagen, dass eine Bruttobearbeitungszeit von etwa zweieinhalb Stunden zur Verfügung stand, Pausen konnten nach eigenem Ermessen gewählt werden. Die Progression der Bearbeitung ist daher auch sehr gemischt, lediglich eine Gruppe hat auch die zweite Etappe komplett abschließen können. Die meisten Schüler sind in der Vorgabezeit etwa bis zur Mitte der zweiten Etappe gekommen. [a. a. O., S. 120]

während die Bearbeitungszeit in der Lehrerfortbildung ca. 1 Stunde betrug. Als verständniskritisch erwiesen sich in beiden Fällen zwei Teile der zweiten *Stücklistenproblem*-Etappe. Die erste Bruchstelle markiert folgende Worksheet-Passage, die direkt nach der Darstellung des Verflechtungsgraphen steht:

Am Diagramm erkennst du auch, dass für die Produktion - im Folgenden immer dargestellt als Vektor  $P$  (wie **P**roduktion) - sowohl die interne Nachfrage des Vektors  $A$  (wie **A**rbeitsbedarf) als auch die externe Nachfrage  $B$  (wie **B**estellung des Kunden) gedeckt sein müssen.

Es gilt somit:  $P = A + B$ .

Hinsichtlich des Produktionsprozesses wollen wir einen Bauteil erst dann im Vektor erscheinen lassen, wenn alle Teile und Baugruppen, die er enthält, bereits genannt wurden. [a. a. O., S. 63]

Lediglich unterbrochen durch die Frage nach der Eindeutigkeit der technologischen Reihenfolge im Stücklistenproblem – jedoch ohne enaktive Zwischenhandlungen – folgt noch auf der gleichen Seite eine weitere entscheidende Erläuterung:

Der Anteil der für die Produktion intern benötigten Teile (Vektor  $A$ ) ist auch abhängig von der jeweiligen Produktion. Mit Hilfe einer Matrix  $M$  muss es also möglich sein, folgende Beziehung darzustellen:  $A = M * P$ .

Diese spezielle Matrix  $M$  wird als *Mengenmatrix* bezeichnet, da in ihren Spalten enthalten ist, wieviele Teile der anderen Elemente jeweils für die Produktion eines Elementes benötigt werden. [a. a. O., S. 64]

Dazu bemerkt KLEIN mit Recht:

In der zweiten Etappe stellte sich in diesem Seminar und auch bei einem anderen Einsatz der Lerneinheit, die Produktionsaufteilung in internen und externen Bedarf, repräsentiert durch die Gleichung sowie die unter Einführung der Mengenmatrix gewonnene Beziehung, als Knackpunkt heraus. Hier sollte die Lerneinheit bei einer Weiterentwicklung noch mehr ins Detail gehen. In der über das Stücklistenproblem gesichteten Literatur wird dieser Punkt leider meistens auch sehr knapp behandelt und fast als kanonisch einsichtig dargestellt.

Hier seien daher kurz die wesentlichen Redesignmaßnahmen zusammengefasst, von denen man sich eine Verständniserhöhung und Akzeptanzverbesserung des Lernarrangements *Stücklistenproblem* versprechen kann:

- Aufsplitten des vormals einteiligen Parcours in drei Parcours-Teile  $F^*$ ,  $G^*$ ,  $H^*$  und damit Angleichung an die schon entwickelten Lernarrangements *Matrizen & Graphen* bzw. *Matrizen & Prozesse*;
- Verlagern der konkreten Berechnung von Stücklisten mit „Zahlenbeispielen“ vom Ende des Lernarrangements an den Anfang des ersten Parcours; dadurch resultiert eine erhöhte Aktivierung (Handlungsbasierung) der Lerner, eine Explizierung des Begriffs Stückliste, die Eröffnung von weiteren Fragestellungen am selbst erarbeiteten Datenmaterial sowie eine Reduktion des verbalen Erklärungsanteils;
- frühe „Vervollständigungs“-Handlungen am Verflechtungsgraphen schaffen eine intensivere Kontextvertrautheit mit informellen Lösungsmöglichkeiten;
- Abtrennung eines expliziten Modellierungsteils zur enaktiven Konstruktion der Technologiematrix in einem eigenen Parcours  $F^*$ ;
- Konstruktion von *generischen Organizern (Mikrowelten)* zum experimentellen explorativen Erkunden der Linearität von  $T^*X$  und der Beziehung zwischen  $X-T^*X-B$ ;
- Schaffung einer heuristischen Leitlinie durch die Parcoursfolge mit Hilfe einer Implikationskaskade („*Analogieschluss-Sequenz*“);

- Fokussierung auf eine schlagartige Konzeptprägung durch Reduktion programmiertechnischer Komplikationen z. B. bei der Konstruktion der Einheitsmatrix über den „hoch-Null“-Analogieschluss oder bei der Konstruktion der Technologiematrix mit Hilfe des Konkat-Operators;
- Gliederung der Einzelparcourse in (einstellig viele) *Sinneinheiten* gemäß MILLER 's „7±2“-Regel in Angleichung zu den anderen Lernarrangements.

Erprobungen dieses Redesigns erfolgten mit Klassen 10 und 12 am Gymnasium und zeigten erhebliche Performancegewinne.

# Anhang F

## Glossar

**APOS-Theorie:** Akronym für **A**ction-**P**rocess-**O**bject-**S**chema-Theorie; sozial-konstruktivistische Lehr- und Lerntheorie und internationaler theoretischer Forschungsansatz zur praktischen Curriculumentwicklung; wird insbesondere als computerbasierte fachdidaktische Lehr- und Lernmethode eingesetzt. Die APOS-Theorie versteht sich als Fortschreibung der entwicklungspsychologischen Stufentheorie PIAGET's, vgl. [89] .

**ACE-Zyklus:** beschreibt eine Orchestrierung des computerbasierten Unterrichts in einer Abfolge von **A**ctivities (mit CAS / amPC) – (whole) **C**lass (teaching) – **E**xercises - Zyklen gemäß der APOS-Theorie

**CAS:** kurz für **C**omputer-**A**lgebra-**S**ystem. Es handelt sich dabei um Software zur Ausführung symbolischer („algebraischer“) Umformungen mit einem Computer. Bekannte CAS sind z. B. MUPAD, MAPLE, MAXIMA, MATHEMATICA oder MATHPIPER.

