

Theoretische und praktische Entwicklung von Regelungskonzepten für redundant angetriebene parallelkinematische Maschinen

Von der Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Abteilung Maschinenbau und
Verfahrenstechnik
der
Universität Duisburg-Essen
zur Erlangung des akademischen Grades
eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

Dr.-Ing.

genehmigte Dissertation

von

Timo Eduard Hufnagel

aus

Heilbronn

Gutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dieter Schramm
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Burkhard Corves

Tag der mündlichen Prüfung: 20.11.2013

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Fakultät für Mechanik und Elektronik der Hochschule Heilbronn.

Mein größter Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Dieter Schramm, Leiter des Lehrstuhls für Mechatronik an der Universität Duisburg-Essen, für die Möglichkeit zur Promotion, für seine Unterstützung und für seine wertvollen Anregungen, die wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Prof. Dr.-Ing. Burkhard Corves, Leiter des Instituts für Getriebetechnik und Maschinendynamik der RWTH Aachen, danke ich für die Übernahme des Mitberichts und für sein Interesse an meiner Arbeit.

Bei Prof. Dr.-Ing. Rudolf Kern möchte ich mich recht herzlich bedanken. Er hat meine Leidenschaft zur Systemdynamik und Regelungstechnik geweckt und mich immer wohlwollend unterstützt. Darüber hinaus danke ich ihm für die fachlichen Diskussionen und wichtigen Hinweise während der Arbeit.

Mein ganz besonderer Dank gebührt Dr.-Ing. Andreas Müller und Herrn Christopher Reichert für die zahlreichen wertvollen fachlichen Diskussionen und die gemeinsamen Fachbeiträge.

Bei der Fa. Schunk GmbH & Co. KG möchte ich mich für die fachliche Unterstützung beim Aufbau der Antriebstechnik und die großzügige Bereitstellung aller notwendigen Mittel bedanken.

Den Kollegen der Hochschule Heilbronn danke ich herzlich für die freundschaftliche Zusammenarbeit und den fachlichen und nicht-fachlichen Austausch während der Promotion. Insbesondere gilt mein Dank Georg Wörle, Manuel Kühner, Philipp Heidingsfelder und Jens Gerdes. Bei allen Kollegen des Lehrstuhls für Mechatronik der Universität Duisburg möchte ich mich für herzliche Aufnahme in ihr Team und die gemeinsame Zeit während der Doktorandenseminare bedanken.

Schließlich gilt mein Dank meiner Familie und ganz besonders meiner Frau Catrin für ihren Zuspruch und ihre Unterstützung. Ohne sie wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Eppingen, im Januar 2014

Timo Hufnagel

Kurzfassung

Die konsequente Weiterentwicklung parallelkinematischer Maschinen (PKM) führt auf eine strukturelle Erweiterung in Form einer Antriebsredundanz. Die wesentlichen Vorteile der Antriebsredundanz sind beispielsweise die Kompensation von Singularitäten im Arbeitsraum, eine erhöhte Endeffektor-Steifigkeit und eine optimale Verteilung der Antriebskräfte. Redundant angetriebene PKM (RA-PKM) sind darum prädestiniert für hochdynamische Pick-and-Place-Bewegungsaufgaben und neue Maschinenkonzepte.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Frage, welche Konzepte und Verfahren für die Regelung der RA-PKM geeignet sind.

Dabei zeigt sich, dass die Beschreibung in Endeffektor-Koordinaten, die Verwendung eines Störgrößenbeobachters auf der Basis des generalisierten Impulses sowie eine modellprädiktive Regelung sehr gute Ergebnisse hinsichtlich der Genauigkeit und des Implementierungs- und Rechenaufwandes ergeben. Dies gilt insbesondere, wenn große Reibkräfte z. B. in den Antrieben zu berücksichtigen sind. Deshalb ist dieses Verfahren für die industrielle Anwendung besonders geeignet.

Da für alle hier betrachteten Regelungsverfahren ein mathematisches Modell erforderlich ist, nimmt die Beschreibung der Bewegungsgleichungen in unterschiedlichen Koordinaten einen breiten Raum der Arbeit ein. Es werden die Vor- und Nachteile der verschiedenen Beschreibungsformen wie z. B. die verschiedenen Arten der Singularitäten und die Eliminierung der Zwangskräfte mit Hilfe von Orthogonalprojektionen ausführlich dargestellt. Dabei wurde ein neuartiger Zugang für die Projektion der Bewegungsgleichungen in Endeffektor-Koordinaten hergeleitet.

Als erstes Regelungskonzept wird die dezentrale Regelung betrachtet. Es wird gezeigt, wie die hier üblicherweise auftretenden antagonistischen Kräfte mit Hilfe eines Filters kompensiert werden können.

Im Anschluss daran wird die große Klasse der modellbasierten Regelungen in den unterschiedlichen Koordinaten untersucht, wobei ein sogenannter Computed Torque Regler (CTC), d. h. die Verwendung einer Vorsteuerung in Form der inversen Dynamik, und ein Augmented PD-Regler (APD) zum Einsatz kommen.

Die Gelenkgeschwindigkeiten werden mit Hilfe eines High-Gain-Beobachters und die Störgrößen mit Hilfe eines Störgrößenbeobachters rekonstruiert.

Zum Schluss wird die schon erwähnte nichtlineare modellprädiktive Regelung in

Endeffektor-Koordinaten beschrieben, wobei der zukünftige Trajektorienfehler durch eine optimale Stellgröße minimiert wird. Die resultierende Reglerstruktur hat die Form eines klassischen APD-Reglers mit variablen Verstärkungen. Die Reglereinstellung erfolgt durch die Prädiktion vollkommen automatisch.

Die entwickelten Regler und Methoden wurden anhand eines ebenen Mechanismus mit zwei Freiheitsgraden unter Verwendung industrieller Torque-Motoren erprobt.

Inhalt

1	Einleitung	1
1.1	Ausgangssituation	1
1.2	Redundant angetriebene PKM	3
1.3	Literaturübersicht	5
1.3.1	Auslegung und Prototypen	6
1.3.2	Regelungstechnik und Modellbildung	9
1.3.3	Identifikation von geometrischen Parametern	11
1.3.4	Beobachter und Reibungskompensation	12
1.4	Präzisierung der Aufgabenstellung	13
1.5	Struktur der Arbeit	14
2	Beschreibung des Versuchsaufbaus	17
2.1	Mechanischer Aufbau des $2\text{RRR}/\text{RR}$ RA-PKM	17
2.2	Antriebskonzepte des $2\text{RRR}/\text{RR}$ RA-PKM	19
2.2.1	Labora Aufbau mit DC-Motoren	19
2.2.2	Labora Aufbau mit STM 135 <i>Torque-Motoren</i>	19
2.2.3	Kenndaten der Antriebe	21
2.3	Ansteuerungskonzept des $2\text{RRR}/\text{RR}$ RA-PKM	21
3	Kinematik redundant angetriebener Parallelkinematiken	25
3.1	Grundlagen der Robotik	25
3.1.1	Beschreibung einer Endeffektor-Pose	25
3.1.2	Das inverse kinematische Problem (IKP)	26
3.1.3	Das direkte kinematische Problem (DKP)	26
3.2	Topologische Einordnung	26
3.2.1	Geschlossene kinematische Kette (Kinematische Schleife)	27
3.2.2	Offene kinematische Kette (Baumstruktur)	27
3.3	Verallgemeinerte Koordinaten	28
3.3.1	Minimalkoordinaten der Baumstruktur	29
3.3.2	Minimalkoordinaten der kinematischen Schleife	29
3.4	Aufstellen der Bindungsgleichungen	30
3.4.1	Auftrennen der Schleife an einem Körper	30
3.4.2	Auftrennen der Schleife an einem Gelenk	32
3.4.3	Auftrennen der Schleife an einem Gelenkpaar	33
3.5	Kinematische Modellbildung	35
3.5.1	Konfigurationsraum	35
3.5.2	Abbildung des Arbeitsraums	36
3.5.3	Abbildung der Eingänge	37
3.6	Klassifizierung von Singularitäten	38

3.6.1	Singularitäten des Konfigurationsraums	39
3.6.2	Singularitäten des Eingangsraums	40
3.6.3	Singularitäten des Ausgangs	41
3.7	Topologische Aufbereitung	42
3.7.1	Relativkinematik	42
3.7.2	Topologische Aufbereitung mehrschleifiger Mechanismen . . .	43
3.7.3	Kinematische Netzwerke und Singularitäten	45
4	Dynamik redundant angetriebener Parallelkinematiken	49
4.1	Methoden zur Aufstellung dynamischer Gleichungen	49
4.2	Dynamisches Modell einer Baumstruktur	51
4.3	Modell in δ Minimalkoordinaten	53
4.3.1	Bewegungsgleichungen	53
4.3.2	Eigenschaften der Formulierung	55
4.4	Modell in δ Endeffektorkoordinaten	58
4.4.1	Bewegungsgleichungen	58
4.4.2	Eigenschaften der Formulierung	60
4.5	Modell in m Antriebskoordinaten	61
4.5.1	Bewegungsgleichungen	61
4.5.2	Eigenschaften der Formulierung	62
4.6	Modell in n redundanten Koordinaten	62
4.6.1	Bewegungsgleichungen	62
4.6.2	Eigenschaften der Formulierung	63
4.7	Vergleich der Formulierungen	65
4.8	Modellierung nicht-idealer Gelenke	65
4.8.1	Reibungsphänomene	65
4.8.2	Reibung als äußere Kraft	65
5	Dezentrale Regelung bei Antriebsredundanz	69
5.1	Regler und Stabilität	69
5.2	Konsequenzen der dezentralen Regelung	70
5.2.1	Antagonistische Kräfte durch Messfehler	71
5.2.2	Antagonistische Kräfte durch das Regelkonzept	72
5.2.3	Ansatz zur Kompensation antagonistischer Stellgrößen	72
5.2.4	Implementierung in industrielle Positionsregelungen	74
5.3	Experimentelle Ergebnisse	75
6	Modellbasierte Regelung und Beobachter	79
6.1	Auflösung der Redundanz	79
6.2	Das Trajektorienfolgeproblem	81
6.2.1	Klassifizierung von PKM	82
6.2.2	Nichtlineare Zustandsraumdarstellung	82
6.2.3	Nichtlineare Beobachtungsnormalform	82
6.2.4	Entwurf des Regelungskonzepts	84
6.3	Nichtlineare Beobachter	85
6.3.1	Zustandsbeobachter	85
6.3.2	Störgrößenbeobachter	90

6.3.3	Anwendung der Beobachter und Messergebnisse	95
6.4	Modellbasierte Regelung in δ Minimalkoordinaten	98
6.4.1	Inverse Dynamik	98
6.4.2	Computed Torque Controller (CTC)	99
6.4.3	Augmented PD-Regler (APD)	100
6.4.4	Adaptive Koordinatenumschaltung	102
6.4.5	Experimentelle Ergebnisse	104
6.5	Modellbasierte Regelung in δ Endeffektorkoordinaten	109
6.5.1	Inverse Dynamik	109
6.5.2	Computed Torque Controller (CTC)	109
6.5.3	Augmented PD Regler (APD)	109
6.5.4	Experimentelle Ergebnisse	110
6.6	Modellbasierte Regelung in m Antriebskoordinaten	116
6.6.1	Inverse Dynamik	116
6.6.2	Computed Torque Controller (CTC)	116
6.6.3	Augmented PD Regler (APD)	116
6.6.4	Experimentelle Ergebnisse	116
6.7	Modellbasierte Regelung in n redundanten Koordinaten	119
6.7.1	Inverse Dynamik	119
6.7.2	Computed Torque Controller (CTC)	120
6.7.3	Augmented PD Regler (APD)	121
6.7.4	Experimentelle Ergebnisse	121
6.8	Zusammenfassung der Regler	124
7	Modellprädiktive Regelung	127
7.1	Zielsetzung	127
7.2	Herleitung des modellprädiktiven Reglers	128
7.3	Experimentelle Ergebnisse	133
8	Zusammenfassung und Ausblick	137
8.1	Zusammenfassung	137
8.2	Wissenschaftlicher Beitrag	139
8.3	Ausblick	139
A	Symbol- und Abkürzungsverzeichnis	141
B	Ergänzungen zu den Stabilitätsbetrachtungen	147
B.1	Pseudoinverse einer Matrix	147
B.2	Die direkte Methode der LYAPUNOV-Stabilitätstheorie	147
C	Modellbildung des Funktionsmusters	149
C.1	Kinematisches Modell	149
C.1.1	Inverses kinematisches Problem (IKP)	150
C.1.2	Direktes kinematisches Problem (DKP)	150
C.2	Bewegungsgleichungen in EE-Koordinaten	151
	Literaturverzeichnis	155

1 Einleitung

Redundant angetriebene Parallelmanipulatoren sind eine strukturelle Erweiterung konventioneller Parallelmanipulatoren und ideale Kandidaten für hochdynamische Bewegungsaufgaben. In diesem Kapitel wird zunächst die Ausgangssituation und der Stand der Technik beschrieben. Im Abschnitt 1.2 werden die aufgabenspezifischen Möglichkeiten einer Antriebsredundanz behandelt. Abschnitt 1.3 bietet eine umfassende Literaturübersicht in diesem Bereich der Robotik. Aus dem Stand der Technik sowie der bestehenden Literatur ergibt sich in Abschnitt 1.4 die Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit. In Abschnitt 1.5 wird die Struktur der Arbeit erläutert.

1.1 Ausgangssituation

Im Bereich der Verpackungstechnik, Handhabung und Transport von Lebensmitteln, Medizinprodukten und technischen Bauteilen herrscht ein hoher Grad an Automation. Dieser wird in der Regel durch Roboter und Manipulatoren verkörpert, die sich durch Schnelligkeit, Kraft und Präzision auszeichnen. Ein Szenario für eine hochdynamische Bewegungsaufgabe ist das Sortieren von teilausgerichteten Erzeugnissen mithilfe einer Bildverarbeitung. Man bezeichnet diesen Prozess auch als Pick-and-Place-Aufgabe, bei dem es auf hohe Stückzahlen und geringe Taktzeiten ankommt. Aus der Forderung nach leistungsfähigen Robotern wurden die parallelkinematischen Manipulatoren (PKM) entwickelt, die für solche Aufgaben prädestiniert sind. Der Aufbau von PKM besteht im Wesentlichen aus Gliedern und Gelenken, die im Verbund als kinematische Ketten bezeichnet werden. Die Struktur eines PKM wird durch geschlossene kinematische Ketten charakterisiert. Bei klassischen oder seriell-kinematischen Manipulatoren (SKM) entspricht der Verbund von Gliedern und Gelenken einer einzelnen offenen kinematischen Kette. Das Dilemma der SKM besteht darin, dass die Antriebe in einer grundlegenden Konstruktion nacheinander angeordnet sind. Durch diese zusätzlichen bewegten Massen kann nur noch bedingt eine Steigerung der Dynamik durch stärkere Antriebe erreicht werden. Das Erscheinungsbild der PKM ist im Gegensatz zu SKM häufig zweckdienlich und weniger anthropomorph. Nach der Terminologie von IFToMM [2003] ist ein PKM per Definition ein

„Manipulator, bei dem die Bewegungssteuerung des Endeffektors über mindestens zwei voneinander getrennt angetriebene kinematische Ketten zwischen Gestell und Endeffektor erfolgt.“

Als Endeffektor (EE) bezeichnet man das Glied, mit dem der Manipulator eine beabsichtigte technologische Wirkung, wie zum Beispiel die Handhabung von Gegenständen ausübt. Die kinematischen Ketten zwischen EE und Gestell werden dabei als Führungs- oder Steuerketten bezeichnet. Generell lassen sich PKM durch die Anzahl der Antriebe innerhalb der Führungsketten in

- rein parallele Strukturen, die innerhalb einer Führungskette genau einem Antrieb haben und
- hybride Strukturen, bei der innerhalb einer Führungskette mehrere Antriebe vorhanden sind

kategorisieren. Bei rein parallelen Strukturen befinden sich sämtliche Antriebe in der Regel gestellfest oder zumindest gestellnah, wodurch die zu bewegenden Massen stark minimiert werden. Die Massen der passiven (zwangsgeführten) Glieder sind in der Regel deutlich niedriger als die der aktiven (angetriebenen) Gelenke. Zudem kann aufgrund der parallel angeordneten Führungsketten eine deutlich höhere Steifigkeit bezüglich des EE erzielt werden, wodurch der Einsatz von Leichtbauwerkstoffen an den passiven Gliedern gefördert wird. Durch diese Eigenschaft erreicht der PKM sehr hohe EE-Beschleunigungen und dadurch auch hohe Zykluszeiten im Gegensatz zu SKM. Neben den dynamischen Eigenschaften ergeben sich für PKM weitere messtechnische Vorteile gegenüber den SKM. Wenn es um Mensch Maschine Interaktionen geht, fällt häufig das Wort „Nachgiebigkeit“ (*compliance*). Jedoch existiert auch eine so genannte *passive Nachgiebigkeit*, die aufgrund von Getriebelose oder flexiblen Gliedern auftritt [Merlet, 2006, S. 12]. Die Fehlstellung aufgrund *passiver Nachgiebigkeit* kann in der Regel nicht regelungstechnisch korrigiert werden. Bei SKM werden diese Positions-Fehler, je nachdem wie viele Gelenke und Glieder davon betroffen sind, direkt akkumuliert. Bei PKM hingegen kompensieren sich diese Fehler durch die parallele Anordnung der Führungsketten. Zusammen mit einer deutlich verbesserten Kraftverteilung unter den Antrieben erreicht man mit diesen Eigenschaften eine deutlich präzisere Wiederholgenauigkeit bei PKM [Neugebauer, 2005, S. 2].

Konventionelle PKM (siehe auch Abbildung 1.1 links) haben in der Regel ein relativ großes Verhältnis zwischen Bauraum und Arbeitsraum [Scheinman u. McCarthy, 2008, S. 73]. Diese Einschränkung liegt hauptsächlich am begrenzten Hub der Antriebe oder an einer möglichen Kollision der Führungsketten. Bei PKM kann es auch innerhalb des Arbeitsraums zu Einschränkungen durch kritische Konfigurationen (Singularitäten) kommen. In diesen Konfigurationen verliert der EE des PKM einen Teil seiner Beweglichkeit wodurch er nicht mehr in der Lage ist, diese Positionen ohne äußere Kräfte zu verlassen. Die Leistungsfähigkeit eines PKM hängt von seiner Aktuierung und seinem Strukturkonzept ab. Das Strukturkonzept bezeichnet den Mechanismus an dem die Antriebe angekoppelt sind und bildet den eigentlichen Kern eines PKM. Neben den konventionellen Strukturen werden mit den strukturellen Erweiterungen

- Kinematische Redundanz,

- Antriebsredundanz

zwei Methoden vorgestellt, um bestimmte Eigenschaften von PKM zu verbessern. Unter einem kinematisch redundanten PKM versteht man einen Manipulator, dessen EE-Beweglichkeit geringer ist als die des eigentlichen Mechanismus. Bei PKM lässt sich die Redundanz dadurch erzeugen, dass mehrere PKM zu einer seriellen Kette zusammengebaut werden. Kinematisch redundante Manipulatoren zeichnen sich durch ihre Manövrierfähigkeit aus, die es ihnen ermöglicht, bestimmte Aufgaben in unterschiedlichen Bewegungskombinationen der Glieder auszuführen [IFTtoMM, 2003]. Dadurch ergibt sich für PKM die Möglichkeit Strecklagen zu umgehen. Das Forschungsinteresse an kinematisch redundanten PKM ist jedoch aufgrund der wenigen Vorteile sehr gering.

Ein redundant angetriebener PKM (RA-PKM) kann in Anlehnung der Definition eines PKM als ein Parallel-Manipulator, dessen Anzahl an voneinander getrennt angetriebenen kinematischen Ketten zwischen Gestell und Endeffektor höher ist als die Anzahl der Freiheitsgrade des Endeffektors beschrieben werden.

1.2 Redundant angetriebene PKM

Die konsequente Weiterentwicklung von PKM führt auf eine strukturelle Erweiterung in Form einer Antriebsredundanz. Es sind generell zwei Möglichkeiten vorstellbar, das zu realisieren:

- hybride Struktur durch zusätzliche Antriebe innerhalb einer oder mehrerer Führungsketten,
- rein parallele Struktur durch die Ergänzung zusätzlicher Führungsketten zwischen Gestell und Endeffektor.

Die zuletzt genannte Variante ist weiterhin zu bevorzugen, da damit das Gewicht der zu bewegenden Massen auf ein Minimales optimiert werden kann. Grundsätzlich bezeichnet das Merkmal strukturelle Redundanz

„... die Erweiterung eines Systems um zusätzliche (gleich- oder andersartige) für den Nutzbetrieb entbehrliche Komponenten.“
[Echtle, 1990]

Beispielsweise kann die Struktur eines konventionellen Delta-Roboters mit drei Freiheitsgraden durch weitere Führungsketten aktorisch redundant erweitert werden. In Abbildung 1.1 werden exemplarisch drei redundante Führungsketten an den vollaktuierten PKM angekoppelt, ohne die Beweglichkeit des EE zu erhöhen. Die redundante Aktorik erhöht somit im einfachsten Fall die Betriebssicherheit, da die Beweglichkeit des EE durch mehrere zusätzliche Antriebe sichergestellt wird, falls ein

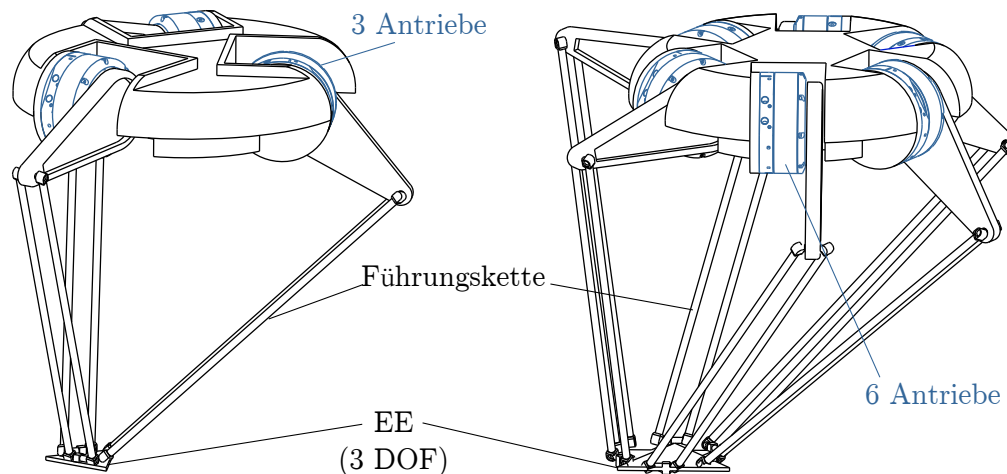


Abbildung 1.1: Strukturelle Erweiterung eines Delta Roboters mit zusätzlichen aktiven Führungsketten

einzelner Antrieb ausfällt. In der Regel wird jedoch eine aufgabenspezifische Redundanz verfolgt, um verschiedene Ziele zu erreichen:

Kompensation von Getriebelose durch Verspannung

Die stationäre und dynamische Güte von lagegeregelten industriellen Systemen kann durch das Vorhandensein von Getriebe- oder Gelenklose wesentlich beeinträchtigt werden. Industrielle PKM werden in der Regel aus Servo-Motoren mit Getrieben aufgebaut. Die Gründe dafür sind zum einen die Erzeugung der benötigten Kräfte und zum anderen die ökonomische Steigerung der Genauigkeit antriebsseitiger Messsysteme. Die Getriebe müssen bei dieser Methode vorgespannt werden, da eine Nachgiebigkeit des Manipulators aufgrund von Getriebelose nicht vom antriebsseitigen Messsystem erfasst werden kann. Durch die Antriebsredundanz ergibt sich die Möglichkeit Kräfte zu erzeugen, die keine EE-Bewegung hervorrufen und den Mechanismus verspannen. Mithilfe dieser Verspannung kann die Lose in den Getrieben kompensiert werden, wodurch eine akkurate Trajektorienfolge gewährleistet wird.

Erzeugung von tangentialer Steifigkeit bezüglich des EE

Ein aktueller Trend in der Robotik ist die spanende Materialbearbeitung. Der Vorteil von RA-PKM in diesem Umfeld ist die Erzeugung von tangentialer Steifigkeit bezüglich des EE. Dabei wird die Verspannung des Mechanismus so generiert, dass ein virtueller Korridor entsteht, um den Bahnregler zu unterstützen.

Überwindung von Singularitäten im Arbeitsraum

Eine der wichtigsten Eigenschaften in Bezug auf Antriebsredundanz ist die Bewältigung von kritischen Konfigurationen im Arbeitsraum. Die zusätzlichen Führungsketten ermöglichen physikalisch den Erhalt der EE-Beweglichkeit in einer Singula-

rität. Generell sind durch redundante Aktoren auch zusätzliche Messsysteme verfügbar, die zu kinematischen Berechnungen herangezogen werden können. Aus der redundanten Sensorik ergeben sich verschiedene Möglichkeiten in der Koordinatenformulierung von Bewegungsgleichungen und modellbasierten Regelung.

Steigerung der Tragfähigkeit und optimale Verteilung der Antriebskräfte

Es ist offenkundig, dass die möglichen Traglasten durch zusätzliche Aktorik im Vergleich zu einem konventionellen PKM erhöht werden. Doch das Vorhandensein redundanter Antriebe bedeutet auch zusätzliche Freiheitsgrade bei der Verteilung der Antriebskräfte. Dieser Vorgang wird als Auflösung der Redundanz bezeichnet und kann als Optimierungsproblem aufgefasst werden. Kock [2001] verwendet eine Methode mit dem Ziel eine energetisch günstige Antriebskraft-Verteilung zu erhalten. Eine andere Methode ist die Lösung über ein gewichtetes Funktional. Diese verallgemeinerte Herangehensweise ist in der Lage durch eine Gewichtungsmatrix zusätzliche Randbedingungen, wie das Leistungsvermögen der Motoren, in die Verteilung mit einfließen zu lassen.

Steigerung der Dynamik bei Pick-and-Place-Bewegungsaufgaben

Infolge der optimalen Kraftverteilung sowie einer konsequenten Leichtbauweise resultiert die Möglichkeit, RA-PKM als hochdynamische Pick-and-Place-Manipulatoren zu kreieren (siehe beispielsweise [Corbel u. a., 2010]). Bei konventionellen PKM wird häufig eine Schwingungsneigung bei dynamischen Bewegungsabläufen aufgrund einer fehlenden Steifigkeit beobachtet. In der Praxis bedeutet dies eine fehlende Präzision, die sich auf den reibungslosen Prozessablauf auswirken kann. In der Nähe von Singularitäten wird diese notwendige Steifigkeit bei PKM noch weiter verringert.

1.3 Literaturübersicht

RA-PKM haben im Vergleich zu vollaktuierten PKM sehr deutliche Vorteile, die einem mehrjährigen Forschungsinteresse und zahlreichen Prototypen zugrunde liegen. Eine Literaturrecherche nach dem Stichwort „Redundanz“ bei Robotern, liefert weitestgehend zweierlei Arten von Ergebnissen. Ein Großteil der Beiträge behandelt SKM mit kinematischer Redundanz und ein kleinerer Teil umfasst PKM mit Antriebsredundanz. Antriebsredundanz und kinematische Redundanz verhalten sich wie die Größen Kraft und Geschwindigkeit Dual zueinander [Kock, 2001].

Die folgende Übersicht spiegelt den Stand der Forschung von RA-PKM wider und beschreibt Erkenntnisse und Ergebnisse der verschiedenen Forschergruppen. Die Übersicht wird in die Punkte

- Auslegung und Prototypen,
- Regelungstechnik und Modellbildung,

- Identifikation von geometrischen Parametern sowie
- Beobachter und Reibungskompensation

eingeteilt.

1.3.1 Auslegung und Prototypen

Mittlerweile gibt es eine Reihe von Prototypen, in rein paralleler und hybrider Bauweise. Der von Kock [2001] entwickelte PA-R-MA (PARallel Redundant MANipulator) wird in Abbildung 1.2 a) gezeigt. Der Manipulator ist ein hochdynamischer Pick-and-Place-Manipulator, dessen EE zwei Freiheitsgrade in der Ebene hat. Der PA-R-MA wird durch drei Getriebe-Motoren angetrieben und hat daher eine einfache Redundanz. Die Autoren Kock u. Schumacher [2000b] verwenden ein erweitertes Mehrkörpermodell, das die Elastizitäten der passiven Arme des Manipulators berücksichtigt. In weiteren Veröffentlichungen wird gezeigt, wie Getriebelose mithilfe einer Nullraumregelung eliminiert werden kann [Kock u. Schumacher, 2000a]. Der

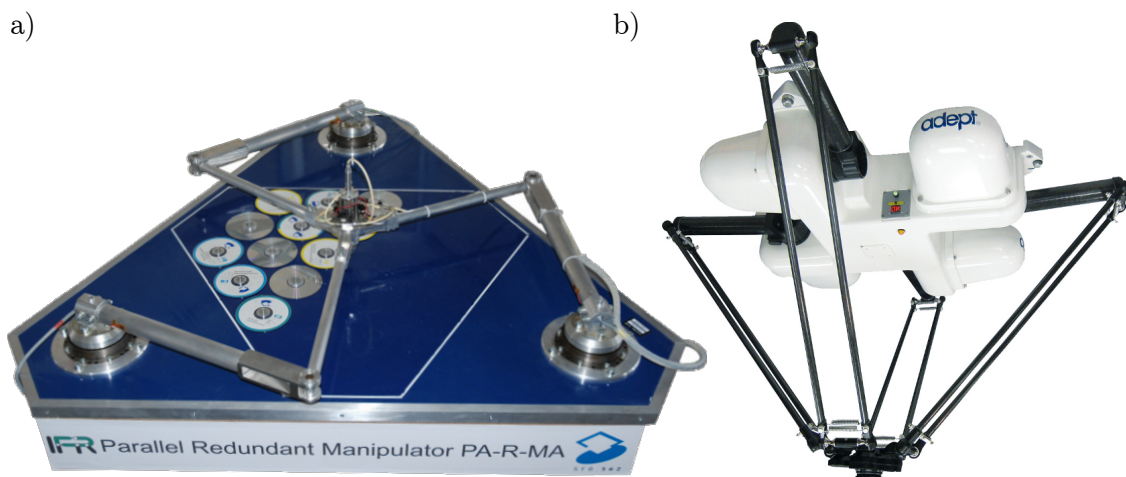


Abbildung 1.2: Redundant angetriebene Pick-and-Place-Manipulatoren:
 a) Foto des ebenen PA-R-MA (PARallel Redundant MANipulator) mit 2DOF und drei Antrieben (Mit freundlicher Genehmigung der TU-Braunschweig),
 b) Adept Quattro redundante Delta-Kinematik. Der Manipulator besteht aus vier Führungsketten und die Beweglichkeit des EE lässt sich auf 3DOF sperren (Mit freundlicher Genehmigung der Adept Technology GmbH)

H4-Roboter [Pierrot u. a., 2009] zählt eigentlich zu den vollaktuierten PKM, kann jedoch durch Sperrung eines Freiheitsgrads als RA-PKM betrachtet werden. Abbildung 1.2 b) zeigt daher die erste kommerzielle Umsetzung durch den Adept Quattro, der mit der redundanten Aktorik höhere Beschleunigungen oder mehr Zuladung erreicht. Die selbe Forschergruppe hat mit Corbel u. a. [2010] eine Untersuchung

durchgeführt, welche Beschleunigungen eine H4-Grundstruktur durch redundante Aktorik erreichen kann.

Mit dem Archi wird in [Marquet u. a., 2001] und [Marquet u. a., 2002] ein ebener 3DOF RA-PKM vorgestellt, der durch vier Linear-Motoren angetrieben wird. Die redundante Aktorik wird dazu genutzt, um die Singularitäten des nicht-redundanten Manipulators zu eliminieren. Des Weiteren werden antagonistische Kräfte aufgrund der dezentralen Regelung von RA-PKM aufgezeigt. Mithilfe der inversen Dynamik können antagonistische Kräfte verhindert werden. Es wird eine Verteilung der Antriebskräfte mit der minimalen 2- und ∞ -Norm verglichen.

Kurtz u. Hayward [1992] vergleichen diverse Optimierungsziele für eine Kugelgelenk gelagerte Plattform, die von vier Linearaktoren bewegt wird. O'Brien u. Wen [1999] vergleichen die Möglichkeiten zur Erzeugung der Redundanz. Danach werden Singularitäten einfacher kompensiert, indem neue Führungsketten zwischen EE und Gestell angebracht werden, statt ein passives Gelenk zu aktivieren.

Manderla u. Konigorski [2009] behandeln die Darstellung eines 2 DOF RA-PKM als Deskriptor-System. Der RA-PKM, der durch Synchron-Motoren mit Harmonic-Drive-Getrieben gesteuert wird, hat dieselbe Struktur wie der PA-RMA von Kock [2001]. In dem Beitrag wird ein erweitertes KALMAN-Filter zur Rekonstruktion fehlender Zustandsgrößen vorgestellt.

Ein ähnlicher RA-PKM wird in den Arbeiten von Cheng u. a. [2003], Liu u. a. [2001] um die Forschergruppe von Hui [2001] verwendet. Die Aktorik des 2DOF RA-PKM besteht aus drei Synchronmotoren mit hochübersetzenden Harmonic-Drive-Getrieben. An dem Prototypen werden Methoden zur Modellbildung und Regelung gezeigt.

Eine kommerzielle Version der ebenen 2DOF Prototypen nach Kock [2001] wird von der Firma Googoltech Ltd. als Lehrmittel vertrieben. Der RA-PKM ist ebenfalls mit Synchron-Motoren und Harmonic-Drive-Getrieben ausgestattet. Zhang u. a. [2007] stellen eine Formulierung der Bewegungsgleichungen mit Zwangskräften, Parameteridentifikation sowie ein *Augmented* PD-Regler vor. In [Shang u. a., 2009], [Shang u. Cong, 2010b] werden die Bewegungsgleichungen mithilfe kinematischer Beziehungen in Endeffektorkoordinaten transformiert. Auf Basis dieses Modells wird ein Kompensationsregler entworfen und Messergebnisse gezeigt. Des Weiteren wird eine Parameteridentifikation verwendet. Zusätzlich wird in [Shang u. Cong, 2010a] eine adaptive Reibkompensation hergeleitet. Die Parameteridentifikation mithilfe der redundanten Sensorik wird in dem Beitrag von Zhang u. a. [2008] oder Feng u. a. [2008] vorgestellt. Neben den Pick-and-Place-Manipulatoren gibt es mittlerweile auch eine Reihe von parallelkinematischen Werkzeugmaschinen mit Antriebsredundanz. Die räumliche Werkzeugmaschine Eclipse wird im Beitrag von Kim u. a. [2001] vorgestellt. Der 6DOF Roboter ist in der Lage ein Werkstück an fünf Seiten zu bearbeiten. Der Beitrag vergleicht numerische- und algebraische Methoden zur Ermittlung der inversen und direkten Kinematik. In Abbildung 1.3 a) wird die

ebene Scherenkinematik Werkzeugmaschine aus dem Fraunhofer Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik (IWU) dargestellt [Neugebauer, 2005, S. 198]. Ecorchard [2008] untersucht an diesem Prototypen Methoden zur Kalibrierung von RA-PKM.

Mit dem Sliding-Star (Abbildung 1.3 b)) wird von Valasek u. a. [2005] eine weitere Werkzeugmaschine vorgestellt. Die Forschungsschwerpunkte des Sliding-Star liegen in der modellbasierten und dezentralen Regelung von RA-PKM.

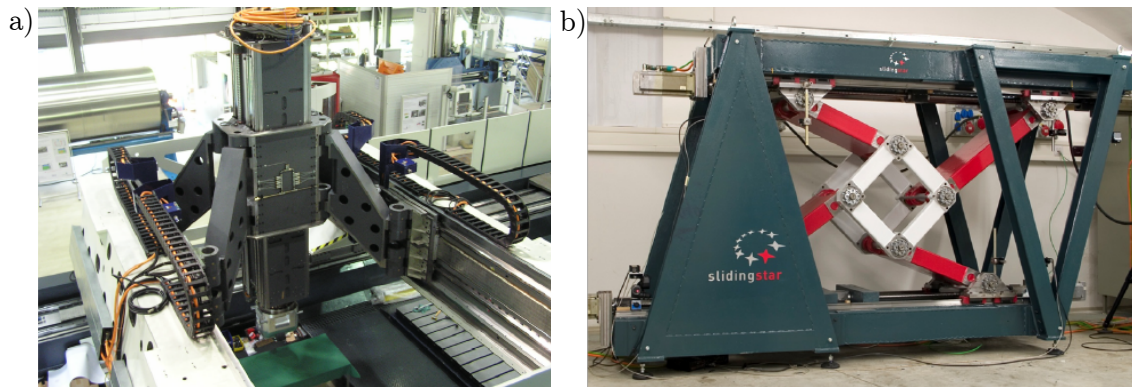


Abbildung 1.3: Redundant angetriebene Werkzeugmaschinen: a) Redundante Scherenkinematik (Mit freundlicher Genehmigung des Fraunhofer Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik (IWU)), b) Sliding Star (Mit freundlicher Genehmigung von Prof. Valasek)



Abbildung 1.4: Redundant angetriebene Werkzeugmaschine und Arbeitsspindel: a) Redundante Werkzeugmaschine Xcut (Mit freundlicher Genehmigung von Herrn Habersohn TU Wien), b) Redundant angetriebene Werkzeugspindel (Mit freundlicher Genehmigung von Herrn Rentzsch, Fraunhofer Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik (IWU))

In [Valasek u. a., 2005] wird auch die Problematik antagonistischer Kräfte durch eine dezentrale Achsregelung bei RA-PKM behandelt. Der Artikel [Habersohn u. a.,

2011] beschreibt die Regelung und den Aufbau der Werkzeugmaschine Xcut (Abbildung 1.4 a)), die mit zwei Freiheitsgraden und vier Antrieben eine höherredundante¹ Struktur aufweist.

Die Beiträge [Neugebauer u. a., 2011a], [Neugebauer u. a., 2011b] beschreiben die Entwicklung einer redundant aktuierten Werkzeug-Spindelhalterung (Abbildung 1.4 b)) mit aktiver Dämpfung. Die Halterung wird dazu mittels Piezo-Aktoren hochdynamisch feinjustiert und kann durch die Antriebe verspannt werden.

1.3.2 Regelungstechnik und Modellbildung

Man unterscheidet bei der Regelung von Robotern zwischen zwei Koordinatensystemen - einem Gelenk-bezogenen (engl. *Joint-Space*) und einem Aufgaben-bezogenen (engl. *Task-Space*). Die Koordinaten des Aufgaben-bezogenen Koordinatensystems bilden die EE-Pose, die sich mit der inversen Kinematik auf die entsprechenden Antriebskoordinaten berechnen lassen. Die reine Regelung auf diese Antriebskoordinaten charakterisiert die dezentrale Regelung, während die Regelung der Drehmomente aller Antriebe die zentrale Regelung charakterisiert. Die dezentralen Achsregler werden in industriellen Ausführungen häufig als lineare P-PI-Kaskade oder PD-Regler implementiert. Hinter zentralen Reglern steht häufig ein modellbasierter Ansatz.

Ein Beitrag von Garrido u. Torres-Cuz [2004] beschreibt die dezentrale PD-Regelung von RA-PKM. Die Formulierung der Bewegungsgleichungen erfolgt mithilfe der direkten Kinematik in Endeffektorkoordinaten. Mithilfe des Modells wird die Stabilität von RA-PKM mit PD-Regler nachgewiesen.

In [Nakamura u. Ghodoussi, 1989] wird die Modellbildung eines Fingers mit Antriebsredundanz in Gelenkkoordinaten beschrieben. Mithilfe einer Projektionsmethode wird eine Minimalkoordinaten-Formulierung hergeleitet. Ropponen u. Nakamura [1990] behandeln Singularitäten der inversen Dynamik des selben Prototypen. Es wird ein Regelungskonzept vorgestellt, bei dem die nicht-redundanten Antriebe auf Position und die redundanten Antriebe auf Kraft geregelt werden.

Marquet u. a. [2001] zeigen, dass Singularitäten durch die Antriebsredundanz eliminiert werden. Des Weiteren wird verdeutlicht, dass eine dezentrale Regelung bei RA-PKM zu unerwünschten gegensinnigen (antagonistischen) Kräften führt.

In [Marquet u. a., 2001], [Marquet u. a., 2002] wird ein zentraler Regler in Endeffektorkoordinaten vorgestellt, wobei die Verteilung der Antriebskräfte durch einen Teil der Inversen Dynamik (Inverse Strukturmatrix²) erfolgt. Es werden Pseudoinverse und ∞ -Norm für die Auflösung verglichen. Eine weitere Methode für „die Auflösung

¹Der Begriff höherredundant wird verwendet, wenn mehr als ein redundanter Antriebe vorhanden ist

²Der Begriff Strukturmatrix wird in Kapitel 4 erläutert

der Redundanz“ ist die Ergänzung zusätzlicher Gleichungen gemäß der Größe des Kerns der Strukturmatrix [Marquet u. a., 2001]. Eine gegensätzliche Methode wird von Ganovski [2007] vorgestellt. Das Prinzip der teilweisen Aktuierung, nutzt immer ein Teil der redundanten Antriebe, um Singularitäten zu kompensieren.

In [Kock u. Schumacher, 2000a], [Kock, 2001] wird ein P-PI-Kaskaden-Regler mit nichtlinearer Vorsteuerung verwendet. Die Auflösung wird mithilfe der Pseudoinversen erreicht. Zusätzlich wird ein linearer Nullraum-Regler verwendet, um durch eine definierte Verspannung des RA-PKM eine tangentiale Steifigkeit bezüglich des EE zu erreichen. Die tangentiale Steifigkeit wird beispielsweise benötigt, um bei spanenden Bearbeitungen die notwendige Genauigkeit zu erreichen (Siehe [Müller, 2006]).

Die Formulierung der Bewegungsgleichungen des Prototyps der Forschergruppe [Zhang u. a., 2007] erfolgt in Gelenkkoordinaten. Die Zwangskräfte in den Bewegungsgleichungen werden nicht eliminiert, sondern mithilfe einer Projektionsmethode berechnet. Ausgehend von diesem Modell wird ein erweiterter PD-Regler (APD) (engl. *Augmented PD*) hergeleitet. In weiteren Arbeiten werden die Bewegungsgleichungen in Antriebskoordinaten formuliert. In [Shang u. a., 2009] wird ein Kompensationsregler vorgestellt, der die Dynamik, Reibung und die inneren Kräfte vorsteuert. Der Artikel [Shang u. Cong, 2010b] verwendet Bewegungsgleichungen in Endeffektorkoordinaten und behandelt die Herleitung eines adaptiven Reglers. Dabei werden die Verstärkungen des Reglers nach einer quadratischen Optimierung angepasst.

Liu u. a. [2001] vergleichen für einen ähnlichen Prototypen einen dezentralen PD Regler sowie einen APD-Regler in Endeffektorkoordinaten. Die Autoren gehen auf eine notwendige Symmetrie-Eigenschaft in den Bewegungsgleichungen ein, zum Nachweis der Stabilität von PKM und linearen Reglern. In [Cheng u. a., 2003] wird eine Zusammenstellung verschiedener Regler für RA-PKM gezeigt. Die Formulierung der Bewegungsgleichungen erfolgt in Endeffektorkoordinaten, wobei die Zwangskräfte durch eine Projektionsmethode eliminiert werden. Es werden PD und PID als lineare Regler betrachtet, wobei keine Aussage über einen inneren Regelkreis getroffen wird (dezentral oder zentral). Zu den modellbasierten Reglern zählen der APD und der Computed Torque Controller (CTC). Der CTC ist in der Lage sämtliche bekannte Nichtlinearitäten vorzusteuern. In der Arbeit von Hui [2001] werden noch weitere Messungen sowie eine detaillierte Beschreibung des Prototypen gezeigt. Eine detaillierte Herleitung des APD und CTC sowie Stabilitätsnachweise für vollaktuierte PKM wird in der Arbeit von Murray u. a. [1993] zusammengefasst.

In den Arbeiten [Müller, 2009], [Müller, 2010], [Müller, 2011b] werden die Auswirkungen von geometrischen Modellfehlern bei der modellbasierten Regelung behandelt. Diese Modellfehler führen bei RA-PKM zu unkontrollierten Verspannungen (antagonistische Kräfte).

In [Valasek u. a., 2005] werden antagonistische Kräfte durch die dezentrale Rege-

lung anhand von Messungen an der Werkzeugmaschine Sliding Star nachgewiesen. Die hohen Verspannungen konnten mit einem linearen zentralen Regelkonzept kompensiert werden. In [Müller u. Hufnagel, 2011d], [Hufnagel u. Müller, 2012] wird die Eliminierung der antagonistischen Kräfte mithilfe einer Projektionsmethode gezeigt. Das Konzept kann für alle dezentralen linearen Regler angewendet werden.

Für die Formulierung der Bewegungsgleichungen von RA-PKM ergeben sich verschiedene Möglichkeiten. Bei der intuitiven Formulierung in Minimalkoordinaten (Gelenkkoordinaten) kommt es immer dann zu Singularitäten (*Parameter-Singularitäten*), wenn sich die durch die Minimalkoordinaten beschriebene PKM-Unterstruktur in einer Kraftsingularität befindet. Die Eliminierung dieser Parameter-Singularitäten kann durch die Umschaltung der Minimalkoordinaten erzielt werden [Hufnagel u. Müller, 2011]. In [Müller u. Hufnagel, 2011a] wird eine Formulierung, ohne Koordinatenumschaltung, in redundanten Antriebskoordinaten vorgestellt. Die Beiträge [Müller, 2011a], [Müller, 2011c], [Müller u. Hufnagel, 2011b], [Müller u. Hufnagel, 2012], [Müller u. Hufnagel, 2011c] behandeln eine Formulierung der Bewegungsgleichungen in vollständig redundanten Gelenkkoordinaten.

Die aus der Verfahrenstechnik bekannten modellprädiktiven Regler (MPC) verfolgen primär das Ziel mithilfe eines vorliegenden Modells das zukünftige Verhalten einer Regelstrecke zu beeinflussen. Diese Regler wurden in der Vergangenheit schon vielfach in der Industrie verwendet. Die Regelung erfordert aufgrund der ständigen Optimierung eine enorme Rechenleistung. Durch die Verfügbarkeit leistungsfähiger Echtzeitsysteme wird die modellprädiktive Regelung zunehmend für hochdynamische Anwendungen, wie der Lageregelung eines Manipulators attraktiv. Stellvertretend für die Anwendung des MPC für RA-PKM stellen die Beiträge [Belda u. a., 2005] und [Belda, 2001] einen nichtlinearen MPC (NMPC) vor, der über einen gleitenden Horizont eine optimierte Kraft-Vorsteuerung berechnet. Das Hauptaugenmerk dieser Forschungsarbeit ist darauf gerichtet durch eine Berücksichtigung von Nullraum-Kräften Lose zu kompensieren. In den Arbeiten von Lizarralde u. a. [1999] und im späteren von Schindele u. Aschemann [2011a], Schindele u. Aschemann [2011b] wird ein Rechenzeit-effizientes Verfahren vorgestellt, mit der Idee den Trajektorien-Fehler, am Ende eines gleitenden Horizonts zu minimieren. Die beschriebenen Arbeiten verwenden als Funktionsmuster Kran- und Pendel-Systeme.

1.3.3 Identifikation von geometrischen Parametern

Eine Antriebsredundanz bedeutet im engeren Sinne ein überbestimmtes Gleichungssystem zur Bestimmung des EE im Arbeitsraum. Auf dieser Basis werden während der Bewegung des EE bei jeder Messabtastung redundante Daten erzeugt, die zur Kalibrierung der geometrischen Parameter genutzt werden können. Durch geometrische Modellfehler in der inversen und direkten Kinematik kommt es zu einer obligatorischen Fehlstellung des EE sowie zu antagonistischen Kräften. In der Veröffentlichung von Yiu u. a. [2003] wird eine quadratische Kostenfunktion auf Basis der Vorwärtskinematik und der Vorgegebenen EE-Position minimiert. In [Iurascu

u. Park, 1999] wird der geometrische Fehler der direkten Kinematik durch die redundanten Messungen minimiert. Cong u. a. [2008] verwendet einen Ansatz mittels einer Projektionsmethode. Der EE-Fehler des RA-PKM wird dabei in den Nullraum der Strukturmatrix projiziert, um den nicht-erreichbaren Fehler durch geometrische Ungenauigkeiten zu erhalten. Dieser Fehler wird dann minimiert. Diese Methode erlaubt eine dynamische Messung, bei der Schleppfehler keine Rolle spielen. Ein ähnliches Prinzip wird von Jeon u. a. [2010] verwendet.

1.3.4 Beobachter und Reibungskompensation

Aus ökonomischen Gründen wird bei Robotern auf Geschwindigkeits-Sensoren verzichtet. Für die Implementierung einer modellbasierten Regelung wird jedoch das präzise Vorhandensein aller Zustandsgrößen vorausgesetzt. Der nichtlineare Charakter mehrschleifiger Mechanismen erfordert einen nichtlinearen Zustandsbeobachter zur Ermittlung fehlender Zustandsgrößen. In den Arbeiten [Eker u. Åström, 1996], [Khalil, 2008] wird die Grundstruktur eines nichtlinearen *High-Gain*-Beobachters auf Basis des nichtlinearen Zustandsraum-Modells vorgestellt. Adamy [2009] und Khalil [2002] bieten einen breiten Überblick über nichtlineare Beobachter. Das *High-Gain*-Beobachterkonzept lässt sich durch ein diskontinuierliches Schaltglied (Sliding-Mode), wie in [Veluvolu u. Soh, 2009] beschrieben, erweitern. Diese Struktur weist eine robustere Struktur gegenüber unmodellierten Effekten auf.

Ein weiterer wichtiger Punkt bei der hochdynamischen Positionierung von PKM ist der Umgang mit Reibung. Gerade industrielle Antriebe weisen durch ihren hohen Anspruch an Dichtheit gegenüber Verschmutzungen eine hohe Haftreibung auf. In den Beiträgen von [Zhang u. a., 2007] werden die Reibungskräfte der Aktoren nach einer Parameteridentifikation vorgesteuert. Kock [2001] verwendet ebenfalls ein gradientienbasiertes Identifikationsverfahren, um die Reibungsparameter zu bestimmen.

Es sei angemerkt, dass durch vorhandene Reibung bei RA-PKM eine Verbesserung der EE-Steifigkeit erzielt kann. Diese kontroverse Eigenschaft kommt daher, dass die Reibung als zusätzliche Stillstandskraft zur Verfügung steht, wenn redundante Antriebe während einer Bewegung des Mechanismus stillstehen.

Eine verbesserte Methode zur Kompensation der Reibung ist die dynamische Schätzung mithilfe eines Störgrößenbeobachters. Die Basis des dynamischen Störgrößenbeobachters basiert auf der Impulsgleichung des mechanischen Systems. Der Ansatz wird von De Luca u. Mattone [2003] für einen Algorithmus zur Detektion von Aktorfehlern vorgestellt. Eine weitere Anwendung des Beobachters ist die Kollisionsdetektion des Roboters [De Luca u. Mattone, 2005], [De Luca u. a., 2006]. In den Beiträgen von Lé Tien u. a. [2008], Lé-Tien [2010] wird der Ansatz zum Reibungsbeobachter weiterentwickelt. Die Stabilität der Reibungsbeobachtung wird mithilfe der Passivität nachgewiesen [Lé-Tien, 2010].

1.4 Präzisierung der Aufgabenstellung

Ziel dieser Arbeit ist es, der Pick-and-Place-Bewegungsaufgabe mit hochdynamischen Direktantrieben zu begegnen. Diese Aufgabenstellung erfordert den Aufbau eines Funktionsmusters sowie die Untersuchung verschiedener Regelungskonzepte für eine Lageregelung.

Aus der Literaturübersicht ergibt sich, dass ein Großteil der bislang entworfenen Pick-and-Place-Prototypen mit hochübersetzenden Harmonic-Drive Getrieben ausgestattet sind. Die Struktur der RA-PKM ist prädestiniert für die Verwendung hochdynamischer Direktantriebe, da die notwendige Antriebsleistung durch redundante Antriebe geschaffen werden kann. Getriebe weisen außerdem eine geringe Steifigkeit bezüglich ihrer Drehachse auf. Die Steifigkeit ist sehr wichtig für eine hochdynamische akkurate Positionierung. Der Einsatz von industriellen Direktantrieben mit hohen verfügbaren Drehmomenten stellt sehr hohe Anforderungen an das Regelungskonzept. Vorhandene Störungen, wie Reibungsphänomene der Motoren haben einen direkten Einfluss auf den Mechanismus und damit auf die stationäre und dynamische Güte der Lageregelung des Manipulators. Die geforderte Präzision bei der Positionierung des RA-PKM wird durch modellbasierte Regelungsverfahren erreicht. Die Basis einer modellbasierten Regelung ist die genaue Kenntnis der Modellparameter sowie ein funktionales nichtlineares Modell zur Reglerauslegung. RA-PKM sind in der Lage Singularitäten im Arbeitsraum physikalisch zu bewältigen. Die Koordinatenformulierung der Bewegungsgleichungen ist der zentrale Schlüssel, dass Singularitäten keine Auswirkung auf das Modell und daher unmittelbar auf die modellbasierte Regelung haben. In vielen Veröffentlichungen werden dynamische Modelle in Antriebs- oder Endeffektor-Koordinaten formuliert. Diesbezüglich existiert bislang keine Zusammenstellung möglicher Koordinatenformulierungen für RA-PKM sowie deren Eigenschaften. Ein weiterer Punkt für ein ganzheitliches Regelungskonzept ist die Kompensation von unbekanntem Prozess- und Störkräften sowie Reibungsphänomenen, die keinem statischen Modell gerecht werden. Dazu bedarf es der Entwicklung robuster Methoden zur Unterstützung der modellbasierten Regelung.

Die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit lässt sich in die folgenden Punkte untergliedern:

Modellbildung

Entwicklung eines Konzepts zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen für die Reglerauslegung. Durch die zusätzlichen Messsysteme der redundanten Antriebe ergeben sich verschiedene Möglichkeiten für die Koordinatenformulierung der Bewegungsgleichungen.

Regelungstechnik

Die Bahnregelung konventioneller PKM erfolgt in vielen Fällen mit einem dezentralen Regelungskonzept und linearen Achsreglern. Dieses Konzept kann für RA-PKM nicht ohne weiteres adaptiert werden. Dahingehend soll ein modellbasiertes Konzept entwickelt werden, das die Verwendung dezentraler Achsregler für RA-PKM ermöglicht. Ein weiteres Ziel ist die Formulierung bekannter modellbasierter Regler für RA-PKM sowie die optimale Ausnutzung der Antriebsredundanz. Durch die verschiedenen Formulierungen der Bewegungsgleichungen ergeben sich verschiedene Eigenschaften für die modellbasierte Regelung. Ein weiteres Konzept ist die modellprädiktive Regelung. Dabei wird der EE-Fehler im weiteren Verlauf der Trajektorie über einen gleitenden Horizont prädiziert worauf die aktuelle Antriebskraft für die Kompensation des prädizierten Fehlers optimiert wird.

Umsetzung

Konstruktive Maßnahmen zur Verbesserung der Systemreibung und die Verwendung von zusätzlichen Messsystemen sind in der Regel kostspieliger als eine Erhöhung der Rechenleistung der Manipulatorsteuerung. Daher steht die Entwicklung von robusten Zustands- und Störgrößenbeobachtern zur Umsetzung hochdynamischer modellbasierter Lageregelungen für RA-PKM in der vorliegenden Arbeit im Vordergrund.

1.5 Struktur der Arbeit

Die Mechanismen beziehungsweise PKM, die in dieser Arbeit behandelt werden weisen die folgenden Eigenschaften auf:

- Am EE greifen mindestens zwei Führungsketten an und der PKM hat eine rein parallele Struktur. Jede Führungskette hat genau einen Antrieb, der an einem Gelenk angreift (aktives Gelenk).
- Jeder Antrieb ist mit einem eigenen Sensor ausgestattet, um die relevante Messgröße bezüglich des Antriebs zu messen.
- Die Anzahl der Antriebe ist mindestens gleich der Anzahl der Freiheitsgrade
- Es wird keine kinematische Redundanz behandelt. Der EE hat dieselbe Anzahl an Freiheitsgraden, wie der Mechanismus.

In Kapitel 2 wird der Versuchsaufbau zur Verifikation der Regelungskonzepte beschrieben. Dabei werden zwei verschiedene Antriebskonzepte verfolgt. Zum einen kann das Funktionsmuster mit reibungsarmen DC-Motoren und zum anderen mit industriellen Antrieben ausgestattet werden.

Kapitel 3 beschreibt die kinematische Modellbildung von RA-PKM. Die Kompensation von Singularitäten zählt zu den wesentlichen Vorteilen einer Antriebsredundanz.

Darum findet in diesem Kapitel auch eine detailliertere Betrachtung der Singularitäten statt. In Kapitel 4 wird ein generelles Konzept zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen von RA-PKM vorgestellt. Dabei werden Bewegungsgleichungen in verschiedenen Koordinaten-Formulierungen hergeleitet. In diesem Kapitel wird auch die Modellierung nicht-idealer Gelenke behandelt. Die dezentrale Regelung mit linearen Reglern ist häufig die erste Wahl für die Regelung von Industrierobotern. Dieses Regelkonzept wird in Kapitel 5 für RA-PKM untersucht. Dabei gilt es eine modellbasierte Verbesserung des dezentralen Regelkonzepts zu finden, um die industrielle Anwendbarkeit von RA-PKM zu stärken.

In Kapitel 6 geht es um modellbasierte Methoden zur Regelung von RA-PKM. Der erste Teil des Kapitels beschäftigt sich mit der Auflösung der Redundanz und der Herleitung von Beobachtern für Zustandsgrößen und Störgrößen. Im zweiten Teil werden bekannte modellbasierte Regler in verschiedenen Koordinatenformulierungen untersucht und bewertet. Das Verfahren der modellprädiktiven Regelung für RA-PKM wird in Kapitel 7 erläutert. Kapitel 8 bietet eine Zusammenfassung der Ergebnisse und einen Ausblick.

2 Beschreibung des Versuchsaufbaus

Dieses Kapitel beschreibt den Aufbau und die Ansteuerung eines ebenen 2DOF Parallelmanipulators mit Antriebsredundanz ($2\overline{R}RR/\underline{R}R$ RA-PKM). Die praktische Anwendbarkeit der vorgestellten theoretischen Methoden dieser Arbeit werden durch experimentelle Ergebnisse mit dem Prototypen untermauert. Im Gegensatz zu den bekannten Arbeiten von Kock [2001] oder Zhang u. a. [2008] wurde ein Manipulator mit Direktantrieben konzipiert. Die Verwendung von Getriebemotoren mit hoher Übersetzung und klassischen Reglern fördern eine Verspannung des Manipulators [Kock, 2001]. Moderne Regelungsverfahren sowie die Ausnutzung der redundanten Aktorik mit Direktantrieben bieten einen neuen Zugang zu hochdynamischen Pick-and-Place-Aufgaben und akkurater Trajektorienfolge.

2.1 Mechanischer Aufbau des $2\overline{R}RR/\underline{R}R$ RA-PKM

Die Auswahl eines geeigneten Mechanismus fällt auf eine Struktur, die bereits in den Arbeiten [Kock, 2001], [Zhang u. a., 2007], [Zhang u. a., 2008], [Manderla u. Konigorski, 2009] zur Demonstration neuer Methoden in diesem Teilgebiet der Robotik Anklang findet. In Abbildung 2.1 wird der $2\overline{R}RR/\underline{R}R$ RA-PKM mit den STM 135 *Torque-Motoren*, der Firma Schunk GmbH & Co. KG gezeigt. Der Aufbau besteht

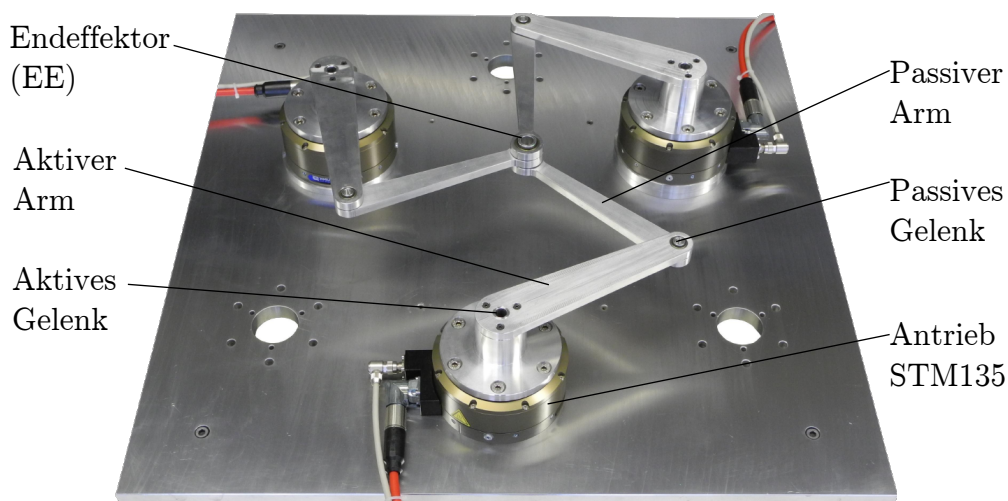


Abbildung 2.1: $2\overline{R}RR/\underline{R}R$ RA-PKM Manipulator mit STM 135 *Torque-Motoren*

aus drei Antrieben, die über je einen Zweischlag an ein zentrales Doppelgelenk, den

Tabelle 2.1: Auslegungsdaten der Arme des 2RRR/RR RA-PKM

	Länge	Höhe	Gewicht	Trägheit
	m	m	kg	kgm ²
Aktive Arme	0,2	0,012	0,134	0,004
Passive Arme	0,2	0,012	0,134	0,004

Endeffektor (EE), gekoppelt sind. Die einzelnen kinematischen Ketten zwischen Antrieb und EE werden als Führungsketten bezeichnet. An den mechanischen Aufbau des Manipulators wurden die folgenden Anforderungen gestellt:

- Modularer und robuster Aufbau,
- reibungsfreie Lagerung der passiven Gelenke,
- Arme in Leichtbauweise,
- Einsatz von Direktantrieben.

Die Lagerung der passiven Gelenke wurde mit präzisen Dünnringlagern als angeordnete *O-Anordnung* realisiert. Die Wälzlager ermöglichen eine flache Konstruktion der Arme sowie genug Platz für einen Mittendurchlass. Die Daten der Arme sind in Tabelle 2.1 zusammengestellt. Das Doppelgelenk am EE hat ebenfalls einen Mittendurchlass zur Aufnahme von Werkzeugen. Die Reibung aller passiven Gelenke ist vernachlässigbar klein. Die Ausrichtung der Antriebe erfolgt mithilfe einer Vorrichtung an eine schwere Grundplatte. Die Antriebe sind zu einem gleichseitigen Dreieck mit der Kantenlänge 0,4 m ausgerichtet, wie im Koordinatenbild in Abbildung 2.2 gezeigt. Die zugehörigen Antriebspositionen sind durch Koordinaten in Tabelle 2.2 angegeben.

