

# **Modellbildung und Simulation von Fahrzeugmodellen unterschiedlicher Komplexität**

Der Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Abteilung Maschinenbau der  
Universität Duisburg-Essen  
zur Erlangung des akademischen Grades

DOKTOR-INGENIEUR

genehmigte Dissertation

von

Michael Unterreiner

aus

Osijek

Referent: Prof. Dr.-Ing. Dieter Schramm

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. Christoph Woernle

Tag der mündlichen Prüfung: 23. Mai 2013



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Mechatronik der Universität Duisburg-Essen. Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Dieter Schramm, für seine wissenschaftliche und persönliche Betreuung und das entgegengebrachte Vertrauen. Die Möglichkeit, ihn an der Erstellung eines Lehrbuchs zu unterstützen und die daraus entstandenen Ideen haben zum großen Teil zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Ebenso danken möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Christoph Woernle für die Übernahme des Koreferates, das gezeigte Interesse und die kritische Durchsicht der Arbeit. Zudem richtet sich mein Dank an Herrn Prof. Dr.-Ing. Udo Ossendoth, der mir den dynamischen Fahr Simulator für meine Untersuchungen zur Verfügung gestellt hat. Weiterhin möchte ich Prof. Dr. rer. nat. Johannes Gottschling, Herrn Professor Dr.-Ing. Andrés Kecskeméthy und Prof. Dr.-Ing. Sebastian Kaiser für die fachlichen Anmerkungen zu meiner Arbeit und den reibungslosen Ablauf des Promotionsverfahrens danken.

Mein Dank richtet sich auch an Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c.mult. Manfred Hiller i.R. Er brachte mir während meiner Studienzeit großes Vertrauen entgegen und war mir auch während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter ein Mentor.

Herrn Dr.-Ing. Cem Kurutas möchte ich für die Motivation, die Inspiration und die Freundschaft, die wir während unserer gemeinsamen Studienzeit aufgebaut haben, danken.

Meine besondere Anerkennung gilt weiterhin allen Studenten, die mich durch ihren wissenschaftlichen Beitrag unterstützen. An dieser Stelle möchte ich mich besonders bei Herren M.Sc. Sebastian Reicherts, Herrn Dipl.-Ing. Simon Schijen, Herrn M.Sc. Muhammed Awada und Herrn Dipl.-Ing. Marco Lenzen bedanken.

Auch möchte ich mich bei den Mitarbeitern und Kollegen des Lehrstuhls für Mechatronik bedanken. Viele von ihnen standen mir stets mit Rat und Tat zur Seite. Bei Herrn M.Sc. Lawrence Louis möchte ich mich besonders für seine wertvollen Ratschläge und die persönlichen Gespräche während unserer gemeinsamen Bürozeit bedanken. Besonders hervorheben möchte ich auch Herrn Dr.-Ing. Gregor Hiesgen, Herrn Dr.-Ing. Benjamin Hesse, Herrn Dipl.-Ing. Martin Koppers und Herrn M.Sc. Maximilian Montenbruck, die durch unzählige Gespräche und Diskussionen ihren fachlichen und menschlichen Anteil zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben. Auch den externen Doktoranden, die ich während der Doktorandenseminare betreuen durfte, danke ich für die Anregungen und die gemeinsame Zeit.

Nicht zuletzt möchte ich herzlich meiner Familie und meinen Freunden für ihr Verständnis und ihren Beitrag danken. Insbesondere möchte ich mich herzlichst bei meiner Mutter für ihre bedingungslose Unterstützung und ihr Vertrauen bedanken.

Stuttgart, im Januar 2014

Michael Unterreiner



„Grau, teurer Freund, ist alle Theorie, und grün des Lebens goldner Baum.“  
– JOHANN WOLFGANG VON GOETHE: *Faust I*



## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Untersuchungsschwerpunkten. Zum einen wird die Erstellung und die Validierung von Mehrkörperfahrzeugmodellen beschrieben. Zum anderen wird das Fahrgefühl des Fahrers an einem bewegten Fahrsimulator in Abhängigkeit von der Fahrzeugmodellkomplexität bewertet.

Zunächst wurden exemplarisch zwei Fahrzeugmodelle unterschiedlicher Komplexität erstellt: ein generisches Fahrzeugmodell mit einer verhältnismäßig einfachen Radaufhängung und ein spezielles Fahrzeugmodell mit komplexen Radaufhängungen. Die Modelle wurden auf der Grundlage eines topologischen Modellierungsansatzes zur Erstellung von Mehrkörpermodellen erstellt.

Das generische Fahrzeugmodell stellt durch seine vergleichsweise einfache Parametrierung ein vielseitig einsetzbares Modell dar. Zur Eigenschaftsabsicherung des generischen Modells wurde eine Vorgehensweise beschrieben, die eine Sensitivitätsanalyse der Modellparameter mit einer nachgeschalteten Parameteridentifikation enthält. Das dafür notwendig Referenzmodell wurde aus Fahrzeugdaten und Fahrdynamikmessungen erstellt und spiegelt die Kompaktklasse mit ihren spezifischen Parametern und ihrem typischen Fahrverhalten wider.

Das spezielle Fahrzeugmodell bildet eine bestimmte Fahrzeugklasse sehr genau ab. Die Radaufhängungen werden dabei detailliert modelliert und können zudem modular ausgetauscht werden, wodurch eine Ausgangsbasis für unterschiedliche Fahrzeugtypen geschaffen wird. Für diesen modularen Ansatz wurden speziell eine MacPherson-Federbein Vorderachse und eine Mehrlenkerhinterachse umfassend hergeleitet. Die Radkinematik der Vorder- und Hinterachse wurde anhand von gemessenen Anlenkpunkten simuliert. Der simulierte Sturz- und Spurlinienverlauf beider Achsen wurde mit Messungen verglichen und bewertet. Daraufhin wurden das generische und spezielle Fahrzeugmodell anhand einer stationären Kreisfahrt fahrdynamisch gegeneinander verglichen und bewertet.

Das generische Modell konnte sehr gut an das Referenzmodell angepasst werden. Schon ein minimaler Satz an Parametern reicht aus, um das Fahrverhalten angemessen an die des Referenzmodells anzupassen. Auch wenn das generische Fahrzeugmodell sich vom speziellen Fahrzeugmodell in der Nachbildungstiefe unterscheidet, ist die Wiedergabe des Fahrverhaltens genügend und für viele Anwendungsfälle und Untersuchungen mehr als ausreichend. Zudem benötigt das generische, im Vergleich zum speziellen Fahrzeugmodell, weniger Rechenzeit und ist dadurch echtzeitfähig. Für viele Anwendungen, bei denen es auf die Rechenzeit ankommt, ist das generische Fahrzeugmodell ein willkommener Kompromiss zwischen Rechenzeit und Abbildungsgüte. Zudem besticht das generische Fahrzeugmodell durch seine Anpassungsfähigkeit an unterschiedliche Fahrzeugklassen.

Abschließend wurde in einem Praxistest das Fahrgefühl des Fahrers an einem bewegten Fahrsimulator in Abhängigkeit von der Fahrzeugmodellkomplexität durch eine Signifikanzuntersuchung bewertet. In dieser Probandenstudie wurden ein Einspurmodell (Modell A), ein erweitertes Einspurmodell (Modell B), ein Zweispurmodell mit vergleichs-

weise einfacher Radaufhängung (Modell C) und das generische Zweispurmodell (Modell D) verwendet. Die Modelle A-D wurden validiert, um das Fahrverhalten des Referenzmodells wiederzugeben.

Die Untersuchungen ergaben, dass der Modellkomplexitätsgrad nicht notwendigerweise hoch sein muss, um den Fahrer ausreichend in die hier gestellte Fahraufgabe und die Simulationsumwelt einzugewöhnen. Obwohl Modell C mit einer einfachen und Modell D mit einer komplexen Radaufhängung modelliert wurden, konnten bei den gefahrenen Manövern keine signifikanten Unterschiede im subjektiven Fahrverhalten festgestellt werden. Zudem ist anzumerken, dass Modell B trotz seiner verhältnismäßig einfachen Modellierung für einen großen Teil an Fahraufgaben am Fahrsimulator empfohlen werden kann, da es einen guten und weitgehend realistischen Fahrerimmersionsgrad realisiert.

## Abstract

This work focuses on two topics. One is the modelling of multibody vehicle model and its verification. The other is the investigation of the subjective driving perception of human drivers in a dynamic driving simulator in dependency of the vehicle model complexity.

In the beginning of this work two vehicle models of different complexity level were developed. One generic vehicle model with relatively simple wheel suspensions and a special vehicle model with a more complex wheel suspension. The models were derived with help of a topological multibody modeling techniques.

The generic vehicle model can be used in versatile assignments due to its relatively simple parameterization. To validate the characteristics of the generic model a process is used which investigates the sensitivity of the model parameter and applies thereafter parameter identification. The required reference model is derived from vehicle data and vehicle dynamics measurements and mirrors the performance of a compact class with its specific parameters.

The special vehicle model explicitly maps the performance of a given vehicle class. The vehicle suspension are detailed modelled and can be modularly exchanged. This is a basis for creating different vehicle types in more detail. For this modular approach the MacPherson strut front axle and the multi-link rear axle are derived in detail. The suspension kinematics for the front and rear axle are simulated on the basis of measured pivot points. The simulated camber and caster angle of both axles are compared and evaluated with measurements. Hereupon the driving performance of the generic and the special vehicle model were compared and evaluated by means of a circular driving under steady state conditions.

The generic vehicle model could be mapped onto the reference model very well. A minimal set of optimized parameter were sufficient to reasonable adapt its characteristic to the reference vehicle. Although the level of detail of the special model could not be reached by the generic model, the reproduction of the driving behaviors through the generic model was adequate and in many cases more the sufficient. Moreover the generic model needs less computational time compared to the special model and is thus usable for many applications which depend on real time computations. The generic model is a reasonable compromise between computational time and simulation quality and is flexible adapted to a variety of vehicle types.

This work concludes with an investigation of the subjective driving perception of human drivers in a dynamic driving simulator in dependency of the vehicle model complexity with help of a human subjects study. Four vehicle models of different complexity are used to compute the simulator's motion. The models used are the single-track model (model A), the single-track model extended with roll motion (model B), a two-track model with a simple suspension model for vertical wheel motion (model C) and the generic vehicle model (model D). The models A-D were validated to match the motion of a reference vehicle performing a steer step maneuver.

In conclusion, the model complexity does not need to be high to immerse a driver into a simulative driving task. Although models C and D differ in the complexity level of the modeled wheel suspension, there was no significant difference in the subjective driving feeling while driving the given driving task. It is remarkable that model B with its comparatively simple modeling is good enough to immerse the driver into the driving task. This model can be recommended for a broad band of driving tasks in simulators.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b> .....	<b>XI</b>
<b>Symbolverzeichnis</b> .....	<b>XIII</b>
<b>1 Einleitung</b> .....	<b>1</b>
1.1 Literaturübersicht .....	2
1.2 Ziel und Inhalt der Arbeit.....	8
<b>2 Grundlagen der Fahrzeugdynamik</b> .....	<b>11</b>
2.1 Definition der Fahrzeugbewegung .....	11
2.2 Kennzeichnung der Fahrdynamikenngrößen.....	14
2.2.1 Stationäres Fahrverhalten .....	15
2.2.2 Instationäres Fahrverhalten.....	19
2.3 Fahrmanöver.....	22
2.3.1 Manöver Stationäre Kreisfahrt .....	23
2.3.2 Manöver Frequenzgang.....	24
2.3.3 Manöver Lenkwinkelsprung.....	24
2.4 Reifenkraft.....	25
2.4.1 Kennzeichnung der Reifenkräfte.....	25
2.4.2 Reifen unter Einwirkung von Längs- und Seitenkraft.....	26
2.4.3 Reifennormalkraft.....	30
2.4.4 Magic Formula-Reifenmodell .....	31
2.4.5 Überlagerung der Horizontalkräfte.....	33
2.4.6 Instationäres Reifenverhalten .....	34
<b>3 Modellbildung</b> .....	<b>37</b>
3.1 Modellierung des Fahrzeugaufbaus.....	37
3.1.1 Allgemeine Freiheitsgrade des MKS-Fahrzeugmodells.....	37
3.1.2 Kinematik des Fahrzeugaufbaus.....	39
3.2 Kinematik der Radaufhängung.....	41
3.2.1 Grundaufgabe der Kinematik .....	41
3.2.2 Relativkinematik.....	42
3.2.3 Verfahren der kinematischen Transformatoren.....	43
3.2.4 Berechnung der absoluten Kinematik.....	43
3.3 Ansatz zur Modularisierung von Radaufhängungen .....	44
3.3.1 Relative Modulare Radaufhängungskinematik.....	44
3.3.2 Absolute Modulare Radaufhängungskinematik .....	46
3.4 Bewegungsgleichungen des Gesamtfahrzeugs.....	48
3.4.1 Vektor der verallgemeinerten Zentrifugal-, Kreisel- und Corioliskräfte.....	50
3.4.2 Verallgemeinerte Kräfte .....	50
3.4.3 Bewegungs- und Zustandsgleichungen .....	51
3.5 Kinematik einer einfachen Radaufhängung .....	53
3.6 Kinematik von komplexen Radaufhängungen .....	55
3.6.1 MacPherson-Federbeinradaufhängung.....	55
3.6.2 Aufstellung der Relativkinematik einer MacPherson-Radaufhängung.....	56
3.6.3 Aufstellung der Absolutkinematik einer MacPherson-Radaufhängung.....	69
3.6.4 Mehrlenkerradaufhängung.....	74

---

3.6.5	Aufstellung der Relativkinematik einer Mehrlenkerradaufhängung.....	75
3.6.6	Aufstellung der Absolutkinematik einer Mehrlenkerradaufhängung.....	82
<b>4</b>	<b>Referenzdatengenerierung.....</b>	<b>89</b>
4.1	Fahrzeugklassen.....	89
4.2	Erstellung der Referenzfahrzeugparameter.....	90
4.3	Erstellung der fahrdynamischen Referenzdaten.....	93
4.3.1	Referenzdaten der stationären Kreisfahrt.....	94
4.3.2	Referenzdaten des Frequenzgangs.....	97
4.3.3	Referenzdaten des Lenkwinkelsprungs.....	98
<b>5</b>	<b>Einfluss von Modellparameter auf fahrdynamische Kenndaten.....</b>	<b>103</b>
5.1	Sensitivitätsanalyse zur Systembetrachtung.....	103
5.1.1	Methoden der Sensitivitätsanalyse.....	103
5.1.2	Vorgehensweise der erweiterten lokalen Sensitivitätsanalyse.....	104
5.2	Sensitivitätsanalyse am generischen Zweispurmodell.....	108
5.2.1	Parameter des generischen Zweispurmodells.....	108
5.2.2	Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse.....	109
5.2.3	Parametersätze für die Optimierung.....	124
<b>6</b>	<b>Parameteridentifikation.....</b>	<b>127</b>
6.1	Grundlagen.....	127
6.2	Optimierungsverfahren.....	128
6.2.1	Gradientenbasierte Verfahren.....	128
6.2.2	Heuristische Verfahren.....	129
6.2.3	Verwendeter Optimierungsalgorithmus.....	131
6.3	Gütefunktion.....	131
6.4	Optimierungsergebnisse.....	133
6.4.1	Optimierungsergebnisse für die stationäre Kreisfahrt.....	134
6.4.2	Optimierungsergebnisse für den Frequenzgang.....	136
6.4.3	Optimierungsergebnisse für den Lenkwinkelsprung.....	138
<b>7</b>	<b>Modellvergleich und Fahr Simulatorstudie.....</b>	<b>141</b>
7.1	Vergleich der Fahrzeugmodelle.....	141
7.1.1	Untersuchung der Radaufhängungsbewegung.....	141
7.1.2	Vergleich der Fahrdynamik.....	145
7.2	Fahr Simulatorstudie.....	146
7.2.1	Grundkonzept von Fahr Simulatoren.....	147
7.2.2	Bewegter Fahr Simulator.....	149
7.2.3	Fahr Simulator-Fahrzeugmodelle.....	151
7.2.4	Versuchsaufbau und Durchführung.....	153
7.2.5	Versuchsauswertung und Bewertung des Immersionsgrades.....	155
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung, wissenschaftlicher Beitrag und Ausblick.....</b>	<b>165</b>
8.1	Zusammenfassung und wissenschaftlicher Beitrag.....	165
8.2	Ausblick.....	166
<b>Anhang.....</b>	<b>.....</b>	<b>169</b>
8.3	A.1 Gleichungen aus Kap. 3.....	169
8.4	A.2 Probandenfragebogen.....	173
<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>.....</b>	<b>175</b>
<b>Lebenslauf.....</b>	<b>.....</b>	<b>181</b>

# Symbolverzeichnis

## ***Symboldarstellung***

Skalare werden in der Regel in *kursiver* Schrift geschrieben. Physikalische Größen, Bezeichnungen von Orten (Punkten), Namen von Koordinatensystemen, Zahlen sowie Standardfunktionen, wie beispielweise „sin“ oder „cos“, werden in nichtkursiver Schrift geschrieben. Vektoren werden durch **fett** gedruckte und *kursive* Kleinbuchstaben, Tensoren und Matrizen durch **fett** gedruckte und *kursive* Großbuchstaben dargestellt. Zeitliche Ableitungen werden durch Punkte über der jeweiligen Größe gekennzeichnet. Der Nullvektor und die Nullmatrix werden ohne Dimensionsangaben als „**0**“ dargestellt.

## ***Spezielle Notation für physikalische Vektoren***

Die Indizierung von Vektoren und Tensoren erfolgt entsprechend folgender Regeln (Schramm 2010):

- Ein rechts unten stehender Index dient als Bezeichnungs- und Zählvariable. Er kennzeichnet z.B. den Körper oder das Koordinatensystem der betreffenden Größe.
- Bei Größen, die relativ zu anderen Größen beschrieben werden, kennzeichnet ein Index links unten den Bezugskörper oder das Bezugskordinatensystem. Ein fehlender Index kennzeichnet das Inertialsystem als Bezugssystem.
- Für den Fall, dass ein physikalischer Vektor oder Drehtensor in Koordinaten angegeben wird, erfolgt die Angabe des Koordinatensystems, durch einen linken oberen Index. Ist kein Index angegeben, so handelt es sich um einen physikalischen Vektor oder Drehtensor ohne Angabe eines spezifischen Koordinatensystems.
- Operatoren wie Potenzen, Transponierung, Invertierung sowie Ableitungen nach anderen Größen als der Zeit, werden durch ein entsprechendes Zeichen rechts oben gekennzeichnet.
- Über der jeweiligen Variablen wird die Ableitung nach der Zeit gekennzeichnet. Dort können auch weitere Kennzeichnungen erfolgen, wie z.B. Überstriche „ $\bar{\quad}$ “ oder Tilden „ $\tilde{\quad}$ “.

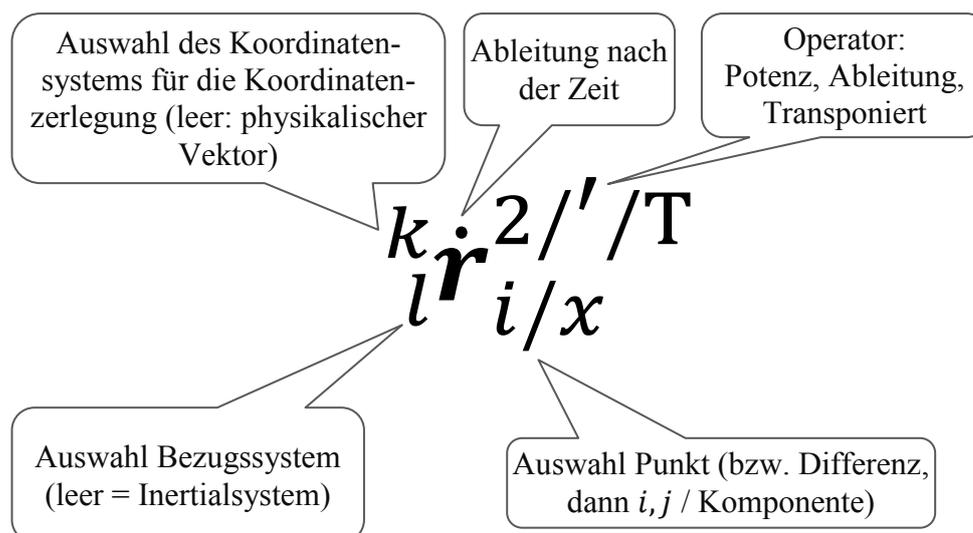


Abb. 0.1: Notation für physikalische Vektoren

### Das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt

In der vorliegenden Arbeit werden Vektorprodukte wie beispielweise

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}, \tag{0.1}$$

oftmals auch als

$$\mathbf{b} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{a} \tag{0.2}$$

geschrieben. Wobei  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} \times \dots$  jetzt dem Operator des Vektorprodukts entspricht und mit  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  folgende Komponenten enthält

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \tag{0.3}$$

### Formelzeichen

Tabelle 0.1: Verwendete Formelzeichen (Bezeichnung, Einheit und Beschreibung)

Bezeichnung	Einheit	Beschreibung
-------------	---------	--------------

#### Lateinische Formelzeichen

$\mathbf{a}_i$	m	Beschleunigungen
${}^V \mathbf{a}_{R_i}$	$\text{m/s}^2$	Relativbeschleunigung zwischen Rad und Aufbau
${}^V \mathbf{a}_{T_i}$	$\text{m/s}^2$	Relativbeschleunigung zwischen Radträger und Aufbau
$\mathbf{a}_{R_i}$	$\text{m/s}^2$	Absolutbeschleunigung des Rades
$\mathbf{a}_{T_i}$	$\text{m/s}^2$	Absolutbeschleunigung des Radträgers
$\bar{\mathbf{a}}_{R_i}$	$\text{m/s}^2$	Restbeschleunigung des Rades
$\bar{\mathbf{a}}_{T_i}$	$\text{m/s}^2$	Restbeschleunigung des Radträgers
$a_q$	$\text{m/s}^2$	Zentrifugalbeschleunigung des Fahrzeugschwerpunktes
$\mathbf{b}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)$	N, Nm( $f, 1$ )-Vektor	der verallg. Kreisel-, Coriolis- und Zentrifugalkräfte