**LACSG:** Akronym für *Linear Algebra Curriculum Study Group*, siehe [117]

**M<sup>2</sup>.A.K.E.-Lernarrangement:** Adaption des A.C.E.-Zyklus durch eine Rahmung mit metakognitiven Aktivitäten in der Problem-Launch-Phase sowie der Rückblicksphase einer Problembearbeitung

**Outsourcing:** Auslagerung (nach PESCHEK: des 'Operativen') routinemäßiger mathematischer Tätigkeiten wie z. B. Termumformungen oder Lösungsberechnungen. Hier auch ausgeweitet als 'Auslagerung des Memorativen' (z. B. in Module gekapseltes Wissen) verstanden.

**RME:** kurz für **R**ealistic **M**athematics **E**ducation; Forschungsrichtung der niederländischen Mathematikdidaktik, die in der Nachfolge von FREUDENTHAL die Mathematik als menschliche Aktivität versteht. Hier benutzen wir insbesondere die Sicht auf die Modellbildungsaktivitäten ('Modell für' vs. 'Modell zu'), vgl. z.B. [109].

**RUMEC:** internationale Arbeitsgruppe von Forschern auf der Basis der APOS-Theorie bzw. die dazugehörige Forschungsgemeinschaft unter dem Titel *Research in Undergraduate Mathematics Education*; in neueren Veröffentlichungen auch als RUMEC bezeichnet, d.h. RUME-Community.

**SONG:** Akronym für **s**ymbolisch – **o**rthographisch (versprachlicht) – **n**umerisch – **g**raphisch (visualisiert); ein didaktisches Prinzip speziell für den CAS-gestützten Mathematikunterricht. Es handelt sich um eine CAS-gemäße Realisierung des didaktischen *Prinzips der multiplen Repräsentation* bzw. des bekannten BRUNERSchen E-I-S-Prinzips (**E**naktiv-**I**konisch-**S**ymbolisch) zur variationsreichen Darbietung bzw. Darstellung von Lerngegenständen.

**TLAG:** Akronym für *Teaching Linear Algebra Group*, siehe [52]

# Literaturverzeichnis

- [1] ARNOLD, H. Über Problemstellungen, an denen Schüler mathematisches Modellieren üben können. *Mathematikinformation*, 37 (2002), 9 – 55.
- [2] ARNOLD, H. Zur Epistemologie der geometrischen Relationen-Algebra. Vortrag an der HU-Berlin, 2003.
- [3] ARTMANN, B. *Skript zur Vorlesung: Analysis in der Schule*. TH Darmstadt, 1995.
- [4] ARTMANN, B., AND TÖRNER, G. *Lineare Algebra. Grund- und Leistungskurs*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1980.
- [5] ARTMANN, B., AND TÖRNER, G. Bemerkungen zur Geschichte der Linearen Algebra. *mu* 27, 2 (1981), 59–67.
- [6] ASIALA, M., ET AL. Development of Students Understanding of Cosets, Normality and Quotient Groups. *Journal of Mathematical Behavior* 16, 4 (1997).
- [7] ASIALA, M., ET AL. The Development of Students Graphical Understanding of The Derivative. *Journal of Mathematical Behavior* 16, 3 (1997).
- [8] AYERS, T., ET AL. Computer Experiences in the Teaching of Composition of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education* 19, 3 (1988), 246–259.
- [9] BALAS, A., ET AL. A Case Study in the History of Calculus Reform. Master’s thesis, University of Wisconsin, Eau Claire, Eau Claire WI, 1998.
- [10] BANCHOFF, T., AND WERMER, J. *Linear Algebra Through Geometry*. Springer, New York, 1992.
- [11] BAUM, M., ET AL. *Lambacher-Schweizer: Lineare Algebra mit analytischer Geometrie - Grundkurs*. Klett, Stuttgart, 2000.
- [12] BAUM, M., ET AL. *Lambacher-Schweizer: Lineare Algebra mit analytischer Geometrie - Leistungskurs*. Klett, Stuttgart, 2001.
- [13] BAUM, M., ET AL. *Gesamtband Grundkurs*. Klett, Stuttgart, 2003.
- [14] BAUMANN, R. *Analysis 2. Ein Arbeitsbuch mit Derive*. Klett, Stuttgart, 2002.

- [15] BAUMERT, J., ET AL. *PISA 2000 - Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Leske + Budrich, Opladen, 2001.
- [16] BAXTER, N., ET AL. *Learning Discrete Mathematics with ISETL*. Springer Verlag, 1988.
- [17] BLYTH, T. S., AND ROBERTSON, E. F. *Basic Linear Algebra*. SUMS. Springer, London, 1998.
- [18] BLYTH, T. S., AND ROBERTSON, E. F. *Further Linear Algebra*. SUMS. Springer, London, 2002.
- [19] BOCHENSKI, I. *Die zeitgenössischen Denkmethode*n, vol. 304 D of *Dalp-Taschenbücher*. Francke, Bern, 1965.
- [20] BORSE, G. J. *Numerical Methods with MatLAB*. PWS Publishing, Boston, 1997.
- [21] BREIDENBACH, D., ET AL. Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics* 23, 1 (1992), 247–285.
- [22] BRÖCKER, T. *Lineare Algebra und Analytische Geometrie - Ein Lehrbuch für Physiker und Mathematiker*. Birkhäuser, Basel, 2003.
- [23] BROWN, A., ET AL. Learning Binary Operations, Groups, and Subgroups. *Journal of Mathematical Behavior* 16, 4 (1997).
- [24] BURGESS, D. N., ET AL. *Applying Mathematics: A Course in Mathematical Modelling*. Ellis Horwood, Chichester, 1982.
- [25] BÜRGER, ET AL. *Analytische Geometrie mit Linearer Algebra - Leistungskurs*. Lambacher-Schweizer Mathematik. Klett, Stuttgart, 1988.
- [26] CARLSON, ET AL. *Resources for Teaching Linear Algebra*, vol. 42 of *MAA Notes Series*. MAA, Washington, 1997.
- [27] CARLSON, D. Teaching Linear Algebra: Must the Fog Always Roll In? In *Resources for Teaching Linear Algebra*, D. Carlson et al., Eds., vol. 42 of *MAA Notes*. MAA, Washington, 1997, pp. 39–51.
- [28] CARLSON, M. The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for The First Cours in Linear Algebra. In *Resources for Teaching Linear Algebra*, D. Carlson et al., Eds., vol. 42 of *MAA Notes*. MAA, Washington, 1997, pp. 53–58.
- [29] CHANG, R. The Undergraduate Linear Algebra Curriculum: A View from a Client Discipline, Computer Graphics. In *Resources for Teaching Linear Algebra*, D. Carlson et al., Eds., vol. 42 of *MAA Notes*. MAA, Washington, 1997, pp. 21–26.