Tabelle 2.2: Motorpositionen auf der Grundplatte

Motorposition A_i	x_i	y_i
i	m	m
1	0	0,2
2	0,346	0
3	0,346	0,4

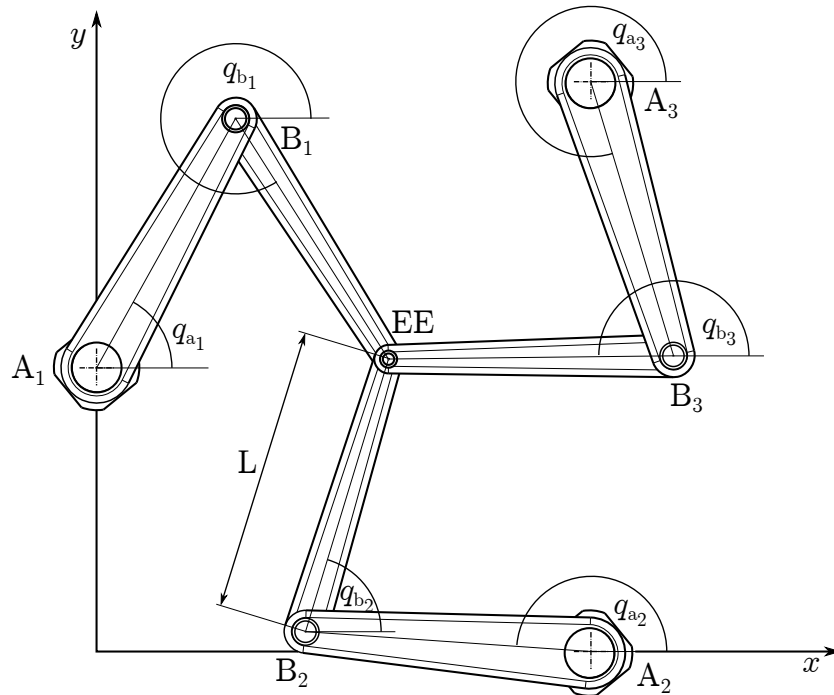


Abbildung 2.2: Koordinatenbezeichnung des 2RRR/RR RA-PKM Prototypen

2.2 Antriebskonzepte des 2RRR/RR RA-PKM

2.2.1 Laboraufbau mit DC-Motoren

Ein wesentlicher Vorteil des modularen Aufbaus ist die Verwendung unterschiedlicher Antriebe. Bei ersten Testläufen und um die Robustheit der vorgestellten Methoden und Reglern zu testen, kann der Manipulator mit DC-Motoren vom Typ Maxon RE30 ausgerüstet werden. Diese werden durch Spannsätze direkt an den Manipulator angekoppelt.

Die Antriebe haben bei einer Nennspannung von 24 V ein Nenndrehmoment von 0,0834 Nm und ein Haltedrehmoment von 0,936 Nm. Des Weiteren ist jeder Motor mit einem optischen Inkrementalencoder, der eine Auflösung von 500 Strichen pro Umdrehung hat, ausgestattet. Die Flankenbewertung ermöglicht daraus 2000 Impulse pro Umdrehung, wodurch die Winkelmessung der DC Motoren auf eine Genauigkeit von 3,14 mrad beschränkt ist. Die Reibungseffekte der Motoren sind aufgrund der verwendeten Präzisionslager vernachlässigbar klein.

2.2.2 Laboraufbau mit STM 135 Torque-Motoren

Der STM 135 ist ein sehr flach bauender *Torque-Motor* der Firma Schunk GmbH & Co. KG. Unter dem Begriff *Torque-Motor* versteht man in der

Regel einen hochpoligen langsam laufenden Motor. Diese Motoren werden auf ein hohes Drehmoment optimiert und sind dadurch für parallelkinematische Roboter optimal geeignet. Aufgrund des hohen Eigengewichts der Antriebe (2,7 kg) ist eine Anwendung in seriellkinematischen Strukturen unwirtschaftlich, wenn die Motoren auf bewegte Achsen montiert werden.

Torque-Motoren sind spielfrei, da sie ohne Getriebe direkt an die zu bewegenden Teile angebracht werden. Durch den Wegfall des störenden Einflusses von Lose werden die Motoren häufig für hoch genaue Positionierungen verwendet [Fischer, 2010], [Pfaff, 1994].

Bei Getriebemotoren wird das Messsystem antriebsseitig installiert, wodurch eine enorme Genauigkeitsteigerung erzielt wird. Die höchste Anforderung an einen *Torque-Motor* wird daher an das direkte Messsystem gestellt, das maßgeblich für die Genauigkeit des Antriebs ist. Die STM 135 *Torque-Motoren* sind bürstenlose Außenläufer, mit einer Nennspannung von 48 V, einem Nenndrehmoment von 2,46 Nm und einem Haltemoment von 7,56 Nm. Die Motoren sind mit magnetischen Inkrementalencodern, die eine physikalische Strichzahl von 4606 pro Umdrehung aufweisen, ausgestattet. Die Flankenbewertung ermöglicht daraus 18424 Impulse pro Umdrehung. Nach Fischer [2010] kann für einen *Torque-Motor* eine so genannte $c(I)$ Kennlinie, die den Zusammenhang zwischen Drehmoment c und Motorstrom I aufgezeichnet werden. Diese verläuft in einem bestimmten Bereich linear und ist durch die Drehmomentkonstante $k_M = 0,6 \text{ Nm/A}$ charakterisiert. Die Sättigung des magnetischen Kreises im Motor verursacht ein Abknicken der Kennlinie [Fischer, 2010]. Das Spitzenmoment des STM 135 wird kurz vor Ende des linearen Bereiches gelegt. Der STM 135 hat neben seinem beachtlichen Drehmoment auch eine sehr hohe Reibung, die durch Dichtelemente, Schmiermittel und der angestellten Lagerung zu begründen ist. Aus regelungstechnischer Sicht stellt die Haftreibung eines Antriebs das größte Hindernis für eine präzise Lageregelung dar. Eine repräsentative Reibungskennlinie des STM 135 zeigt die Messung in Abbildung 2.3.

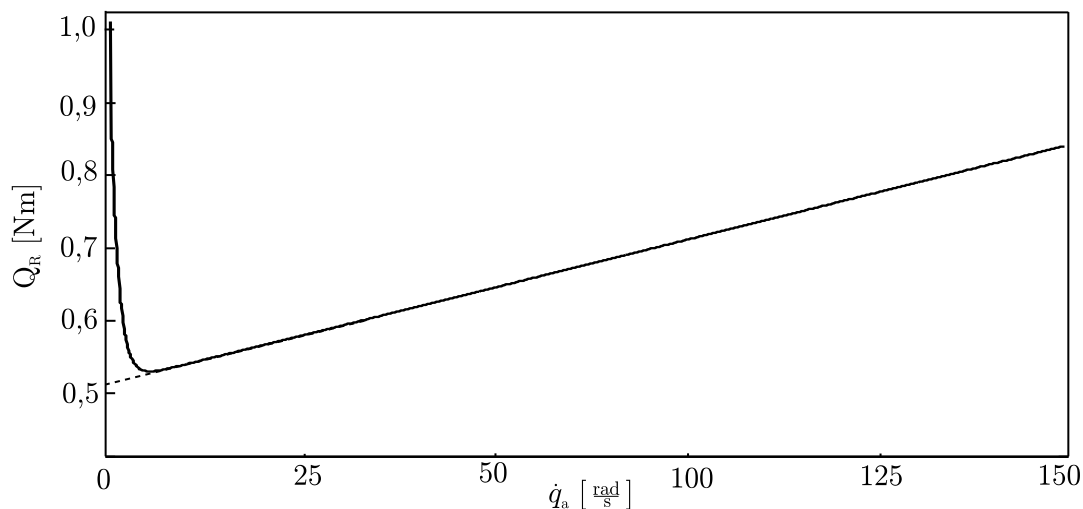


Abbildung 2.3: Stribeck-Kurve des STM 135

Die Mittelwerte beschreiben eine so genannte STRIBECK-Kurve, deren Eigenschaften in Kapitel 4.8 näher erläutert werden. Die Haftreibung der Antriebe beträgt im Durchschnitt 1 Nm und damit fast das halbe Nenndrehmoment (2,49 Nm). Die geschwindigkeitsabhängige Dämpfung des Motors liegt bei $3,3 \text{ mNm}\cdot\text{s}/\text{rad}$. Hinzu kommen Rastmomente von ca. 0,1 Nm, die während der Bewegung des Motors auftreten. Der Grund hierfür ist die Änderung des Luftspalts zwischen Motoranker und -Stator und somit der Änderung des magnetischen Widerstands. Rastmomente führen im Allgemeinen zu schwankenden Drehmomenten, die sich negativ auf die Positionierung auswirken. Zusätzlich unterscheiden sich die Reibungsphänomene der einzelnen Motoren untereinander. Eine weitere Problematik ist die Tatsache, dass sich die Reibungswerte durch äußere Randbedingungen, wie beispielsweise Temperatur, Luftfeuchtigkeit sowie das Nutzungsverhalten der Antriebe verändern können.

2.2.3 Kenndaten der Antriebe

Zur Übersicht werden die wichtigsten Kenndaten der beiden verwendeten Antriebstypen in Tabelle 2.3 zusammengefasst.

Tabelle 2.3: Wichtige Kenndaten der Antriebe auf einen Blick

	<u>Maxon RE30</u>	<u>Schunk STM 135</u>
Nennspannung in V	24	24
Anschlusswiderstand in Ω	3,14	0,300
Induktivität in mH	3	3
Nennmoment in Nm	0,0834	2,49
Spitzenmoment in Nm	0,936	7,56
Drehmomentkonstante k_M in Nm/A	0,03	0,6
Inkrementalencodertyp	optisch extern	magnetisch intern
Striche (Flankenbewertung)	2000	18424
Genauigkeit in mrad	3,141	0,341

2.3 Ansteuerungskonzept des 2RRR/RR RA-PKM

Die Antriebe des Prototyps werden über Frequenzumrichter durch ein Echtzeitsystem angesteuert. Der Begriff Echtzeit oder Realzeitbetrieb ist nach DIN 44300 Informationsverarbeitung folgendermaßen definiert:

„Ein Betrieb eines Rechnersystems, bei dem Programme zur Verarbeitung anfallender Daten ständig betriebsbereit sind, derart, daß die Verarbeitungsergebnisse innerhalb einer vorgegebenen Zeitspanne verfügbar sind. Die Daten können je nach Anwendungsfall nach einer zeitlich zufälligen Verteilung oder zu vorbestimmten Zeitpunkten anfallen“
[DIN 44300, 1985]

Die Topologie der Ansteuerung entspricht des sogenannten *Software in the Loop (SIL)*. Dabei wird der eigentliche Regler auf einem Zielsystem ausgeführt, das mit dem realen Prozess verbunden ist [Abel u. Bollig, 2006, S. 9]. Diese Topologie ist eine Variante des so genannten *Rapid Control Prototyping (RCP)*, welches in der Entwicklung und Auslegung von Reglern eine große Rolle spielt, wie von Abel u. Bollig [2006] erläutert wird.

Nach der „Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme“ [DIN 2206, 2004], mit dem V-Modell nach DIN 2206, kann das *RCP* in die Punkte

- Systementwurf,
- Modellbildung,
- Simulation,
- Reglerauslegung,
- Implementierung und
- modularer Test aller Teilssysteme und des Gesamtsystems

untergliedert werden. Die größten Hindernisse dieser Struktur sind die Schnittstellen, die jedoch in der Regel von den Anbietern der *RCP*-Systeme weitestgehend bereitgestellt werden [Abel u. Bollig, 2006, S. 4-10].

Das Ansteuerungskonzept des Prototypen mit den industriellen *Torque-Motoren* (STM 135) wird in Abbildung 2.4 als Wirkschema dargestellt.

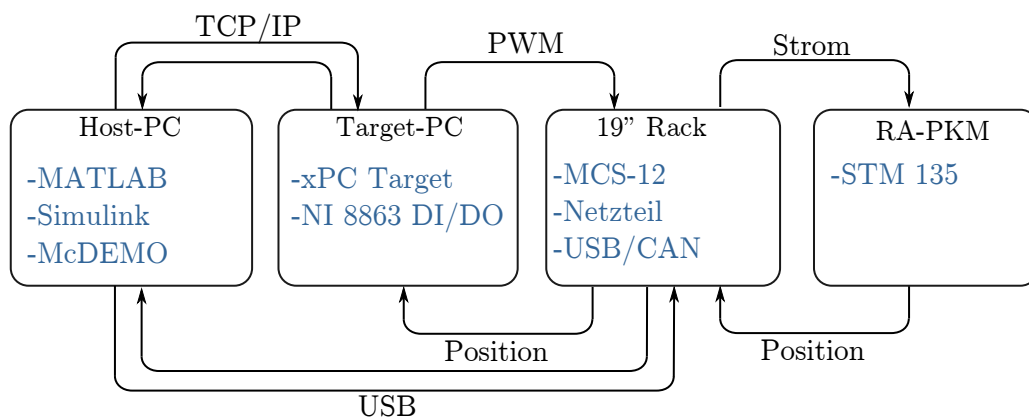


Abbildung 2.4: Wirkschema und Schnittstellenübersicht der Ansteuerung des RA-PKM

Die wichtigsten Komponenten des Ansteuerungskonzepts werden kurz erklärt:

Host-PC

Der Host-PC ist ein Standard PC (x86), der mit einem konventionellen Windows-Betriebssystem ausgestattet ist. Des Weiteren verfügt der PC über die Software MATLAB von Mathworks und dessen (grafische) Simulationserweiterung Simulink zur Simulation und Reglerauslegung. Mithilfe der MATLAB Erweiterung Simulink-Coder kann aus Simulink-Modellen und Stateflow-Diagrammen ausführbarer Code generiert werden. Dieser Code kann anschließend automatisiert auf eine Zielhardware überführt werden.

Target-PC

Als Target wird ebenfalls ein handelsüblicher (x86) PC verwendet. Dieser verfügt hier über einen *Core2Duo* Prozessor mit zwei Kernen. Das Echtzeit-Betriebssystem xPC-Target, von Mathworks kann beide Prozessorkerne zur Verarbeitung des Echtzeitcodes im so genannten *Polling Mode* verwenden, wodurch eine hohe Leistungsfähigkeit für regelungstechnische Anwendungen erzielt wird. Als Hardware-Schnittstelle wird eine Datenerfassungskarte von National Instruments (NI6602) verwendet. Die Parameter des laufenden Modells können vom Host-PC über die TCP/IP Schnittstelle verändert werden.

MCS-12

Der MCS-12 ist ein Frequenzumrichter der Firma Schunk GmbH & Co. KG, über den der STM 135 angesteuert werden kann. Auf dem Umrichter ist ein PI-Stromregler als Teil einer so genannten Vektorregelung implementiert. Für die Ansteuerung des 2RRR/RR RA-PKM werden dem Stromregler vom Target-PC direkt über eine äußere Schnittstelle Sollwerte in Form eines Puls-Pause-Verhältnisses vorgegeben. Die Vorgabefrequenz kann dabei bis zu 15 kHz, bei einer Genauigkeit von mindestens 5 mA betragen. Für die Parametrierung der Frequenzumrichter und zur Überwachung der Motoren werden die MCS-12 Frequenzumrichter direkt über einen CAN/USB-Umsetzer mit dem Host-PC verbunden. Die Parameter lassen sich dann mithilfe der grafischen Benutzeroberfläche Mcdemo auf dem Host-PC einstellen.

Hypothese 2.3.1. *Der auf dem MCS-12 implementierte PI-Stromregler ist so schnell, dass die resultierende Motorzeitkonstante sowie alle Totzeiten vernachlässigt werden können. Der Motor kann dadurch als ideale Drehmomentquelle betrachtet werden.*

Der Aufbau mit den DC-Motoren wird mit dem Echtzeitsystem dSPACE angesteuert, wobei die Grundstruktur dieselbe ist.

3 Kinematik redundant angetriebener Parallelkinematiken

Dieses Kapitel behandelt die Kinematik von Parallelmanipulatoren mit Antriebsredundanz. In den Abschnitten 3.1 bis 3.4 werden grundlegende Definitionen zu den Mechanismen vorgestellt. Die Herleitung eines kinematischen Modells wird in Abschnitt 3.5 beschrieben. Dieses Modell stellt die Basis zur Klassifikation von Singularitäten dar. Im letzten Abschnitt werden topologische Unterschiede zwischen vollaktuierten und redundanten Parallelkinematiken behandelt.

3.1 Grundlagen der Robotik

3.1.1 Beschreibung einer Endeffektor-Pose

In der Roboterkinematik werden zwei Arten von Koordinatensystemen unterschieden, um die Stellung des Manipulators zu beschreiben:

- Aufgabenbezogenes Koordinatensystem, in dem die vom Endeffektor auszuführende Aufgabe beschrieben werden kann. Eine vollständige Endeffektor-Pose (EE-Pose) wird durch den Vektor

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

beschrieben. Dabei ist \mathbf{r} ein Ortsvektor zur Definition des Positionsanteils und $\boldsymbol{\phi}$ ein Orientierungsanteil bezüglich des Inertialsystems. Mittels kartesischer Koordinaten ergibt sich die Koordinatendarstellung $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$ zur Beschreibung der EE-Position im Raum. Die Parametrierung einer Orientierung kann entweder durch EULER- oder KARDAN-Winkel erfolgen. Häufig wird in der Robotik die Angabe in EULER-Winkel mit der Koordinatendarstellung $\boldsymbol{\phi} = [\varphi \ \vartheta \ \psi]^T$ bevorzugt.

- Beschreibung in natürlichen Antriebskoordinaten (Winkel bzw. Verschiebungen). Dabei erfolgt die Beschreibung des Manipulators mithilfe von rotatorischen oder translatorischen Gelenkkoordinaten der vorhandenen Antriebe. Nach Schramm u. a. [2010] kann jedes beliebige Gelenk mit reinen rotatorischen und translatorischen Gelenken dargestellt werden. Für einen Mechanis-

mus mit m aktiven Gelenkkoordinaten ergibt sich die Koordinatendarstellung

$$\mathbf{q}_a = [q_{a_1} \ \cdots \ q_{a_m}]^T. \quad (3.2)$$

3.1.2 Das inverse kinematische Problem (IKP)

Zur Steuerung eines Parallelroboters wird der EE-Pose durch die gemessenen Antriebskoordinaten eine Bahn vorgegeben. Als inverses kinematisches Problem bezeichnet man die Abbildung der EE-Pose \mathbf{X} auf die Antriebskoordinaten \mathbf{q}_a . Die Funktion zur Berechnung der Antriebskoordinaten wird durch

$$\mathbf{q}_a = \mathbf{f}_{\text{IKP}}(\mathbf{X}) \quad (3.3)$$

angegeben. Die Abbildung ist nicht eindeutig, wodurch die Gleichungen durch Auswahl der richtigen Vorzeichen an die Konfiguration des Parallelroboters angepasst werden müssen [Kock, 2001].

3.1.3 Das direkte kinematische Problem (DKP)

Ausgehend von den Gelenkkoordinaten der Antriebe \mathbf{q}_a wird die EE-Pose durch die direkte Kinematik, die auch als Vorwärtskinematik bezeichnet wird, bestimmt. Analog zur inversen Kinematik genügt diese Abbildung der Beziehung

$$\mathbf{X} = \mathbf{f}_{\text{DKP}}(\mathbf{q}_a). \quad (3.4)$$

Die EE-Pose lässt sich bei seriellen Strukturen eindeutig aus den Antriebskoordinaten bestimmen. Bei rein parallelkinematischen Strukturen ohne Antriebsredundanz ist die Abbildung mehrdeutig. Die redundante Aktorik ermöglicht wiederum durch zusätzliche kinematische Ketten am EE, dass die Abbildung zur Bestimmung der EE-Pose eindeutig wird [Kock, 2001].

3.2 Topologische Einordnung kinematischer Ketten

Der Verbund von Körpern und Gelenken wird als kinematische Kette bezeichnet [IFTToMM, 2003]. Die Anordnung dieser Ketten kann in zwei Gruppen eingeteilt werden.

- geschlossene kinematische Ketten,
- offene kinematische Ketten.

Parallelkinematische Maschinen mit und ohne Antriebsredundanz werden den geschlossenen kinematischen Ketten zugeordnet, während die seriellen Roboter den

offenen kinematischen Ketten zugeordnet werden. Manipulatoren, die in einer Kombination beider Gruppen aufgebaut werden, zählen zu den Systemen mit teilweise geschlossenen kinematischen Ketten.

3.2.1 Geschlossene kinematische Kette (Kinematische Schleife)

Die geschlossene kinematische Kette entspricht einer Konfiguration, in der jedes Glied mit mindestens zwei anderen Gliedern durch je ein Gelenk verbunden ist [IFTToMM, 2003]. Formal gilt

$$n_G > n_B ,$$

wobei n_G die Anzahl der Gelenke und n_B die Anzahl der Körper, ohne das Gestell (Bezugskörper) bezeichnen. Die Anzahl der unabhängigen Mehrkörperschleifen n_L eines Mechanismus ergibt sich nach [Schramm u. a., 2010, S. 52] zu

$$n_L = n_G - n_B .$$

3.2.2 Offene kinematische Kette (Baumstruktur)

Die Kinematikstruktur eines Parallelroboters kann beispielsweise durch einen gedanklichen Schnitt an genau einem Gelenk oder einem Körper jeder unabhängigen kinematischen Schleife $L_i, i = 1 \dots n_L$ in eine Baumstruktur überführt werden. Die Baumstruktur ist eine offene kinematische Kette, die keine kinematischen Schleifen enthält [IFTToMM, 2003]. Es gilt

$$n_G = n_B .$$

Der Zusammenhang zwischen der kinematischen Schleife und deren Baumstruktur wird in Abbildung 3.1 verdeutlicht. Die Scheren verdeutlichen den gedanklichen Schnitt der kinematischen Schleifen.

Der Gelenkraum einer Baumstruktur

Die Relativbewegung gekoppelter Körper im Raum kann durch n natürliche Gelenkkoordinaten $\mathbf{q} \in \mathbb{V}$ beschrieben werden, wobei $\mathbb{V}^n = \mathbb{T}^{n_R} \times \mathbb{R}^{n_P}$ ein Vektorraum darstellt, der sich aus der aus n_P prismatischen und n_R rotatorischen Gelenken zusammensetzt. Bei dieser Definition verbindet jedes Gelenk immer zwei Körper innerhalb einer kinematischen Kette. Die Konstruktion von Gelenken mit mehreren Freiheitsgraden muss durch eine Hintereinanderschaltung von Dreh- und Schubgelenken realisiert werden [Schramm u. a., 2010].

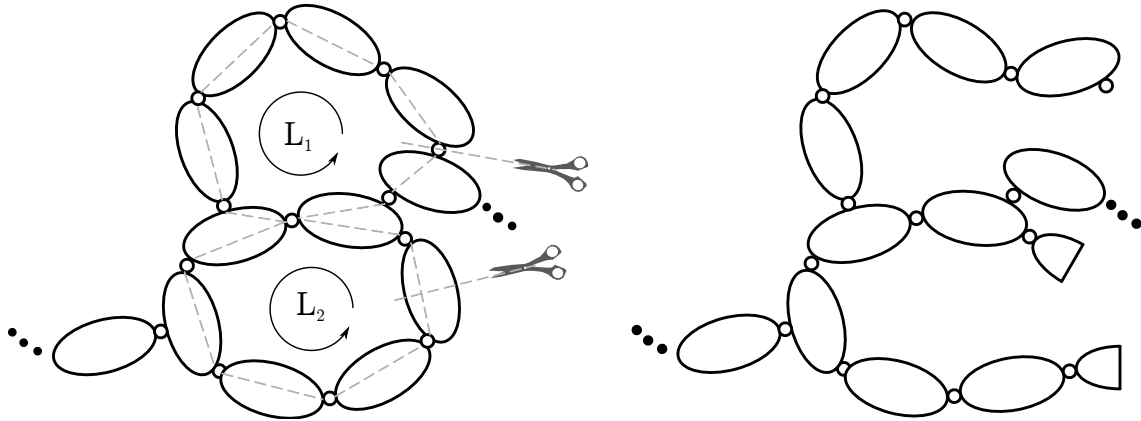


Abbildung 3.1: Geschlossene kinematische Kette und deren Baumstruktur

Aktive und passive Gelenke

Nach der Definition eines Parallelmanipulators müssen mindestens zwei aktive Führungsketten am EE angekoppelt werden. In [Neugebauer, 2005] zeichnet sich eine aktive Führungskette durch das Vorhandensein eines Antriebs aus. Diese Definitionen beschreiben eine vollaktuierte parallelkinematische Maschine. Befinden sich mehrere Antriebe innerhalb einer Führungskette, so spricht man von hybriden Parallelkinematiken. Des Weiteren können sich Antriebe außerhalb der Kinematik befinden, so dass die Kraftübertragung beispielsweise über ein Seilzug, der an einem Körper angreift, erfolgt. In dieser Arbeit soll die Kraft immer direkt an einem Gelenk angreifen, wodurch m aktive Gelenkkoordinaten des PKM mit

$$\mathbf{q}_a = [q_{a_1} \ \cdots \ q_{a_m}]^T \quad (3.5)$$

bezeichnet werden können. Die passiven Koordinaten ergeben sich aus den restlichen natürlichen Gelenkkoordinaten. Für ein Mechanismus mit n natürlichen Gelenkkoordinaten sind die passiven Koordinaten durch

$$\mathbf{q}_p = [q_{b_1} \ \cdots \ q_{b_{(n-m)}}]^T \quad (3.6)$$

festgelegt.

3.3 Freiheitsgrade und verallgemeinerte Koordinaten

In der Robotik wird in der Regel die Anzahl an unabhängigen Koordinaten des EE gegenüber einem gestellfesten Bezugssystem als Freiheitsgrad bezeichnet. Die Freiheitsgrade beschreiben demnach die minimale Anzahl der unabhängigen generalisierten Koordinaten, die erforderlich sind, um die Konfiguration eines Systems zu jedem Zeitpunkt vollständig zu beschreiben (Parametrierung) [IFTToMM, 2003]. Sofern die betrachteten Systeme keine kinematische Redundanz aufweisen, ist die Anzahl an Minimal- und Endeffektorkoordinaten gleich. Die Freiheitsgrade $\delta \in \mathbb{N}$

eines mechanischen Systems werden in [Kerle u. Pittschellis, 2002] oder [Schramm u. a., 2010, S. 60] nach dem Kriterium von KUTZBACH durch

$$\delta = 6n_B - \sum_{i=1}^{n_G} (6 - \delta_{G_i}) \quad (3.7)$$

berechnet, wobei $\delta_{G_i}, i = 1 \dots n_G$ die Anzahl der Freiheitsgrade des jeweiligen Gelenks bezeichnet. Für geschlossene kinematische Ketten kann die Beziehung nach Schramm u. a. [2010] auch mit der Anzahl der Fundamentalschleifen n_L angegeben werden

$$\delta = \sum_{i=1}^{n_G} \delta_{G_i} - 6n_L. \quad (3.8)$$

Weiter kann der Mechanismus durch die Einteilung nach den Freiheitsgraden klassifiziert werden. Mechanismen die keine Freiheitsgrade aufweisen ($\delta=0$), werden als statisch bestimmte Struktur oder Fachwerk bezeichnet. Mechanismen mit nur einem einzigen Freiheitsgrad ($\delta=1$) bezeichnet man als zwangsläufigen Mechanismus oder Koppelgetriebe. Mechanismen mit mehreren Freiheitsgraden ($\delta>1$) eignen sich zum Manipulator.

3.3.1 Minimalkoordinaten der Baumstruktur

Die Anzahl der Freiheitsgrade der Baumstruktur entspricht der Anzahl der natürlichen Gelenkkoordinaten n . Die relativen Lagen jedes Körpers der Baumstruktur bezüglich des Inertialsystems sind in jedem Zustand und zu jedem Zeitpunkt eindeutig mit den Minimalkoordinaten, durch den Vektor $\mathbf{q} \in \mathcal{V}^n$ beschrieben.

3.3.2 Minimalkoordinaten der kinematischen Schleife

Bei einer geschlossenen kinematischen Kette sind die systembeschreibenden Gelenkkoordinaten in \mathbf{q} nicht unabhängig voneinander [Schramm u. a., 2010], [Hiller, 1983]. Die Anzahl der unabhängigen Gelenkkoordinaten wird durch den Systemfreiheitsgrad δ definiert. Die Parametrierung des Systems erfolgt durch eine Einteilung von \mathbf{q} in $r := n - \delta$ abhängige \mathbf{q}_1 und δ unabhängige Koordinaten \mathbf{q}_2 :

$$\mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}_1 \in \mathbb{V}^{n-\delta} \quad (3.9a)$$

$$\mathbf{q}_2, \quad \mathbf{q}_2 \in \mathbb{V}^{\delta}. \quad (3.9b)$$

Anmerkungen zur Parametrierung eines Parallelmanipulators mit Antriebsredundanz:

Definition 3.3.1 (Bestandteil der Messung). Die Koordinaten \mathbf{q}_2 müssen Teil der gemessenen Gelenkkoordinaten sein.

In der Regel verfügen die Aktoren über ein Messsystem, wodurch die Minimalkoordinaten durch $\mathbf{q}_a = [\mathbf{q}_2^T \ \dots]^T$ ein Teil der Antriebskoordinaten sind.

Anmerkung 3.3.1. Die Parametrierung ist, abhängig von der Struktur des Parallelroboters, nur lokal gültig. Bei redundant angetriebenen Mechanismen gilt $m > \delta$. Die Auswahl von Minimalkoordinaten innerhalb der Antriebskoordinaten hat Auswirkungen auf die Singularitäten des Parallelmanipulators, wie in Abschnitt 3.6 beschrieben.

3.4 Aufstellen der Bindungsgleichungen

Wird eine kinematische Schleife aufgeschnitten, ergeben sich geometrische Schließbedingungen, die die Konfiguration des geschlossenen Systems beschreiben. Die Aufstellung und Lösung dieser Schließbedingungen stellt das grundlegende Problem der Kinematik von Parallelkinematiken dar und wird daher näher beschrieben.

3.4.1 Auftrennen der Schleife an einem Körper

Die geschlossene kinematische Kette wird durch den Schnitt eines Körpers in zwei Hälften geteilt, wie in Abbildung 3.2 dargestellt wird. Gedanklich kann statt der zwei entstehenden Schnittufer auch ein neuer Körper, der ohne Masse ist, eingeführt werden (Schattenkörper) [Ganovski, 2007]. Die geometrischen Schließbedin-

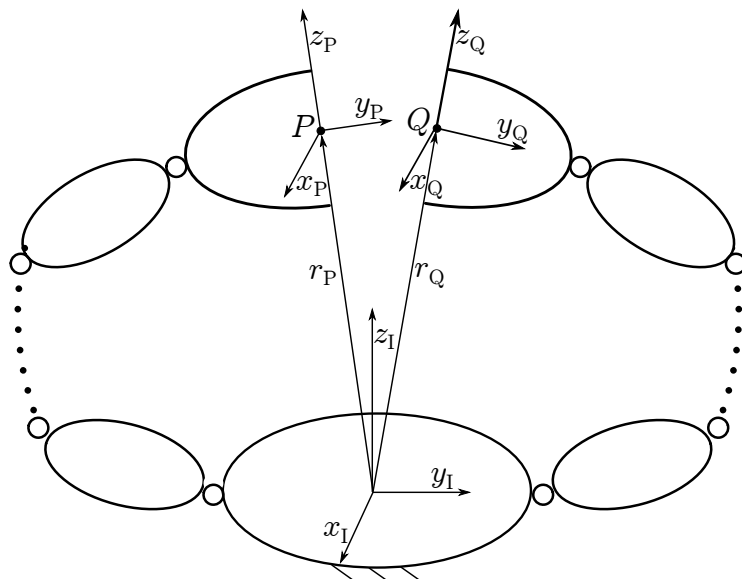


Abbildung 3.2: Auftrennen der geschlossenen kinematischen Kette an einem Körper nach [Hiller, 1994]

gungen beinhalten die unmittelbare Forderung, dass die Koordinatensysteme P und Q der Schleife in Abbildung 3.2 zusammen fallen. Als Ergebnis erhält man sechs

Zwangsgleichungen, die aus drei Zwangsbedingungen der Translation, für die relative Lage der Koordinatensysteme P und Q bestehen und im Inertialsystem mit den Vektoren \mathbf{r}_P und \mathbf{r}_Q durch

$$\mathbf{h}_T(\mathbf{q}) = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

beschrieben werden. Des Weiteren ergeben sich drei Zwangsbedingungen der Rotation, für die absolute Orientierung der Koordinatensysteme P und Q , die im Inertialsystem mit den Drehtensoren ${}^P\mathbf{T}$ und ${}^Q\mathbf{T}$ durch

$${}^P\mathbf{T} - {}^Q\mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

beschrieben werden. Dabei kann (3.11) mithilfe einer relativen Beziehung der Koordinatensysteme am Schnittpunkt auch durch ${}^P\mathbf{T}_Q - \mathbf{I}_3 = \mathbf{0}$ aufgestellt werden. Hierbei ist ${}^P\mathbf{T}_Q$ ein Drehtensor, welcher die Koordinatendarstellung eines Vektors im Koordinatensystem Q in das Koordinatensystem P transformiert und \mathbf{I}_3 ist die 3×3 Einheitsmatrix.

Formal entspricht (3.10) drei linear unabhängigen Gleichungen und (3.11) weiteren neun Gleichungen, von denen jedoch lediglich drei Winkel des Drehtensors unabhängig sind. Diese können in ein Gleichungssystem $\mathbf{h}_R(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ überführt werden. Die Gesamtanzahl der unabhängigen Zwangsbedingungen ist demnach sechs.

Vorteile

- ⊕ Die Aufstellung von beliebigen Bindungsgleichungen erfolgt sehr intuitiv (automatisierbare Aufstellung möglich [Schramm u. a., 2010])
- ⊕ Die Verkopplung der Bindungsgleichungs-Struktur ist relativ schwach.

Nachteile

- ⊖ Sehr hoher numerischer Aufwand durch die hohe implizite Formulierung der Bindungsgleichungen.
- ⊖ Bei der Simulation können numerische Singularitäten auftreten, die keine physikalische Erklärung haben [Schramm u. a., 2010]
- ⊖ Für die numerische Auswertung mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren muss die hierzu benötigte JACOBI-Matrix aus den Vektor- und Matrixgleichungen (3.10 und 3.11) aufgestellt werden.

Die zeitlichen Ableitungen der translatorischen Zwangsgleichungen (3.10) ergeben die kinematischen Zwangsbedingungen

$$\dot{\mathbf{h}}_T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{r}}_P(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{r}}_Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}_T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (3.12a)$$

$$\ddot{\mathbf{h}}_T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \ddot{\mathbf{r}}_P(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) - \ddot{\mathbf{r}}_Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}_T(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (3.12b)$$

wobei \mathbf{J}_T die JACOBI-Matrix der Zwangsbedingungen bezüglich der Translation ist. Die zeitlichen Ableitungen für die Zwangsbedingungen der Rotation (3.11) werden mit

$$\dot{\mathbf{h}}_R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\omega}_P(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \boldsymbol{\omega}_Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}_R(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (3.13a)$$

$$\ddot{\mathbf{h}}_R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \dot{\boldsymbol{\omega}}_P(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}_R(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_R(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (3.13b)$$

beschrieben [Ganovski, 2007]. Die Vektoren $\boldsymbol{\omega}_P$ und $\boldsymbol{\omega}_Q$ beschreiben die Relativgeschwindigkeit der Koordinatensysteme P und Q . Die JACOBI-Matrix der Zwangsbedingungen bezüglich der Rotation wird mit \mathbf{J}_R bezeichnet. Die vollständigen kinematischen Zwangsbedingungen lauten

$$\dot{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{h}}_T \\ \dot{\mathbf{h}}_R \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_T \\ \mathbf{J}_R \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.4.2 Auftrennen der Schleife an einem Gelenk

Bei dieser Methode wird die kinematisch geschlossene Schleife an einem idealen Gelenk, welches reibungsfrei- und von unendlicher Steifigkeit ist, aufgeschnitten. Die daraus resultierende offene kinematische Kette wird in Abbildung 3.3 dargestellt. Bei

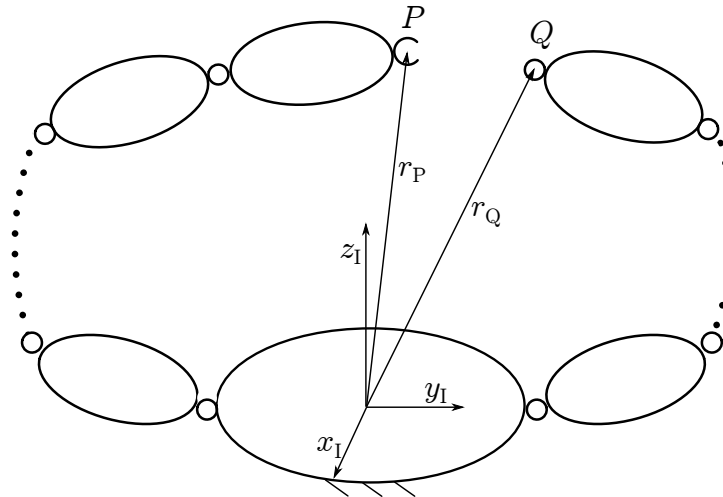


Abbildung 3.3: Auftrennen der geschlossenen kinematischen Kette an einem Gelenk nach [Schramm u. a., 2010]

$\delta_G \in \mathbb{N}$ Gelenkfreiheitsgraden des Schnittgelenks ergeben sich $r = 6 - \delta_G$ Schließbedingungen für die räumliche kinematische Schleife, die entsprechend des Gelenktyps aufgestellt werden. Für ebene Gelenke verringern sich die auftretenden Gelenkfreiheitsgrade, zu $r = 3 - \delta_G$.

Beispiel 3.4.1 (Sphärisches Gelenk). Die Formulierung der Zwangsgleichungen wird anhand des sphärischen Gelenks in Abbildung 3.4 erläutert. Dabei ergeben sich $r = 3$ Schließbedingungen, um den Zusammenbau des Gelenks zu beschreiben.

Diese entsprechen der Forderung, dass die Mittelpunkte von Kugel und Kugelschale zusammen fallen:

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q = \mathbf{0}. \quad (3.15)$$

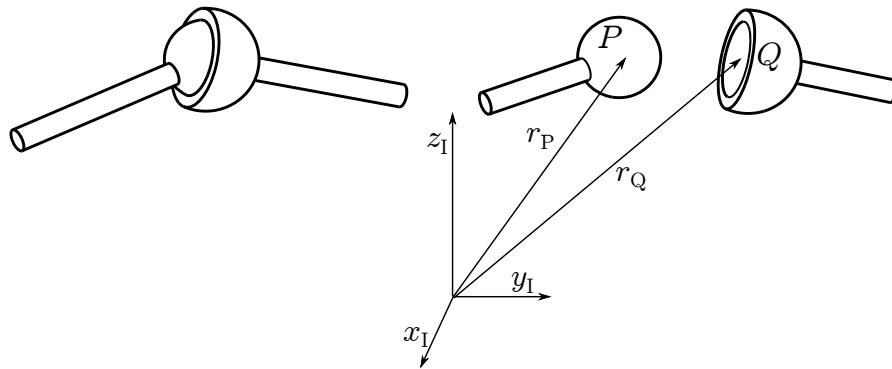


Abbildung 3.4: Aufschneiden eines Kugelgelenks

Da geschnittene Gelenke nicht zu der Baumstruktur des Mechanismus gehören, tauchen die relativen Winkel des geschnittenen Gelenks nicht mehr in den generalisierten Koordinaten \mathbf{q} der Baumstruktur auf.

Vorteile

- ⊕ Stark reduzierte Anzahl an Bindungsgleichungen
- ⊕ Keine Erzeugung von redundanten Bindungsgleichungen

Nachteile

- ⊖ Aufwendige Berechnung der Bindungsgleichungen durch die vollbesetzte Struktur der Gleichungen.
- ⊖ Numerischer Aufwand zur Lösung der Bindungsgleichungen ähnlich zu der Methode, die beim Auftrennen eines Körpers anfällt.

Die kinematischen Zwangsbedingungen werden analog zu (3.14) zu

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \text{ mit } \mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{r \times n} \quad (3.16)$$

aufgestellt.

3.4.3 Auftrennen der Schleife an einem Gelenkpaar

Hierbei werden die Schließbedingungen der kinematischen Schleife durch das Aufschneiden an zwei Gelenken aufgestellt. Dabei wird die Einzelschleife in zwei Teilsysteme zerlegt, deren Verbindung durch einfache Vektoroperationen, wie Skalarprodukte und Spatprodukte charakterisiert werden kann. Die generalisierten Koordinaten der getrennten Struktur beinhaltet das geschnittene Gelenkpaar nicht mehr. Die Methode des *charakteristischen Gelenkpaars* findet in [Schramm u. a., 2010] generelle Anwendung zur effizienten Aufstellung von Schließbedingungen. Entsprechend Bild 3.5 wird eine Mehrkörperschleife, bestehend aus Starrkörpern, die durch ein ideales Gelenk verbunden sind, vorausgesetzt. Dabei wird ein Körper durch einen Schnitt an den zwei Gelenken P und Q aus der Schleife entfernt. Der Ortsvektor ${}^P\mathbf{r}_{PQ}$

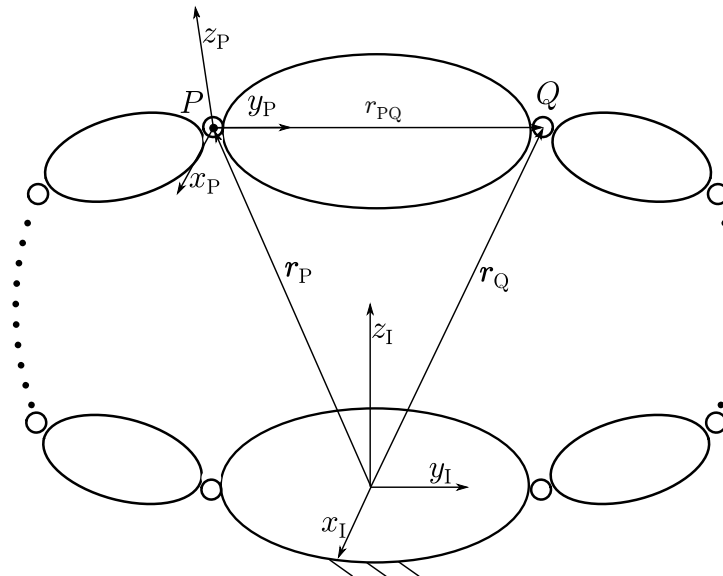


Abbildung 3.5: Auftrennen der geschlossenen kinematischen Kette an einem Gelenkpaar

beschreibt im körperfesten Koordinatensystem in P die relative Lage des zweiten Gelenks. Dieser Vektor kann auch im Inertialsystem durch $\mathbf{r}_{PQ} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$ beschrieben werden. Die Aufstellung der Schließbedingungen für eine Punkt zu Punkt Verbindung ergibt sich aus der Starrkörperbedingung

$$|{}_P\mathbf{r}_{PQ}| = |\mathbf{r}_{PQ}|. \quad (3.17)$$

Die daraus ableitbare skalare Zwangsgleichung ergibt sich durch das Skalarprodukt der Vektoren

$$|\mathbf{r}_{PQ}|^2 = \mathbf{r}_{PQ}^T \mathbf{r}_{PQ}. \quad (3.18)$$

Vorteile

- ⊕ Konstante Anzahl an Bindungsgleichungen
- ⊕ Keine Erzeugung von redundanten Bindungsgleichungen
- ⊕ Die Verwendung von skalaren Bindungsparametern macht die Schließbedingungen unabhängig von Koordinatensystemen [Hiller, 1994]
- ⊕ Für viele praktische Anwendungen erhält man vollständige und explizit auflösbare Schließbedingungen

Nachteile

- ⊖ Sehr hoher Initialisierungsaufwand für die Auffindung des Gelenkpaars und die Zusammenstellung der Bindungsparameter.

3.5 Kinematisches Modell einer parallelkinematischen Maschine

3.5.1 Konfigurationsraum

Die Konfiguration einer parallelkinematischen Maschine legt den kinematischen Aufbau einer PKM fest. Die Konfiguration wird durch den Vektor $\mathbf{q} \in \mathbb{V}^n$ festgelegt. Die Zwangsbedingungen des Systems schränken dessen Bewegungsmöglichkeiten ein und müssen für die Wirkung beliebiger Kräfte auf das System erfüllt sein [IFTtoMM, 2003]. Die Zwangsbedingungen werden durch die r geometrischen und kinematischen Gleichungen

$$\mathbf{0} = \mathbf{h}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{h}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^r \quad (3.19a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{r \times n} \quad (3.19b)$$

repräsentiert. Die Menge aller gültigen Konfigurationen, die durch die geometrischen Zwangsbedingungen (3.19a) definiert werden, beschreiben den sogenannten Konfigurationsraum des PKM:

$$\mathcal{V} := \{\mathbf{q} \in \mathbb{V}^n, \mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}\} . \quad (3.20)$$

Der Konfigurationsraum ist die Auffassung der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit \mathcal{V} , in der jeder Punkt $\mathbf{q} \in \mathbb{V}^n$ eine Konfiguration der Parallelkinematik ist [Grosche u. a., 2003]. Eine Bewegung auf \mathcal{V} wird durch

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t) \quad (3.21)$$

beschrieben. Die Dimension des Konfigurationsraums richtet sich nach dem Freiheitsgrad δ des PKM. Die zeitliche Ableitung der Bewegung (3.21) wird durch $\dot{\mathbf{q}}$ als verallgemeinerte Geschwindigkeit bezeichnet. Die Geschwindigkeit steht tangential zu \mathbf{q} und gehört somit zum Tangentialraum $T_{\mathbf{q}(t)}\mathcal{V} := \{\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{V}^n, \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}\}$ von \mathcal{V} . Per Definition wird $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ als Tangentialbündel $T\mathcal{V}$ bezeichnet.

Ein Konfigurationsraum kann nach der Terminologie von Müller [2008] in verschiedene Bereiche aufgeteilt werden.

Definition 3.5.1. Der Konfigurationsraum besteht aus Untervarietäten, den so genannten Aufbauarten des Manipulators. Eine Verbindung zwischen Untervarietäten ermöglicht dem Manipulator einen Wechsel zwischen zwei Aufbauarten, ohne dabei eine kinematische Schleife aufzutrennen. Die gültigen Konfigurationen auf den Untervarietäten beschreiben verschiedene Bewegungsarten eines Manipulators [Müller, 2008].

Beispiel 3.5.1 (Konfigurationsraum eines ebenen Gelenkfünfecks). Das ebene Gelenkfünfeck in Abbildung 3.6 kann als ebener Parallelmanipulator mit zwei Freiheitsgraden in der Ebene betrachtet werden. Die relativen Gelenkkordinaten zur kinematischen Beschreibung des Mechanismus $\mathbf{q} \in \mathbb{V}^n$ sind $\mathbf{q} = [q_{a_1} \ q_{a_2} \ q_{b_1} \ q_{b_2}]^T$.

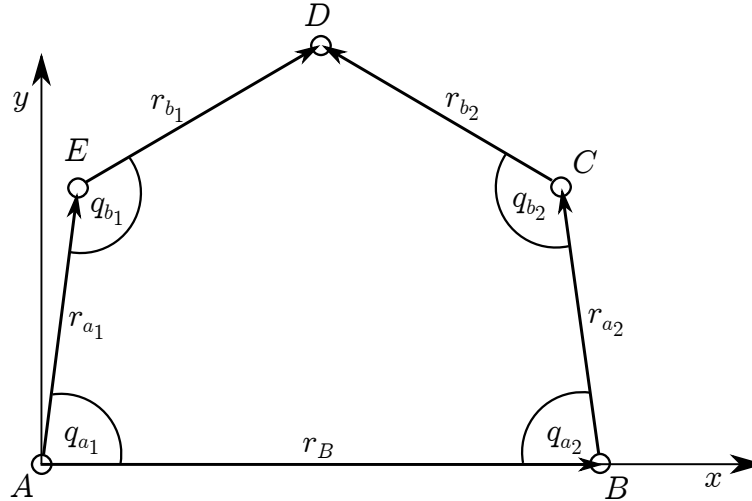


Abbildung 3.6: Ebenes Fünfgelenk

Als Systemeingänge werden die Gelenkkoordinaten $\mathbf{q}_a = [q_{a_1} \quad q_{a_2}]^T$ definiert. Der EE soll sich am Punkt D befinden. Für die Abmessungen des Mechanismus gilt $|\mathbf{r}_{a_i}| = L$, $|\mathbf{r}_{b_i}| = L$ mit $i = 1, 2$ und $|\mathbf{r}_B| = 2L$. Gesucht wird die Darstellung des dreidimensionalen Unterraums $q_{a_1} - q_{a_2} - q_{b_1}$ des Konfigurationsraums \mathcal{V} als implizite Funktion $h(q_{a_1}, q_{a_2}, q_{b_1}) = 0$.

Nach der Methode in Kapitel 3.4.3 wird der Mechanismus an dem Gelenkpaar CD geschnitten. Die Starrkörperbedingung $\mathbf{r}_{b_2}^T \mathbf{r}_{b_2} \equiv \text{konstant}$ führt zu der skalaren, impliziten Beziehung

$$h := [\mathbf{r}_{a_1} + \mathbf{r}_{b_1} - \mathbf{r}_{a_2} - \mathbf{r}_B]^2 - L^2 = 0. \quad (3.22)$$

Die graphische Darstellung der Lösungen von Gleichung (3.22) ergibt den gesuchten Konfigurationsraum in Abbildung 3.7.

3.5.2 Abbildung des Arbeitsraums

Der Arbeitsraum \mathcal{W} eines Manipulators umfasst alle Konfigurationen, die dessen Endeffektor-Pose \mathbf{X} annehmen kann. Eventuelle Hindernisse oder Restriktionen im Arbeitsraum können zusätzlich mit einer Einschränkung $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ berücksichtigt werden. Die Abbildung der Ausgänge $\mathbf{f}_W: \mathbb{V}^n \mapsto SE(3)$, die zu der PKM Konfiguration (EE-Pose) $\mathbf{X} = \mathbf{f}_W(\mathbf{q})$ führt, sowie die Restriktion in \mathbf{g} beschreiben den Arbeitsraum¹ eines PKM

$$\mathcal{W} := \{f_W(\mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in \mathcal{V}, \mathbf{g}(\mathbf{X}) > \mathbf{0}\} \quad (3.23)$$

Unter Vernachlässigung von Restriktionen wird der Arbeitsraum auch durch Singularitäten begrenzt oder gar geteilt. Die Singularitäten eines seriellkinematischen

¹Die mit SE bezeichnete EUCLIDische Gruppe beschreibt in der klassischen Mechanik die Bewegung eines starren Körpers.

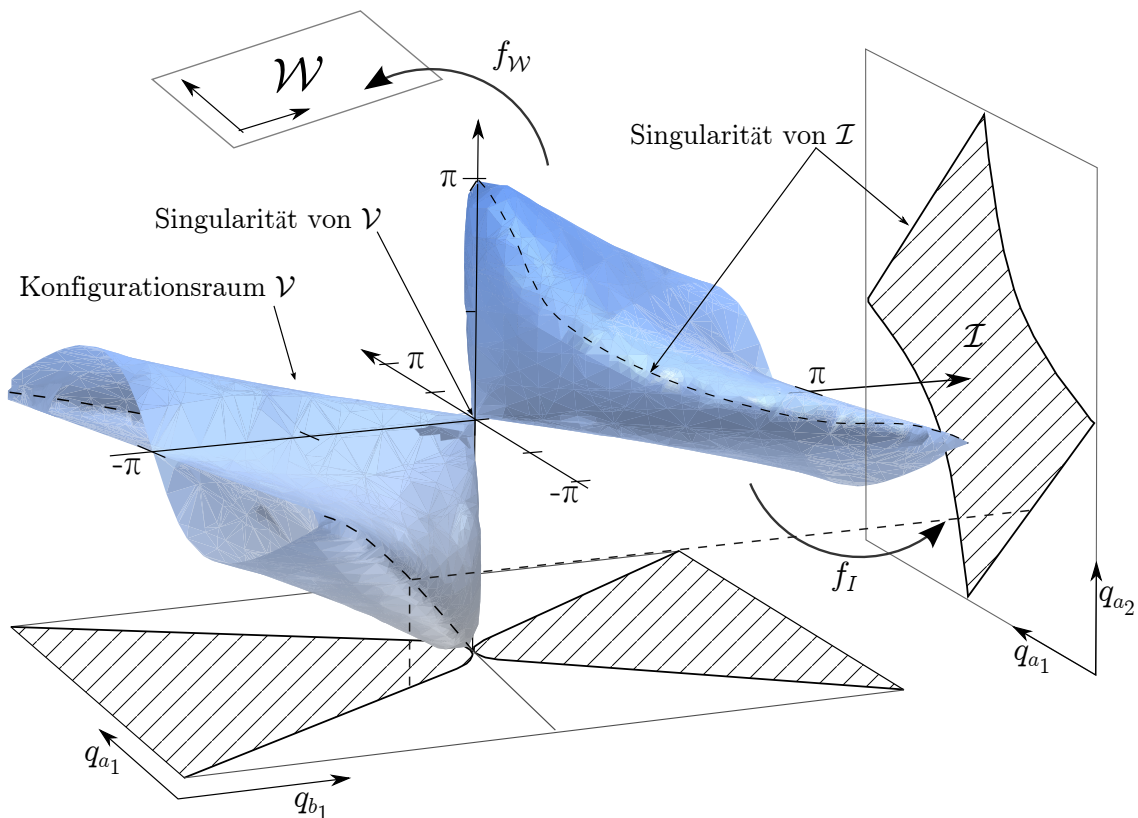


Abbildung 3.7: Konfigurationsraum des ebenen Fünfgelenks nach [Müller, 2008]

Manipulators (SKM) wird durch dessen Strecklagen definiert und umhüllt seinen Arbeitsraum. Bei PKM kann der Arbeitsraum, abhängig von kinematischer Struktur und Anordnung der Antriebe, mit Singularitäten durchzogen oder in Bereiche unterteilt sein.

Die Geschwindigkeit des EE wird durch die zeitliche Ableitung der Endeffektorpose

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}_{\mathcal{W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.24)$$

berechnet. Wobei $\mathbf{J}_{\mathcal{W}}$ die JACOBI-Matrix von $\mathbf{f}_{\mathcal{W}}$ bezüglich der natürlichen Gelenkkoordinaten \mathbf{q} ist [Müller, 2008].

3.5.3 Abbildung der Eingänge

Die Steuerung eines Manipulators erfolgt über Kraft- und Positionsquellen, die per Definition an m aktive Gelenke \mathbf{q}_a direkt gekoppelt oder über externe Koppelstangen oder Seile eingepreßt werden können. Die Zuweisung des Konfigurationsraums an die Antriebe wird mit der Abbildung $\mathbf{f}_{\mathcal{I}} : \mathbb{V}^n \mapsto \mathcal{I}$ beschrieben, wobei mit \mathcal{I} der Unterraum der aktiven Koordinaten des PKM bezeichnet wird. Mit der Funktion $\mathbf{q}_a = \mathbf{f}_{\mathcal{I}}(\mathbf{q})$ werden die aktiven Koordinaten \mathbf{q}_a von \mathbf{q} berechnet. Die zeitliche

Ableitung der aktiven Koordinaten führt zu der Beziehung

$$\dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{J}_{\mathcal{I}} \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.25)$$

wobei $\mathbf{J}_{\mathcal{I}}$ die JACOBI-Matrix von $\mathbf{f}_{\mathcal{I}}$ bezüglich der natürlichen Gelenkkordinaten ist. Für die weiteren Definitionen werden nur direkt angetriebene Gelenke betrachtet, wodurch die Projektionsmatrix $\mathbf{J}_{\mathcal{I}}$ nur die Elemente 1 und 0 aufweist. Mit der Unterscheidung in m aktive Koordinaten und $n - m$ passive Koordinaten \mathbf{q}_a und \mathbf{q}_p soll durch

$$\mathbf{0} = \mathbf{J}_a \dot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{J}_p \dot{\mathbf{q}}_p \quad (3.26)$$

mit $\mathbf{J}_a \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{J}_p \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$ eine Koordinaten-Partitionierung der Zwangsbedingungen (3.19) nach Antriebskoordinaten definiert werden. Das kinematische Modell eines PKM wird durch die Gleichungen (3.24), (3.25) und (3.26)

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{J}_{\mathcal{W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}_a &= \mathbf{J}_{\mathcal{I}} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{0} &= \mathbf{J}_a \dot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{J}_p \dot{\mathbf{q}}_p \end{aligned}} \quad (3.27)$$

vollständig beschrieben. Des Weiteren werden die Gleichungen (3.3) sowie (3.4) zu den Abbildungen der Eingänge und Ausgänge eingegliedert:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{f}_{\text{IKP}}} \\ \mathcal{W} \xleftarrow{\mathbf{f}_{\mathcal{W}}} \mathcal{V} \xrightarrow{\mathbf{f}_{\mathcal{I}}} \mathcal{I} \\ \xleftarrow{\mathbf{f}_{\text{DKP}}} \end{array}$$

Diese Interpretation des kinematischen Modells verdeutlicht die zentrale Stellung des Konfigurationsraums eines PKM.

3.6 Klassifizierung von Singularitäten

In den Arbeiten [Zlatanov u. a., 1994b] und [Zlatanov u. a., 1994a] werden Singularitäten als spezielle oder kritische Konfigurationen bezeichnet. In diesen Konfigurationen unterliegt ein Manipulator einer qualitativen Veränderung der kinematischen und statischen Eigenschaften, wie die Verringerung seiner Freiheitsgrade oder dem Verlust der Steuerbarkeit durch die Antriebe (aktive Gelenke). Klassische mathematische Beschreibungen der Singularitäten, wie zum Beispiel von Gosselin u. Angeles [1990] oder Tsai [1999], stützen sich auf eine Formulierung der geometrischen Zwangsbedingungen, die nur Antriebskoordinaten und Endeffektorkoordinaten enthält. Die für die Definitionen erforderlichen JACOBI-Matrizen ergeben sich aus den zeitlichen Ableitungen der direkten und inversen Kinematik des Mechanismus zu

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}_{\text{DKP}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_a, \quad \dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{J}_{\text{IKP}} \cdot \mathbf{V}. \quad (3.28)$$

Die Übertragungsfunktionen (3.28) ermöglichen die im Folgenden formulierten klassischen Definitionen der Singularitäten vom Typ I und Typ II.

Definition 3.6.1. Die Konfiguration $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$ wird als Typ I Singularität bezeichnet, wenn der Rang von \mathbf{J}_{DKP} , während einer Bewegung von \mathbf{q} auf \mathcal{V} , nicht konstant ist. Des Weiteren wird diese Singularität auch als serielle Singularität bezeichnet, da diese in der Strecklage eines SKM auftritt.

Definition 3.6.2. Die Konfiguration $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$ wird als Typ II Singularität bezeichnet, wenn \mathbf{J}_{IKP} während einer Bewegung von \mathbf{q} auf \mathcal{V} keinen vollen Rang hat. Diese Singularität wird auch als Parallel- oder Kraftsingularität bezeichnet.

Die Singularität vom Typ II kann eine Konfiguration im Arbeitsraum betreffen, die ein Manipulator nicht durch seine Antriebe verlassen kann. Demnach kommt die Typ II Singularität nur bei PKM vor. Die Typenklassifizierung beschränkt sich nur auf das Übertragungsverhalten eines PKM und vernachlässigt die inneren Zustände des kinematischen Modells.

Parallelroboter mit Antriebsredundanz sind ohne Zweifel in der Lage Singularitäten zu durchfahren. Die Basis dieser Eigenschaft setzt allerdings eine ganzheitliche Betrachtung der kritischen Konfigurationen voraus. Generell lassen sich Singularitäten in die drei Untergruppen Eingangs- Ausgangs- und Konfigurationsraumsingularitäten unterscheiden.

3.6.1 Singularitäten des Konfigurationsraums

Der Konfigurationsraum beschreibt eine δ -dimensionale, stetige Mannigfaltigkeit im n -dimensionalen Gelenkraum \mathbb{V}^n . Jede Unstetigkeit des Konfigurationsraums wird als Konfigurationsraumsingularität bezeichnet.

Definition 3.6.3. Die Konfiguration $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$ wird als Konfigurationsraumsingularität bezeichnet, wenn \mathbf{J} während einer Bewegung von \mathbf{q} auf \mathcal{V} seinen Rang ändert [Zlatanov u. a., 2002].

Beispiel 3.6.1 (Singularität des Konfigurationsraums eines Gelenkfünfecks). In Abbildung 3.8 wird die Degenerierung des Fünfgelenks aus Abbildung 3.6 in eine Konfigurationsraumsingularität gezeigt. Die Zwangsbedingungen dieses Mechanismus definieren zwei gültige Möglichkeiten des Zusammenbaus (Aufbauarten), die im Konfigurationsraum in Abbildung 3.7 durch zwei Bereiche gekennzeichnet sind. Aufgrund der Abmessungen der Arme und des Abstands der aktiven Gelenke q_{a_1} und q_{a_2} zueinander kann der Mechanismus beide Aufbauarten durch die Konfigurationsraumsingularität erreichen [Müller, 2002], [Müller, 2008].

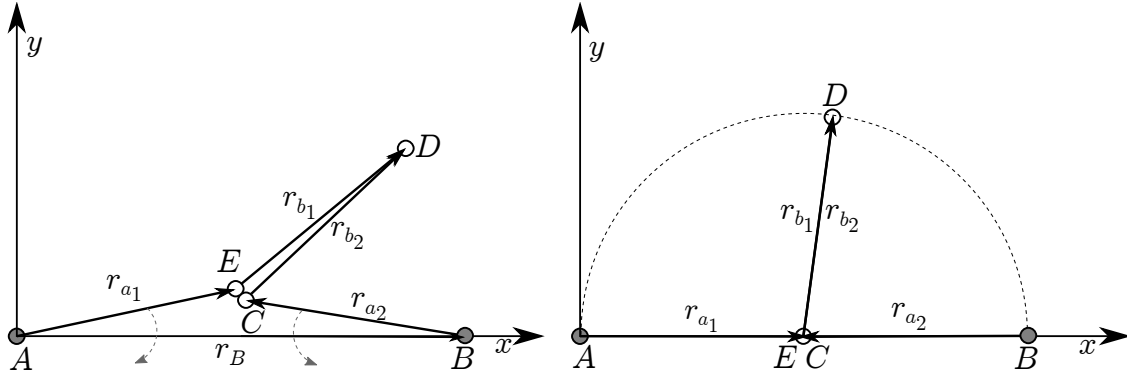


Abbildung 3.8: Degenerierung in eine Konfigurationsraumsingularität

3.6.2 Singularitäten des Eingangsraums

Die Freiheitsgrade des EE werden durch die Antriebe des Manipulators unabhängig voneinander gesteuert. Der Verlust dieser Steuerbarkeit durch die Eingänge soll als Eingangssingularität bezeichnet werden. Eine Definition erfolgt durch Gleichung (3.26).

Definition 3.6.4. Die Konfiguration $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$ wird als passive oder aktive Eingangssingularität bezeichnet, wenn der Rang von \mathbf{J}_p oder \mathbf{J}_a während einer Bewegung von \mathbf{q} auf \mathcal{V} nicht konstant ist [Zlatanov u. a., 2002].

Da $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p^T & \mathbf{J}_a^T \end{bmatrix}^T$, ist jede Singularität des Konfigurationsraums zwangsläufig auch eine Eingangssingularität.

Definition 3.6.5. Konfigurationen, die keine Eingangssingularität darstellen, beschreiben die so genannten Antriebsarten des Manipulators.

Beispiel 3.6.2 (Eingangssingularität eines Gelenkfünfecks). Die Eingangssingularität des Fünfgelenks in Abbildung 3.6 tritt immer dann auf, wenn sich die passiven Arme, dargestellt durch die Vektoren \mathbf{r}_{b_1} und \mathbf{r}_{b_2} , in einer Strecklage befinden. Der EE beschreibt in diesen Zuständen die Koppelkurven eines Viergelenks, wie in Abbildung 3.9 angedeutet wird. Der Eingangsraum \mathcal{I} des Fünfgelenks wird durch die Projektion des Konfigurationsraums in Abbildung 3.7 auf die Antriebskoordinaten $q_{a_1} - q_{a_2}$ definiert.