Bezeichnung	Einheit	Beschreibung
$b_{St}$	m	Stabilisatorhebellänge
$b_V$	m	Spurweite
$B_{R_x}$	–	Steifigkeitsparameter der Reifenlängskraftkurve (Magic-Formula Modell)
$B_{R_y}$	–	Steifigkeitsparameter der Reifenquerkraftkurve (Magic-Formula Modell)
$c_i$	m, rad	Einfederbewegung des Radträgers
$\dot{c}_i$	m/s, rad/s	Einfedergeschwindigkeiten der Radträger
$c_\alpha$	N/rad	Reifen-Schräglaufsteifigkeit
$c_s$	N	Reifen-Längsschlupfsteifigkeit
$c_{St}$	N/rad	Stabilisatorsteifigkeit
$c_V$	N/m	Aufbaufedersteifigkeit
$c_R$	N/m	Reifenvertikalsteifigkeit
$c_x$	N	Statische Reifenlängssteifigkeit
$c_y$	N/rad	Statische Reifenquersteifigkeit
$C_{R_x}$	–	Formfaktor der Reifenlängskraftkurve (Magic-Formula Modell)
$C_{R_y}$	–	Formfaktor der Reifenquerkraftkurve (Magic-Formula Modell)
$C_{R_y}$	–	Sturzabhängiger Faktor (Magic-Formula Reifenmodell)
$d_V$	Ns/m	Aufbaudämpfersteifigkeit
$D_{R_x}$	–	Maximalwert der Reifenlängskraft (Magic-Formula Modell)
$D_{R_y}$	–	Maximalwert der Reifenlängskraft (Magic-Formula Modell)
$e_{R_z}$	–	Radlast-Degressionsparameter
$e_{x_i}, e_{y_i}, e_{z_i}$	–	Einheitsvektoren für Basissysteme
$e_z$	–	Straßen-Normalenvektor
$e_{R_z}$	–	Reifen-Degressionsparameter
$f$	–	Anzahl Freiheitsgrade
$f_{G_i}$	–	Anzahl Gelenkfreiheitsgrade
$f_{L_i}$	–	Anzahl Schleifenfreiheitsgrade
$F_i$	N	Kraft
$F_i^e$	N	Eingeprägte Kraft
$F_i^r$	N	Reaktionskraft
$F_W$	N	Resultierende Windkraft
$F_{F_i}$	N	Jeweilige wirkende Federkraft
$F_{D_i}$	N	Jeweilige wirkende Dämpferkraft
$F_{St_i}$	N	Jeweilige wirkende Stabilisatorkraft
$F_{R_i}$	N	Jeweilige wirkende Reifenkraft
$F_{R_x}$	N	Reifenlängskraft entlang der $x$ -Achse des Radsystems $O_R$
$F_{R_xmax}$	N	Maximal übertragbare Längskraft
$F_{R_x,G}$	N	Maximal übertragbare Längskraft beim Gleiten
$F_{R_y}$	N	Querkraft/Seitenkraft entlang der $y$ -Achse des Radsystems $O_R$
$F_{R_ymax}$	N	Maximal übertragbare Querkraft
$F'_{R_y}$	N	Reaktionskraft am Radträger infolge der Reifenquerkraft $F_{R_y}$
$F_{R_y}$	N	Sturzseitenkraft

Bezeichnung	Einheit	Beschreibung
$F_{\psi_a}$	N	Aus dem KAMM'schen Kreis resultierende Reifengesamtkraft
$F_{R_{a,x}}$	N	Aus dem KAMM'schen Kreis resultierende Reifenlängskraft
$F_{R_{a,y}}$	N	Aus dem KAMM'schen Kreis resultierende Reifenquerkraft
$F_{R_{x,stat}}$	N	Statische Reifenlängskraft berechnet durch das Magic Formula Modell mit dem Schlupf $s_{A,B}$ unter Berücksichtigung des KAMM'schen Kreises
$F_{R_{y,stat}}$	N	Statische Reifenquerkraft berechnet durch das Magic Formula Modell mit dem Schräglauflauf $\alpha$ unter Berücksichtigung des KAMM'schen Kreises
$F_{R_z}$	N	Vertikal-/Aufstandskraft entlang der z-Achse des Radsystems $O_R$
$F_{R_{z,B}}$	N	Konstruktive Reifenbetriebslast
$F_{R_{z,eff}}$	N	Effektive Reifennormalkraft
$g$	m/s <sup>2</sup>	Erdbeschleunigung
$g_i$	–	Bindungsgleichung bzw. Schließbedingung
$H_{Tra_c,T_i}$	–	Trans. Jacobi-Blockmatrix der Einfederbewegung des Radträgers
$H_{Tra_\delta,T_i}$	–	Trans. Jacobi-Blockmatrix der Lenkbewegung des Rad-trägers
$H_{Rot_c,T_i}$	–	Rot. Jacobi-Blockmatrix der Einfederbewegung des Rad-trägers
$H_{Rot_\delta,T_i}$	–	Rot. Jacobi-Blockmatrix der Lenkbewegung des Radträgers
$H_{Tra_c,R_i}$	–	Trans. Jacobi-Blockmatrix der Einfederbewegung des Rades
$H_{Tra_\delta,R_i}$	–	Trans. Jacobi-Blockmatrix der Lenkbewegung des Rades
$H_{Rot_c,R_i}$	–	Rot. Jacobi-Blockmatrix der Einfederbewegung des Rades
$H_{Rot_\delta,R_i}$	–	Rot. Jacobi-Blockmatrix der Lenkbewegung des Rades
$H_{Rot_\rho,R_i}$	–	Rot. Jacobi-Blockmatrix der Rollbewegung des Rades
$i_L$	–	Lenkübersetzung
$I$	–	Einheitsmatrix
$J_{Tra_i}$	–	Trans. Jacobi-Matrix des MKS
$J_{Rot_i}$	–	Rot. Jacobi-Matrix des MKS
$J_{Tra_V}$	–	Trans. Jacobi-Matrix des Aufbaus im fahrzeugf. System
$J_{Tra,T_i}$	–	Trans. Jacobi-Matrix des Radträgers im fahrzeugf. Sys.
$J_{Tra,R_i}$	–	Trans. Jacobi-Matrix des Rades im fahrzeugfesten Sys.
$J_{Rot,T_i}$	–	Rot. Jacobi-Matrix des Radträgers im fahrzeugfesten Sys.
$J_{Rot,R_i}$	–	Rot. Jacobi-Matrix des Rades im fahrzeugfesten System
$K(\mathbf{x}_p)$	–	Gesamtgütefunktionswert in Abhängigkeit der Parameterwerte
$K_i = \{O_i; x_i, y_i, z_i\}$	–	Koordinatensystem ( $K_i$ ), alternative Schreibweise
$K_E = \{O_E; x_E, y_E, z_E\}$	–	Inertiales Koordinatensystem
$K_V = \{O_V; x_V, y_V, z_V\}$	–	Fahrzeugfestes Koordinatensystem
$K_T = \{O_T; x_T, y_T, z_T\}$	–	Radträgerfestes Koordinatensystem
$K_R = \{O_R; x_R, y_R, z_R\}$	–	Radfestes Koordinatensystem
$K_{FG}$	–	Gütefunktional des Frequenzgangs
$K_{LP}$	–	Gütefunktional des Lenkwinkelsprungs
$K_{SK}$	–	Gütefunktional der stationären Kreisfahrt
$l_v$	m	Abstand Schwerpunkt zu Vorderachse
$l_h$	m	Abstand Schwerpunkt zu Hinterachse
$l_{St}$	m	Stabilisatorlänge

Bezeichnung	Einheit	Beschreibung
$l_V$	m	Radstand
$L_i$	Nm	Drehmoment
$m_{T_i}$	kg	Radträgermasse
$m_{R_i}$	kg	Radmasse
$m_V$	kg	Fahrzeugaufbaumasse
$M_{A_i}$	Nm	Antriebsmomente um die $y$ -Achse des Radsystems $K_R$
$M_{B_i}$	Nm	Bremsmomente um die $y$ -Achse des Radsystems $K_R$
$M_{A,B}$	Nm	Antriebs- und Bremsmoment um die $y$ -Achse des Radsystems $K_R$
$M_{R_z}$	Nm	Rückstellmoment um die $z$ -Achse des Radsystems $K_R$
$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)$	–	Verallgemeinerte $(f, f)$ -Massenmatrix
$\mathbf{M}_{St}$	Nm	Resultierendes Stabilisatormoment
$n_B$	–	Körperanzahl
$n_\beta$	–	Anzahl Gelenkkoordinate
$n_G$	–	Anzahl Gelenke
$n_L$	–	Anzahl der kinematischen Schleifen
$n_R$	m	Reifennachlauf aufgrund von Gleitvorgängen im Latsch
$\mathbf{q}$	–	Vektor der verallgemeinerte Koordinaten
$\mathbf{Q}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)$	N	$(f, 1)$ -Vektor der verallgemeinerten eingepprägten Kräfte
$r_{dyn}$	m	Dynamischer Reifenradius
$v r_{y_A}$		Querabstands zum Anlenkpunkt $A$ der Schräglenkerachse
$R$	m	Kurvenradius
$\mathbf{r}_i$	m	Ortsvektor zum Bezugspunkt $O_i$ des „Objekts“ (Körpers) „ $i$ “
$\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$	m	Differenzvektor zwischen zwei Bezugspunkten $P_i, P_j$
${}^E_V \mathbf{r}_i$	m	Vektor vom Fahrzeugsys. $K_V$ zum Pkt. $P_i$ in Koordinaten von $K_E$
${}^V_V \mathbf{r}_i$	m	Vektor vom Fahrzeugsys. $K_V$ zum Pkt. $P_i$ in Koordinaten von $K_V$
${}^E_V \mathbf{r}_V$	m	Ortsvektor von $K_E$ zu $K_V$
$v \mathbf{r}_{A_i}$	m	Ortsvektor von $K_V$ zum fahrzeugfesten Bezugspunkt $A_i$
$A \mathbf{r}_{T_i}$	m	Ortsvektor von Anlenkpunkt $A_i$ zum Radträgerschwerpunkt $T_i$
$v \mathbf{r}_W$	m	fiktiver Windkraftangriffspunkt
$v \mathbf{r}_{A,F_i}$	m	Aufbaufester Ortsvektor zum Federangriffspunkt
$v \mathbf{r}_{A,D_i}$	m	Aufbaufester Ortsvektor zum Dämpferangriffspunkt
$T \mathbf{r}_{T,F_i}$	m	Radträgerfester Ortsvektor zum Federangriffspunkt
$T \mathbf{r}_{T,D_i}$	m	Radträgerfester Ortsvektor zum Dämpferangriffspunkt
$T \mathbf{r}_{T,St_i}$	m	Radträgerfester Ortsvektor zum Stabilisatorangriffspunkt
$R \mathbf{r}_{R,A_i}$	m	Radträgerfester Ortsvektor zum Reifenaufstandspunkt
$s$	–	Freiheitsgrad der Zahnstangenverschiebung
$s_{A,B}$	–	Kombinierter Antriebs- und Bremsschlupf
$s_{A,Bmax}$	–	Maximaler Schlupf
$s_a$	–	Absolute Schlupfgröße (kombinierter Schlupf)
$S$		Sensitivität
$t$	s	Zeit
$T_x$	s	Rollgeschwindigkeitsabhängige Zeitkonstanten für die dynamische Längskraft
$T_y$	s	Rollgeschwindigkeitsabhängige Zeitkonstanten für die dynamische Querkraft

Bezeichnung	Einheit	Beschreibung
		sche Querkraft
$T_{\dot{\psi}_{max}}$	s	Ansprechzeit des Maximalwerts der Gierrate
$T_{a_{qmax}}$	s	Ansprechzeit der Querbeschleunigung (Manöver Lenkwinkelsprung)
$T_{\dot{\psi}_{max}}$	s	Ansprechzeit der Gierrate (Manöver Lenkwinkelsprung)
$T_{\varphi_{max}}$	s	Ansprechzeit des Wankwinkels (Manöver Lenkwinkelsprung)
$\mathbf{T}_i$	Nm	Drehmoment
$\mathbf{T}_i^e$	Nm	Eingeprägtes Moment
$\mathbf{T}_i^r$	Nm	Reaktionsmoment
${}^j\mathbf{T}_i$	–	Drehtensor dreht vom System $i$ nach $j$
${}^E\mathbf{T}_V$	–	Transformation vom fahrzeugfesten Koordinatensystem $K_V$ ins Inertialsystem $K_E$
$\mathbf{T}_\omega$	–	Kinematischen Kardangleichung
$U_R$	m	Reifenabrollumfang
$U_{a_{qmax}}$	–	Auf den stationären Wert bezogene Überschwingweite der Querbeschleunigung
$U_{\dot{\psi}_{max}}$	–	Auf den statio. Wert bezogene Überschwingweite der Gierrate
$U_{\varphi_{max}}$	–	Auf den statio. Wert bezogene Überschwingweite des Wankw.
$U_{\dot{\psi}}$	–	Überschwingwert der Gierrate als Verhältnis von Maximal- zu Stationärwert
$\mathbf{u}$	–	Vektor der Eingangsgrößen
$\mathbf{u}_i$	–	Normierter Richtungsvektor (Gelenkdrehachsen)
$\mathbf{u}_{R_i}$	–	Raddrehachse
$\mathbf{u}_{L_i}$	–	Lenkachse
$\mathbf{u}_{S_i}$	–	Querlenkerdrehachse
$v_{ch}$	km/h	Charakteristische Geschwindigkeit
$v_{krit}$	km/h	Kritische Geschwindigkeit
$v_R$	m/s	Geschwindigkeit des Radmittelpunktes
$v_{R_x}$	m/s	Geschwindigkeit des Radmittelpunktes in Richtung der $x$ -Achse von $K_R$
$v_{R_y}$	m/s	Geschwindigkeit des Radmittelpunktes in Richtung der $y$ -Achse von $K_R$
$v_P$	m/s	Geschwindigkeit des Radaufstandspunktes
$v_V$	m/s	Betrag der Geschwindigkeit des Fahrzeugursprungs
$\mathbf{v}_i$	m/s	Geschwindigkeit
$\dot{\mathbf{v}}_i$	m/s <sup>2</sup>	Beschleunigungen
$\bar{\mathbf{v}}_{R_i}$	m/s	Restgeschwindigkeit des Rades
$\bar{\mathbf{v}}_{T_i}$	m/s	Restgeschwindigkeit des Radträgers
${}^V\mathbf{v}_{R_i}$	m/s	Relativgeschwindigkeiten zwischen Rad und Aufbau
$\mathbf{v}_{R_i}$	m/s	Absolutgeschwindigkeiten des Rades
${}^V\mathbf{v}_{T_i}$	m/s	Relativgeschwindigkeiten zwischen Radträger und Aufbau
$\mathbf{v}_{T_i}$	m/s	Absolutgeschwindigkeiten des Radträgers
$v_{V_x}, v_{V_y}, v_{V_z}$	m/s	Koordinaten der Fahrzeug-Translationsgeschwindigkeit im fahrzeugfesten Koordinatensystem
$x_i, y_i, z_i$	–	Koordinatenachsen
$(x, y, z)_i$	–	Koordinatensystem ( $K_i$ )

Bezeichnung	Einheit	Beschreibung
$x_V, y_V, z_V$	m	Koordinaten des Massenmittelpunktes des Fahrzeugaufbaus im Inertialsystem
$\mathbf{x}_p$	–	Modellparameterwerte
$y_{ai}$	–	Systemausgangsgröße
$y_{ai_{ref}}$	–	Systemausgangsgröße der Referenz
$y_{ai_{sim}}$	–	Systemausgangsgröße des Simulationsmodells
$\mathbf{z}$	–	Vektor der verallgemeinerten Geschwindigkeiten

### Griechische Formelzeichen

$\alpha$	rad	Freiheitsgrad der Querlenkerverdrehung
$\alpha_i, i = 1, \dots, 4$	rad	Schräglaufwinkel des Rades
$\alpha_i$	rad/s <sup>2</sup>	Winkelbeschleunigungen
${}_V\alpha_{T_i}$	rad/s <sup>2</sup>	Winkelbeschleunigung des Radträgers relativ zum Fahrzeugsystem
${}_V\alpha_{R_i}$	rad/s <sup>2</sup>	Winkelbeschleunigung des Rades relative zum Fahrzeugsystem
$\alpha_{T_i}$	rad/s <sup>2</sup>	Absolute Winkelbeschleunigung des Radträgers
$\alpha_{R_i}$	rad/s <sup>2</sup>	Absolute Winkelbeschleunigung des Rades
$\bar{\alpha}_{T_i}$	rad/s <sup>2</sup>	Restwinkelbeschleunigung des Radträgers
$\bar{\alpha}_{R_i}$	rad/s <sup>2</sup>	Restwinkelbeschleunigung des Rades
$\beta_V$	rad	Schwimmwinkel im Fahrzeugursprung
$\beta_S$	rad	Schräglenkervektoranteil $x/y$
$\boldsymbol{\beta}$	–	Vektor der Gelenkkordinaten
$\gamma_{S_v}$	rad	Schräglenkervektoranteil $z$
$\gamma_R$	rad	Reifensturzwinkel
$\delta_L$	rad	Lenkradwinkel (Lenkwinkel)
$\delta_i$	rad	Radlenkwinkel
$\delta_A$	rad	Ackermannwinkel
$\delta_{L_0}$	rad	Lenkradwinkelwert bei Lenkwinkelsprung zum Zeitpunkt $t_0$
$\delta_{L_{stat}}$	rad	Stationärer Lenkradwinkel
$\varepsilon_{K_j}$	%	Gütefunktionswert der $j$ -ten Gütefunktion
$\varepsilon_{K_{j,max}}$	%	Maximale relative Abweichung der $j$ -ten Gütefunktion
$\varepsilon_{n_j}$	–	Normierter Mittelwert der relativen Abweichung
$\varepsilon_j$	–	Mittelwert der relativen Abweichung
$\varepsilon_{K_{i,max,x}}$	–	Relativer Abstand zwischen den Amplitudenmaximalwerten
$\varepsilon_{K_{i,max,y}}$	–	Relative Abweichungen der Amplitudenmaximalwerte
$\theta_{R_{yy}}$	kg·m <sup>2</sup>	Reifentragheitsmoment um $y$ -Achse des Rades
$\boldsymbol{\theta}_i, \theta_i$	kg·m <sup>2</sup>	Trägheitstensor, Trägheitsmoment
$\boldsymbol{\theta}_T$ = $[\theta_{T_{xx}}, \theta_{T_{yy}}, \theta_{T_{zz}}]$	kg·m <sup>2</sup>	Trägheitstensor im körperfesten Koordinatensystem, bezogen auf den Radträgerschwerpunkt
$\boldsymbol{\theta}_R$ = $[\theta_{R_{xx}}, \theta_{R_{yy}}, \theta_{R_{zz}}]$	kg·m <sup>2</sup>	Trägheitstensor im körperfesten Koordinatensystem, bezogen auf den Radschwerpunkt
$\boldsymbol{\theta}_V$ = $[\theta_{V_{xx}}, \theta_{V_{yy}}, \theta_{V_{zz}}]$	kg·m <sup>2</sup>	Trägheitstensor im körperfesten Koordinatensystem, bezogen auf den Fahrzeugschwerpunkt
$\kappa$	1/m	Kurvenkrümmung

Bezeichnung	Einheit	Beschreibung
$\lambda_{v,h}$	—	Verhältnis der Abstände $l_v/l_h$
$\mu_{max}$	—	Maximaler Reibwert
$\mu_{max,x}$	—	Maximaler Reibwert in Querrichtung
$\mu_{max,y}$	—	Maximaler Reibwert in Längsrichtung
$\mu_G$	—	Gleitreibwert
$\mu_{R_x}$	—	Formparameter der Reifenlängskraftkurve (Magic-Formula Modell)
$\mu_{R_y}$	—	Formparameter der Reifenquerkraftkurve (Magic-Formula Modell)
$\mu_S$	—	Straßenreibwert
$\rho_{R_i}$	rad	Drehwinkel der Räder um ihre radträgerfeste Drehachse $\mathbf{u}_{R_i}$
$\dot{\rho}_{R_i}$	rad/s	Drehgeschwindigkeiten der Räder um ihre radträgerfeste Drehachse $\mathbf{u}_{R_i}$
$\sigma$	-	Standardabweichung
$\sigma_{L_v}$	rad	Lenkachsenvektoranteil z (entspricht dem Spreizungswinkel)
$\sigma_{R_x}$	m	Einlauflänge in Reifenlängsrichtung
$\sigma_{R_y}$	m	Einlauflänge in Reifenquerrichtung
$\tau$	N/m <sup>2</sup>	Tangentialspannung im Reifenlatsch
$\tau_L$	rad	Lenkachsenvektoranteil x/y (entspricht dem Nachlaufwinkel)
$\varphi_i$	rad	Schwenkwinkel des Querlenkers relativ zum Fahrzeugaufbau um die Drehachse $\mathbf{u}_{S_i}$
$\psi_R$	rad	Reifen Spurwinkel
$\dot{\varphi}_i$	rad/s	Schwenkwinkelgeschwindigkeit des Querlenkers relativ zum Fahrzeugaufbau um die Drehachse $\mathbf{u}_{S_i}$
$\dot{\psi}_V$	rad/s	Gierrate (Gierwinkelgeschwindigkeit) des Fahrzeugaufbaus relativ zum Inertialsystem $K_E$
$\dot{\psi}_{stat}$	rad/s	Stationäre Gierrate
$\dot{\psi}_{max}$	rad/s	Maximalwert der Gierrate
$\psi_a$	rad	Wirkrichtung der aus dem KAMM'schen Kreis resultierenden Reifengesamtkraft
$\psi_V, \theta_V, \varphi_V$	rad	Kardanwinkel zur Beschreibung des Fahrzeugaufbaus relativ zum Inertialsystem
$\omega_{V_x}, \omega_{V_y}, \omega_{V_z}$	rad/s	Koordinaten der Winkelgeschwindigkeiten im fahrzeugfesten Koordinatensystem
$\boldsymbol{\omega}_i$	rad/s	Winkelgeschwindigkeit
$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$	rad/s <sup>2</sup>	Winkelbeschleunigungen
$\boldsymbol{\omega}_V$	rad/s	Winkelgeschwindigkeit des Aufbaus
${}^V\boldsymbol{\omega}_{T_i}$	rad/s	Winkelgeschwindigkeit des Radträgers relativ zum Fahrzeugsys.
${}^V\boldsymbol{\omega}_{R_i}$	rad/s	Winkelgeschwindigkeit des Rades relativ zum Fahrzeugsystem
$\boldsymbol{\omega}_{T_i}$	rad/s	Absolute Winkelgeschwindigkeit des Radträgers
$\boldsymbol{\omega}_{R_i}$	rad/s	Absolute Winkelgeschwindigkeit des Rades
$\bar{\boldsymbol{\omega}}_{T_i}$	rad/s	Restwinkelgeschwindigkeit des Radträgers
$\bar{\boldsymbol{\omega}}_{R_i}$	rad/s	Restwinkelgeschwindigkeit des Rades

## Trigonometrische Funktionen

Aus Platzgründen wird häufig z.B. statt „ $\cos \varphi$ “ die Kurzform „ $c\varphi$ “ und statt „ $\sin \varphi$ “ „ $s\varphi$ “ verwendet.