- [30] CHEN, K., ET AL. *Mathematical Explorations with MatLAB*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [31] CHRISTIAN THIEL. *Philosophie und Mathematik. Eine Einführung in die Wechselwirkungen und in die Philosophie der Mathematik*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1995.
- [32] CLAUS, V., AND SCHWILL, A. *DUDEN Informatik*. Dudenverlag, Mannheim, 1988.
- [33] COTTRILL, J., ET AL. Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. *Journal of Mathematical Behavior* 15, 2 (1996), 167–192.
- [34] COTTRILL, J., ET AL. Learning Linear Algebra with ISETL, 2001.
- [35] COWEN, C. Teaching and testing mathematics reading. *amm* 98 (1991), 50–53.
- [36] CREUTZIG, C., ET AL. *Das MuPAD Tutorium*, 2 ed. Springer, Berlin, 2002.
- [37] CREUTZIG, C., ET AL. *Das MuPAD Tutorium*, 2 ed. Springer, Berlin, 2002.
- [38] CZARNOCHA, B., ET AL. Calculus Students Intuition of Area and the Definite Integral: Chopping Up or Sweeping Out. *Collegiate Mathematics Journal* (2000).
- [39] DALGAARD, P. *Introductory Statistics with R*. Statistics and Computing. Springer, New York, 2002.
- [40] DANCKWERTS, R., AND VOGEL, D. *Analysis verständlich unterrichten*. Elsevier, Heidelberg, 2006.
- [41] DAUTERMANN, J., ET AL. On Learning Fundamental Concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mathematics* 27 (1994), 267–305.
- [42] DAUTERMANN, J., ET AL. Using Visual and Analytic Strategies: A study of students' understanding of permutation and symmetry groups. *Journal for Research in Mathematics Education* 27, 4 (1996), 435–457.
- [43] DAUTERMANN, J., ET AL. A Reaction to Burn's 'What are the Fundamental Concepts of Group Theory?'. *Educational Studies in Mathematics* 34, 1 (1997), 249–253.
- [44] DAY, J. Teaching Linear Algebra New Ways. In *Resources for Teaching Linear Algebra*, D. Carlson et al., Eds., vol. 42 of *MAA Notes*. MAA, Washington, 1997, pp. 71–83.
- [45] DEEBA, E., AND GUNAWARDENA, A. *Interactive Linear Algebra with Maple V*. Springer, New York, 1998.
- [46] DEWAR, R., ET AL. *Programming with Sets: An Introduction to SETL*. Springer, 1986.

- [47] DIALEKT-PROJEKT. *Statistik Interaktiv! - Deskriptive Statistik*. Springer, Berlin, 2000.
- [48] DOMBROWSKI, P. *Differentialrechnung I und Abriß der linearen Algebra*, vol. 743 of *B.I.-Hochschultaschenbücher*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1970.
- [49] DOMBROWSKI, P. *Wege in euklidischen Ebenen. Kinematik der Speziellen Relativitätstheorie*. Springer, Berlin, 1999.
- [50] DÖRFLER, W. Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In *Computer-Mensch-Mathematik*, W. Dörfler, Ed., vol. 21 of *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1991.
- [51] DORIER, J.-L. Epistemological Analysis of the Genesis of the Theory of Vector Spaces. In *On The Teaching of Linear Algebra*, J.-L. Dorier, Ed., vol. 23 of *Mathematics Education Library*. Kluwer, Dordrecht, 2000, pp. 1–81.
- [52] DORIER, J.-L., ET AL. *On The Teaching of Linear Algebra*. Kluwer, Dordrecht, 2000.
- [53] DORIER, J.-L., ET AL. The Meta Lever. In *On The Teaching of Linear Algebra*, J.-L. Dorier, Ed., vol. 23 of *Mathematics Education Library*. Kluwer, Dordrecht, 2000, pp. 151–176.
- [54] DORIER, J.-L., ET AL. The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. In *On The Teaching of Linear Algebra*, J.-L. Dorier, Ed., vol. 23 of *Mathematics Education Library*. Kluwer, Dordrecht, 2000, pp. 85–1241.
- [55] DRIJVERS, P. H. *Learning algebra in a computer algebra environment - Design research on the understanding of the concept of parameter*. CD-β Press, Utrecht, 2003.
- [56] DUBINSKY, E. Reflective Abstraction and Computer Experiences. In *Proceedings of the Eighth Annual Meeting of PME-NA, September 1987* (September 1986).
- [57] DUBINSKY, E. On Teaching Mathematical Induction, I. *Journal of Mathematical Behavior* 6, 1 (1987), 305–317.
- [58] DUBINSKY, E. On Teaching Mathematical Induction, II. *Journal of Mathematical Behavior* 8 (1989), 285–304.
- [59] DUBINSKY, E. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In *Advanced Mathematical Thinking*, D. Tall, Ed., vol. 5. Kluwer, 1991, pp. 95–126.
- [60] DUBINSKY, E. The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. In *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*, L. Steffe, Ed. Springer, New York, 1991.

- [61] DUBINSKY, E. A Learning Theory Approach to Calculus. In *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education*, Z. Karian, Ed., vol. 24. MAA, Reston, 1992, pp. 48–55.
- [62] DUBINSKY, E. Using Computer Experiences to Implement a Piagetian Theory of Learning. In *Influence des Moyens de Calcul et de l'Informatique sur l'Enseignement des Mathématiques*. La Nouvelle Encyclopédie, DIDEROT, Paris: PUF, 1992, pp. 237–270.
- [63] DUBINSKY, E. Showing, Using and Making Mathematics: A CAS Can Only Go So Far. *Computer Algebra Systems Newsletter* (1993).
- [64] DUBINSKY, E. A Theory and Practice of Learning College Mathematics. In *Mathematical Thinking and Problem Solving*, A. Schoenfeld, Ed. Erlbaum, Hilldale, 1994, pp. 221–243.
- [65] DUBINSKY, E. Pedagogical Change in Undergraduate Mathematics Education. In *You're the Professor, What Next*, B. A. Case, Ed., vol. 35. MAA, Reston, 1994, pp. 114–119.
- [66] DUBINSKY, E. Reaction to James Kaput's paper 'Democratizing Access to Calculus: New Route to Old Roots'. In *Mathematical Thinking and Problem Solving*, A. Schoenfeld, Ed. Erlbaum, Hilldale, 1994, pp. 157–171.
- [67] DUBINSKY, E. *A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics*, vol. 37 of *MAA Notes*. MAA: Washington, DC, 1995.
- [68] DUBINSKY, E. ISETL: A Programming Language for Learning Mathematics. *Comm. in Pure and Appl. Math.* 48 (1995), 1–25.
- [69] DUBINSKY, E. *Applied Calculus, Concepts & Computers*, revised preliminary edition ed. McGraw-Hill, 1996.
- [70] DUBINSKY, E. A Reaction to "A Critique of the Selection of 'Mathematical Objects' as a Central Metaphor for Advanced Mathematical Thinking" by Confrey and Costa. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 2 (1997), 67–91.
- [71] DUBINSKY, E. On Learning Quantification. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching* 16, 213 (1997), 335–362.
- [72] DUBINSKY, E. *Readings In Cooperative Learning For Undergraduate Mathematics*, vol. 44 of *MAA Notes*. MAA, 1997.
- [73] DUBINSKY, E. Some Thoughts on a First Course in Linear Algebra at the College Level. In *Resources For Teaching Linear Algebra*, D. Carlson, C. Johnson, D. Lay, R. Porter, A. Watkins, and W. Watkins, Eds., vol. 42. MAA Notes, 1997, pp. 85–106.