Die Ränder der Projektion beschreiben die Eingangssingularität des PKM, in der die Bewegung des PKM nicht mehr durch die Bewegung der Antriebe beschrieben werden kann. Das Verlassen einer kritischen Konfiguration gelingt intuitiv mithilfe zusätzlicher aktiver Steuerketten zwischen EE und Gestell, wie in Bild 3.10 durch die Kette an A' , E' angedeutet. Auf Konfigurationsraumebene bedeutet die redundante Aktorik eine Erweiterung des Eingangsraums ohne eine Erhöhung der Dimension des Konfigurationsraums. Dadurch können jederzeit andere Parameter zur Beschreibung der Bewegung des PKM aus den Antriebskoordinaten gewählt werden.

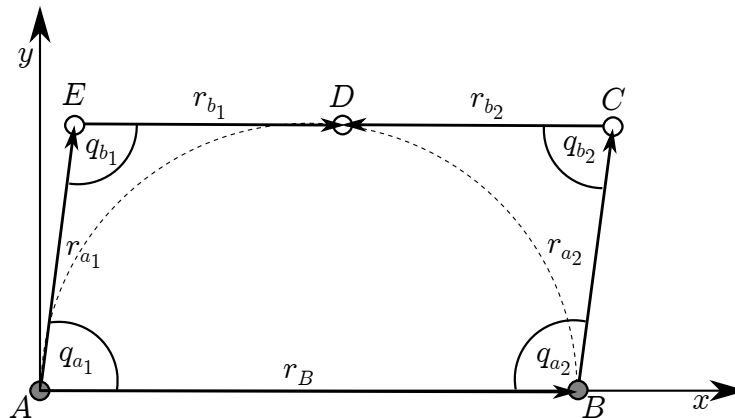


Abbildung 3.9: Singularität des Eingangsraums eines Fünfgelenks

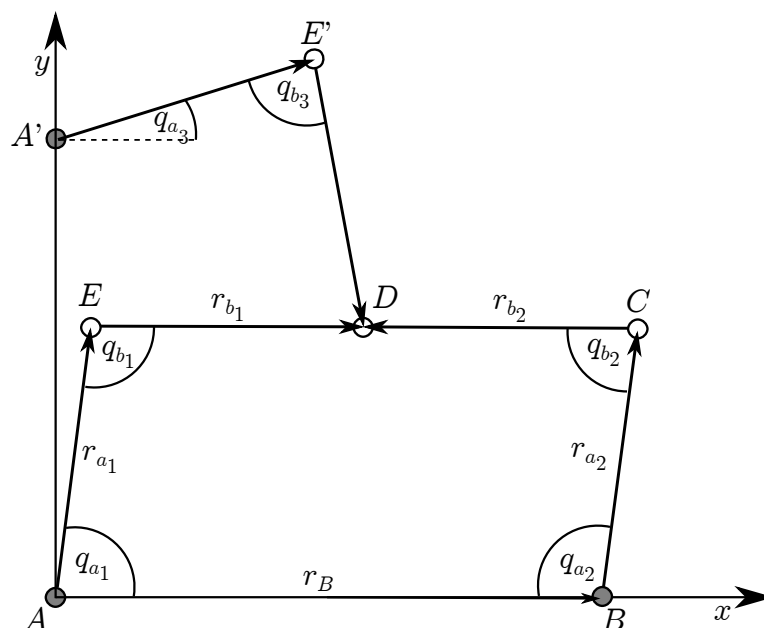


Abbildung 3.10: Antriebsredundanz zur Bewältigung einer Kraftsingularität

3.6.3 Singularitäten des Ausgangs

Als Ausgangssingularitäten werden diejenigen kritischen Konfigurationen bezeichnet in denen das Ausgangsabbild durch \mathbf{J}_W nicht möglich, beziehungsweise die Anzahl an unabhängigen Bewegungen des EE nicht konstant ist [Müller, 2008]. Dies betrifft auch die kritischen Situationen, in denen der PKM seine Aufbauart verlässt, um einen so genannten *Assembly-change* durchzuführen.

Beispiel 3.6.3 (Ausgangssingularität eines Gelenkfünfecks). In Abbildung 3.11 wird die Singularität des Ausgangs exemplarisch für das Fünfgelenk gezeigt.

Per Definition können Ausgangssingularitäten auftreten, ohne dass sich der PKM selbst in einer kritischen Konfiguration befindet.

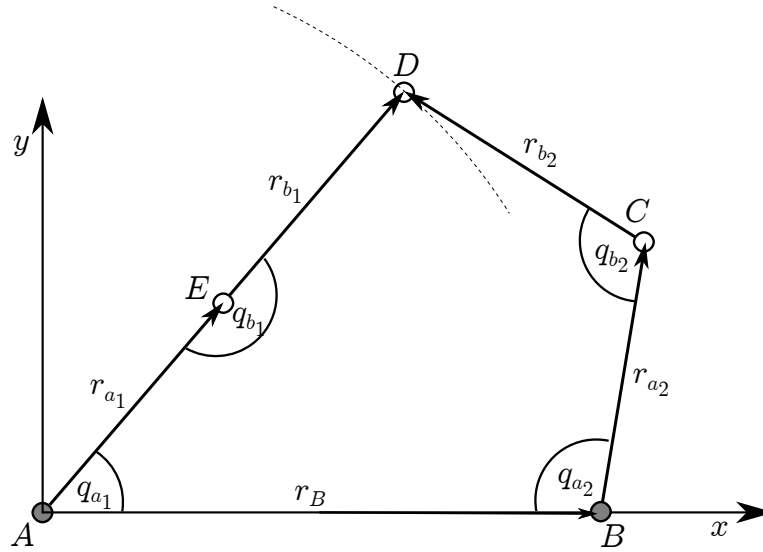


Abbildung 3.11: Ausgangssingularität eines Assembly-changes

Definition 3.6.6. Die Konfiguration $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$ wird als Ausgangssingularität bezeichnet, wenn der Rang von $\mathbf{J}_{\mathcal{W}}$ während einer Bewegung von \mathbf{q} auf \mathcal{V} nicht konstant ist [Zlatanov u. a., 2002]. Konfigurationen, die weder Eingangs- noch Ausgangssingularitäten sind, beschreiben die so genannten Bewegungsarten eines Manipulators [Müller, 2008].

3.7 Relativkinematik und topologische Aufbereitung der Zwangsbedingungen

3.7.1 Relativkinematik

Die partitionierten Zwangsbedingungen (3.26) bilden den eigentlichen Kern des kinematischen Modells. Durch diese Beziehungen werden die Bewegungen der abhängigen Gelenkkoordinaten eines Manipulators durch die Antriebskoordinaten ausgedrückt. Bei vollaktuierten PKM ist dies gleichbedeutend mit der Parametrierung in Minimalkoordinaten, da der Manipulator dann per Definition gleich viele Antriebe wie Freiheitsgrade besitzt [Neugebauer, 2005]. Bei redundant angetriebenen Manipulatoren ist die Wahl von verallgemeinerten und abhängigen Koordinaten aus den systembeschreibenden Koordinaten gestattet. Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten spielen aufgrund ihrer numerischen Komplexität für die Regelung eine sehr wichtige Rolle. Werden mit \mathbf{q}_2 die δ unabhängigen und mit \mathbf{q}_1 die $n - \delta$ abhängigen Gelenkkoordinaten bezeichnet, können die Zwangsbedingungen (3.19) in der Form

$$\mathbf{0} = \mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{J}_2 \dot{\mathbf{q}}_2, \quad (3.29)$$

mit den JACOBI-Matrizen $\mathbf{J}_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ für die abhängigen Koordinaten und $\mathbf{J}_2 \in \mathbb{R}^{r \times \delta}$ für die unabhängigen Koordinaten, partitioniert werden. Außerhalb von Singularitäten ist \mathbf{J}_1 stets invertierbar, wodurch die abhängigen Koordinaten auf Kinematikenebene durch die lokale Beziehung

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = -\mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{J}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 \quad (3.30)$$

ausgedrückt werden können. Zur Lösung der Zwangsbedingungen auf der Bewegungsebene kann (3.30) in eine Differenzgleichung überführt und iterativ gelöst werden. Ein anderer Weg ist die explizite Lösung durch die Generierung eines impliziten Gleichungssystems, das als Relativkinematik bezeichnet wird. Dieses System erfordert ein systematisches Aufstellen der Zwangsbedingungen sowie einen gerichteten Lösungsfluss, der eine Dreiecksstruktur im Gleichungssystem der Zwangsbedingungen erzielt [Schramm u. a., 2010].

3.7.2 Topologische Aufbereitung mehrschleifiger Mechanismen

Antriebsredundante Strukturen werden oft durch eine kinematische Erweiterung erzeugt. Dies bedeutet in der Praxis, dass zunächst ein vollaktuierter Parallelmanipulator zugrunde gelegt wird. Dieser Struktur werden zusätzliche aktive kinematische Ketten vom EE an das Gestell angebunden. Eine symmetrische Anordnung der Zusatzketten erzielt zumeist ein ‘‘Auswuchten‘‘ der gesamten Maschine, wie von van der Wijk u. a. [2011] demonstriert wird. In [Schramm u. a., 2010] wird eine solche Anordnung der kinematischen Ketten auch als Steuerstruktur bezeichnet.

Zur Bestimmung eines kinematischen Netzwerks werden zwei Arten von Elementen definiert:

Fundamentalschleifen: Diese beschreiben die in der Regel nichtlinearen Beziehungen zwischen den Gelenkwinkeln in einer Einzelschleife, die als so genannte kinematische Transformatoren beschrieben werden. Dabei wird jede der n_L Fundamentalschleifen durch einen Transformator beschrieben. Bei der Parametrierung in Minimalkoordinaten werden die Potentiale der abhängigen Gelenkwinkel (Ausgänge) aus den Potentialen der unabhängigen Eingangsgrößen (Eingänge) berechnet. Die Anzahl der Eingänge eines jeden Transformators wird durch die Anzahl der Freiheitsgrade der jeweiligen Schleife festgelegt. Die Anzahl der Ausgänge beträgt drei für ebene und sechs für räumliche kinematische Schleifen.

Lineare Koppelbedingungen: Sie beschreiben die lineare Verschaltung zwischen den einzelnen kinematischen Transformatoren, beziehungsweise den kinematischen Einzelschleifen eines mehrschleifigen Mechanismus.

Beispiel 3.7.1 (Kinematisches Netzwerk eines ausbalancierten PKM). Zur Anwendung der kinematischen Netzwerke wird ein statisch ausbalancierter 2DOF Parallelmanipulator in Abbildung 3.12 [van der Wijk u. a., 2011] als kinematisches Netzwerk

dargestellt. Der ebene Mechanismus besitzt $n_B = 8$ Körper und unter Berücksichtigung eines dreifachen Drehgelenks am EE $n_G = 11$ Gelenke. Der Mechanismus kann

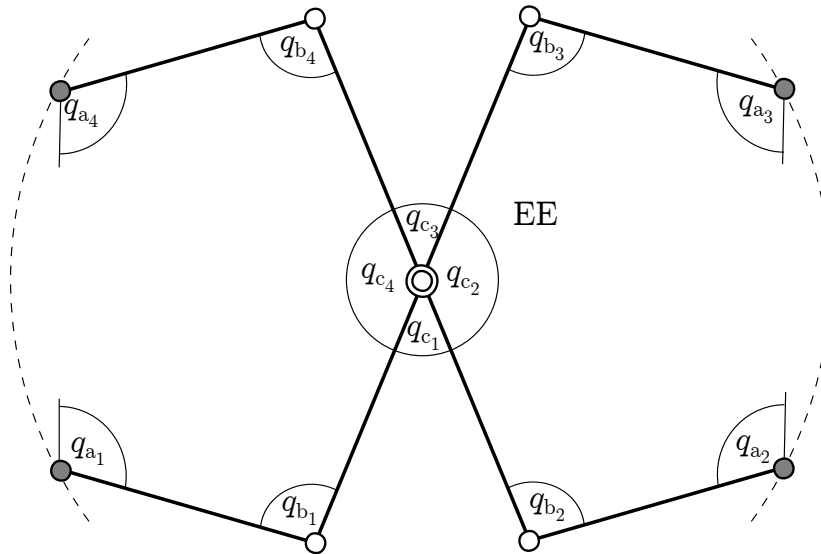


Abbildung 3.12: Mehrschleifiger Mechanismus mit Antriebsredundanz

laut Kecskemethy u. Hiller [1993] als „kinematisch abbrechbar“ bezeichnet werden. Diese Eigenschaft zeichnet sich dadurch aus, dass sämtliche abhängigen Gelenkkoordinaten durch δ Eingänge, entsprechend dem Systemfreiheitsgrad, beschrieben werden können. Die effektive Aufstellung eines Gleichungssystems $\mathbf{h}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ erfolgt durch die Wahl von charakteristischen Paarungen, wie im Kapitel 3.4.3 und detailliert in [Schramm u. a., 2010] beschrieben wird.

Für den vorliegenden Fall lassen sich verschiedene kinematische Netzwerke mit unterschiedlichen Lösungsflüssen aufstellen. Eine mögliche Parametrierung des Mechanismus mit den Eingängen $\mathbf{q}_2 = [q_{a_1}, q_{a_2}]^T$ ist eine Kette von kinematischen Übertragungsgliedern in Abbildung 3.13. Die topologische Interpretation führt zu einem gerichteten Lösungsfluss, wobei sich die letzte fehlende Größe q_{c_4} aus Winkelsummen ermitteln lässt.

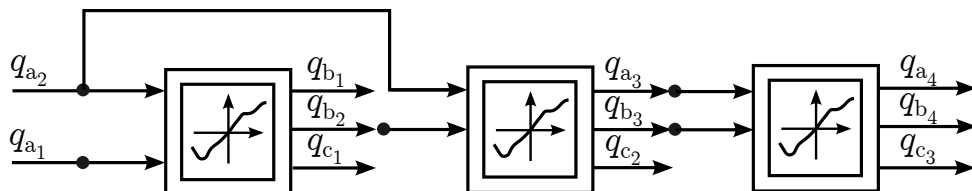


Abbildung 3.13: Kinematisches Netzwerk in Reihenstruktur

Die Struktur des Gleichungssystems

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{H}\mathbf{q}_2 \quad (3.31)$$

besteht aus einem explizit lösbaren Teil, der die Eingänge durch die nichtsinguläre Permutationsmatrix \mathbf{H} , die je Spalte ein Element „1“ und sonst nur „0“ aufweist, auf die Minimalkoordinaten \mathbf{q}_2 abbildet.

Bei Mechanismen, die „kinematisch nicht abbrechbar“ sind, haben einzelne kinematische Schleifen mehr Freiheitsgrade als zur Verfügung stehende Minimalkoordinaten. Um das kinematische Netzwerk aufzustellen, werden zusätzliche Gelenkkoordinaten durch numerische Verfahren aufgelöst, um den expliziten Teil des Gleichungssystems (3.31) zu erweitern.

Werden die verfügbaren Messsysteme bei antriebsredundanten Mechanismen in (3.31) berücksichtigt, so kann die Relativkinematik erheblich vereinfacht werden. Bei dem Manipulator des vorliegenden Beispiels sollen nun die Messsysteme aller Aktoren zur kinematischen Parametrierung mitberücksichtigt werden.

Daraus lässt sich die Transformatorenkette in Abbildung 3.13 vollständig entkoppeln und zu dem parallelen Transformatorenring in Abbildung 3.14 umformen. Die Sensoren der redundanten Antriebe ermöglichen die Ermittlung aller fehlenden Größen, wobei sich die Größe q_{c4} aus den Winkelsummen ermitteln lässt.

Anmerkung 3.7.1. In dieser Arbeit werden die Eingänge der kinematischen Transformatoren immer direkt auf die Minimalkoordinaten \mathbf{q}_2 abgebildet. Die Parametrierung in Minimalkoordinaten und somit Wahl der Elemente in \mathbf{h} , ist nur lokal auf \mathcal{V} gültig und „anfällig“ gegenüber Singularitäten des Eingangsraums, siehe Abschnitt (3.6.2).

Diese Interpretation erweitert die Netzwerke von mehrschleifigen Mechanismen in [Schramm u. a., 2010], [KecsKemethy u. Hiller, 1993] um die Gruppe der Parallelmanipulatoren mit Antriebsredundanz.

3.7.3 Kinematische Netzwerke und Singularitäten

Bisher wurde die topologische Darstellung von RA-PKM mithilfe der kinematischen Transformatoren ohne Singularitäten behandelt. Singularitäten können als Definitionslücken der nichtlinearen Gleichungssysteme innerhalb kinematischer Transformatoren aufgefasst werden. Die Parametrierung aller abhängigen Koordinaten mit Minimalkoordinaten ist bei RA-PKM nur lokal auf dem Konfigurationsraum gültig. RA-PKM sind physikalisch in der Lage, die Eingangssingularitäten der PKM-Unterstrukturen zu durchfahren, jedoch treten an diesen Stellen so genannte (numerische) *Parametersingularitäten* auf.

Nach Definition 3.3.1 (prinzipielle Messbarkeit) sind die Minimalkoordinaten aus den Antriebskoordinaten zu wählen, um deren Messung zu gewährleisten. Aus den vorangegangenen Überlegungen kann eine Antriebsredundanz dazu genutzt werden,

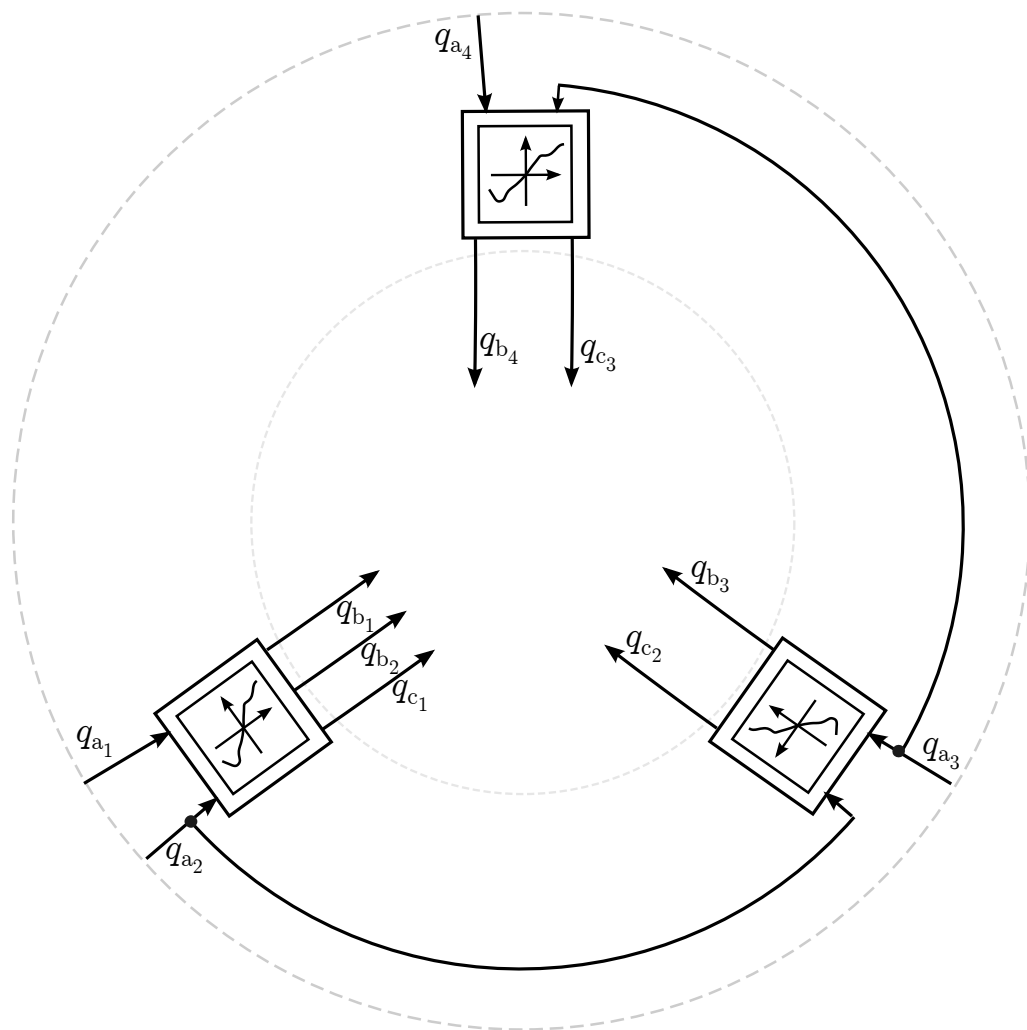


Abbildung 3.14: Entkoppeltes kinematisches Netzwerk in paralleler Ringstruktur

um *Parametersingularitäten* zu umgehen. In diesem Fall ermöglichen zusätzliche Antriebe die Wahl neuer Minimalkoordinaten aus anderen aktiven Koordinaten, ohne Definition 3.3.1 zu verletzen. Somit kann die Konfiguration eines Mechanismus in jeder Lage durch eine geschickte Wahl von Minimalkoordinaten ermittelt werden.

Das Vorgehen wird anhand von Beispiel 3.7.1 weiter erläutert.

Beispiel 3.7.2 (Kinematisches Netzwerk des PKM aus Abbildung 3.12 unter Berücksichtigung von Singularitäten). Der RA-PKM in Abbildung 3.12 sei mit $m = 4$ Antrieben ausgestattet, wobei die aktiven Gelenkkoordinaten mit $q_{a_i}, i = 1 \dots 4$ bezeichnet werden. Mithilfe der Relativkinematik werden alle abhängigen Koordinaten aus zwei Minimalkoordinaten gemäß der Freiheitsgrade des Manipulators berechnet. In Abbildung 3.15 werden zwei Möglichkeiten zur Berechnung von q_{b_1} gezeigt, die jeweils verschiedenen Eingangssingularitäten unterliegen. Die Berechnung von q_{b_1} kann aus q_{a_1}, q_{a_4} oder q_{a_1}, q_{a_2} erfolgen, wobei jeder kinematische Transformator auf einem anderen Teil des Arbeitsraums gültig ist. Die Eingangssingularitäten der jeweiligen PKM-Unterstrukturen werden in den kinematischen Transformatoren

exemplarisch als Definitionslücken dargestellt. Die Bewertung beider kinematischer

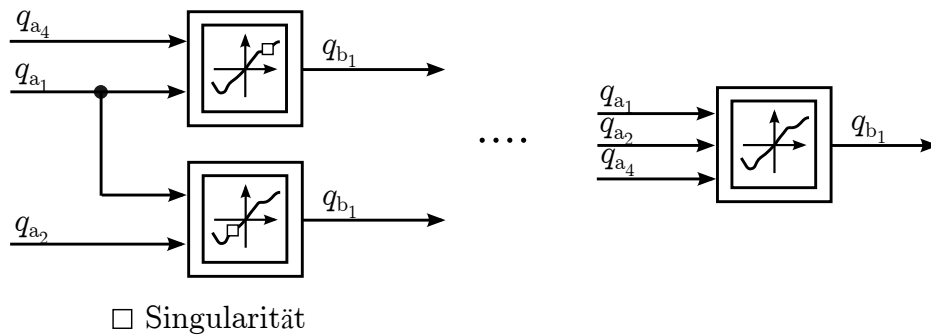


Abbildung 3.15: Möglichkeit zur Behandlung von Singularitäten unter Berücksichtigung der Antriebsredundanz

Transformatoren ermöglicht es q_{b_1} innerhalb des Arbeitsraums zu berechnen. Eine weitere Anwendung wird in Beispiel 4.3.2 gezeigt. In Kapitel 6.4.4 wird ein Verfahren zur dynamischen Umschaltung von Minimalkoordinaten gezeigt.

4 Dynamik redundant angetriebener Parallelkinematiken

Dieses Kapitel beschreibt die Herleitung von Bewegungsgleichungen für Parallelmanipulatoren mit Antriebsredundanz. Wird die Redundanz mithilfe zusätzlicher Führungsketten realisiert, entstehen dabei zwangsläufig kinematisch mehrschleifige Mechanismen. Im Abschnitt 4.1 werden verschiedene Prinzipien der dynamischen Modellbildung gegenübergestellt. Ausgangspunkt für das dynamische Modell eines Parallelmanipulators ist die so genannte Baumstruktur, die in Abschnitt 4.2 vorgestellt wird. In den Abschnitten 4.3 bis 4.6 werden die Modelle für alle sinnvollen Koordinatenformulierungen hergeleitet. Abschnitt 4.8 behandelt die Berücksichtigung von Reibungsphänomenen in Mehrkörpermodellen.

4.1 Methoden zur Aufstellung dynamischer Gleichungen

Die Kinematik von Mehrkörpersystemen beschäftigt sich mit der Bewegung von Körpern, die über ideale Gelenke miteinander gekoppelt sind. Dabei werden keine Kräfte betrachtet. Die Effekte von Massenträgheit und externen Kräften sowie die daraus resultierenden Bewegungen eines Mehrkörpersystems werden in der analytischen Dynamik durch Bewegungsgleichungen beschrieben. In gebundenen Systemen treten zudem Reaktionskräfte und -momente auf, die auf die Bewegung keinen unmittelbaren Einfluss haben [Schiehlen u. Eberhard, 2004]. Es bietet sich an, diese zumeist unbekanntes Kräfte und Momente in den Bewegungsgleichungen mithilfe geeigneter Prinzipien der Mechanik zu eliminieren.

Für die Aufstellung von Bewegungsgleichungen werden die wichtigsten Prinzipien der klassischen Mechanik erläutert. Das wichtigste Instrument zur Analyse von Mehrkörpersystemen ist das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Es ist eine spezielle Betrachtung, bei der das Mehrkörpersystem in einen stationären Zustand überführt wird, der infinitesimale Verschiebungen die mit den Zwangsbedingungen konform sind, zulässt [de Jalón u. Bayo, 1994, S. 121]. Das daraus abgeleitete Prinzip der virtuellen Arbeit dient als Grundlage der Prinzipien von d'ALEMBERT beziehungsweise der virtuellen Leistung beim Prinzip von JOURDAIN.

Aus dem d'ALEMBERTschen Prinzip lassen sich beispielsweise die Formalismen der LAGRANGESchen Gleichungen erster und zweiter Art ableiten [Schiehlen u. Eberhard, 2004]. Neben diesen Formalismen eignen sich auch die NEWTON-EULERSchen Gleichungen mit der Anwendung des d'ALEMBERTschen Prinzips sehr gut für die

Modellbildung von seriellkinematischen Systemen [Schramm u. a., 2010], [Pfeiffer, 1997].

Die Kinematik der mehrschleifigen Mechanismen zeichnet sich vor allem dadurch aus, dass den unabhängigen Gelenkkoordinaten oft eine Vielzahl abhängiger Koordinaten gegenüberstehen, deren Parametrierung durch die Zwangsbedingungen erfolgt. Bei Formalismen für seriellkinematische Systeme wird zur Berechnung der JACOBI-Matrizen die Relativkinematik bis hin zur zweiten zeitlichen Ableitung in die absolute Kinematik eingesetzt, wodurch schon bei sehr einfachen Mechanismen analytisch komplexe Gleichungen entstehen. Es gilt eine Möglichkeit zu finden, die Zwangsbedingungen in einen Formalismus zur Generierung von Bewegungsgleichungen einzupflegen. Die allgemeine Anwendbarkeit für verschiedenste Mechanismen sowie ein geringer Initialisierungsgrad des Formalismus sind Eigenschaften, die dann auch ein computergestütztes Aufstellen der Gleichungen ermöglichen.

Generell lassen sich die Methoden zur Generierung von Bewegungsgleichungen mehrschleifiger Mechanismen und damit auch redundant angetriebene Parallelmanipulatoren in zwei Gruppen einteilen.

Natürliche Einbindung der Zwangsbedingungen

In [Schramm u. a., 2010] wird zunächst eine Aufbereitung der Kinematik des Systems angestrebt. Mithilfe kinematischer Übertragungsglieder (*Kinematische Transformatoren*) wird die Topologie des Systems aufgestellt, die zur Beschreibung der Relativkinematik als ein implizites Gleichungssystem herangezogen wird. Zusammen mit den Beziehungen der Absolutkinematik erhält man eine globale Kinematik des Mechanismus. Die Problematik besteht nun in der Einbindung dieser kinematischen Beziehungen, die sich aus den Zwangsbedingungen ergeben, in die Bewegungsgleichungen. Hiller [1994] beschreibt für dieses Problem eine spezielle Lösungsmöglichkeit, die das Bereitstellen der Absolutkinematik ohne analytische Ableitungen ermöglicht. Die Ableitungen werden dabei vielmehr auf kinematische Weise erzeugt, indem sogenannte dimensionslose (elementare) Pseudo-Geschwindigkeiten der Minimalkoordinaten eingeführt werden. Diese werden dazu benutzt, um bei vorgegebenen Absolutgeschwindigkeiten alle Elemente der JACOBI-Matrizen in den Bewegungsgleichungen zu ermitteln. Diese Operationen werden als *erste kinematische Differentiale* bezeichnet [Hiller, 1994], [Schramm u. a., 2010]. Mit der Einführung von elementaren Pseudo-Beschleunigungen können die Absolutbeschleunigungen aller Körper unmittelbar berechnet werden [Hiller, 1994], [Schramm u. a., 2010]. Diese Operationen werden als *kinematischen Differentiale der zweiten Art* bezeichnet. Mithilfe der vollständigen globalen Kinematik lassen sich die Bewegungsgleichungen (in Minimalkoordinaten) ermitteln [Schramm u. a., 2010].

Mithilfe der direkten und inversen Kinematik können sämtliche natürliche Gelenkkoordinaten, zur Aufstellung eines dynamischen Modells in Endeffektorkoordinaten, bestimmt werden. Eine ausführliche Herleitung der Kinematik und Dynamik in EE-Koordinaten des RA-PKM *PARMA* wird von Kock [2001] beschrieben.

Berücksichtigung als Zwangskräfte

Hierbei werden die Schleifen des Mechanismus durch je einen gedanklichen Schnitt aufgetrennt, um dessen Baumstruktur zu erhalten. Die Zwangsbedingungen werden als quasi-äußere Kräfte nachträglich berücksichtigt, um die Dynamik des gebundenen Systems zu beschreiben [Blajer u. a., 1994], [Nikravesh, 2007]. Auf dieser Basis lassen sich generelle Methoden zur Beschreibung von Bewegungsgleichungen von mehrschleifigen Systemen ableiten. Mehrkörpersysteme mit zusätzlichen Bindungen werden auch als „Constraint Mechanical Systems“ (CMS) bezeichnet. Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen werden in der Regel die LAGRANGE-Gleichungen erster Art mit Zwangskräften verwendet.

Definition 4.1.1. Ein skleronomes MKS in Baumstruktur, welches zusätzlichen Zwangsbedingungen (3.19) unterliegt, wird als skleronomes CMS bezeichnet. Der Freiheitsgrad des CMS wird durch $\delta := n - r$ berechnet.

In dieser Arbeit werden die Bewegungsgleichungen einer Baumstruktur mit Zwangskräften in den Konfigurationsraum des gebundenen Systems projiziert. Die daraus resultierenden Bewegungsgleichungen enthalten keine Zwangskräfte mehr. Diese Methodik ist eine Abwandlung der Gleichungen von MAGGI [Juschkov, 1996], [Giergiel u. Zylski, 2005], [Blajer, 1997], die auf die Arbeiten von [Woronetz, 1910] zurückgehen.

4.2 Dynamisches Modell einer Baumstruktur

Die Baumstruktur eines mehrschleifigen Mechanismus entsteht wie in Kapitel 3.2.2 beschrieben, durch das gedankliche Aufschneiden der Fundamentalschleifen. Für die Projektion der Bewegungsgleichungen ist es notwendig, dass die Baumstruktur alle Körper der gebundenen Struktur enthält. Es darf also kein Körper durch den Schnitt eines Gelenkpaars entnommen werden. Daher ist es naheliegend, jede Fundamentalschleife an einem Gelenk zu aufzutrennen.

Beispiel 4.2.1 (Baumstruktur eines RA-PKM). Das Vorgehen wird am Beispiel des Prototyps in Abbildung 2.2 beschrieben. Dieser besteht aus $n_B = 6$ Körpern sowie $n_G = 8$ Drehgelenken, wobei sich die aktiv angetriebenen Gelenke an den Punkten $A_i, i = 1 \dots 3$ befinden und mit der Koordinatendarstellung

$$\mathbf{q}_a = [q_{a1} \quad q_{a2} \quad q_{a3}]^T \quad (4.1)$$

beschrieben werden. Die passiven Gelenke befinden sich an den Punkten $B_i, i = 1 \dots 3$ und werden mit der Koordinatendarstellung

$$\mathbf{q}_p = [q_{b1} \quad q_{b2} \quad q_{b3}]^T \quad (4.2)$$

beschrieben. Die Differenz aus Gelenken und Körpern ergibt für den Prototyp $n_L =$

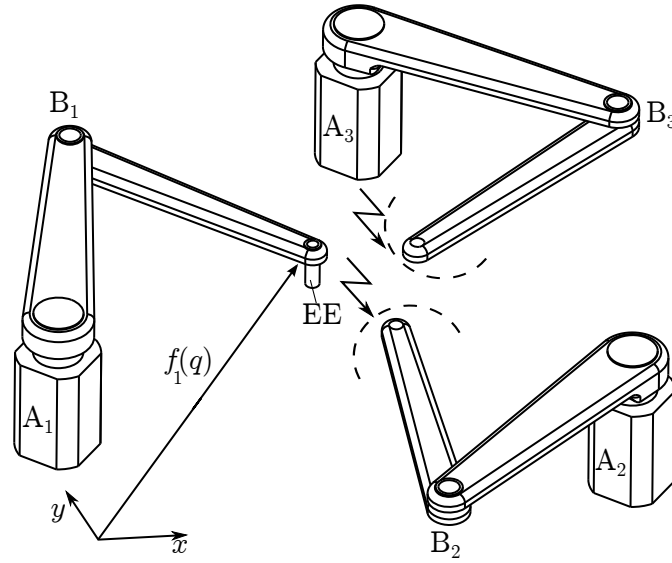


Abbildung 4.1: Baumstruktur des Prototyps und Zuordnung des EE an eine Führungskette

$n_G - n_B = 2$ unabhängige Fundamentalschleifen. Wird das doppelwertige Drehgelenk am EE entfernt, zerfällt das gebundene System in die Baumstruktur (Abbildung 4.1) mit $n = 6$ generalisierten Koordinaten, die durch die Koordinatendarstellung des Zustandsvektors

$$\mathbf{q} = [q_{b_1} \quad q_{b_2} \quad q_{b_3} \quad q_{a_1} \quad q_{a_2} \quad q_{a_3}]^T \quad (4.3)$$

beschrieben werden. Für die Aufstellung geometrischer Zwangsbedingungen, werden durch $\mathbf{f}_i(\mathbf{q}, \phi)$, $i = 1 \dots m$ die Ortsvektoren der Schnittgelenke eingeführt. Der EE wird bei dieser Baumstruktur als Bestandteil einer Führungskette zugeordnet

Die Bewegungsgleichungen einer durch die Anregungsfunktionen \mathbf{u} direkt gesteuerten Baumstruktur können mithilfe der NEWTON-EULERSchen Gleichungen in der minimalen Form

$$\boxed{\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{u}} \quad (4.4)$$

angeschrieben werden. Hierbei ist $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ die generalisierte Massenmatrix, $\mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ der Vektor der generalisierten CORIOLIS- und Kreiselkräfte und $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ ein Vektor aller sonstigen generalisierten Potential- oder Endeffektorkräfte.

Anmerkung 4.2.1. In der Formulierung der Bewegungsgleichungen in (4.4) wurden „innere“ Reaktionskräfte durch die Multiplikation mit der JACOBI-Matrix der Translation und Rotation nach dem Prinzip von d’ALEMBERT eliminiert [Pfeiffer, 1997], [Schramm, 1986], [Schiehlen u. Eberhard, 2004]. Für den Prototyp entspricht das Modell der Baumstruktur drei ungekoppelten Zweischlägen, die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ sowie die Matrix der CORIOLIS- und Kreiselmomente $\mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ haben Blockdiagonalstruktur.

4.3 Dynamisches Modell eines PKM in Minimalkoordinaten

4.3.1 Bewegungsgleichungen

Die Baumstruktur eines PKM kann durch die Einführung von r geometrischen Zwangsbedingungen

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{q}) - \mathbf{f}_2(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{m-1}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}_m(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^r \quad (4.5)$$

zu einem gebundenen System überführt werden. Die kinematischen Zwangsbedingungen ergeben aus der zeitlichen Ableitung von 4.5 zu

$$\mathbf{0} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{r \times n}. \quad (4.6)$$

Die Dynamik wird durch die LAGRANGESchen Gleichungen 1. Art

$$\boxed{M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{u}} \quad (4.7)$$

beschrieben, wobei die Richtung der Zwangskräfte durch $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})$ und die Beträge mit $\boldsymbol{\lambda}$ berücksichtigt werden. Die Aufteilung der systembeschreibenden Koordinaten in die minimalen \mathbf{q}_2 und davon abhängige Koordinaten \mathbf{q}_1 in (3.30) führt unmittelbar zu der Parametrierung

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} \dot{\mathbf{q}}_2 \text{ mit } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{I}_\delta \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Die Matrix \mathbf{F} erfüllt die Orthogonalitäts-Beziehung $\mathbf{J}\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$, so dass \mathbf{F} als Orthogonalkomplement von \mathbf{J}^T bezeichnet wird (vgl. [Schramm, 1986]). Die zeitlichen Ableitungen von $\dot{\mathbf{q}}$ werden durch $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} \ddot{\mathbf{q}}_2 + \dot{\mathbf{F}} \dot{\mathbf{q}}_2$ ermittelt, wobei die notwendige Ableitung des Orthogonalkomplements nach Müller [2006] durch

$$\dot{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^{-1} (\dot{\mathbf{J}}_1 \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{J}_2 - \dot{\mathbf{J}}_2) \\ \mathbf{0}_\delta \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

mit $\frac{d}{dt} \mathbf{J}_1^{-1} = \mathbf{J}_1^{-1} \dot{\mathbf{J}}_1 \mathbf{J}_1^{-1}$ berechnet wird. Die Anzahl von Steuerkräften in den aktiven Gelenken eines RA-PKM übersteigt die Anzahl seiner lokalen Freiheitsgrade, so gilt formal: $m > \delta$. Der Prototyp in Abbildung 4.1 besitzt $m = 3$ direkt steuerbare Gelenkkoordinaten und wird aufgrund seiner lokalen Freiheitsgrade ($\delta = 2$) als "einfachst-redundanter" Manipulator bezeichnet [Kurtz u. Hayward, 1992], [Müller, 2002], [Hufnagel u. Schramm, 2011b], [Hufnagel u. Schramm, 2011a].

Mithilfe von \mathbf{F} lassen sich die unbekanntenen Zwangskräfte $\mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}$ aus den LAGRANGE-Gleichungen (4.7) eliminieren. Die Projektion soll exemplarisch am Beispiel eines Raumpendels erläutert werden.

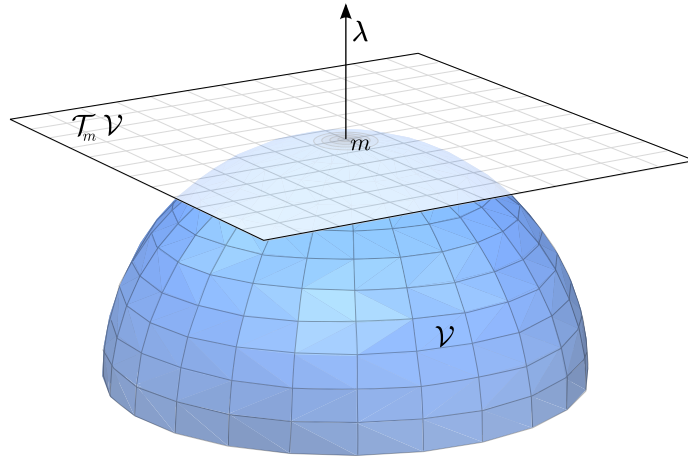


Abbildung 4.2: Konfigurations- und Tangentialraum eines Raumpendels

Beispiel 4.3.1 (Tangentialraum eines Raumpendels). Der Konfigurationsraum eines Raumpendels mit der Pendellänge l manifestiert sich in Form einer Kugelschale, die durch die Zwangsbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ definiert wird. In Abbildung 4.2 wird ein beliebiger Punkt $m \in \mathcal{V}$ durch den Kraftvektor $\vec{\lambda}$ in der Konfiguration¹ gehalten. Der dazu orthogonal liegende Tangentialraum $\mathcal{T}_m \mathcal{V}$ kann außerhalb von Konfigurationsraum-Singularitäten jedem Punkt von \mathcal{V} zugeordnet werden.

Die Projektion von (4.7) sowie die Koordinatentransformation mit den Beziehungen in (4.8) und deren Ableitungen führt zu den Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_2 + \overline{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_2 + \overline{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{A}^T \mathbf{c}} \quad (4.10)$$

mit den Abkürzungen

$$\overline{\mathbf{M}} := \mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}, \quad \overline{\mathbf{K}} := \mathbf{F}^T (\mathbf{K} \mathbf{F} + \mathbf{M} \dot{\mathbf{F}}), \quad \overline{\mathbf{Q}} := \mathbf{F}^T \mathbf{Q}. \quad (4.11)$$

Hierbei wird mit $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{\delta \times m}$ der aktive Anteil von \mathbf{F} bezeichnet, um die rechte Seite von (4.7) mit

$$\mathbf{F}^T \mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{c} \quad (4.12)$$

umzuformen. Hierbei stellen $\mathbf{c} = [c_1 \ \dots \ c_m]^T$ die effektiven Steuergrößen als relevanten Teil von \mathbf{u} dar.

Für Stabilitätsnachweise ist die folgende Symmetrieeigenschaft zu beweisen.

Lemma 4.3.1. *Die Matrix $\dot{\overline{\mathbf{M}}} - 2\overline{\mathbf{K}}$ ist schiefssymmetrisch*

¹Der Konfigurationsraum des Raumpendels wird in Abbildung 4.2 nur zur Hälfte dargestellt. Die Darstellung von Zwangskräften im Konfigurationsraum kann nicht verallgemeinert werden.

Beweis. Zusammen mit den Ausdrücken in (4.11) kann der Ausdruck folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\dot{\bar{\mathbf{M}}} - 2\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{F}^T (\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{K}) \mathbf{F} - \mathbf{F}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{F}} + (\mathbf{F}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{F}})^T.$$

Daraus ergibt sich, dass der projizierte Ausdruck schiefsymmetrisch ist, wenn auch $\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{K}$ schiefsymmetrisch ist. Diese Eigenschaft wird in den Arbeiten [Asada u. Slotine, 1986] und [Murray u. a., 1993] bewiesen. \square

4.3.2 Eigenschaften der Formulierung

Vorwärtsdynamik und Simulation

Das dynamische Modell (4.10) besteht aus δ gewöhnlichen Differentialgleichungen und kann dazu genutzt werden, um die Änderung der Koordinaten $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ abhängig von den äußeren eingepprägten Kräften \mathbf{c} zu simulieren. Die symmetrische Massenmatrix $\bar{\mathbf{M}}$ ist positiv definit und kann invertiert werden, um die Beschleunigungen zu integrieren. Nach jedem Integrationsschritt müssen neue Werte für abhängigen Gelenkkoordinaten \mathbf{q}_1 in die Bewegungsgleichungen eingesetzt werden. Die Verknüpfung der Kinematik mit den Bewegungsgleichungen kann durch die geschlossene Lösung der Relativkinematik erfolgen [Schramm u. a., 2010]. Kurz u. a. [2011] integrieren die Zwangsbedingungen aus (3.30) in der Software *NEWEUL2*, um die generalisierten Koordinaten zu erhalten. Allerdings sind die Ergebnisse der Methode nur für kleine Simulationszeiten gültig, da die Koordinaten aufgrund von Bias-Effekten und kleinsten numerischen Fehlern mit der Zeit “driften“.

Bei sehr komplexen räumlichen Mechanismen oder Seilrobotern mit starken Nichtlinearitäten kann die Berechnung der abhängigen Gelenkkoordinaten nur durch iterative Verfahren, wie zum Beispiel der NEWTON-RAPHSON Methode erfolgen.

Numerische Singularitäten

Ogleich ein Parallelmanipulator eine Antriebsredundanz aufweist, unterliegt die Formulierung der Bewegungsgleichungen (4.10) numerischen Singularitäten, sobald sich eine parallelkinematische Unterstruktur in einer Eingangssingularität befindet. Eine Auswahl von δ Minimalkoordinaten als Parameter zur Bestimmung der abhängigen Koordinaten gelingt nur lokal auf dem nicht EUKLIDischen Konfigurationsraum \mathcal{V} . Die Lage und das Auftreten dieser so genannten *Parametersingularitäten* im Arbeitsraum des Manipulators ist abhängig von der Wahl der Minimalkoordinaten zur Beschreibung des PKM-Modells.

Beispiel 4.3.2 (Numerische Singularitäten des 2RRR/RR RA-PKM). Der Prototyp unterliegt, wie in Abbildung 4.3 gezeigt, drei möglichen Singularitäten, wenn die Minimalkoordinaten aus den Antriebskoordinaten $q_{a_i}, i = 1, 2, 3$ gewählt werden. Die Singularitäten, die durch die Koppelkurven der jeweiligen Viergelenke beschrie-

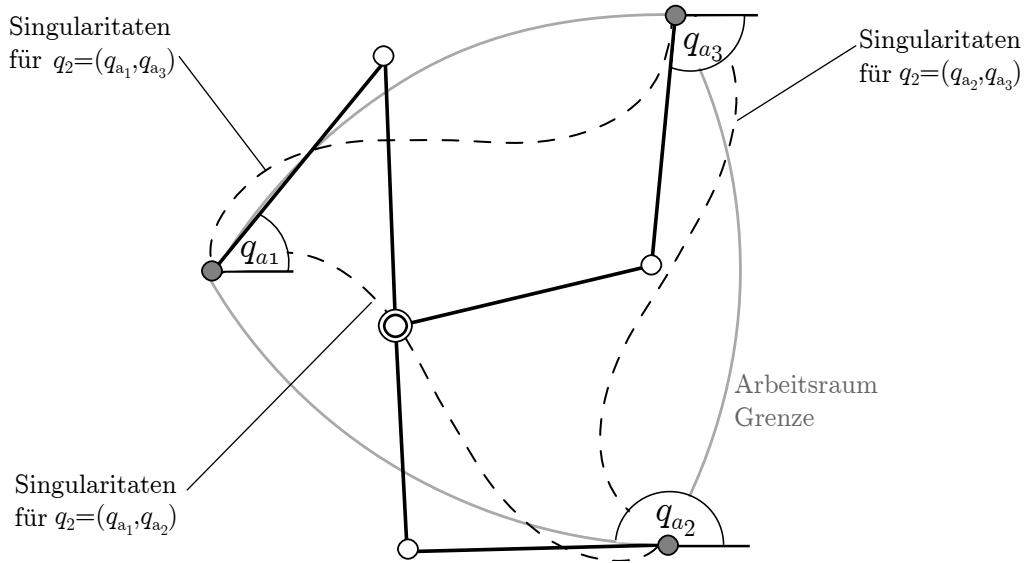


Abbildung 4.3: Auftretende Parametersingularitäten des $2\overline{RRR}/\overline{RR}$ RA-PKM

ben werden, schränken den Arbeitsraum des Manipulators erheblich ein. An den kritischen Stellen streben die Elemente des Orthogonalkomplements \mathbf{F} aufgrund des unzureichenden Rangs von \mathbf{J}_1 gegen unendlich, wodurch das Verhalten der Zustandsvariablen hier nicht weiter simuliert werden kann [Hufnagel u. Müller, 2011], [Hufnagel u. Schramm, 2011a] \square .

Wie die Antriebsredundanz trotz Formulierung in Minimalkoordinaten dazu genutzt werden kann, um den gesamten Arbeitsraum global zu parametrieren, wird am Beispiel des $2\overline{RRR}/\overline{RR}$ RA-PKM weiter verdeutlicht. Der vorliegende Konfigurationsraum \mathcal{V} ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, die im Gelenkraum \mathbb{V}^6 liegt. Abbildung 4.4 a) zeigt den Konfigurationsraum des Prototypen in einer Projektion auf $q_{a1} - q_{a2} - q_{b1}$, wobei sich der EE in der kritischen Konfiguration nach Abbildung 4.3 befindet. Dabei kann die Koordinate q_{b1} an der Umrandung des Eingangsraums \mathcal{I} nicht mehr mit q_{a1} und q_{a2} parametrieren werden. Unter der Berücksichtigung, dass die Anzahl der Antriebe eines RA-PKM höher ist als die Dimension seines Konfigurationsraums, lässt sich ein weiterer Eingangsraum \mathcal{I}' finden, in dem die Parametrierung von q_{b1} an der selben EE-Position mit q_{a1} und q_{a3} möglich ist. Der Ausschnitt des Konfigurationsraums mit \mathcal{I}' wird in Abbildung 4.4 b) gezeigt. Diese Eigenschaft eröffnet einen neuen Zugang zu einer globalen Parametrierung in Minimalkoordinaten über den gesamten Arbeitsraum.

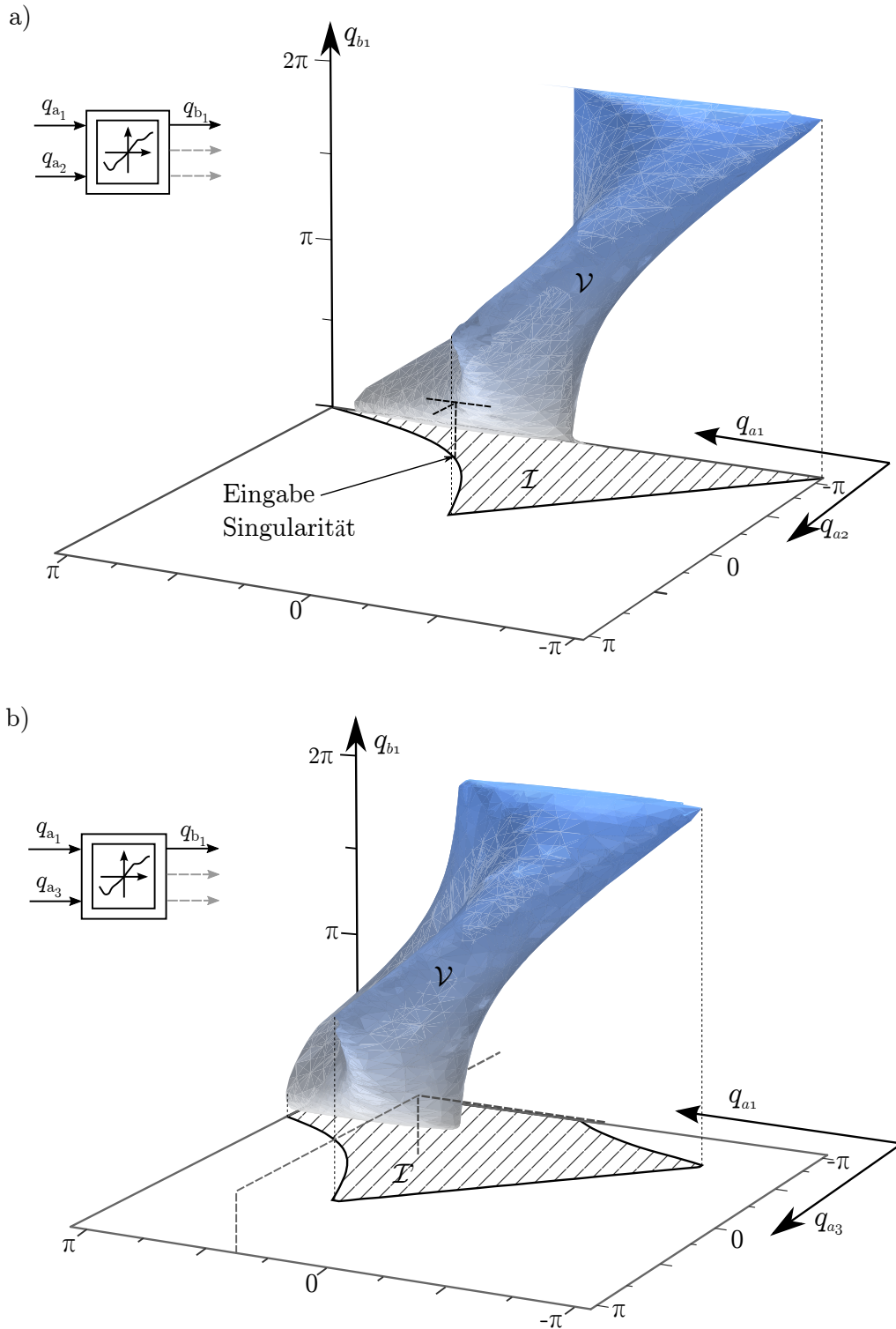


Abbildung 4.4: Konfigurationsraum des 2RRR/RR RA-PKM bei der Parametrierung von q_{b1} : a) durch q_{a1}, q_{a2} und b) durch q_{a1}, q_{a3}

4.4 Dynamisches Modell in globalen EE-Koordinaten

4.4.1 Bewegungsgleichungen

Der Endeffektor eines Manipulators kann als Starrkörper modelliert werden, der von Reaktionskräften durch die Führungsketten beschleunigt wird. Die Bewegung des EE alleine wird vollständig durch die Pose $\mathbf{X} = [\mathbf{r} \ \boldsymbol{\phi}]^T$ beschrieben. Weiterhin soll der RA-PKM nach den Definitionen in [Neugebauer, 2005] aus m aktiven Führungsketten bestehen, deren absolute Kinematik durch die Ortsvektoren $\mathbf{f}_i(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi})$, $i = 1 \dots m$ beschrieben wird. Die Bewegungsgleichungen in Endeffektorkoordinaten werden bezüglich der Baumstruktur mit separatem EE (Abbildung 4.5) hergeleitet.

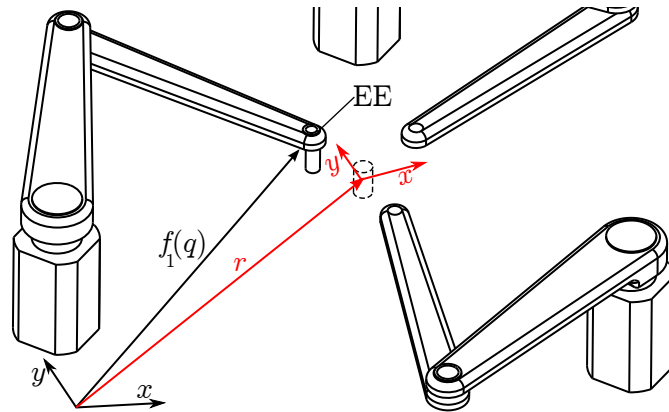


Abbildung 4.5: Baumstruktur des 2RRR/RR RA-PKM Manipulators mit virtuellem EE

Unter Berücksichtigung der Führungsketten sowie der EE-Pose können nun geometrische Zwangsbedingungen² folgendermaßen aufgestellt werden:

$$\mathbf{h}^*(\mathbf{q}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\phi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi}) - \mathbf{r} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_m(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi}) - \mathbf{r} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Diese Zwangsbedingungen beschreiben den Zustand des Mechanismus zu jedem Zeitpunkt eindeutig. Die vollständigen Zwangsbedingungen erfolgen durch die zeitlichen Ableitungen der geometrischen Beziehungen

$$\mathbf{0} = \mathbf{h}^*(\mathbf{q}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\phi}), \quad \mathbf{h}^*(\mathbf{q}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\phi}) \in \mathbb{R}^n \quad (4.13a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_X(\boldsymbol{\phi}) \dot{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ und } \mathbf{J}_X(\boldsymbol{\phi}) \in \mathbb{R}^{n \times \delta}. \quad (4.13b)$$

Die Dynamik des geschlossenen Systems wird durch die LAGRANGEN Gleichungen 1. Art, die sich aus n Gleichungen für den Manipulator und δ Gleichungen für den

²Die geometrischen Zwangsbedingungen $\mathbf{h}^*(\mathbf{q}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\phi})$ lassen sich durch Elimination von \mathbf{r} wieder zu r geometrischen Gleichungen (4.5) umformen.

Endeffektor zusammensetzen, beschrieben. Die Besonderheit bei dieser Formulierung ist, dass der Endeffektor kein Teil der Baumstruktur ist. Die vollständigen Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ \mathbf{M}_X \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{Q}_X(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0}_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_X^T(\phi) \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}, \quad (4.14)$$

wobei $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ die generalisierte Massenmatrix der Baumstruktur, bestehend aus den m Führungsketten, $\mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ die verallgemeinerten CORIOLIS- und Kreiselkräfte, $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ sonstige verallgemeinerte Potentialkräfte und \mathbf{u} die externen Steuerkräfte sind. Bei einem separaten EE bezeichnet \mathbf{M}_X die EE-Massenmatrix in Blockdiagonal-Struktur und $\mathbf{Q}_X(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ alle sonstigen verallgemeinerten Potentialkräfte. Mit $\boldsymbol{\lambda}$ werden die unbekanntes Zwangskräfte berücksichtigt. Bonitz [1996] verwendet einen ähnlichen Formalismus, jedoch geht es bei seiner Arbeit um das Greifen von unnachgiebigen Objekten und nicht um Führungsketten, die einen EE manipulieren. Außerhalb von kritischen Konfigurationen hat die JACOBI-Matrix \mathbf{J} den vollen Rang n und kann invertiert werden, wodurch sich unmittelbar die Parametrierung

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{F}} \dot{\mathbf{X}}, \quad \underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{J}_X \\ \mathbf{I}_\delta \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

ergibt. Die Matrix $\underline{\mathbf{F}}$ ist ein orthogonales Komplement zu $\begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{J}_X \end{bmatrix}$, so dass die Beziehung $\begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{J}_X \end{bmatrix} \underline{\mathbf{F}} \equiv \mathbf{0}$ gilt. Die Beschleunigungen ergeben sich durch die zeitliche Ableitung von (4.15) unter Berücksichtigung von $\frac{d}{dt} \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \mathbf{J}^{-1}$ zu

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{F}} \ddot{\mathbf{X}} + \dot{\underline{\mathbf{F}}} \dot{\mathbf{X}}, \quad \dot{\underline{\mathbf{F}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} (\dot{\mathbf{J}} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{J}_X - \dot{\mathbf{J}}_X) \\ \mathbf{0}_\delta \end{bmatrix}.$$

Zusammen mit den Beziehungen in (4.15) werden die Zwangskräfte in (4.14) eliminiert wodurch sich die Bewegungsgleichungen in Endeffektorkoordinaten

$$\boxed{\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \underline{\mathbf{A}}^T \mathbf{c}}, \quad (4.16)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}} &:= \underline{\mathbf{F}}^T \text{diag}(\mathbf{M}, \mathbf{M}_X) \underline{\mathbf{F}}, \\ \underline{\mathbf{K}} &:= \underline{\mathbf{F}}^T (\text{diag}(\mathbf{K}, \mathbf{0}_\delta) \underline{\mathbf{F}} + \text{diag}(\mathbf{M}, \mathbf{M}_X) \dot{\underline{\mathbf{F}}}), \\ \underline{\mathbf{Q}} &:= \underline{\mathbf{F}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_X \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.17)$$

ergeben. Im rechten Teil der Bewegungsgleichungen werden nur die von Null verschiedenen Antriebskräfte berücksichtigt, so dass durch

$$\underline{\mathbf{F}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0}_\delta \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{A}}^T \mathbf{c} \quad (4.18)$$

der relevante Teil von $\underline{\mathbf{F}}^T$ mit der Verteilungsmatrix $\underline{\mathbf{A}}^T \in \mathbb{R}^{\delta \times m}$ bezeichnet wird. Diese Koordinatenformulierung wird beispielsweise in den Arbeiten [Kock, 2001], [Kock u. Schumacher, 2000a], [Kock u. Schumacher, 2000b], [Shang u. a., 2009], [Shang u. Cong, 2010b] oder [Shang u. Cong, 2010a] verwendet.

Lemma 4.4.1. *Die Matrix $\underline{\dot{M}} - 2\underline{K}$ ist schiefsymmetrisch*

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zu Lemma 4.3.1. Das Einsetzen von (4.18) in Lemma 4.4.1 führt zu der Beziehung

$$\underline{\dot{M}} - 2\underline{K} = \underline{F}^T (\underline{\dot{M}} - 2\underline{K}) \underline{F} - \underline{F}^T \underline{M} \underline{\dot{F}} + (\underline{F}^T \underline{M} \underline{\dot{F}})^T.$$

die für alle \underline{F} schiefsymmetrisch ist. □

4.4.2 Eigenschaften der Formulierung

Vorwärtsdynamik

Die Massenmatrix \underline{M} ist positiv definit und hat den vollen Rang δ , wodurch die Bewegungsgleichungen nach den EE-Beschleunigungen aufgelöst werden können. Bei dieser Formulierung können alle Gelenkkoordinaten aus der Pose ermittelt werden. Dazu wird die Inverse Kinematik durch $\mathbf{q}_a = \mathbf{f}_{\text{IKP}}(\mathbf{X})$ ermittelt. Aus den aktiven Koordinaten und der Pose können dann die passiven Koordinaten ermittelt werden. Ein vollständiges Modell des Prototypen ist im Anhang zu finden.

Numerische Singularitäten

Die Matrix \mathbf{J} hat den Rang $\leq n$, der, abhängig von der Lage des Manipulators, nicht notwendigerweise konstant bleibt [Spong u. a., 2005]. Aufgrund dessen, dass der Ortsvektor $\mathbf{f}_i(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi})$, $i = 1 \dots m$ per Definition eines vollaktuierten PKM [Neugebauer, 2005] keinen geschlossenen Vektorzug enthält, wird \mathbf{J} aber nur dann singular, wenn eine serielle Führungskette selbst in einer Singularität ist, beziehungsweise sich der PKM in einer Konfigurationsraum- oder Ausgangssingularität befindet. Unter Ausgangssingularitäten versteht man auch die kritischen Situationen, in denen der Manipulator durch einen Wechsel in eine andere Aufbauart, einen so genannten *Assembly-Change* durchführt, wie in [Müller u. Hufnagel, 2011b] oder [Bamberger u. a., 2008] beschrieben. Die Funktionalmatrix \mathbf{J}_X hat den konstanten Rang δ . Somit ist diese Formulierung gültig, obgleich sich eine Unterstruktur des RA-PKM in einer Eingangssingularität befindet.

4.5 Dynamisches Modell in m Antriebskoordinaten

4.5.1 Bewegungsgleichungen

Dieser Abschnitt beschreibt eine Formulierung der Bewegungsgleichungen in m Antriebskoordinaten, die unter der Annahme, dass lediglich die Steuerkräfte von Interesse sind, sinnvoll erscheint. Sämtliche populären Regler, die auf Basis einer Zustandslinearisierung hergeleitet werden, erfordern lediglich eine Inverse Dynamik [Murray u. a., 1993], [Rothfuss u. a., 1997]. Diese Formulierung ist durch ihre redundante Definition unanfällig gegen *Parametersingularitäten*, die im Abschnitt 4.3 beschrieben werden [Müller u. Hufnagel, 2011a]. Ausgehend von den kinematischen Zwangsbedingungen aus (3.26)

$$\mathbf{0} = \mathbf{J}_a \dot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{J}_p \dot{\mathbf{q}}_p \quad (4.19)$$

können die passiven Koordinaten durch $\dot{\mathbf{q}}_p = -\mathbf{J}_p^+ \mathbf{J}_a \dot{\mathbf{q}}_a$ mit der Links-Pseudoinversen $\mathbf{J}_p^+ = (\mathbf{J}_p^T \mathbf{J}_p)^{-1} \mathbf{J}_p^T$ ausgedrückt werden. Die Bewegung des RA-PKM kann eindeutig durch die m Antriebskoordinaten beschrieben werden, wobei die JACOBI-Matrix \mathbf{J}_p den vollen Rang $n - m$ hat.