## Abkürzungen

ABC	Active-Body-Control
ABS	Antiblockiersystem
ACC	Adaptive-Cruise-Control
CAD	Computer-Aided-Design
DM	Durchschnittsmodell
EA	Evolutionäre Algorithmen
EG	Eigenlenkgradient
ESP (FDR)	Elektronisches Stabilitätsprogramm (Fahrodynamikregelung)
FEM	Finite-Elemente-Modell
FG	Manöver Frequenzgang
GB	Gigabyte
GHz	Gigahertz
GF	Giergeschwindigkeitsfrequenzgang (Gierfrequenz)
GU	Giergeschwindigkeitsübergangsverhalten (Gierübergang)
$GU_{\text{norm}}$	Normierter Gierübergang ( $GU_{\text{norm}} = GU / GU_{\text{stat}}$ )
$GU_{\text{stat}}$	Stationärer Gierübergangsendwert
GV	Giergeschwindigkeitsverstärkung (Gierverstärkung)
HIL	Hardware-in-the-Loop
KFZ	Kraftfahrzeug
LKA	Lane-Keeping-Assistance
LS	Manöver Lenkwinkelsprung
MF	Magic Formula
MKM	Mehrkörpermodell
MKS	Mehrkörpersystem
MRA	Mittelwert der relativen Abweichung
NLESM	Nichtlineares Einspurmodell
NMRA	Normierter Mittelwert der relativen Abweichung
OEM	Original Equipment Manufacturer: Erstausrüster, in der Automobilindustrie Fahrzeughersteller
QF	Querbeschleunigungsfrequenzgang (Querfrequenz)
QU	Querbeschleunigungsübergangsverhalten (Querübergang)
$QU_{\text{norm}}$	Normierter Querübergang ( $QU_{\text{norm}} = QU / QU_{\text{stat}}$ )
$QU_{\text{stat}}$	Stationärer Querübergangsendwert
SA	Sensitivitätsanalyse
SG	Schwimmwinkelgradient
SK	Manöver stationäre Kreisfahrt
WF	Wankwinkelfrequenzgang (Wankfrequenz)
WG	Wankwinkelgradient (Wankgradient)
WU	Wankwinkelübergangsverhalten (Wankübergang)
$WU_{\text{norm}}$	Normierter Wankübergang ( $WU_{\text{norm}} = WU / WU_{\text{stat}}$ )
$WU_{\text{stat}}$	Stationärer Wankübergangsendwert
ZWSPM	Zweispurmodell



# 1 Einleitung

Durch die Verflechtung interdisziplinärer (etwa mechatronischer) Systeme und das dadurch entstehende Zusammenwirken der unterschiedlichen Einzelsysteme Mechanik, Elektronik und Informatik werden immer komplexere Funktionsvarianten erreicht. Im Entwicklungsprozess solcher Systeme wird die Simulation eingesetzt. Der Einsatz einer virtuellen Entwurfsmethodik ist erforderlich, um schnell auf die immer kürzeren Produktlebenszyklen reagieren zu können. So verringern Simulationen den Aufwand realer Versuche und die damit verbundenen Messungen, wodurch Entwicklungszeiten und -kosten eingespart werden. Die simulationsbasierte Entwicklungsmethodik ist somit aus dem Produktentwicklungsprozess nicht mehr wegzudenken und stellt das Fundament heutiger technischer Innovationen dar.

Für den Entwicklungsprozess von Kraftfahrzeugen und deren Komponenten sowie von Fahrsicherheits-, Fahrkomfort- und Fahrerassistenzsystemen ist die Fahrdynamiksimulation essentiell. Die Basis der Fahrdynamiksimulation bilden Fahrzeugmodelle, die das Fahrzeug-Übertragungsverhalten und somit das Gesamtfahrzeugverhalten beschreiben, aber auch einzelne Komponenten nachbilden. Dadurch lassen sich unter anderem virtuelle Fahrmanöver unter definierten Randbedingungen beliebig oft und reproduzierbar simulieren. Kritische Fahrmanöver können durch gefahrlose Simulation ersetzt werden. Die Simulation bietet Fahrzeugherstellern und deren Zulieferern somit ein geeignetes Mittel, um auf den durch ständige Innovationen bedingten gestiegenen Marktdruck kostengünstig zu reagieren.

Die notwendige Komplexität eines Fahrzeugmodells ist von der entsprechenden Simulations- bzw. Entwicklungsaufgabe abhängig. Die Fahrdynamik unterteilt sich in Längs-, Quer- und Vertikaldynamik. Oft sind Einfachmodelle ausreichend, um einen Teil der Fahrdynamik abzubilden und die grundsätzlichen Wirkungsprinzipien am Fahrzeug zu beschreiben. Einfachmodelle dienen unter anderem als Grundlage für den Entwurf und als Basis für den Funktionstest von Reglern. Jedoch sind solche Modelle nicht ausreichend um beispielsweise die Fahrdynamikentwicklung von zukünftigen Fahrzeugen zu unterstützen, bei denen die Radkinematik ausschlaggebend ist. Entsprechend komplexe Modelle sind notwendig, um realitätsnahe Simulationsergebnisse zu liefern. Solche Modelle unterstützen zum Beispiel die Entwicklung von Fahrkomfortsystemen wie aktiven Dämpfern, da sie die Lastwechselreaktion detailgetreu wiedergeben. Auch bei der Auslegung von Fahrdynamikregelsystemen, die erst im fahrdynamischen Grenzbereich eingreifen, werden komplexe Modelle benötigt. Bei diesen Simulationen überlagern sich die Längs-, Quer- und Vertikaldynamiken des Fahrzeugs. Komplexe Fahrzeugmodelle sind aufgrund ihrer detaillierten Modellierung bei sehr unterschiedlichen Fragestellungen einsetzbar und müssen im Idealfall nicht bei jeder Anwendung neu validiert werden.

Allerdings nimmt der Komplexitätsgrad zu, je genauer das Modell ist. Dies kann zu einer schwierigen Modellhandhabung führen. Ebenso steigen die Anzahl der Modellparameter und die Simulationszeit (s. Abb. 1.1). Für Fragestellungen, bei denen es auf die Simulationszeit ankommt (z. B. bei Echtzeitanwendungen wie Fahrtrainern), müssen vereinfachte Modelle verwendet werden, sodass ein Kompromiss zwischen Komplexität und Simulationszeit gefunden werden muss.

Ein weiterer Aspekt für eine erfolgreiche Umsetzung solcher Modelle ist ihre Validierung. Unabhängig vom Komplexitätsgrad der Fahrzeugmodelle kann die Eigenschaftsabsicherung mittels der Identifikation der Modellparameter mit einer nachgeschalteten Parameteroptimierung gewährleistet werden. Die dafür notwendigen Referenzdaten, die dem Fahrverhalten des Referenzfahrzeugs entsprechen, werden aus Fahrdynamikmessungen gewonnen oder aus validierten Modellen abgeleitet. Die Optimierung hilft dabei, das Übertragungsverhalten des Simulationsmodells durch Parameteridentifikation bestmöglich an das Verhalten des Referenzmodells anzugleichen. Dazu werden objektive, fahrdynamische Übertragungsfunktionen, die das Fahrverhalten im Zeit- und Frequenzbereich charakterisieren, verwendet.

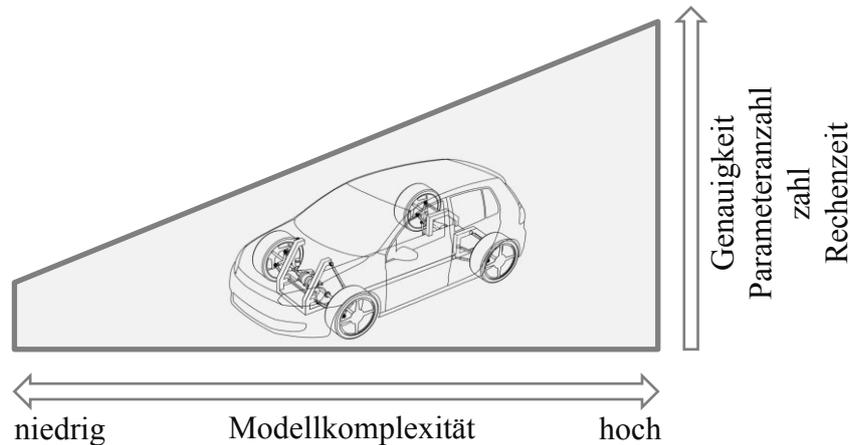


Abb. 1.1: Auswirkung der Modellkomplexität

Zur Optimierung der Fahrdynamik zukünftiger Fahrzeuge und zur Entwicklung von Fahrerassistenzsystemen werden aktuell sowohl mathematische Simulationsmodelle als auch Fahrsimulatoren unter Einbeziehung des menschlichen Fahrers verwendet (Klaus 2000).

## 1.1 Literaturübersicht

Die für diese Arbeit relevante Literatur lässt sich entsprechend der Themenschwerpunkte in die Bereiche

- Modellentwicklung,
- Mehrkörpersimulation und
- Systemidentifikation

unterteilen.

Zunächst werden die wichtigsten Fahrzeugmodelltypen benannt, die sich aufgrund ihrer Komplexität unterscheiden.

### ***Fahrdynamikmodelle***

Aus der Sicht der Fahrzeugtechnik unterteilen sich Fahrdynamikmodelle in Einfachmodelle (s. Abb. 1.2) wie beispielsweise das einfache Triebstrangmodell, das lineare Einspurmodell (Riekert und Schunck 1940) und das Viertelfahrzeug, nichtlineare Einspur- und Zweispurmodelle (s. Abb. 1.3). Eine weiterentwickelte Form von Zweispurmodellen sind die Mehrkörpermodelle (MKM) (s. Abb. 1.4), deren Modellierung näher an der phy-

sischen Realität des Realfahrzeugs ist. Das Hauptmerkmal eines Fahrzeugmodells sind seine Freiheitsgrade, die dessen Komplexität und den Berechnungsaufwand bestimmen. Die Modellfreiheitsgrade sind ausschlaggebend für die zu simulierende Fahrdynamik (Längs-, Quer- und Vertikaldynamik).

Das Einspurmodell (ESM) (Abb. 1.2 b) wird vom Zweispurmodell (Abb. 1.3) abgeleitet, indem die Räder einer Achse jeweils zusammengefasst und alle Massen im Schwerpunkt konzentriert werden. Das Modell berechnet durch kinematische und kinetische Beziehungen den Fahrzeugbahnradius und die Fahrzeugausrichtung relativ zur Schwerpunktgeschwindigkeit des Fahrzeugs ausgehend vom Lenkwinkel. Beim linearen ESM werden die Gleichungen der Fahrzeugbewegung linearisiert und liefern für kleine Winkel ausreichend genaue Werte. Es wird ein einfaches Kraftgesetz zur Reifenkraftberechnung verwendet, wodurch das Modell bis zu einer Zentripetalbeschleunigung von  $a_q < 4 \text{ m/s}^2$  realitätsnahe Werte liefert. Bis zu diesem Wert wird der Fahrzustand als linear betrachtet (Zomotor 1987). Wird ein nichtlineares Kraftgesetz zur Reifenkraftberechnung verwendet, kann die Modellgültigkeit auch bei höheren Zentripetalbeschleunigungen gewährleistet werden (z. B. beim nichtlinearen ESM). Das ESM besitzt im Allgemeinen mindestens die Freiheitsgrade des Gierens und Schwimmens bzw. der Querbewegung. In vielen Anwendungsfällen wird zudem das Wanken als zusätzlicher Freiheitsgrad im Modell ergänzt. Werden die Radeigendrehungen und der Lenkfreiheitsgrad berücksichtigt, erhöht sich die Anzahl der Freiheitsgrade entsprechend.

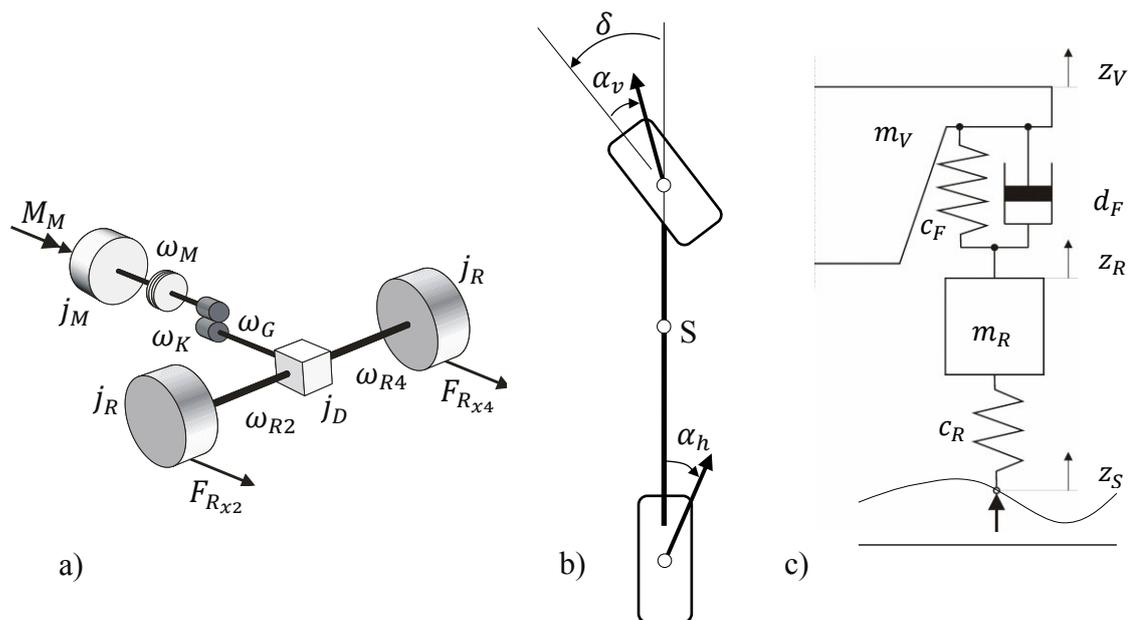


Abb. 1.2: Beispiele von Einfachmodellen: a) einfaches Triebstrangmodell, b) lineares ESM, c) Viertelfahrzeug

Das Zweispurmodell (s. Abb. 1.3) hat mindestens fünf Massen (der Aufbau sowie vier Radträger mit Rädern). Der gefederte Fahrzeugaufbau hat sechs Starrkörperfreiheitsgrade. Jedes Rad besitzt einen Freiheitsgrad für die Hubbewegung. Um das Antreiben der Räder zu realisieren, wird der Drehfreiheitsgrad eines Rades in Kombination mit einem nichtlinearen Reifenmodell und einem transienten Kraftaufbau benötigt (s. Kapitel. 2). Auch die Lenkbewegung muss entsprechend berücksichtigt werden. Das Zweispurmodell kann durch eine vereinfachte Radaufhängungskinematik erweitert werden. Im Gegensatz zum ESM können durch das Zweispurmodell fahrdynamisch bedingte Achs- und Radlastver-

änderungen (bedingt durch Längs- und Querbewegungen) berechnet und somit realistischere Effekte des Über- und Untersteuerns abgebildet werden.

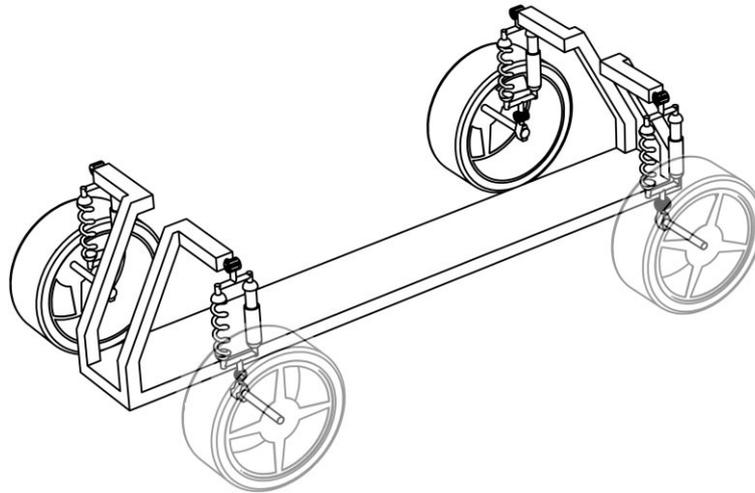


Abb. 1.3: Beispiel eines Zweispurmodells (Fünf-Massen-Modell) mit einfacher Radeinfederung

Bei MKM (s. Abb. 1.4) wird das Zweispurmodell durch eine detaillierte Achskinematik erweitert, wodurch ein räumlicher Mechanismus mit Lenker und Lager modelliert wird. Dies ermöglicht eine realitätsnahe Berechnung der Effekte von Achs- und Radlastverlagerungen und der dadurch resultierenden Aufbaubewegung (Negele 2008). Auch die Variation und Abstimmung der Fahrwerksparameter (Stabilisatorkennwerte, Aufbaufeder- und Aufbaudämpferkennwerte) sowie die damit bedingte Veränderung der Aufbaueigenschaften sind mit diesem Modell möglich.

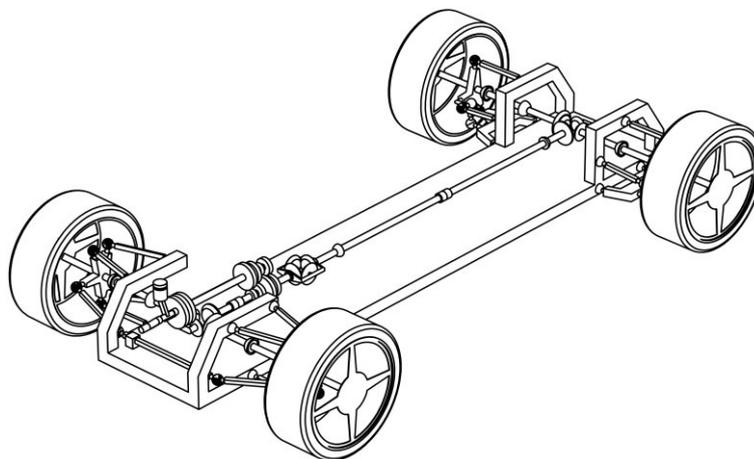


Abb. 1.4: Beispiel eines Mehrkörpermodells mit räumlicher Radaufhängungskinematik und Antriebsstrang

Eine weitere Steigerung hin zu noch genaueren Modellen ist die Kopplung von MKM mit Finiten-Elementen-Modellen (FEM). Mit dieser Modellierung ist es möglich, die Elastizitäten im Fahrzeugaufbau (selbsttragende Karosserie) und in den Radaufhängungen nachzubilden und die dadurch verursachten fahrdynamischen Veränderungen wiederzugeben.

Tabelle 1.1 gibt Aufschluss über die Freiheitsgrade und die Bewegungsart der unterschiedlichen Modelle.

Tabelle 1.1: Übersicht der Fahrzeugmodelle

	Modell	Freiheitsgrade	Bewegungsart				
Einfachmodelle	Viertelfahrzeug	2					
	lineares ESM	2					
	einfaches Triebstrangmodell	1-2					
Einspurmodelle	nichtlineares ESM	3-6	Ebene Translation (Fahrverhalten), Bahrradius, Gieren	Längsdynamik (Antreiben und Bremsen)	Wank- und Nickbewegungen	Vertikaldynamik (Schwingungen)	Komponentenbewegung
	nl. ESM mit Wankmodell	4-7					
	nl. ESM mit Nickmodell	4-7					
Zweispurmodelle	Fünf-Massen-Modell	14-15					
	Schräglenker-Modell	14-20					
MKM	mit räumlicher Radaufhängung	$\geq 15$					
FEM		$\geq 20$					

### Modellentwicklung

In den 40er und 50er Jahren des 20. Jahrhunderts wurde ein grundlegendes Verständnis für die Fahrmechanik und darauf bezogene erste theoretische Untersuchungen entwickelt (Rickert und Schunk (1940), Olley (1946), Miliken und Whitcomb (1956), Segel (1956)). Im Fokus der Betrachtung standen der Aufbau der Reifenkraft durch Lenk- und Bremsingriff und der dadurch entstehende Einfluss auf Fahrdynamik und Fahrstabilität (Segel 1990). Das erste Fahrzeugmodell, bei dem das Fahrzeugverhalten auf die grundlegenden Fahreigenschaften reduziert wurde, erstellten Rickert und Schunck (1940). Dieses Modell besitzt eine geringe Anzahl von Parametern und zwei Freiheitsgrade: Gieren und Schwimmen. In den folgenden Jahren wurden vermehrt Modelle entwickelt, wobei die Modellgrundgleichungen im Wesentlichen identisch blieben. Von Milliken und Whitcomb (1965) und Segel (1965) wurde ein Fahrzeugmodell für Stabilitätsuntersuchungen mit den drei Freiheitsgraden Gieren, Schwimmen und Wanken erstellt. Eine Zusammenfassung theoretischer Modellierungsansätze für die Bereiche Längs-, Vertikal- und Querdynamik erschien 1972 von Mitschke im Buch „Dynamik der Kraftfahrzeuge“ (Mitschke 2004).

Von den 60ern bis Anfang der 80er Jahre führte die Weiterentwicklung der analogen und digitalen Rechner dazu, dass eine ausreichende Rechenleistung für die Berechnung und Simulation von komplexeren Modellen bereitstand. Dies führte zu einer Reihe von Entwicklungen detaillierter Fahrzeugmodelle (Zweispurmodelle) und Fahrdynamiksimulationsprogrammen. Die dadurch entstandenen Fahrzeugmodelle waren komplexer und hatten typischerweise zehn bis 20 Modellfreiheitsgrade, siehe McHenry (1971), Jindra (1976) und Sayers (1996). In McHenry (1971) wird ein Fahrzeugmodell zur Verwendung der simulativen Unfallrekonstruktion, das McHenry Modell, beschrieben. Das Modell berücksichtigt ein nichtlineares Fahrverhalten und eine detaillierte Radführungs kinematik.

Durch die Einführung nichtlinearer Reifenmodelle, die auch das Einlaufverhalten des Reifenlatsches berücksichtigen, wurde die Abbildung transienter Fahrmanöver gewährleistet, siehe Dugoff (1969) und Pacejka (1973).

In Speckhart (1973) wird ein Fahrzeugmodell mit 14 Freiheitsgraden vorgestellt, das vier Räder hat und Effekte der Radkinematik berücksichtigt. Von Sorgatz (1973) wird ein Fahrzeugmodell mit 23 Freiheitsgraden und fünf Massen entwickelt, das die Radkinematik berücksichtigt und dadurch ein breites Spektrum der Fahrdynamik wiedergibt.