- [74] DUBINSKY, E. A theory-based approach to help students learn post-secondary mathematics: The case of limits. Tech. Rep. 1, 1–18, Research reports in mathematics education, Umea University, 2000.
- [75] DUBINSKY, E. Mathematical Literacy and Abstraction in the 21st Century. In *Vision for Science and Mathematics Education in the 21st Century: School Science and Mathematics*. (2000), M. Niess, Ed.
- [76] DUBINSKY, E. Meaning and Formalism in Mathematics. Tech. Rep. 1, 19–40, Research reports in mathematics education, Umea University, 2000.
- [77] DUBINSKY, E. *Reflections on Krantz's 'How to Teach Mathematics': A Different View*. Georgia State University, 2000.
- [78] DUBINSKY, E. *After Examples and Before Proofs, Constructing Mental Objects*. o. O., o. J.
- [79] DUBINSKY, E. Computers in Teaching and Learning Discrete Mathematics and Abstract Algebra. o. O., o. J.
- [80] DUBINSKY, E. Writing Programs to Learn Mathematics. o.O., o.J.
- [81] DUBINSKY, E., ET AL. Development of the Process Conception of Function by Pre-Service Teachers in a Discrete Mathematics Course. In *Thirteenth Annual Meeting of PME, June 1989, Paris* (June 1989), vol. 5, pp. 55–92.
- [82] DUBINSKY, E., AND FENTON, W. E. *Introduction to Discrete Mathematics with ISETL*. Springer, 1996.
- [83] DUBINSKY, E., AND FRASER, R. Computers and The Teaching of Mathematics: A World-view. Tech. rep., The Shell Centre, University of Nottingham, Nottingham, England, 1990.
- [84] DUBINSKY, E., AND HAREL, G. The Concept of Functions: Aspects of Epistemology and Pedagogy. *MAA Notes 25* (1992).
- [85] DUBINSKY, E., AND HAREL, G. The Nature of the Process Conception of Function. In *The Concept of Functions: Aspects of Epistomology and Pedagogy*, G. Harel and E. Dubinsky, Eds., vol. 25. MAA, Reston, 1992, pp. 85–106.
- [86] DUBINSKY, E., AND LERON, U. *Learning Abstract Algebra with ISETL*. Springer, 1994.
- [87] DUBINSKY, E., AND LERON, U. An Abstract Algebra Story. *American Mathematical Monthly* 102, 3 (1995), 227–242.
- [88] DUBINSKY, E., AND LEWIN, P. Reflective Abstraction and Mathematics Education. *Journal of Mathematical Behavior* 5, 1 (1986), 55–92.

- 
- [89] DUBINSKY, E., AND McDONALD, M. *APOS: A Constructivist Theory of Learning in UME Research*. o. O., 2000.
- [90] DUBINSKY, E., AND SCHWINGENDORF, K. Calculus, Concepts and Computers - Innovations in Learning Calculus. In *Priming the Calculus Pump: Innovations and Resources*, T. Tucker, Ed., vol. 17. MAA Notes, Reston, 1990, pp. 175–198.
- [91] DUBINSKY, E., AND SCHWINGENDORF, K. Calculus, Concepts and Computers: Some Laboratory Projects. In *The Laboratory Approach to Teaching Calculus*, C. Leinbach, Ed., vol. 20. MAA, Reston, 1991.
- [92] DUBINSKY, E., AND SCHWINGENDORF, K. Mathematics Computer Laboratories for Education and Research. In *The Laboratory Approach to Teaching Calculus*, C. Leinbach, Ed., vol. 20. MAA, Reston, 1991.
- [93] DUBINSKY, E., AND TALL, D. Advanced Mathematical Thinking and the Computer. In *Advanced Mathematical Thinking*, D. Tall, Ed., vol. 5. Kluwer, Dordrecht, 1991, pp. 231–250.
- [94] DUBINSKY, E., AND YIPARAKI, O. On Student Understanding of AE and EA Quantification. in review.
- [95] DUBINSKY, E., AND YIPARAKI, O. Predicate Calculus and the Mathematical Thinking of Students. o. O., o. J.
- [96] DUBINSKY, E., AND ZAZKIS, R. Dihedral Groups: A Tale of Two Interpretations (Research in Collegiate Mathematics Education) . *CBMS Issues in Mathematics Education* 6 (1996), 61–82.
- [97] ELTERMAN, F., ET AL. The Student's Construction of Quantification. *For the Learning of Mathematics* (1989).
- [98] ENGEL, R. *Objektorientierte Programmierung*, 3. ed. Markt&Technik, München, 1990.
- [99] ENZENSBERGER, H. *Zugbrücke außer Betrieb - Drawbridge Up*. 1A.K. Peters, Natick, 1999.
- [100] FARIN, G., AND HANSFORD, D. *Lineare Algebra: Ein geometrischer Zugang*. Springer, Berlin, 2003.
- [101] FREUDENTHAL, H. *Mathematik als pädagogische Aufgabe I*. Klett, Stuttgart, 1973.
- [102] FREUDENTHAL, H. *Mathematik als pädagogische Aufgabe II*. Klett, Stuttgart, 1973.
- [103] FREUDENTHAL, H. *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