Mithilfe der zeitlichen Ableitung von (4.19) werden die Beschleunigungen durch

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_p &= -\mathbf{J}_p^+ (\dot{\mathbf{J}}_p \dot{\mathbf{q}}_p + \dot{\mathbf{J}}_a \dot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{J}_a \ddot{\mathbf{q}}_a) \\ &= -\mathbf{J}_p^+ (\dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_a \ddot{\mathbf{q}}_a) \end{aligned} \quad (4.20)$$

berechnet. In der Beziehung

$$\dot{\mathbf{q}} = \widehat{\mathbf{F}} \dot{\mathbf{q}}_a \quad \text{mit} \quad \widehat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_p^+ \mathbf{J}_a \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

stellt $\widehat{\mathbf{F}}$ ein Orthogonalkomplement zu \mathbf{J} dar, so dass wieder $\mathbf{J} \widehat{\mathbf{F}} \equiv \mathbf{0}$ gilt. Mit $\widehat{\mathbf{F}}$ lassen sich die LAGRANGE-Gleichungen (4.7) in den Konfigurationsraum, der durch die Antriebskoordinaten aufgespannt wird, projizieren. Die generalisierten Koordinaten der Baumstruktur werden durch die Beziehung (4.21) und deren Derivierten $\dot{\mathbf{q}} = \widehat{\mathbf{F}} \dot{\mathbf{q}}_a + \widehat{\mathbf{F}} \dot{\mathbf{q}}_a$ mit

$$\dot{\widehat{\mathbf{F}}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_p^+ (\dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_a \ddot{\mathbf{q}}_a) \\ \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

in die Antriebskoordinaten $\dot{\mathbf{q}}_a$ transformiert, so dass die Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_a + \widehat{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_a + \widehat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{c}} \quad (4.23)$$

mit den Abkürzungen

$$\widehat{\mathbf{M}} := \widehat{\mathbf{F}}^T \mathbf{M} \widehat{\mathbf{F}}, \quad \widehat{\mathbf{K}} := \widehat{\mathbf{F}}^T (\mathbf{K} \widehat{\mathbf{F}} + \mathbf{M} \dot{\widehat{\mathbf{F}}}), \quad \widehat{\mathbf{Q}} := \widehat{\mathbf{F}}^T \mathbf{Q}. \quad (4.24)$$

entstehen [Müller u. Hufnagel, 2011a].

Anmerkung 4.5.1. Auf den rechten Seiten der Bewegungsgleichungen (4.23) stehen direkt die effektiven Steuerkräfte $c_i, i = 1 \dots m$, da der relevante Part von $\widehat{\mathbf{F}}$ durch die $m \times m$ Einheitsmatrix \mathbf{I}_m projiziert wird.

Lemma 4.5.1. *Die Matrix $\widehat{\dot{\mathbf{M}}} - 2\widehat{\mathbf{K}}$ ist schiefsymmetrisch*

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zu Lemma 4.3.1. Das Einsetzen von (4.23) in Lemma 4.5.1 führt zu der Beziehung

$$\widehat{\dot{\mathbf{M}}} - 2\widehat{\mathbf{K}} = \widehat{\mathbf{F}}^T (\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{K}) \widehat{\mathbf{F}} - \widehat{\mathbf{F}}^T \mathbf{M} \dot{\widehat{\mathbf{F}}} + \left(\widehat{\mathbf{F}}^T \mathbf{M} \dot{\widehat{\mathbf{F}}} \right)^T,$$

die für alle $\widehat{\mathbf{F}}$ schiefsymmetrisch ist. □

4.5.2 Eigenschaften der Formulierung

Vorwärtsdynamik

Die Massenmatrix $\widehat{\mathbf{M}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ wird durch die Projektion mit $\widehat{\mathbf{F}}$ singular, wodurch aus (4.23) keine Vorwärtsdynamik ermittelt werden kann.

Numerische Singularitäten

Die m Bewegungsgleichungen (4.23) bestehen aus δ unabhängigen Gleichungen. Sofern aus den m Antriebskoordinaten immer δ Parameter gewählt werden können, die als Minimalkoordinaten einen Untermechanismus des RA-PKM beschreiben, der sich zum selben Zeitpunkt nicht in einer Eingangssingularität befindet, ist die Berechnung der inversen Dynamik möglich. Bei einem vollaktuierten Manipulator ($m = \delta$) entspricht die Formulierung (4.23) der Minimalkoordinaten-Formulierung [Müller u. Hufnagel, 2011a].

4.6 Dynamisches Modell in n redundanten Koordinaten

4.6.1 Bewegungsgleichungen

In diesem Abschnitt wird die Formulierung der Bewegungsgleichungen in n redundanten Koordinaten beschrieben. Neben der Formulierung in m Antriebskoordinaten wird hiermit eine weitere Formulierung vorgestellt, die als inverse Dynamik genutzt werden kann [Müller, 2011a], [Müller, 2011c], [Müller u. Hufnagel, 2011b], [Müller u. Hufnagel, 2011c], [Müller u. Hufnagel, 2012].

Der Ansatz zur Eliminierung der Zwangskräfte in (4.7) ist die Projektion durch einen Nullraumprojektor. Unter Vernachlässigung von Konfigurationsraum-Singularitäten hat die JACOBI-Matrix $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ der kinematischen Zwangsbedingungen (3.16) vollen Zeilenrang r , wodurch eine Nullraumprojektion von \mathbf{J} mithilfe der Rechts-Pseudoinversen $\mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$ durch $\mathbf{N}_J = \mathbf{I}_n - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}$ gefunden werden kann. Damit hat \mathbf{N}_J durch $\mathbf{J}\mathbf{N}_J \equiv \mathbf{0}$ eine ähnliche Wirkung wie \mathbf{F} , ist jedoch ein rein numerisches Konstrukt ohne jegliche physikalische Bedeutung. Der Vorteil ist, dass \mathbf{N}_J auch existiert, falls sich eine PKM-Unterstruktur des Manipulators in einer Eingangssingularität (Kraftsingularität) oder einer seriellen Strecklage befindet. Die $n \times n$ Matrix \mathbf{N}_J kann durch ihren Rang δ entsprechend den generalisierten Koordinaten der zugrundeliegenden Baumstruktur $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_p \quad \mathbf{q}_a]^T$ in aktive und passive Koordinaten zu

$$\mathbf{N}_J = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{P}} \\ \widetilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n} \text{ und } \widetilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (4.25)$$

untergliedert werden. Hierbei steht $\widetilde{\mathbf{A}}$ für den aktiven Teil von \mathbf{N}_J , so dass $\dot{\mathbf{q}}_a = \widetilde{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{q}}$ gilt. Außerdem ist \mathbf{N}_J *idempotent* wodurch $\mathbf{N}_J\mathbf{N}_J = \mathbf{N}_J = \mathbf{N}_J^T$. Die Projektion der LAGRANGE-Gleichungen (4.7) mit \mathbf{N}_J liefert

$$\mathbf{N}_J^T (\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)) = \widetilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{c}, \quad (4.26)$$

wobei die LAGRANGE-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ eliminiert werden. In den Bewegungsgleichungen (4.26) wird vorausgesetzt, dass Koordinaten in $\dot{\mathbf{q}}$ kinematisch konsistent sind und keine Zwangsbedingungen verletzen. Falls dies, beispielsweise durch Messfehler, nicht sichergestellt werden kann, können die Geschwindigkeiten mit $\dot{\mathbf{q}}_{\text{proj}} = \mathbf{N}_J\dot{\mathbf{q}}$ und die Beschleunigungen mit $\ddot{\mathbf{q}}_{\text{proj}} = \mathbf{N}_J\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{N}}_J\dot{\mathbf{q}}$ in eine gültige Konfiguration gebracht werden. Die vollständige Formulierung wird dadurch zu

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \widetilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \widetilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \widetilde{\mathbf{A}}^T(\mathbf{q})\mathbf{c}} \quad (4.27)$$

transformiert und hat die Abkürzungen

$$\widetilde{\mathbf{M}} := \mathbf{N}_J^T \mathbf{M} \mathbf{N}_J, \quad \widetilde{\mathbf{K}} := \mathbf{N}_J^T (\mathbf{K} \mathbf{N}_J + \mathbf{M} \dot{\mathbf{N}}_J), \quad \widetilde{\mathbf{Q}} := \mathbf{N}_J^T \mathbf{Q}. \quad (4.28)$$

4.6.2 Eigenschaften der Formulierung

Vorwärtsdynamik

Die Massenmatrix $\widetilde{\mathbf{M}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird durch die Projektion mit \mathbf{N}_J singular. Daher können die Bewegungsgleichungen (4.27) nicht nach den Beschleunigungen aufgelöst werden.

Numerische Singularitäten

Sofern keine Konfigurationsraum-Singularitäten auftreten und die n generalisierten Gelenkkoordinaten der Baumstruktur kinematisch verträglich sind, sind die Bewegungsgleichungen gültig. Mit der Formulierung ist es ebenfalls möglich, die Aufbauarten des Roboters zu wechseln, die durch serielle Singularitäten (Ausgangssingularitäten) getrennt sind. Dieser Vorgang wird beispielsweise von Bamberger u. a. [2008] beschrieben.

4.7 Vergleich der Formulierungen

Alle vorgestellten Formulierungen der Bewegungsgleichungen werden in Tabelle 4.1 mit der Anzahl ihrer Koordinaten sowie ihrer Gültigkeit zusammengestellt.

Formulierung	Kapitel	Anzahl der Koordinaten	Gültigkeit
Baumstruktur	(4.2)	n	In allen Bewegungsarten
Minimalkoordinaten	(4.3)	δ	Abhängig von der Wahl der Minimalkoordinaten
Endeffektorkoordinaten	(4.4)	δ	In allen Antriebsarten einer Aufbauart
Antriebskoordinaten	(4.5)	m	In allen Antriebsarten einer Aufbauart
Redundante Koordinaten	(4.6)	n	In allen Bewegungsarten

Tabelle 4.1: Vergleich der Formulierungen unter Berücksichtigung verschiedener Koordinatenpartitionen

4.8 Modellierung nicht-idealer Gelenke

4.8.1 Reibungsphänomene

Die dynamischen Modelle in den Abschnitten 4.2 bis 4.6 setzen ideale Gelenke mit vernachlässigbarer Reibung und unendlicher Steifigkeit voraus. In der Regel kann diese Annahme für die aktiven und passiven Gelenke, bei Verwendung von hochpräzisen Antrieben, getroffen werden. Bei industriellen Direktantrieben können jedoch Reibungskräfte an den aktiven Gelenken auftreten, die nicht mehr vernachlässigbar sind. Reibung ist eine tangentielle Reaktionskraft zwischen zwei Flächen, die in Kontakt zueinander stehen. Sie ist vielen Einflussfaktoren unterworfen, wie zum Beispiel Oberflächengüte, Zustand eines Schmiermittels, Luftfeuchtigkeit, ... usw. und offenkundig schwer zu berechnen, so dass eine Abschätzung genügen muss [Kafader, 2004, S. 28].

4.8.2 Reibung als äußere Kraft

Tritt in einem Starrkörpermodell Reibung auf, sind dessen Bindungen nicht mehr ideal, wenn diese als Abhängig von einer Reaktionskraft aufgefasst wird [Hiller,

1983], [Schramm, 1986]. Formal kann weiterhin nur die Normalkomponente als Reaktionskraft aufgefasst und die Reibung als äußere eingeprägte Kraft modelliert werden. Dabei können die Bindungen wieder als ideal betrachtet werden [Hiller, 1983]. Für die äußeren Reibkräfte lassen sich nach Olsson u. a. [1998] statische Modelle ansetzen, die die Realität hinreichend gut beschreiben. Eine Beschreibung dynamischer Reibmodelle ist in der Arbeit von Lé-Tien [2010] zu finden.

Die COULOMBSche-Reibung wirkt der Bewegung entgegen und ist betragsmäßig unabhängig von Geschwindigkeit und Kontaktfläche [Olsson u. a., 1998]. Das mathematische Modell wird als äußere Kraft an den Gelenkkoordinaten mit den Koeffizienten $Q_{C_i}, i = 1 \dots n$ durch

$$Q_{R_i}(\dot{q}_i) = Q_{C_i} \operatorname{sgn}(\dot{q}_i), \quad i = 1 \dots n \quad (4.29)$$

beschrieben. Die Kennlinie dieses Modells wird in Abbildung 4.6 a) dargestellt. Die

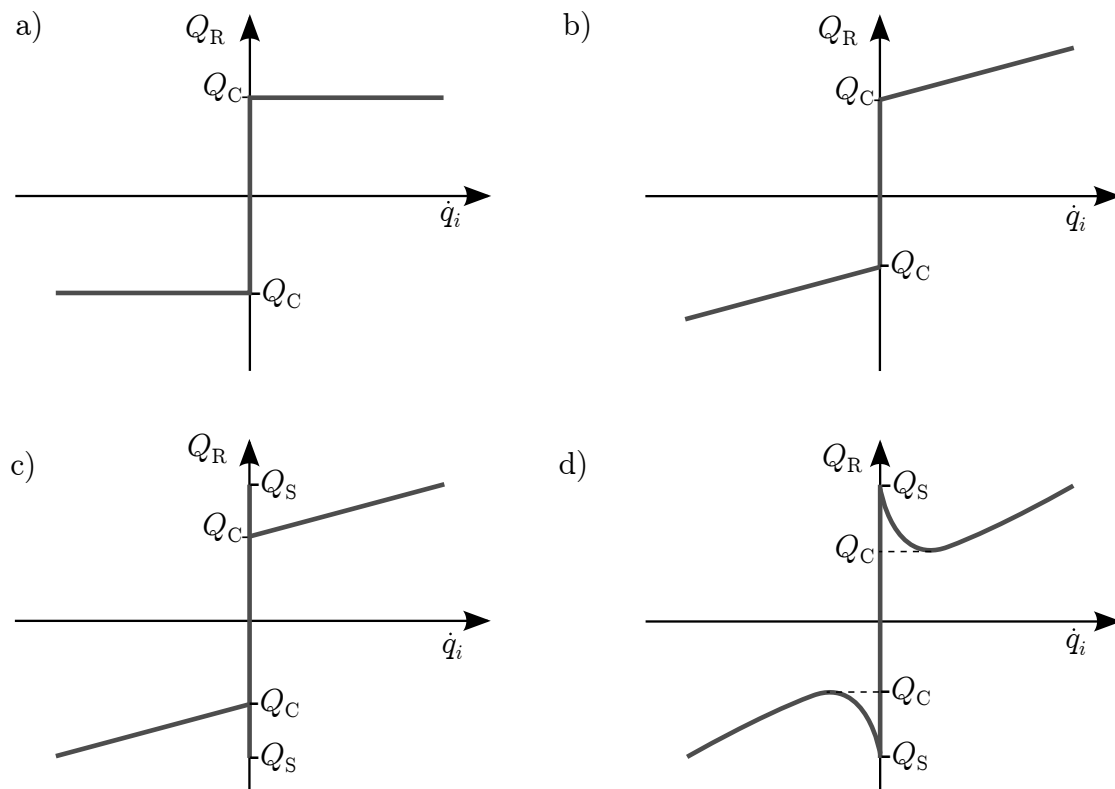


Abbildung 4.6: Statische Reibmodelle: a) Reine COULOMB-Reibung, b) COULOMB-Reibung und viskose Reibung, c) Berücksichtigung von Haftreibungseffekten, d) STRIBECK-Reibung

Kennlinie beschreibt ein ideales Relais und wird häufig als Ansatz zur Reibungskompensation in der Reglervorsteuerung verwendet. Unter Einbeziehung der hydrodynamischen Effekte des Schmiermittels im Gelenk ergibt sich die so genannte *viskose Reibung*, die für ein beliebiges Gelenk durch

$$Q_{R_i}(\dot{q}_i) = Q_{V_i} \dot{q}_i, \quad i = 1 \dots n \quad (4.30)$$

beschrieben wird, wobei Q_{V_i} eine geschwindigkeitsabhängige Dämpfungskonstante ist, die in der Regel experimentell ermittelt wird. Die Kombination beider Anteile wird in Abbildung 4.6 b) gezeigt. Ein höherer Detaillierungsgrad wird durch das Einbeziehen einer Haftkraft $Q_S > Q_C$ erzielt, wodurch so genannte *Stick-Slip*-Effekte simuliert werden können. Dieser Haftungsreibungs-Effekt simuliert beispielsweise Dichtelemente in Lagern und Antrieben, die an deren Kontaktflächen im Ruhezustand anhaften. Die Kombination aus COULOMBScher und viskoser Reibung sowie des *Stick-Slip*-Effekts wird in Abbildung 4.6 c) gezeigt. Aus den Arbeiten von STRIBECK geht hervor, dass der Übergang von *Stick-Slip* zu viskoser Reibung eher kontinuierlich verläuft. Diese Annäherung an die Realität wird in Abbildung 4.6 d) dargestellt und mit der Formulierung einer so genannten STRIBECK Kurve durch die Gleichung

$$Q_{R_i}(\dot{q}_i) = Q_{C_i} + (Q_{S_i} - Q_{C_i}) e^{-(\dot{q}_i/\dot{q}_{S_i})^{\delta_S}} + Q_{V_i}\dot{q}_i, \quad i = 1 \dots n \quad (4.31)$$

beschrieben. Hier ist \dot{q}_{S_i} , $i = 1 \dots n$ die so genannte STRIBECK-Geschwindigkeit und δ_S ein Formfaktor der dazu benutzt werden kann, um das Modell an vorhandene Messungen anzugleichen.

5 Dezentrale Regelung bei Antriebsredundanz

Die dezentrale Regelung der Achsen von Parallelrobotern ist bislang Standard in industriellen Anwendungen. Dem Anspruch einer optimalen Antriebsauslegung sowie der Berücksichtigung jeglicher Massenträgheitsmomente in der Regelung stehen die Anforderungen des Komponentenherstellers gegenüber. Die Achsregler werden auf ihre Spezifikationen hin parametrisiert und sind im Allgemeinen in einer linearen P-PI-Kaskade gehalten [Pietruszka, 2005, S. 248], [Weber, 2009, S. 167]. Die Hersteller von industriellen Steuerungen bieten den Anwendern Trajektoriengeneratoren mit NC-Programmierung sowie Software-Werkzeuge, zur automatischen Generierung von inversen Kinematiken im Baukastenprinzip an. Die Ausgangsgrößen werden den dezentralen Achsreglern zugeführt. Bei RA-PKM kann dieses Regelkonzept zu unkontrollierter Verspannung der Gelenke führen. Durch die fehlende Berücksichtigung der gesamten Kinematik können die Steuerkräfte auch antagonistische Anteile enthalten, die keine Bewegung des Manipulators hervorrufen. Auf Basis eines PD-Reglers in Kapitel 5.1 werden im Kapitel 5.2 die Konsequenzen der dezentralen Regelung analysiert und eine Möglichkeit zur Eliminierung antagonistischer Steuerkräfte vorgeschlagen. Abschließend werden in Kapitel 5.3 Messergebnisse vorgestellt.

5.1 Regler und Stabilität

Ein dezentraler linearer PD-Regler für m Antriebe lautet in seiner einfachsten Form

$$\mathbf{c} = \mathbf{K}_P \mathbf{e}_a + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}}_a, \quad (5.1)$$

wobei die Trajektorienfehler mit $\mathbf{e}_a = \mathbf{q}_a^d - \mathbf{q}_a$ und die Führungsgröße mit \mathbf{q}_a^d bezeichnet werden. Die Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_P &= \text{diag}(K_{P_1} \dots K_{P_m}), \\ \mathbf{K}_D &= \text{diag}(K_{D_1} \dots K_{D_m}) \end{aligned}$$

sind positiv definite Verstärkungen zur Einstellung der Reglerzeitkonstanten. Der lineare PD-Regler erreicht eine asymptotische Stabilität der Fehlerdynamik für nicht-lineare PKM.

Lemma 5.1.1 (Stabilität des PD Reglers nach [Murray u. a., 1993]). *Für den stationären Fall $\dot{\mathbf{q}}_a^b \equiv \mathbf{0}$ und $\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_D > \mathbf{0}$ erzielt der PD-Regler (5.1) mit der Formulierung (4.23) asymptotische Stabilität am Arbeitspunkt $\mathbf{q}_a = \mathbf{q}_a^d$.*

Beweis. Wird der PD-Regler (5.1) in das Modell (4.23), ohne Potentialkräfte ($\mathbf{Q} \equiv \mathbf{0}$), mit dem Arbeitspunkt $\mathbf{q}_a^d \equiv \mathbf{0}$ eingesetzt, ergibt sich die dynamische Gleichung des geschlossenen Regelkreises zu

$$\widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_a + \widehat{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}}_a - \mathbf{K}_P (\mathbf{q}_a^d - \mathbf{q}_a) = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

Der Arbeitspunkt kann ohne Verletzung des allgemeinen Falls der Nullvektor sein, da jeder beliebige Arbeitspunkt durch eine Koordinatentransformation in diesen überführt werden kann. Die Gesamtenergie des Systems ergibt die LYAPUNOV Funktion

$$V(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_a^T \widehat{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}}_a + \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^T \mathbf{K}_P \mathbf{q}_a. \quad (5.3)$$

Diese Funktion ist global positiv definit. Die Ableitung nach der Zeit ergibt die Beziehung

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a) &= \dot{\mathbf{q}}_a^T \widehat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}_a + \dot{\mathbf{q}}_a^T \dot{\widehat{\mathbf{M}}} \dot{\mathbf{q}}_a + \dot{\mathbf{q}}_a^T \mathbf{K}_P \mathbf{q}_a \\ &= -\dot{\mathbf{q}}_a^T \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}}_a + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_a^T \left(\dot{\widehat{\mathbf{M}}} - 2\dot{\widehat{\mathbf{K}}} \right) \dot{\mathbf{q}}_a. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Da $\dot{\widehat{\mathbf{M}}} - 2\dot{\widehat{\mathbf{K}}}$ nach Lemma 4.5.1 schiefsymmetrisch ist, vereinfacht sich die Beziehung zu

$$\dot{V}(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a) = -\dot{\mathbf{q}}_a^T \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}}_a \quad (5.5)$$

und ist damit negativ definit für positive Elemente in \mathbf{K}_D . Der Nachweis der asymptotischen Stabilität ergibt sich aus dem Invarianzprinzip von KRASOVSKII-LASALLE. Eine Menge S für die die Funktion $\dot{V} \equiv 0$ wird, ergibt sich durch

$$S = \{(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a) \mid \dot{V} \equiv 0\}.$$

Das System konvergiert in die größte invariante Menge, die durch das Einsetzen von $\dot{\mathbf{q}}_a \equiv \mathbf{0}$ in (5.2) gefunden wird. Unter Berücksichtigung des Arbeitspunktes ($\mathbf{q}_a^d = \mathbf{0}$) folgt die Beziehung

$$\mathbf{K}_P \mathbf{q}_a = \mathbf{0}.$$

Wenn \mathbf{K}_P positiv definit ist, dann reduziert sich die Menge S auf den Punkt $\mathbf{q}_a = \mathbf{0}$. Daraus folgt, dass der Arbeitspunkt $\mathbf{q}_a = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil ist (siehe auch [Lé-Tien, 2010, S. 57]). \square

5.2 Konsequenzen der dezentralen Regelung

Die Anwendung von dezentralen Reglern bei RA-PKM kann zu antagonistischen (gegensinnigen) Steuerkraftvorgaben zwischen den Aktoren führen. Das Phänomen lässt sich in erster Linie durch die geometrische Unvollkommenheiten zwischen der theoretischen und realen inversen Kinematik des Manipulators begründen. Jedoch können strukturell drei Quellen für die antagonistischen Kräfte verantwortlich sein:

- a) Geometrische Ungenauigkeiten und Unsicherheiten

- b) Mess- und Synchronisierungsfehler
- c) Dezentralisierte Regelung der individuellen Antriebe

Die Effekte durch geometrische Unsicherheiten werden in den Arbeiten von Müller [2010], [Müller, 2009] und [Müller, 2011b] analysiert. Die antagonistischen Kräfte von a) können durch eine Kalibrierung oder Identifikation von kinematischen Größen vermieden werden. An dieser Stelle kann auf die Arbeiten von Zhang u. a. [2008] und Feng u. a. [2008] verwiesen werden, die mithilfe der redundanten Messsysteme geeignete Methoden zur Kalibrierung von geometrischen Größen vorstellen. Das Auftreten von b) und c) verursacht weitere Wechselwirkungen, die in [Müller u. Hufnagel, 2011d] und [Hufnagel u. Müller, 2012] behandelt werden. Die antagonistischen Kräfte, die durch b) auftreten werden häufig durch systematische Fehler erzeugt. So können beispielsweise die inkrementellen Messsysteme durch eine inkurate Referenzierung zueinander oder die finite Auflösung des Messsystems selbst dafür verantwortlich sein. Gegensinnige Kräfte, die einzig durch das dezentrale Regelkonzept auftreten, werden durch c) beschrieben.

5.2.1 Antagonistische Kräfte durch Messfehler

Mit \mathbf{q}_a sollen weiterhin die aktiven Koordinaten bezeichnet werden. Der Messung $\tilde{\mathbf{q}}_a$ sei ein konstanter unbekannter Offsetfehler $\Delta\mathbf{q}_a$ überlagert, so dass für die Messung $\tilde{\mathbf{q}}_a := \mathbf{q}_a + \Delta\mathbf{q}_a$ gilt. Mit der Führungsgröße \mathbf{q}_a^d , kann der reale Gelenkfehler des Manipulators durch $\tilde{\mathbf{e}}_a = \mathbf{q}_a^d - \tilde{\mathbf{q}}_a$ ausgedrückt werden. Unter Berücksichtigung des Gelenkfehlers ergibt sich der dezentrale PD-Regler zu

$$\mathbf{c} = \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{e}}_a + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_a \quad (5.6)$$

Aufgrund des Kalibrieroffsets $\Delta\mathbf{q}_a$ kann die vorgegebene Pose nicht oder nur teilweise erreicht werden, wodurch sich stationäre Steuerkräfte einstellen, die keine Bewegung des EE auslösen. Diese Kräfte \mathbf{c}^0 befinden sich im Nullraum der Verteilungsmatrix $\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$, sodass

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}^T(\mathbf{q}) \mathbf{c}^0 \quad (5.7)$$

gilt.

Anmerkung 5.2.1. Neben den Fehlern bei systematischen Kalibrierungsoffsets $\Delta\mathbf{q}_a$ der inkrementellen Drehgeber, kann eine unzureichende Auflösung bei der Messung ebenfalls zu antagonistischen Kräften führen. Die Wechselwirkung aus antagonistischen Kräften und diskontinuierlichen Fehlern im Bildraum führen oft zu Schwingungen, die bei einer groben Messauflösung auftreten.

Für die Stabilität des geregelten RA-PKM mit Kalibrierungsoffset gilt:

Lemma 5.2.1 (Stabilität des PD Reglers unter Berücksichtigung eines Kalibrierungsoffset [Müller u. Hufnagel, 2011d]). *Der PD-Regler (5.6) erreicht für eine Trajektorie \mathbf{q}_a^d asymptotische Stabilität*

Beweis. Analog zu Lemma 5.1.1 kann eine LYAPUNOV-Funktion

$$V(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_a^T \widehat{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}}_a + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{e}}_a^T \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{e}}_a$$

für Trajektorien $\mathbf{q}_a(t)$ angegeben werden. Die zeitliche Ableitung führt unter Berücksichtigung der Schiefsymmetrie von $\dot{\widehat{\mathbf{M}}} - 2\widehat{\mathbf{K}}$ nach Lemma 4.5.1 zu

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\mathbf{q}}_a^T \widehat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}_a + \dot{\mathbf{q}}_a^T \dot{\widehat{\mathbf{M}}} \dot{\mathbf{q}}_a + \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_a^T \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{e}}_a \\ &= -\dot{\mathbf{q}}_a^T \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}}_a + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_a^T \left(\dot{\widehat{\mathbf{M}}} - 2\widehat{\mathbf{K}} \right) \dot{\mathbf{q}}_a \\ &= -\dot{\mathbf{q}}_a^T \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}}_a. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die asymptotische Stabilität folgt aus dem Invarianzprinzip von KRASOVSKII-LASALLE analog zu Lemma 5.1.1. \square

5.2.2 Antagonistische Kräfte durch das Regelkonzept

Aus Gleichung (5.7) resultiert unmittelbar, dass es durch das lineare Regelkonzept zu antagonistischen Stellgrößen, die im Kern von \mathbf{A}^T liegen, kommen kann. Dezentrale Regelung bedeutet, dass jede kinematische Kette individuell geregelt wird, ohne Koppelbedingungen der kinematischen Schleifen zu berücksichtigen.

Beispiel 5.2.1 (Synchronisierung der PKM-Unterstrukturen des Funktionsmusters). Der 2RRR/RR RA-PKM kann gedanklich in zwei nicht-redundante PKM Teilsysteme mit je zwei Freiheitsgraden zerlegt werden (Abbildung 5.1). Die Synchronisierung der zwei PKM Teilsysteme zu einem RA-PKM mit ebenfalls zwei Freiheitsgraden wird durch die Erfüllung der Zwangsbedingungen erreicht. Fehlt diese Synchronisierung entstehen zwangsläufig gegensinnige Steuerkräfte. Dieser Zustand wird beispielhaft in Abbildung 5.1 gezeigt, in der der EE eine lineare Bahn fahren soll. Aus (5.6) wird der Gelenkfehler linear gewichtet (lineare Regelung) wodurch sich ein Synchronisierungsfehler aufgrund des nichtlinearen Konfigurationsraums des PKM einstellt. Zur Verdeutlichung wird der Synchronisierungsfehler nach einem längeren Zeitschritt schematisch gezeigt. Somit erzeugen neben systematischen Kalibrierungsfehlern auch Gelenkfehler und Trajektorien-Vorgabeschritte bei dezentralen linearen Reglern antagonistische Steuerkräfte.

5.2.3 Ansatz zur Kompensation antagonistischer Stellgrößen

Da sich sämtliche antagonistische Steuerkräfte im Nullraum von \mathbf{A}^T befinden, ergibt sich daraus ein Ansatz zur Kompensation. Gegensinnige Steuerkräfte, hervorgerufen von b) und c), können eliminiert werden, indem alle Elemente die sich im Nullraum von \mathbf{A}^T befinden, aus den Steuerkräften \mathbf{c} entfernt werden. Die Antriebsgrößen,

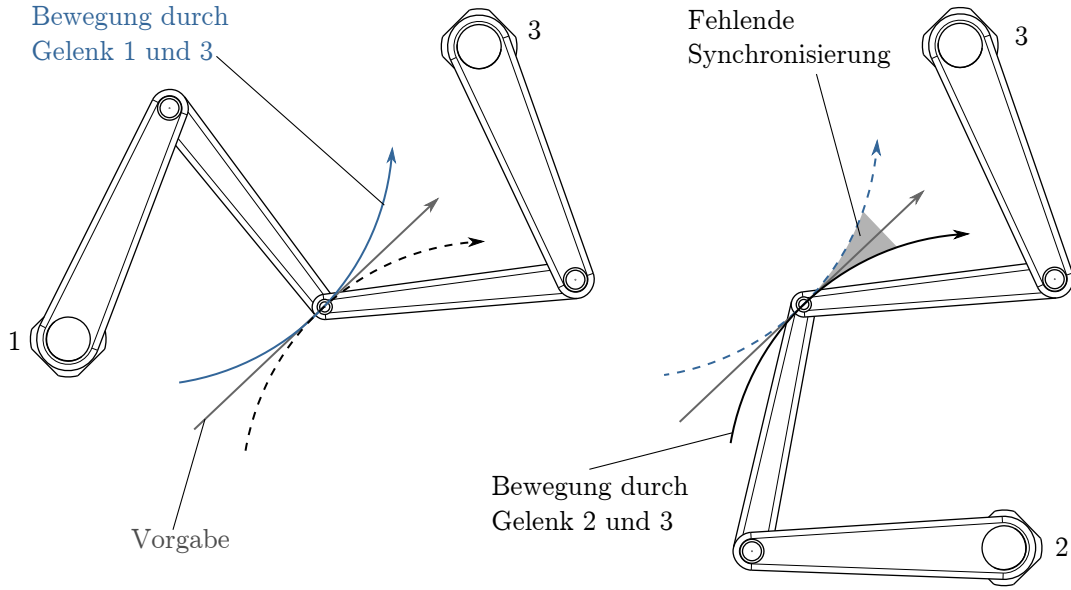


Abbildung 5.1: Synchronisierungsfehler durch die dezentrale Regelung in einer Teilsystembetrachtung

die eine Verspannung hervorrufen, werden mit \mathbf{c}^0 bezeichnet. Mit der folgenden Beziehung wird ein passendes Filter gefunden:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{A}^T} := \mathbf{I}_m - \mathbf{N}_{\mathbf{A}^T}, \quad (5.9)$$

wobei $\mathbf{N}_{\mathbf{A}^T} = \mathbf{I}_m - (\mathbf{A}^T)^+ \mathbf{A}^T$ eine Projektionsmatrix ist, die einen beliebigen Vektor in den Nullraum von \mathbf{A}^T projiziert. Durch die Multiplikation mit (5.9) werden Antriebsgrößen in einen Unterraum von \mathbf{A}^T projiziert, so dass keine Nullraumelemente mehr vorhanden sind [Hufnagel u. Müller, 2012]. Die Matrix $(\mathbf{A}^T)^+ := \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ wird als die MOORE-PENROSE-Pseudoinverse von \mathbf{A}^T bezeichnet, die sich außerhalb von Singularitäten aus dem Optimierungsproblem

$$(\mathbf{c} - \mathbf{c}^0)^T (\mathbf{c} - \mathbf{c}^0) \rightarrow \min$$

ergibt [Hufnagel u. Müller, 2012]. Durch die Projektion mit $\mathbf{R}_{\mathbf{A}^T}$ lassen sich die effektiven Antriebskräfte

$$\mathbf{c}_{\text{eff}} = \mathbf{R}_{\mathbf{A}^T} \mathbf{c}, \quad \mathbf{R}_{\mathbf{A}^T} = (\mathbf{A}^T)^+ \mathbf{A}^T \quad (5.10)$$

berechnen. Hierbei sind \mathbf{c} vorgegebene Antriebskräfte eines beliebigen Reglerkonzepts. Generell können die Antriebskräfte durch $\mathbf{c}_{\text{eff}} = \mathbf{R}_{\mathbf{A}^T} \mathbf{c}$ in effektive und durch $\mathbf{c}^0 = \mathbf{N}_{\mathbf{A}^T} \mathbf{c}$ in ineffiziente, die im Nullraum von \mathbf{A}^T liegen, zerlegt werden. Die Addition beider Anteile ergibt wieder die gesamte Antriebskraft: $\mathbf{c} = \mathbf{c}_{\text{eff}} + \mathbf{c}^0$. Die Projektion hat keinen Einfluß auf die Trajektorienfolge des Manipulators, da $\mathbf{A}^T \mathbf{R}_{\mathbf{A}^T} = \mathbf{A}^T$. In den Arbeiten von Müller u. Hufnagel [2011c] und [Hufnagel u. Müller, 2012] wird dieses Filter als *Antagonism Filter (AF)* bezeichnet.

5.2.4 Implementierung in industrielle Positionsregelungen

Industrielle Servoumrichter, haben häufig feste Reglerstrukturen implementiert, die dem Anwender eine Geschwindigkeits- oder Positionsvorgabe gestatten. Neben der klassischen PD-Struktur wird häufig die so genannte P-PI-Kaskadenregelung implementiert, die sich durch ein breites Anwendungsfeld hervorhebt. Dem Anwender wird es ermöglicht, durch „Auftrennen“ der unterlagerten Regelkreise Führungsgrößen für Stromregler, Geschwindigkeitsregler oder zuletzt dem Positionsregler vorzugeben. Des Weiteren werden Reibungseffekte in den Antrieben durch den vorhandenen I-Anteil im Geschwindigkeitsregler weitestgehend kompensiert, so dass die Positionsregelung eine stationäre Genauigkeit aufweist.

Die vorgegebenen Reglerstrukturen verhindern bislang den Einsatz des in Gleichung (5.10) beschriebenen AF auf industrieller Hardware. Statt der Projektion der Drehmomente \mathbf{c} (5.10) kann der Trajektorienfehler auch in den Bildraum von $\mathbf{A}^T \mathbf{K}_P$ beziehungsweise $\mathbf{A}^T \mathbf{K}_D$ projiziert werden. Daraus ergibt sich der so genannte effektive Trajektorienfehler \mathbf{e}_{eff} und $\dot{\mathbf{e}}_{\text{eff}}$, der durch

$$\mathbf{e}_{\text{eff}} = (\mathbf{I}_m - \mathbf{N}_{\mathbf{A}^T \mathbf{K}_P}) (\mathbf{q}_a^d - \tilde{\mathbf{q}}_a) = \mathbf{R}_{\mathbf{A}^T \mathbf{K}_P} \tilde{\mathbf{e}}_a \quad (5.11a)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{\text{eff}} = (\mathbf{I}_m - \mathbf{N}_{\mathbf{A}^T \mathbf{K}_D}) (\dot{\mathbf{q}}_a^d - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_a) = \mathbf{R}_{\mathbf{A}^T \mathbf{K}_D} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_a \quad (5.11b)$$

beschrieben wird. Unter der Voraussetzung, dass die Trajektorienvorgabe durch $\mathbf{q}_a^d \in \text{ran}(\mathbf{A}^T)$ vollständig im Bild der Steuergrößenverteilungsmatrix liegt, wird die Solltrajektorie derart korrigiert, dass keine gegensinnigen Steuerkräfte mehr auftreten. Die formale Umsetzung erfolgt am Trajektoriengenerator mit den Gleichungen

$$\mathbf{q}_{\text{eff}}^d = \tilde{\mathbf{q}}_a - \mathbf{e}_{\text{eff}} \quad (5.12a)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{\text{eff}}^d = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_a - \dot{\mathbf{e}}_{\text{eff}}. \quad (5.12b)$$

Die Gleichungen (5.11) bis (5.12) ergeben das Blockschaltbild in Abbildung 5.2. Danach kann das Korrekturglied (AF) zwischen Trajektoriengenerator und einem industriellen Umrichter geschaltet werden. Häufig werden die Verstärkungsmatrizen der individuellen PD-Regler durch $\mathbf{K}_P = K_P \mathbf{I}_m$ und $\mathbf{K}_D = K_D \mathbf{I}_m$ mit der $m \times m$ Einheitsmatrix \mathbf{I}_m gewählt. Dieser Spezialfall, bei dem alle Verstärkungen dieselben Werte haben, vereinheitlicht die Projektionsmatrizen, so dass $\mathbf{N}_{\mathbf{A}^T \mathbf{K}_P} = \mathbf{N}_{\mathbf{A}^T \mathbf{K}_D} = \mathbf{N}_{\mathbf{A}^T}$ gilt.

Diese Eigenschaft ermöglicht eine intuitive Umsetzung des AF , ohne Vorwissen über den vorliegenden dezentralen Reglers. Die Berechnung der effektiven Trajektorienfehler eines P-PI-Kaskadenreglers wird in Abbildung 5.3 erläutert, wobei mit s der LAPLACE-Operator bezeichnet wird.

Anmerkung 5.2.2. Die Gleichungen (5.11) verlieren Ihre Gültigkeit, wenn sie ausmultipliziert werden. Das liegt daran, dass die Nullraumprojektion durch $\mathbf{N}_{\mathbf{A}^T \mathbf{K}_P}$ und $\mathbf{N}_{\mathbf{A}^T \mathbf{K}_D}$ nicht eindeutig ist. Demnach ergibt die Projektion eines Orts- oder Geschwindigkeitsvektors zwei beliebige Vektoren im Nullraum von \mathbf{A}^T . Es sei an dieser

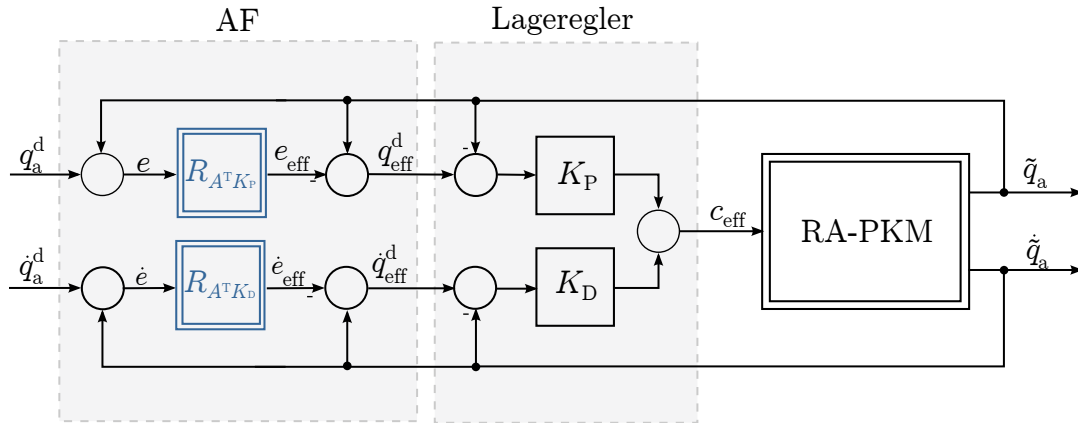


Abbildung 5.2: Korrektur am Trajektoriengenerator eines dezentralen Lagereglers mithilfe des AF. Nichtlineare Teilsysteme werden durch doppelte Rahmenlinien hervorgehoben

Stelle weiter angemerkt, dass dadurch keinesfalls Kalibrierungsfehler aus (5.11) berechnet werden können.

Anmerkung 5.2.3. Bei unsymmetrischen kinematischen Strukturen oder verschiedenen Antrieben kann es sinnvoll sein, eine Gewichtung der Kräfte vorzunehmen. Dafür kann eine verallgemeinerte Pseudoinverse

$$\left(\mathbf{A}^T\right)_{\mathbf{W}}^+ = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}\right)^{-1}$$

mit der positiv definiten Gewichtungsmatrix $\mathbf{W} = \text{diag}(W_1 \dots W_m)$, wie beispielsweise in [Müller u. Hufnagel, 2011d], [Hufnagel u. Müller, 2012] beschrieben wird, verwendet werden. Mit den Gewichtungsfaktoren wird in diesem Fall eine Reduzierung der Steuerkräfte in (5.11) eingestellt.

5.3 Experimentelle Ergebnisse

Die Robustheit des AF (5.11) unter Verwendung eines linearen dezentralen Reglers wird mit Experimenten am industriellen Prototypen mit *Torque-Motoren* aus Kapitel 2 erläutert. Der Mechanismus kann bis auf die Antriebe als reibungsfrei betrachtet werden. Die Lageregelung der Antriebe erfolgt dezentral durch den P-PI-Kaskadenregler (Abbildung 5.3). Die positiv definiten Verstärkungsmatrizen wurden experimentell mit $\mathbf{K}_P = 150 \cdot \mathbf{I}_3$ und $\mathbf{K}_D = 7 \cdot \mathbf{I}_3$ gewählt, wobei \mathbf{I}_3 eine 3×3 Einheitsmatrix ist. Die Zeitkonstante T_N wurde mit 80 ms eingestellt. Die berechneten Drehmomente des Reglers können umschaltbar entweder direkt oder über das AF (5.11) an die Umrichter vorgegeben werden.

Die vorgegebene EE-Trajektorie in Abbildung 5.4 ist eine Gerade zwischen den Punkten ② und ③. Die Verfahzeit der einzelnen Segmente beträgt dabei 2s und die Haltezeit an den Ecken beträgt 0,2s.

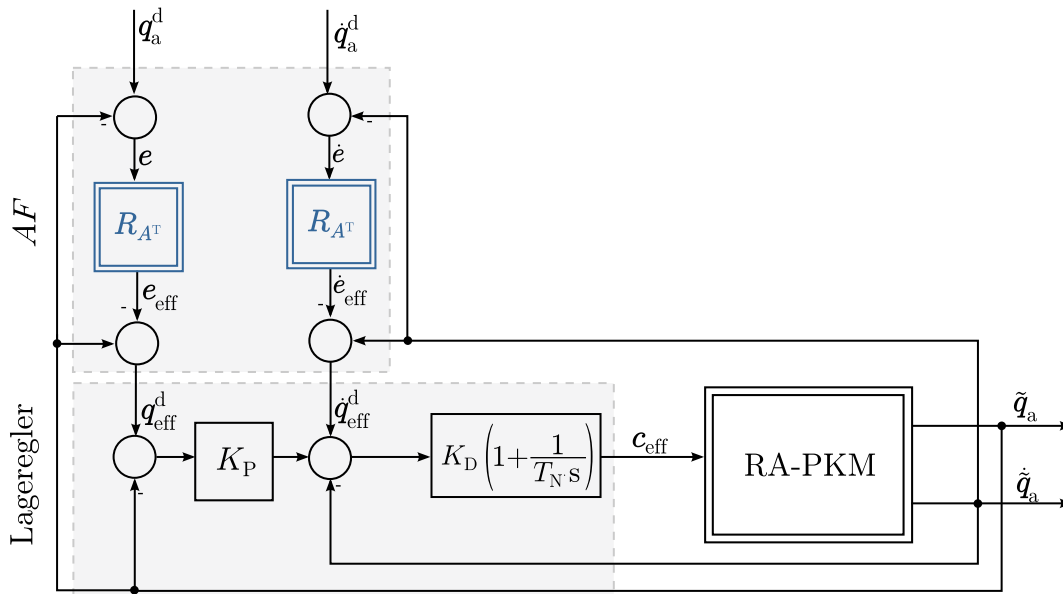


Abbildung 5.3: Korrektur am Trajektoriengenerator eines dezentralen P-PI Lagereglers mithilfe des AF . Nichtlineare Teilsysteme werden durch doppelte Rahmenlinien hervorgehoben

Der Verlauf der Drehmomente während der Fahrt ohne AF wird in Abbildung 5.5 gezeigt. Die Referenzierung der Inkrementalencoder verursacht antagonistische Drehmomente zu Beginn der Trajektorie, die sich aufgrund des Integralanteils der dezentralen Achsregler akkumulieren. Die maximalen Drehmomente befinden sich über der Begrenzung bei 8 Nm, während die Verteilung unter den Antrieben sehr unsymmetrisch ist.

Dieselbe Trajektorie wird nun unter Verwendung des AF ein weiteres Mal durchfahren, wodurch sich der Drehmomentverlauf in Abbildung 5.6 einstellt. Dabei ist eine deutliche Verbesserung bei der Verteilung der Antriebskräfte ersichtlich. Die maximalen Drehmomente liegen nun bei ca. 2 Nm. Die stationären Drehmomente am Ende der Trajektorie konvergieren unter das Niveau der Reibungswerte (ca. 0,5-1,0 Nm) der Antriebe. Die Bahnfehler beider Experimente werden in einem gemeinsamen Graph in Abbildung 5.7 dargestellt. Abweichungen von der Solltrajektorie liegen im Bildraum von \mathbf{A}^T und werden darum nicht durch das AF beeinflusst.

Die Messungen zeigen, dass das AF eine deutliche Verbesserung im Drehmomentverlauf bewirkt, ohne die Bahnabweichung zu erhöhen.

Anmerkung 5.3.1. Es sei hier angemerkt, dass bestimmte Anwendungen eine gezielte Verspannung voraussetzen, um Getriebelose zu kompensieren [Kock u. Schumacher, 2000b], [Kock u. Schumacher, 2000a] oder eine Mindestverspannung in Seilen zu garantieren [Bruckmann, 2010]. Das AF kann dann als ein vorgeschaltetes Glied eingesetzt werden, um den Nullraum zuerst von unkontrollierter Verspannung zu befreien, bevor die gewünschte Verspannung auf die Bewegungskräfte addiert wird.

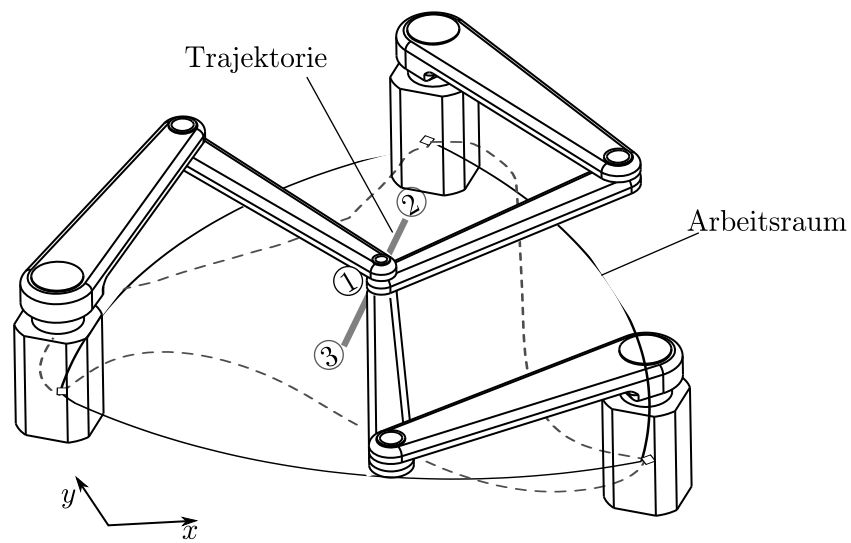


Abbildung 5.4: Vorgegebener EE-Pfad für die Experimente mit den dezentralen Reglern

Bahnpunkte	1	2	3
Koordinaten in mm	(216/223)	(296/303)	(166/173)
Strecke in m	0,11	0,18	0,07

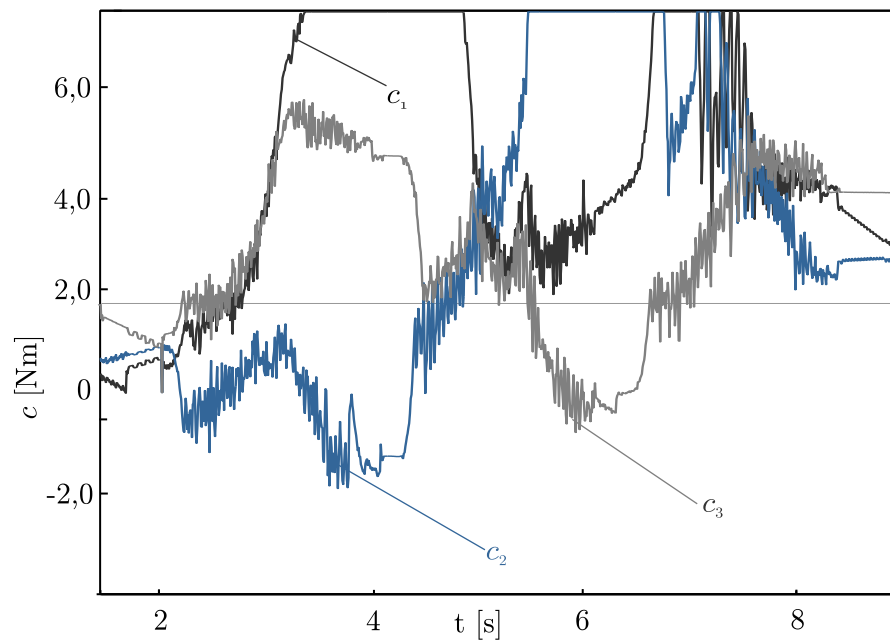


Abbildung 5.5: Verlauf der Drehmomente ohne AF

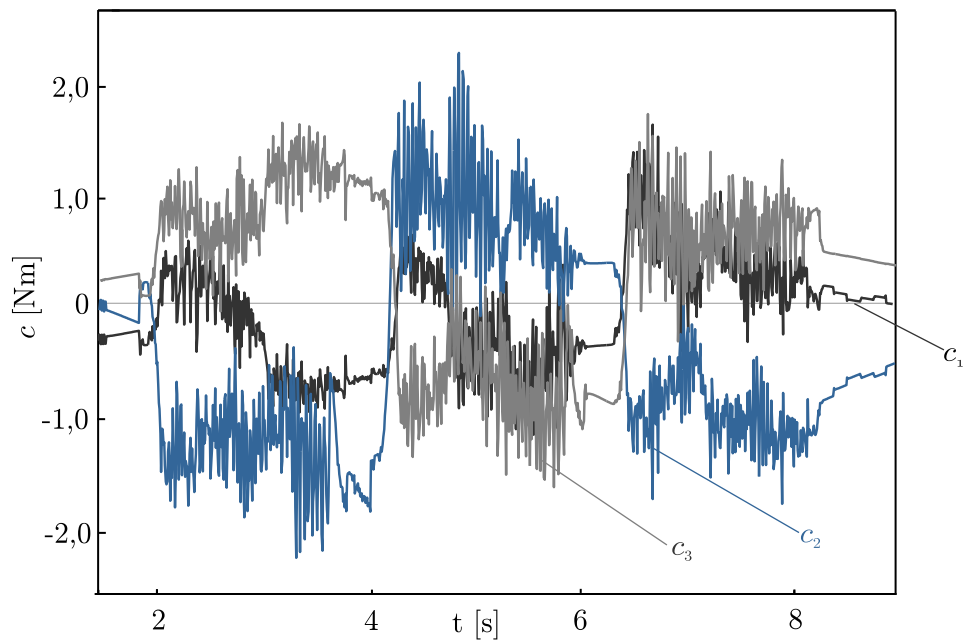


Abbildung 5.6: Verlauf der Drehmomente mit AF

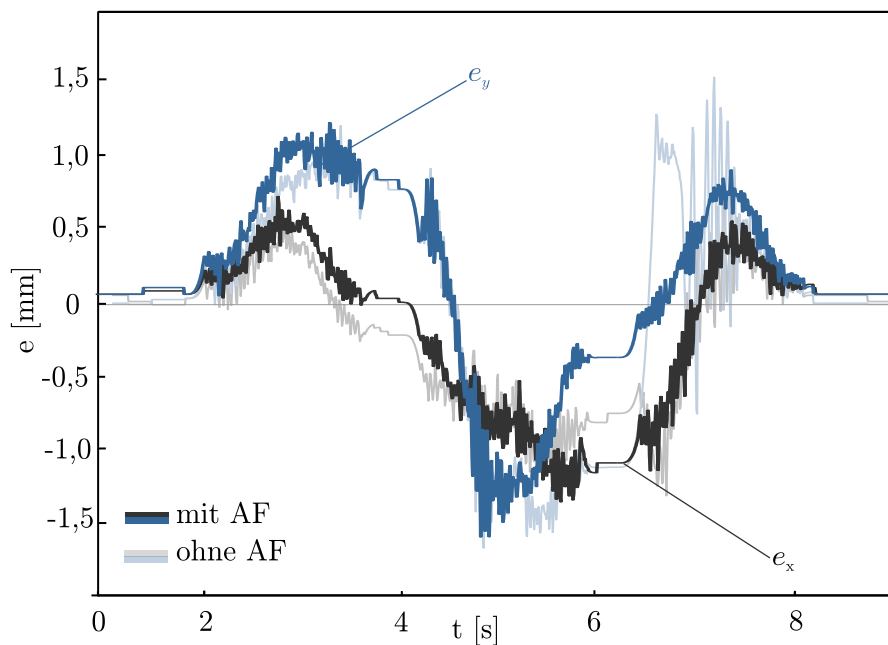


Abbildung 5.7: Verlauf der Gelenkfehler der aktiven Gelenke mit und ohne AF

6 Modellbasierte Regelung und Beobachter

In diesem Kapitel wird die modellbasierte Regelung von RA-PKM behandelt. Zunächst wird mit der Auflösung der Antriebsredundanz ein zentrales Thema der inversen Dynamik behandelt. Dabei werden reale Antriebskräfte als äquivalente generalisierte Antriebskräfte dargestellt. Anschließend wird das Trajektorienfolgeproblem mit der Zustandsraumdarstellung behandelt. In Abschnitt 6.3 werden ein nichtlinearer Zustandsbeobachter sowie ein Störgrößenbeobachter für RA-PKM vorgestellt, die eine optimale Einstellung der Reglerverstärkungen ermöglichen. In den weiteren Abschnitten werden exemplarisch zwei modellbasierte Regler für jede Koordinatenformulierung hergeleitet und durch Experimente beurteilt. Im Hinblick auf Parametersingularitäten wird für die Inverse Dynamik in Minimalkoordinaten eine adaptive Koordinatenumschaltung vorgestellt. In Abschnitt 6.8 werden alle Reglerformulierungen zusammengefasst.

6.1 Auflösung der Redundanz

Dieser Abschnitt behandelt die Auflösung der Redundanz bei PKM mit mehr Antrieben als Freiheitsgraden und liefert zugleich den Schlüssel, um bekannte modellbasierte Regelungsverfahren für PKM in gleicher Weise für RA-PKM anzuwenden. Die Beschreibung der Bewegung eines Manipulators kann in verschiedenen Formulierungen

- Minimalkoordinaten (4.3),
- Endeffektorkoordinaten (4.4),
- Antriebskoordinaten (4.5) oder
- redundanten Koordinaten (4.6)

erfolgen. Die Eigenschaften der jeweiligen Formulierung werden durch die sogenannte Struktur- oder Verteilungsmatrix auf den rechten Seiten der Bewegungsgleichungen definiert. Die Strukturmatrix verteilt m äußere Antriebskräfte auf die äußeren Kräfte der jeweiligen Formulierung. Ohne Einschränkung des allgemeinen Falls gilt für eine Formulierung in Minimalkoordinaten die Transformationsgleichung

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{c}, \quad (6.1)$$

die die Steuerkräfte $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ in den Bildraum von $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{\delta \times m}$ transformiert. Für die Rücktransformation gibt es jedoch keine eindeutige Lösung. Mit der Zielsetzung, die energetisch optimale Antriebskraftverteilung zu erhalten, wird die Auf-

lösung als Optimierungsproblem ($\mathbf{c} \rightarrow \min$) definiert. Mithilfe der LAGRANGE-Multiplikatorenmethode

$$\Lambda(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{c} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{v} - \mathbf{A}^T \mathbf{c})$$

lassen sich die Nebenbedingungen durch die skalaren Variablen $\boldsymbol{\lambda}$ (LAGRANGE-Multiplikatoren) in das Optimierungsproblem einbinden. Ein lokales Minimum der Funktion kann beispielsweise mit dem Gradientenverfahren [Schwarz u. Köckler, 2011, S. 300] ermittelt werden. Die Bedingungen für ein lokales Minimum von Λ werden durch

$$\mathbf{0} = \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \Lambda = \mathbf{v} - \mathbf{A}^T \mathbf{c} \quad (6.2a)$$

$$\mathbf{0} = \nabla_{\mathbf{c}} \Lambda = \mathbf{c} - \mathbf{A} \boldsymbol{\lambda} \quad (6.2b)$$

gefunden. Die Auflösung von (6.2) nach $\boldsymbol{\lambda}$ und \mathbf{c} führt zu

$$\mathbf{c} = (\mathbf{A}^T)^+ \mathbf{v}, \quad (\mathbf{A}^T)^+ = \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}. \quad (6.3)$$

Der Ausdruck $(\mathbf{A}^T)^+$ wird als MOORE-PENROSE-Pseudoinverse von \mathbf{A}^T bezeichnet. Eine verallgemeinerte Lösung wird durch die Einführung von Gewichtungsfaktoren erreicht. Die Aufstellung der Optimierungsfunktion ergibt sich unter Berücksichtigung der positiven Gewichtungsmatrix $\mathbf{W} = \text{diag}(W_1, \dots, W_m)$ zu

$$\Lambda(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{W} \mathbf{c} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{v} - \mathbf{A}^T \mathbf{c}).$$

Die Auflösung nach den Antriebskräften erfolgt dann mit einer gewichteten Pseudoinversen

$$(\mathbf{A}^T)_{\mathbf{W}}^+ = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A})^{-1}.$$

Damit lassen sich die Antriebsgrößen untereinander gewichten, um die Antriebsleistung verschiedener Antriebe zu berücksichtigen.

Beispiel 6.1.1 (Verteilung der Antriebskräfte eines Mechanismus mit $m = 3$ Antrieben und $\delta = 2$ Freiheitsgraden). Eine grafische Interpretation der Transformationen (6.1) und (6.3) für einen Manipulator mit $m = 3$ Antrieben und $\delta = 2$ Freiheitsgraden wird in Abbildung 6.1 gezeigt. Darin wird auf der linken Seite ein m -dimensionaler Hyperkubus dargestellt, der durch die maximalen Antriebskräfte \mathbf{c}_{\max} begrenzt ist. Mithilfe der Steuerkraft-Verteilungsmatrix werden die Antriebskräfte im Hyperkubus in deren 2-dimensionales Bild projiziert und umgekehrt. Der Rücktransformation (6.3) unterliegt eine Optimierungsaufgabe, die um zusätzliche Randbedingungen ergänzt werden kann. So wird beispielsweise bei Seilrobotern, die den RA-PKM strukturell sehr ähnlich sind, sichergestellt, dass sich nur positive Kräfte in den Seilen befinden [Bruckmann, 2010]. \square

Diese Nebenbedingung kann bei PKM ebenfalls sinnvoll sein, wie in den Arbeiten von Kock [2001] oder Müller [2008] beschrieben. Eine Anwendung ist die Kompensation von Getriebelose, die durch die Vorspannung der Gelenke erreicht wird [Kock, 2001]. Als Regelstrecke wird ein Systems zweiter Ordnung zugrunde gelegt.

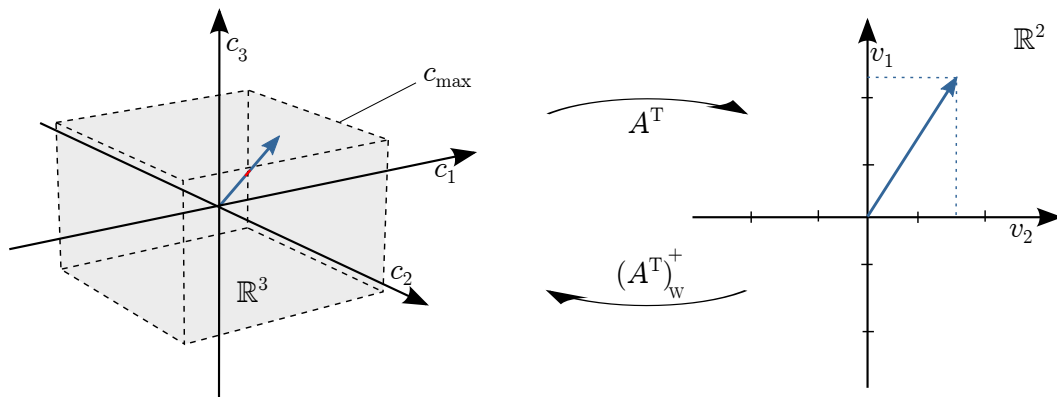


Abbildung 6.1: Auflösung der Antriebsredundanz für $m = 3$ Antriebe und eine Minimalkoordinaten Formulierung in \mathbb{R}^2

Die Dimension des Nullraums der Steuergrößenverteilungsmatrix sei durch $\rho = m - \alpha$, also dem Grad der Redundanz (DOR) definiert. Mithilfe des Kerns \mathbf{B} der Steuergrößenverteilungsmatrix können Kräfte $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^\rho$ durch $\mathbf{c}^0 = \mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}$ in den Nullraum von \mathbf{A}^T transformiert werden, die keine Bewegung des RA-PKM erzeugen. Die grafische Darstellung einer solchen Transformation wird in Abbildung 6.2 anhand eines Manipulators mit $m = 3$ Antrieben und einem $\rho = 1$ -dimensionalen Kern verdeutlicht.