Die Modellgleichungen in den 70er und 80er Jahren wurden größtenteils noch manuell hergeleitet, in speziellen Programmiersprachen kodiert und zum Beispiel auf Lochkarten gestanzt, um sie mit den damaligen Rechenmaschinen zu berechnen. Detaillierte Modelle benötigten teilweise Jahre der Entwicklung und es musste viel Zeit in die Validierung investiert werden (Sayers 1996).

Mit dem Beginn der 80er Jahre wurden verstärkt Mehrkörpermodellierungsprogramme entwickelt, die es dem Benutzer ermöglichten, Systeme zu modellieren, ohne dabei die Modellgleichungen explizit aufstellen zu müssen. Die Modelle wurden geometrisch auf Basis einzelner Komponenten erstellt, siehe Orlandea (1977) und Antoun (1986).

### ***Mehrkörpersimulation***

Von Wittenburg (1977), Schiehlen (1986), Nikravesch (1988), Hiller (1993, 1996) und Woernle (2011) werden wesentliche Grundlagen der Beschreibung von Mehrkörpersystemen zusammengestellt.

Für die Simulation der Fahrdynamik mit einem Mehrkörpermodell (MKM) stehen eine Vielzahl kommerzieller Programme zur Auswahl. Eine Übersicht der Programme findet sich beispielsweise in Schielen (1990), Kortüm (1991), Lang (1997), Isermann (2006) und Schramm (2010).

Die Modellbildung von Mehrkörper-Fahrzeugmodellen wird nur in wenigen Arbeiten ausführlich beschrieben. In Popp (1993), Rill (1994), Kortüm (1994) und Schramm (2010) werden z. B. die Modellbildung von Personenfahrzeugen als MKM und ihre Beschreibungsformalismen behandelt. Den charakteristischen Aufbau eines MKM mit einer komplexen Radführungskinetik beschreiben Schmidt (1989), Schnelle (1990) und Frik (1994). Eine zusammenfassende Darstellung und eine Übersicht der Methoden aus Schnelle (1990) und Frik (1994) sind in Schramm (2010) gegeben.

Die in dieser Arbeit verwendeten Verfahren zur Mehrkörpermodellierung basieren auf Hiller (1986, 1989), Woernle (1988), Schnell (1990) und Schramm (2010). In Kapitel 3 dieser Arbeit wird zunächst die Kinematik von MKM mit kinematischen Schleifen in systematischer Form betrachtet und anschließend mithilfe der Methode des charakteristischen Gelenkpaars gelöst (Woernle 1988). Die Bewegungsgleichungen werden in Minimalkoordinaten mithilfe einer günstigen Formulierung der Kinematik aus dem Prinzip von D'ALEMBERT (Schramm 2010) abgeleitet. Die Radaufhängungskinetik kann hier in vielen Fällen explizit gelöst werden.

### ***Systemidentifikation***

Die Systemidentifikation von Fahrzeugmodellen, wie dem klassischen ESM und dem ESM mit Erweiterungen, wird vielfach als Forschungsgegenstand aufgegriffen. In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die Identifikation des Systemverhaltens von Fahr-

zeugmodellen gegeben. Zunächst wird auf Arbeiten verwiesen, die sich mit der Parameteridentifikation der Fahreigenschaften des Einspurmodells beschäftigen. Daraufhin wird eine Übersicht zur Identifikation von Zweispur- und Mehrkörperfahrzeugmodellen gegeben.

Reichelt (1987) vergleicht drei unterschiedliche Identifikationsmethoden und erläutert Auswertungsmethoden von fahrdynamischen Messungen. Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate minimiert eine Gütefunktion, die aus der Gierübertragungsfunktion im Zeit- und Frequenzbereich berechnet wird.

Ein Modell mit nichtlinearen Parametern identifiziert Wöhler (1994) mit einer auf der Evolutionsstrategie beruhenden Optimierungsmethode. Dabei wird der nichtlineare Zusammenhang zwischen Schräglaufsteifigkeit und -winkel in Form von abschnittsweise definierten Kennlinien identifiziert. Als Referenz dient ein komplexes Zweispurmodell.

Alloum (1997) bestimmt die Modellparameter mithilfe nichtlinearer Optimierung, wobei die Gütefunktion, die sich aus den Abweichungen zu den gemessenen Längs- und Giergeschwindigkeiten berechnet, minimiert wird.

Ein ESM mit einem empirischen Reifenmodell wird in Bolzern (1999) optimiert und die nichtlinearen Seitenkräfte an Fahrwerk und Reifen aus Daten experimenteller Fahrttests (Lenkwinkelsprung) bestimmt. Daraus werden die Parameter und die Reifeneinlauflängen identifiziert.

Miljenkov (2002) entwickelt ein Modell zur Bewertung des Fahrverhaltens von Kraftfahrzeugen. Um einen Wankfreiheitsgrad erweitert, gibt das Modell die Längs-, Quer- und ansatzweise die Vertikaldynamik wieder. Durch Anwendung verschiedener Fahrmanöver auf hierarchische Weise wurden nach einer Multikriterien-Methode sukzessiv einzelne Parameter optimiert.

Die Übersicht der nachfolgenden Arbeiten beschäftigt sich mit der Optimierung der Fahreigenschaften von räumlichen Zweispurmodellen. Die Modelle besitzen sieben oder mehr Freiheitsgrade.

Grundsätzlich werden bei der Optimierung von Zweispurmodellen zwei Bereiche unterschieden: die Optimierung von MKM auf Komponentenebene (z. B. von Radaufhängungen und Antriebssträngen) und die Optimierung von Zweispurmodellen im Sinne einer generellen Betrachtungsweise der Fahrdynamik, ohne dabei detaillierte Komponenten abzubilden. Solche Zweispurmodelle werden mit einer vereinfachten Radkinematik modelliert und geben die Spur- und Sturzkurven in einem bestimmten Arbeitspunkt wieder. Die generelle Wiedergabe des Fahrverhaltens kann durch die Optimierung von Parametern, wie beispielsweise der des Reifenmodells oder der Feder- und Dämpferkennwerte, gewährleistet werden. Die Zweispurmodelle zeichnen sich im Vergleich zu MKM durch ein breiteres Anwendungsspektrum aus, da sie flexibler einsetzbar sind.

In Zamow (1994) wird ein Beitrag zur Identifizierung unbekannter Modellparameter geleistet. Die Optimierung erfolgt durch einen hybriden Algorithmus, der die Vorteile des evolutionären mit denen eines gradientebasierten Algorithmus kombiniert (s. Kapitel. 6). Die Gesamtgütefunktion berechnet sich aus Schwimmwinkel, Gierrate, Querbeschleunigung und Wankwinkel, die jeweils aus der stationären Kreisfahrt, dem Lenkwinkelsprung und dem Sinuswedeltest gewonnen werden. Die zu optimierenden Parameter umfassen die Fahrzeugmasse, das Trägheitsmoment, die Federsteifigkeit der Aufbaufedern sowie Stabilisatoren und die Reifenmodellparameter.

Wimmer (1997) optimiert ein MKM mit einer einfachen kinematischen Radaufhängung. In einem ersten Schritt erfolgt die Optimierung der Achsvorauslegung, indem die Abweichung zwischen den simulierten Sturz- und Spurkurven und Messungen minimiert wird. Danach wird das Gesamtfahrverhalten anhand von Schwellenüberfahrten, Kreisfahrten und Lenkwinkelsprung identifiziert. Eine Multikriterien-Optimierung minimiert die Gütefunktion.

Halfmann (2003) bildet ein nichtlineares dynamisches Vierradmodell der Radaufhängung und Karosserie ab. Das Modell eignet sich zur Online-Schätzung von Parametern wie Fahrzeugmasse und Rollreibungskoeffizient.

Roscher (2005) beschäftigt sich mit dem Modellabgleich eines in SIMPACK<sup>1</sup> modellierten MKM einer Hinterachse. Die Gütefunktion wurde aus den Eigenfrequenzen und den Schwingformen bzw. Übertragungsfrequenzgängen berechnet. Durch die Sensitivitätsanalyse wurde die zu optimierende Parameteranzahl reduziert.

In Heer (2008) wird die Sensitivitätsanalyse und Optimierung eines Mehrkörperfahrzeugs behandelt, das in ADAMS<sup>2</sup> erstellt wurde. Die Gütefunktion errechnet sich aus der Abweichung der KFZ-Komponentenbeschleunigung. Durch ADAMS-eigene elastische Strukturen im MKM soll die Abweichung von Messungen minimiert werden.

Die Systemidentifikation von Zweispurmodellen und MKM mit einer höheren Anzahl von Freiheitsgraden ist noch immer unzureichend untersucht. Oft wurden Fahrzeugmodelle, die mit kommerziellen Fahrdynamiksimulationsprogrammen erstellt wurden, durch Optimierung an Messergebnisse angeglichen. Durch Variation von Masse, Trägheitstensor, Feder-, Dämpfer- und Stabilisatorkennwert oder Reifenparameter soll die Abweichung von realen Messungen abnehmen, siehe Kinjawadekar (2009). Die Optimierung von Radaufhängungsanlenkpunkten von MKM ist ebenfalls Bestandteil von Untersuchungen, siehe Du (2006).

## 1.2 Ziel und Inhalt der Arbeit

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einen ganzheitlichen Prozess zu beschreiben, der sich mit der Erstellung von mathematischen Fahrzeugmodellen, deren Validierung und der Bewertung von Modellen unterschiedlicher Komplexität beschäftigt. Dabei werden Aufschlüsse zum nötigen Komplexitätsgrad der Modelle gegeben. Mithilfe objektiver, charakteristischer Fahrdynamikgrößen wird qualitativ und quantitativ der Unterschied zwischen Modellen unterschiedlicher Komplexität aufgezeigt und ein Vergleich zu realen Referenzfahrdaten gegeben.

In der vorliegenden Arbeit werden exemplarisch zwei Fahrzeugmodelle unterschiedlicher Komplexität erstellt: ein generisches Fahrzeugmodell mit einfacher Radaufhängung und ein spezielles Fahrzeugmodell mit komplexer Radaufhängung. Die Modelle basieren auf der Grundlage eines Modellierungsansatzes zur Erstellung von MKM.

Das generische Fahrzeugmodell stellt durch seine einfache Parametrierung ein vielseitig einsetzbares Modell dar. Die Eigenschaftsabsicherung des generischen Modells wird durch eine Parameteridentifikation (Sensitivitätsanalyse) mit einer anschließenden Parameterwertefindung (Parameteroptimierung) gewährleistet. Die dafür notwendigen Referenzdaten ergeben sich aus Fahrdynamikmessungen. Mithilfe der Optimierung kommt das

---

<sup>1</sup> Generelles kommerzielles Mehrkörper-Simulationsprogramm der Firma SIMPACK AG

<sup>2</sup> Generelles kommerzielles Mehrkörper-Simulationsprogramm der Firma MSC Software

generische Modell durch Parameterwertefindung so nah wie möglich an das Referenzmodell heran. Dazu werden als Gütefunktion fahrdynamische Übertragungsfunktionen wie z. B. Eigenlenkgradient, Gierverstärkung und Wankgradient im Zeit- und Frequenzbereich betrachtet.

Im Unterschied zum generischen bildet das spezielle Fahrzeugmodell eine bestimmte Fahrzeugklasse sehr genau ab. Die einzelnen Subsysteme werden dabei detailliert modelliert (bauteilorientiert). Die Radkinematik wird im vollen Umfang nichtlinear dargestellt und kann durch die modulare Modellstruktur ausgetauscht werden, um eine größere Auswahl an spezifischen Fahrzeugtypen wiederzugeben. Das Fahrzeug ist rechenintensiver, komplexer im Aufbau und erfordert Daten über die jeweilige Radaufhängung. Im Verlauf der Arbeit wird quantitativ und qualitativ der fahrdynamische Unterschied zwischen beiden Modellen erfasst.

Abschließend wird mithilfe des Einspurmodells, des erweiterten Einspurmodells, des Zweispurmodells mit vergleichsweise einfacher Radaufhängung und des generischen Zweispurmodells der Einfluss der Modellkomplexität auf das Fahrempfinden von Probanden untersucht. Dies geschieht in einem Praxistest an einem bewegten Fahrsimulator. Die vier Modelle werden mithilfe der in dieser Arbeit erarbeiteten Modellierungs- und Validierungsmethoden erstellt. Ziel ist, die Auswirkung der Modellkomplexität auf die subjektive und objektive Immersionsqualität eines bewegten Fahrsimulators zu untersuchen.

Die Arbeit gliedert sich in sieben Hauptkapitel. Kapitel 2 erläutert die Grundlagen der Fahrzeugdynamik. Zudem wird das Fahrverhalten (Übertragungsverhalten) mit objektiven, charakteristischen Fahrdynamik-Bewertungsgrößen im Zeit- und Frequenzbereich quantifiziert. Kapitel 3 beschäftigt sich mit Modellierungsmethoden zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen des generischen und speziellen Mehrkörper-Fahrzeugmodells und beschreibt den Lösungsvorgang der Kinematik von räumlichen Radaufhängungen. Die Erstellung von fahrdynamischen Referenzdaten eines Durchschnittsfahrzeugs einer Fahrzeugklasse mithilfe realer Fahrversuche behandelt Kapitel 4. Die Systemidentifikation am Beispiel des generischen Fahrzeugmodells wird in Kapitel 5 ausgearbeitet. Kapitel 6 behandelt die Parameterwertefindung von Modellparametern mit dem Ziel, das Fahrverhalten des generischen Fahrzeugmodells an das des repräsentativen Referenzfahrzeugs anzugleichen. Abschließend werden in Kapitel 7 zunächst die Modellkomplexitätsgrade bewertet. Zudem wird in diesem Kapitel durch eine Fahrsimulatorstudie an einem bewegten Fahrsimulator der Einfluss von Fahrzeugmodellen unterschiedlicher Komplexität auf den Immersionsgrad der Probanden untersucht. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf zukünftige Arbeiten ab.



## 2 Grundlagen der Fahrzeugdynamik

Die Fahrzeugdynamik befasst sich mit der Bewegung eines Fahrzeugs unter Einwirkung von Momenten und Kräften, wie zum Beispiel Antriebsmomente und Reifenkräfte. Das Fahrverhalten kann mittels einer Systemanalyse mit genormten Testverfahren oder durch Simulation durch objektive Kenngrößen bewertet werden. In diesem Kapitel werden zunächst die Grundlagen der Fahrzeugdynamik beschrieben. Dazu gehört die Definition der Fahrzeugbewegung und der statischen sowie dynamischen Fahrdynamikenngrößen. Danach wird auf das Übertragungsverhalten des Fahrzeugs im Zeit- sowie im Frequenzbereich eingegangen. Daraufhin werden Fahrmanöver beschrieben, mit denen die fahrdynamischen Eigenschaften des Fahrzeugs abgefragt werden können. Zuletzt wird auf die Kennzeichnung und Modellierung der Reifenkraftübertragung eingegangen.

### 2.1 Definition der Fahrzeugbewegung

Der Fahrzeugaufbau bewegt sich während der Fahrt durch den Raum. Zur Beschreibung der Fahrzeugbewegung (Abb. 2.1) wird das fahrzeugfeste Koordinatensystem  $K_V = \{O_V; x_V, y_V, z_V\}$  (orthogonal und rechtsdrehend) genutzt. Der Koordinatenursprung des Systems  $K_V$  wird in den Schwerpunkt des Fahrzeugs gelegt werden, vgl. (DIN 70000 1994).

Der Fahrzeugaufbau besitzt sechs Starrkörperfreiheitsgrade, durch die die Lage des Fahrzeugs im Raum eindeutig bestimmt ist. Die hier angenommenen Freiheitsgrade sind in Abb. 2.1 dargestellt. Es wird zwischen translatorischen und rotatorischen Freiheitsgraden unterschieden. Die translatorischen Freiheitsgrade werden „Zucken“ in Fahrzeuginnenrichtung (Längsbewegung in Richtung der  $x_V$ -Achse), „Schieben“ in Fahrzeugquerrichtung (Querbewegung in Richtung der  $y_V$ -Achse) und „Heben“ (in Richtung der  $z_V$ -Achse) genannt, vgl. (DIN 70000 1994).

Die rotatorischen Freiheitsgrade sind mit den KARDAN-Winkeln beschrieben und werden als „Wanken“ oder „Rollen“ (Drehung um die  $x_V$ -Achse mit  $\varphi_V$ ), „Nicken“ (Drehung um die  $y_V$ -Achse mit  $\theta_V$ ) und „Gieren“ (Drehung um  $z_V$ -Achse mit  $\psi_V$ ) bezeichnet.

Zur räumlichen Lagebeschreibung des Fahrzeugaufbaus werden die drei Komponenten  ${}^E x_V, {}^E y_V, {}^E z_V$  des Ortsvektors  $\mathbf{r}_V$  in den Koordinaten des Inertialsystems verwendet. Die nachfolgende Abbildung (Abb. 2.2) zeigt die jeweilige Lage der Koordinatensysteme.

Die auftretenden Kräfte werden über die Räder auf die Straße übertragen. Diese Radkräfte werden im Radkoordinatensystem  $K_R = \{O_R; x_R, y_R, z_R\}$  (siehe Abb. 2.2) als Längskraft (Umfangskraft erzeugt durch Antriebs- oder Bremsmoment), Seitenkraft (Querkraft) und Vertikalkraft (Radlast) bezeichnet.

Die Transformation der Koordinaten eines beliebigen Vektors in die Koordinaten des durch das Fahrzeugsystem gegebenen Vektors  ${}_V \mathbf{r}_i$  (s. Abb. 2.2) in das Inertialsystem erfolgt nach der Beziehung

$${}^E \mathbf{r}_i = {}^E \mathbf{T}_V {}^V \mathbf{r}_i. \quad (2.1)$$

In Tabelle 2.1 sind die in Gleichung (2.1) auftretenden Größen beschrieben.

Tabelle 2.1: Ortsvektoren zur Beschreibung des Fahrzeugaufbaus

Bezeichnung	Beschreibung
${}^E_V \mathbf{r}_i$	Vektor vom Fahrzeugsystem zum Punkt $P_i$ in Koordinaten von $K_E$
${}^V_V \mathbf{r}_i$	Vektor vom Fahrzeugsystem zum Punkt $P_i$ in Koordinaten von $K_V$
${}^E T_V$	Transformationsmatrix vom Fahrzeug- ins Inertialsystem

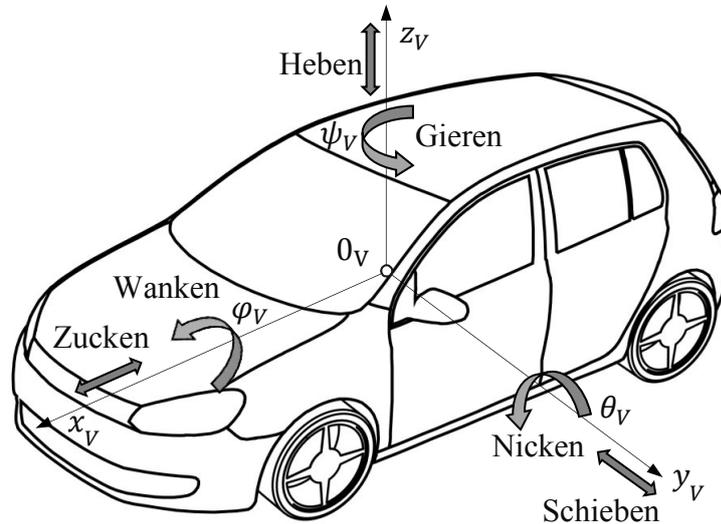


Abb. 2.1: Starrkörperfreiheitsgrade des Fahrzeugaufbaus

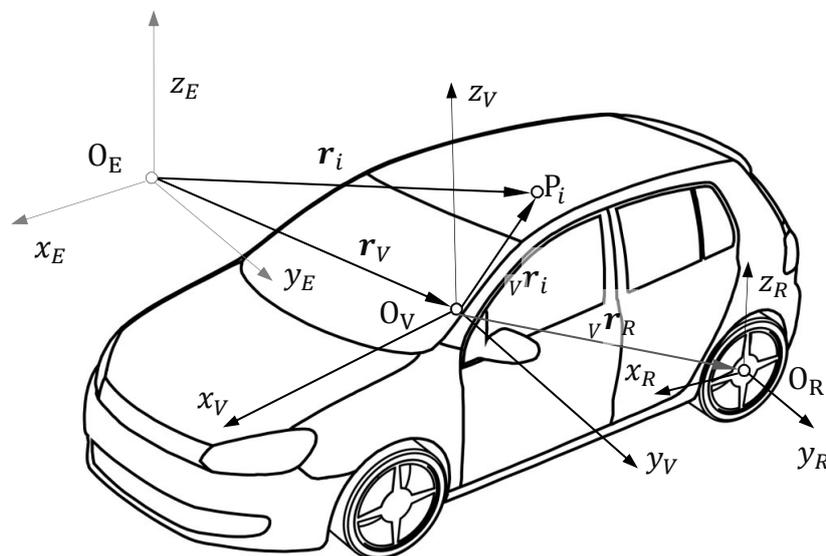


Abb. 2.2: Koordinatensysteme zur Beschreibung der Fahrzeugaufbau- und Radbewegung

Die Orientierung des Fahrzeugsystems gegenüber dem Inertialsystem ist durch die drei KARDAN-Winkel eindeutig festgelegt (DIN 70000 1994). Von einer Ausgangslage, in der das Inertialsystem und das Fahrzeugsystem die gleiche Orientierung besitzen, werden nacheinander drei Drehungen um bestimmte Achsen ausgeführt um Fahrzeugaufbaufeste Punkte in Koordinaten des Inertialsystems darzustellen. Die Drehungsfolge der KARDAN-

Winkel ist in Abb. 2.3 wiedergegeben. Die Ermittlung der Transformationsmatrix aus den KARDAN-Winkeln wird in Hiller (1983) beschrieben. Es ergibt sich

$${}^E\mathbf{T}_V = \mathbf{T}_z(\psi_V) \cdot \mathbf{T}_y(\theta_V) \cdot \mathbf{T}_x(\varphi_V) = \begin{bmatrix} c\theta_V c\psi_V & s\varphi_V s\theta_V c\psi_V - c\varphi_V s\psi_V & c\varphi_V s\theta_V c\psi_V + s\varphi_V s\psi_V \\ c\theta_V s\psi_V & s\varphi_V s\theta_V s\psi_V + c\varphi_V c\psi_V & c\varphi_V s\theta_V s\psi_V - s\varphi_V c\psi_V \\ -s\theta_V & s\varphi_V c\theta_V & c\varphi_V c\theta_V \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Die umgekehrte Transformation vom Inertial- ins Fahrzeugsystem erfolgt entsprechend mit der transponierten Transformationsmatrix  ${}^E\mathbf{T}_V^T$ , da  ${}^E\mathbf{T}_V^T = {}^E\mathbf{T}_V^{-1}$ . Diese umgekehrte Transformation ist essentiell, da alle Vektoren und Tensoren für die Berechnung der Bewegungsgleichungen (s. Kapitel 3) in Komponenten des Fahrzeugsystems angegeben werden.