- [104] FRIEDMAN, D., WAND, M., AND HAYNES, C. *Essentials of Programming Languages*. MIT Press, Cambridge, 1992.
- [105] FUCHSSTEINER, B., AND OTHERS (THE MUPAD GROUP). *MuPAD User's Manual – Multi-Processing Algebra Data Tool : MuPAD Version 1.2.2*. Wiley-Teubner, Chichester/Stuttgart, 1996.
- [106] GLASER, H., SCHEID, H., AND WELLSTEIN, H. *Sigma: Lineare Algebra/ Analytische Geometrie*. Klett, Stuttgart, 1987.
- [107] GRÄBE, H.-G. *Einführung in das symbolische Rechnen*. Tech. rep., Universität Leipzig, Institut für Informatik, Vorlesungsskript 2000.
- [108] GRABINGER, B. *Stochastik mit Derive*. Dümmler, Bonn, 1997.
- [109] GRAVEMEIJER, K. *Developing realistic mathematics education*. CD-β Press, Utrecht, 1994.
- [110] GRAY, E., AND TALL, D. Relationships between embodied objects and symbolic concepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. In *25. Annual Meeting of PME, 2001* (2001), vol. 3, International Group for the Psychology of Mathematics Education, pp. 65–73.
- [111] GRIESEL, H., ET AL. *Elemente der Mathematik - Leistungskurs Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Schroedel, Braunschweig, 2004.
- [112] GRIESEL, H., AND POSTEL, H. *Elemente der Mathematik: Grundkurs 12/13*. Schroedel, Stuttgart, 2000.
- [113] GRIGUTSCH, S. *Mathematische Weltbilder von Schülern. Struktur, Entwicklung, Einflußfaktoren*. PhD thesis, Universität Duisburg, Department of Mathematics, 1996.
- [114] HAILPERIN, M., KAISER, B., AND KNIGHT, K. *Concrete Abstractions - An Introduction to Computer Science Using Scheme*. Brooks/Cole, Pacific Grove, 1999.
- [115] HAMACHER, W. Stücklisten und Lineare Algebra. <http://www.mathematik.uni-kl.de/mamaesch/stueckl/kap1.html>, o.J.
- [116] HÄMMERLIN, G., AND HOFFMANN, K. *Numerische Mathematik*, vol. 7 of *Grundwissen Mathematik*. Springer, 1989.
- [117] HAREL, G. The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations: Moving Beyond Concept Definition. In *Resources for Teaching Linear Algebra*, D. Carlson et al., Eds., vol. 42 of *MAA Notes*. MAA, Washington, 1997, pp. 107–126.
- [118] HAREL, G. Three Principles of Learning and Teaching Mathematics. In *On The Teaching of Linear Algebra*, J.-L. Dorier, Ed., vol. 23 of *Mathematics Education Library*. Kluwer, Dordrecht, 2000, pp. 177–190.

- [119] HARRISON, R. *Abstract Data Types in Standard ML*. Wiley, Chichester, 1992.
- [120] HEFENDEHL-HEBEKER, L. *Figuren und Abbildungen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I*. Wißner, Augsburg, 2000.
- [121] HEFENDEHL-HEBEKER, L. *Maße und Funktionen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I*. Wißner, Augsburg, 2002.
- [122] HEFENDEHL-HEBEKER, L. *Didaktik der Stochastik I - Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Vorlesungsarbeit, 2003.
- [123] HENZE, N. *Stochastik für Einsteiger*, 3. ed. Vieweg, Braunschweig, 2000.
- [124] HEUGL, H., KLINGER, W., AND LECHNER, J. *Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen*. Addison-Wesley, Bonn, 1996.
- [125] HILL, R. *Elementary Linear Algebra with Applications*, 3 ed. Saunders College Publishing, Philadelphia, 1996.
- [126] HILL, R., AND KEAGY, T. *Elementary Linear Algebra with Derive*. Chartwell-Brett, Lund, 1995.
- [127] HILLEL, J. Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In *On The Teaching of Linear Algebra*, J.-L. Dorier, Ed., vol. 23 of *Mathematics Education Library*. Kluwer, Dordrecht, 2000, pp. 191–208.
- [128] HUSSMANN, S. *Konstruktivistisches Lernen an Intentionalen Problemen*. Franzbecker, Hildesheim, 2002.
- [129] JAHNKE, T., AND WUTTKE, H. *Analytische Geometrie und Lineare Algebra*. Cornelsen, Berlin, 2003.
- [130] JÄNICH, K. *Lineare Algebra - Ein Skriptum für das erste Semester*. Springer, Berlin, 1979.
- [131] JÄNICH, K. *Mathematik 1 - Geschrieben für Physiker*. Springer, Berlin, 2001.
- [132] JÄNICH, K. *Mathematik 2 - Geschrieben für Physiker*. Springer, Berlin, 2002.
- [133] KAISER, G., ET AL. *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 35. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 5.-9. März 2001 in Ludwigsburg*. Franzbecker, 2001.
- [134] KAYSER, H.-J. *Lineare Algebra und Geometrie mit DERIVE*. Dümmler, Bonn, 1997.
- [135] KERNIGHAN, B., AND PIKE, R. *The Practice of Programming*. Addison-Wesley, 1999.
- [136] KERSTEN, I. Analytische Geometrie und Lineare Algebra I/II. <http://www.uni-math.gwdg.de/skripten/Aglaskript/agla.pdf>, 2003.

- [137] KLAPSINO, A., AND GRAY, E. The Intricate Balance Between Abstract and Concrete in Linear Algebra. In *23. conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME), Haifa (Israel), 25-30 JI, 1999*. PME, 1999, pp. 153–160.
- [138] KLEIN, R. Konzept einer MuPAD-basierten Lernumgebung zum Themenkreis Lösen linearer Gleichungssysteme im Anwendungskontext des Stücklistenproblems. Unveröffentlichte 1. Staatsexamensarbeit, Universität Duisburg–Essen, 2003.
- [139] KOECHER, M. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Springer, Berlin, 1983.
- [140] KRAMER, J. *Notizen zur Vorlesung der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I*. <http://www-didaktik.mathematik.hu-berlin.de/org/kramer/laag-scr.pdf>, 2002.
- [141] KROLL, W., REIFFERT, H.-P., AND VAUPEL, J. *Analytische Geometrie/Lineare Algebra. GK/LK*. Dümmler, Bonn, 1997.
- [142] KUTZLER, B. *Mathematik unterrichten mit Derive - Ein Leitfaden für Lehrer*. Addison–Wesley, Bonn, 1995.
- [143] KUTZLER, B. The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 7, 1 (2000), 5–23.
- [144] KWAK, J., AND HONG, S. *Linear Algebra*. Birkhäuser, Boston, 1997.
- [145] LARSON, R., AND EDWARDS, B. H. *Elementary Linear Algebra*, 4 ed. Houghton Mifflin, Boston, 2000.
- [146] LAY, D. *Linear Algebra and its Applications*. Addison-Wesley, Reading, 1994.
- [147] LEHMANN, E. *Lineare Algebra mit dem Computer*. Teubner, Stuttgart, 1983.
- [148] LEINFELLNER, W. *Einführung in die Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie*, vol. 41/41a of *B.I.-Hochschultaschenbücher*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967.
- [149] LEON, S., ET AL. *ATLAST - Computer Exercises for Linear Algebra*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [150] LINDNER, W. Pseudoinverse zur Lösung von linearen Gleichungssystemen. Ein Unterrichtskonzept realisiert mit DERIVE. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht (MNU)* 52, 6 (1999), 340 – 341.
- [151] LINDNER, W. *Von der Cramerregel zu den vektoriellen Produkten*. Materialien und Handreichungen für die gymnasiale Oberstufe. Schriftenreihe Schule in NRW Nr. 9035/3. MSWF (Ministerium für Schule, Wissenschaft und Forschung des Landes) NRW, Düsseldorf, 2001, p. 45.