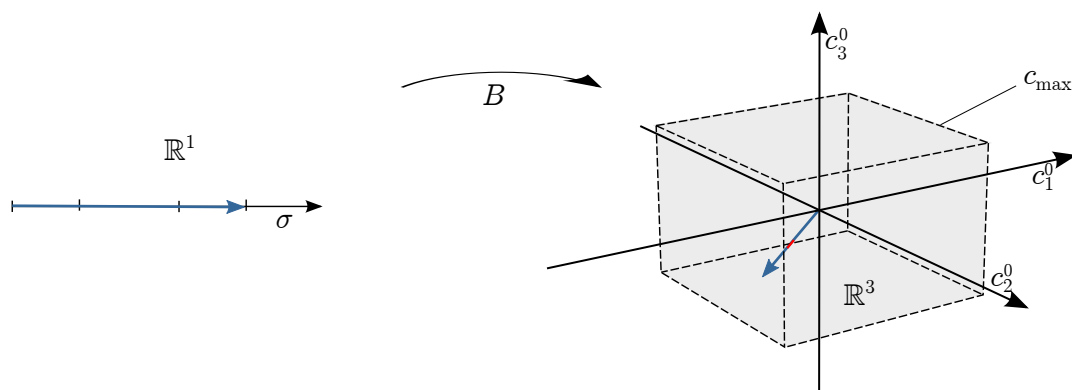


Abbildung 6.2: Projektion von Kräften \mathbf{c}^0 in den Nullraum für $m = 3$ Antriebe und einen eindimensionalen Nullraum mithilfe der Basis der Strukturmatrix

6.2 Das Trajektorienfolgeproblem

Die Regelung eines Manipulators sieht vor, dass dessen EE einer gegebenen Bahn, deren Geschwindigkeitsprofil und Beschleunigungsprofil, folgt. Die Regelstrecke eines PKM wird als eingangs-affines System bezeichnet. Dabei ist sein Verhalten bezüglich Steuergrößen linear, und bezüglich Zustandsgrößen nichtlinear .

6.2.1 Klassifizierung von PKM

Definition 6.2.1. Die Dimension des Antriebsraums (DOA) wird durch die Beziehung

$$\alpha := \text{rank}(\mathbf{A}) \quad (6.4)$$

definiert. Wenn $\alpha < \delta$ ist wird der PKM als unteraktuiert und falls $\alpha = \delta$ ist als vollaktuiert bezeichnet. Der Grad der Redundanz (DOR) kann durch die Kennzahl $\rho = \alpha - \delta$ definiert werden. Weiter gilt, wenn $\rho = 0$ wird der PKM als nicht-redundant und mit $\rho > 0$ als redundant angetrieben bezeichnet.

6.2.2 Nichtlineare Zustandsraumdarstellung

Eine dynamisches PKM-Modell aus δ Gleichungen zweiter Ordnung, kann im nicht-linearen Zustandsraum durch die Vektordifferentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \quad (6.5a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (6.5b)$$

mit 2δ Gleichungen erster Ordnung und den Zustandsgrößen $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2]^\text{T}$ dargestellt werden. Die Reihenfolge der Größen in \mathbf{x} sind zunächst die Gelenkkoordinaten in \mathbf{x}_1 und dann deren zeitlichen Ableitungen in \mathbf{x}_2 . Es sei noch angemerkt, dass diese Zusammenstellung von Zustandsgröße und zeitlicher Ableitung auch als Tangentialbündel \mathcal{TV} bezeichnet wird. Für die Zustandsgrößen in Minimalkoordinaten $\mathbf{x} = [\mathbf{q}_2 \ \dot{\mathbf{q}}_2]^\text{T}$ werden die Abbildungen in (6.5) mit

$$\mathbf{f} := \left[\overline{\mathbf{M}}^{-1} \left(\mathbf{A}^\text{T} \mathbf{c} - \overline{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{q}}_2 - \overline{\mathbf{Q}} \right) \right], \quad \mathbf{g} := \mathbf{q}_2 \quad (6.6)$$

angegeben. Der Vektor der Ausgänge der nichtlinearen Zustandsraumdarstellung, wird mit \mathbf{y} bezeichnet. In der Regel definiert man messbare Zustandsgrößen als Ausgänge. Daher bietet es sich an, die Gelenkkoordinaten im Zustandsvektor \mathbf{x}_1 als Ausgänge zu wählen.

6.2.3 Nichtlineare Beobachtungsnormalform

Die Beobachtbarkeit eines Systems ist die Voraussetzung, um nicht-messbare Zustände mithilfe eines Zustandsbeobachters zu schätzen. Wenn ein System in der Beobachtungsnormalform vorliegt, lässt sich daraus sofort auf dessen Beobachtbarkeit schließen [Adamy, 2009]. Zur Herleitung der Beobachtungsnormalform wird ein neuer Zustandsvektor \mathbf{z} eingeführt, der die Ausgangsgrößen des Vektors \mathbf{y} aus (6.5)

bis zur ersten zeitlichen Ableitung enthält. Da die Ausgangsgrößen direkt die messbaren Gelenkkoordinaten des Zustandsvektors \mathbf{x}_1 sind, vereinfacht sich die erste Ableitung¹

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \equiv \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \quad (6.7)$$

erheblich. Der vollständige Zustandsvektor \mathbf{z} ergibt sich aus der Eingangs- und Ausgangsbeziehung:

$$\mathbf{z} := \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

In diesem Fall entspricht \mathbf{z} gleich dem Zustandsvektor \mathbf{x} , wodurch unmittelbar die Beobachtbarkeit nach Satz 6.2.1 bewiesen ist. Dieser einfache Nachweis der Beobachtbarkeit ergibt sich dank dem rein differentiellen Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen durch die Abbildungen (6.6).

Satz 6.2.1 (Globale Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme [Adamy, 2009]). *Ein System mit der Zustandsraumdarstellung*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{c}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

ist global beobachtbar, wenn die Abbildung

$$\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

eindeutig nach \mathbf{x} auflösbar ist. Diese Eigenschaft wird auch als Diffeomorphismus zwischen den Zustandsgrößen und den Ausgangsgrößen bezeichnet.

Die Bewegungsgleichungen im nichtlinearen Zustandsraum (6.5) können durch eine Umformung in die so genannte nichtlineare Beobachtbarkeitsform

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_2 \\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{z}, \mathbf{c}) \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

gebracht werden. Durch die Wahl der Ausgangsgrößen in (6.5), vereinfacht sich die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{z}$ zu $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1$. Die Funktion $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{z}, \mathbf{c})$ beinhaltet sämtliche Nichtlinearitäten der Formulierung. Die Matrixschreibweise der Beschreibung wird häufig in der Form

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{z} + \mathbf{b}_0 \boldsymbol{\psi}(\mathbf{z}, \mathbf{c}) \quad (6.10a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}_0^T \mathbf{z} \quad (6.10b)$$

mit

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_\delta \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_\delta \end{bmatrix}, \mathbf{c}_0^T = [\mathbf{I}_\delta \quad \mathbf{0}] \quad (6.10c)$$

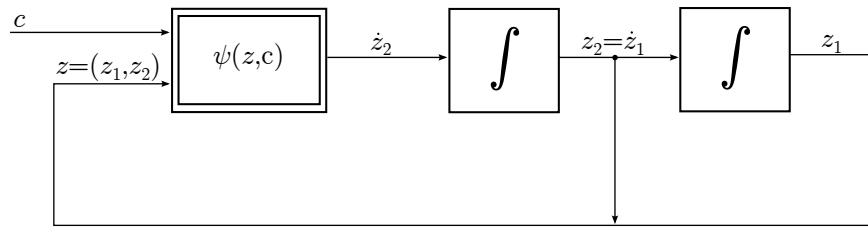


Abbildung 6.3: Blockschaltbild der nichtlinearen Normalform für ein RA-PKM, wobei das nichtlineare Teilsystem durch zweifache Rahmenlinien hervorgehoben wird

angegeben, wobei \mathbf{I}_δ eine $\delta \times \delta$ Einheitsmatrix ist. Man bezeichnet diese Darstellung als BRUNOVSKY-Normalform [Rothfuss u. a., 1997], [Adamy, 2009]. Diese Normalform besteht im Wesentlichen aus δ Integratorketten (bestehend aus je zwei Integratoren) sowie derselben Anzahl an Nichtlinearitäten $\psi \in \mathbb{R}^\delta$, wie in Abbildung 6.3 dargestellt wird. Für eine Formulierung in Minimalkoordinaten kann die Nichtlinearität durch

$$\psi = \overline{\mathbf{M}}^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{c} - \overline{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{q}}_2 - \overline{\mathbf{Q}}) \quad (6.11)$$

angegeben werden.

Anmerkung 6.2.1. Durch die notwendige Inversion der Massenmatrix in den Zustandsraumdarstellungen (6.10) sowie (6.6) kommen für diese lediglich Formulierungen der Bewegungsgleichungen in minimalen Gelenk- oder Endeffektor-Koordinaten in Frage.

6.2.4 Entwurf des Regelungskonzepts

Ein Konzept zur asymptotischen Trajektorienfolge wird in Abbildung 6.4 dargestellt. Das System besteht aus der Vorsteuerung ② zur vollständigen oder teilweisen Kompensation der Nichtlinearitäten des RA-PKM. Mithilfe eines Folgeregler ① wird das System gegenüber Modellfehler und Störungen stabilisiert [Rothfuss u. a., 1997, S. 39]. Des Weiteren wird ein Zustandsbeobachter ④ für nicht messbare Zustände verwendet. Die stationäre Genauigkeit des Reglerkonzepts hängt von der Verwendung eines Störgrößenbeobachters ③ ab.

Anmerkung 6.2.2. Der Folgeregler ① und die Vorsteuerung ② werden neben den minimalen Gelenk- und Endeffektor-Koordinaten auch für die redundanten Formulierungen hergeleitet.

¹Für einen autonomen PKM, also $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ wird die Ableitung der skalarwertigen Funktion $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ entlang eines Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ als LIE-Ableitung bezeichnet.

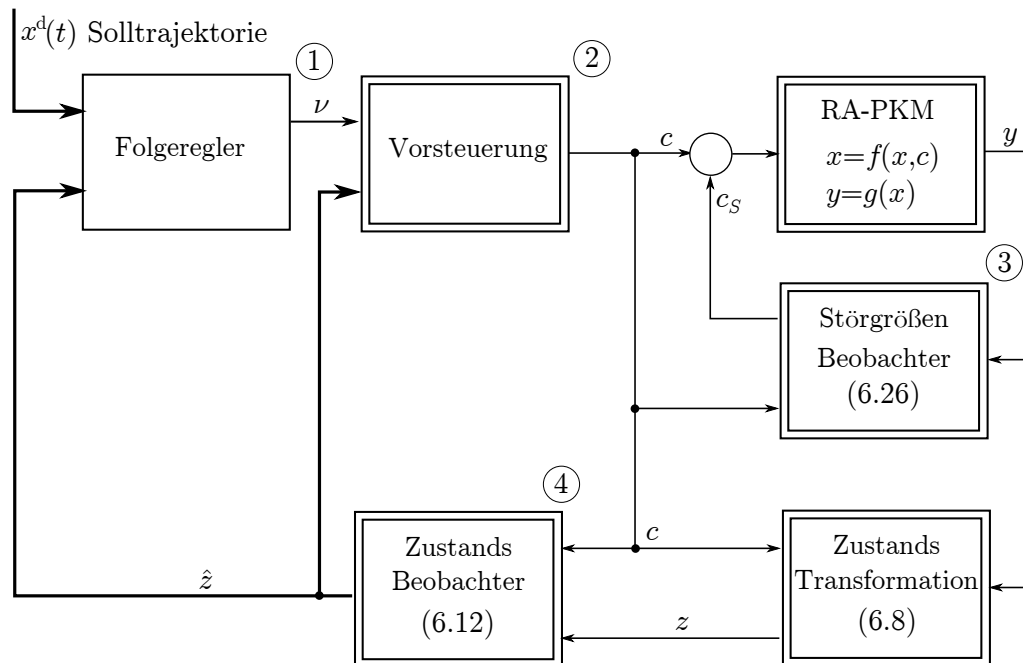


Abbildung 6.4: Blockschaltbild des vollständigen Reglerkonzepts für einen asymptotischen Trajektorienfolgeregler. Dickere Pfeile bedeuten, dass neben der angezeigten Größe auch deren zeitliche Ableitungen benötigt werden. Nichtlineare Teilsysteme werden mit doppelten Rahmenlinien hervorgehoben

6.3 Nichtlineare Beobachter

6.3.1 Nichtlinearer *High-Gain*-Beobachter für Zustandsgrößen

Die Verfahren zur Lageregelung für PKM, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, erfordern die Rückkopplung der Zustandsgrößen. In der Praxis wird aufgrund technischer oder ökonomischer Randbedingungen darauf verzichtet, alle Zustandsgrößen direkt zu messen. Bei PKM wird davon ausgegangen, dass die aktiven Gelenkkoordinaten durch Inkrementalencoder im Aktor gemessen werden. Es besteht die Möglichkeit, die Gelenkgeschwindigkeiten mithilfe einer zeitlichen Ableitung der Encodersignale zu berechnen, jedoch erfordert diese Methode in der Regel eine nachträgliche Filterung, wodurch die Dynamik der Messung beeinträchtigt wird oder im schlimmsten Fall eine hohe Phasenverschiebung aufweist. Des Weiteren liefert die zeitliche Ableitung bei sehr langsamen Geschwindigkeiten keine brauchbaren Ergebnisse.

In diesem Abschnitt wird ein so genannter nichtlinearer *High-Gain*-Beobachter für RA-PKM vorgestellt, um Geschwindigkeiten zu rekonstruieren. Die Grundstruktur des verwendeten Beobachters entspricht einem LUENBERGER-Beobachter für lineare Systeme, wie in [Unbehauen, 2008], [Föllinger, 1994] beschrieben, verwendet jedoch das nichtlineare Modell, siehe [Khalil, 2002], [Khalil, 2008] und [Adamy, 2009]. Wie der LUENBERGER-Beobachter enthält der *High-Gain*-Beobachter das vollständige

Modell der Regelstrecke. Mithilfe von Messgrößen wird der Beobachter so gestützt, dass er eine asymptotische Stabilität bezüglich seines Beobachterfehlers aufweist. Konvergiert dieser Fehler gegen null, so können die beobachteten Zustandsgrößen für die zugrunde liegende Lageregelung verwendet werden. Die Formulierung bei RA-PKM findet mithilfe der BRUNOVSKY-Normalform in generalisierten Zustandsgrößen statt, so dass die Auflösung der Redundanz nach Abschnitt 6.1 berücksichtigt wird. Diese Formulierung hat den Vorteil, dass die Systemordnung des Beobachters entsprechend den gewählten Koordinaten minimal aufgestellt werden kann.

Ansatz des Beobachters

Die Zustandsgrößen der nichtlinearen BRUNOVSKY-Normalform werden für die Beobachtergleichung durch $(\hat{\cdot})$ gekennzeichnet. Nimmt man an, dass Beobachter und reale Strecke mit den gleichen Stellgröße \mathbf{c} beaufschlagt werden und beide Systeme identisch sind, könnten alle Zustandsgrößen aus dem Modell verwendet werden, falls die Anfangszustände \mathbf{z}_0 der realen Strecke bekannt wären. Dies ist praktisch unmöglich, so dass der Beobachter durch Messwerte gestützt werden muss.

Das Modell in (6.10) sei nach Satz 6.2.1 global beobachtbar, wodurch die Gleichung des nichtlinearen *High-Gain*-Beobachters durch

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}_O \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b}_O \psi(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{c}) + \mathbf{k}_O (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (6.12)$$

angegeben werden kann. Die Schätzfehler der messbaren Größen $\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ werden dabei mit der Verstärkungsmatrix \mathbf{k}_O gewichtet, um den Beobachter zu stabilisieren. Der erste Ansatz für \mathbf{k}_O ist die Blockmatrix

$$\mathbf{k}_O = \begin{bmatrix} k_1 \mathbf{I}_\delta \\ k_2 \mathbf{I}_\delta \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

wobei k_1 und k_2 frei wählbare Konstanten sein sollen. In Abbildung 6.5 wird das Blockschaltbild des *High-Gain*-Beobachters zusammen mit dem Modell des RA-PKM in BRUNOVSKY-Normalform gezeigt. Unter Berücksichtigung des Beobachterfehlers $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}$ und $\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \dot{\mathbf{z}} - \dot{\hat{\mathbf{z}}}$ ergibt sich dessen dynamische Gleichung folgendermaßen:

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = (\mathbf{A}_O - \mathbf{k}_O \mathbf{c}_O^T) \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{b}_O (\psi(\mathbf{z}, \mathbf{c}) - \psi(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{c})) . \quad (6.14)$$

Die Nichtlinearitäten in Gleichung (6.14) können durch

$$\tilde{\psi}(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z}, \mathbf{c}) - \psi(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{c})$$

zusammengefasst werden, um die besondere Struktur des Zustandsbeobachters, die den Zusammenschluss eines linearen und nichtlinearen Systems darstellt, hervorzuheben. Diese Struktur wird als LURE-System bezeichnet [Khalil, 2002]. Das zugehörige Blockschaltbild mit der im Bildbereich beschriebenen linearen Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ wird in Abbildung 6.6 gezeigt, wobei mit s der LAPLACE-Operator bezeichnet wird. Die Eigenwerte der Dynamikmatrix des Schätzfehlers

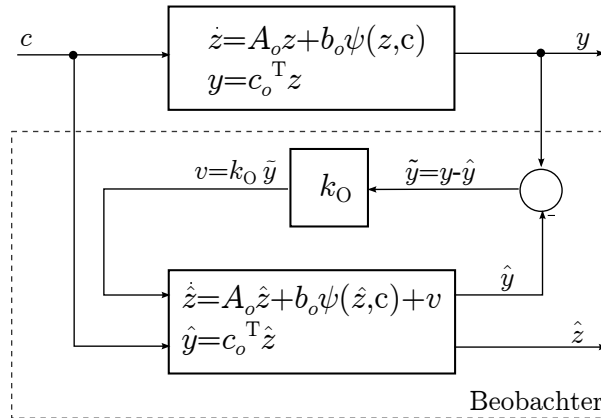


Abbildung 6.5: Blockschaltbild des nichtlinearen Beobachters für RA-PKM nach [Adamy, 2009]

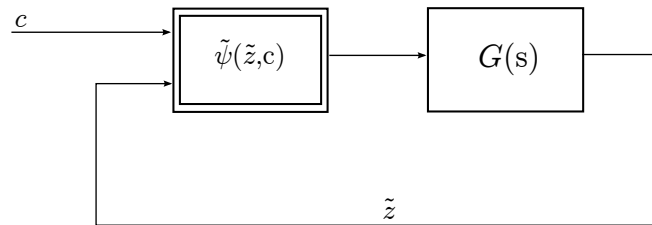


Abbildung 6.6: Fehlerdynamik des nichtlinearen Beobachters als Blockschaltbild dargestellt, wobei das nichtlineare Teilsystem durch zweifache Rahmenlinien hervorgehoben wird

$$\mathbf{A}_O - \mathbf{k}_O \mathbf{c}_O^T = \begin{bmatrix} -k_1 \mathbf{I}_\delta & \mathbf{I}_\delta \\ -k_2 \mathbf{I}_\delta & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

haben für beliebige $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ einen negativen Realteil, womit die asymptotische Stabilität des linearen Teilsystems unmittelbar bewiesen ist.

Einstellung des Beobachters

Bisher wurden sehr wenige Aussagen zur Wahl der Konstanten $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ gemacht. Die aus der Dynamikmatrix resultierenden Übertragungsfunktionen für den linearen Teil des Beobachters sind:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^2 + k_1 s + k_2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_\delta \\ \text{diag}_\delta(s + k_1) \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Das Hauptziel des Beobachters ist die Verringerung des Beobachterfehlers und somit die akkurate Rekonstruktion der Geschwindigkeiten. Wünschenswert ist zudem die Unterdrückung von Störungen. Dahingehend wird von Khalil [2002] ein Ansatz zur Wahl von $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ vorgestellt, um das Supremum der linearen Übertragungsfunktionen $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{G}(j\omega)\|$ zu verringern. Dieser Forderung genügt der Ansatz

$$k_1 = \frac{\alpha_1}{\epsilon}, \quad k_2 = \frac{\alpha_2}{\epsilon^2} \quad (6.17)$$

für positive Konstanten α_1 , α_2 und $\epsilon \ll 1$. Durch Einsetzen von (6.17) in (6.16) kann gezeigt werden, dass die Übertragungsfunktion

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\epsilon}{\epsilon s^2 + \alpha_1 \epsilon s + \alpha_2} \begin{bmatrix} \epsilon \mathbf{I}_\delta \\ \text{diag}_\delta(\epsilon s + \alpha_1) \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

für $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{G}(s) = \mathbf{0}$ wird. Diese Aussage wird jedoch in der Praxis eingeschränkt werden. Im Folgenden soll durch $\nu(t)$ ein Messrauschen simuliert werden, das der Messgröße durch $\mathbf{y} = \mathbf{z}_1 + \nu$ überlagert werden soll. Die Erweiterung der Vektordifferentialgleichung (6.14) liefert die folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_O - \mathbf{k}_O \mathbf{c}_O^T) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}_1 \\ \tilde{\mathbf{z}}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{b}_O (\boldsymbol{\psi}(\mathbf{z}, \mathbf{c}) - \boldsymbol{\psi}(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{c})) + \nu \mathbf{k}_O. \quad (6.19)$$

Für die Beobacherverstärkungen wird der Ansatz in (6.17) eingesetzt wodurch (6.19) zu

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_1 \\ \epsilon \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{\epsilon} \mathbf{I}_\delta & \mathbf{I}_\delta \\ \frac{\alpha_2}{\epsilon} \mathbf{I}_\delta & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}_1 \\ \tilde{\mathbf{z}}_2 \end{bmatrix} + \epsilon \mathbf{b}_O (\boldsymbol{\psi}(\mathbf{z}, \mathbf{c}) - \boldsymbol{\psi}(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{c})) + \nu \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{\epsilon} \mathbf{I}_\delta \\ \frac{\alpha_2}{\epsilon} \mathbf{I}_\delta \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

umgeformt werden kann. Die Gleichung zeigt einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen dem Beobachterfehler $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ und dem Messrauschen ν , der sich nach der Ungleichung

$$\|\tilde{\mathbf{z}}\| \leq \beta_1 \epsilon + \beta_2 \frac{\mu}{\epsilon}$$

mit den beliebigen positiven Konstanten β_1 , β_2 und $\mu = \sup_{t>0} |\nu(t)|$ verhält. Demnach gibt es eine horizontale Tangente, deren Berührungspunkt auf den optimalen ϵ Wert zeigt, wie in Abbildung 6.7 schematisch gezeigt wird.

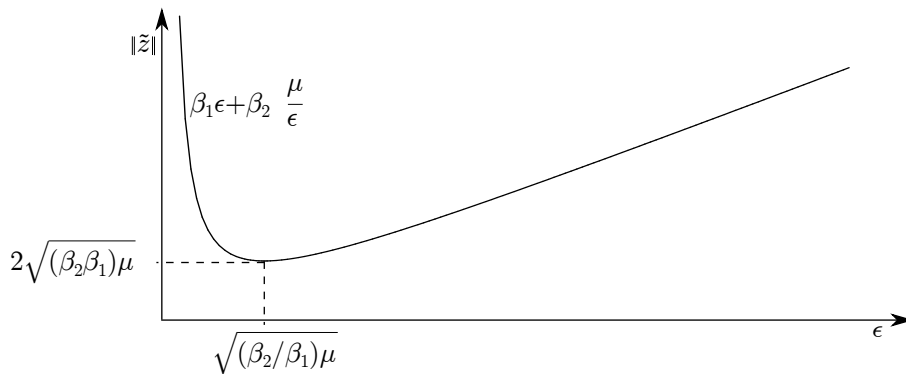


Abbildung 6.7: Graph der Ungleichung $\|\tilde{\mathbf{z}}\| \leq \beta_1 \epsilon + \beta_2 \frac{\mu}{\epsilon}$ zur Verdeutlichung einer optimalen Einstellung des Zustandsbeobachters

Aussagen zur Stabilität

Die Stabilitätsbetrachtung des *High-Gain*-Zustandsbeobachters erfolgt unter Berücksichtigung der speziellen Struktur der dynamischen Gleichung des Beobachterfehlers (6.14). Für hinreichende Aussagen zur Stabilität bieten sich Kriterien der

Input-Output Stabilität, wie zum Beispiel: POPOV-Kriterium, *Kreis*-Kriterium oder *Small-Gain*-Theorem an [Khalil, 2002], [Adamy, 2009], [Skogestad u. Postlethwaite, 2007, S. 156] und [Olsson u. a., 1998]. Für die Stabilitätsbetrachtung des Beobachters wird das *Small-Gain*-Theorem herangezogen. Dieses hinreichende Kriterium ist eine Verallgemeinerung des NYQUIST-Kriteriums für nichtlineare Systeme, wobei der Phasenverlauf des Systems vernachlässigt wird. Mit der Annahme, dass das nichtlineare Teilsystem zu jedem Zeitpunkt eine endliche Verstärkung aufweist, lassen sich mit der Betrachtung der Ortskurve des linearen Teilsystems sehr konservative Aussagen bezüglich der Stabilität des LURE-Systems treffen. Das lineare Teilsystem der Beobachter-Fehlerdynamik (6.18) wird im Frequenzbereich mit $\mathbf{G}(j\omega)$ bezeichnet.

Das *Small-Gain* Kriterium nach Satz 6.3.1 erfordert die Kenntnis der Maximalverstärkung des linearen Teilsystems, die sich mit der Spektralnorm nach [Skogestad u. Postlethwaite, 2007, S. 156] oder [Golub u. Loan, 1996] ermitteln lässt. Die Maximalverstärkung des nichtlinearen Teilsystems sei in jedem Augenblick endlich und lässt sich mit einem Vielfachen der Eingangsgrößen beschreiben. Die Phasenänderungen der Teilsysteme werden nicht berücksichtigt.

Satz 6.3.1 (Small-Gain Theorem für Systeme mit Rückkopplung nach [Khalil, 2002]). *Ein offenes System besteht aus einem nichtlinearen Teilsystem $\tilde{\psi}(t, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{c})$ und einem linearen stabilen zeit-invarianten Teilsystem $\mathbf{G}(j\omega) = \tilde{\mathbf{z}}/\tilde{\psi}(t, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{c})$. Die absolute Verstärkung γ_1 des linearen Teilsystems ist durch*

$$\gamma_1 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{G}(j\omega)\|_2$$

gegeben. Die Verstärkung des nichtlinearen Teilsystems sei durch die Variable γ_2 bezüglich der Eingangsgrößen \mathbf{c} derart begrenzt, dass

$$\gamma_2 \geq \|\tilde{\psi}(t, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{c})\|_2$$

gilt. Der geschlossene Kreis nach Abbildung 6.6 beider Systeme ist absolut stabil, für eine Gesamtverstärkung von $\gamma_1\gamma_2 < 1$.

Beweis. Der offene Kreis des stabilen LURE-Systems wird mit

$$\mathbf{G}_0(j\omega) := \mathbf{G}(j\omega) \cdot \tilde{\psi}(t, \tilde{\mathbf{z}})$$

bezeichnet. Nach dem NYQUIST-Kriterium ist der geschlossene Kreis von $\mathbf{G}_0(j\omega)$ stabil, wenn die Ortskurve des geschlossenen Systems mit $\det(\mathbf{I} + \mathbf{G}_0(j\omega))$ nicht seinen Ursprung umkreist. Dies wird mit der Gesamtverstärkung von $\mathbf{G}_0(j\omega)$ durch $\gamma_1\gamma_2 \leq 1$ erreicht. \square

Unter Berücksichtigung von (6.11) kann aufgrund der Eingangsgrößen $\mathbf{c}_{\min} < \mathbf{c} < \mathbf{c}_{\max}$ sowie der endlichen Zustandsgrößen eine Begrenzung der Systemverstärkung angenommen werden, sofern sich der PKM in keiner Singularität befindet. Nach [Khalil, 2008, S. 219] wird eine hinreichende Stabilität des LURE-Systems aufgrund

sehr kleiner Verstärkungen des nichtlinearen- oder linearen Teilsystems sichergestellt. Die letztere Eigenschaft lässt sich mithilfe $\epsilon \ll 1$ beeinflussen. Ein ähnlicher Beweis der Stabilität des *High-Gain*-Beobachters wird von Eker u. Åström [1996] für ein Doppelpendel gezeigt.

Aufschaltung von Störgrößen

Die Motivation einer Störgrößenaufschaltung liegt in der Steigerung der Performance des Zustandsbeobachters. Hauptsächliche Störgrößen bei PKM sind beispielsweise Reibungseffekte der Gelenke und Aktoren sowie Prozesskräfte, die nicht im Modell berücksichtigt wurden. Solche Störgrößen werden als generalisierte Kräfte $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{\delta}$ in (6.12) durch

$$\dot{\hat{\boldsymbol{z}}} = \mathbf{A}_O \hat{\boldsymbol{z}} + \mathbf{b}_O \boldsymbol{\psi}(\hat{\boldsymbol{z}}, \mathbf{A}^T \mathbf{c} - \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{k}_O(\epsilon) (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (6.21)$$

berücksichtigt. Eine Möglichkeit zur Schätzung dieser Störgrößen wird im nächsten Abschnitt behandelt.

6.3.2 Störgrößenbeobachter auf Basis des generalisierten Impulses

In der vorliegenden Arbeit werden die Reibungsphänomene der verwendeten industriellen *Torque-Motoren* durch einen Störgrößenbeobachter kompensiert. Der in Kapitel 2 beschriebene Motor weist eine hohe Haftreibung auf, die nicht als konstant angenommen werden kann. Somit ist die Reibung der verwendeten Motoren unterschiedlich und kann sich außerdem durch äußere Einflüsse oder Nutzungsverhalten mit der Zeit verändern. Dieser Umstand erfordert ein adaptives Verfahren zur Rekonstruktion von Störgrößen, das den folgenden Anforderungen genügt:

- Der Algorithmus kommt ohne mehrfaches Differenzieren, also ohne die Beschleunigungen der Gelenkkoordinaten aus.
- Das Verfahren ist unabhängig vom verwendeten Regler.
- Der Beobachter verhält sich passiv, prägt also keine zusätzliche Energie in das System ein.

Die Methode zur Schätzung von Störgrößen mithilfe eines generalisierten Impulses wird von De Luca u. Mattone [2003] vorgeschlagen, wobei das Verfahren für die Detektion von Aktorfehlern vorgesehen wurde. Diese Idee wurde in [De Luca u. a., 2006] für die Kollisionsdetektion und schließlich in [Lé Tien u. a., 2008], [Lé-Tien, 2010] zur Schätzung von Reibung abgewandelt. Der Ausgang des Beobachters entspricht einer tiefpassgefilterten Schätzung der Systemreibung. Ein Vorteil des betrachteten Ansatzes ist die Kompensation von Störgrößen ohne ein zugrundeliegendes Störmodell. Des Weiteren erlaubt das Konzept eine Passivitätsanalyse, die eine generelle Aussage der asymptotischen Stabilität des Gesamtsystems mithilfe der LYAPUNOV-Theorie erlaubt [Lé Tien u. a., 2008, S. 90].

Herleitung des Störgrößenbeobachters

Für die Herleitung des Beobachters wird zunächst der theoretische generalisierte Impuls \mathbf{p} des mechanischen Systems eingeführt

$$\mathbf{p} = \overline{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}}_2. \quad (6.22)$$

Diese Größe kennzeichnet den aktuellen Zustand des mechanischen Systems bezüglich der kinetischen und potentiellen Energie. Die zeitliche Änderung von (6.22) ergibt sich nach der Eliminierung der Beschleunigungsterme mithilfe der Bewegungsgleichungen (4.10) zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{A}^T(\mathbf{q}) \mathbf{c} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad \text{mit} \\ \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -\dot{\overline{\mathbf{M}}}\dot{\mathbf{q}}_2 + \overline{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_2 + \overline{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Bereits bekannte Prozesskräfte und Störgrößen können dabei im Vektor $\overline{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ der Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden. Alle weiteren unbekanntes Kräfte werden als generalisierte Kräfte vom Beobachter rekonstruiert [Reichert u. a., 2012].

Anmerkung 6.3.1 (Zeitliche Ableitung der Massenmatrix $\overline{\mathbf{M}}$). Die Matrix $\dot{\mathbf{F}}$ ist von der Modellbildung bekannt. Somit kann die Berechnung der zeitlichen Ableitung $\dot{\overline{\mathbf{M}}}$ durch die Projektionsgleichung

$$\overline{\mathbf{M}} := \mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}$$

mithilfe der Produktregel erheblich vereinfacht werden:

$$\dot{\overline{\mathbf{M}}} = \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{M} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{M}} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{F}}.$$

Des Weiteren wird angenommen, dass der generalisierte Impuls auch messtechnisch bestimmt werden kann. Diese Größe und deren zeitliche Ableitung sollen mit $\tilde{\mathbf{p}}$ und $\dot{\tilde{\mathbf{p}}}$ bezeichnet werden. Aus dem Residuum von \mathbf{p} und $\tilde{\mathbf{p}}$ ergibt sich unmittelbar die Beziehung für unbekannte Störgrößen und Prozesskräfte zu

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\mathbf{p}} - \dot{\tilde{\mathbf{p}}}. \quad (6.24)$$

Dieser erste Ansatz wird in Abbildung 6.8 a) dargestellt. Die direkte Auswertung von (6.24) erfordert die Messung der Antriebskräfte und der generalisierten Koordinaten bis zur zweiten zeitlichen Ableitung. Das Residuum ist aufgrund der mehrfachen Ableitung der Gelenkkoordinaten sehr verrauscht und kann in dieser Form nicht direkt realisiert werden. Daher wird das Signal aus (6.24) im nächsten Schritt mit einem Tiefpassfilter erster Ordnung geglättet. Die Differentialgleichungen des Filters können durch die Beziehung

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} = \frac{1}{T_S} (\tilde{\boldsymbol{\eta}} - \hat{\boldsymbol{\eta}}), \quad (6.25)$$

mit der Zeitkonstante T_S und der Ausgangsgröße $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ angegeben werden. Die resultierende Struktur wird in Abbildung 6.8 b) dargestellt. Mittels einer Umformung kann

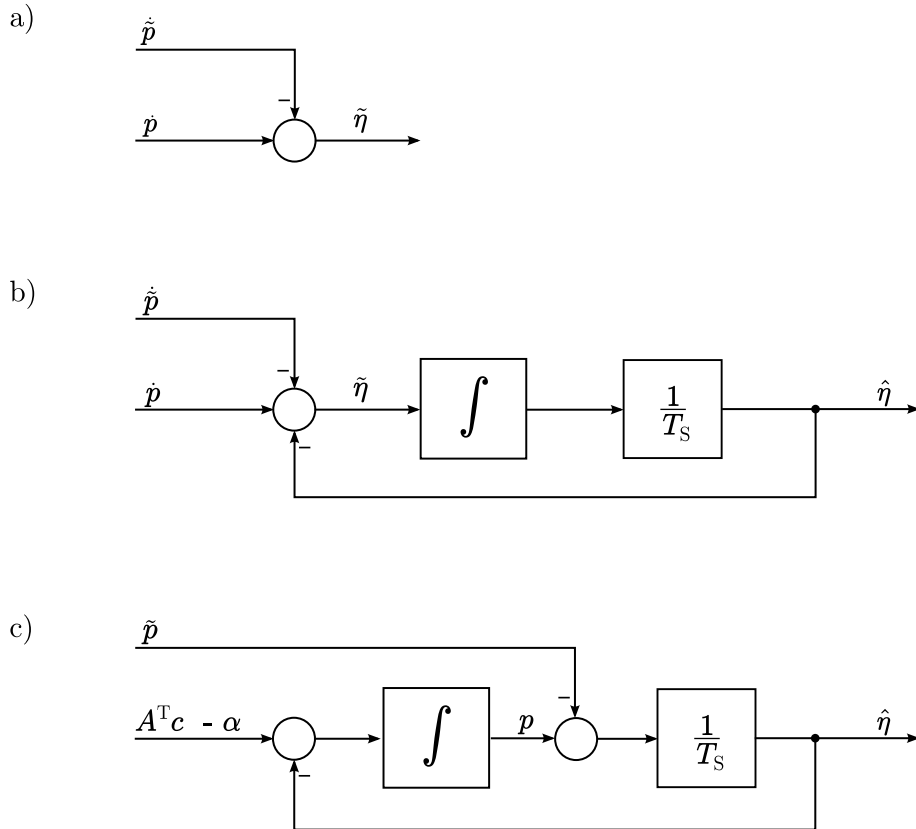


Abbildung 6.8: Blockschaltbild zur Herleitung eines Störgrößenbeobachters auf Basis des Residuums in Gleichung (6.24)

das Blockschaltbild weiter auf das in Abbildung 6.8 c) dargestellte System vereinfacht werden. Aus messtechnischer Sicht ist dies eine erhebliche Verbesserung, da der resultierende Beobachter keine Ableitung der Messgröße \tilde{p} benötigt. Das System liefert eine tiefpassgefilterte Rekonstruktion sämtlicher unbekannter generalisierter Stör- und Prozessgrößen. Die Dynamik des Beobachters ist asymptotisch stabil und kann über die Zeitkonstante $T_S > 0$ eingestellt werden. Die vollständigen Zustandsgleichungen des Störgrößenbeobachters und dessen Ausgangsgleichungen lauten

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{A}^T(\mathbf{q}) \mathbf{c} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{T_S} (\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}) \quad (6.26a)$$

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \frac{1}{T_S} (\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}) . \quad (6.26b)$$

Aussagen zur Stabilität

Die Dynamik des Störgrößenbeobachters (6.26) entspricht einem linearen System erster Ordnung. Wird der Störgrößenbeobachter dazu benutzt die Störgrößen eines nichtlinearen Manipulators zu schätzen, so ist es erforderlich, die Passivität des Störgrößenbeobachters im Allgemeinen nachzuweisen, wie von Lé-Tien [2010, S. 93] beschrieben. Gelingt dies, kann unmittelbar eine LYAPUNOV-Stabilitätsanalyse des geregelten Manipulators durchgeführt werden.

Definition 6.3.1 (Passivität eines dynamischen Systems in minimalen Gelenkkoordinaten, nach [Spong u. a., 2005]). Ein dynamisches System, das in einer Koordinatenformulierung nach (4.10) darstellbar ist, verhält sich passiv, wenn eine (lokale) positive Funktion S existiert, für die gilt

$$S(t) = \int_0^T \dot{\mathbf{q}}_2^T(t) \mathbf{A}^T \mathbf{c} dt = S(T) - S(0) \geq -S(0).$$

Die Funktion $S(t)$ wird als Speicherfunktion bezeichnet. Der Term $\dot{\mathbf{q}}_2^T(t) \mathbf{A}^T \mathbf{c}$ trägt die Einheit Leistung, wodurch $\int_0^T \dot{\mathbf{q}}_2^T(t) \mathbf{A}^T \mathbf{c} dt$ die Energie des Systems über einem Zeitintervall $[0, T]$ beschreibt. Die Eigenschaft Passivität bedeutet, dass diese Energie über einem Zeitintervall konstant oder dissipiert beziehungsweise vergeudet wird.

In Beispiel 6.3.1 wird die Passivität für einen RA-PKM unter verschiedenen Reibungsphänomenen untersucht.

Beispiel 6.3.1 (Passivitätsanalyse des Störgrößenbeobachters für den 2RRR/RR RA-PKM mit einer Zustandsraumdarstellung in Minimalkoordinaten, unter verschiedenen Reibungsphänomenen). Eine Speicherfunktion für die Bewegungsgleichungen eines RA-PKM in Minimalkoordinaten (4.10) kann durch die kinetische Energie des Systems

$$S = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_2^T \overline{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}}_2 \quad (6.27)$$

beschrieben werden. Die zeitliche Ableitung von (6.27) führt zu der Beziehung

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_2^T \dot{\overline{\mathbf{M}}} \dot{\mathbf{q}}_2 + \dot{\mathbf{q}}_2^T \overline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}_2, \quad (6.28)$$

wobei für $\ddot{\mathbf{q}}_2$ die Vorwärtsdynamik der Bewegungsgleichungen (4.10) eingesetzt werden kann. Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung eines beliebigen Reibmodells $\overline{\mathbf{Q}}_R = \mathbf{F}^T [Q_{R_1} \cdots Q_{R_n}]^T$ aus Kapitel 4.8 die vollständige Speicherfunktion

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_2^T \dot{\overline{\mathbf{M}}} \dot{\mathbf{q}}_2 + \dot{\mathbf{q}}_2^T \overline{\mathbf{M}} \cdot \overline{\mathbf{M}}^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{c} - \overline{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{q}}_2 - \overline{\mathbf{Q}}_R + \hat{\boldsymbol{\eta}}) \\ \dot{S} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_2^T (\dot{\overline{\mathbf{M}}} - 2\overline{\mathbf{K}}) \dot{\mathbf{q}}_2 + \dot{\mathbf{q}}_2^T (\mathbf{A}^T \mathbf{c} - \overline{\mathbf{Q}}_R + \hat{\boldsymbol{\eta}}). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Ein praxisrelevantes Szenario wäre beispielsweise die Kompensation der Systemreibung $\overline{\mathbf{Q}}_R$ mithilfe des Störgrößenbeobachters. Dabei wird der Term der beobachteten Störgrößen $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ zu den Antriebskräften überlagert. Die Funktion lässt sich unter Berücksichtigung von Lemma 4.3.1 weiter zu

$$\dot{S} = \dot{\mathbf{q}}_2^T \mathbf{A}^T \mathbf{c} + \dot{\mathbf{q}}_2^T (\hat{\boldsymbol{\eta}} - \overline{\mathbf{Q}}_R) \quad (6.30)$$

vereinfachen. Der erste Term beinhaltet die zugeführte Leistung und der zweite Term die generalisierte Reibung sowie den Anteil durch den Störgrößenbeobachter.

Es gilt nun nachzuweisen, dass der Ausdruck $\dot{q}_2^T (\hat{\eta} - \bar{Q}_R) \leq 0$ ist. Dadurch wird sichergestellt, dass die Reibungskompensation durch $\hat{\eta}$ dissipativ ist und dem System weiterhin Energie entzogen wird. Diese Eigenschaft wird von Lé-Tien [2010] für die verschiedenen Reibungsarten erläutert:

Coulombsche Reibung Anhand der beschriebenen Reibungsphänomene in Kapitel 4.8 kann die COULOMBSche Reibung der Gelenke durch (4.29) als Störgröße für den RA-PKM interpretiert werden. Unter Berücksichtigung der Beobachterdynamik (6.26) kann die Übertragungsfunktion zwischen der beobachteten Störgröße $\hat{\eta}$ und der vorgegebenen Systemreibung als Verzögerungsglied erster Ordnung beschrieben werden. Somit gilt für sprunghörmige Anregungen $\dot{q}_2^T (\hat{\eta} - \bar{Q}_C) \leq 0$, wie in Abbildung 6.9 für ein Gelenk dargestellt wird.

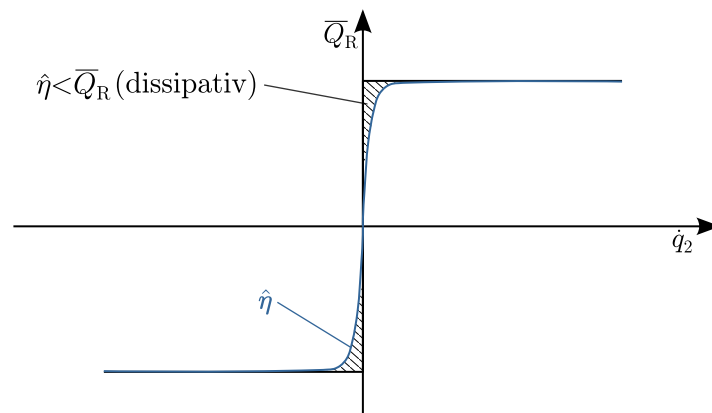


Abbildung 6.9: Schematische Darstellung von COULOMBScher Reibung und des zugehörigen Störgrößenbeobachter-Residuums zur Kompensation dieser Reibung

Viskose Reibung Für die viskose Reibung wird die Speicherfunktion nach Lé-Tien [2010, S. 95] erweitert. Es gilt zu berücksichtigen, dass die Geschwindigkeiten, die zur Realisierung des Störgrößenbeobachters benötigt werden, aus einem Zustandsbeobachter stammen. Die beobachteten Geschwindigkeiten weisen ein Tiefpassverhalten auf, wodurch es zu einer Unterkompensation der viskosen Reibung kommt.

Haftreibung Treten wie in Kapitel 4.8 Haftreibungsphänomene (STRIBECK-Effekt) auf, so können diese durch (4.31) als Störgröße modelliert werden. Nach Lé-Tien u. a. [2008] kommt es bei der Anwendung des Störgrößenbeobachters zu einer Überkompensation der Reibung, wie in Abbildung 6.10 dargestellt ist. Die Passivität kann in diesem Fall nicht gewährleistet werden. Die zusätzliche Energie führt bei PKM zu unerwünschten Grenzzyklen, die verhindert werden können, indem der Energiezuwachs des Systems generell überwacht und durch Abschaltung des Störgrößenbeobachters verhindert wird [Lé-Tien, 2010, S. 95]. Daraus ergibt sich, dass die Dynamik des Störgrößenbeobachters sehr schnell eingestellt werden muss, um die bereichernden Effekte bei Haftreibungseffekten zu minimieren. Des Weiteren zeigt sich bei Experimenten, dass

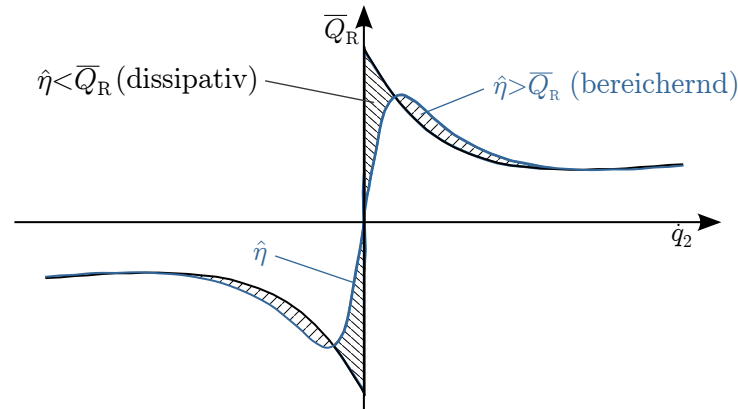


Abbildung 6.10: Schematische Darstellung von STRIBECK-Reibung und des zugehörigen Störgrößenbeobachter-Residuums zur Kompensation dieser Reibung

schon eine geringe Reduzierung der beobachteten Störgrößen die Effekte durch Überkompensation vernachlässigbar macht.

6.3.3 Anwendung der Beobachter und Messergebnisse

Dieser Abschnitt beschreibt die Anwendung der Beobachter für Zustandsgrößen und Störgrößen. In der Praxis stellen die Gleichungen (6.12) sowie (6.26) wertvolle Werkzeuge dar, um Positionsregler mit den notwendigen Verstärkungen zu betreiben, wie es eine präzise Bahnführung verlangt.

Zunächst werden die generalisierten Störgrößen des Beobachters mithilfe der inversen Dynamik

$$\mathbf{c}_s = (\mathbf{A}^T)^+ \hat{\boldsymbol{\eta}} \quad (6.31)$$

in äquivalente Motor-Kräfte umgerechnet. Die effektive (reale) Steuerkraft ergibt sich aus der Differenz zwischen vorgegebener Antriebs- und beobachteter Störkraft. Das entspricht der im Unterkapitel 6.3.1 beschriebenen Störgrößenaufschaltung, die im Blockschaltbild in Abbildung 6.11 dargestellt ist. Für experimentelle Ergebnisse der Beobachter wird einem STM 135 *Torque-Motor* eine sinusförmige Drehmomentanforderung mit einer Amplitude von 2,0 Nm und einer Periode von 3 s vorgegeben, Abbildung 6.12. Der gemessene Rotorwinkel soll mit q_{a_1} bezeichnet werden und stellt die Messgröße $z_1 := q_{a_1} = y$ dar. Die Rotorgeschwindigkeit $\dot{z}_1 = z_2 := \dot{q}_{a_1}$ wird mit dem Zustandsbeobachter beobachtet. Die Störgrößen werden zuerst nicht berücksichtigt und erst in einem zweiten Versuch zugeschaltet.

Anmerkung 6.3.2. Die unmittelbare zeitliche Ableitung des Rotorwinkels würde keine brauchbaren Ergebnisse liefern. Das Winkelsignal liegt aufgrund des Messprinzips stufenförmig vor, ist also nicht kontinuierlich. In vielen Anwendungen wird das Signal daher zuerst Tiefpass-gefiltert und anschließend nach der Zeit abgeleitet. Diese Methode wird bei Inkrementalencodern mit wenigen Strichen problematisch, da dann

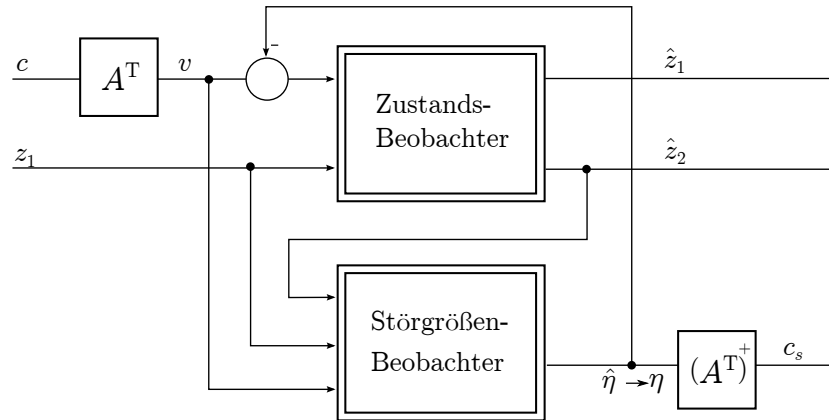


Abbildung 6.11: Blockschaltbild der Kombination aus Zustands-Beobachter und Störgrößenbeobachter in generalisierter Form

die Grenzfrequenz des Tiefpassfilters geringer gewählt werden muss. Im schlimmsten Fall sorgt die durch das Tiefpassfilter verursachte Phasenverschiebung im Bereich der mechanischen Frequenzen dafür, dass das System durch einen Regler instabil wird. Des Weiteren können sehr langsame Bewegungen mit dieser Methode nicht erfasst werden, da in der längeren Zeit zwischen zwei Strichen des Inkrementalencoders kein Signal gemessen wird.

Die Graphen in Abbildung 6.13 zeigen die beobachtete Zustandsgröße $\hat{z}_2 = \dot{\hat{q}}_{a1}$ sowie $z_2 := \dot{q}_{a1}$, ohne Aufschaltung von Störgrößen. Die zeitliche Ableitung $z_2 = \dot{q}_{a1}$ wurde nach dem Experiment, mit einer phasenkorrekten Tiefpassfilterung numerisch differenziert und dient als Vergleichsgröße. Die Kurven zeigen einen deutlichen Unterschied zwischen beobachteter und wahrer Geschwindigkeit. Der Grund dafür liegt in der fehlenden Berücksichtigung des Reibmoments, das eine Verringerung der tatsächlichen Stellenergie verursacht. In Abbildung 6.14 wird das gleiche Experiment mit einer Aufschaltung des Störgrößenbeobachters durchgeführt. Die Graphen zeigen eine sehr gute Übereinstimmung zwischen beobachteter und realer Geschwindigkeit. Das beobachtete Reibmoment (Abbildung 6.12) ist betragsmäßig mit der gemessenen STRIBECK-Kurve in Abbildung 2.3 vergleichbar.

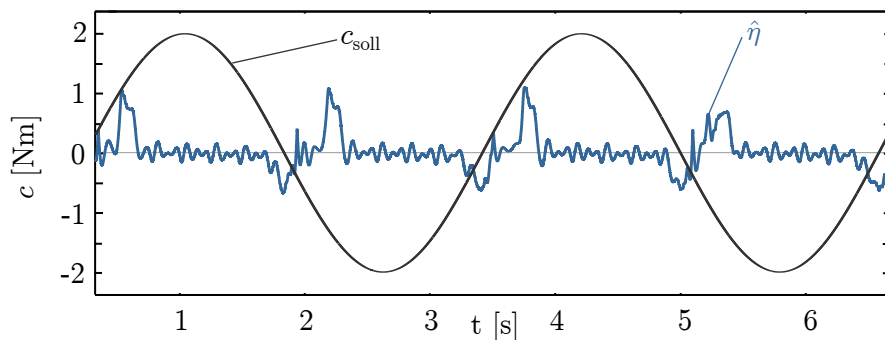


Abbildung 6.12: Sinusförmiges Drehmoment, das an den Antrieb einer einzelnen Achse vorgegeben wird und der Ausgang des Störgrößenbeobachters zur Schätzung der Actor-Reibung

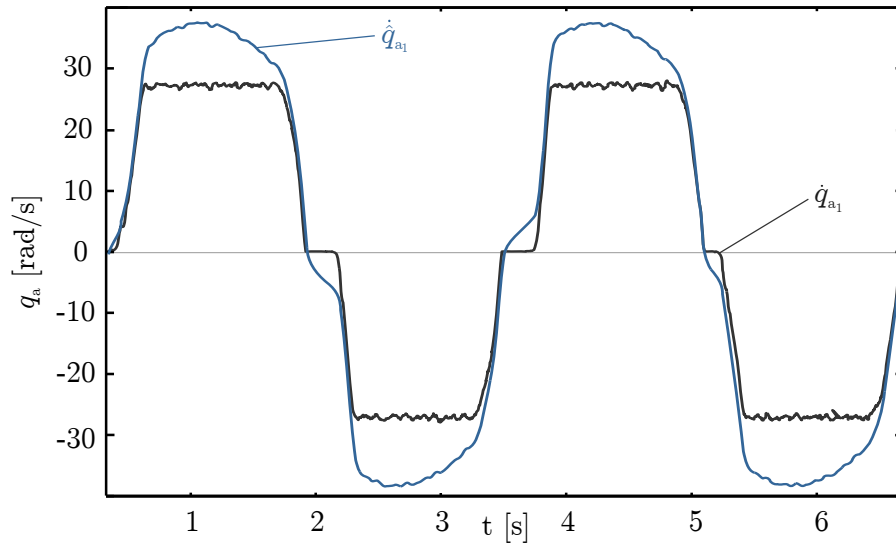


Abbildung 6.13: Rekonstruierte Geschwindigkeit aus dem Zustandsbeobachter ohne Störgrößenaufschaltung sowie eine Repräsentation der realen Geschwindigkeit durch eine phasenkorrekte numerische Ableitung der Gelenkkoordinate

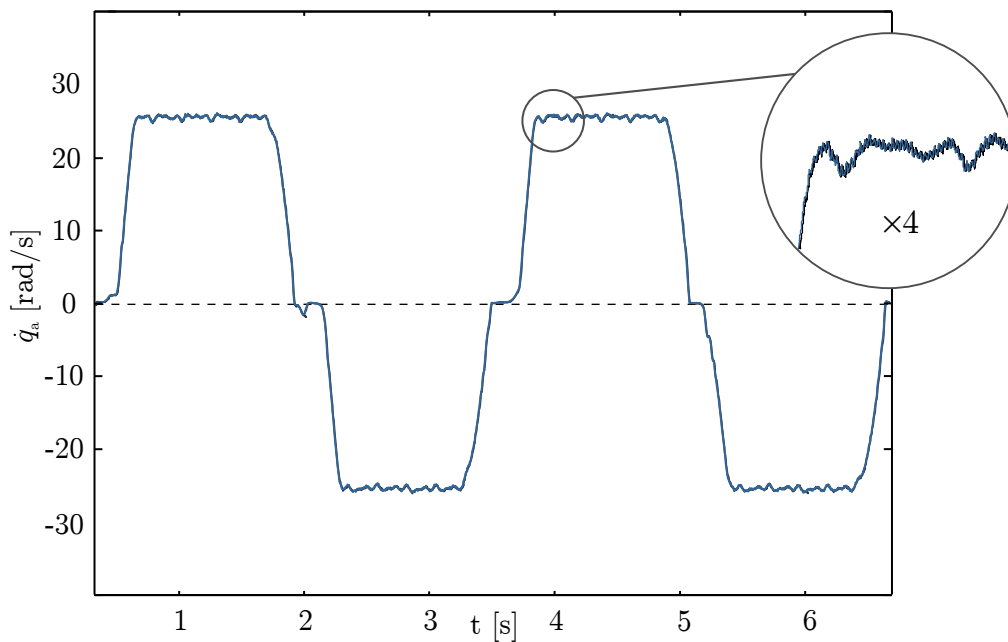


Abbildung 6.14: Rekonstruierte Geschwindigkeit aus dem Zustandsbeobachter mit Störgrößenaufschaltung sowie eine Repräsentation der realen Geschwindigkeit durch eine phasenkorrekte numerische Ableitung der Gelenkkoordinate

6.4 Modellbasierte Regelung in δ Minimalkoordinaten

6.4.1 Inverse Dynamik

Die inverse Dynamik wird zur Berechnung der notwendigen Antriebskräfte \mathbf{c} ausgehend von einer gegebenen Trajektorie $\mathbf{q}(t)$ benötigt. Die Auflösung von (4.10) nach den Antriebskräften ist aufgrund der redundanten Antriebe nicht eindeutig. Wie in Abschnitt 6.1 veranschaulicht wurde, verursachen nur diejenigen Antriebskräfte eine Bewegung, die im Bildraum von \mathbf{A}^T liegen. Unter Berücksichtigung von (6.3) ergibt sich die inverse Dynamik

$$\mathbf{c} = \left(\mathbf{A}^T\right)_{\mathbf{W}}^+ \left(\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_2 + \overline{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_2 + \overline{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\right) + \mathbf{N}_{\mathbf{A}^T, \mathbf{W}} \mathbf{c}^0, \quad (6.32)$$

wobei

$$\left(\mathbf{A}^T\right)_{\mathbf{W}}^+ = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}\right)^{-1}$$

die gewichtete PENROSE-MOORE Pseudoinverse ist und

$$\mathbf{N}_{\mathbf{A}^T, \mathbf{W}} = \left(\mathbf{I}_m - \left(\mathbf{A}^T\right)_{\mathbf{W}}^+ \mathbf{A}^T\right)$$

eine Projektionsmatrix ist, die einen beliebigen Vektor \mathbf{c}^0 in den Nullraum von \mathbf{A}^T projiziert. Die Inverse Dynamik (6.32) sorgt für eine ideale Verteilung der Steuerkräfte. Die Gewichtungsmatrix \mathbf{W} kann dazu genutzt werden, um die Fähigkeiten der einzelnen Antriebe zu berücksichtigen.

An dieser Stelle wird nochmal die Anordnung der Minimalkoordinaten unter den aktiven Koordinaten aufgegriffen. Werden diese so angeordnet, dass $\mathbf{q}_a \equiv [\mathbf{q}_2 \ \dots]$ ist, so kann das Orthogonalkomplement \mathbf{F} folgendermaßen aufgeteilt werden:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{I}_\delta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{I}_\delta \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Damit lässt sich die $\rho \times \delta$ Matrix \mathbf{A}_1 identifizieren, die aus den letzten ρ Zeilen von $-\mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{J}_2$ besteht. In [Müller, 2008] wird für den Fall eines einfach redundanten RA-PKM ($\rho = 1$) und $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ eine Lösung für

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{I}_\delta \end{bmatrix} \left[\mathbf{I}_\delta - \frac{1}{1 + \|\mathbf{A}_1\|^2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1\right] \quad (6.34)$$

angegeben. Diese Formulierung benötigt keine Matrixinversion und ist daher numerisch sehr günstig. Des Weiteren ist aus (6.34) leicht ersichtlich, dass durch

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_\rho \\ -\mathbf{A}_1^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times \rho}$$

die Basisvektoren des Kerns von \mathbf{A}^T gefunden werden können, die der Bedingung $\mathbf{A}^T \mathbf{B} = \mathbf{0}$ genügen. Die Beziehung wurde in Abbildung 6.2 des vorigen Abschnitts erläutert.

6.4.2 Computed Torque Controller (CTC)

Der CTC wird sehr häufig als Maßstab für modellbasierte Regler betrachtet [Cheng u. a., 2003]. Die Umsetzung für RA-PKM wird beispielsweise in [Müller, 2010], [Müller, 2009] oder [Shang u. Cong, 2010a] angegeben. Im Grunde kann der CTC als *flachheitsbasierter* Folgeregler aufgefasst werden, der das nichtlineare System durch einen nichtlinearen Vorwärtszweig kompensiert, so dass die Reihenschaltung aus dem nichtlinearen System und dem nichtlinearen Vorwärtszweig die Übertragungsfunktion $\mathbf{1}$ ergibt. Aufgrund der eingeschränkten technischen Realisierbarkeit einer solchen Vorsteuerung, wird die Systeminversion bezüglich der so genannten *flachen* Ausgänge des Systems beschränkt [Rothfuss u. a., 1997]. Generell kommen bei voll- und redundant aktuierten Mehrkörpersystemen ohne Elastizitäten die Zustandsgrößen des Systems als *flache* Ausgänge in Frage.