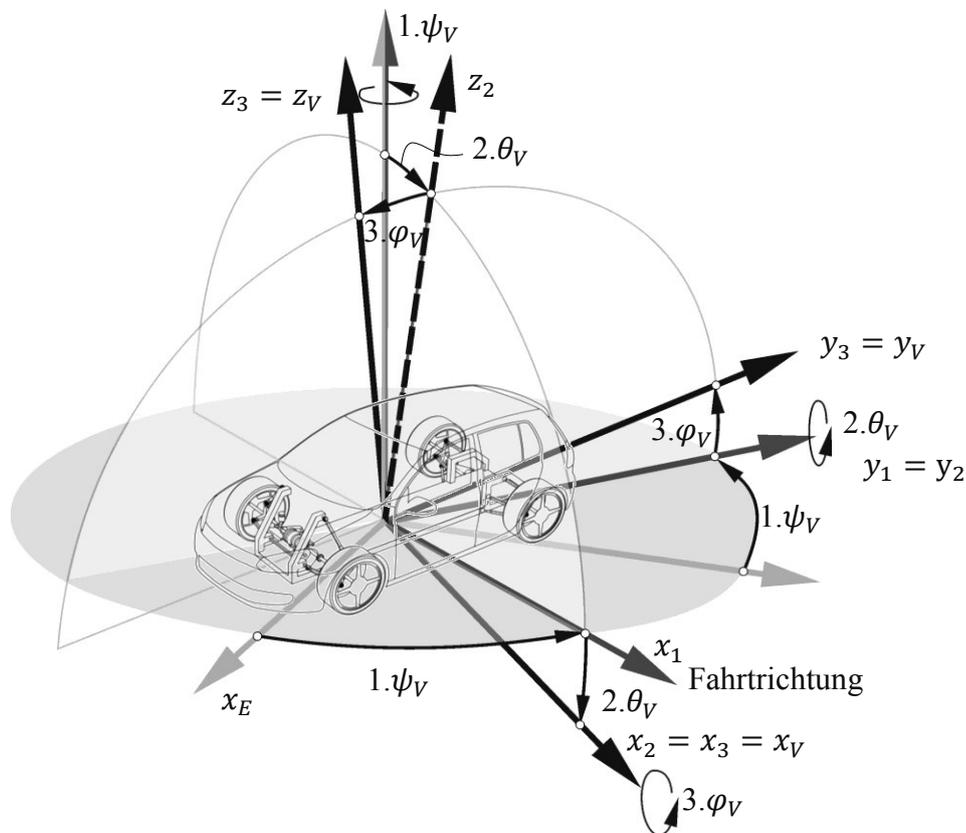


Abb. 2.3: Drehungsfolge der KARDAN-Winkel

Die KARDAN-Winkel beschreiben die räumliche Drehung des Fahrzeugaufbaus relativ zum Inertialsystem. Aus der Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugaufbaus ergibt sich unter Verwendung der zeitlichen Ableitungen der KARDAN-Winkel und den momentanen Drehachsen (s. Abb. 2.3) die kinematische KARDAN-Gleichung (Hiller 1983) zu

$${}^V_E\boldsymbol{\omega}_V = \mathbf{T}_\omega \begin{bmatrix} \dot{\psi}_V \\ \dot{\theta}_V \\ \dot{\varphi}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\theta_V & 0 & 1 \\ c\theta_V s\varphi_V & c\varphi_V & 0 \\ c\theta_V c\varphi_V & -s\varphi_V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi}_V \\ \dot{\theta}_V \\ \dot{\varphi}_V \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Sie beschreibt den Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugsystems relativ zum Inertialsystem und den zeitlichen Ableitungen der Fahrzeugdrehwin-

kel  $\dot{\psi}_V$ ,  $\dot{\theta}_V$  und  $\dot{\phi}_V$ . Durch die zeitlichen Ableitungen von (2.3) ergibt sich die Winkelbeschleunigung des Fahrzeugaufbaus zu

$$\begin{aligned} {}^V_E \dot{\omega}_V &= \begin{bmatrix} -s \theta_V & 0 & 1 \\ c \theta_V s \varphi_V & c \varphi_V & 0 \\ c \theta_V c \varphi_V & -s \varphi_V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -c \theta_V \dot{\theta}_V & 0 & 0 \\ -s \theta_V s \varphi_V \dot{\theta}_V + c \theta_V c \varphi_V \dot{\phi}_V & -s \varphi_V \dot{\phi}_V & 0 \\ -s \theta_V c \varphi_V \dot{\theta}_V - s \theta_V c \varphi_V \dot{\phi}_V & -c \varphi_V \dot{\phi}_V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi}_V \\ \dot{\theta}_V \\ \dot{\phi}_V \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Mit der Winkelgeschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung des Fahrzeugs lassen sich Absolutgeschwindigkeiten und -beschleunigungen beliebiger fahrfestener Punkte angeben (s. Abschnitt 3.1).

## 2.2 Kennzeichnung der Fahrdynamikenngrößen

Eine für Aussagen über die Fahrstabilität wichtige Größe von Kraftfahrzeugen ist das Fahrverhalten unter Einfluss der Zentripetalbeschleunigung  $a_q$  (in der vorliegenden Arbeit auch Querschleunigung genannt). Das Fahrverhalten wird maßgeblich von der durch Krafteinwirkung auftretenden Radstellungsänderung, der Eigenschaft der Reifen zur Kraftübertragung (Heißing 2002) sowie den konstruktiven Fahrzeuggrößen beeinflusst. Zur Charakterisierung des querdynamischen Fahrverhaltens eines Fahrzeugs sind Kenntnisse über die Reaktion des Fahrzeugs auf die Lenkwinkleingabe sowie eine quantitative Beschreibung des Fahrverhaltens erforderlich. In diesem Abschnitt werden die dafür notwendigen objektiven Bewertungsgrößen beschrieben, auf denen auch die Untersuchungen in Kapitel 4, 5 und 6 aufbauen. Diese Bewertungsgrößen werden hier aus den Ausgangsgrößen (z. B. Zentripetalbeschleunigung, Gierrate, Schwimmwinkel und Wankwinkel) in Kombination mit den Eingangsgrößen (z. B. Lenkradwinkel und Fahrzeuggeschwindigkeit) berechnet. Eng verknüpft mit den Bewertungsgrößen sind charakteristische Open- und Closed-Loop Fahrmanöver (vgl. Abschnitt 2.3).

Wichtige kinematische und geometrische Größen am Fahrzeug werden in Tabelle 2.2 und Abb. 2.4 vorgestellt.

Tabelle 2.2: Kinematische und geometrische Größen am Fahrzeug

Bezeichnung	Beschreibung
$\beta_V$	Schwimmwinkel im Fahrzeugursprung
$\dot{\psi}_V$	Gierrate (Gierwinkelgeschwindigkeit) des Fahrzeugaufbaus relativ zu $K_E$
$v_V$	Geschwindigkeit des Fahrzeugursprungs
$\delta_i, i = 1, 3$	Radlenkwinkel
$\alpha_i, i = 1, \dots, 4$	Schräglaufwinkel des Rades
$v_{R_i}, i = 1, \dots, 4$	Geschwindigkeit des Radmittelpunktes
$a_q$	Zentripetalbeschleunigung des Fahrzeugschwerpunktes
$\lambda_{v,h}$	Verhältnis der Achslasten $m_h / (m_v + m_h)$
$l_v = l_V \lambda_{v,h}$	Abstand vom Schwerpunkt zur Vorderachse
$l_h = l_V (1 - \lambda_{v,h})$	Abstand vom Schwerpunkt zur Hinterachse
$l_V = l_v + l_h$	Radstand
$b_V$	Spurweite

Das Fahrverhalten beschreibt fahrdynamische Auswirkungen des Fahrzeugs auf Lenkeingaben. Es wird zwischen stationärem und instationärem (dynamischem) Fahrverhalten unterschieden.

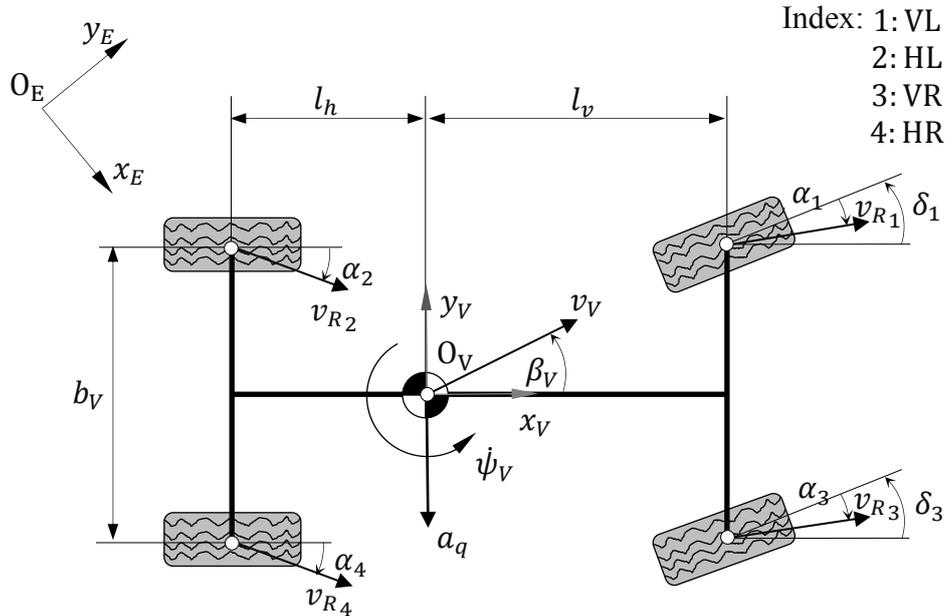


Abb. 2.4: Kinematische und geometrische Größen am Fahrzeug

### 2.2.1 Stationäres Fahrverhalten

Die „stationäre Kreisfahrt“ bestimmt das stationäre Fahrverhalten (vgl. Abschnitt 2.3.1). Das Manöver beschreibt die Gierreaktion des Fahrzeugs auf die stationäre Lenkbewegung des Fahrers. Eine zu starke Gierreaktion auf die Lenkbewegung wird als „Instabil“ (Übersteuern) bezeichnet, eine zu schwache Reaktion als „Stabil“ (Untersteuern). Das Gierverhalten des Fahrzeugs wird auch „Eigenlenken“ genannt. Das Eigenlenkverhalten beschreibt den Lenkradwinkelbedarf bei Kurvenfahrten. Der Lenkradwinkelbedarf verändert sich in Abhängigkeit der Fahrzeuggeschwindigkeit  $v_v$ , des Krümmungsradius  $R$  und der daraus resultierenden Zentripetalbeschleunigung  $a_q$  (s. Heißing 2002).

#### **Eigenlenkgradient**

Eine Methode zur Beschreibung des Eigenlenkverhaltens ist der Vergleich der Achsschräglaufwinkel  $\alpha_i$  zwischen Vorder- und Hinterachse während der stationären<sup>3</sup> Kreisfahrt. Eine messtechnische Erfassung der Schräglaufwinkel ist jedoch aufwändig. Daher wird eine weniger aufwändige Methode bevorzugt, bei der das Eigenlenkverhalten durch den Eigenlenkgradienten (EG) charakterisiert ist. Der EG ergibt sich aus der Steigung des Lenkradwinkelbedarfs  $\delta_H$  über der Zentripetalbeschleunigung  $a_q$ . Diese Größen können mit den für das Elektronische Stabilitätsprogramm (ESP) (siehe Symbolverzeichnis) serienmäßig verbauten Sensoren aufgezeichnet werden. Dabei wird das Eigenlenkverhalten

<sup>3</sup> Im Grunde ist die stationäre Kreisfahrt ein Closed-Loop Manöver, da der Fahrer den Lenkwinkel anpassen muss, um bei langsam steigender Fahrzeuggeschwindigkeit auf dem Kreis zu bleiben. Da dies jedoch quasi stationär geschieht, wird dieses Manöver als stationär bezeichnet.

anhand der Änderung des Lenkradwinkelbedarfs, der mit einer Steigerung der Querbesehleunigung verbundenen ist, zu

$$EG = \frac{1}{i_L} \frac{\partial \Delta \delta_H}{\partial a_q} = \frac{1}{i_L} \left( \frac{\partial \delta_H}{\partial a_q} - \frac{\partial \delta_A}{\partial a_q} \right). \quad (2.5)$$

definiert (Zomotor 1991) (s. Abb. 2.5). Der zusätzliche Lenkradwinkelbedarf  $\Delta \delta_H$  und der Ackermannwinkel  $\delta_A$  (Lenkwinkel, der sich – abhängig vom Kurvenradius – bei sehr langsamer Kurvenfahrt einstellt) addieren sich zu

$$\delta_H = \delta_A + \Delta \delta_H. \quad (2.6)$$

Steigt der Lenkradwinkelbedarf mit zunehmender Zentripetalbeschleunigung, spricht man von Untersteuern ( $EG > 0$ ). Sinkt der Lenkradwinkelbedarf mit zunehmender Zentripetalbeschleunigung, spricht man von Übersteuern ( $EG < 0$ ). Bleibt der Lenkradwinkelbedarf mit zunehmender Querbesehleunigung gleich, spricht man von Neutralsteuern ( $EG = 0$ ).

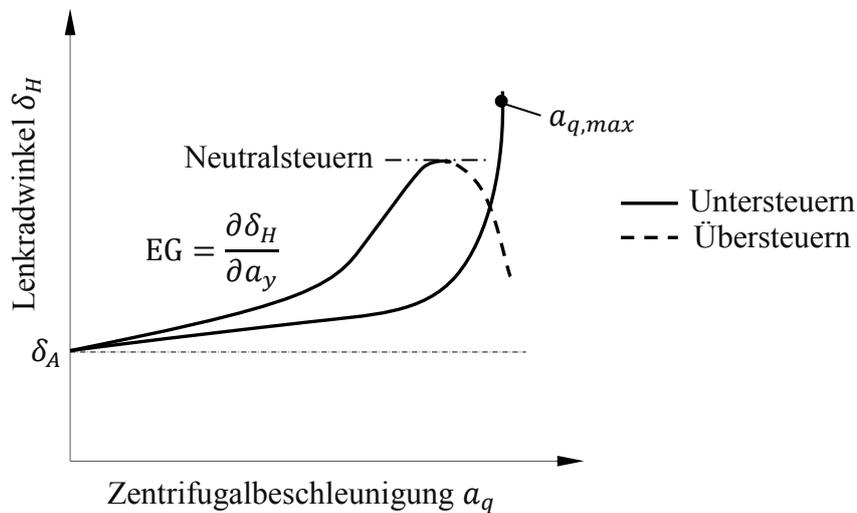


Abb. 2.5: Eigenlenkgradient bei Fahrt auf Kreis mit gegebenem Radius

Wesentliche Merkmale des Kurvenverlaufs in oberer Abbildung (Abb. 2.5) sind

- der Schnittpunkt mit der Ordinate, der dem Ackermannwinkel  $\delta_A$  entspricht,
- die Steigung in unterschiedlichen Beschleunigungsbereichen und
- die maximal erreichbare Zentripetalbeschleunigung.

Der Ackermannwinkel hängt vom Radstand  $l$  und vom Kurvenradius  $R$  ab. Der Gradient und die maximale Zentripetalbeschleunigung hängen von der Fahrzeugmasse, der Schwerpunktlage, der Fahrzeugachsen und den Reifenparametern ab. Die Kurve für das untersteuernde Fahrzeug (s. Abb. 2.5) unterteilt sich in einen linearen und einen nichtlinearen Teil. Im linearen Teil hat die Kurve eine konstante Steigung ( $EG$  ist konstant). Im nichtlinearen Teil steigt der Eigenlenkgradient stark an. Dies liegt daran, dass die Reifenseitenkraft an der Vorderachse ihre Sättigung erreicht (vgl. Abschnitt 2.4) und sich die Vorderachse relativ in Querrichtung bewegt (Fahrzeug untersteuert). Bei einem geringen Eigenlenkgradienten im linearen Bereich antwortet das Fahrzeug direkter auf Lenkeingaben.

## Gierverstärkung

Um die Zusammenhänge im Gesamtsystem Fahrer-Fahrzeug zu berücksichtigen, muss man die Fahrzeugreaktion auf die Lenkwinkleingabe betrachten. Dazu wird, wie in der Regelungstechnik üblich, die Ausgangsgröße Giergeschwindigkeit  $\dot{\psi}_V$  auf die Eingangsgröße Lenkradwinkel  $\delta_H$  bezogen. Das Verhältnis  $\dot{\psi}_V/\delta_H$  wird Gierverstärkungsfaktor genannt (Zomotor 1987). Bei einer stationären Kreisfahrt wird die Gierverstärkung (GV) in Abhängigkeit der Fahrzeuggeschwindigkeit betrachtet und definiert die stationäre Reaktion auf Lenkbewegung. Sie beschreibt die Lenkempfindlichkeit und gibt an, wie stark ein Fahrzeug bei einer bestimmten Fahrgeschwindigkeit auf eine Lenkradwinkleingabe reagiert. Die Agilität eines Fahrzeugs steigt, je größer die GV ist, womit jedoch die Fahrzeugstabilität abnimmt.

Die Kurve der GV enthält nur für stabile Fahrzeuge ein Maximum. Die dazugehörige Geschwindigkeit ist die charakteristische Geschwindigkeit  $v_{ch}$ , bei der das Fahrzeug die größte Lenkempfindlichkeit hat (s. Abb. 2.6). Fahrzeuge mit einem eher neutralen Fahrverhalten weisen bei hohen Geschwindigkeiten eine zu hohe GV auf und verfügen somit über eine geringere Fahrstabilitätsreserve. Für instabile Fahrzeuge strebt die Kurve der Gierreaktion bei einer bestimmten Geschwindigkeit gegen unendlich. Diese Geschwindigkeit wird als kritische Geschwindigkeit  $v_{krit}$  bezeichnet.

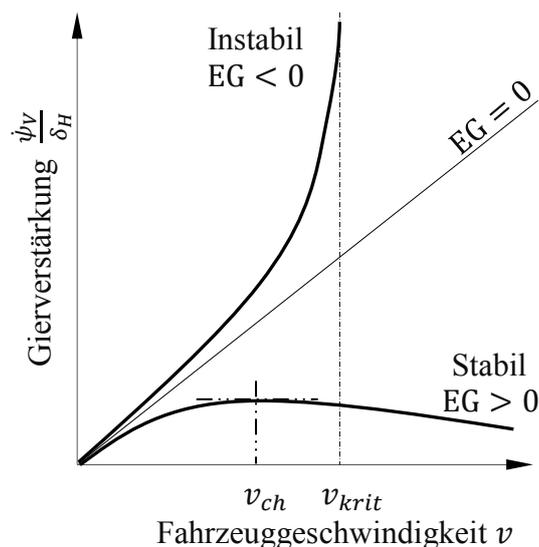


Abb. 2.6: Stationäre Gierverstärkung bei Kreisfahrt

Wesentliche Merkmale des Kurvenverlaufs sind

- die Größenordnung der Gierverstärkung  $\frac{\dot{\psi}_V}{\delta_H}$  und
- die charakteristische Geschwindigkeit  $v_{ch}$  (maximale GV).

Bei der charakteristischen Geschwindigkeit besitzt das Fahrzeug die größte Lenkempfindlichkeit.

## Wankwinkelgradient

Der Wankwinkelgradient (WG) beschreibt das Querneigungsverhalten bei stationären Kurvenfahrten in Abhängigkeit von der Querbeschleunigung. Dazu wird der Wankwinkel

über der Querbeschleunigung dargestellt (s. Abb. 2.7). Das Wankverhalten hängt größtenteils von der Spurweite, der Schwerpunktlage, der Wankpolachse, dem Feder- und dem Dämpferelement, dem Stabilisator sowie von der Radaufhängung ab. Diese Bauteile haben zugleich auch Einfluss auf das Eigenlenkverhalten. Das Wankverhalten beeinflusst das Komfortempfinden und die Fahrstabilität. Der Wankwinkelgradient  $\varphi_V/a_q$  kann weitgehend als konstant angenommen werden.

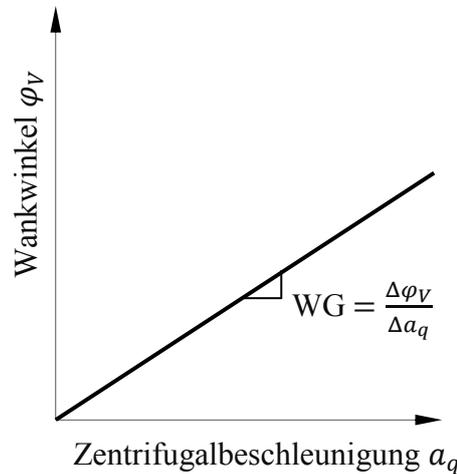


Abb. 2.7: Qualitativer Verlauf des Wankwinkels über der Querbeschleunigung bei stationärer Kreisfahrt

### **Schwimmwinkelgradient**

Der Schwimmwinkelgradient (SG) beschreibt den Schwimmwinkelverlauf  $\beta_V$  über der Zentripetalbeschleunigung (s. Abb. 2.8). Der Anfangsschwimmwinkel  $\beta_0$  beruht auf dem Kurvenradius  $R$  und dem Abstand der Hinterachse zum Schwerpunkt  $l_h$ . Der Anstieg der Kurve hängt stark mit dem degressiven Kennlinienverlauf der Hinterachs-Seitenreifenkraft zusammen (Wimmer 1997). Wie in Abb. 2.8 gezeigt, ist der SG bei niedrigen Beschleunigungen konstant und wächst bei erhöhter Zentripetalbeschleunigung an.