- [152] LINDNER, W. The DiGraph-CAS-Environment and corresponding Elementary Programming Concepts. In *Technology in Mathematics Teaching. Proceedings of the ICTMT 5 in Klagenfurt 2001* (Wien, 2002), H. K. Manfred Borovcnik, Ed., vol. 26 of *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*, öbv & hpt, pp. 199 – 202.
- [153] LINDNER, W. *Ausgleichsrechnung, überbestimmte LGS und Pseudoinverse mit MuPAD*, vol. 7 of *Mathematik 1 x anders: Materialien und Werkzeuge für computerunterstütztes Lernen*. SciFace Software, Paderborn, 2003.
- [154] LINDNER, W. CAS-supported Multiple Representations in Elementary Linear Algebra - The Case of the GAUSSian Algorithm. *zdm* 35, 2 (2003), 36 – 42.
- [155] LINDNER, W. *Lineare Transformationen mit MuPAD*, vol. 6 of *Materialien und Werkzeuge für computerunterstütztes Lernen*. SciFace Software, Paderborn, 2003.
- [156] LORENZEN, P. *Methodisches Denken*. Suhrkamp, Frankfurt a. M., 1974.
- [157] LORENZEN, P. *Theorie der technischen und politischen Vernunft*. Reclam, Stuttgart, 1978.
- [158] LORENZEN, P. *Differential und Integral. Eine konstruktive Einführung in die Analysis*. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt, 1996.
- [159] LORENZEN, P., AND SCHWEMMER, O. *Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie*, vol. 700. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1975.
- [160] LOWE, B., AND BERRY, J. *Learning Differential Equations through DERIVE*. Studentlitteratur, Lund, 1998.
- [161] MANIS, V., AND LITTLE, J. *The SCHEMEatics of Computation*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995.
- [162] MÖLLER, H. *Algorithmische Lineare Algebra*. Vieweg, Braunschweig, 1997.
- [163] MÖSSENBÖCK, H.-P. *Objektorientierte Programmierung in Oberon-2*. Springer, Berlin, 1994.
- [164] MSWF-NRW. *Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II – Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein–Westfalen*. Ministerium für Schule, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein–Westfalen, Frechen, 1999.
- [165] MÜHLBACHER, J., ET AL. *Programmieren mit Oberon-2 unter Windows*. Hanser, München, 1995.
- [166] NÜHRENBÖRGER, M. Interaktive Konstruktion mathematischen Wissens - Epistemologische Analysen zum Diskurs von Kindern im jahrgangsgemischtem Anfangsunterricht. *JMD* 30, 2 (2009), 147 – 172.

- [167] OTTMANN, T., ET AL. *Prinzipien des Algorithmenentwurfs*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1998.
- [168] PAULSEN, L. *ML for the Working Programmer*, 2 ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [169] PEPPER, P. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, HASKELL und GOFER*. Springer, Berlin, 1999.
- [170] PESCHEK, W. Auslagerung als didaktisches Prinzip eines computerunterstützten Unterrichts. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (Hildesheim, 1999), M. Neubrand, Ed., Franzbecker, pp. 405–408.
- [171] PESCHEK, W., AND SCHNEIDER, E. How to identify Basic Knowledge and Basic Skills in CAS-Supported Mathematics Education? In *Exam Questions & Basic Skills in Technology-Supported Mathematics Teaching (Proceedings Portoroz 2000)* (Hagenberg, 2000), V. Kokol-Voljc et al., Eds., vol. SL-15, 6th ACDC Summer Academy in Portoroz, 2.–5. July 2000, bk teachware.
- [172] PESCHEK, W., AND SCHNEIDER, E. How to identify Basic Knowledge and Basic Skills? Features of Modern General Education in Mathematics. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 8, 1 (2001), 7–22.
- [173] PLETSCH, B. *Computer Algebra Systems – A Practical Guide*. Wiley, Chichester, 1999, ch. Computer Algebra in Mathematics Education, pp. 285 – 322.
- [174] POLYA, G. *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*, vol. 36 of *Sammlung Dalp*. Francke, Bern, 1949.
- [175] PRUGGER, E., ET AL. *Differenzialrechnung mit dem TI-89/92/92+ - Ein anwendungsorientierter Lehrgang zur Einführung in die Differenzialrechnung*, vol. SR-23. bk teachware, Hagenberg, 2001.
- [176] PRUGGER, E., ET AL. *Integralrechnung mit dem TI-89/92/92+ - Ein anwendungsorientierter Lehrgang zur Einführung in die Integralrechnung*, vol. SR-24. bk teachware, Hagenberg, 2001.
- [177] RECKZIEGEL, H., ET AL. *Elementare Differentialgeometrie mit Maple*. Vieweg, Braunschweig, 1998.
- [178] REISER, M., AND WIRTH, N. *Programmieren in Oberon*. Addison–Wesley, 1994.
- [179] ROBERT, A. Level of Conceptualization and Secondary School Math Education. In *On The Teaching of Linear Algebra*, J.-L. Dorier, Ed., vol. 23 of *Mathematics Education Library*. Kluwer, Dordrecht, 2000, pp. 125–132.