Für den CTC-Regler wird eine Referenztrajektorie durch \mathbf{q}_2^d vorgegeben. Diese sei stetig und zwei mal differenzierbar. Wenn die inverse Dynamik (6.32) ein perfektes Modell des realen Manipulators beinhalten würde und dessen Anfangsbedingungen $\mathbf{q}_2(0)$, $\dot{\mathbf{q}}_2(0)$ bekannt wären, so könnte der Manipulator durch die Vorgabe einer Trajektorie \mathbf{q}_2^d gesteuert werden [Murray u. a., 1993]. Die Berechnung der erforderlichen Antriebsgrößen entspricht dabei in der Systembetrachtung einer Inversion des Systems. Die inverse Dynamik unter der Referenztrajektorie lautet

$$\mathbf{c}^d = \left(\mathbf{A}^T\right)_{\mathbf{w}}^+ \left(\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_2^d + \overline{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_2 + \overline{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right), \quad (6.35)$$

wobei auf Nullraumkomponenten verzichtet wurde. Diese *flachheitsbasierte* Steuerung wird im Blockschaltbild in Abbildung 6.15 dargestellt [Rothfuss u. a., 1997, S. 35]. Wird die Beziehung (6.35) in die Modellgleichungen (4.10) eingesetzt, ergibt

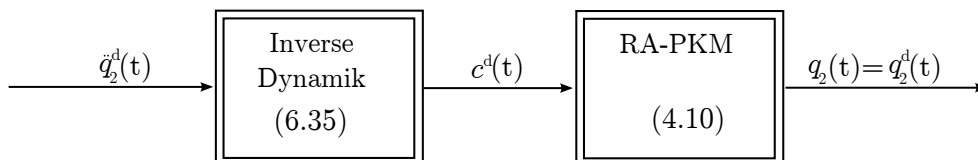


Abbildung 6.15: Steuerung des RA-PKM mithilfe der inversen Dynamik

sich die folgende lineare Beziehung für das Gesamtsystem

$$\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_2^d = \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_2, \quad (6.36)$$

die sich bei einer nicht singulären Massenmatrix $\overline{\mathbf{M}}$ zu

$$\ddot{\mathbf{q}}_2^d = \ddot{\mathbf{q}}_2 \quad (6.37)$$

vereinfachen lässt. Da jede äußere Störung oder Modellfehler das Folgeverhalten des gesteuerten Systems beeinflussen würde, muss die Steuerung durch eine Zustandsrückführung stabilisiert werden [Murray u. a., 1993]. Die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{q}}_2^d$ sind

keine Zustandsgrößen von (6.35) und bieten neue Eingänge in das System. Der Trajektorienfolgefehler eines PKM wird durch

$$\mathbf{e}_2 := \mathbf{q}_2^d - \mathbf{q}_2, \quad (6.38a)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 := \dot{\mathbf{q}}_2^d - \dot{\mathbf{q}}_2 \quad (6.38b)$$

definiert. Die Zustandsrückführung in Form eines linearen PD-Reglers ergibt den CTC in der folgenden Form:

$$\mathbf{c} = \left(\mathbf{A}^T \right)_{\mathbf{w}}^+ \left(\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\nu} + \overline{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_2 + \overline{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right), \quad (6.39)$$

wobei $\boldsymbol{\nu} = \ddot{\mathbf{q}}_2^d + \mathbf{K}_P \mathbf{e}_2 + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}}_2$ gilt, mit den positiv definiten Verstärkungsmatrizen \mathbf{K}_P und \mathbf{K}_D . Wird der Regler (6.39) in die Modellgleichungen (4.10) eingesetzt, so ergibt sich die Fehlerdynamik

$$\overline{\mathbf{M}}(\ddot{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{K}_P \mathbf{e}_2 + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}}_2) = \mathbf{0}. \quad (6.40)$$

Satz 6.4.1 (Stabilität des Computed Torque Reglers [Murray u. a., 1993]). *Für eine positiv definite Massenmatrix $\overline{\mathbf{M}}$ und positiv definite symmetrische Verstärkungsmatrizen $\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_D$, ist die Fehlerdynamik (6.40) asymptotisch stabil.*

Beweis. Außerhalb von Singularitäten kann (6.40) von links mit $\overline{\mathbf{M}}^{-1}$ durchmultipliziert werden. Die Zustandsraumdarstellung der Fehlerdynamik ergibt sich damit zu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_\delta \\ -\mathbf{K}_P & -\mathbf{K}_D \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_C} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 \end{bmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung der Dynamikmatrix \mathbf{A}_C lautet im Bildbereich

$$s^2 \mathbf{I}_\delta + \mathbf{K}_D s + \mathbf{K}_P,$$

wobei mit s der LAPLACE-Operator bezeichnet wird. Die Eigenwerte haben für positive definite Verstärkungen \mathbf{K}_P und \mathbf{K}_D einen negativen Realteil. \square

6.4.3 Augmented PD-Regler (APD)

Neben dem CTC ist der APD-Regler ein beliebter modellbasierter Regler für PKM und SKM, der ebenfalls eine nichtlineare Vorsteuerung hat [Weber, 2009, S. 182]. Der APD-Regler ergibt sich aus der nichtlinearen Erweiterung eines linearen PD-Reglers zu

$$\mathbf{c} = \left(\mathbf{A}^T \right)_{\mathbf{w}}^+ \left(\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_2^d + \overline{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_2^d + \overline{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \boldsymbol{\nu} \right), \quad (6.41)$$

wobei $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{K}_P \mathbf{e}_2 + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}}_2$. Der nichtlineare Vorwärtszweig des APD-Reglers ist in der Lage, bestimmte Nichtlinearitäten der Regelstrecke, wie zum Beispiel bekannte

Prozess- oder Gewichtskräfte, zu kompensieren. Die Fehlerdynamik, die sich durch das Einsetzen von (6.41) in die Modellgleichungen (4.10) ergibt, beinhaltet immer noch die Massenmatrix sowie die CORIOLIS- und Kreiselkräfte. Darum wird die Stabilität des APD-Reglers mithilfe des folgenden Satzes bewiesen.

Satz 6.4.2 (Stabilität des Augmented PD Reglers [Murray u. a., 1993]). *Für positiv definite Verstärkungsmatrizen $\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_D$, führt der Regler (6.41) in Verbindung mit den Bewegungsgleichungen (4.10) zu einer asymptotisch stabilen Fehlerdynamik.*

Beweis. Die Differentialgleichung des geschlossenen Systems ergibt sich zu

$$\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{e}}_2 + \overline{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{e}}_2 = -\mathbf{K}_P \mathbf{e}_2 - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}}_2. \quad (6.42)$$

Für den Beweis wird die folgende LYAPUNOV-Funktion

$$V(\mathbf{e}_2, \dot{\mathbf{e}}_2, t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_2^T \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{e}}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2^T \mathbf{K}_P \mathbf{e}_2 + \epsilon \mathbf{e}_2^T \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{e}}_2, \quad (6.43)$$

herangezogen, die für kleine Werte für $\epsilon > 0$ und $\mathbf{K}_P > 0$ positiv definit ist. Die Berechnung von \dot{V} für Trajektorien von (6.42) ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\mathbf{e}}_2^T \overline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{e}}_2 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_2^T \dot{\overline{\mathbf{M}}} \dot{\mathbf{e}}_2 + \dot{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{K}_P \mathbf{e}_2 + \epsilon \dot{\mathbf{e}}_2^T \overline{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{e}}_2 + \epsilon \mathbf{e}_2^T (\dot{\overline{\mathbf{M}}} \dot{\mathbf{e}}_2 + \overline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{e}}_2) \\ &= -\dot{\mathbf{e}}_2^T (\mathbf{K}_D - \epsilon \overline{\mathbf{M}}) \dot{\mathbf{e}}_2 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_2^T (\dot{\overline{\mathbf{M}}} - 2\overline{\mathbf{K}}) \dot{\mathbf{e}}_2 \\ &\quad + \epsilon \dot{\mathbf{e}}_2^T (-\mathbf{K}_P \mathbf{e}_2 - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}}_2 - \overline{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{e}}_2 + \dot{\overline{\mathbf{M}}} \dot{\mathbf{e}}_2). \end{aligned} \quad (6.44)$$

Unter Berücksichtigung von Lemma 4.3.1 ist diese Funktion für kleine $\epsilon > 0$ negativ definit, womit die asymptotische Stabilität des APD nachgewiesen ist. \square

Die Auslegung des APD-Reglers erfolgt in der Regel durch Linearisierung, wie in [Murray u. a., 1993] beschrieben. Der stationäre Arbeitspunkt des Reglers soll mit \mathbf{q}_0 bezeichnet werden, wodurch sich die Fehlerdynamik für diesen stationären Arbeitspunkt durch

$$\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_0) \ddot{\mathbf{e}}_2 + \overline{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) \dot{\mathbf{e}}_2 + -\mathbf{K}_P \mathbf{e}_2 - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}}_2$$

ergibt. Die Verstärkungen können mithilfe von Verfahren für die lineare Regelungstechnik [Föllinger, 1994], [Unbehauen, 2008] ausgelegt werden. Die Auslegung ist lediglich für die Umgebung eines Punktes der Trajektorie gewährleistet.

6.4.4 Adaptive Koordinatenumschaltung

Wie in Kapitel 4.3 aufgeführt, wird die Gültigkeit der Formulierung in Minimalkoordinaten auf \mathcal{V} durch die Wahl der Minimalkoordinaten entschieden. Die Formulierung in Minimalkoordinaten ohne Zwangskräfte ist jedoch hinsichtlich ihrer geringen numerischen Komplexität sehr vorteilhaft für die Herleitung modellbasierter Regler. Hufnagel u. Müller [2011] beschreiben eine Möglichkeit zur adaptiven Umschaltung von Minimalkoordinaten in Echtzeit, die auch für eine modellbasierte Regelung oder Vorsteuerung für RA-PKM eingesetzt werden kann. Aufgrund der zusätzlichen Antriebe besteht die Möglichkeit, während der Bewegung des Manipulators die Minimalkoordinaten als Teil der Antriebskoordinaten umzuschalten, wenn die aktuell gewählten ungültig werden sollten. Schaltende Systeme sind spezielle Formen der so genannten hybriden Systeme, die neben kontinuierlichen auch diskrete Teilsysteme besitzen [Sun u. S. Ge, 2005, S. 4]. Generell besteht ein geschaltetes System aus schaltbaren Teilsystemen, den so genannten Moden und einem Steuersignal $\sigma(t+)$, welches einen Schaltpfad beschreibt [Sun u. S. Ge, 2005, S. 2].

Definition von Moden aus Minimalkoordinaten

Aus messtechnischen Gründen werden die Minimalkoordinaten, in der im Abschnitt 4.3 vorgestellten Formulierung, als Teil der Antriebskoordinaten gewählt (Siehe Definition 3.3.1). Zur Definition der verfügbaren Moden an Minimalkoordinaten wird das Orthogonalkomplement \mathbf{F} in der Form

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{I}_\delta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (6.45a)$$

$$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n-m,\delta}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(\mathbf{q}) \\ \mathbf{I}_\delta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,\delta} \quad (6.45b)$$

$$\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{\rho,\delta}. \quad (6.45c)$$

nach den aktiven und passiven Gelenken aufgeteilt. Darin sind in \mathbf{P} die ersten $n-m$ und \mathbf{A} die restlichen Zeilen von $-\mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{J}_2$. Die Anzahl s an möglichen Minimalkoordinaten Zusammenstellungen $\mathbf{q}_2^{(k)}$, $k = 1 \dots s$ als Teil der Antriebskoordinaten \mathbf{q}_a ergibt sich, unter Berücksichtigung von (6.45c), zu

$$s = \frac{m!}{\delta! \rho!}. \quad (6.46)$$

Beispiel 6.4.1 (Definition verschiedener Minimalkoordinaten für den 2RRR/RR RA-PKM). Beispielsweise können für den 2RRR/RR RA-PKM in Abbildung 4.1 drei verschiedene Zusammenstellungen für Minimalkoordinaten

$$\mathbf{q}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} q_{a1} \\ q_{a2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} q_{a1} \\ q_{a3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_2^{(3)} = \begin{bmatrix} q_{a2} \\ q_{a3} \end{bmatrix}$$

gewählt werden, die jeweils in verschiedenen Bereichen des Arbeitsraums gültig sind.

Für die Koordinatenumschaltung kann ein genereller- sowie ein intuitiver Schaltpfad verwendet werden.

Generelle numerische Koordinatenumschaltung

Die JACOBI-Matrix \mathbf{J}_1 hat in einer *Parametersingularität* keinen konstanten Rang. Die Singularitäten lassen sich unmittelbar durch $\det(\mathbf{J}_1) = \mathbf{0}$ bestimmen. Könnte die Nähe zu Singularitäten demnach mit $\det(\mathbf{J}_1) \approx \mathbf{0}$ bestimmt werden? Generell gilt diese Aussage nicht, jedoch wird die Nähe einer Singularität durch den Abstand der Matrix-Räume quantifiziert. Die Berechnung erfolgt mithilfe der Matrix-Normen [Golub u. Loan, 1996, S. 54].

Mit der Annahme, dass die Freiheitsgrade δ eines Manipulators mit Antriebsredundanz immer mit m Antrieben gesteuert werden können, genügt es nach (6.45c) lediglich \mathbf{A}_1 als relevanter Teil von \mathbf{F} zu bewerten. Daraus ergibt sich unmittelbar das Schaltsignal, welches die minimale unendlich-Norm

$$\sigma(t+) = \min_{k=1,\dots,s} (\|\mathbf{A}_1^{(k)}(\mathbf{q})\|_\infty) \quad (6.47)$$

erfüllt. Im Allgemeinen kann die Lösung nach diesem Kriterium nicht analytisch bestimmt werden und erfordert eine numerische Auswertung. Die grafische Interpretation des Kriteriums (6.47) für den 2RRR/RR RA-PKM in Abbildung 4.1 ergibt die Darstellung in Abbildung 6.16 a), die als numerische *Switching Map* bezeichnet werden soll.

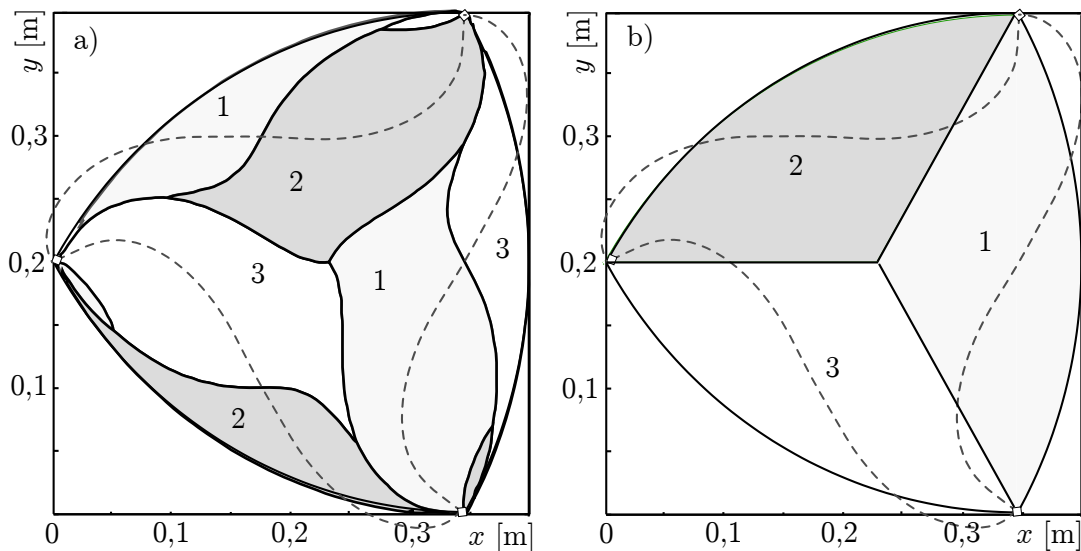


Abbildung 6.16: a) Numerische Switching map mit Kennzeichnung der Minimalkoordinaten bezüglich des Schaltsignals in Gleichung (6.47). b) Genäherte Switching map mit Kennzeichnung der Minimalkoordinaten bezüglich des Schaltsignals in Gleichung (6.48) für den 2RRR/RR RA-PKM

Anmerkung 6.4.1. Wenn der Arbeitsraum von geringer Dimension ist, kann das Kriterium *offline* ausgewertet und als Wertetabelle hinterlegt werden.

Näherungsweise Koordinatenumschaltung

Wenn die Verläufe der Singularitäten im Arbeitsraum bekannt sind, lässt sich das Umschaltkriterium intuitiv vereinfachen. Die analytische *Switching Map* des vereinfachten Kriteriums wird in Abbildung 6.16 b) gezeigt. Dabei werden die Koordinaten lediglich zweckmäßig umgeschaltet, um Singularitäten zu verhindern. Der Arbeitsraum des $2\text{RRR}/\text{RR}$ RA-PKM wird mithilfe der Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= L, & \text{falls } 0 \leq x < \frac{2}{3}\sqrt{3}L, \\ f_2(x) &= -\sqrt{3}x + 3L, & \text{falls } \frac{2}{3}\sqrt{3}L \leq x < 2L, \\ f_3(x) &= \sqrt{3}x - L, & \text{falls } \frac{2}{3}\sqrt{3}L \leq x < 2L. \end{aligned}$$

und der Arbeitsraumgrenzen in drei Sektoren eingeteilt, wobei mit L die Armlängen des $2\text{RRR}/\text{RR}$ RA-PKM Manipulators bezeichnet werden (Abbildung 2.2). Die Sektoren werden, wie es bei einer Intervalldefinition üblich ist durch $\mathcal{A}_1 := [f_1, f_2, \mathcal{W}]$, $\mathcal{A}_2 := [f_1, f_3, \mathcal{W}]$ und $\mathcal{A}_3 := [f_2, f_3, \mathcal{W}]$ bezeichnet, wobei der Arbeitsraum mit \mathcal{W} bezeichnet wird. Daraus folgt das Schaltsignal, dass die angenäherte Umschaltung beschreibt

$$\sigma(t+) = \begin{cases} k = 3, & \text{falls } \mathbf{X} \in \mathcal{A}_1 \\ k = 2, & \text{falls } \mathbf{X} \in \mathcal{A}_2 \\ k = 1, & \text{falls } \mathbf{X} \in \mathcal{A}_3. \end{cases} \quad (6.48)$$

6.4.5 Experimentelle Ergebnisse

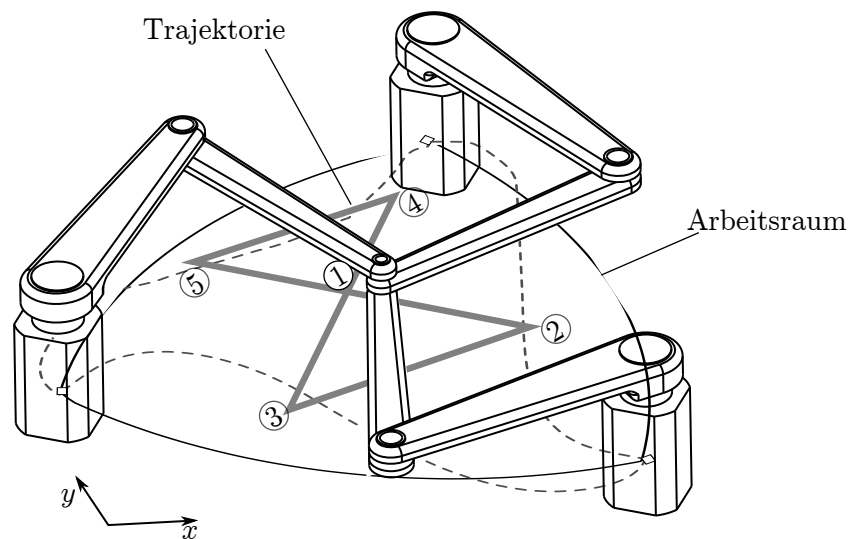
Die Robustheit des Reglerkonzepts mit genereller Koordinatenumschaltung wird anhand des $2\text{RRR}/\text{RR}$ RA-PKM mit den industriellen Direktantrieben STM135 verifiziert. Die Gewichtungsmatrix der inversen Dynamik wird mit $\mathbf{W} := \mathbf{I}_3$ aufgrund der baugleichen Antriebe und des symmetrischen Aufbaus des Prototypen zu einer Einheitsmatrix gewählt. Des Weiteren wird auf die Erzeugung von Nullraum-Kräften verzichtet. Für die Messungen wurde das Reglerkonzept in Abbildung 6.4 umgesetzt. Der Störgrößenbeobachter sowie der Zustandsbeobachter werden in Endeffektorkoordinaten formuliert. Diese Methoden werden daher im nächsten Abschnitt näher beschrieben. Die vollständigen Parameter der Beobachter und des CTC-Reglers werden in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Tabelle 6.1: Parameter der Regler und Beobachter

	Störgrößen -beobachter	Zustands -beobachter	CTC
Skalierung		$\epsilon = 0,01$	
Verstärkungen	$T_S = 0,0067 \text{ s}$	$k_1 = 707$ $k_2 = 25000$	$K_P = 15000$ $K_D = 350$

Aufgrund der hohen verfügbaren Drehmomente der Torque-Motoren sowie der Beobachtungsqualität der Geschwindigkeiten können die Eigenfrequenzen der linearen Fehlerdynamik sehr schnell eingestellt werden.

Die Trajektorie für den CTC in minimalen Gelenkkoordinaten wird in Abbildung 6.17 gezeigt.

**Abbildung 6.17:** Referenztrajektorie für die Experimente

Bahnpunkte	1	2	3	4	5
Koordinaten in mm	(216/223)	(306/133)	(126/113)	(306/313)	(126/313)
Strecke in m	0,13	0,18	0,26	0,18	0,13

Die Trajektorie schneidet dabei sämtliche Eingangssingularitäten der PKM Unterstrukturen ②, ③, ⑤ und beinhaltet auch Punkte ②, ⑤, die sich in der Nähe der

Arbeitsraumgrenzen befinden. Die Trajektorienplanung erfolgt unter dem Gesichtspunkt, den größtmöglichen Bereich innerhalb des Arbeitsraums abzudecken. Die Verweilzeit von 1 s an den Kantenpunkten dient der Simulation einer Handhabungsaufgabe. Während dieser Zeit könnte ein Greifer beispielsweise ein Objekt manipulieren. Die gesamte Bahn wird in 9 s abgefahren. Dies entspricht einer Kantenverfahrzeit von 1 s wodurch sich der Verlauf von EE-Fehlern und Drehmomenten in den Abbildungen 6.19 und 6.18 ergibt. Die Reglerformulierung in Minimalkoordinaten kann ohne Koordinatenumschaltung nicht sicher verwendet werden. Jede Umschaltung der Minimalkoordinaten verändert das Orthogonalkomplement \mathbf{F} sowie die lineare Rückkopplung der Gelenkfehler $\mathbf{e}_2, \dot{\mathbf{e}}_2$. Der Schaltpfad befindet sich im oberen Teil der Graphen. Der maximale Fehler beträgt während der Fahrt ca. 1,5 mm, das maximale Drehmoment beträgt 2 Nm. Im Verlauf der Drehmomente kommt es bei Umschaltvorgängen zu sichtbaren Sprüngen, die aufgrund der ungleichen Gelenkfehler zustande kommen. Die Koordinatenumschaltung hat allerdings keinen Einfluss auf den Anteil, der durch die inverse Dynamik beigetragen wird. Der Manipulator kann mit der Koordinatenumschaltung sämtliche Eingangssingularitäten der PKM-Unterstrukturen durchfahren.

Die Auswirkung einer Singularität konnte mit dem Funktionsmuster mit relativ leistungsschwachen DC-Motoren demonstriert werden. Dazu wird eine Trajektorie mit konstanten Minimalkoordinaten ($\mathbf{q}_2^{(1)}$) durchfahren. Der Drehmomentverlauf (Abbildung 6.20) sowie die Gelenkfehler (Abbildung 6.21) zeigen deutliche Sprünge wenn sich der Manipulator in einer Parametersingularität befindet. Der Prototyp wurde an diesen Stellen „händisch“ wieder in die Bahn gebracht, um das Experiment abzuschließen.

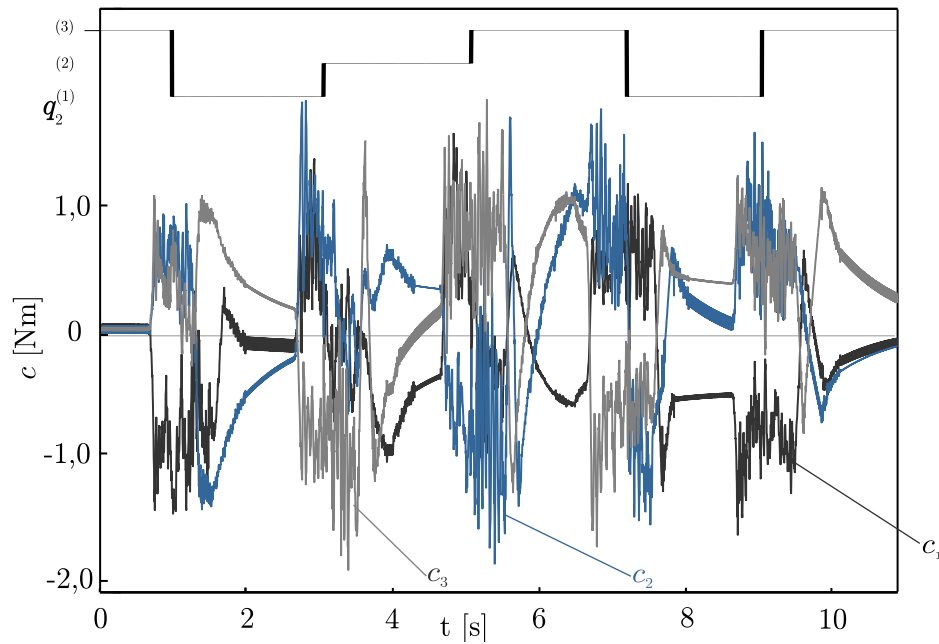


Abbildung 6.18: Drehmomente des CTC in Minimalkoordinaten mit genereller Koordinatenumschaltung

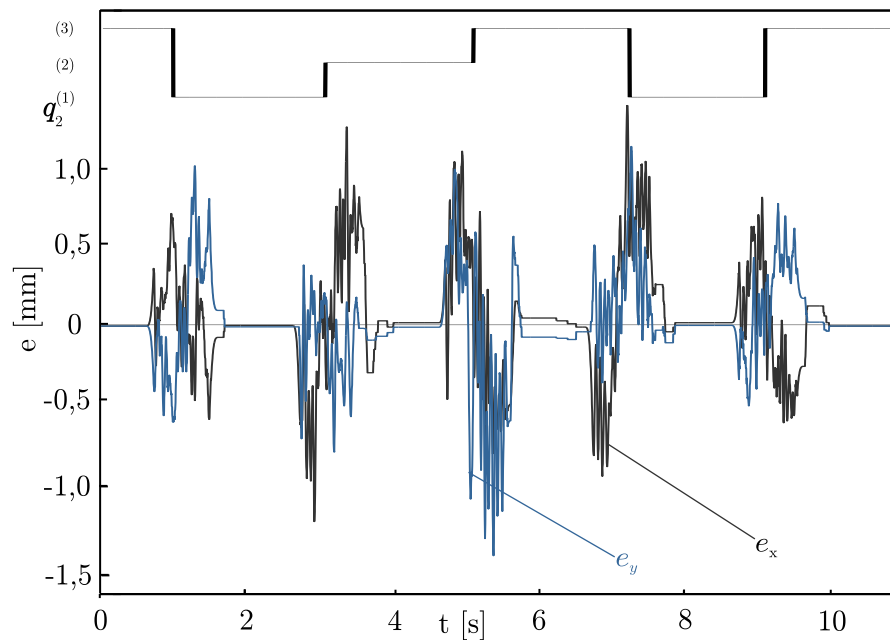


Abbildung 6.19: Bahnfehler des CTC in Minimalkoordinaten mit genereller Koordinatenumschaltung

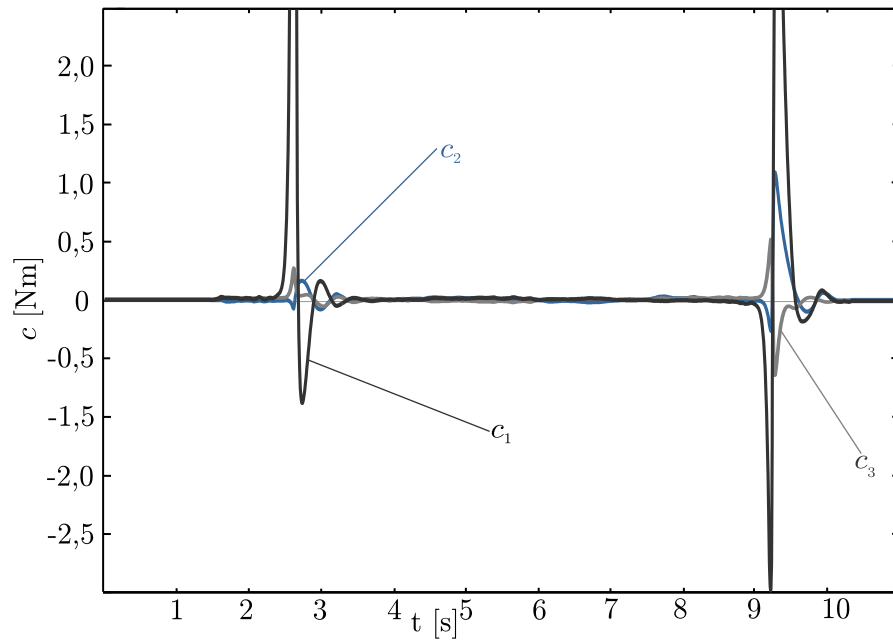


Abbildung 6.20: Drehmomente des CTC in Minimalkoordinaten ohne Koordinatenumschaltung

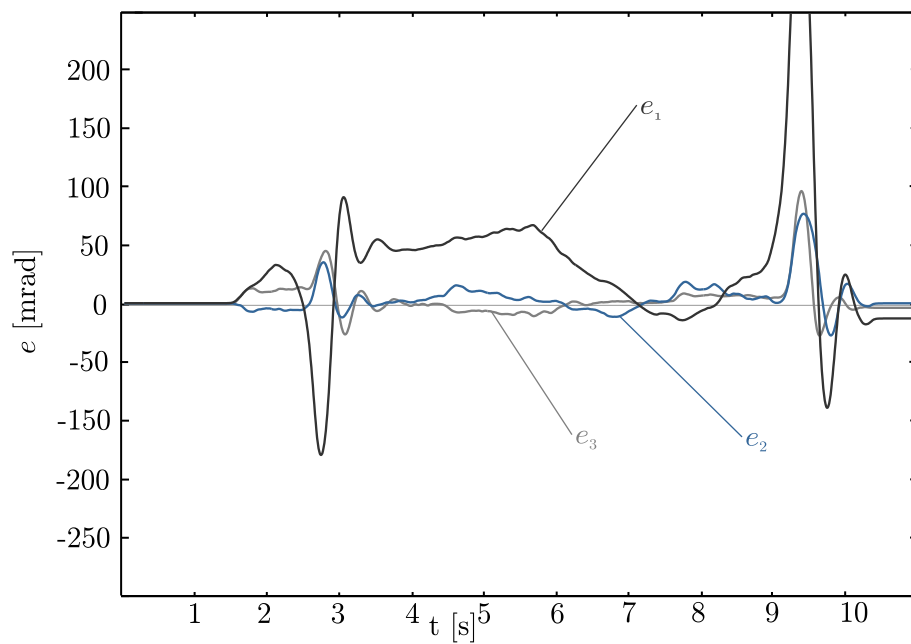


Abbildung 6.21: Gelenkfehler des CTC in Minimalkoordinaten ohne Koordinatenumschaltung

6.5 Modellbasierte Regelung in δ Endeffektorkoordinaten

6.5.1 Inverse Dynamik

Die Auflösung von (4.16) nach den Antriebskräften \mathbf{c} verläuft analog zu der Formulierung in δ Gelenkkoordinaten. Die Verteilung der generalisierten Antriebskräfte auf die redundanten Antriebe erfolgt unter Berücksichtigung von (6.3) durch

$$\mathbf{c} = \left(\underline{\mathbf{A}}^T\right)_{\mathbf{W}}^+ \left(\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\right) + \mathbf{N}_{\underline{\mathbf{A}}^T, \mathbf{W}} \mathbf{c}^0, \quad (6.49)$$

wobei

$$\left(\underline{\mathbf{A}}^T\right)_{\mathbf{W}}^+ = \mathbf{W}^{-1} \underline{\mathbf{A}} \left(\underline{\mathbf{A}}^T \mathbf{W}^{-1} \underline{\mathbf{A}}\right)^{-1}$$

die gewichtete PENROSE-MOORE Pseudoinverse und

$$\mathbf{N}_{\underline{\mathbf{A}}^T, \mathbf{W}} = \left(\mathbf{I}_m - \left(\underline{\mathbf{A}}^T\right)_{\mathbf{W}}^+ \underline{\mathbf{A}}^T\right)$$

eine Projektionsmatrix ist, die einen beliebigen Vektor \mathbf{c}^0 in den Nullraum von $\underline{\mathbf{A}}^T$ projiziert. Die Inverse Dynamik (6.49) ist unanfällig gegenüber Parametersingularitäten und berechnet die Antriebskräfte ausgehend von einer Trajektorie $\mathbf{X}(t)$ in Endeffektorkoordinaten.

6.5.2 Computed Torque Controller (CTC)

Es sei mit \mathbf{X}^d die vorgegebene EE-Trajektorie bezeichnet. Der CTC-Regler, der den EE-Fehler $\mathbf{e} := \mathbf{X}^d - \mathbf{X}$ und dessen zeitliche Ableitung $\dot{\mathbf{e}} := \dot{\mathbf{X}}^d - \dot{\mathbf{X}}$ minimiert, wird durch

$$\mathbf{c} = \left(\underline{\mathbf{A}}^T\right)_{\mathbf{W}}^+ \left(\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\nu} + \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\right) \quad (6.50)$$

bestimmt, wobei $\boldsymbol{\nu} = \ddot{\mathbf{X}}^d + \mathbf{K}_P \mathbf{e} + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}}$. Die Matrizen \mathbf{K}_P und \mathbf{K}_D sind positiv definite konstante Verstärkungsmatrizen, die zur Einstellung der Eigenfrequenzen der resultierenden linearen Fehlerdynamik verwendet werden.

6.5.3 Augmented PD Regler (APD)

Der APD-Regler für die Formulierung in Endeffektorkoordinaten ergibt sich zu

$$\mathbf{c} = \left(\underline{\mathbf{A}}^T\right)_{\mathbf{W}}^+ \left(\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{X}}^d + \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{X}}^d + \underline{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \boldsymbol{\nu}\right), \quad (6.51)$$

wobei $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{K}_P \mathbf{e} + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}}$.

6.5.4 Experimentelle Ergebnisse

Die Robustheit des Reglerkonzepts mit Endeffektorkoordinaten wird anhand des 2RRR/RR RA-PKM mit den industriellen Direktantrieben STM135 verifiziert. Die gewonnenen experimentellen Ergebnisse zeigen unter dem Einsatz des vorgestellten Störgrößenbeobachters in Abschnitt 6.3.2 eine deutliche Steigerung der Präzision des RA-PKM bei einer Trajektorienfolge. Der vollständig implementierte CTC ergibt sich damit zu

$$\mathbf{c} = (\underline{\mathbf{A}}^T)^+ \left(\underline{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\nu} + \underline{\mathbf{K}} \dot{\hat{\mathbf{X}}} \right) + \mathbf{c}_S, \quad (6.52)$$

wobei $\boldsymbol{\nu} = \ddot{\mathbf{X}}^d + \mathbf{K}_P \mathbf{e} + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}}$. Hierin werden die Methoden des Zustandsbeobachters sowie eine Störgrößenaufschaltung mithilfe des Störgrößenbeobachters berücksichtigt. Die beobachteten Geschwindigkeiten werden mit $\dot{\hat{\mathbf{X}}}$ bezeichnet und resultieren aus (6.21). Die Störmomente aller Gelenkkoordinaten werden als generalisierte EE-Kräfte interpretiert und mithilfe der verfügbaren Antriebe kompensiert. Diese Herangehensweise hat gewisse Vorteile, da die Methode jegliche Störungen als EE-Kraft umrechnet. Somit fallen in diesem Beispiel lediglich die beobachteten generalisierten Störkräfte $\hat{\eta}_x, \hat{\eta}_y$ an. Die Kompensation erfolgt nun einzig durch die Antriebsmomente \mathbf{c}_S , deren Berechnung über die Beziehung (6.31) erfolgt. Die vollständigen Parameter des *High-Gain*-Beobachters für Zustandsgrößen, des Störgrößen-Beobachters und des CTC-Reglers werden in Tabelle 6.1 aufgelistet.

Die Trajektorie für die Experimente wird in Abbildung 6.17 dargestellt. Im ersten Experiment wird die Bahn mit insgesamt 12 s relativ langsam abgefahren. Dies entspricht einer Kantenverfahrzeit von 2 s wodurch sich der Verlauf von EE-Fehlern und Drehmomenten gemäß den Abbildungen 6.23 und 6.22 ergibt.

Der maximale Fehler beträgt während der Fahrt ca. 1,5 mm, das maximale Drehmoment 3,5 Nm. Damit ergeben sich Fehler an den Haltepunkten unter $50 \mu\text{m}$. Zuletzt werden die Ergebnisse der Beobachter beurteilt. In Abbildung 6.24 ist das Ergebnis des Störgrößenbeobachters dargestellt, wobei außer der Motorreibung keine weiteren Störgrößen auftreten. Auf den ersten Blick wirken die auftretenden Kräfte durchaus unvorstellbar hoch. Jedoch haben die Haftreibungsphänomene in der Nähe von Eingangs-Singularitäten oder Strecklagen einen enormen Einfluss auf die entsprechende EE-Kraft.

Die Ergebnisse des Zustandsbeobachters werden in Abbildung 6.25 mit den vorgegebenen Geschwindigkeiten verglichen. Das Rauschen bei kleinen Geschwindigkeiten rührt aus den ungefilterten Antriebskräften, die dem Beobachter zugeführt werden.

Tatsächlich ist das langsame Fahren, aufgrund der hohen Haftreibung der Antriebe, sehr anspruchsvoll für den Regler. In einem zweiten Experiment wird dieselbe Trajektorie mit einer Beschleunigung von 30 m/s^2 mit einer Verfahrzeit von insgesamt

4s abgefahren. Dies entspricht einer Kantenverfahrzeit von 300 ms und einer Kantenverweilzeit von 0,5s. Die Verweilzeit an den Kanten soll in Abbildung 6.26 die hohe Genauigkeit im Stillstand zeigen, die sich durch EE-Fehler unter $100\ \mu\text{m}$ auszeichnet. In Beschleunigungsphasen ergeben sich EE-Fehler von maximal 2,5 mm. Der zugehörige Verlauf der Stellgrößen ist in Abbildung 6.27 dargestellt.

Der Anteil, der für die Präzision des Regelungskonzept sorgt, ist der Störgrößenbeobachter, dessen Ergebnisse während der Fahrt in Abbildung 6.28 gezeigt werden. Die generalisierten Störkräfte der schnellen Bewegung sind vom Betrag vergleichbar mit den Störkräften der langsamen Fahrt in Abbildung 6.24. Die Ergebnisse des Zustandsbeobachters zeigen eine gute Übereinstimmung zwischen den vorgegeben und beobachteten Geschwindigkeiten, Abbildung 6.29. Zudem sind die beobachteten EE-Geschwindigkeiten bei schnelleren Bewegungen deutlich weniger verrauscht.

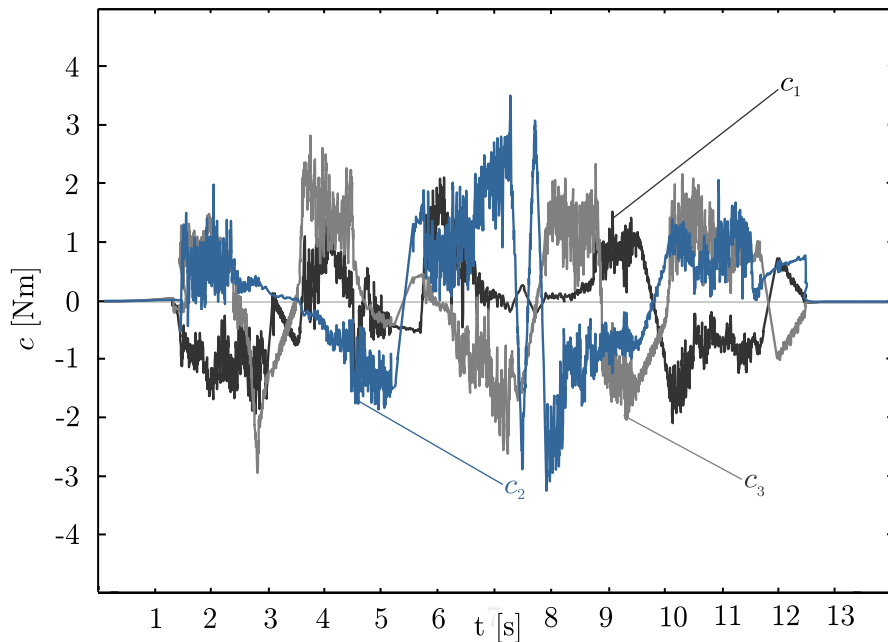


Abbildung 6.22: Verlauf der Drehmomente mit dem CTC in Endeffektorkoordinaten

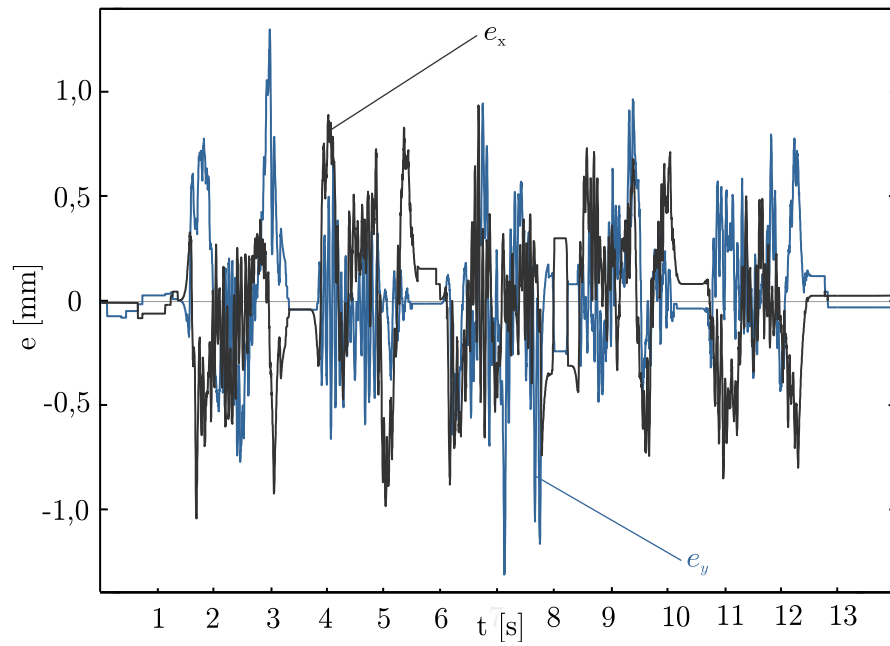


Abbildung 6.23: Verlauf des Bahnfehlers mit dem CTC in Endeffektorkoordinaten

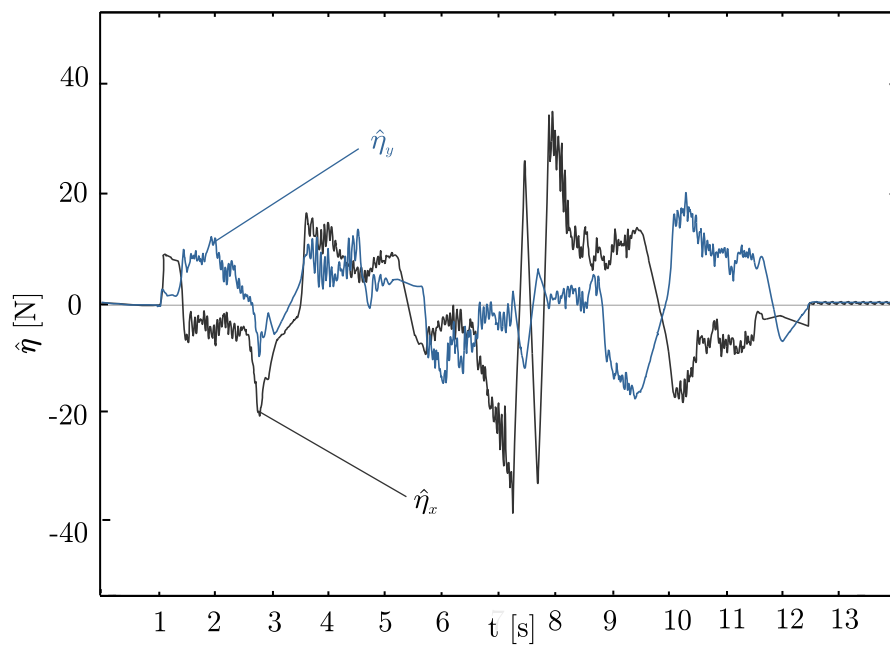


Abbildung 6.24: Beobachtete generalisierte Störgrößen während der Bahnfolge

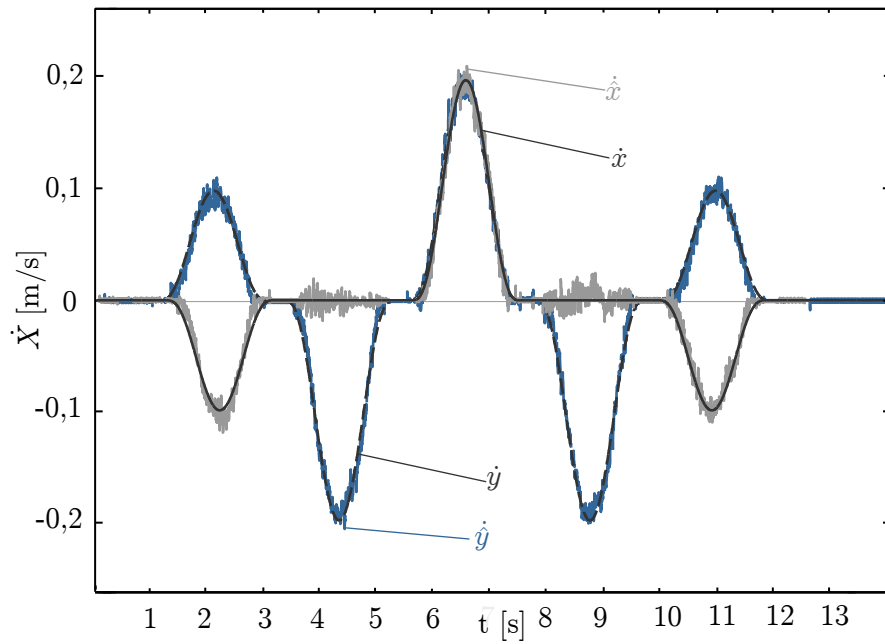


Abbildung 6.25: Vergleich der beobachteten und vorgegebenen EE-Geschwindigkeit während der Bahnfolge

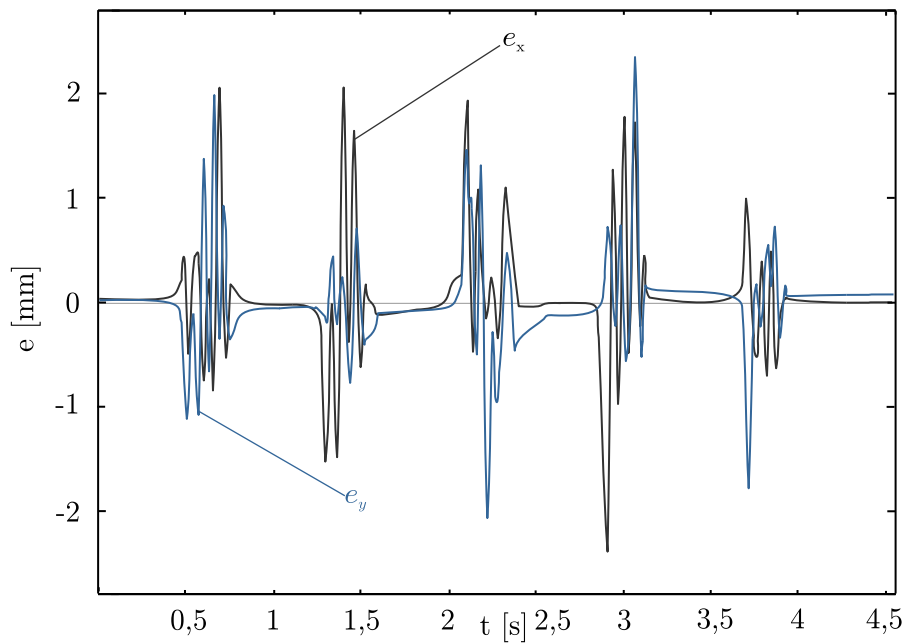


Abbildung 6.26: Verlauf des Fehlers der Endeffektorkoordinaten bei schnellen Bewegungen

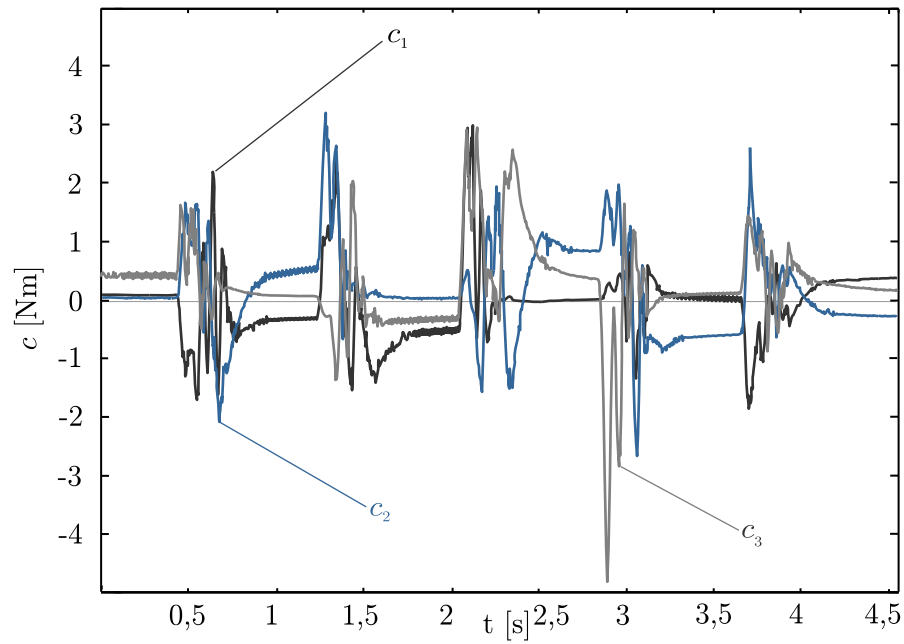


Abbildung 6.27: Verlauf der Drehmomente der Antriebe bei schnellen Bewegungen

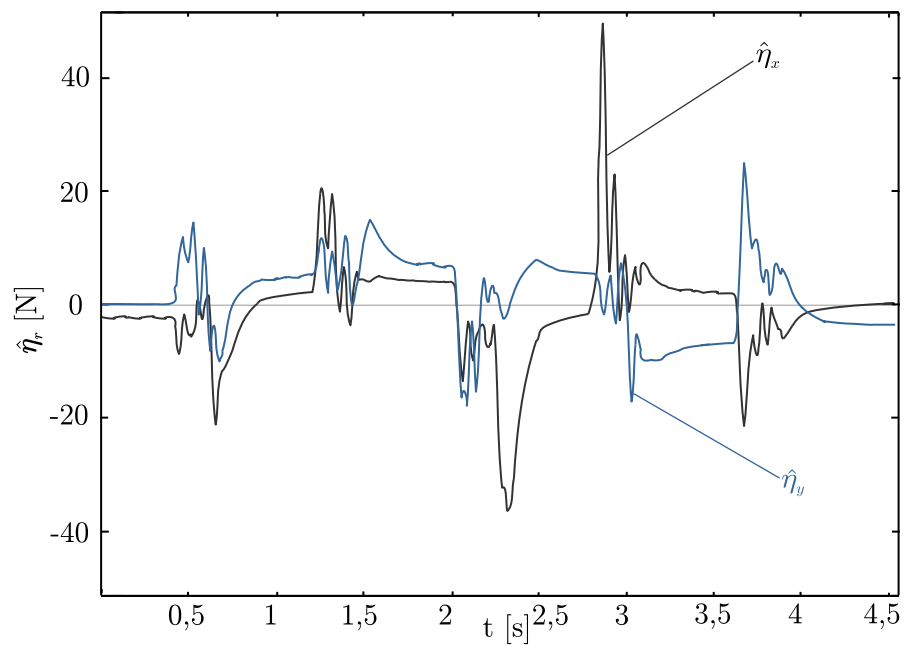


Abbildung 6.28: Beobachtete generalisierte Störgrößen bei schnellen Bewegungen

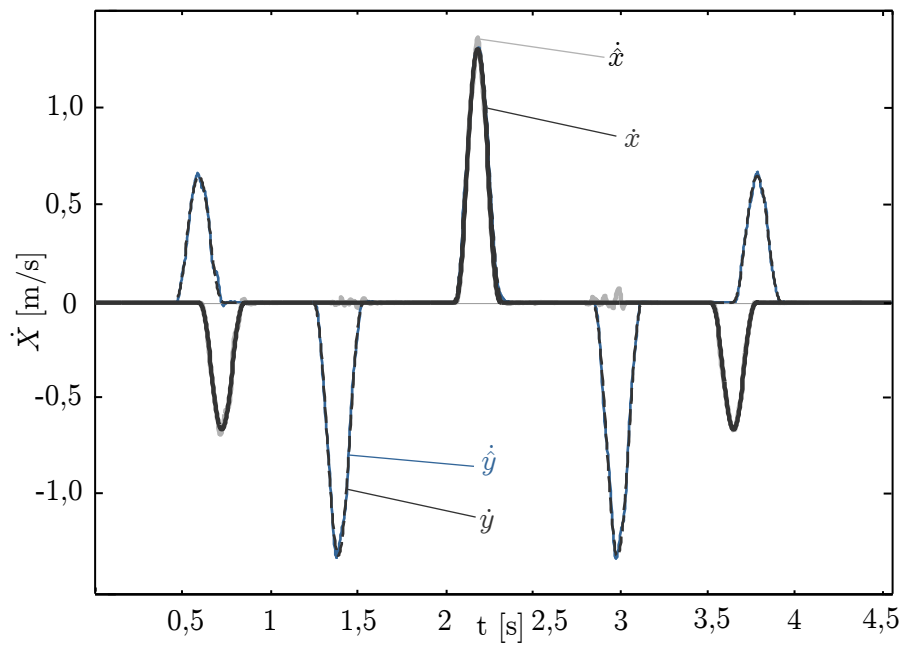


Abbildung 6.29: Vergleich der beobachteten und vorgegebenen EE-Geschwindigkeit bei schneller Trajektorie

6.6 Modellbasierte Regelung in m Antriebskoordinaten

6.6.1 Inverse Dynamik

Die Berechnung sämtlicher Antriebskräfte aus m Bewegungsgleichungen ist eindeutig. Darum stellt diese Formulierung für eine Reglerauslegung den geringsten Aufwand dar. Auf der anderen Seite kann bei dieser Koordinaten-Formulierung im Gegensatz zur den Formulierungen in Minimalkoordinaten kein Nullraumprojektor angegeben werden. Man könnte allerdings den Kern von \mathbf{A}^T oder $\underline{\mathbf{A}}^T$ dazu verwenden, Kräfte in den Nullraum zu projizieren.

6.6.2 Computed Torque Controller (CTC)

Die inverse Dynamik, die unmittelbar den Bewegungsgleichungen (4.23) entspricht, kann für ein CTC oder APD-Regler verwendet werden. Die vorgegebene Trajektorie soll mit \mathbf{q}_a^d bezeichnet werden. Die CTC-Gleichungen, die den Reglerfehler $\hat{\mathbf{e}} := \mathbf{q}_a^d - \mathbf{q}_a$ minimieren werden durch

$$\mathbf{c} = \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\nu} + \widehat{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_a + \widehat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (6.53)$$

mit $\boldsymbol{\nu} = \ddot{\mathbf{q}}_a^d + \mathbf{K}_D \hat{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_P \hat{\mathbf{e}}$, beschrieben. Die positiv definiten Verstärkungsmatrizen $\mathbf{K}_D := \text{diag}(K_{D_1}, \dots, K_{D_m})$ und $\mathbf{K}_P := \text{diag}(K_{P_1}, \dots, K_{P_m})$ werden wieder zur Einstellung der Eigenfrequenzen des geschlossenen Regelkreises verwendet. Der CTC (6.53) führt zu einer asymptotisch stabilen Fehlerdynamik, die aufgrund der Beschreibung in m Koordinaten in allen Antriebsarten des PKM gültig ist, selbst wenn sich eine PKM Unterstruktur in einer Eingangssingularität befindet.

6.6.3 Augmented PD Regler (APD)

Der APD-Regler für die Formulierung in Antriebskoordinaten ergibt sich zu

$$\mathbf{c} = \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_a^d + \widehat{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_a^d + \widehat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \boldsymbol{\nu}, \quad (6.54)$$

wobei $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{K}_P \hat{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_D \dot{\hat{\mathbf{e}}}$ gilt.

6.6.4 Experimentelle Ergebnisse

Das Reglerkonzept mit einer Koordinatenformulierung in Antriebskoordinaten wird anhand des 2RRR/RR RA-PKM mit den industriellen Direktantrieben STM135

verifiziert. Die vollständigen Parameter des *High-Gain*-Beobachters für Zustandsgrößen, des Störgrößen-Beobachters und des CTC-Reglers werden in Tabelle 6.1 zusammengefasst. Die Beobachter wurden dabei in Endeffektorkoordinaten formuliert. Die Trajektorie für die Experimente wird in Abbildung 6.17 dargestellt, wobei die Verfahrszeit 9 s beträgt. Der Manipulator kann mit dieser Formulierung sämtliche Eingangssingularitäten der PKM-Unterstrukturen durchfahren. Die Fehler am Endeffektor sowie die Antriebsmomente werden in den Abbildungen 6.30 und 6.31 gezeigt. Die Zahlen sind vergleichbar mit der Koordinatenformulierung in Minimalkoordinaten. Da die inverse Dynamik des Reglers in dieser Formulierung keine Strukturmatrix enthält, erfordert diese Formulierung eine akkurate Einhaltung der geometrischen Zwangsbedingungen bei der Referenzierung der Gelenkkordinaten \mathbf{q}_a .

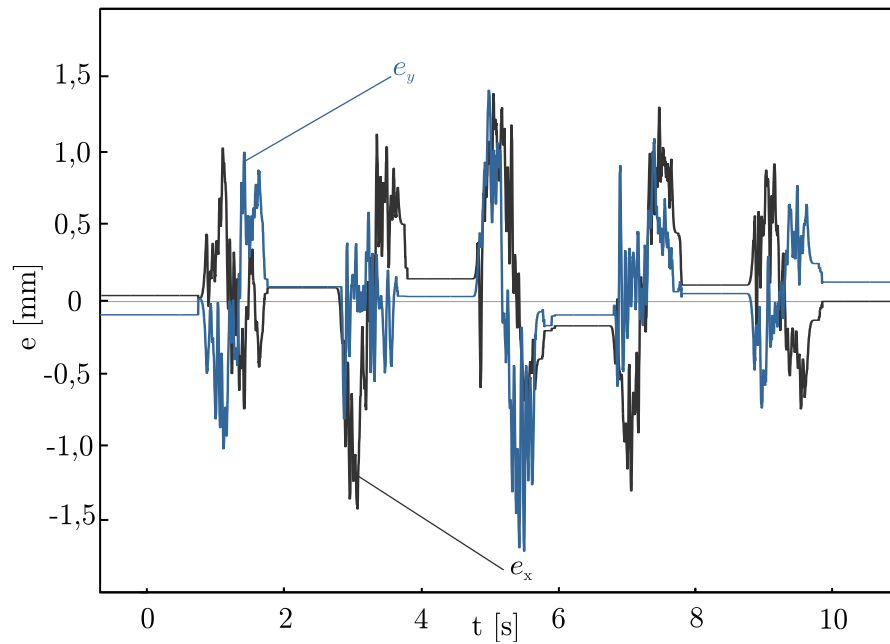


Abbildung 6.30: Verlauf der Bahnfehler mit dem CTC in Antriebskoordinaten

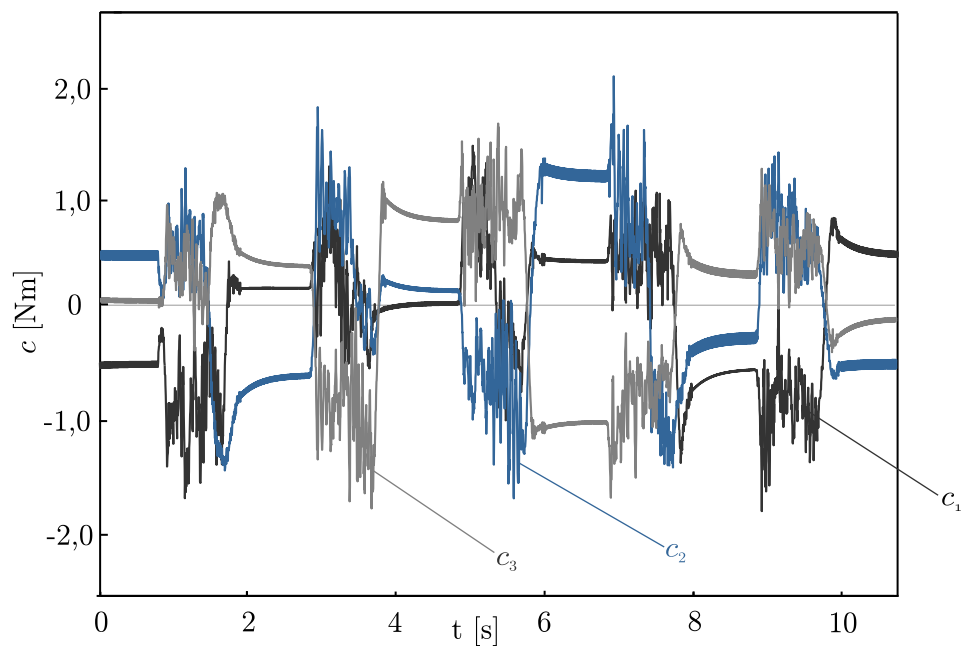


Abbildung 6.31: Verlauf der Drehmomente mit dem CTC in Antriebskoordinaten

6.7 Modellbasierte Regelung in n redundanten Koordinaten

6.7.1 Inverse Dynamik

Die Formulierung der Bewegungsgleichungen in n systembeschreibenden Koordinaten zeichnet sich dadurch aus, dass sie in jeder Bewegungsart gültig ist. Ausgeschlossen sind die sogenannten Konfigurationsraumsingularitäten, wo \mathbf{J} singular wird. Da der Rang von $\widetilde{\mathbf{A}}^T = \delta < m$ ist, ist die Auflösung von (4.26) nach den Antriebsmomenten keinesfalls eindeutig. Mithilfe des Nullraumprojektors $\mathbf{N}_{\widetilde{\mathbf{A}}^T} = \mathbf{I}_n - \left(\widetilde{\mathbf{A}}^T\right)^+ \widetilde{\mathbf{A}}^T$ ergibt sich die inverse Dynamik für diese Formulierung

$$\mathbf{c} = \left(\widetilde{\mathbf{A}}^T\right)^+ \left(\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \widetilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \widetilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\right) + \mathbf{N}_{\widetilde{\mathbf{A}}^T} \cdot \mathbf{c}^0, \quad (6.55)$$

wobei mit \mathbf{c}^0 wieder ein Vektor bezeichnet wird, der eine gezielte Verspannung verursacht. Die Formulierung ähnelt der Inversen Dynamik in (6.32), unterscheidet sich doch erheblich bei der Ermittlung der Pseudoinversen $\left(\widetilde{\mathbf{A}}^T\right)^+$. Es besteht zum einen die Möglichkeit die $n \times n$ Matrix durch eine numerisch aufwendige Singulärwertzerlegung (SVD) zu berechnen. Eine andere Methode wird von Müller [2011a] vorgeschlagen. Dabei wird zunächst eine $\delta \times n$ Teilmatrix $\widetilde{\mathbf{A}}_1$, mit vollem Rang identifiziert:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{A}}_1 \\ \widetilde{\mathbf{A}}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.56)$$

wobei mit $\widetilde{\mathbf{A}}_2$ die übrige $(m - \delta) \times n$ Untermatrix von $\widetilde{\mathbf{A}}$ bezeichnet wird. Zur weiteren Herleitung werden n generalisierte Kräfte $\tilde{\mathbf{v}}$, aus Abschnitt 6.1 als Hilfsgrößen eingeführt, womit das Problem mit dem unterbestimmten Gleichungssystem

$$\tilde{\mathbf{v}} = \widetilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{c} \quad (6.57)$$

beschrieben werden kann. Unter Berücksichtigung der Partitionierung (6.56) können die generalisierten Antriebskräfte mit $\tilde{\mathbf{v}} = \widetilde{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{c}_1 + \widetilde{\mathbf{A}}_2^T \mathbf{c}_2$ berechnet werden. Diese Gleichung wird mithilfe der Beziehung

$$\mathbf{c}_1 = \left(\widetilde{\mathbf{A}}_1^T\right)^+ \left(\tilde{\mathbf{v}} - \widetilde{\mathbf{A}}_2^T \mathbf{c}_2\right), \quad (6.58)$$

umgestellt, um ein Teil der Antriebskräfte eindeutig zu ermitteln. Dabei ist $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_1^T\right)^+ = \left(\widetilde{\mathbf{A}}_1 \widetilde{\mathbf{A}}_1^T\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{A}}_1$ die links Pseudoinverse von $\widetilde{\mathbf{A}}_1^T$. Die Auflösung von (6.57) nach \mathbf{c} kann mit den Beziehungen (6.58) als Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen formuliert werden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{c}_1\|^2 + \|\mathbf{c}_2\|^2 \rightarrow \min \\ \mathbf{c}_1 - \left(\widetilde{\mathbf{A}}_1^T\right)^+ \left(\tilde{\mathbf{v}} - \widetilde{\mathbf{A}}_2^T \mathbf{c}_2\right) = \mathbf{0} \end{array} \right\}. \quad (6.59)$$

Dabei sollen die Steuerkräfte durch $\mathbf{c} \rightarrow \min$ minimiert werden. Mithilfe der LAGRANGE-Multiplikatorenmethode

$$\Lambda(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{c}\|^2 + \boldsymbol{\lambda}^T \left(\mathbf{c}_1 - \left(\widetilde{\mathbf{A}}_1^T \right)^+ \left(\tilde{\mathbf{v}} - \widetilde{\mathbf{A}}_2^T \mathbf{c}_2 \right) \right)$$

lassen sich die Nebenbedingungen durch die skalaren Variablen $\boldsymbol{\lambda}$ (LAGRANGE-Multiplikatoren) in das Optimierungsproblem einbinden. Ein lokales Minimum der Funktion kann beispielsweise mit dem Gradientenverfahren [Schwarz u. Köckler, 2011] ermittelt werden. Die Bedingungen für ein lokales Minimum von Λ werden durch die Funktionen

$$\mathbf{0} = \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{c}_1 - \left(\widetilde{\mathbf{A}}_1^T \right)^+ \left(\tilde{\mathbf{v}} - \widetilde{\mathbf{A}}_2^T \mathbf{c}_2 \right), \quad (6.60a)$$

$$\mathbf{0} = \nabla_{\mathbf{c}_1} = \mathbf{c}_1 + \boldsymbol{\lambda}, \quad (6.60b)$$

$$\mathbf{0} = \nabla_{\mathbf{c}_2} = \mathbf{c}_2 + \left(\left(\widetilde{\mathbf{A}}_1^T \right)^+ \widetilde{\mathbf{A}}_2^T \right)^T \boldsymbol{\lambda} \quad (6.60c)$$

erreicht. Die Auflösung von (6.60) nach $\boldsymbol{\lambda}$ und \mathbf{c}_2 führt zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\widetilde{\mathbf{E}}_1^T \right)^+ \left(\mathbf{I}_n - \widetilde{\mathbf{A}}_2^T \left(\mathbf{I}_{m-\delta} + \mathbf{E}^T \mathbf{E} \right)^{-1} \mathbf{E}^T \left(\widetilde{\mathbf{A}}_1^T \right)^+ \right) \\ \left(\mathbf{I}_{m-\delta} + \mathbf{E}^T \mathbf{E} \right)^{-1} \mathbf{E}^T \left(\widetilde{\mathbf{A}}_1^T \right)^+ \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{c} = \left(\widetilde{\mathbf{A}}^T \right)^+ \tilde{\mathbf{v}}, \quad (6.61)$$

wobei $\mathbf{E} = \left(\widetilde{\mathbf{A}}_1^T \right)^+ \widetilde{\mathbf{A}}_2^T$ ist [Müller u. Hufnagel, 2011b]. Die Gültigkeit der Auflösung (6.61) ist in allen Bewegungsarten des RA-PKM gegeben, sofern die Untermatrix $\widetilde{\mathbf{A}}_1$ vollen Rang hat. Dies kann unter Verwendung der Koordinatenumschaltung sichergestellt werden, indem $\widetilde{\mathbf{A}}_1$ bezüglich des Schaltpfades (6.47) aus $\widetilde{\mathbf{A}}$ bestimmt wird. Der Vorteil gegenüber der Formulierung in minimalen Gelenkkordinaten besteht darin, dass lediglich die Pseudoinverse $\left(\widetilde{\mathbf{A}}^T \right)^+$ umgeschaltet werden muss und nicht die ganzen Bewegungsgleichungen.