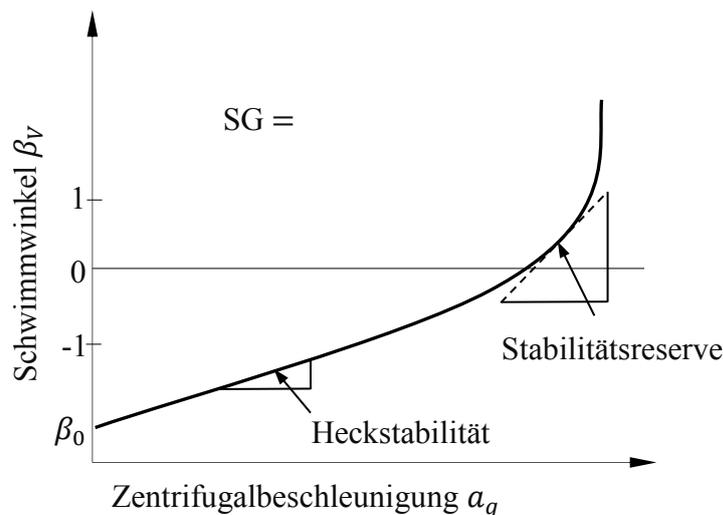


Abb. 2.8: Qualitativer Verlauf des Schwimmwinkels über Zentripetalbeschleunigung bei stationärer Kreisfahrt

Der anfangs konstante SG beschreibt die Heckstabilität und bei höheren Beschleunigungen die Stabilitätsreserve des Fahrzeugs. Zudem wechselt der Schwimmwinkel das Vorzeichen zu höheren Beschleunigungen. Dies ist auf das Anwachsen des Schräglaufwinkels an den Reifen bei zunehmender Zentripetalbeschleunigung zurückzuführen. Der momentane Kurvenmittelpunkt verschiebt sich mit zunehmender Zentripetalbeschleunigung von der Höhe der Hinterachse (auf der er sich bei sehr geringer Zentripetalbeschleunigung befindet) in Fahrtrichtung. Liegt der projizierte Kurvenmittelpunkt vor dem Fahrzeugschwerpunkt, wechselt der Schwimmwinkel das Vorzeichen (Heißing 2002).

## 2.2.2 Instationäres Fahrverhalten

Zur besseren Bewertung des Fahrverhaltens muss man die Fahrzeugreaktion auf instationäre bzw. dynamische Lenkwinkleingaben heranziehen. Beim instationären Fahrverhalten ist von Interesse, mit welchem dynamischen Verhalten ein Fahrzeug auf dynamische Lenkwinkleingaben reagiert. Zur Untersuchung des dynamischen Übertragungsverhaltens eignen sich Frequenzgang und Lenkwinkelsprung (vgl. Abschnitt 2.3.2 und 2.3.3).

### **Frequenzgang**

Wie im stationären wird auch im instationären Verhalten der Systemausgang in Relation zum Eingang gesetzt. Im stationären Bereich heißt das „Verstärkung“, beim Frequenzgang „Übertragungsfunktion“.

Zur Bestimmung des Frequenzgangs kann das Fahrzeug mit einer sinusförmigen Lenkradbewegung mit konstanter Amplitude und linear ansteigender Frequenz angeregt werden (vgl. Abschnitt 2.3.2). Durch harmonische Anregungen, wie dem Sinuslenken, zeigt sich die frequenzabhängige instationäre Querdynamik eines Fahrzeugs.

Die Bewegungsgrößen des Fahrzeugs reagieren ebenfalls mit einem sinusförmigen Verlauf. In Abb. 2.9 werden der zeitliche Verlauf der Systemanregung (Lenkradwinkel  $\delta_H$ ) und der Systemantwort (Gierrate  $\dot{\psi}_V$ ) beispielhaft dargestellt. Erkennbar sind die Amplitudenveränderung und der Phasenverzug der Gierrate gegenüber dem Lenkradwinkel bei höherer Frequenz.

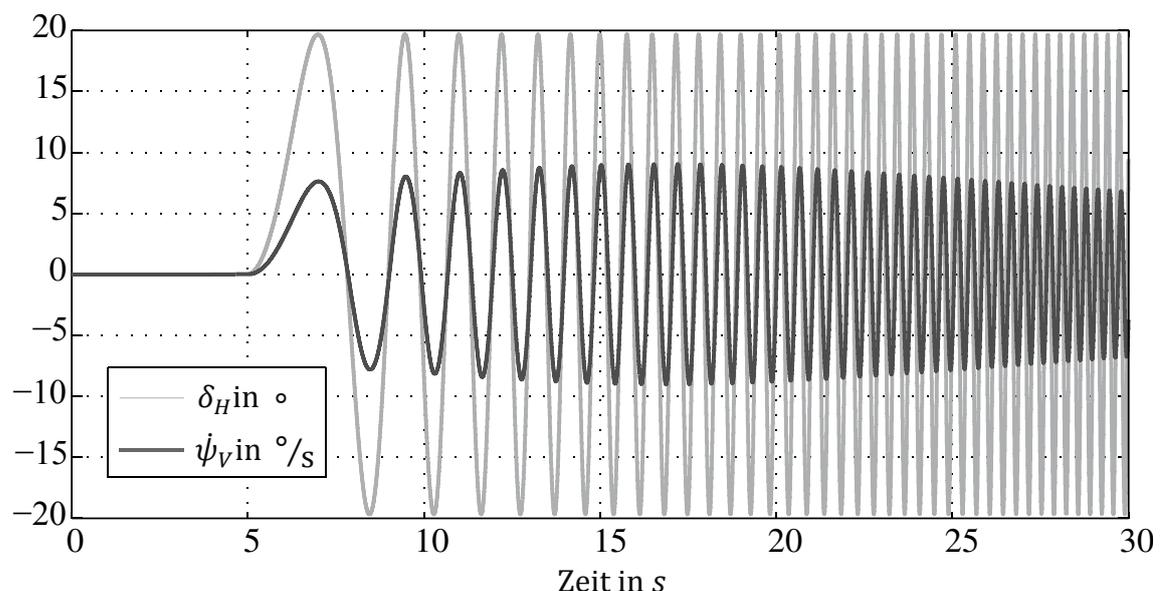


Abb. 2.9: Zeitsignal des Frequenzgangs

Der Frequenzgang beschreibt die Übertragung der zeitlichen Bewegungsgrößen in den Frequenzbereich, in dem die Übertragungsfunktionen für unterschiedliche Größen berechnet werden. Primär werden zur Bewertung des instationären Fahrverhaltens die Frequenzgänge der Übertragungsfunktionen

- Giergeschwindigkeitsfrequenzgang (Gierfrequenz (GF))  $\frac{\dot{\psi}_V}{\delta_H}$ ,
- Querbeschleunigungsfrequenzgang (Querfrequenz (QF))  $\frac{a_q}{\delta_H}$  und
- Wankwinkelfrequenzgang (Wankfrequenz (WF))  $\frac{\varphi_V}{\delta_H}$  benutzt.

Bei der Betrachtung des Amplitudenverhältnisses und der Phasenverschiebung vom Ausgangs- zum Eingangssignal im Frequenzbereich ergeben sich Amplituden- und Phasengang. Abb. 2.10 stellt den Amplituden- und Phasengang der Gierübertragung  $\dot{\psi}_V/\delta$  dar (Bodediagramm). Die Gierübertragung zeigt bei ca. 0,9 Hz eine Amplitudenüberhöhung. Diese Frequenz entspricht der Giereigenfrequenz. Dies bedeutet, dass hier die Gierreaktion des Fahrzeugs auf Lenkeingänge am stärksten ist. Die stationäre Gierverstärkung (s. Abschnitt 2.2.1) entspricht dem Amplitudengang von 0 Hz. Bei höheren Frequenzen fällt die Amplitude monoton ab, dies entspricht einem Tiefpassverhalten. Die Phase weist bei tieferen Frequenzen einen geringen Phasenverzug auf, der jedoch bei höherer Frequenz weiter zunimmt.

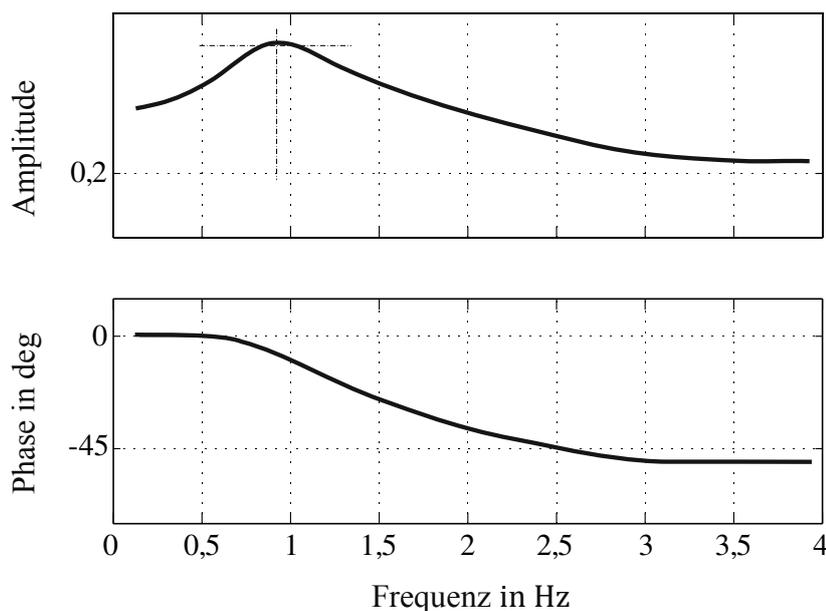


Abb. 2.10: Frequenzgang am Beispiel der GF (Amplituden- und Phasenverlauf)

Durch den Frequenzgang werden Informationen über das Verhalten eines Fahrzeugs unter Einwirkung von sinusförmiger Anregung gewonnen und bestimmt, bei welcher Frequenz die Fahrzeugreaktion auf den Lenkeingang verstärkt bzw. abgeschwächt wird und wie groß die Phasenverschiebung zwischen beiden Reaktionen ist. Die Eigenfrequenzen, bei denen die maximale Überhöhung im Amplitudengang auftritt, sowie die Größe der Überhöhung im Vergleich zum stationären Fall können ebenfalls abgelesen werden (s. Zomotor (2002) und Meljnikov (2003)). Nach Schindler (2007) und Zomotor (1987) ist nur der Frequenzbereich unter 2,0 Hz von Interesse, da das Frequenzspektrum des durch den menschlichen Fahrer gestellten Lenkradwinkels bei realen Fahrsituationen oberhalb die-

ser Frequenz keine nennenswerten Anteile hat. Bei einer Fahrt auf der Landstraße dominieren Grundfrequenzen um circa 0,1 Hz. Bei einem doppelten Fahrspurwechsel liegen sie zwischen 0,6 Hz und 1,1 Hz (Schindler 2007).

### **Lenkradwinkelsprung**

Beim Lenkradwinkelsprung wird zur Untersuchung des Fahrverhaltes eine sprungförmige Anregung im Zeitbereich verwendet. Das gleichnamige Manöver wird in Abschnitt 2.3.3 beschrieben. Dabei fährt das Fahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus und wird zum Zeitpunkt  $t_0$  mit einem Lenkwinkel  $\delta_{L_0}$  beaufschlagt. Diese Methode untersucht das Übergangverhalten eines Fahrzeugs aus der Geradeausfahrt in die stationäre Kreisfahrt. Auch bei einer Sprunganregung wird die Ausgangsgröße auf die Eingangsgröße bezogen und im Falle der Gierrate als Gierratenübergang bezeichnet.

Das Fahrzeug reagiert auf einen plötzlichen Lenkradwinkelsprung mit einem Anstieg der Bewegungs- (Gierrate, Zentripetalbeschleunigung) und Lagegrößen (Wankwinkel). Diese Größen steigen zunächst auf einen höheren Wert an als die dem Lenkwinkel  $\delta_{L_{stat}}$  entsprechenden stationären Werte (Überschwingen). Die endgültigen stationären Zustandswerte sind nach einigen Schwingungen erreicht (Zomotor 1987). In der Systemdynamik entspricht dies der Sprungantwort.

Der verzögerte Aufbau der Achsenseitenkräfte hat eine zeitverzögerte Fahrzeugreaktion zur Folge, die Zweiphasigkeit. Sie wird durch zwei Zeiten beschrieben. Die erste beschreibt die Vorderachsantwortzeit, zu der sich die Gierrate aufbaut (vgl. Abb. 2.12), die zweite die Antwort der Hinterachse, zu der die Querbeschleunigung aufbaut. Insbesondere bei untersteuernden Fahrzeugen fallen diese Zeiten groß aus. Anhand des zeitlichen Giergeschwindigkeits- und Querbeschleunigungsverlaufs lassen sich somit die Ansprechzeiten und die Dämpfung der Fahrzeugreaktion beurteilen. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Schwingamplituden und die Einschwingzeit von der Dämpfung und der Eigenfrequenz des Systems abhängen.

Der Fahrer kann nur endlich schnell lenken, weshalb der Lenkwinkelsprung eher einem rampenförmigen Lenkwinkelanstieg entspricht (s. Abb. 2.11). In Abb. 2.12 ist beispielsweise eine typische Gierratenantwort des Fahrzeugs auf den Lenkwinkelsprung dargestellt. Wichtige Werte sind die maximal erreichte Gierrate  $\dot{\psi}_{max}$  und die entsprechende Ansprechzeit  $T_{\dot{\psi}_{max}}$  sowie die sich stationär einstellende Gierrate  $\dot{\psi}_{stat}$  (Zomotor 1997). Der Überschwingwert kann als das Verhältnis vom Maximalwert zum Stationärwert  $U_{\dot{\psi}} = \dot{\psi}_{max}/\dot{\psi}_{stat}$  definiert werden.

Zur Bewertung des Übergangsverhaltens werden primär

- Giergeschwindigkeitsübergangsverhalten (Gierübergang (GU))  $\frac{\dot{\psi}_V}{\delta_H}$ ,
- Querbeschleunigungsübergangsverhalten (Querübergang (QU))  $\frac{a_q}{\delta_H}$  und
- Wankwinkelübergangsverhalten (Wankübergang (WU))  $\frac{\varphi_V}{\delta_H}$

genutzt.

Diese Werte werden zusätzlich normiert, indem das entsprechende Übergangsverhalten durch den jeweiligen stationären Endwert dividiert wird, zum Beispiel  $GU_{norm} = GU/GU_{stat}$ .

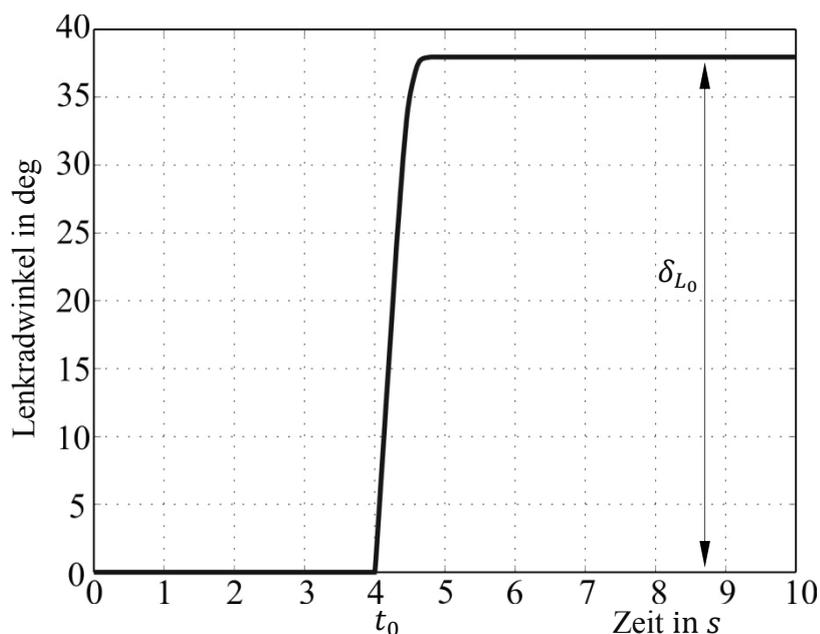


Abb. 2.11: Lenkradwinkelsprung

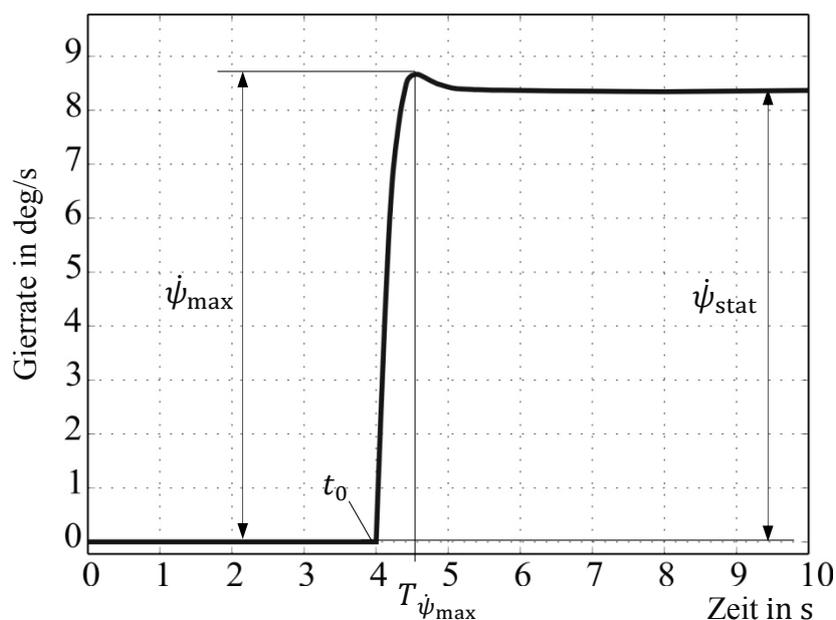


Abb. 2.12: Fahrzeuggierbewegung nach einem Lenkwinkelsprung

### 2.3 Fahrmanöver

Im vorherigen Abschnitt wurden Bewertungsgrößen definiert, mit denen es möglich ist, das stationäre und instationäre Fahrverhalten qualitativ zu beschreiben. In diesem Abschnitt werden standardisierte Fahrmanöver für eine fahrdynamische Bewertung (vgl. Abschnitt 2.2) vorgestellt, die die Gewinnung objektiver und damit vergleichbarer Fahrzeugkenngrößen unterstützen, das Open-Loop und das Closed-Loop-Manöver. Beim Open-Loop-Manöver bleibt der Fahrer unberücksichtigt, sodass dieser keinen Einfluss auf das Messergebnis hat. Beim Closed-Loop-Manöver hat der Fahrerstil einen bedeutenden Einfluss, sodass eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse nur bedingt möglich ist, z. B. wenn Fahrer mit gleichem Fahrstil die Manöver fahren. Im Folgenden werden daher nur Open-Loop-Manöver berücksichtigt.

In Tabelle 2.3 werden drei Open-Loop-Fahrmanöver vorgestellt, die sich zur Untersuchung von stationären Zuständen und instationären Übertragungsverhalten von Fahrzeugen eignen.

Tabelle 2.3: Open-Loop-Fahrmanöver zur Ermittlung von Fahrzeugeigenschaften

Fahrmanöver	Norm	Auswertung	Ergebnisse
Stationäre Kreisfahrt	ISO 4138	Stationärer Gleichgewichtszustand	Eigenlenkgradient, stationäre Gierverstärkung und Wankwinkelgradient
Dauersinus	ISO 7401	Instationäres Verhalten im Frequenzbereich	Frequenzabhängiger Amplituden- und Phasengang
Lenkwinkelsprung	ISO 7401	Instationäres Verhalten im Zeitbereich	Ansprechzeiten, Einschwingverhalten

Mit standardisierten Fahrmanövern ist es möglich, Messdaten von verschiedenen Fahrzeugen, die auf unterschiedlichen Versuchsgeländen gewonnen werden, einheitlich, reproduzierbar und vergleichbar zu gestalten. Dadurch werden nicht nur sogenannte Benchmarks für unterschiedliche Fahrzeuge, sondern auch Vergleiche zu Vorgängermodellen erstellt. Für eine exakte Messung ist es wichtig, Umgebungseinflüsse für alle Fahrmanöver zu minimieren, z. B. durch eine trockene und ebene Fahrbahn (Meyer-Tuve 2008). Ein zunehmend bedeutender Anwendungsbereich der standardisierten Fahrmanöver liegt in der Validierung von Simulationsmodellen, mit denen – im Gegensatz zu realen Messfahrten – in der frühen Entwicklungsphase objektive Daten ermittelt werden können (Kobetz 2004). Zur besseren Vergleichbarkeit müssen die unterschiedlichen Lenkübersetzungen der jeweiligen Fahrzeuge berücksichtigt werden.

### 2.3.1 Manöver Stationäre Kreisfahrt

Das Fahrmanöver „stationäre Kreisfahrt“ nach ISO 4138 (2004) ist sowohl für den realen Testbetrieb als auch für die simulationstechnische Analyse ein wichtiges Standard-Prüfverfahren. Es wird verwendet, um mit den Größen EG, GV und SG die Steuertendenz, das Fahrverhalten und die Stabilität von Kraftfahrzeugen bis in den Grenzbereich zu untersuchen und dabei grundlegende Aussagen über die Fahreigenschaften zu treffen (vgl. Abschnitt 2.2.1).

Für die Auswertung werden Größen wie Lenkradwinkel, Fahrzeuggeschwindigkeit, Schwimmwinkel, Wankwinkel, Querbeschleunigung und Giergeschwindigkeit aufgezeichnet.

Es gibt vier Methoden (vgl. DIN/ISO4138 (1996)), um die stationären Kreisfahrwerte zu erhalten. Hier wird die Methode des konstanten Kreisradius gewählt, da sie sich wegen der meist begrenzten Fahrdynamikfläche am besten eignet.

Auf einem Bahnradius von mindestens 30 Metern werden ein Links- und ein Rechtskreis mit langsam und gleichmäßig ansteigender Geschwindigkeit gefahren. Die Querbeschleunigung wird dadurch langsam und monoton bis zu dem Grenzbereich erhöht, bei dem es nicht mehr möglich ist, den stationären Zustand aufrecht zu erhalten. Der Fahrer muss hierbei den Lenkwinkel so anpassen, dass das Fahrzeug auf der Kreisbahn bleibt. Da der Fahrer in den Regelkreis integriert ist, handelt es sich hierbei eigentlich um ein Closed-Loop-Manöver. Jedoch ist aufgrund der quasi stationären Versuchsbedingungen dieses Manöver für einen geübten Fahrer gut reproduzierbar und hat auf das Systemverhalten wenig Einfluss (Rau 2007). Deshalb wird die stationäre Kreisfahrt hier als Open-Loop-Manöver betrachtet.

### 2.3.2 Manöver Frequenzgang

Um das querdynamische Übertragungsverhalten eines Fahrzeugs im linearen Bereich zu ermitteln, wird das Fahrmanöver „Frequenzgang“ verwendet, das in ISO 7401 (2011) bzw. ISO/TR 8726 (1988) definiert ist. Das Fahrzeug wird als zeitinvariantes System betrachtet und der Frequenzgang entspricht einem Gleitsinus, mit dem das Übertragungsverhalten bestimmt werden kann. Als Bewertungskriterien werden die Vergrößerungsfunktion (Amplitudenverhältnis) und der Phasenwinkel der Zentripetalbeschleunigung, der Giergeschwindigkeit und des Wankwinkels im Verhältnis zum Lenkradwinkel im Frequenzbereich herangezogen.