- [180] ROGALSKI, M. The Teaching Experiment in Lille. In *On The Teaching of Linear Algebra*, J.-L. Dorier, Ed., vol. 23 of *Mathematics Education Library*. Kluwer, Dordrecht, 2000, pp. 133–150.
- [181] SCHNEIDER, E. Potentials and Effects of 'Representing' in CAS-Supported Mathematics Teaching. In *Exam Questions & Basic Skills in Technology-Supported Mathematics Teaching (Proceedings Portoroz 2000)* (Hagenberg, 2000), V. Kokol-Voljc et al., Eds., vol. SL-15, 6th ACDC Summer Academy in Portoroz, 2.–5. July 2000, bk teachware, pp. 161–164.
- [182] SCHNEIDER, E. Computeralgebrasysteme und kulturelle Kohärenz im Mathematikunterricht. In *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 35. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 5.-9. März 2001 in Ludwigsburg* (Hildesheim, 2001), G. Kaiser, Ed., GDM, Franzbecker, pp. 540–543.
- [183] SCHNEIDER, E. *Computeralgebrasysteme in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht*. Profil, München, 2002.
- [184] SCHOENFELD, A. Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the AMS* 47, 6 (2000), 2–10.
- [185] SCHOENFELD, A. H. *How We Think - A Theory of Goal-Oriented Behavior*. Routledge, 2010 (to appear).
- [186] SELTER, C., AND WALTER, G. *Mathematikdidaktik als design science*. Klett, Leipzig, 1999.
- [187] SIERPINSKA, A. On Some Aspects of Student's Thinking in Linear Algebra. In *On The Teaching of Linear Algebra*, J.-L. Dorier, Ed., vol. 23 of *Mathematics Education Library*. Kluwer, Dordrecht, 2000, pp. 209–246.
- [188] SMITH, R. S. A Collaborative Learning Constructivist Approach to Abstract Algebra using ISETL. Master's thesis, Miami University Oxford, Ohio, 1997.
- [189] STEINBRING, H. Epistemologische Analyse mathematischer Kommunikation. In *Beiträge zum Mathematikunterricht - Vorträge auf der 33. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5. März 1999 in Bern* (Hildesheim, 1999), M. Neubrand, Ed., GDM, div-Verlag Franzbecker, pp. 515 – 518.
- [190] STEINBRING, H. Die Entstehung mathematischen Wissens im Unterrichtsprozess - Folge individueller Erkenntnis oder Ergebnis einer sozialen Konstruktion? In *Beiträge zum Mathematikunterricht - Vorträge auf der 34. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 28. Feb. bis 3. März 2000 in Potsdam* (Hildesheim, 2000), M. Neubrand, Ed., GDM, div-Verlag Franzbecker, pp. 635 – 638.

- [191] STEINBRING, H. *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction - An Epistemological Perspective*. Mathematics Education Library. Springer, 2005.
- [192] STRANG, G. *Linear Algebra and its Applications*. Hartcourt Brace Jovanovich, San Diego, 1988.
- [193] STRANG, G. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1998.
- [194] SZABO, F. *Linear Algebra - An Introduction using Maple*. Academic Press, San Diego, 2002.
- [195] TALL, D. Concept Images, Generic Organizers, Computers and Curriculum Change. *For the Learning of Mathematics* (1989), 37–42.
- [196] TALL, D., AND VINNER, S. Concept Images and Concept Definition in Mathematics with Particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (1991), 49–63.
- [197] TIETZE, U.-P., KLIKA, M., AND WOLPERS, H. *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Vieweg, Braunschweig, 2000.
- [198] TOULMIN, S. *Voraussicht und Verstehen - Ein Versuch über die Ziele der Wissenschaft*. Suhrkamp, Frankfurt a. M., 1968.
- [199] TOWNEND, M., AND POUNTNEY, D. *Learning Modelling with Derive*. Prentice Hall, London, 1995.
- [200] TREFETHEN, L. N., AND BAU, D. *Numerical Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia, 1997.
- [201] ULLMAN, J. *Elements of ML Programming*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [202] VINNER, S. Scenes From Linear Algebra Classes. In *Resources for Teaching Linear Algebra*, D. Carlson et al., Eds., vol. 42 of *MAA Notes*. MAA, Washington, 1997, pp. 155–171.
- [203] VOGEL, D., AND WINTERMANTEL, G. *Explorative Datenanalyse - Statistik aktiv lernen*. Offener Unterricht. Klett, Stuttgart, 2003.
- [204] VON GUDENBERG, J. *Algorithmen, Datenstrukturen, Funktionale Programmierung*. Addison–Wesley, 1996.
- [205] WELLSTEIN, H., ET AL. *Mathe Live 8*. Klett, Stuttgart, 2003.
- [206] WERNER, J. *Numerische Mathematik 1*, vol. 32 of *Vieweg Studium*. Vieweg, Braunschweig, 1992.

- 
- [207] WERNER, W. *Mathematik lernen mit Maple 2*. dpunkt, Heidelberg, 1996.
- [208] WESTER, M. J., ET AL. *Computer Algebra Systems - A Practical Guide*. Wiley, Chichester, 1999.
- [209] WILLE, R. Versuche der Restrukturierung von Mathematik am Beispiel der Grundvorlesung 'Lineare Algebra'. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1981* (Hannover, 1981), GDM, Schroedel, pp. 102–112.
- [210] WILLIAMS, G. *Linear Algebra with Applications*, 3 ed. Morton, Englewood, 1996.
- [211] WITTMANN, E. C. *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, 6 ed. Vieweg, Braunschweig, 1997.
- [212] WOLFRAM, S. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, Campaign, 2002.
- [213] WONG, B., ET AL. *Differenzieren - Do It Yourself*. Orell Füssli, Zürich, 2003.



# Stichwortverzeichnis

- Übungen
  - produktive, 375, 395
- GAUSS-JORDAN-Algorithmus, 391
- Abbildung
  - lineare, 183
- Abstraktion
  - als Vergessen von Details, 129
  - als Vergessen von Struktur, 134
  - Daten-, 114
  - empirische, 112
  - funktionale, 114
  - klassifikatorische, 124
  - pseudoempirische, 113
  - reflexive, 112, 212
- Abstraktionsbarriere, 111, 134
- Abstraktionsoperator, 122
- Affinkombination, 157, 166
- Allgemeinbildungsmodell, 46
- Analogie, 414, 418
  - Barriere, 419
- Analogieschluß, 312
- Anschauungsraum
  - als affiner Raum, 156
- APOS-Theorie, 15
- ATLAST-Group, 244
- Ausgleichsgerade, 259
- Ausgleichslösung, 257
- Auslagerung
  - des Memorativen 97
  - des Operativen, 47
  - mentaler Prozesse, 48
  - von Reflexionen, 124
- Auslagerungsprinzip, 89, 90
- Barriere
  - Abstraktions-, 111, 124
  - Anschauungsraum-, 155
  - Chamäleon-, 151
  - Charakterisierungs-, 110
  - der Kontextgebundenheit, 207
  - der pseudokonzeptualen Denkhaltung, 191
  - des praktischen Denkens, 188
  - epistemologische, 419
  - Formalismus-, 104
  - Implizitheits-, 105
  - kognitive, 101
  - Komprehensions-, 106
  - Repräsentations-, 154
  - Tupelraum-, 155
- baryzentrische Koordinate, 157
- Basisentwicklung, 175
- Basistransformation, 172
- Beliefindex
  - CAS orientierter, 355
  - M-Belief-Index, 333
- Bestapproximation, 257
- BlackBox-WhiteBox-Prinzip, 87
- Blitzzeichen, 377
- CAS
  - MuPAD, 274
- CAS-Unterrichtsprinzipien, 51
- CAS-Spracherwerb
  - inkrementeller, 71
- Chamäleonbarriere, 151, 388
- Charakterisierungsbarriere, 110
- Computertomographie, 256
- Defekt, 238
- Defektkorrektur, 239
- Dekomposition