6.7.2 Computed Torque Controller (CTC)

Die vorgegebene Trajektorie wird nun mit \mathbf{q}^d bezeichnet womit sich der Reglerfehler zu $\tilde{\mathbf{e}} := \mathbf{q}^d - \mathbf{q}$ und dessen zeitliche Ableitung zu $\dot{\tilde{\mathbf{e}}} := \dot{\mathbf{q}}^d - \dot{\mathbf{q}}$ ergeben. Die Gleichungen des CTC, die diese Fehler minimieren werden durch

$$\boxed{\mathbf{c} = \left(\widetilde{\mathbf{A}}^T \right)^+ \left(\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\nu} + \widetilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \widetilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right)}, \quad (6.62)$$

mit $\boldsymbol{\nu} = \ddot{\mathbf{q}}^d + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{e}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{e}}$ eingeführt. Die $n \times n$ Verstärkungsmatrizen ergeben sich unter Berücksichtigung der Koordinatenverteilung $\mathbf{q} \equiv [\mathbf{q}_p \ \mathbf{q}_a]^T \equiv [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2]^T$ zu

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_P &= \text{diag}(0, \dots, 0, K_{P_1}, \dots, K_{P_m}) \\ \mathbf{K}_D &= \text{diag}(0, \dots, 0, K_{D_1}, \dots, K_{D_m}), \end{aligned}$$

um die Fehler der aktiven Gelenkkoordinaten zu gewichten.

6.7.3 Augmented PD Regler (APD)

Die Formulierung des APD-Reglers für n redundante Koordinaten wird durch

$$\mathbf{c} = \left(\widetilde{\mathbf{A}}^T \right)^+ \left(\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}^d + \widetilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}^d + \widetilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \boldsymbol{\nu} \right), \quad (6.63)$$

mit $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{e}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{e}}$ beschrieben. Die Verstärkungsmatrizen \mathbf{K}_P und \mathbf{K}_D werden dabei wieder so aufgestellt, dass nur die Fehler der aktiven Gelenkkoordinaten gewichtet werden.

6.7.4 Experimentelle Ergebnisse

Die Bewegung des 2RRR/RR RA-PKM kann mit $\delta = 2$ unabhängigen Koordinaten, bezüglich seiner Freiheitsgrade beschrieben werden. Die 6×3 Strukturmatrix $\widetilde{\mathbf{A}}^T$ hat darum den konstanten Rang 2, worauf eine 6×2 Untermatrix $\widetilde{\mathbf{A}}_1^T$ mit vollem Rang gefunden werden kann. Zur Identifikation dieser Untermatrix wird das Koordinatenumschaltkriterium (6.47) aus der Minimalkoordinaten Formulierung verwendet. Dabei wird $\widetilde{\mathbf{A}}_1^T$ aus $\widetilde{\mathbf{A}}^T$ bestimmt, dass $\|\widetilde{\mathbf{A}}_1^T\|_\infty \rightarrow \min$. Abhängig davon wird je nach Position des Manipulators zwischen $\mathbf{q}_2^{(1)} = (q_{a_1}, q_{a_2})$, $\mathbf{q}_2^{(2)} = (q_{a_1}, q_{a_3})$ oder $\mathbf{q}_2^{(3)} = (q_{a_2}, q_{a_3})$ umgeschaltet, wie in Abbildung 6.34 gezeigt wird. Die Umschaltunkte sind vergleichbar mit der Minimalkoordinaten Formulierung.

Anschließend wird die Pseudoinverse (6.61) ermittelt. Bei dieser Messung wurde ebenfalls auf eine Verspannung des Mechanismus durch Nullraum-Kräfte verzichtet. Die Referenztrajektorie (Abbildung 6.17) für den Prototypen mit industriellen *Torque-Motoren* wird in 9s durchfahren. Die Parameter des Reglers (6.62) sowie die der Beobachter werden in Tabelle 6.1 zusammengefasst. Die Modelle für die Beobachter liegen wieder in Endeffektorkoordinaten vor.

Die Gelenkfehler sowie die vorgegebenen Drehmomente werden in den Abbildungen 6.33 und 6.32 gezeigt. Die Verläufe der Gelenkfehler und Drehmomente sind stetig und zeigen keine Auswirkungen von Singularitäten. Des Weiteren sind die Umschaltvorgänge in den Drehmomentverläufen nicht auffällig. Der Regler liefert

im Vergleich zu den anderen Koordinatenformulierungen vergleichbare Ergebnisse. Dies liegt hauptsächlich in der Projektion durch die Strukturmatrix, die dafür sorgt, dass die Gelenkkordinaten untereinander kompatibel sind. Im Gegensatz zur Minimalkoordinaten-Formulierung (6.39) wird der lineare Anteil des Reglers bei der Koordinatenumschaltung nicht verändert, sondern nur die Berechnungsweise von $(\tilde{\mathbf{A}}^T)^+$ [Müller, 2011a], [Müller, 2011c], [Müller u. Hufnagel, 2011c], [Müller u. Hufnagel, 2011b]. Die Formulierung in n redundanten Gelenkkordinaten bietet neben der in Endeffektorkoordinaten die höchste Robustheit gegenüber Singularitäten, was den hohen numerischen Aufwand rechtfertigt.

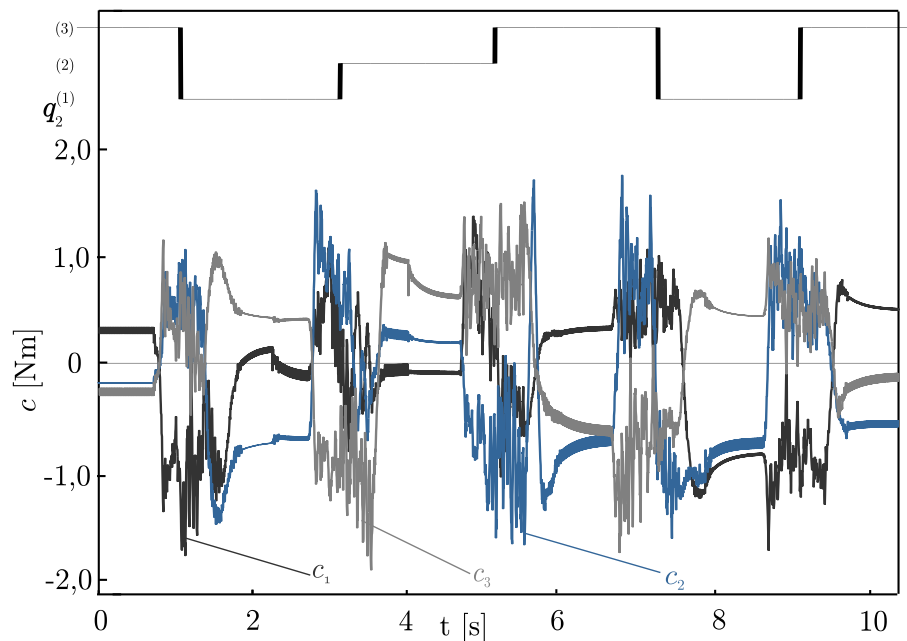


Abbildung 6.32: Vorgegebene Drehmomente des CTC in redundanten Koordinaten

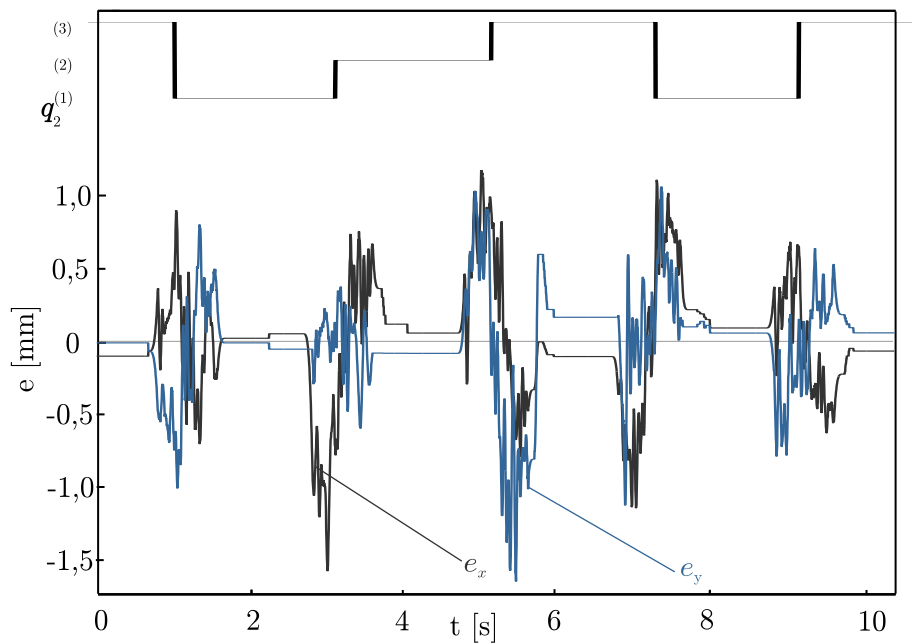


Abbildung 6.33: Verlauf der Bahnfehler des CTC in redundanten Koordinaten

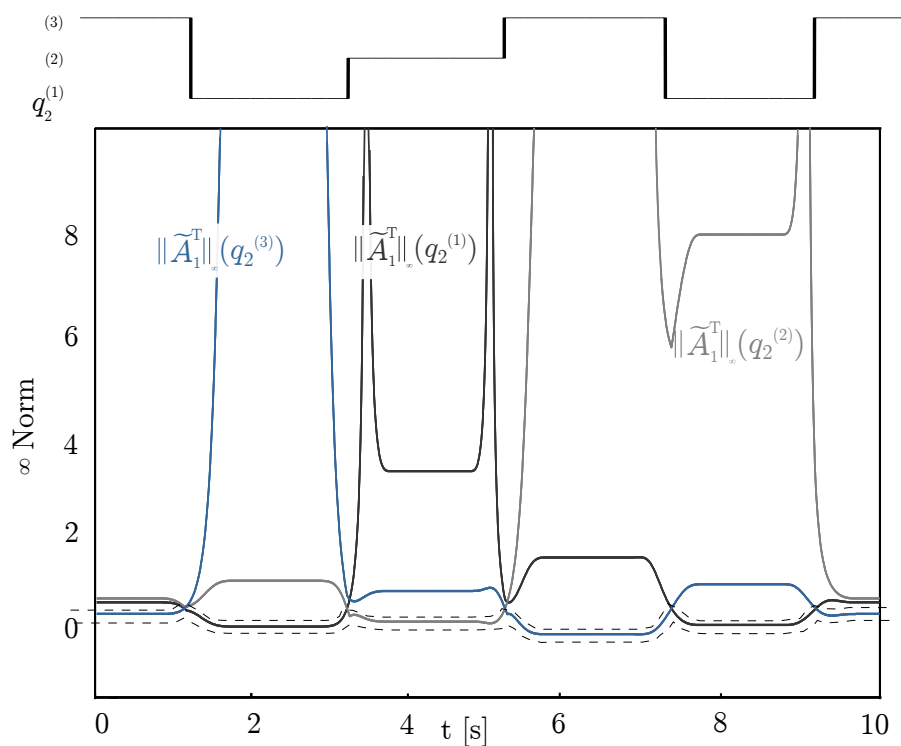


Abbildung 6.34: Umschaltkriterium für die Bestimmung der Untermatrix \tilde{A}_1^T zur Berechnung der Pseudoinversen (6.61). Die Strichlinien zeigen den verfolgten Schaltpfad, der zur minimalen Norm führt

6.8 Zusammenfassung der Regler

In diesem Kapitel wurden verschiedene Koordinatenformulierungen des CTC und APD-Reglers vorgestellt. Jede Formulierung für sich hat Vorteile und ist für den Einsatz in RA-PKM geeignet. Die Bewertungsgrundlagen sind Implementierung, Ergebnis, Gültigkeit und vor allem die Robustheit der Formulierung. Des Weiteren ist zu beachten, dass die Formulierungen mit mehr systembeschreibenden Koordinaten als Freiheitsgraden $N > \delta$ durch den fehlenden Rang in ihrer Massenmatrix nicht für die vorgestellte Zustandsbeobachterstruktur geeignet sind. Daher sind die Formulierungen mit δ Minimalkoordinaten beziehungsweise Endeffektorkoordinaten besser für industrielle Implementierungen geeignet. Die modulare Struktur der Beobachter erlaubt durchaus eine Kombination mit einem Regler in einer beliebigen Formulierung.

Der Regler in Minimalkoordinaten benötigt zum Durchfahren von Singularitäten auf jeden Fall die Koordinatenumschaltung. Der Regler selbst hat den geringsten Berechnungsaufwand und die Koordinatenumschaltung ermöglicht eine gute Kondition der inversen Dynamik. Ein Nachteil der Koordinatenumschaltung sind geringe Oszillationen im Drehmomentverlauf.

Der Formulierung in Endeffektorkoordinaten können die meisten Vorteile attestiert werden. Neben der geringen Anzahl von Bewegungsgleichungen ist die Parametrierung in Endeffektorkoordinaten unanfällig gegenüber Eingangssingularitäten der PKM Unterstrukturen. Da die Trajektorie direkt in Endeffektorkoordinaten vorgegeben wird, ist die Implementierung mit weit weniger Aufwand verbunden. Des Weiteren sorgt die direkte Rückkopplung des Bahnfehlers für die beste Trajektorienfolge.

Ohne Koordinatenumschaltung kann eine Formulierung in Antriebskoordinaten auch dazu benutzt werden, um Eingangssingularitäten der PKM Unterstrukturen zu durchfahren. Die Verteilung der Antriebskräfte mit der inversen Dynamik ist bei m Bewegungsgleichungen eindeutig. Jedoch kann mit der inversen Dynamik keine gezielte Verspannung des Mechanismus erzeugt werden. In den Ergebnissen macht sich die fehlende Strukturmatrix dadurch bemerkbar, dass durch die lineare Rückkopplung der Fehler unkontrollierte antagonistische Kräfte entstehen können.

Die letzte Möglichkeit zur Herleitung eines Reglers bietet die Beschreibung in n Gelenkkoordinaten. Aufgrund der maximalen Anzahl an Gleichungen sind die hergeleiteten Regler in der Lage Eingangs- und Ausgangssingularitäten der PKM Unterstrukturen zu bewältigen. Die obligatorische Koordinatenumschaltung wird nur für die Berechnung der Pseudoinversen Strukturmatrix benötigt, wodurch keine Oszillationen im Drehmomentverlauf auftreten. Auf der anderen Seite ist der Regler aufgrund von n Gleichungen numerisch weit aufwendiger als die anderen Reglerformulierungen. Die wichtigsten Informationen der Koordinatenformulierungen werden in Tabelle 6.2 zusammengefasst.

Tabelle 6.2: Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften aller Formulierungen für modellbasierte Regler

Formulierung	Anzahl der Koordinaten	Beobachter	Vorteile	Nachteile
Minimalkoordinaten	δ	Zustandsgrößen, Störgrößen	⊕ Geringe Anzahl an Gleichungen ⊕ Verspannung möglich	⊖ Benötigt Koordinatenum-schaltung
Endeffektorkoordinaten	δ	Zustandsgrößen, Störgrößen	⊕ Geringe Anzahl an Gleichungen ⊕ Verspannung möglich ⊕ Benötigt keine Koordinatenum-schaltung	
Antriebskoordinaten	m	-- -- Störgrößen	⊕ Geringe Anzahl an Gleichungen ⊕ Benötigt keine Koordinatenum-schaltung	⊖ Keine Verspannung möglich ⊖ Antagonistische Kräfte ohne Strukturmatrix möglich
Redundante Koordinaten	n	-- -- Störgrößen	⊕ Sehr robust in allen Bewegungsarten ⊕ Verspannung möglich	⊖ Numerisch sehr aufwändig aufgrund der hohen Anzahl an Gleichungen ⊖ Benötigt teilweise Koordinatenum-schaltung

7 Modellprädiktive Regelung

Das Kapitel behandelt die modellprädiktive Regelung für RA-PKM. Das Verfahren optimiert die Stellgrößen aus der inversen Dynamik für eine vorgegebene Trajektorie. Das Ergebnis der Optimierung ist eine variable Verstärkungsmatrix, die auf Basis eines klassischen APD-Reglers implementiert wird. Im Abschnitt 7.1 wird zunächst der Grundgedanke der modellprädiktiven Regelung vorgestellt. Anschließend folgt die eigentliche Herleitung im Abschnitt 7.2 sowie eine Stabilitätsbetrachtung. Die Ergebnisse werden in Form von Messungen im Abschnitt 7.3 gezeigt.

7.1 Zielsetzung

Aus der Modellbildung der mehrschleifigen Mechanismen ergibt sich ein stark nicht-linearer Charakter für die RA-PKM. Die bisher vorgestellten modellbasierten Regelungskonzepte erfüllen die Eigenschaft, diese Nichtlinearitäten zu kompensieren und erfahren durch den Störgrößenbeobachter auch eine gewisse Robustheit. Was den vorgestellten Prinzipien noch fehlt, ist der Blick in die Zukunft. Dieses Verhalten erfüllen die so genannten modellprädiktiven Regler (MPC), die primär das Ziel verfolgen, das zukünftige Verhalten der Regelstrecke gezielt zu beeinflussen. Durch diese Eigenschaften stellt die modellprädiktive Regelung auch für RA-PKM ein interessantes Konzept dar. Dabei wurde in der Vergangenheit vorrangig die Kompensation von Getriebelose angestrebt (siehe [Belda u. a., 2005], [Belda, 2001]). In dieser Arbeit wird ein nichtlinearer MPC (NMPC) für RA-PKM vorgestellt, der auf den nichtlinearen Bewegungsgleichungen basiert. Die Grundidee des NMPC ist die Voraussage eines zukünftigen Stellgliedverlaufs, unter der Forderung, die Abweichung von einer vorgegebenen Trajektorie möglichst gering zu halten. In der vorliegenden Arbeit ist die Zielsetzung durch das Regelungskonzept eine akkurate Trajektorienfolge zu erreichen. Des Weiteren lassen sich dieser Optimierungsaufgabe Randbedingungen, wie beispielsweise ein energetisch günstiger Verlauf der Stellgliedenergie, zuweisen. Das Ergebnis dieser Optimierung sind optimale Reglerverstärkungen, die in einem modellbasierten Regelkonzept statt einer linearen Rückkopplung implementiert werden können. Das hier betrachtete Verfahren arbeitet nach einer so genannten Moving-Horizon-Strategie, bei der die Optimierung innerhalb eines gleitenden Horizonts auf der vorgegebenen Trajektorie stattfindet. Als Optimierungsverfahren wird das Gradienten-basierte NEWTON-RAPHSON-Verfahren verwendet. Nach der Optimierung wird der gleitende Horizont einen Zeitschritt nach rechts verschoben. Die größte Einschränkung der MPC-Verfahren ist, die notwendige Rechenleistung bereitzustellen [Allgöwer u. a., 2004]. Lizarralde u. a. [1999] stellen dafür eine sehr

effiziente Methode vor, die den prädizierten Fehler am Ende des gleitenden Horizonts minimiert. Einen detaillierten Überblick über dieses Konzept wird in [Schindele u. Aschemann, 2011a], [Schindele u. Aschemann, 2011b] gegeben. In der vorliegenden Arbeit wird das Konzept exemplarisch für einen Augmented PD-Regler (APD) in Endeffektorkoordinaten umgesetzt.

7.2 Herleitung des modellprädiktiven Reglers

Für die Herleitung des Reglers werden die Bewegungsgleichungen wie folgt in die nichtlineare Zustandsraumdarstellung überführt. Die Zustandsgrößen werden mit

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \dot{\mathbf{X}}(t) \end{bmatrix}$$

gewählt. Die nichtlineare Zustandsraumdarstellung ergibt sich unter Verwendung der in (6.5) verwendeten Bezeichnungen zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \hat{\boldsymbol{\eta}}), \quad (7.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (7.1b)$$

wobei die generalisierten Steuerkräfte in EE-Koordinaten durch die Beziehung $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{c}$ abgekürzt werden. An dieser Stelle werden zudem die geschätzten Störgrößen $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ mit berücksichtigt, wodurch sich später eine präzise Prädiktion der erforderlichen Stellglied-Energie einstellt. Der Zustandsvektor \mathbf{f} sowie der Ausgangsvektor $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ können mit den gewählten Zustandsgrößen durch

$$\mathbf{f} := \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{v}^T - \hat{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{K}\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{Q}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} := \mathbf{X} \quad (7.2)$$

angegeben werden. Für die nächsten Schritte wird das Zustandsraummodell (7.1) diskretisiert. Dabei ist darauf zu achten, dass der verwendete Algorithmus die notwendige Präzision aufweist [Reichert, 2012]. Das HEUN-Verfahren ist ein zweistufiges explizites RUNGE-KUTTA-Verfahren, das durch eine trapezförmige Annäherung eine gute Übereinstimmung mit der Verfahrensfunktion bietet [Schwarz u. Köckler, 2011], [Adamy, 2009, S. 32]. Die Einteilung der Zeitachse erfolgt nun in diskrete Schritte, die mit der Zählvariable k und der Abtastzeit t_s definiert werden. Die Diskretisierung ergibt sich nach der folgenden Definition:

Definition 7.2.1 (HEUN-Verfahren). Das zweistufige explizite RUNGE-KUTTA-Verfahren für die Zustandsgleichungen (7.1) wird durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + t_s \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, \hat{\boldsymbol{\eta}}_k) \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} t_s [\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, \hat{\boldsymbol{\eta}}_k) + \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_k)] \end{aligned} \quad (7.3)$$

umgesetzt (Siehe [Schwarz u. Köckler, 2011, S. 354]).

Anmerkung 7.2.1. Die Berücksichtigung der generalisierten Störgrößen zur Abtastung k erfordert die Annahme, dass deren Veränderung über den gleitenden Horizont marginal ist. Eine Prädiktion der Störgrößen über den gleitenden Horizont ist nicht realisierbar, da die Prozesskräfte und Störungen nicht bekannt sind.

Der Vorteil dieser Darstellung liegt in der Formulierung generalisierter EE-Koordinaten. Dadurch hängt die Anzahl der Optimierungsschritte innerhalb eines Horizonts lediglich vom DOF des Mechanismus und nicht von der Anzahl seiner Antriebe ab. Für den Aufbau eines gleitenden Horizonts bedarf es nun einiger Festlegungen bezüglich der Zeit. Mit der Konstante M wird die Dauer des gleitenden Horizonts T_P durch ein Vielfaches der Abtastzeit festgelegt:

$$T_P := M \cdot t_s. \quad (7.4)$$

Damit ergibt sich der Vektor $\underline{\mathbf{v}}_{k,M} \in \mathbb{R}^{\delta \times M}$ der prädizierten generalisierten Stellgrößen zum Zeitschritt k innerhalb des gleitenden Horizonts zu

$$\underline{\mathbf{v}}_{k,M} = \left[\underline{\mathbf{v}}_k \quad \underline{\mathbf{v}}_{k+1} \quad \cdots \quad \underline{\mathbf{v}}_{k+M-1} \right]^T \quad (7.5)$$

Die Berechnung von $\underline{\mathbf{v}}_{k,M}$ erfolgt mithilfe der Bewegungsgleichungen des RA-PKM, die nach den generalisierten Steuerkräften ($\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{A}^T \mathbf{c}$) ausgewertet werden. Das System entspricht einem differentiell *flachen*-System bezüglich der Zustandsgrößen. Dadurch können die Steuerkräfte unter Verwendung der Solltrajektorie $\mathbf{X}_{k,M}^d$ und deren zeitliche Ableitungen $\dot{\mathbf{X}}_{k,M}^d, \ddot{\mathbf{X}}_{k,M}^d$ aus den linken Seiten der Bewegungsgleichungen ermittelt werden. Man bezeichnet diese Eigenschaft als linksinvertierbares System [Rothfuss u. a., 1997].

Für die eigentliche Optimierung wird der Zustandsvektor $\Phi_M(\mathbf{x}_k, \underline{\mathbf{v}}_{k,M}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_k)$ am Ende des gleitenden Horizonts ($k = M$) benötigt. Dafür werden die Zustandsgleichungen in M Iterationen numerisch integriert, wobei in jedem Schritt die Steuergrößen $\underline{\mathbf{v}}_k$ durch die Bewegungsgleichungen eingesetzt werden bis der Zustandsvektor zum Zeitpunkt M vorliegt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+2} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, \underline{\mathbf{v}}_{k+1}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_k) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \underline{\mathbf{v}}_k, \hat{\boldsymbol{\eta}}_k)) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_{k+M} &= \Phi_M(\mathbf{x}_k, \underline{\mathbf{v}}_{k,M}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_k) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Die Idee der Prädiktion mit einer gegebenen Trajektorie wird in Abbildung 7.1 unter Verwendung der benötigten Größen dargestellt. Darin wird ebenfalls die Optimierung der durch die inverse Dynamik berechneten Stellgrößen dargestellt. Das Ziel der Prädiktion ist die Optimierung der generalisierten Stellgrößen mithilfe einer Kostenfunktion nach [Lizarralde u. a., 1999], um den Trajektorienfehler am Ende des gleitenden Horizonts zu minimieren. Der prädizierte Fehler am Ende des

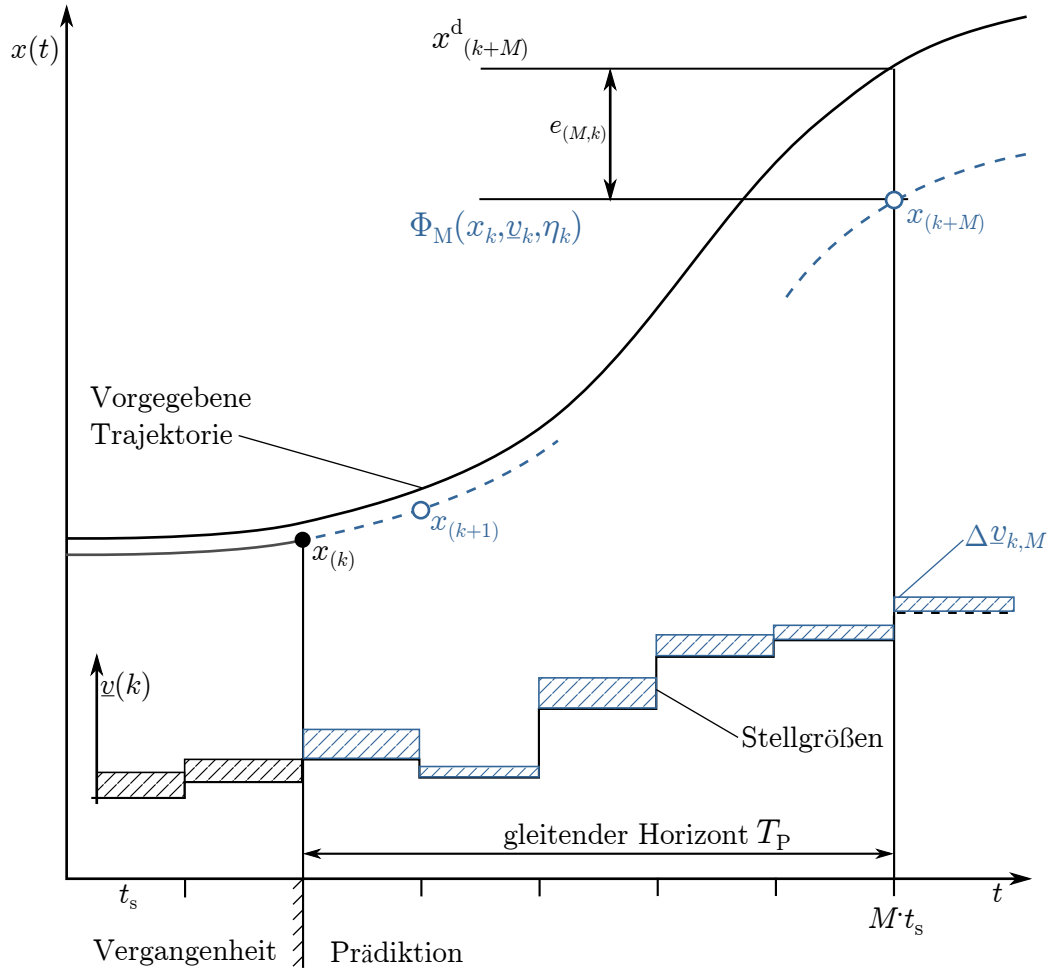


Abbildung 7.1: Darstellung der Designparameter für die nichtlineare Modellprädiktive Regelung

gleitenden Horizonts ergibt sich aus der zeitdiskreten Zustandsraumdarstellung zu $\mathbf{e}_{M,k} := \mathbf{x}_{(k+M)}^d - \Phi_M(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, \hat{\boldsymbol{\eta}}_k)$. Daraus lässt sich die quadratische Gütefunktion

$$\mathbf{J}_{\text{MPC}} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{M,k}^T \mathbf{e}_{M,k} \quad (7.7)$$

ableiten. Die Bedingung für das Minimum dieser Funktion wird durch die Ableitung nach dem Fehler erreicht:

$$\frac{\partial \mathbf{J}_{\text{MPC}}}{\partial \mathbf{e}_{M,k}} = \mathbf{e}_{M,k} = \mathbf{0}. \quad (7.8)$$

Diese Bedingung kann auch als tangentielle Hyperebene an die Hyperfläche, die durch die Optimierungsfunktion beschrieben wird, aufgefasst werden. Am Berührungspunkt dieser Ebene wird nun eine TAYLOR-Reihe nach den Steuerkräften $\mathbf{v}_{k,M}$ bis zur ersten Ordnung entwickelt, um einen Zugang zur Beeinflussung des Fehlers zu erhalten:

$$\mathbf{0} = \mathbf{e}_{M,k} + \frac{\partial \Phi_M}{\partial \mathbf{v}_{k,M}} \Delta \mathbf{v}_{k,M} + \text{Terme höherer Ordnung}. \quad (7.9)$$

Mithilfe des neuen Systemeingangs $\Delta \underline{\mathbf{v}}_{k,M}$ lassen sich die Zustandsgrößen des RAMPKM zum Zeitpunkt M so korrigieren, dass die Fehler $\mathbf{e}_{M,k}$ am Ende des gleitenden Horizonts verschwinden.

Anmerkung 7.2.2. Die Berechnung der JACOBI-Matrix $\frac{\partial \Phi_M}{\partial \underline{\mathbf{v}}_{k,M}} \in \mathbb{R}^{2 \cdot \delta \times \delta \cdot M}$ gelingt bei zunehmender Größe von M nur sehr schwer auf analytische Weise. In [Schindele u. Aschemann, 2011a] wird daher eine numerische Methode vorgeschlagen. Dazu wird die JACOBI-Matrix mithilfe der Kettenregel aufgestellt:

$$\frac{\partial \Phi_M}{\partial \underline{\mathbf{v}}_{i+1}^{(k)}} = \frac{\partial \Phi_M}{\partial \mathbf{x}_{k+M-1}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_{k+M-1}}{\partial \mathbf{x}_{k+M-2}} \cdots \frac{\partial \mathbf{x}_{k+i+2}}{\partial \mathbf{x}_{k+i+1}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_{k+i+1}}{\partial \underline{\mathbf{v}}_{i+1}^{(k)}}, \quad (7.10)$$

mit $i = 0, \dots, M - 1$. Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{A_i} &:= \frac{\partial \mathbf{x}_{k+i+1}}{\partial \mathbf{x}_{k+i}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}_{k+i}, \underline{\mathbf{v}}_{i+1}^{(k)}), \\ \mathbf{J}_{b_i} &:= \frac{\partial \mathbf{x}_{k+i+1}}{\partial \underline{\mathbf{v}}_{i+1}^{(k)}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \underline{\mathbf{v}}} (\mathbf{x}_{k+i}, \underline{\mathbf{v}}_{i+1}^{(k)}) \end{aligned} \quad (7.11)$$

lässt sich die gesuchte JACOBI-Matrix aufstellen

$$\frac{\partial \Phi_M}{\partial \underline{\mathbf{v}}_{k,M}} = \left[\mathbf{J}_{A_{M-1}} \mathbf{J}_{A_{M-2}} \cdots \mathbf{J}_{A_1} \mathbf{J}_{b_0}, \mathbf{J}_{A_{M-1}} \cdots \mathbf{J}_{A_2} \mathbf{J}_{b_1}, \right. \\ \left. \cdots, \mathbf{J}_{A_{M-1}} \mathbf{J}_{b_{M-2}}, \mathbf{J}_{b_{M-1}} \right]. \quad (7.12)$$

Gleichung (7.9) stellt durch die Rang-defiziente JACOBI-Matrix ein unterbestimmtes Gleichungssystem dar. Mithilfe der MOORE-PENROSE-Pseudoinversen ergibt sich die energetisch optimale Lösung zu

$$\Delta \underline{\mathbf{v}}_{k,M} = \left(\frac{\partial \Phi_M}{\partial \underline{\mathbf{v}}_{k,M}} \right)^+ \mathbf{e}_{M,k}. \quad (7.13)$$

Die Invertierung kann beispielsweise iterativ durch eine Singulärwertzerlegung (SVD) berechnet werden [Schindele u. Aschemann, 2011a]. Mithilfe dieses Korrekturterms $\Delta \underline{\mathbf{v}}_{k,M}$ ist es möglich, den prädizierten Stellgrößenverlauf $\underline{\mathbf{v}}_{k,M}$ zu korrigieren, so dass eine optimierte Stellgröße berechnet werden kann. Des Weiteren kommt es aufgrund der Berücksichtigung von Störgrößen gleichzeitig zu einer robusten Struktur eines beliebigen Basisreglers, wenn die optimalen Stellgrößen benutzt werden. Ein klassischer modellbasierter Basisregler für die Trajektorienfolge bildet der APD-Regler in Endeffektorkoordinaten, der durch

$$\boxed{\mathbf{c} = \left(\mathbf{A}^T \right)_{\mathbf{w}}^+ \left(\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{X}}^d + \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{X}}^d + \underline{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathbf{K}_{\text{PD}} \cdot \mathbf{e}_{M,k} \right)} \quad (7.14)$$

gegeben wird (siehe Kapitel 6). Dabei wird die lineare Rückführung durch $\mathbf{K}_{\text{PD}} \cdot \mathbf{e}_{M,k}$ so aufgestellt, dass statt der Gewichtung des aktuellen EE-Fehlers der Trajektorienfehler am Ende des gleitenden Horizonts optimiert wird. Die Herleitung der passenden Verstärkungsmatrix \mathbf{K}_{PD} erfolgt unter Berücksichtigung des Korrekturterms

(7.13) für die generalisierten Stellgrößen. Durch die Erweiterung der Stellgrößen-Korrektur kann mit

$$\mathbf{K}_{\text{PD}}(\Phi_M, \mathbf{v}_{k,M}) = \mu_k \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\delta \times \delta} \\ \mathbf{0}_{\delta \times \delta \cdot (M-1)} \end{bmatrix}^T \cdot \left(\frac{\partial \Phi_M}{\partial \mathbf{v}_{k,M}} \right)^+ \quad (7.15)$$

eine adaptive Reglerverstärkung gefunden werden. Dabei nimmt der Fehler unter Verwendung einer Schrittweitensteuerung durch den Faktor μ_k monoton ab. Die optimale Schrittweite lässt sich beispielsweise nach der ARMIJO-Regel ermitteln [Armijo, 1966]. Es wird lediglich die erste $\delta \times 2\delta$ Teilmatrix der Pseudoinversen JACOBI-Matrix verwendet. Durch die Wahl der Zustandsgrößen hat die Verstärkungsmatrix \mathbf{K}_{PD} die folgende Struktur

$$\mathbf{K}_{\text{PD}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{P}} & \mathbf{K}_{\text{D}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} K_{\text{P}_{1,1}} & \cdots & K_{\text{P}_{1,1}} & K_{\text{D}_1} & \cdots & K_{\text{D}_{1,\delta}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{\text{P}_{\delta,1}} & \cdots & K_{\text{P}_{\delta,\delta}} & K_{\text{D}_{1,\delta}} & \cdots & K_{\text{D}_{\delta,\delta}} \end{array} \right], \quad (7.16)$$

wobei K_{P} und K_{D} adaptive positive Verstärkungsfaktoren sind. Die Einstellung des Reglers wird lediglich durch die Länge des gleitenden Horizonts mit der Abtastzeit t_s und der Konstanten M beeinflusst. Der gleitende Horizont sollte nicht all zu groß gewählt werden, da die Prädiktion sonst zu ungenau wird. Des Weiteren erfordert ein zu breiter Horizont mit kleiner Abtastzeit t_s eine enorme Rechenleistung durch die aufwändige Berechnung und Invertierung von $\left(\frac{\partial \Phi_M}{\partial \mathbf{v}_{k,M}} \right)$. Die Konvergenz der Adaption wird durch den Faktor μ_k beeinflusst.

Die Stabilität des adaptiven APD geht unter der Annahme, dass das NEWTON-Verfahren (7.15) konvergiert (siehe beispielsweise [Lizarralde u. a., 1999]), als Folgesatz aus Satz 6.4.2 hervor. Der APD erreicht eine asymptotische Stabilität für eine gegebene Trajektorie, falls \mathbf{M} regulär und die Verstärkungsmatrizen \mathbf{K}_{P} und \mathbf{K}_{D} positiv definit sind. Die erste Forderung ist außerhalb von Singularitäten der Ausgänge unverändert auch für den Ansatz mit NMPC erfüllt. Der vollständige Nachweis zur Stabilität ergibt sich durch den Nachweis, dass \mathbf{K}_{PD} positiv definit ist. Diese Eigenschaft lässt sich für symmetrische Matrizen einfach nachweisen, erfordert jedoch für eine unsymmetrische adaptive Verstärkungsmatrix weitere Schritte [Reichert, 2012].

Satz 7.2.1 (Positiv Definitheit einer reellen quadratischen Matrix). *Die quadratische Matrix \mathbf{K} ist genau dann positiv definit, wenn ihr symmetrischer Teil (siehe z.B. [Schiehlen u. Eberhard, 2004, S. 233])*

$$\mathbf{K}_S := \frac{1}{2} (\mathbf{K} + \mathbf{K}^T)$$

positiv definit ist.

Die Stabilität des adaptiven APD erfolgt über die Eigenwerte des symmetrischen Anteils von $\mathbf{K}_{\text{PD}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{P}} & \mathbf{K}_{\text{D}} \end{bmatrix}$.

Beispiel 7.2.1 (Untersuchung der Stabilität für den Prototypen). Die Verstärkungsmatrizen des 2RRR/RR RA-PKM lassen sich wegen seiner zwei Freiheitsgrade in der folgenden Struktur angeben:

$$\mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} K_{P_{1,1}} & K_{P_{1,2}} \\ K_{P_{2,1}} & K_{P_{2,2}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_D = \begin{bmatrix} K_{D_{1,1}} & K_{D_{1,2}} \\ K_{D_{2,1}} & K_{D_{2,2}} \end{bmatrix}. \quad (7.17)$$

Nach Satz 6.4.2 und Satz 7.2.1 erreicht der Regler asymptotische Stabilität für die positiv definiten symmetrischen Verstärkungsmatrizen

$$\mathbf{K}_{PS} = \begin{bmatrix} K_{P_{1,1}} & \frac{1}{2} (K_{P_{1,2}} + K_{P_{2,1}}) \\ \frac{1}{2} (K_{P_{2,1}} + K_{P_{1,2}}) & K_{P_{2,2}} \end{bmatrix}, \quad (7.18a)$$

$$\mathbf{K}_{DS} = \begin{bmatrix} K_{D_{1,1}} & \frac{1}{2} (K_{D_{1,2}} + K_{D_{2,1}}) \\ \frac{1}{2} (K_{D_{2,1}} + K_{D_{1,2}}) & K_{D_{2,2}} \end{bmatrix}. \quad (7.18b)$$

Diese Eigenschaft ergibt sich aus den positiven Eigenwerten der Matrizen. Aus dieser Forderung ergeben sich die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} K_{P_{1,1}} \cdot K_{P_{2,2}} &> \frac{1}{4} (K_{P_{1,2}} + K_{P_{2,1}})^2 \\ K_{D_{1,1}} \cdot K_{D_{2,2}} &> \frac{1}{4} (K_{D_{1,2}} + K_{D_{2,1}})^2 \end{aligned} \quad (7.19)$$

Die Auswertung von (7.19) wird in Hypothese 7.2.2 diskutiert, jedoch ohne Beweis.

Hypothese 7.2.2 (Dimensionierung der Elemente von \mathbf{K}_P , \mathbf{K}_D). *Der Aufbau der Verstärkungsmatrizen wird trotz der adaptiven Optimierung von den Diagonalelementen dominiert. Daher sind $K_{P_{1,1}}$ und $K_{P_{2,2}}$ positiv und betragsmäßig deutlich höher als die Nebenelemente.*

Die Hypothese stützt sich darauf, dass die Verstärkung kombinierter Zustandsgrößen durch die Optimierung sehr gering ist. Danach werden die Ungleichungen (7.19) erfüllt und die Stabilität des adaptiven APD wäre unmittelbar nachgewiesen.

7.3 Experimentelle Ergebnisse

Für experimentelle Studien wird der APD mit adaptiver Verstärkung (7.14) für den 2RRR/RR RA-PKM mit industriellen *Torque*-Motoren implementiert. Das vollständige Regelungskonzept beinhaltet den *High-Gain*-Zustandsbeobachter (6.12) sowie den Störgrößen-Beobachter (6.26), deren Verstärkungen nach Tabelle 6.1 eingestellt sind. Die Dynamik der Beobachter sollte möglichst schnell gewählt werden, um den Trajektorienfehler gering zu halten. Auf der anderen Seite muss darauf geachtet werden, dass eine ausreichende Unterdrückung des Signalrauschens erreicht wird. Bezüglich des NMPC genügt es lediglich, die Parameter des gleitenden Horizonts sowie die Schrittweite zur Korrektur vorzugeben:

Gleitender Horizont	$T_P = 7,3 \text{ ms}$
Abtastzeit	$t_s = 0,36 \text{ ms}$
Konstante	$M = 20$
Schrittweitensteuerung	$\mu_k = 0,45$

Der Faktor μ_k hat einen direkten Einfluss auf das Konvergenz-Verhalten des Reglers. Die optimale Einstellung erfolgt iterativ durch mehrere Testläufe. Während eines Durchgangs wird diese Größe solange vergrößert beziehungsweise verkleinert, bis die Stellgrößen unruhig werden. Die Länge und Feinheit des gleitenden Horizonts wird über die Größen t_s und M eingestellt. Die Vergrößerung von M bei gleichem t_s verursacht eine Verletzung der Echtzeit bei diesem System, während eine gröbere Auflösung eines längeren Horizonts für eine schlechtere Prädiktion sorgt. Für das Experiment wird dieselbe Trajektorie wie in Abbildung 6.17 für den CTC vorgegeben, um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten. Die Trajektorie setzt sich dabei aus fünf Segmenten zusammen. Darin werden kritische Konfigurationen im Arbeitsraum des 2RRR/RR RA-PKM, wie Singularitäten der Eingänge durchfahren und Singularitäten der Ausgänge (Strecklagen) sehr nahe angefahren. Die Kantenverfahrzeit beträgt dabei 300 ms und die Verweilzeit zwischen den Bahnsegmenten beträgt 1 s.

Die Drehmomente während des Experiments werden in Abbildung 7.2 dargestellt. Der Anteil der darin befindlichen optimierten Stellgrößen werden anhand des Korrekturterms Δc in Abbildung 7.3 dargestellt. Daraus wird ersichtlich, dass der Verlauf der Drehmomente maßgeblich durch den modellprädiktiven Anteil dominiert wird. Der restliche Anteil, der zum endgültigen Drehmomentverlauf führt, steuert die nichtlineare Vorsteuerung des APD-Reglers bei. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die dargestellten Drehmomente keinerlei Filterung unterzogen wurden, so dass die glatten Verläufe, die sich während der Fahrt ergeben, auf ein ausgezeichnetes Führungsverhalten schließen lassen. Der entscheidende Beitrag des verwendeten Störgrößenbeobachters wird in Form von generalisierten Störkräften in Abbildung 7.4 gezeigt. Hierbei wird nochmals verdeutlicht, dass die Störgrößen, die hier allenfalls durch Reibungsphänomene begründet werden können, zum Teil beachtliche generalisierte Kräfte erzeugen. Dies liegt am Trajektorienverlauf, der den enormen Einfluss der Störgrößen im Bereich der kritischen Konfigurationen des RA-PKM provoziert. Der Vorzug des vorgestellten Prinzips wird anhand der Bahnfehler in Abbildung 7.5 untermauert.

Im Vergleich zu anderen Experimenten ergibt sich hier der deutlich geringste Fehler beim Durchlaufen des vorgegebenen Bahnsegments. An den Verweilpositionen liegt der Fehler deutlich unter der Erfassungsgrenze des Messsystems von $30 \mu\text{m}$.

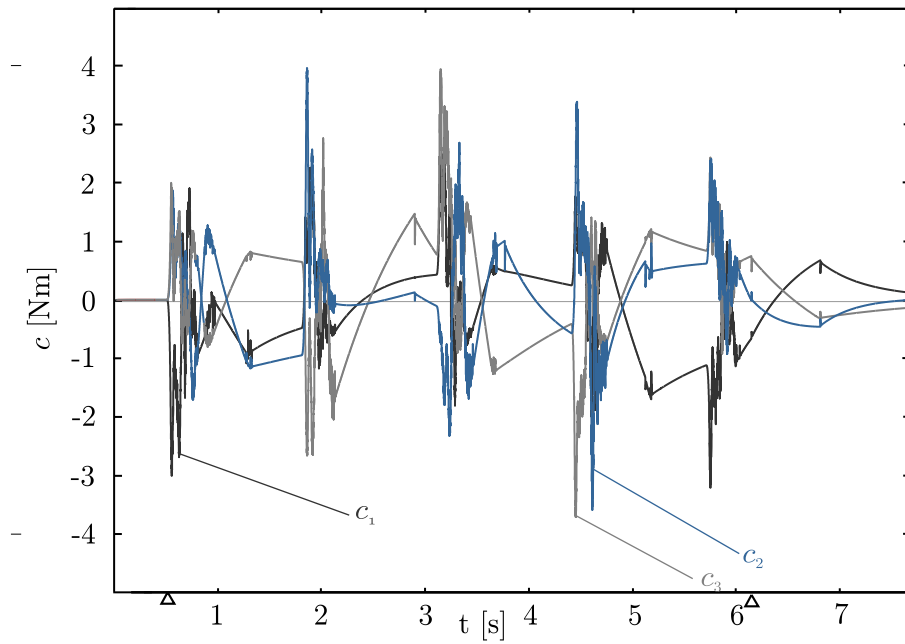


Abbildung 7.2: Drehmomente während des Experiments des APD mit modelprädiktiven Verstärkungen

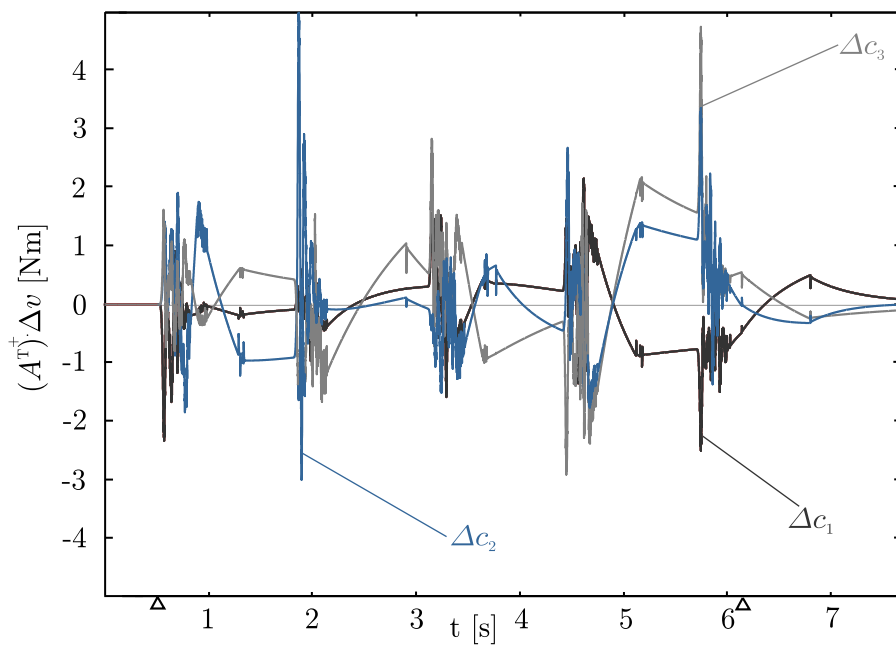


Abbildung 7.3: Anteil der optimierten Stellgrößen während des Experiments des APD mit modelprädiktiven Verstärkungen

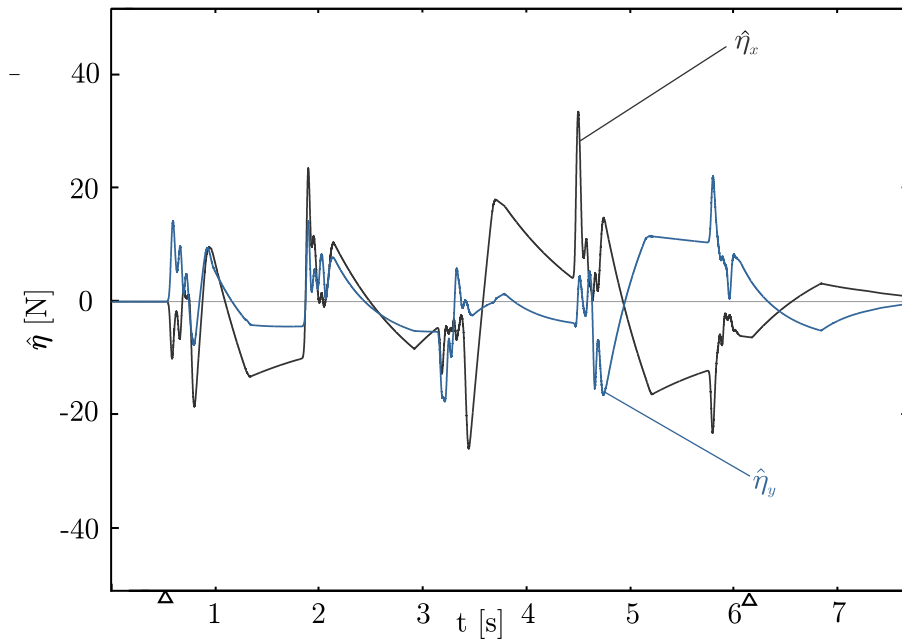


Abbildung 7.4: Generalisierte Störgrößen während des Experiments des APD mit modelprädiktiven Verstärkungen

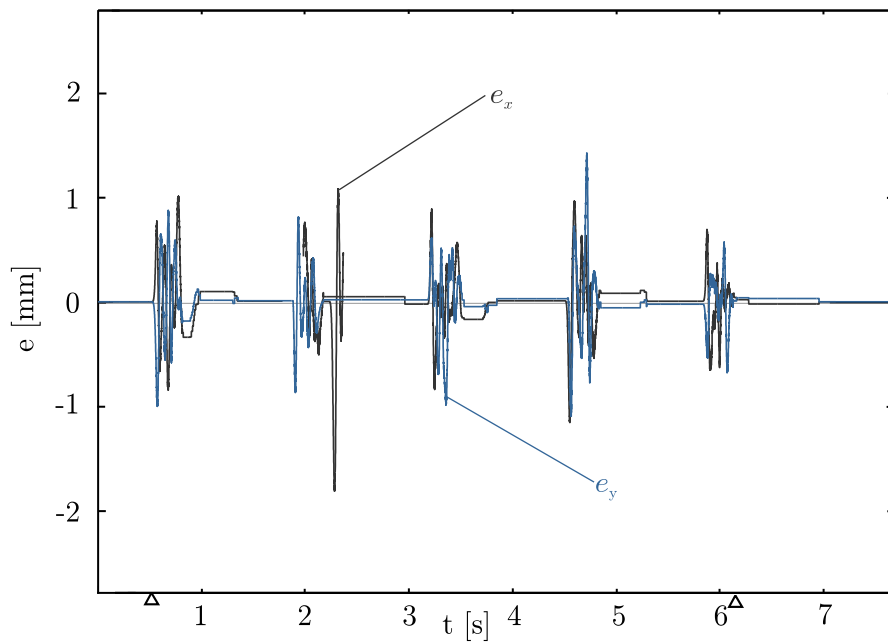


Abbildung 7.5: Bahnfehler während des Experiments des APD mit modelprädiktiven Verstärkungen

8 Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

Die konsequente Weiterentwicklung konventioneller PKM führt auf eine strukturelle Erweiterung in Form einer Antriebsredundanz. Die wesentlichen Vorteile der Antriebsredundanz sind beispielsweise die Kompensation von Singularitäten im Arbeitsraum, eine erhöhte EE-Steifigkeit und eine optimale Verteilung der Antriebskräfte. RA-PKM sind darum prädestiniert für hochdynamische Pick-and-Place-Bewegungsaufgaben. Die vorliegende Arbeit behandelt die Regelung von RA-PKM im Allgemeinen. Die vorgestellten Methoden und Regler bedienen sich leistungsfähiger Mehrkörpermodelle, deren Herleitung ein wesentlicher Bestandteil der Arbeit ist. Für die Erprobung der entwickelten Regler und Methoden wurde ein ebener Mechanismus mit zwei Freiheitsgraden, unter Verwendung industrieller Torque-Motoren, aufgebaut.

Die Herleitung robuster Beobachter- und Reglerstrukturen setzt die Kenntnis eines nichtlinearen Mehrkörpermodells voraus. Dabei geht es bei RA-PKM strukturell um mehrschleifige Mechanismen. Der Mittelpunkt des kinematischen Modells für geschlossene Ketten ist der Konfigurationsraum, der durch die geometrischen Zwangsbedingungen des Mechanismus definiert wird. Mit der Abbildung des Konfigurationsraums auf die Antriebskoordinaten und auf die EE-Koordinaten erhält man das kinematische Modell eines Mechanismus. Eine weitere Formulierung für ein kinematisches Modell ist die Abbildung in Minimalkoordinaten, die bei vollaktuierten PKM in der Regel den Antriebskoordinaten entsprechen. Das inverse und das direkte kinematische Problem stellt in diesem Zusammenhang eine direkte (übergeordnete) Abbildung zwischen Arbeitsraum und Antriebskoordinaten dar. Mithilfe der Funktionen, die diese Abbildungen beschreiben, werden sämtliche Singularitäten eines PKM klassifiziert. Die Anzahl der Eingangskoordinaten ist bei RA-PKM größer als die Dimension des vorliegenden Konfigurationsraums. Werden die Minimalkoordinaten des RA-PKM aus den Antriebskoordinaten gewählt kann in der Regel immer eine gültige Abbildung des Konfigurationsraums gefunden werden.

Die Bewegungsgleichungen von RA-PKM werden mit verschiedenen Koordinatenformulierungen aufgestellt. Bei der Formulierung in einer minimalen Anzahl an Antriebskoordinaten werden die auftretenden Zwangskräfte durch eine Projektion mithilfe eines Orthogonalkomplements eliminiert. Auf den rechten Seiten der Bewegungsgleichungen befinden sich dann die effektiven Antriebskräfte des Manipulators, die durch eine Strukturmatrix in generalisierte Kräfte projiziert werden. Diese Formulierung unterliegt weiterhin den Singularitäten der jeweiligen PKM-

Unterstrukturen. Man bezeichnet diese Singularitäten auch als Parameter-Singularitäten, da sie für den RA-PKM rein numerischer Art sind. Mithilfe einer Koordinatenumschaltung ist es möglich, die Gültigkeit der Bewegungsgleichungen, ausgehend von der momentanen Konfiguration des Mechanismus, auf den gesamten Arbeitsraum zu erweitern. Dafür werden zwei Umschaltkriterien vorgestellt.

Numerisch aufwendiger sind Bewegungsgleichungen in Endeffektorkoordinaten. Der EE des RA-PKM wird dabei als freier Körper modelliert, an dem Zwangs- und Prozesskräfte angreifen. Durch eine Projektion mithilfe eines Orthogonalkomplements ergeben sich Bewegungsgleichungen in Endeffektorkoordinaten in minimaler Anzahl. Aufgrund der redundanten Aufstellung der Zwangsbedingungen unterliegt die Formulierung lediglich Singularitäten der Ausgangskoordinaten (Strecklagen).

Bei der Formulierung in redundanten Antriebskoordinaten werden die Zwangsbedingungen des RA-PKM in aktive und passive Koordinaten partitioniert. Für die Reaktionskräfte der Bewegungsgleichungen wird ähnlich wie in den vorherigen Formulierungen ein Orthogonalkomplement gefunden. Auf den rechten Seiten der Gleichungen stehen die Antriebskräfte vollkommen isoliert. Folglich liegen die Bewegungsgleichungen als inverse Dynamik vor.

Eine weitere Formulierung kann in redundanten Gelenkkoordinaten gefunden werden. Dabei werden die Zwangskräfte mithilfe eines Nullraum-Projektors eliminiert. Die Bewegungsgleichungen sind dann in allen Bewegungsarten des Mechanismus gültig. Dabei können auch verschiedene Aufbauarten über Strecklagen durchfahren werden. Der Nachteil der Methode liegt in der numerisch aufwändigen Berechnung des Nullraum-Projektors. Die Massenmatrizen aller redundanten Formulierungen sind Rang defizient und können nicht invertiert werden.

Ein naheliegendes Mittel für die Lage-Regelung eines Pick-and-Place-Manipulators ist die lineare Regelung mit dezentralen Achsreglern. Die Anwendung dieses Regelkonzepts kann bei RA-PKM zu antagonistischen (gegensinnigen) Steuerkraftvorgaben zwischen den Aktoren führen. Das Phänomen lässt sich in erster Linie durch geometrische Unvollkommenheiten zwischen der inversen Kinematik und des realen Manipulators begründen. Für die dezentrale Regelung wurde daher ein modellbasiertes Vorfilter (AF) entwickelt, das in der Lage ist, antagonistische Kräfte zu eliminieren. Die experimentellen Ergebnisse belegen, dass mithilfe des AF eine deutliche Verringerung erreicht wird.

Zu den modellbasierten Reglern zählen klassische Verfahren, die sich für seriellkinematische Manipulatoren (SKM) und vollaktuierte PKM etabliert haben. Dazu zählen der Computed Torque Regler (CTC) und der Augmented PD-Regler (APD). Der CTC erzielt durch die Vorsteuerung mit der inversen Dynamik eine lineare Fehlerdynamik. Der APD hat ebenfalls eine nichtlineare Vorsteuerung und führt zu einer asymptotisch stabilen Verfolgung einer Trajektorie. Die Gelenkgeschwindigkeiten der Antriebe werden durch einen nichtlinearen *High-Gain*-Beobachter ermittelt. Die verwendeten Direktantriebe haben aufgrund ihrer Dichtelemente und verspannten Lagerung eine hohe Reibung. Die statische Vorsteuerung dieser Stör-

größe liefert aufgrund von Schwankungen keine guten Ergebnisse. Daher wird ein Störgrößenbeobachter auf Basis des generalisierten Impulses für RA-PKM hergeleitet. Die Experimente zeigen, dass sich alle Koordinaten-Formulierungen für eine Reglerformulierung eignen. Die Formulierungen in Minimalkoordinaten und redundanten Gelenkkoordinaten benötigen eine adaptive Koordinatenumschaltung, um Singularitäten zu durchfahren. Als repräsentatives Ergebnis zählt vor allem der CTC in EE-Koordinaten. Akkurate Ergebnisse, bei einer fiktiven Pick-and-Place-Bewegungsaufgabe demonstrieren das hohe Potential des robusten Reglerkonzepts unter Antriebsredundanz. Im letzten Teil der vorliegenden Arbeit wurde ein nichtlinearer modellprädiktiver (NMPC) Ansatz verfolgt, der den zukünftigen Trajektorienfehler durch eine optimale Stellgröße korrigiert. Das Verfahren rechnet den Verlauf der Zustandsgrößen in jedem Abtastschritt über eine gewisse Zeit, dem gleitenden Horizont, voraus. Dabei werden auch die momentanen Störgrößen miteinbezogen, um eine präzise Bahnverfolgung zu erreichen. Mit der Zielsetzung, den EE-Fehler am Ende des gleitenden Horizonts zu verringern, werden optimale Stellgrößen ermittelt. Es gelingt dabei, das Ergebnis in Form einer adaptiven Verstärkungsmatrix in einen APD Regler zu integrieren. Der Hauptvorteil der Methode liegt wiederum in der EE-Koordinatenformulierung der verwendeten Bewegungsgleichungen, die dafür sorgt, dass sich der Aufwand der Optimierung nach der Anzahl der Freiheitsgrade und nicht nach der Anzahl der Antriebe richtet. Die Experimente zeigen eine enorme Verbesserung der Bahnfehler gegenüber dem CTC mit statischen Reglerverstärkungen.