Im Versuch werden bei konstanter Fahrgeschwindigkeit (meist 100 km/h) und mit einem sinusförmigen Lenkeinschlag die Frequenzen von 0,1 bis circa 3,0 Hz mit konstanter Lenkradwinkelamplitude durchfahren. Die Lenkradwinkelamplitude wird je nach Fahrgeschwindigkeit so gewählt, dass sich bei niedrigen Frequenzen (quasistationär) Querbeschleunigungen von circa  $4 \text{ m/s}^2$  (wahlweise auch  $2 \text{ m/s}^2$  oder  $6 \text{ m/s}^2$ ) ergeben (Miljenkov 2003).

Für die Frequenzerhöhung werden zwei Verfahren angewendet. Beim ersten Verfahren werden die Frequenzen während der Messung stufenweise variiert, danach die Messdaten in verschiedene Frequenzklassen sortiert und die sich daraus ergebende Verteilung betrachtet. Die Messungen werden so oft wiederholt, bis jede Frequenzklasse ausreichend vorhanden ist. Beim zweiten Verfahren (auch Gleitsinusmanöver genannt) werden die Frequenzbereiche von 0,1 bis 3,0 Hz kontinuierlich in 0,1-Schritten durchfahren. Dafür ist entweder ein Frequenztaktgeber für den Fahrer oder die Verwendung eines Lenkroboters notwendig. Der Vorteil gegenüber dem ersten Verfahren besteht darin, dass sich das Fahrzeug im eingeschwungenen Zustand befindet und es schneller durchführbar ist.

Für die Ermittlung der Amplituden und der Phasenwinkel der Eingangssignale (Lenkradwinkel) zu den Ausgangssignalen (Giergeschwindigkeit, Zentripetalbeschleunigung und Wankwinkel) wird in der vorliegenden Arbeit die MATLAB-Funktion Transfer Function Estimate (TFE) (Schätzung der linearen, zeitinvarianten Übertragungsfunktion) verwendet. Diese bestimmt das Verhältnis des Kreuzleistungsdichtespektrums der Eingangs- und Ausgangssignale zum Leistungsdichtespektrum des Eingangssignals (s. Hayes 1996). Die Überführung der Daten in den Frequenzbereich erfolgt mithilfe der Fourier-Transformation. Zusätzlich kann eine Kohärenzfunktion berechnet werden, wodurch eine Plausibilitätskontrolle der Messsignale auf deren Konsistenz möglich ist.

### 2.3.3 Manöver Lenkwinkelsprung

Mit dem Fahrmanöver Lenkwinkelsprung nach (ISO 7401 2011) ist es möglich, sowohl das stationäre als auch das instationäre Fahrverhalten im linearen und nichtlinearen Bereich zu untersuchen. Bei der Versuchsdurchführung wird das Lenkrad aus stationärer Geradeausfahrt mit konstanter Fahrgeschwindigkeit (meist 100 km/h) mit möglichst hoher Lenkradwinkelgeschwindigkeit (zwischen 200 bis 500  $^\circ/\text{s}$ ) gegen einen Anschlagswert ( $\delta_{L_0}$ ) auf einer Kurvenbahn (stationäre Kreisfahrt) gelenkt. Dabei stellt sich eine rampenförmige Lenkanregung ein (s. Abb. 2.11), da es aus physikalischen Gründen nicht möglich ist, einen idealen Sprung zu realisieren.

Die Amplitude der Lenkwinkeländerung wird in Abhängigkeit der Fahrgeschwindigkeit so gewählt, dass stationär jeweils unterschiedliche Reifenkraftschlussbeanspruchungen bis hin zum Grenzbereich auftreten.

Die Bewertungskriterien basieren beim Lenkwinkelsprung auf den Querbesehleunigungs- und Giergeschwindigkeitsreaktionen des Fahrzeugs im Zeitbereich. Zusätzlich können Schwimm- und Wankwinkel betrachtet werden.

Die Fahrzeugreaktion auf den Lenkwinkelsprung entspricht der Einfahrt auf eine Kreisbahn, wobei der Anstieg der Fahrdynamikgrößen einerseits ausreichend gedämpft, andererseits möglichst schnell erfolgen sollte. Das Manöver wird sowohl für nach links, als auch nach rechts beginnende Lenkwinkeleingabe gefahren.

## 2.4 Reifenkraft

Der Reifen ist das Bindeglied zwischen dem Fahrzeug und der Fahrbahn. Die Reifeneigenschaften beeinflussen das Fahrverhalten signifikant, da sie für die Kraftübertragung und damit für die Kurshaltung des Fahrzeugs verantwortlich sind. Der Reifen nimmt in vertikaler Richtung die Radlast auf und überträgt in Längs- und Querrichtung Kräfte, weshalb er als räumliches Kraftelement betrachtet werden kann (s. Abb. 2.13).

Zur Beschreibung der Kraftübertragungen existieren verschiedene Modellierungsansätze, die grundsätzlich in die Kategorien mathematische Modelle, physikalische Modelle und Mischformen unterteilt werden.

Ziel dieses Abschnittes ist es, Reifenkenngrößen vorzustellen, die die Physik des Reifens beschreiben. Darauf aufbauend folgt die Beschreibung eines Reifenmodells, das abhängig von kinematischen Größen die statische Reifenkraft berechnet. Abschließend wird die Berechnung der dynamischen Reifenkraft beschrieben. Für detailliertere Betrachtungen unterschiedlicher Reifenmodellierungen sei auf Zomotor (1987), Mitschke (2003), Burkhardt (1993), Gipser (2006) und Pacejka (2005) verwiesen.

### 2.4.1 Kennzeichnung der Reifenkräfte

Bei der Modellierung eines Fahrzeugs ergibt sich aus den resultierenden Kontaktkräften und Momenten die Beschreibung der Kraftwirkungen zwischen Reifen und Fahrbahn. Bei diesen handelt es sich um eingeprägte Kräfte und Momente, die sich in Abhängigkeit von Lage- und Geschwindigkeitsgrößen bestimmen lassen. In Abb. 2.13 wird die Kontaktkraft im Latsch in drei Komponenten zerlegt (s. Abb. 2.13 und Tabelle 2.4).

Tabelle 2.4: Kräfte und kinematische Größen am Reifen

Bezeichnung	Beschreibung
$F_{R_x}$	Längskraft/Umfangskraft entlang der x-Achse von $K_R$
$F_{R_y}$	Querkraft/Seitenkraft entlang der y-Achse von $K_R$
$F_{R_z}$	Vertikalkraft/Aufstandskraft entlang der z-Achse von $K_R$
$M_{A,B}$	Antriebs- und Bremsmoment um die y-Achse von $K_R$
$v_R$	Geschwindigkeitsvektor des Radmittelpunktes
$v_{R_x} = v_R \cos \alpha$	Geschwindigkeit des Radmittelpunktes in Richtung der x-Achse von $K_R$
$v_{R_y} = v_R \sin \alpha$	Geschwindigkeit des Radmittelpunktes in Richtung der y-Achse von $K_R$
$\alpha$	Schräglaufwinkel des Reifens

Die Kräfte werden in die Koordinaten des radträgerfesten Systems dargestellt, wobei die Eigendrehung des Rades unberücksichtigt bleibt. Die Vertikalkraft wirkt einseitig, da der Reifen nur Druckkräfte überträgt. Die Reifenkräfte, die parallel zum Latsch entstehen,

werden aus Schlupf und Schräglaufwinkel durch entsprechende Kraftgesetze errechnet. Diese hängen von der Materialpaarung Reifen/Fahrbahn sowie von Gummimischung und Größe des Reifens ab.

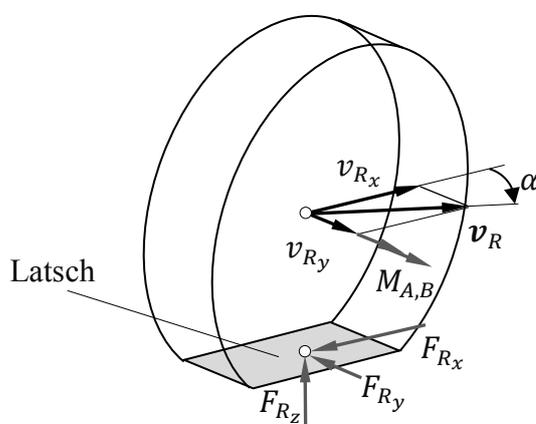


Abb. 2.13: Kontaktkräfte im Reifenlatsch und kinematische Größen am Reifen

#### 2.4.2 Reifen unter Einwirkung von Längs- und Seitenkraft

Das physikalische Prinzip der Übertragung von Längs- und Seitenkräften in der Latschfläche unterliegt dem Kraftschluss durch Adhäsionsreibung (intermolekulare Bindungskräfte zwischen Reifengummi und Fahrbahnoberfläche) und durch Hysteresereibung (Formschluss durch Verzahnungseffekte zwischen Reifenlatsch und Fahrbahnoberfläche) (Gillespie 1992). Beide Effekte sind abhängig von den Relativbewegungen zwischen Reifenlatsch und Fahrbahn.

Die Entstehung von Umfangs- und Seitenkraft lässt sich durch Scherdeformationen des Reifenlatsches in Kombination mit dem Reibungsverhalten zwischen Reifenlatsch und Fahrbahnfläche beschreiben. Dies erfordert eine makroskopische Beschreibung der Schermechanismen, die sich beispielsweise problemlos in einen Mehrkörpersystemformalismus einbinden lassen. Am besten eignen sich Beschreibungen wie Längsschlupf (Umfangsschlupf)  $s$  und Querschlupf (Schräglaufwinkel)  $\alpha$ , die auf die Relativbewegungen im Latsch zurückzuführen sind.

##### **Längsschlupf**

Der Längsschlupf ist eine kinematische Größe, die die Relativbewegung zwischen Reifen und Fahrbahn in Längsrichtung des Rades angibt. Das Rad kann dabei den Bewegungszustand „angetrieben“, „gebremst“ und „antriebsfrei rollend“ annehmen.

Das Rad wird hier zur Vereinfachung als starrer Körper betrachtet, weshalb der Schlupf auch Starrkörperschlupf genannt wird. Die Reifenkontaktfläche vereinfacht sich beim starren Rad von einer Latschfläche zu einer Linie. Der Fahrzeugreifen bewegt sich – unter Annahme eines starren Rades – mit einer Kombination aus Rollen und Gleiten (Wälzen) (Schramm 2010). Durch die Berücksichtigung des dynamischen Reifenradius entsteht ein Ersatzmodell, das den Schlupf gut wiedergibt.

In Abb. 2.14 ist der Freischnitt eines ebenen, in Längsrichtung rollenden Rades dargestellt, die Größen sind in Tabelle 2.5 angegeben. Kinematische Radaufhängungsgrößen wie Sturz- und Spurwinkel werden vernachlässigt.

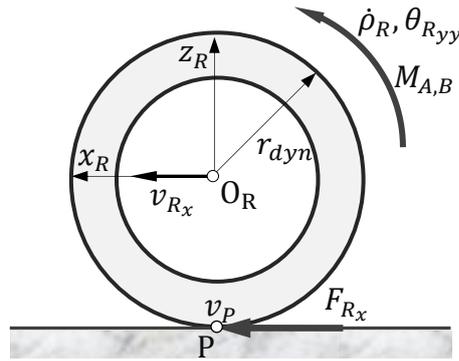


Abb. 2.14: Kräfte und Momente am Reifen

Tabelle 2.5: Größen am bewegten Rad

Bezeichnung	Beschreibung
$\dot{\theta}_R$	Winkelgeschwindigkeit des Rades um die y-Achse des Radsystems $K_R$
$\theta_{R_{yy}}$	Reifenträgheitsmoment um die y-Achse des Rades
$F_{R_x}$	Reifenlängskraft entlang der x-Achse des Radsystems $K_R$
$M_{A,B}$	Antriebs- und Bremsmoment um die y-Achse des Radsystems $K_R$
$v_{R_x}$	Geschwindigkeit des Radmittelpunktes in Längsrichtung
$v_P$	Geschwindigkeit des (fiktiven) Radaufstandspunktes P (P fällt in Abb. 2.14 mit dem Momentanpol zusammen)
$r_{dyn} = \frac{U_R}{2\pi}$	Dynamischer (effektiver) Reifenradius

Der Drallsatz für das Rad ergibt sich zu

$$\theta_{R_{yy}} \ddot{\theta}_R = M_{A,B} - F_{R_x} r_{dyn}. \quad (2.7)$$

Die Winkelbeschleunigung  $\ddot{\theta}_R$  hängt vom Antriebs- und Bremsmoment  $M_{A,B}$  und der Reifenlängskraft  $F_{R_x}$ , die parallel zur Fahrbahn verläuft, ab. Der dynamische Reifenradius  $r_{dyn}$  wird über den Abrollumfang  $U_R$  des Rades bestimmt. Dazu wird das Rad ohne Antriebs- und Bremskräfte mit einer bestimmten Geschwindigkeit geschleppt und der Abrollumfang bei einer Umdrehung des Rades auf der Fahrbahn abgemessen.

Bei einem ideal (schlupffrei) rollenden Rad verschwindet die Geschwindigkeit  $v_P$  des Radaufstandspunktes und für die Geschwindigkeit des Radmittelpunktes gilt  $v_{R_x} = \dot{\theta}_R r_{dyn}$ . Für ein beschleunigtes oder gebremstes Rad entsteht im Radaufstandspunkt eine Relativgeschwindigkeit bezogen auf die Radgeschwindigkeit, der sogenannte Schlupf. Um zwischen Antriebsschlupf  $s_A$  und Bremschlupf  $s_B$  zu unterscheiden, wird der Betrag der Relativgeschwindigkeit im gedachten Radaufstandspunkt P auf den jeweils größeren Wert der beiden Größen  $v_{R_x}$  bzw.  $\dot{\theta}_R r_{dyn}$  bezogen. Am angetriebenen Rad ergibt sich somit der Antriebsschlupf ( $v_{R_x} < \dot{\theta}_R r_{dyn}$ ) mit

$$s_A = \frac{v_P}{\dot{\theta}_R r_{dyn}} = \frac{\dot{\theta}_R r_{dyn} - v_{R_x}}{\dot{\theta}_R r_{dyn}}. \quad (2.8)$$

Am gebremsten Rad ergibt sich der Bremschlupf ( $v_{R_x} > \dot{\theta}_R r_{dyn}$ ) zu

$$s_B = \frac{v_P}{v_{R_x}} = \frac{v_{R_x} - \dot{\theta}_R r_{dyn}}{v_{R_x}}. \quad (2.9)$$

Die nachfolgende Kombination aus den Gleichungen (2.8) und (2.9) ergibt sich zu

$$s_{A,B} = \frac{v_{R_x} - \dot{\rho}_R r_{dyn}}{\max(|\dot{\rho}_R r_{dyn}|, |v_{R_x}|)} \quad (2.10)$$

Der Schlupf  $s_{A,B}$  wird im Intervall  $[-1,1] = \{s_{A,B} \in \mathbb{R} \mid -1 \leq s_{A,B} \leq 1\}$  definiert. Für ein Blockieren des Rades ( $v_R \neq 0, \dot{\rho}_R = 0$ ) ergibt sich der Schlupf zu  $s_{A,B} = -1$ . Für ein durchdrehendes Rad ( $v_R = 0, \dot{\rho}_R \neq 0$ ) ergibt sich der Schlupf zu  $s_{A,B} = 1$ . Die Werte des Längsschlupfes sind

- $s_{A,B} = 1$ : durchdrehendes Rad,
- $0 < s_{A,B} < 1$ : beschleunigtes Rad,
- $s_{A,B} = 0$ : freies Rollen,
- $-1 < s_{A,B} < 0$ : verzögertes Rad und
- $s_{A,B} = -1$ : blockierendes Rad.

Der Schlupf wird häufig in Prozent angegeben, z. B. entspricht  $s_A = 20\%$   $s_A = 0,2$ .

Die übertragene Umfangskraft  $F_{R_x}$  ist in Abhängigkeit vom Umfangsschlupf  $s_{A,B}$  dargestellt. Der qualitative Umfangskraftverlauf in Abhängigkeit des Längsschlupfes ist in Abb. 2.15 dargestellt. Abhängig vom Reifentyp und der Fahrbahnbeschaffenheit ändern sich die maximal übertragbare Längskraft und der Kurvenverlauf. Die Umfangskraft steigt zunächst linear an, bis sie in die Sättigung übergeht und den Maximalwert  $F_{R_x,max}$  erreicht. In diesem Bereich herrschen im Latsch überwiegend Haftbedingungen. Für kleine Schlupfwerte wird die Umfangskraft mit der Längsschlupfsteifigkeit  $c_s$  über den linearen Zusammenhang

$$F_{R_x} = c_s s_{A,B} \quad (2.11)$$

gut beschrieben (vgl. Abb. 2.15).

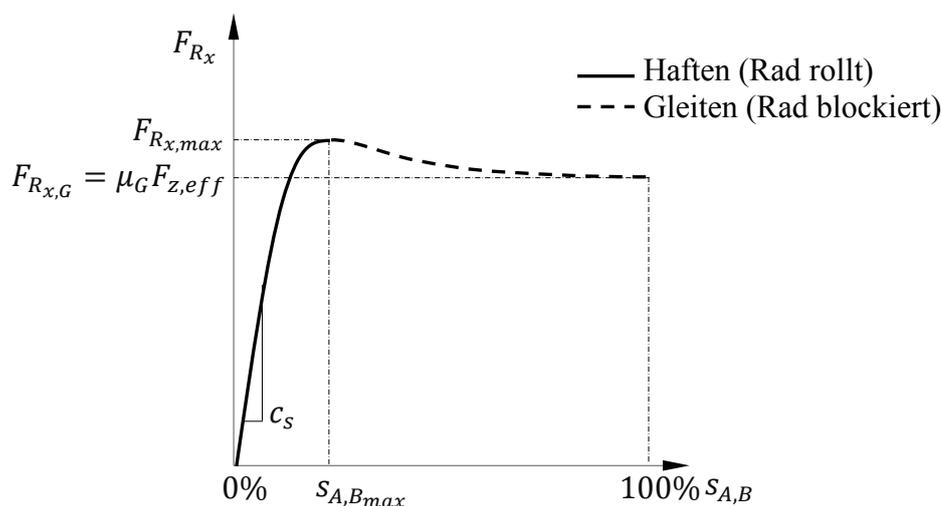


Abb. 2.15: Qualitativer Längskraftverlauf in Abhängigkeit des Umfangsschlupfs

Steigt der Schlupf über den Wert  $s_{A,B,max}$  an (s. Abb. 2.15), so verringert sich die Längskraft aufgrund von Gleitvorgängen in der Latschfläche. Steigt der Längsschlupf weiter an, fällt die übertragbare Längskraft auf den Wert  $F_{R_x,G}$ , der häufig geringer ist als die Kraft

$F_{R_{x,max}}$ . In diesem Bereich gleitet der komplette Latsch. Das Rad blockiert und kann dadurch keine Seitenkraft aufbauen.

### Querschluﬀ

Der Querschluﬀ (Schräglaufwinkel) ist eine kinematische Größe, die die Relativbewegung zwischen Reifen und Fahrbahn in Querrichtung bzw. Seitenrichtung des Rades beschreibt. Wird ein Fahrzeug beispielsweise bei höherer Geschwindigkeit auf eine Kreisbahn gelenkt, besitzen die Fahrzeugräder einen Geschwindigkeitsanteil quer zur Rollrichtung. Zwischen der Bewegungsrichtung des Radmittelpunktes und der Längsrichtung des Rades stellt sich der Schräglauﬀwinkel  $\alpha$  ein (vgl. Abb. 2.4, Abb. 2.13 und Abb. 2.16). Der Schräglauﬀwinkel berechnet sich zu

$$\alpha = \operatorname{atan} \frac{v_{Ry}}{v_{Rx}}. \quad (2.12)$$

Im normalen Fahrbetrieb ist  $|\alpha| < 12^\circ$  (Ersoy 2007). Es wird davon ausgegangen, dass der Reifenlatsch in Längs- und Seitenrichtung ähnliche Deformationseigenschaften hat, sodass bei der Modellierung der Seitenkraftübertragung dasselbe Prinzip gilt wie bei der Modellierung der Längskraftübertragung. Abb. 2.16 gibt das Wirkprinzip der Seitenkraftübertragung wieder, wichtige Größen finden sich in Tabelle 2.6.

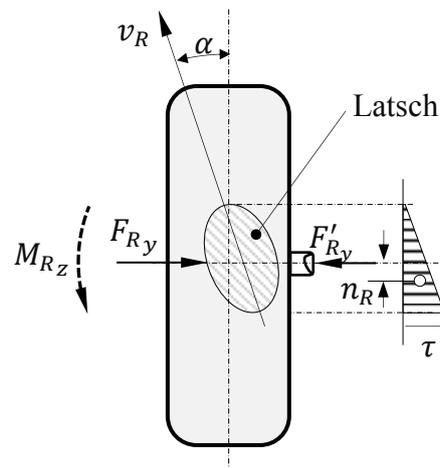


Abb. 2.16: Reifen unter Seitenkraft (Matschinsky 1986)

Tabelle 2.6: Größen am Reifen unter Seitenkraft

Bezeichnung	Beschreibung
$v_R$	Geschwindigkeit des Radmittelpunktes
$\alpha$	Schräglaufwinkel (Querschluﬀ)
$c_\alpha$	Schräglaufsteifigkeit (Quersteifigkeit)
$F_{Ry}$	Reifenseitenkraft entlang der y-Achse des Radsystems $K_R$
$F'_{Ry}$	Reaktionskraft
$M_{Rz}$	Rückstellmoment um die z-Achse des Radsystems $K_R$
$n_R$	Reifennachlauf aufgrund von Gleitvorgängen im Latsch
$\tau$	Tangentialspannung im Reifenlatsch

Beim Abrollen unter Seitenkraft  $F_{Ry}$  verschiebt sich der Latsch aufgrund von Materialeigenschaften quer zur Fahrtrichtung. Da das Rad gleichzeitig rollt, stellt sich der Schräglaufwinkel  $\alpha$  ein (s. Abb. 2.16). Die in den Latsch einlaufenden Profilelemente des Reifens haften zunächst an der Fahrbahn. Bei Durchlaufen des Latsches nimmt die seitliche Deformation der Profilelemente zu (vgl. Abb. 2.16). Bei kleineren Schräglaufwinkeln haften die Elemente bis zum Austritt aus dem Latsch auf der Fahrbahn und die Tangentialspannung in Reifenquerrichtung nimmt linear zum hinteren Latschrand zu (Schramm 2010). Für kleine Schräglaufwinkel gilt das lineare Kraftgesetz

$$F_{Ry} = c_\alpha \alpha. \quad (2.13)$$

Aufgrund der in Latschenauslaufrichtung zunehmenden Tangentialspannung  $\tau$  greift die resultierende Seitenkraft nicht mehr in der Mitte der Lauffläche an, sondern im Abstand  $n_R$  (Reifennachlauf) dahinter. Dies erzeugt ein Rückstellmoment

$$M_{Rz} = F_{Ry} n_R. \quad (2.14)$$

Der Reifennachlauf errechnet sich aus dem resultierenden Flächenschwerpunkt der trapezförmigen Spannungsverteilung (s. Abb. 2.16).