- genetische, 422
- genetische (Stücklistenproblem), 413
- Derive, 271, 273
- Dimensionssatz, 239
- Elementarmatrix, 391
- epistemologisches Dreieck, 146
- Erfahrungsverankerung
  - durch Experimentieren im CAS, 58
  - Prinzip der virtuellen, 60
  - virtuelle, 52
- Exaktifizierungsphase, 260
- Experimentierhandlung, 376
- Formalismusbarriere, 104, 214
- Formelaufbau
  - Pseudoinverse, 313
- Formelwissen, 314, 318
- Geheimnisprinzip, 75, 78
- Geheimsprachenmetapher, 142
- generic organizer, 387, 394
- Gestaltwandel, 401
- Gleichungsmatrix, 396
- Grundvorstellung
  - linear-unabhängig, 389
  - Linearkombination, 380, 389
- Hypothese, 233
- Imitation
  - aufgeschobene, 112
- Implizitheitsbarriere, 105
- Inversion
  - didaktische, 245
- Invertierungsbarriere, 400
- Kerncurriculum, 224
- Klammerung
  - metakognitive, 66
- Kohärenz
  - kulturelle, 45
- Kommunikationsmodell, 46
- Komplexität
  - Reduktion von, 75
- Reduzierung, 79
- Komprehensionsbarriere, 106
- Konzeptadaption, 233
- Konzeptinnovation, 234
- Koordinaten
  - baryzentrische, 169
- LACSG
  - didaktische Prinzipien, 204
  - Empfehlungen, 201
  - Kerncurriculum, 202
  - Kritik an Empfehlungen, 209
- Legierungsproblem, 233
- Lerntrajektorie
  - zum Stücklistenproblem, 423
- Lernumgebung
  - HyTeX-, 276
- Linearkombination, 387
  - Grundvorstellung, 387
- Mathematisierung
  - vertikale, 375
- MatLab, 215
- Matrix, 228
  - als Objekt, 376
  - als Transformation, 376
  - Grundverständnis, 372
  - Grundvorstellung, 377
  - inverse, 389
  - magische Quadrate, 380
  - Modellierungen, 380
  - musterbasierte Konstruktionen, 378
- Matrixbild, 394
- Matrixmultiplikation
  - Repräsentationswechsel, 388
- Matrizenmultiplikation, 375
- Meta-Hebel, 197, 199
- Metapher
  - der Tanz-Lektion, 144
  - Geheimsprachen-, 145
- Mikrowelt
  - zur affinen Geometrie, 165
- Modell, 256
  - i.S.d. RME, 372



- zu bzw. für, 232
- Modellierung
  - moderate, 94
  - Wasserturmproblem, 386
- Modul, 74, 76
- Modularisierung, 74, 77, 81
  - des Euklidischen Vektorraums, 82
  - des Gauss-Algorithmus, 86
  - in der APOS-Theorie, 79
- Modularisierungsprinzip, 81
- Modularität, 77
- Modulkonstruktion, 74
- Mustererkennung, 318
- Normalgleichung, 258
- Objekt konstruktion, 291
- Orchestrierung, 269
- Ordnung
  - lokale, 403
- organizer
  - advance, 412
  - generic, 250, 417
- Orthogonalprojektion, 250
- Ortsmatrix, 131
- Ortsvektor
  - als Abstraktion, 133
- Parcourssequenz, 225
- Permanenzprinzip, 233, 401
- Phänomenologie
  - didaktische, 235
- Pilotprojekte, 267
- Prinzip
  - der 7 Chunks, 97
  - der multiplen Repräsentation, 94
  - des vorwegnehmenden Lernens, 412
  - SONG-, 94
- Programmierstil
  - funktionaler, 77
  - imperativ-prozeduraler, 75
- Projektionsformel, 252
- Prozept, 230, 411
- Pseudoinverse, 108, 239, 256, 312, 400
  - didaktische Inversion, 109
  - Moore-Penrose-, 252
  - per Mustererkennung, 400
- Pseudokonzept, 102, 191
- Quadratischmachen, 258
- Rang, 239
- Recycling, 74
- Referenzkontext, 146
  - inverse Matrix, 394
  - singuläre LGS, 400
- Referenzproblem, 232, 242, 255
- Reflexion, 113
- Regulärmachen, 237
- Repräsentation
  - multiple, 396
- Repräsentationsbarriere, 154
- Repräsentationswechsel, 388
- Restklassenkörper, 127
- Richtungsmatrix, 130, 136
- Scherung, 377
- Skalarprodukt, 242
- Skalierung, 377
- SONG-Prinzip, 94, 96
- Spray
  - holistischer, 66
  - zum Skalarprodukt, 67
- Stückliste, 74, 409
  - Explikation, 410
- Stücklistenproblem
  - genetische Dekomposition, 409, 413
- Theoriebildung, 233
- TLAG-Gruppe, 196
- Vektorraum-Begriff, 127
- Wachstumsring, 233
- Weltbild
  - Anwendung-Aspekt, 328
  - Aspekt rigide Schemaorientierung, 330
  - Aspektentwicklung, 332
  - Belief-Index, 333

- CAS-Assessment, 349
- CAS-Beliefindex, 355
- CAS-Expertensystem-Aspekt, 342
- CAS-Flow-Aspekt, 350
- CAS-Genderaspekte, 353
- CAS-Instrumentalisation, 346
- CAS-Kohärenz-Aspekt, 347
- CAS-Lernhilfe-Aspekt, 343
- CAS-Mathematikprimat, 345
- CAS-Schema-Aspekt, 351
- Formalismus-Aspekt, 323
- Mathematik, 321
- Prozess-Aspekt, 326
- Schema-Aspekt, 325
- Window-Shuttling, 94
- Wissensbildungsprozess, 233, 255
- Wissenserwerb, 81
- Wissenskonstruktion, 263
  - nach der APOS-Theorie, 80
- Wissensrepräsentation, 81
  
- Zahlssystem, 125
- Zeilenbild, 396
- Ziegenproblem, 61