8.2 Wissenschaftlicher Beitrag

Die Ergebnis der Arbeit ist ein breiter Zugang für modellbasierte Regelungen, auf Basis verschiedener Koordinatenformulierungen. Dabei wurden die Zwangskräfte der Bewegungsgleichungen konsequent durch eine Projektionsmethode eliminiert. Eine wichtige Erweiterung zum Stand der Wissenschaft stellt die strukturierte Aufstellung der Bewegungsgleichungen in EE-Koordinaten dar. Dabei konnte ein Orthogonalkomplement aus redundanten Zwangsbedingungen gefunden werden. Aus den Modellen resultiert ein kinematisches Filter, das für industrielle Anwendungen mit dezentralen Reglern prädestiniert ist. Bisher werden redundante Antriebe in diesem Bereich durch so genannte Master-Slave-Prinzipien eingebunden. Die Arbeit liefert einen umfassenden Beitrag zur Regelung mehrschleifiger Mechanismen mit Antriebsredundanz. Im Bereich der Robotik, wurden die gefundenen Koordinatenformulierungen in bekannten modellbasierten Reglern und Methoden erweitert.

8.3 Ausblick

Aktuelle Forschungsbeiträge behandeln die kinematische Parameteroptimierung zur Vergrößerung von Arbeitsräumen und der Steigerung der EE-Steifigkeit.

Im Bereich der hochdynamischen Positioniersysteme mit Antriebsredundanz werden zum Großteil ebene Systeme mit einfacher Redundanz untersucht. Neben den Werkzeugmaschinen bietet diese Bewegungsaufgabe einen weiteren Zugang zur industriellen Umsetzung von RA-PKM. Dafür müssen höher-redundante Prototypen, beispielsweise auf Basis räumlicher Delta-Roboter umgesetzt werden. Das Hauptproblem bei Pick-and-Place-Aufgaben ist die Vermeidung von Überschwüngen, die bei zu geringer Steifigkeit auftreten. Dahingehend kann das vorgestellte Reglerkonzept durch Verfahren zur Erzeugung antagonistischer Steifigkeit erweitert werden.

Ein wichtiger Punkt ist die Umsetzung der Regler auf einer rein industriellen Plattform. Moderne Steuerungen bieten in der Regel eine Schnittstelle für die direkte Implementierung von MATLAB-Code. Im Bereich der Zuverlässigkeit von RA-PKM sollten weiterhin geschlossene Lösungen der kinematischen Probleme angestrebt werden. Zusammen mit Bewegungsgleichungen in EE-Koordinaten ist der Betrieb von RA-PKM dann sehr sicher. Die Genauigkeit von PKM hängt in erster Linie vom Messsystem und der exakten Kenntnis der geometrischen Parameter ab. Entgegen den klassischen Methoden, die die redundanten Messsysteme zur Kalibrierung verwenden, kann die singularitätsbasierte Kalibrierung ([Last, 2009]) verfolgt werden. Dabei wird ein PKM händisch oder durch äußere Kräfte durch Kraftsingularitäten gefahren und der Richtungswechsel von Antriebskoordinaten detektiert. RA-PKM wären in der Lage, die Singularitäten gezielt zu durchfahren, wodurch eine Automatisierung des Verfahrens erreicht wird.

A Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

Struktur eines Mechanismus Für die Deklaration eines Mechanismus wird die in der Robotik übliche gelenkbezogene Notation verwendet. Es wird davon ausgegangen, dass die Arbeitsplattform (Endeffektor) über mehrere aktive Führungsketten mit einem Gestell verbunden ist. Die vollständige Bezeichnung einer Führungskette beinhaltet die vorkommenden Gelenke nach deren Reihenfolge, ausgehend von Gestell bis Endeffektor. Die Bezeichnung der Gelenke wird durch die englischen Kürzel beschrieben:

- Schubgelenk P (engl. prismatic joint),
- Drehgelenk R (engl. revolute joint),
- Kugelgelenk S (engl. spherical joint),
- Kardangelen U (engl. universal joint).

Die aktiven Gelenke werden zusätzlich durch einem Unterstrich gekennzeichnet. Bei symmetrischen Mechanismen kann die Struktursystematik durch eine vorangestellte Zahl, die die Anzahl gleicher Ketten bezeichnet, vereinfacht werden. Strukturen, die innerhalb einer Führungskette kinematische Schleifen beinhalten werden mit einer Klammer zusammengefasst [Last, 2009, S. 158] Beispielsweise kann die Struktur der Delta-Kinematik in Abbildung 1.1 a) als $3\underline{R}(SS)_2$ oder in Abbildung 1.1 b) als $6\underline{R}(SS)_2$ bezeichnet werden.

Bei Mechanismen mit Antriebsredundanz, deren Führungsketten durch ein einzelnes Gelenk direkt miteinander verbunden sind ist diese Notation nicht eindeutig. Daher werden solche Strukturen gekennzeichnet, indem die redundanten Führungsketten durch einen Schrägstrich angehängt werden. Für die Struktur des Mechanismus in Abbildung 2.2 ergibt sich die folgende Bezeichnung: $2\underline{R}RR/\underline{R}R$.

Variablen und physikalische Größen Die Bezeichnung der mathematischen Variablen und physikalischen Größen werden kursiv geschrieben. Bezeichnende Abkürzungen sowie mathematische Standardfunktionen werden nichtkursiv geschrieben.

Vektoren, Matrizen und Tensoren Die Darstellung von Vektoren und Matrizen erfolgt durch fett gedruckte Buchstaben. Physikalische Vektoren können mit einer Zähl- oder bezeichnenden Variable rechts unten indiziert sein. Bezeichnungen für das verwendete Koordinatensystem stehen links unten. Keine Angabe zum Koordinatensystem kennzeichnet das Inertialsystem. Ein Drehtensor hat

oben links das Ziel-Koordinatensystem, in der ein physikalischer Vektor transformiert wird vermerkt.

Abkürzungen

CMS	Constraint Mechanical System
DOA	Grad der Aktuierung
DOF	Freiheitsgrade
DOR	Grad der Redundanz
EE	Endeffektor
MKS	Mehrkörpersystem
PKM	Parallelkinematischer Manipulator
RA-PKM	Redundant angetriebener PKM
SKM	Seriellkinematischer Manipulator

Operatoren

$ \bullet $	Betrag des Ausdrucks •
$\ \bullet\ _p$	p -Norm des Ausdrucks •
$\max(\bullet)$	Maximum des Ausdrucks •
$\min(\bullet)$	Minimum des Ausdrucks •
$\text{null}(\bullet)$	Nullraum einer Matrix •
$\text{rank}(\bullet)$	Rang einer Matrix •
$\text{ran}(\bullet)$	Bild einer Matrix •
$\text{sup}(\bullet)$	Supremum des Ausdrucks •

Skalare

α	Grad der Aktuierung (DOA)
δ	Anzahl der Freiheitsgrade eines Mechanismus
\dot{q}_{Si}	STRIBECK-Geschwindigkeit des i -ten Gelenks
ϵ	Skalierungsfaktor des Zustandsbeobachters
μ_k	NEWTON-Schritt für die Konvergenz des Optimierungsverfahrens des NMPC
ρ	Grad der Redundanz (DOR)

Q_{C_i}	COULOMBScher Reibkoeffizient des i -ten Gelenks
Q_{R_i}	Gelenkreibung des i -ten Gelenks
Q_{S_i}	Haftreibung des i -ten Gelenks
Q_{V_i}	Viskose Reibung des i -ten Gelenks
δ_G	Anzahl der Freiheitsgrade eines Gelenks
n_B	Anzahl der Körper eines Mechanismus
n_G	Anzahl der Gelenke eines Mechanismus
n_L	Anzahl der Fundamentalschleifen eines Mechanismus
V	LYAPUNOV-Funktion
$G(s)$	Lineare Übertragungsfunktion
k_M	Drehmomentkonstante
M	Anzahl der Abtastungen innerhalb des gleitenden Horizonts
m	Anzahl der Antriebe eines Mechanismus
n	Anzahl aller systembeschreibenden Gelenkkoordinaten
r	Minimale Anzahl der Zwangsbedingungen
T_P	Länge des gleitenden Horizonts
t_s	Abtastzeit
S	Speicherfunktion

Allgemeine Systemgrößen

A_O	Beobachter-Dynamikmatrix
b_O	Beobachter-Eingangsmatrix
c_O	Beobachter-Ausgangsmatrix
c_S	Antriebsseitige Kompensationsanteile des Störgrößenbeobachters
f_{DKP}	Funktion des direkten kinematischen Problems
f_{IKP}	Funktion des inversen kinematischen Problems
h_R	Vektor der geometrischen Zwangsbedingungen bezüglich der Rotation
h_T	Vektor der geometrischen Zwangsbedingungen bezüglich der

	Translation
\mathbf{J}_1	JACOBI-Matrix der abhängigen Koordinaten
\mathbf{J}_2	JACOBI-Matrix der Minimalkoordinaten
\mathbf{J}_a	JACOBI-Matrix der aktiven Gelenkkoordinaten
\mathbf{J}_{DKP}	JACOBI-Matrix des direkten kinematischen Problems
\mathbf{J}_{IKP}	JACOBI-Matrix des inversen kinematischen Problems
\mathbf{J}_{MPC}	Quadratische Gütefunktion des NMPC-Reglers
\mathbf{J}_p	JACOBI-Matrix der passiven Gelenkkoordinaten
\mathbf{J}_R	JACOBI-Matrix der Rotation
\mathbf{J}_T	JACOBI-Matrix der Translation
\mathbf{J}_X	JACOBI-Matrix der Zwangskräfte am Endeffektor
\mathbf{K}_D	Verstärkungsmatrix zur Rückführung des Geschwindigkeitsfehlers
\mathbf{K}_I	Verstärkungsmatrix zur Stützung des Störgrößenbeobachters
\mathbf{k}_O	Verstärkungsmatrix zur Stützung des Zustandsbeobachters
\mathbf{K}_{PD}	Kombinierte Verstärkungsmatrix
\mathbf{K}_P	Verstärkungsmatrix zur Rückführung des Positionsfehlers
\mathbf{q}_1	Vektor der $n - \delta$ abhängigen Koordinaten des Mechanismus
\mathbf{q}_2	Vektor der δ generalisierten Koordinaten des Mechanismus
\mathbf{q}_a	Vektor der m aktiven Gelenkkoordinaten
\mathbf{q}_p	Vektor der $n - m$ passiven Gelenkkoordinaten
$\mathbf{0}_k$	$k \times k$ Nullmatrix
$\boldsymbol{\eta}$	Störkräfte in generalisierter Form
$\boldsymbol{\omega}$	Zeitliche Ableitung eines Orientierungsvektors
Φ_M	Zustandsgrößen am Ende des gleitenden Horizonts M
ψ	Nichtlinearer Anteil der BRUNOVSKY-Normalform
\mathbf{A}	Strukturmatrix des Mechanismus
\mathbf{B}	Kern der Strukturmatrix \mathbf{A}^T

\mathbf{c}	Vektor der relevanten Antriebskräfte in \mathbf{u}
\mathbf{F}	Orthogonalkomplement zur Parametrisierung
\mathbf{f}	Absolutkinematik einer Führungskette zwischen Endeffektor und Gestell
\mathbf{f}_W	Funktion zur Abbildung der Gelenkkoordinaten auf den Arbeitsraum
$\mathbf{G}(s)$	Lineare Übertragungsmatrix
\mathbf{H}	Permutations- oder Auswahlmatrix mit den Elementen 1 und 0
\mathbf{h}	Vektor der geometrischen Zwangsbedingungen
\mathbf{I}_k	$k \times k$ Einheitsmatrix
\mathbf{J}	JACOBI-Matrix der geometrischen Zwangsbedingungen
\mathbf{J}_I	JACOBI-Matrix der Eingänge
\mathbf{J}_W	JACOBI-Matrix der Ausgänge
\mathbf{K}	CORIOLIS- und Kreiselkräfte-Matrix
\mathbf{M}	Massenmatrix
\mathbf{N}_J	Nullraum-Projektor für die Projektion von \mathbf{J} in den Nullraum
\mathbf{Q}	Vektor generalisierter Kräfte
\mathbf{q}	Vektor der n generalisierten Koordinaten der Baumstruktur
\mathbf{u}	Vektor der generalisierten Antriebskräfte der ungebundenen Struktur
\mathbf{V}	Zeitliche Ableitung der Endeffektor-Pose
\mathbf{v}	Generalisierte Antriebskräfte des Mechanismus
\mathbf{W}	Positiv definite Gewichtungsmatrix
\mathbf{X}	Vektor der Endeffektor-Pose
\mathbf{x}	Vektor der Zustandsgrößen in der nichtlinearen Zustandsraumdarstellung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$
\mathbf{y}	Vektor der Ausgangsgrößen in der nichtlinearen Zustandsraumdarstellung
\mathbf{z}	Vektor der Zustandsgrößen in der BRUNOVSKY-Normalform

$\hat{\eta}$	Beobachtete Störkräfte in generalisierter Form
$\mathbf{N}_{\mathbf{A}^T}$	Nullraumprojektor, der Antriebskräfte \mathbf{c}^0 in den Nullraum von \mathbf{A}^T projiziert
${}^Q\mathbf{T}_P$	Drehtensor, der die Koordinatendarstellung eines Vektors im Koordinatensystem P in das Koordinatensystem Q transformiert

Matrizen-, Vektorräume und Gruppen

\mathbb{R}^n	Unterraum des Gelenkraums der Rotation
\mathbb{T}^n	Unterraum des Gelenkraums der Translation
\mathbb{V}^n	Gelenkraum eines Mechanismus
\mathcal{I}	Eingangsraum eines Manipulators
\mathcal{TV}	Zustandsraum (Tangentialbündel), der durch die kinematischen Zwangsbedingungen definiert wird
\mathcal{V}	Konfigurationsraum, der durch die geometrischen Zwangsbedingungen definiert wird
\mathcal{W}	Arbeitsraum eines Manipulators
$SE(3)$	LIE-Gruppe für Starrkörperbewegungen

Koordinatenformulierungen

$\hat{\bullet}$	Formulierung in Antriebskoordinaten
\bullet	Formulierung in Endeffektorkoordinaten
$\bar{\bullet}$	Formulierung in Minimalkoordinaten
$\tilde{\bullet}$	Formulierung in redundanten Gelenkkoordinaten

B Ergänzungen zu den Stabilitätsbetrachtungen

B.1 Pseudoinverse einer Matrix

Die Pseudoinverse einer Matrix \mathbf{A} ist die Matrix \mathbf{A}^+ , die das lineare Gleichungssystem $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ bei gegebenem \mathbf{y} mit kleinsten quadratischen Fehler approximiert, so dass

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{A}^+\mathbf{y}\|_2 = \min_x \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$$

gilt. Die Pseudoinverse kann aus der Singulärwertzerlegung von \mathbf{A} berechnet werden, und ist auch für singuläre und nicht-quadratische Matrizen definiert. Aufgrund der Beziehung

$$\sigma(\mathbf{A}) = \frac{1}{\sigma(\mathbf{A}^+)},$$

kann die Pseudoinverse bei Stabilitätsbetrachtungen nach dem *Small-Gain-Theorem* anstelle der Inversen herangezogen werden [Jaeger, 2011].

B.2 Die direkte Methode der Lyapunov-Stabilitätstheorie

Die Untersuchung der dezentralen Regelung sowie des Augmented PD-Reglers (APD) unter dem stark nichtlinearen Charakter mehrschleifiger Mechanismen erfordert die Anwendung der Stabilitätstheorie nach LYAPUNOV. Mithilfe der *direkten Methode*, die auch als zweite Methode bezeichnet wird, kann die Stabilität eines nichtlinearen dynamischen Systems nachgewiesen werden, ohne dessen Lösung zu kennen. Dafür werden die Differentialgleichungen eines autonomen Systems¹ in der Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{B.1}$$

betrachtet. Die Idee zum Nachweis der Stabilität stützt sich auf die Betrachtung der potentiellen Energie des Systems. Diese muss in einer vorgegebenen Ruhelage $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ein Minimum besitzen und in deren Umgebung entlang aller Trajektorien abnehmen. Dabei gilt diese Annahme ohne Ausnahme des Allgemeinen Falls auch für beliebige

¹Ein System, dessen Eingangsgrößen durch $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ ausgeschaltet werden bezeichnet man als autonomes System

Ruhelagen $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$. Mit der Koordinatentransformation $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}$ lässt sich eine vergleichbare Ruhelage $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{0}$ mit anderen Koordinaten definieren. Aus den vorangegangenen Überlegungen lässt sich der Satz zur generellen Stabilitätsanalyse dynamischer Systeme aufstellen:

Satz B.2.1 (Direkte Methode nach LYAPUNOV). *Eine Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit der Ruhelage $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ soll für jeden Anfangswert einer Umgebung $\mathcal{U}_1(\mathbf{0})$ eine stetige und eindeutige Lösung besitzen. Existiert dann eine stetige beliebige Funktion $V(\mathbf{x})$ mit*

$$V(\mathbf{0}) = 0,$$

die innerhalb einer Umgebung $\mathcal{U}_2(\mathbf{0}) \subseteq \mathcal{U}_1(\mathbf{0})$, mit der Annahme $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &> 0, \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &\leq 0, \end{aligned}$$

erfüllt, so ist die Ruhelage \mathbf{x}_0 stabil im Sinne von LYAPUNOV beziehungsweise asymptotisch stabil.

Die ersten beiden Bedingungen stellen dabei sicher, dass $V(\mathbf{0})$ ein Minimum aufweist. Die letzte Bedingung erfordert, dass die Funktion V für beliebige stetige Trajektorien mit der Zeit abnimmt. Funktionen, die den Stabilitätssatz B.2.1 erfüllen heißen LYAPUNOV-Funktionen. Wenn die gestellten Bedingungen im gesamten Zustandsraum erfüllt sind gilt außerdem die Beziehung

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \quad \text{wenn} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (\text{B.2})$$

Man bezeichnet diese Eigenschaft auch als *radial unbeschränkt* [Adamy, 2009].

C Modellbildung des Funktionsmusters

C.1 Kinematisches Modell

Der in Abbildung 2.1 vorgestellte $2\text{RRR}/\text{RR}$ RA-PKM RA-PKM ist die Grundlage zur Verifikation der vorgestellten Regler und Beobachter. Nachfolgend wird die kinematische Modellbildung des Funktionsmusters nach der Struktur in Abbildung C.1 beschrieben. Der Manipulator besitzt drei Antriebe an den Punkten $\mathbf{A}_i = [\mathbf{A}_{x_i} \ \mathbf{A}_{y_i}]^T$ mit $i = 1, 2, 3$, deren Gelenkkordinaten gemessen werden. Die Bewegung des EE und damit des ganzen Mechanismus kann durch zwei kartesische Koordinaten $\mathbf{X} = [x \ y]^T$ beschrieben werden. Vergleichbare kinematische Starrkörpermodelle sind in den Arbeiten von Kock [2001] und Shang u. a. [2009] zu finden.

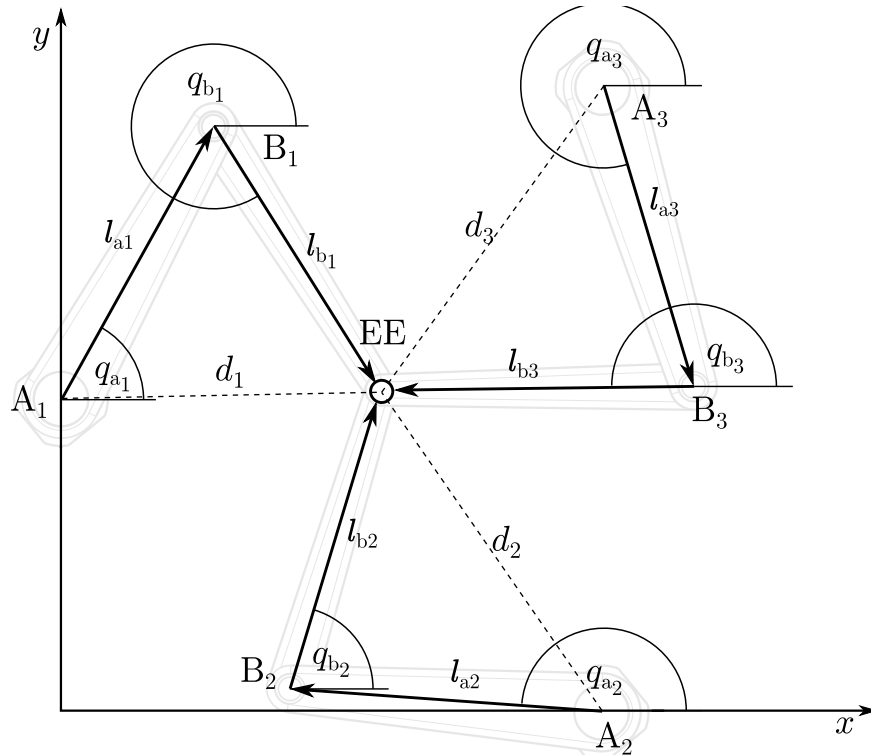


Abbildung C.1: Kinematische Struktur des $2\text{RRR}/\text{RR}$ RA-PKM Funktionsmusters

C.1.1 Inverses kinematisches Problem (IKP)

Als inverses kinematisches Problem bezeichnet man die Funktion, die eine gegebene EE-Pose auf die aktiven Gelenkkoordinaten q_{a_i} mit $i = 1, 2, 3$ abbildet. Die passiven Koordinaten q_{b_i} mit $i = 1, 2, 3$ lassen sich dabei ebenfalls durch die Antriebskoordinaten ausdrücken. Ausgehend von der EE-Pose können die aktiven Gelenkwinkel durch die Funktion

$$q_{a_i} = \text{atan2} \left(\frac{y - A_{y_i}}{x - A_{x_i}} \right) + \arccos \left(\frac{d_i}{2l} \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{C.1})$$

berechnet werden. Dabei bestimmt das Vorzeichen vor dem cos-Term die Aufbauart des PKM. Wie in Abbildung C.1 beschrieben, kann der Abstand d_i mit $i = 1, 2, 3$ zwischen den Motorpunkten und dem EE durch die Beziehung

$$d_i = \sqrt{(x - A_{x_i})^2 + (y - A_{y_i})^2}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{C.2})$$

bestimmt werden. Für die Berechnung der passiven Gelenkwinkel werden zunächst die Lagen der passiven Gelenke $\mathbf{B}_i = [\mathbf{B}_{x_i} \ \mathbf{B}_{y_i}]^T$ mit $i = 1, 2, 3$ durch die geometrische Beziehung

$$\begin{cases} B_{x_i} = A_{x_i} + l \cos(q_{a_i}) \\ B_{y_i} = A_{y_i} + l \sin(q_{a_i}) \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{C.3})$$

ermittelt. Damit ergibt sich die Funktion für die passiven Gelenkwinkel q_{b_i} mit $i = 1, 2, 3$ unmittelbar zu

$$q_{b_i} = \text{atan2} \left(\frac{y - B_{y_i}}{x - B_{x_i}} \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{C.4})$$

Der Wertebereich der passiven Winkel ergibt sich durch die Verwendung der atan2-Funktion zu $q_{b_i} \in (-\pi, \pi]$ mit $i = 1, 2, 3$. Damit können alle systembeschreibenden Gelenkkoordinaten durch die Vorgabe einer Pose vollständig parametrisiert werden.

C.1.2 Direktes kinematisches Problem (DKP)

Das direkte kinematische Problem behandelt die Berechnung einer momentanen EE-Pose $\mathbf{X} = [x \ y]^T$ unter Vorgabe der aktiven Gelenkkoordinaten q_{a_i} mit $i = 1, 2, 3$. Aufgrund der Symmetrie des vorliegenden Mechanismus ergibt sich die gesuchte Beziehung nach Kock [2001] aus der Suche nach einem gemeinsamen Schnittpunkt dreier Kreise mit den Radien l und den Mittelpunkten \mathbf{B}_i mit $i = 1, 2, 3$. Da der Mechanismus durch die Antriebsredundanz eine zusätzliche Führungskette hat, ergibt sich mit den drei Messsystemen eine eindeutige Position des EE. Im Falle eines vollaktuierten PKM mit zwei Führungsketten würde das gleiche Vorgehen zwei mögliche Schnittpunkte ergeben, wodurch die Position des EE doppeldeutig wäre. Die

Gleichungen für die direkte Kinematik ergeben sich zu

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\|\mathbf{B}_1\|^2(B_{y_2}-B_{y_3})+\|\mathbf{B}_2\|^2(B_{y_3}-B_{y_1})+\|\mathbf{B}_3\|^2(B_{y_2}-B_{y_1})}{2[B_{x_1}(B_{y_2}-B_{y_3})+B_{x_2}(B_{y_3}-B_{y_1})+B_{x_3}(B_{y_1}-B_{y_2})]} \\ \frac{\|\mathbf{B}_1\|^2(B_{x_2}-B_{x_3})+\|\mathbf{B}_2\|^2(B_{x_1}-B_{x_2})+\|\mathbf{B}_3\|^2(B_{x_2}-B_{x_1})}{2[B_{x_1}(B_{y_2}-B_{y_3})+B_{x_2}(B_{y_3}-B_{y_1})+B_{x_3}(B_{y_1}-B_{y_2})]} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Die Berechnung von (C.5) erfolgt nach Kock [2001] in den Schritten

1. Berechnung der Ortsvektoren zu den passiven Gelenkpositionen \mathbf{B}_i mit $i = 1, 2, 3$ nach (C.3)
2. Berechnung der Beträge $\|\mathbf{B}_i\| = \sqrt{B_{x_i}^2 + B_{y_i}^2}$
3. Berechnung der EE-Position $\mathbf{X} = [x \ y]^T$ gemäß (C.5)

Mithilfe der Vorwärtskinematik können Regler in EE-Koordinaten formuliert werden. In der Regel können die EE-Koordinaten wie in diesem Funktionsmuster nur indirekt über die aktiven Gelenkkoordinaten bestimmt werden.

C.2 Bewegungsgleichungen in EE-Koordinaten

Der nachfolgende Abschnitt beschreibt die Herleitung der Bewegungsgleichungen des 2RRR/RR RA-PKM in einer EE-Koordinatenformulierung. Diese Formulierung bietet für RA-PKM den größten Nutzen, da die Beschreibung unanfällig gegenüber Singularitäten der Eingänge bezüglich der PKM-Unterstrukturen ist. Darüber hinaus erfolgt die Formulierung in minimaler Form, wodurch sich weitere Vorteile bezüglich der Implementierung ergeben.

Baumstruktur und Endeffektor

Der Ausgangspunkt für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen des gebundenen Systems ist die Baumstruktur. Dabei werden die Führungsketten als drei Zweischläge und der EE als Starrkörper, der von Reaktions- und Prozesskräften beeinflusst wird modelliert. Die systembeschreibenden Koordinaten setzen sich aus den aktiven Gelenkkoordinaten $\mathbf{q}_a = [q_{a_1} \ q_{a_2} \ q_{a_3}]^T$ und den passiven Gelenkkoordinaten $\mathbf{q}_b = [q_{b_1} \ q_{b_2} \ q_{b_3}]^T$ zusammen, wobei die Reihenfolge durch den Vektor

$$\mathbf{q} = [q_{a_1} \ q_{a_2} \ q_{a_3} \ q_{b_1} \ q_{b_2} \ q_{b_3}]^T$$

definiert wird. Die Bewegungsgleichungen der drei Führungsketten ergeben sich beispielsweise aus den NEWTON-EULERSchen Gleichungen in der folgenden Form

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{q} + \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}_a) = \mathbf{u}, \quad (\text{C.6})$$

wobei mit $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Massenmatrix, mit $\mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ die CORIOLIS- und Kreiselkräfte und mit $\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}_a) \in \mathbb{R}^n$ alle sonstigen Potentialkräfte bezeichnet werden. Auf den rechten Seiten der Bewegungsgleichungen werden Steuerkräfte mit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet. Die Elemente $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{Q}, \mathbf{u}$ der Bewegungsgleichungen werden wie folgt angegeben:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \gamma_1 c_{ab_1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \gamma_2 c_{ab_2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & \gamma_3 c_{ab_3} \\ \gamma_1 c_{ab_1} & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 c_{ab_2} & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 c_{ab_3} & 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \gamma_1 s_{ab_1} \dot{q}_{b_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 s_{ab_2} \dot{q}_{b_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_3 s_{ab_3} \dot{q}_{b_3} \\ \gamma_1 s_{ab_1} \dot{q}_{a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 s_{ab_2} \dot{q}_{a_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 s_{ab_3} \dot{q}_{a_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{C_1} + (Q_{S_1} - Q_{C_1}) e^{-(\dot{q}_{a_1}/\dot{q}_{S_1})^{\delta_S}} + Q_{V_1} \dot{q}_1 \\ Q_{C_2} + (Q_{S_2} - Q_{C_2}) e^{-(\dot{q}_{a_2}/\dot{q}_{S_2})^{\delta_S}} + Q_{V_2} \dot{q}_2 \\ Q_{C_3} + (Q_{S_3} - Q_{C_3}) e^{-(\dot{q}_{a_3}/\dot{q}_{S_3})^{\delta_S}} + Q_{V_3} \dot{q}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

Dabei sind die Abkürzungen durch $c_{ab_i} = \cos(q_{a_i} - q_{b_i})$ mit $i = 1, 2, 3$ und durch $s_{ab_i} = \sin(q_{a_i} - q_{b_i})$ mit $i = 1, 2, 3$ definiert. Die Elemente des Vektors \mathbf{Q} beinhalten die STRIBECK-Kurve, um die Reibung der Motoren zu simulieren (Die Nomenklatur geht aus Abschnitt 4.8 hervor). Die restlichen Koeffizienten ergeben sich aus den physikalischen Parametern der Führungsketten

$$\begin{cases} \alpha_i & := & J_{a_i} + m_{a_i} r_{a_i}^2 + m_{b_i} l^2 \\ \beta_i & := & J_{b_i} + m_{b_i} r_{b_i}^2 \\ \gamma_i & := & m_{b_i} l r_{b_i} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{C.10})$$

wobei m_{a_i}, m_{b_i} die Massen der jeweiligen Glieder, J_{a_i}, J_{b_i} deren Massenträgheitsmoment, r_{a_i}, r_{b_i} die geometrischen Abstände zwischen Gelenk und Schwerpunkt und l die Länge der Glieder bezeichnet. Für die Modellierung der Dynamik des EE wird eine Punktmasse m_{EE} angesetzt. Der EE des 2RRR/RR RA-PKM kann keine Rotation ausführen und wird durch die Pose $\mathbf{X} = [x \ y]^T$ beschrieben. Daher ergeben sich die Bewegungsgleichungen des Endeffektors zu

$$\mathbf{M}_X \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.11})$$

wobei $\mathbf{M}_X = \text{diag}(m_{EE}, m_{EE})$ die Massenmatrix ist. Der EE hat auf den rechten Seiten keinerlei eingeprägte Kräfte.

Bewegungsgleichungen des gebundenen Systems

Der Zusammenbau von Endeffektor und der drei Führungsketten erfolgt bei dieser Formulierung durch die Einführung von n geometrischen redundanten Zwangsbedingungen. Mit den Koordinaten der EE-Pose kann das folgende Gleichungssystem angeschrieben werden:

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{X}) = \begin{bmatrix} l \cos(q_{a_1}) + l \cos(q_{b_1}) - x \\ l \sin(q_{a_1}) + l \sin(q_{b_1}) - y \\ l \cos(q_{a_2}) + l \cos(q_{b_2}) - x \\ l \sin(q_{a_2}) + l \sin(q_{b_2}) - y \\ l \cos(q_{a_3}) + l \cos(q_{b_3}) - x \\ l \sin(q_{a_3}) + l \sin(q_{b_3}) - y \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (\text{C.12})$$

Die zeitliche Ableitung der geometrischen Zwangsbedingungen liefert die kinematischen Zwangsbedingungen

$$\frac{d\mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{X})}{dt} = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0} \quad (\text{C.13})$$

$$= \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_X \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.14})$$

Die Erzeugung eines gebundenen Systems gelingt mit der Einführung von Zwangskräften, deren Richtung durch die kinematischen Bindungsgleichungen (C.14) beschrieben werden. Zusammen mit den Gleichungen (C.6) und (C.11) erhält man folgendes System:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}_a) \\ \mathbf{M}_X \ddot{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0}_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_X^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}, \quad (\text{C.15})$$

wobei die unbekanntenen Zwangskräfte durch die LAGRANGE-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ berücksichtigt werden. Außerhalb von Strecklagen hat die quadratische JACOBI-Matrix $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ vollen Rang und aus (C.14) kann unmittelbar eine Parametrisierung der Gelenkkoordinaten in Abhängigkeit der EE-Koordinaten angegeben werden:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{F}} \dot{\mathbf{X}}, \quad \underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{J}_X \\ \mathbf{I}_\delta \end{bmatrix} \quad (\text{C.16})$$

Die Matrix $\underline{\mathbf{F}}$ ist ein Orthogonalkomplement zu $\begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{J}_X \end{bmatrix}$ dessen Elemente für diesen Aufbau wie folgt angegeben werden können:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} -\frac{\cos(q_{b_1})}{l \sin(q_{a_1} - q_{b_1})} & -\frac{\sin(q_{b_1})}{l \sin(q_{a_1} - q_{b_1})} \\ -\frac{\cos(q_{b_2})}{l \sin(q_{a_2} - q_{b_2})} & -\frac{\sin(q_{b_2})}{l \sin(q_{a_2} - q_{b_2})} \\ -\frac{\cos(q_{b_3})}{l \sin(q_{a_3} - q_{b_3})} & -\frac{\sin(q_{b_3})}{l \sin(q_{a_3} - q_{b_3})} \\ \frac{\cos(q_{a_1})}{l \sin(q_{a_1} - q_{b_1})} & \frac{\sin(q_{a_1})}{l \sin(q_{a_1} - q_{b_1})} \\ \frac{\cos(q_{a_2})}{l \sin(q_{a_2} - q_{b_2})} & \frac{\sin(q_{a_2})}{l \sin(q_{a_2} - q_{b_2})} \\ \frac{\cos(q_{a_3})}{l \sin(q_{a_3} - q_{b_3})} & \frac{\sin(q_{a_3})}{l \sin(q_{a_3} - q_{b_3})} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.17})$$

Aus dieser Darstellung können die Singularitäten des RA-PKM unmittelbar angegeben werden. Dies ist der Fall, wenn die Terme $q_{a_i} - q_{b_i}$ mit $i = 1, 2, 3$ zu null werden oder in anderen Worten, wenn sich eine Führungskette in einer Strecklage befindet. Die Projektion mit dem Orthogonalkomplement $\underline{\mathbf{F}}^T$ von links gegen die Bewegungsgleichungen führt zu der kompakten Darstellung ohne Zwangskräfte

$$\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \underline{\mathbf{A}}^T \mathbf{c}, \quad (\text{C.18})$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}} &:= \underline{\mathbf{F}}^T \text{diag}(\mathbf{M}, \mathbf{M}_X) \underline{\mathbf{F}}, \\ \underline{\mathbf{K}} &:= \underline{\mathbf{F}}^T \left(\text{diag}(\underline{\mathbf{K}}, \mathbf{0}_\delta) \underline{\mathbf{F}} + \text{diag}(\mathbf{M}, \mathbf{M}_X) \dot{\underline{\mathbf{F}}} \right), \\ \underline{\mathbf{Q}} &:= \underline{\mathbf{F}}^T \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} \\ \mathbf{0}_\delta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen enthalten mit der Strukturmatrix $\underline{\mathbf{A}}^T$ lediglich den relevanten Teil des Orthogonalkomplements. Die Elemente der Strukturmatrix sind wie folgt:

$$\underline{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} -\frac{\cos(q_{b_1})}{l \sin(q_{a_1} - q_{b_1})} & -\frac{\cos(q_{b_2})}{l \sin(q_{a_2} - q_{b_2})} & -\frac{\cos(q_{b_3})}{l \sin(q_{a_3} - q_{b_3})} \\ \frac{\sin(q_{b_1})}{l \sin(q_{a_1} - q_{b_1})} & \frac{\sin(q_{b_2})}{l \sin(q_{a_2} - q_{b_2})} & \frac{\sin(q_{b_3})}{l \sin(q_{a_3} - q_{b_3})} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.19})$$

Literaturverzeichnis

- [Abel u. Bollig 2006] ABEL, D. ; BOLLIG, A.: *Rapid Control Prototyping Methoden und Anwendungen*. Springer, 2006
- [Adamy 2009] ADAMY, J.: *Nichtlineare Regelungen*. 1. Auflage. Springer, 2009
- [Allgöwer u. a. 2004] ALLGÖWER, F. ; FINDEISEN, R. ; NAGY, Z. K.: Nonlinear Model Predictive Control: From Theory to Application. In: *J. Chin. Inst. Chem. Engrs.* 35 (2004), Nr. 3, S. 299–315
- [Armijo 1966] ARMIJO, L.: Minimization of Functions havin Lipschitz Continuous First Partial Derivatives. In: *Pazific Journal of Mathematics* 16 (1966), Nr. 1, S. 1–3
- [Asada u. Slotine 1986] ASADA, H. ; SLOTINE, J.-J. E.: *Robot Analysis and Control*. Wiley & Sons, 1986
- [Bamberger u. a. 2008] BAMBERGER, H. ; WOLF, A. ; SHOHAM, M.: Assembly Mode Changing in Parallel Mechanisms. In: *IEEE Trans. on Robotics* 24 (2008), Nr. 4, S. 765–772
- [Belda 2001] BELDA, K.: The antibacklash task in the path control of redundant parallel robots. In: *Proc. of the 2nd Int. PhD Student Workshop on Systems and Control*, 2001, S. 11–15
- [Belda u. a. 2005] BELDA, K. ; BÖHM, J. ; VALÁSEK, M.: Predictive Control Applied To Planar Parallel Robots. In: *Proc. of the 16th IFAC World Congress*, 2005, S. 1–2
- [Blajer 1997] BLAJER, W.: A Geometric Unification of Constrained System Dynamics. In: *Multibody System Dynamic* 1 (1997), S. 3–21
- [Blajer u. a. 1994] BLAJER, W. ; SCHIEHLEN, W. ; SCHIRM, W.: A projective criterion to the coordinate partitioning method for multibody dynamics. In: *Archive of Applied Mechanics* 64 (1994), S. 86–98
- [Bonitz 1996] BONITZ, R. G.: *Internal Force-based Impedance Control for Coordinated Multiple-arm Manipulation with Various Grasping Methods*, Universität von Nebraska, Diss., 1996

- [Bruckmann 2010] BRUCKMANN, T.: *Auslegung und Betrieb redundanter paralleler Seilroboter*, Universität Duisburg-Essen, Diss., 2010
- [Cheng u. a. 2003] CHENG, H. ; Y.-K., Yiu ; LI, Z.: Dynamics and Control of Redundantly Actuated Parallel Manipulators. In: *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics* 8 (2003), Nr. 4, S. 483–491
- [Cong u. a. 2008] *Kapitel 12*. In: CONG, S. ; FENG, C. ; ZHANG, Y.: *Parallel Manipulators, New Developments*. InTech, 2008, S. 241–268
- [Corbel u. a. 2010] CORBEL, D. ; GOUTTEFARDE, M. ; COMPANY, O. ; PIERROT, F.: Towards 100G with PKM. Is actuation redundancy a good solution for pick-and-place? In: *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation Anchorage Convention District*, 2010, S. 4675–4682
- [De Luca u. a. 2006] DE LUCA, A. ; ALBU-SCHÄFFER, A. ; HADDADIN, S. ; HIRZINGER, G.: Collision Detection and Safe Reaction with the DLR-III Lightweight Manipulator Arm. In: *Proc. of the 2006 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, 2006, S. 1623–1630
- [De Luca u. Mattone 2003] DE LUCA, A. ; MATTONE, R.: Actuator Failure Detection and Isolation Using Generalized Momenta. In: *Proc. of the 2003 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 2003, S. 634–639
- [De Luca u. Mattone 2005] DE LUCA, A. ; MATTONE, R.: Sensorless Robot Collision Detection and Hybrid Force/Motion Control. In: *Proc. of the 2005 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 2005, S. 999–1004
- [DIN 2206 2004] Norm DIN 2206 2004. *Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme*
- [DIN 44300 1985] Norm DIN 44300 1985. *Informationsverarbeitung*
- [Echtle 1990] ECHTLE, K.: *Fehlertoleranzverfahren*. 1. Auflage. Springer, 1990
- [Ecorchard 2008] ECORCHARD, G.: *Static Accuracy Enhancement of Redundantly Actuated Parallel Kinematic Machine Tools*, Technische Universität Chemnitz, Diss., 2008
- [Eker u. Åström 1996] EKER, J. ; ÅSTRÖM, K. J.: A Nonlinear Observer for the Inverted Pendulum. In: *The 8th IEEE Conf. on Control Application*, 1996
- [Feng u. a. 2008] FENG, C. ; CONG, S. ; ZHANG, Y. ; LI, Z. ; JIANG, S.: Kinematic parameters calibration of redundant planar 2-dof parallel manipulator with a new error function. In: *Proc. 7th World Congress Intelligent Control and Automation WCICA 2008*, 2008, S. 426–431

- [Fischer 2010] FISCHER, GmbH: *Firmenschrift: Torquemotoren genutzt und eisenbehaftet*. 1. Auflage. 74842 Billigheim-Allfeld, 2010
- [Föllinger 1994] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik. Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Hüthig, 1994
- [Ganovski 2007] GANOVSKI, L.: *Modeling, Simulation and Control of Redundantly Actuated Parallel Manipulators*, Université catholique de Louvain, Diss., 2007
- [Garrido u. Torres-Cuz 2004] GARRIDO, R. ; TORRES-CUZ, D.: On PD control of parallel robots with redundant actuation. In: *Int. Conf. on Electrical and Electronics Engineering*, 2004, S. 356–360
- [Giergiel u. Zylski 2005] GIERGIEL, J. ; ZYLSKI, W.: Description of motion of a mobile robot by Maggi's equations. In: *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 43 (2005), S. 511–521
- [Golub u. Loan 1996] GOLUB, G.-H. ; LOAN, C.-F. V.: *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1996
- [Gosselin u. Angeles 1990] GOSSELIN, C. ; ANGELES, J.: Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. In: *IEEE Trans. on Robotics and Automation* 6 (1990), Nr. 3, S. 281–290
- [Grosche u. a. 2003] GROSCHE, G. ; ZIEGLER, V. ; ZIEGLER, D.: *Taschenbuch der Mathematik II*. Teubner, 2003
- [Habersohn u. a. 2011] HABERSOHN, C. ; PUSCHITZ, F. ; BLEICHER, F.: Controller concept for a highly parallel machine tool. In: *Scientific Society for Mechanical Engineering, Siofok*, 2011, S. 227–228
- [Hiller 1983] HILLER, M.: *Mechanische Systeme: Eine Einführung in die analytische Mechanik und Systemdynamik*. 1. Auflage. Springer, 1983
- [Hiller 1994] HILLER, M.: Modelling of Multi-Loop Kinematic Chains. In: *Kinematics and Dynamics of Multi-Body Mechanical Systems CISM-COURSE*, 1994
- [Hufnagel u. Müller 2011] HUFNAGEL, T. ; MÜLLER, A.: A Realtime Coordinate Switching Method for Model-Based Control of PKM. In: *Multibody Dynamics 2011, ECCOMAS Thematic Conf. Brussels, Belgium, 4-7 July*, 2011
- [Hufnagel u. Müller 2012] HUFNAGEL, T. ; MÜLLER, A.: A Projection Method for the Elimination of Contradicting Decentralized Control Forces in Redundantly Actuated PKM. In: *IEEE Trans. on Robotics* 28 (2012), Nr. 3, S. 1–2
- [Hufnagel u. Schramm 2011a] HUFNAGEL, T. ; SCHRAMM, D.: Beitrag zur Regelung

- redundant aktuiertes Mechanismen. In: *VDI-Mechatroniktagung Dresden, 31.03-01.04, 2011*
- [Hufnagel u. Schramm 2011b] HUFNAGEL, T. ; SCHRAMM, D.: Consequences of the Use of Decentralized Controllers for Redundantly Actuated Parallel Manipulators. In: *13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, Mexico, 19-25 June, 2011*
- [Hui 2001] HUI, C.: *Dynamics and Control of Parallel Manipulators with Actuation Redundancy*, Hong Kong University, Diplomarbeit, 2001
- [IFTToMM 2003] IFTToMM, Commission: Terminology for the Mechanism and Machine Science. In: *Mechanism and Machine Theory* 38 (2003), Nr. 7-10, S. 598–1111
- [Iurascu u. Park 1999] IURASCU, C. C. ; PARK, F. C.: Geometric Algorithms for Closed Chain Kinematic Calibration. In: *Int. Conf. on Robotics and Automation Detroit, Michigan, 1999*, S. 1752–1757
- [Jaeger 2011] JAEGER, Christian: *Entwurf von Zustandsregelungen für hochdynamische Werkzeugmaschinen*, ETH Zürich, Diss., 2011
- [de Jalón u. Bayo 1994] JALÓN, J. G. ; BAYO, E.: *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real-Time challenge*. Springer, 1994
- [Jeon u. a. 2010] JEON, D. ; KIM, K. ; JEONG, J. I. ; KIM, J.: A calibration method of redundantly actuated parallel mechanism machines based on projection technique. In: *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 59 (2010), S. 413–416
- [Juschkov 1996] JUSCHKOV, M. P.: Ableitung der Gleichungen von Maggi für nichtholonome Systeme aus dem zweiten Newtonschen Gesetz. In: *Technische Mechanik* 16 (1996), Nr. 2, S. 227–236
- [Kafader 2004] KAFADER, U.: *Auslegung von hochpräzisen Kleinantrieben*. 1. Auflage. Maxon Academy, 2004
- [Kecskemethy u. Hiller 1993] KECSKEMETHY, A. ; HILLER, M.: Modellierung der Dynamik komplexer Mehrkörpersysteme mit Hilfe von kinematischen Übertragungselementen. In: *Archive of Applied Mechanics* 63 (1993), S. 386–401
- [Kerle u. Pittschellis 2002] KERLE, H. ; PITTSHELLIS, R.: *Einführung in die Getriebelehre*. Teubner, 2002
- [Khalil 2002] KHALIL, H. K.: *Nonlinear Systems*. 3. Auflage. Prentice Hall, 2002

- [Khalil 2008] KHALIL, H. K.: High-Gain Observers in Nonlinear Feedback Control. In: *Int. Conf. on Control, Automation and Systems*, 2008
- [Kim u. a. 2001] KIM, J. ; PARK, C. ; RYU, S. J. ; KIM, J. ; HWANG, J. C. ; PARK, C. ; IURASCU, C. C.: Design and analysis of a redundantly actuated parallel mechanism for rapid machining. In: *IEEE Trans. on Robotics and Automation* 17 (2001), Nr. 4, S. 423–434
- [Kock 2001] KOCK, S.: *Parallelroboter mit Antriebsredundanz*, TU Braunschweig, Diss., 2001
- [Kock u. Schumacher 2000a] KOCK, S. ; SCHUMACHER, W.: Control of a fast parallel robot with a redundant chain and gearboxes: experimental results. In: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation ICRA '00* Bd. 2, 2000, S. 1924–1929
- [Kock u. Schumacher 2000b] KOCK, S. ; SCHUMACHER, W.: A mixed elastic and rigid-body dynamic model of an actuation redundant parallel robot with high-reduction gears. In: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation ICRA '00* Bd. 2, 2000, S. 1918–1923
- [Kurtz u. Hayward 1992] KURTZ, R. ; HAYWARD, V.: Multiple-goal kinematic optimization of a parallel spherical mechanism with actuator redundancy. In: *IEEE Trans. on Robotics and Automation* 8 (1992), Nr. 5, S. 644–651
- [Kurz u. a. 2011] KURZ, T. ; BURKHARDT, M. ; EBERHARD, P.: Systems with Constraint Equations in the Symbolic Multibody Simulation Software Neweul-M2. In: *Multibody Dynamics 2011 4th-7th July 2011, Brussels, Belgium*, 2011
- [Lé-Tien 2010] LÉ-TIEN, L.: *Ansätze zur entkoppelten Regelung von mechanisch gekoppelten Doppelgelenken eines DLR-Medizinroboters*, Technische Universität Dresden, Diss., 2010
- [Lé Tien u. a. 2008] LÉ TIEN, L. ; ALBU-SCHÄFFER, A. ; HADDADIN, S. ; HIRZINGER, G.: Friction Observer and Compensation for Control of Robots with Joint Torque Measurement. In: *2008 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, 2008, S. 3789–3795
- [Last 2009] LAST, P.: *Singularitätsbasierte Kalibrierung von Parallelrobotern*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2009
- [Liu u. a. 2001] LIU, G.F. ; CHENG, H. ; XIONG, Z.H. ; WU, X.Z. ; WU, Y.L. ; LI, Z.X.: Distribution of Singularity and Optimal Control of Redundant Parallel Manipulators. In: *Proc. of the 2001 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, 2001, S. 177–182
- [Lizarralde u. a. 1999] LIZARRALDE, F. ; WEN, J.T. ; HSU, L.: A new model predicti-

- ve control strategy for affine nonlinear control systems. In: *Proc. of the American Control Conf.* Bd. 6, 1999, S. 4263–4267
- [Manderla u. Konigorski 2009] MANDERLA, M. ; KONIGORSKI, U.: Modelling and Control of a Redundant Parallel Robotic Manipulator - Numerical Simulation and Experimental Results. In: *2009 IEEE Int. Conf. on Control and Automation Christchurch, New Zealand*, 2009, S. 151–156
- [Marquet u. a. 2002] MARQUET, F. ; COMPANY, O. ; KRUT, S. ; GASCUEL, O. ; PIERROT, F.: Control of a 3-DOF Over-Actuated Parallel Mechanism. In: *Proc. of ASME DETC 02*, 2002
- [Marquet u. a. 2001] MARQUET, F. ; KRUT, S. ; COMPANY, O. ; PIERROT, F.: ARCHI: a new redundant parallel mechanism-modeling, control and first results. In: *IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems* Bd. 1, 2001, S. 183–188
- [Merlet 2006] MERLET, J.-P.: *Parallel Robots*. 2. Auflage. Springer, 2006
- [Müller 2002] MÜLLER, A.: Higher Order Local Analysis of Singularities in Parallel Mechanisms. In: *Proc. of DECT'02 ASME 2002 Design Engineering Technical Conf. and The Computers and Information in Engineering Conf.*, 2002
- [Müller 2006] MÜLLER, A.: Stiffness Control of redundantly actuated Parallel Manipulators. In: *Proc. of the 2006 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 2006
- [Müller 2008] MÜLLER, A.: On the Terminology and Geometric Aspects of Redundant Parallel Manipulators. In: *ASME 2008 Int. Design Engineering Technical Conf. and Computers and Information in Engineering Conf. (IDETC/CIE2008)*, 2008
- [Müller 2009] MÜLLER, A.: Effects of geometric imperfections to the control of redundantly actuated parallel manipulators. In: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation ICRA*, 2009, S. 1782–1787
- [Müller 2010] MÜLLER, A.: Consequences of Geometric Imperfections for the Control of Redundantly Actuated Parallel Manipulators. In: *IEEE Trans. on Robotics* 26 (2010), Nr. 1, S. 21–31
- [Müller 2011a] MÜLLER, A.: Motion equations in redundant coordinates with application to inverse dynamics of constrained mechanical systems. In: *Springer Science and Business Media* (2011)
- [Müller 2011b] MÜLLER, A.: Problems in the control of redundantly actuated parallel

- manipulators caused by geometric imperfections. In: *Meccanica* 46 (2011), S. 41–49
- [Müller 2011c] MÜLLER, A.: A Robust Inverse Dynamics Formulation for Redundantly Actuated PKM. In: *13th World Congress in Mechanism and Machine Science*, 2011
- [Müller u. Hufnagel 2011a] MÜLLER, A. ; HUFNAGEL, T.: Adaptive and Singularity-Free Inverse Dynamics Models for Control of Parallel Manipulators with Actuation Redundancy. In: *ASME 2011 Int. Design Engineering Technical Conf. and Computers and Information in Engineering Conf., Washington, DC, August 28-31*, 2011
- [Müller u. Hufnagel 2011b] MÜLLER, A. ; HUFNAGEL, T.: Model-based control of redundantly actuated parallel manipulators in redundant coordinates. In: *Robotics and Autonomous Systems* (2011)
- [Müller u. Hufnagel 2011c] MÜLLER, A. ; HUFNAGEL, T.: Model-Based Control of Redundantly Actuated Parallel Manipulators in Redundant Coordinates. In: *Robotics and Autonomous Systems* 1 (2011), Nr. 1, S. 1–2
- [Müller u. Hufnagel 2011d] MÜLLER, A. ; HUFNAGEL, T.: A projection method for the elimination of contradicting control forces in redundantly actuated PKM. In: *Proc. IEEE Int. Robotics and Automation (ICRA) Conf.*, 2011, S. 3218–3223
- [Müller u. Hufnagel 2012] *Kapitel 9*. In: MÜLLER, Andreas ; HUFNAGEL, Timo: *Serial and Parallel Robot Manipulators - Kinematics, Dynamics, Control and Optimization*. InTech, 2012, S. 167–178
- [Murray u. a. 1993] MURRAY, R. M. ; LI, Z. ; SASTRY, S. S.: *A mathematical Introduction to robotic Manipulation*. CRC Press, 1993
- [Nakamura u. Ghodoussi 1989] NAKAMURA, Y. ; GHODOUSSI, M.: Dynamics computation of closed-link robot mechanisms with nonredundant and redundant actuators. In: *IEEE Trans. on Robotics and Automation* 5 (1989), Nr. 3, S. 294–302
- [Neugebauer 2005] NEUGEBAUER, R.: *Parallelkinematische Maschinen: Entwurf, Konstruktion, Anwendung*. 1. Auflage. Springer, 2005
- [Neugebauer u. a. 2011a] NEUGEBAUER, R. ; DROSSEL, W.-G. ; IHLENFELDT, S. ; RENTZSCH, H.: Machining with Redundant Kinematics. In: *ASME 2011 Int. Design Engineering Technical Conf. and Computers and Information in Engineering Conf., Washington, DC, August 28-31*, 2011
- [Neugebauer u. a. 2011b] NEUGEBAUER, R. ; DROSSEL, W.-G. ; ULLRICH, M. ; JUNCKER, T.: Entwicklung und Einsatz eines piezobasierten Werkzeugfeinpositionier-

- systems zur Gestaltung von funktionalen Oberflächen. In: *VDI-Mechatroniktagung Dresden, 31.03-01.04, 2011*
- [Nikravesh 2007] NIKRAVESH, P. E.: *Planar Multibody Dynamics: Formulation, Programming and Applications*. CRC Press, 2007
- [O'Brien u. Wen 1999] O'BRIEN, J. F. ; WEN, J. T.: Redundant actuation for improving kinematic manipulability. In: *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1999, S. 1520–1525
- [Olsson u. a. 1998] OLSSON, H. ; ASTROM, K. J. ; WIT, C. C. ; GAFVERT, M. ; LISCHINSKY, P.: Friction models and friction compensation. In: *Eur. J. Control* 4 (1998), Nr. 3, S. 176–195
- [Pfaff 1994] PFAFF, G.: *Regelung elektrischer Antriebe*. 5. Auflage. Oldenbourg, 1994
- [Pfeiffer 1997] PFEIFFER, F.: *Einführung in die Dynamik*. Teubner, 1997
- [Pierrot u. a. 2009] PIERROT, F. ; NABAT, V. ; COMPANY, O. ; KRUT, S. ; POIGNET, P.: Optimal Design of a 4-DOF Parallel Manipulator: From Academia to Industry. In: *IEEE Trans. on Robotics* 25 (2009), april, Nr. 2, S. 213–224
- [Pietruszka 2005] PIETRUSZKA, W. D.: *Matlab in der Ingenieurpraxis*. 1. Auflage. Teubner, 2005
- [Reichert 2012] REICHERT, C.: *Entwicklung von robusten Beobachterstrukturen für redundant aktuierte PKM*, HS-Heilbronn, Diplomarbeit, 2012
- [Reichert u. a. 2012] REICHERT, C. ; HUFNAGEL, T. ; SCHRAMM, D.: Regelung redundant angetriebener Parallelmanipulatoren mit reibungsbehafteten Motoren. In: *VDI-Getriebetagung Bewegungstechnik, Nürtingen, Germany, 11-12 September, 2012*
- [Ropponen u. Nakamura 1990] ROPPONEN, T. ; NAKAMURA, Y.: Singularity-Free Parameterization and Performance Analysis of Actuation Redundancy. In: *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1990, S. 806–811
- [Rothfuss u. a. 1997] ROTHFUSS, R. ; RUDOLPH, J. ; ZEITZ, M.: Flachheit ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme. In: *Automatisierungstechnik* 11 (1997), Nr. 45
- [Scheinman u. McCarthy 2008] *Kapitel 3*. In: SCHEINMAN, V. ; MCCARTHY, J. M.: *Handbooks of Robotics*. Springer, 2008, S. 67–86

- [Schiehlen u. Eberhard 2004] SCHIEHLEN, W. ; EBERHARD, P.: *Technische Dynamik: Modelle für Regelung und Simulation*. 2. Auflage. Vieweg, 2004
- [Schindele u. Aschemann 2011a] SCHINDELE, D. ; ASCHEMANN, H.: Fast Nonlinear MPC for an Overhead Travelling Crane. In: *Preprints of the 18th IFAC World Congress Milano (Italy)*, 2011, S. 7963–7968
- [Schindele u. Aschemann 2011b] SCHINDELE, D. ; ASCHEMANN, H.: MPC for Fast Flexible Rack Feeders. In: *ENOC 2011, 24-29 July 2011, Rome, Italy*, 2011, S. 1–6
- [Schramm 1986] SCHRAMM, D.: *Ein Beitrag zur Dynamik reibungsbehafteter Mehrkörpersysteme*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr 32. Düsseldorf, VDI Verlag, 1986
- [Schramm u. a. 2010] SCHRAMM, D ; HILLER, M. ; BARDINI, R.: *Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen*. 1. Auflage. Springer, 2010
- [Schwarz u. Köckler 2011] SCHWARZ, H.-R. ; KÖCKLER, N.: *Numerische Mathematik*. Vieweg, 2011
- [Shang u. Cong 2010a] SHANG, W. ; CONG, S.: Adaptive compensation of dynamics and friction for a planar parallel manipulator with redundant actuation. In: *Proc. IEEE Int. Robotics and Biomimetics (ROBIO) Conf*, 2010, S. 507–512
- [Shang u. Cong 2010b] SHANG, W. ; CONG, S.: Nonlinear adaptive task space control for a 2-DOF redundantly actuated parallel manipulator. In: *Nonlinear Dyn* 59 (2010), S. 61–72
- [Shang u. a. 2009] SHANG, W. ; CONG, S. ; ZHANG, Y. ; LIANG, Y.: Active Joint Synchronization Control for a 2-DOF Redundantly Actuated Parallel Manipulator. In: *IEEE Trans. on Control Systems Technology* 17 (2009), Nr. 2, S. 416–423
- [Skogestad u. Postlethwaite 2007] SKOGESTAD, S. ; POSTLETHWAITE, I.: *Multivariable Feedback Control*. Wiley & Sons, 2007
- [Spong u. a. 2005] SPONG, M. W. ; HUTCHINSON, S. ; VIDYASAGAR, M.: *Robot Modeling and Control*. 1. Auflage. Wiley & Sons, 2005
- [Sun u. S. Ge 2005] SUN, Z. ; S. GE, S.: *Switched Linear Systems*. 1. Auflage. Springer, 2005
- [Tsai 1999] TSAI, L. W.: Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators. In: *Wiley & Sons*, 1999
- [Unbehauen 2008] UNBEHAUEN, H.: *Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese*

- linearer kontinuierlicher Regelsysteme, Fuzzy-Regelsysteme*. 15. Auflage. Vieweg, 2008
- [Valasek u. a. 2005] VALASEK, M. ; BAUMA, V. ; SIKÁ, Z. ; BELDA, K. ; PISA, P.: Design-by-Optimization and Control of Redundantly Actuated Parallel Kinematics Sliding Star. In: *Multibody System Dynamics* 14 (2005), S. 251–267
- [Veluvolu u. Soh 2009] VELUVOLU, K. C. ; SOH, Y. C. S.: High-Gain Observers With Sliding Mode for State and Unknown Input Estimations. In: *IEEE Trans. on Industrial Electronics* 56 (2009), Nr. 9, S. 3386–3393
- [Weber 2009] WEBER, W.: *Industrieroboter*. 2. Auflage. Hanser, 2009
- [van der Wijk u. a. 2011] WIJK, V. van d. ; KRUT, S. ; PIERROT, F. ; HERDER, J. L.: Generic Method for Deriving the General Shaking Force Balance Conditions of Parallel Manipulators with Application to a Redundant Planar 4-RRR Parallel Manipulator. In: *13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, Mexico, 19-25 June, 2011*
- [Woronetz 1910] WORONETZ, P.: Über die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt. In: *Mathematische Annalen* 70 (1910), S. 410–453
- [Woronetz 1911] WORONETZ, P.: Über die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers. In: *Mathematische Annalen* 71 (1911), S. 392–403
- [Yiu u. a. 2003] YIU, Y. K. ; MENG, J. ; LI, Z. X.: Auto-calibration for a Parallel Manipulator with Sensor Redundancy. In: *Proc. of the 2003 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation Taipei, Taiwan, 2003*, S. 3660–3665
- [Zhang u. a. 2007] ZHANG, Y.-X. ; CONG, S. ; LI, Z. ; JIANG, S.: Modeling, Identification and Control of a Redundant Planar 2-DOF Parallel Manipulator. In: *Int. Journal of Control, Automation, and Systems* 5 (2007), S. 559–569
- [Zhang u. a. 2008] ZHANG, Y.-X. ; CONG, S. ; LI, Z. ; JIANG, S.: Auto-calibration of a redundant parallel manipulator based on the projected tracking error. In: *Arch. Appl. Mech.* 77 (2008), S. 697–706
- [Zlatanov u. a. 2002] ZLATANOV, D. ; BONEV, I. A. ; GOSSELIN, C. M.: Constraint singularities of parallel mechanisms. In: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation ICRA '02* Bd. 1, 2002, S. 496–502
- [Zlatanov u. a. 1994a] ZLATANOV, D. ; FENTON, R. G. ; BENHABIB, B.: Singularity analysis of mechanisms and robots via a motion-space model of the instantaneous kinematics. In: *Proc. Conf. IEEE Int. Robotics and Automation*, 1994, S. 980–985

-
- [Zlatanov u. a. 1994b] ZLATANOV, D. ; FENTON, R. G. ; BENHABIB, B.: Singularity analysis of mechanisms and robots via a velocity-equation model of the instantaneous kinematics. In: *Proc. Conf. IEEE Int. Robotics and Automation*, 1994, S. 986–991