Mit wachsender Querverformung beginnen die Profilelemente im hinteren Bereich des Latsches zu gleiten. Dies begrenzt die übertragbare Seitenkraft und verringert den Reifennachlauf und damit das Rückstellmoment. Abb. 2.17 zeigt den qualitativen Seitenkraftverlauf in Abhängigkeit des Schräglaufwinkels. Die maximal übertragbare Seitenkraft und die Kurvencharakteristik variieren in Abhängigkeit vom Reifen.

Die Seitenkraft steigt zu Beginn des Einlaufens der Profilelemente in den Latscheinlauf linear an (s. Gleichungen (2.13) und Abb. 2.17), danach werden mit weiter ansteigendem Schräglaufwinkel die Auslenkungen der Profilelemente und damit die Tangentialspannungen zum hinteren Latschrand hin größer. Dabei gehen zunehmend Profilelemente vom Haften ins Gleiten über und die Seitenkraft steigt nicht mehr linear, sondern degressiv mit dem Schräglaufwinkel an. Mit zunehmendem Schräglaufwinkel breitet sich der Gleitbereich bis in den vorderen Latschbereich aus.

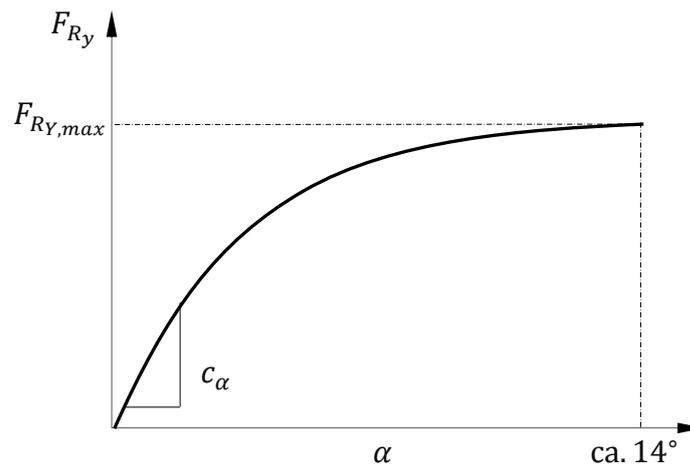


Abb. 2.17: Qualitativer Seitenkraftverlauf in Abhängigkeit des Schräglaufwinkels

### 2.4.3 Reifennormalkraft

Im Normalbetriebsbereich (kleine Radlasten) besteht eine annäherungsweise lineare Abhängigkeit der Reifenkräfte  $F_{Rx}$  und  $F_{Ry}$  in der Latschfläche von der aktuellen Vertikal-

kraft  $F_{R_z}$ . Bei sehr hohen Radlasten ändert sich diese Abhängigkeit. Die Radkräfte nehmen nicht mehr proportional mit der Vertikalkraft zu, sondern zeigen einen degressiven Verlauf, da die Reibungsbindung des Reifengummis im Latschbereich mit steigender Anpresskraft abnimmt (Schramm 2010). Das bedeutet, dass mit zunehmender Reifennormalkraft die maximal mögliche Seitenführungskraft nicht proportional zunimmt, hierdurch wird die Querdynamik des Fahrzeugs beeinflussen (z. B. durch aktive Stabilisatoren oder durch aktive Fahrwerksysteme). In Abb. 2.18 ist beispielhaft die Schräglaufsteifigkeit  $c_\alpha$  eines Reifens in Abhängigkeit der Vertikalkraft aufgezeigt.

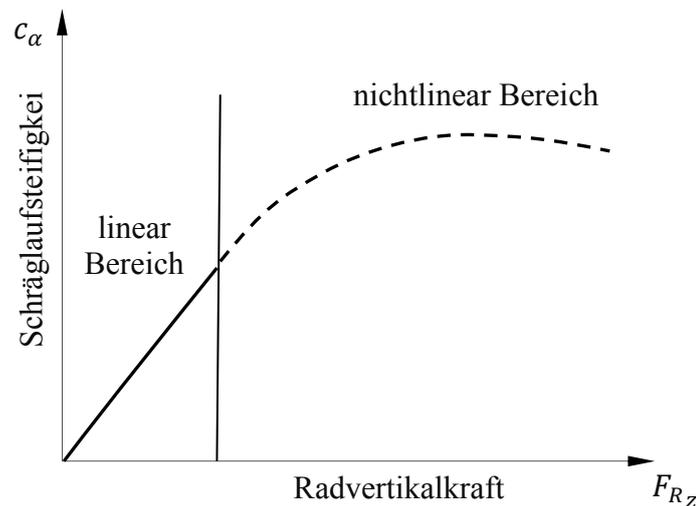


Abb. 2.18: Qualitative Abhängigkeit der Schräglaufsteifigkeit von der Radvertikalkraft

Der Übergang vom linearen in den nichtlinearen Bereich ist hier definiert durch Überschreiten einer konstruktiven Betriebslast  $F_{R_z,B}$ . Der Kraftverlauf ist degressiv und kann beispielsweise mit der Einführung einer effektiven Radlast (vgl. (Ammon 1997))

$$F_{R_z,eff} = F_{R_z} \left( 1 - e_{R_z} \left( \frac{F_{R_z}}{F_{R_z,B}} \right)^2 \right) \quad (2.15)$$

berücksichtigt werden, die an Stelle der tatsächlichen Radlast  $F_{R_z}$  zur Berechnung der Radhorizontalkräfte verwendet wird. Der Degressionsparameter hat einen Wertebereich von typischerweise  $e_{R_z} \in [0,05, 0,09]$ .

#### 2.4.4 Magic Formula-Reifenmodell

Der folgende Abschnitt beschreibt das in dieser Arbeit verwendete Reifenmodell, das auf empirischen Messungen basiert. Die realistische Berechnung der Reifenkräfte und -momente ist nötig, um eine exakte Darstellung der Fahrzeugdynamik in der Simulation zu gewährleisten.

Das Magic Formula-Reifenmodell wurde an der TU Delft in den Niederlanden entwickelt (Pacejka 1993). Es ist eine mathematische (empirische) Beschreibung des Ein- und Ausgangsverhaltens des Rad-Fahrbahnkontaktes unter quasistationären Bedingungen. Das Modell stellt den Zusammenhang von kinematischen Reifengrößen und der Reifenkraft durch eine Kombination elementarer mathematischer Formeln dar. Durch quasistatische Rollen- oder Fahrversuchsmessungen an realen Reifen werden die Koeffizienten für die Kraftübertragungsformel bestimmt und die Charakteristika von Seitenführungskraft,

Längskraft und Rückstellmoment des Reifens erfasst. Vorteile des mathematischen Reifenmodells sind u. a.

- die Abbildung des Verlaufs der stationären Reifenkennlinien mit hoher Genauigkeit,
- die Veränderung des Verlaufs durch vier Parameter (gute Parametrierbarkeit und Beschaffbarkeit der Daten durch Messungen oder Parameteridentifikation),
- eine stetige (numerische Stabilität) und einfache (kurze Berechnungszeiten) Implementierung und Auswertung der Funktionen und
- die Durchführung von Parameterstudien von Reifenkennwerten mit Bezug auf das Fahrverhalten.

Es ist zu beachten, dass das empirische Reifenmodell eine lokal ebene Fahrbahn in der Reifenaufstandsfläche erfordert.

Die in dieser Arbeit verwendete abgewandelte Formulierung der Magic Formula zur Darstellung der stationären Reifenlängskraft ist gegeben durch (vgl. (Pacejka 2005))

$$F_{R_x}(s_{A,B}) = \underbrace{\mu_S \mu_{R_x} F_{R_{z,eff}}}_{D_{R_x}} \sin(C_{R_x} \arctan(B_{R_x} s_{A,B})). \quad (2.16)$$

Für die stationäre Reifenseitenkraft werden die entsprechenden Indizes getauscht. Die Reifenseitenkraft enthält zusätzlich die Sturzseitenkraft  $F_{R_y}$ , welche unabhängig von der Radlast  $F_{R_z}$  (s. Abschnitt 2.2.3) proportional zum Sturzwinkel ( $\gamma_R$ ) berechnet und zur Reifenseitenkraft addiert wird. In Tabelle 2.7 werden die verwendeten Formelparameter beschrieben.

Bei der Erstellung exakter Fahrzeugmodelle können die Parameter für die verwendeten Reifen aus Messdaten durch Approximation (vgl. (Pacejka 2005)) oder aus Parameteroptimierung (s. Kapitel 6) gewonnen werden. Der qualitative Verlauf der Basiskurven (stationäre Reifenkräfte) (s. Gl. (2.16)) ist in Abb. 2.19 dargestellt. In Abschnitt 2.4.6 werden die tatsächlichen Reifenkräfte berechnet, die sich verzögert in Abhängigkeit der Umfangsgeschwindigkeit aufbauen.

Zur Berechnung der Reifenseitenkräfte wird ebenfalls die Gleichung (2.16) herangezogen, jedoch unter Verwendung anderer Formelparameter.

Tabelle 2.7: Magic Formula-Parameter für die Reifenlängskraft

Bezeichnung	Beschreibung
$F_{R_x}$	Reifenlängskraft
$F_{R_y} = F_{R_{z,eff}} C_{R_y} \gamma_R$	Sturzseitenkraft
$F_{R_{z,eff}}$	Effektive Normalkraft (vgl. 2.4.3)
$\mu_S$	Reibwert der Straße
$\mu_{R_x}$	Formparameter der Reifenkraftkurve
$B_{R_x}$	Steifigkeitsfaktor der Kurve
$C_{R_x}$	Formfaktor der Kurve
$C_{R_y}$	Sturzabhängiger Faktor
$D_{R_x} = \mu_S \mu_{R_x} F_{R_{z,eff}}$	Maximalwert der Reifenhorizontalkraft
$B_{R_x} C_{R_x} F_{R_{z,eff}}$	Steigung der Kennlinien bei Nullschlupf (Steifigkeit)

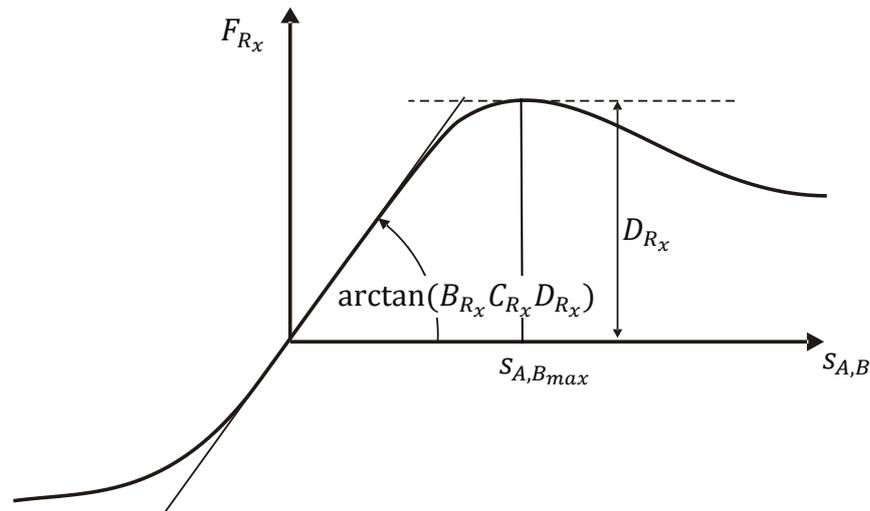


Abb. 2.19: Interpretation der Magic Formula-Parameter

### 2.4.5 Überlagerung der Horizontalkräfte

Die maximale Kraftschlussbeanspruchung im Reifenlatsch ist begrenzt, weshalb eine Berücksichtigung der Abhängigkeit von Längs- und Seitenkraft, wie zum Beispiel bei gleichzeitigem Lenken und Bremsen oder Beschleunigen in der Kurve, notwendig ist. Um ein realistisches Fahrverhalten zu simulieren, muss der Effekt der Reifensättigung bei hohen Kräften im Reifenlatsch beachtet werden. Diese Eigenschaft lässt sich durch die resultierende Reifenkraft im KAMM'schen Kreis (s. Abb. 2.20), der auf dem COULOMB'schen Reibungskreis basiert, beschreiben. Es gilt

$$\sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \leq \mu_{max} F_{z,eff}. \quad (2.17)$$

Der KAMM'sche Kreis bildet die Linie, auf der der Zusammenhang zwischen Längs- und Seitenkraft bei kombiniertem Schlupfzustand abgebildet ist. Die maximal übertragbare Seitenkraft ist bei gleichzeitigem Auftreten der Längskraft kleiner (und umgekehrt). In der Realität ist die Grenzkurve der maximal übertragbaren Horizontalkraft eine Ellipse, da bei realen Reifen in der Regel der Haftgrenzwert in Längsrichtung  $\mu_{max,x} F_{z,eff}$  größer ist als der Haftgrenzwert in Querrichtung  $\mu_{max,y} F_{z,eff}$  ist (Schramm 2010). Der kleinere gestrichelte Kreis in Abb. 2.20 entspricht der Reifengleitkraft  $\mu_G F_{z,eff}$ .

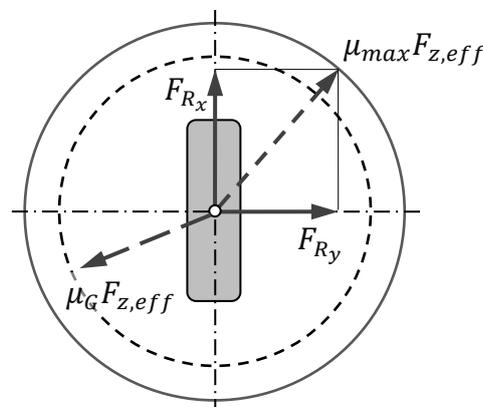


Abb. 2.20: Gleichzeitige Übertragung von Längs- und Seitenkraft (KAMM'scher Kreis)

Um Überlagerungseffekte bei Fahrzuständen zu berücksichtigen (Bremsen oder Beschleunigen in der Kurve), bei denen sowohl Umfangs- als auch Querschlupf auftreten, wird eine absolute Schlupfgröße  $s_a$  (der sogenannte kombinierte Schlupf) aus dem Längsschlupf  $s_{A,B}$  und dem Schräglaufwinkel  $\alpha$  definiert zu

$$s_a = \sqrt{s_{A,B}^2 + \tan^2 \alpha} \quad (2.18)$$

mit der Wirkrichtung

$$\psi_a = \arctan \frac{\tan \alpha}{s_{A,B}}. \quad (2.19)$$

Die resultierende Reifenkraft in Richtung des Winkels  $\psi_a$  errechnet sich zu

$$F_{\psi_a}(s_a) = \sqrt{\frac{s_{A,B}^2 F_{R_x}^2(s_a) + \tan^2 \alpha F_{R_y}^2(s_a)}{s_a^2}}. \quad (2.20)$$

Die resultierenden Reifenlängs- und Seitenkräfte ergeben sich nun wie folgt zu

$$F_{R_{a,x}} = F_{\psi_a}(s_a) \cos \psi_a = \frac{s_{A,B}}{s_a} F_{\psi_a}(s_a) \quad (2.21)$$

und

$$F_{R_{a,y}} = F_{\psi_a}(s_a) \sin \psi_a = \frac{\tan \alpha}{s_a} F_{\psi_a}(s_a). \quad (2.22)$$

#### 2.4.6 Instationäres Reifenverhalten

In den bisherigen Betrachtungen zum Reifenkraftübertragungsverhalten wird vorausgesetzt, dass Schräglauf, Umfangsschlupf sowie Reifenkräfte und Momente zeitlich konstant bleiben oder sich nur langsam ändern. In dieser Arbeit werden Fahrdynamikmodelle erstellt, die instationäre Manöver wie Lenkwinkelsprung und ABS-Bremsungen möglichst realistisch wiedergeben. Die Reifenkräfte und -momente folgen den Schlupfgrößen bei instationären Manövern verzögert (Antwortzeit des Reifens) (s. Abb. 2.21) und beeinflussen somit das dynamische Übertragungsfahrverhalten. Der instationäre Reifenkraftaufbau verhält sich wie ein Element erster Ordnung und kann durch ein  $PT_1$ -Glied abgebildet werden. Die Näherung für den zeitlichen Aufbau der dynamischen Längskraft wird durch die Differentialgleichung erster Ordnung

$$T_x \frac{dF_{R_x}}{dt} + F_{R_x} = F_{R_x,stat} \quad (2.23)$$

beschrieben (vgl. (Schramm 2010), (Heißing 2007), (Einsle 2010)).

Für die dynamische Seitenkraft gilt

$$T_y \frac{dF_{R_y}}{dt} + F_{R_y} = F_{R_y,stat}. \quad (2.24)$$

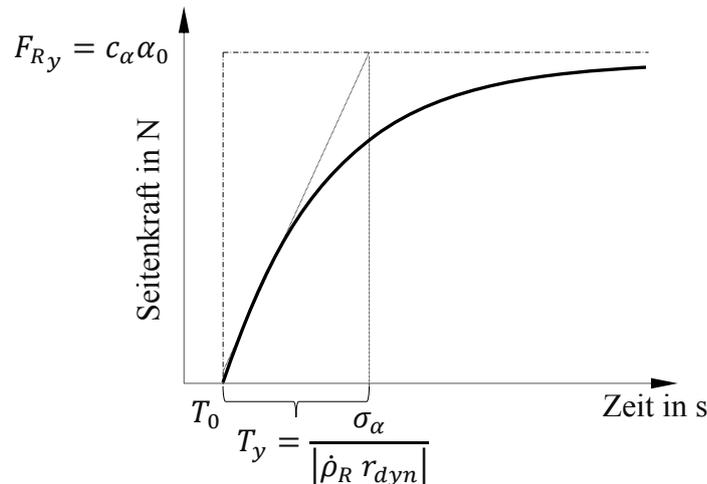
Die Zeitkonstanten  $T_x$  und  $T_y$  in (2.23) und (2.24) sind abhängig von der Rollgeschwindigkeit des Reifens und werden mit

$$T_x = \frac{c_s}{c_x |\dot{\rho}_R r_{dyn}|}, \quad T_y = \frac{c_\alpha}{c_y |\dot{\rho}_R r_{dyn}|}, \quad (2.25)$$

berechnet. Die verwendeten Formelparameter in Gleichung (2.25) sind in Tabelle 2.8 beschrieben.

Tabelle 2.8: Formelparameter für die Gleichung (2.25)

Bezeichnung	Beschreibung
$c_x$	Statische Reifenlängssteifigkeit
$c_y$	Statische Reifenseitensteifigkeit
$ \dot{\rho}_R r_{dyn} $	Betrag der Reifenumfangsgeschwindigkeit
$F_{R_x,stat}$	Stat. Reifenlängskraft berechnet durch das MF-Modell mit Schlupf $s_{A,B}$ unter Berücksichtigung des Kamm'schen Kreises (vgl. 2.4.5)
$F_{R_y,stat}$	Sta. Reifenquerkraft berechnet durch das MF-Modell mit Schräglauf $\alpha$ unter Berücksichtigung des Kamm'schen Kreises (vgl. 2.4.5)

Abb. 2.21: Zeitverlauf der Seitenkraft  $F_{Ry}$  bei einem Schräglaufwinkelsprung auf  $\alpha_0$  bei  $T_0$  (Heißing 2007)

Der verzögerte Kraftaufbau ist abhängig von der Einlaufstrecke. Diese Abhängigkeit wird durch die Einlauflänge  $\sigma_{R_x}$  für die Längskraft, die sich aus dem Quotienten der Längsschlupfsteifigkeit  $c_s$  und Reifenlängssteifigkeit  $c_x$

$$\sigma_{R_x} = \frac{c_s}{c_x} \quad (2.26)$$

berechnet und durch die Einlauflänge  $\sigma_{R_y}$  für die Seitenkraft, die sich aus dem Quotienten der Reifenschräglaufsteifigkeit  $c_\alpha$  und der Seitensteifigkeit  $c_y$

$$\sigma_{R_y} = \frac{c_\alpha}{c_y} \quad (2.27)$$

berechnet, berücksichtigt.

Die Einlauflänge  $\sigma_R$  beschreibt den Weg, den der Reifen zurücklegen muss, um ca. zwei Drittel der dynamischen Reifenkraft aufzubauen. Dabei ist die Einlauflänge in der Reifenquerrichtung höher als in der Umfangsrichtung. Dies hängt mit der Quernachgiebigkeit des Reifens zusammen, die größer ist als die Längsnachgiebigkeit (Gipsner 1999).

Die Lösung der Differentialgleichungen (2.23) und (2.24) ergeben nach Diskretisierung (s. (Gipsner 1999)) die Differenzengleichung

$$F_{R_i}(n+1) = e^{-\frac{\Delta t}{T_i}} \left( F_{R_i}(n) - F_{R_i,stat}(n) \right) + F_{R_i,stat}(n), \quad i = x, y. \quad (2.28)$$

Die Überführung des mathematischen Modells des realen Systems in ein zeitdiskretes Modell ist notwendig, damit es in Echtzeit lösbar ist.

## 3 Modellbildung

Die Vorgehensweise der Modellierung basiert auf den in Hiller (1986), Hiller (1989), Woernle (1988), Schnelle (1990) und Schramm (2010) vorgestellten Methoden zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen von Fahrzeugmodellen. Zunächst wird die Modellierung des Fahrzeugaufbaus beschrieben und die verwendete Vorgehensweise zur allgemeinen Aufstellung der räumlichen Kinematik von Radaufhängungen in modularer Form erläutert. Daraufhin werden die Bewegungsgleichungen mit Berücksichtigung der modularen Radaufhängungskinematik und die einfache Radaufhängung des generischen Fahrzeugmodells (Zweispurmodell) vorgestellt, das als Grundlage für die Untersuchungen in Kapitel 5 und 6 dient. Abschließend wird die Kinematik der komplexen Vorder- und Hinterradaufhängung des speziellen Fahrzeugmodells aufgestellt. Die Ergebnisse der Radkinematiksimulation sowie ein Vergleich zwischen dem generischen und dem speziellen Fahrzeugmodell finden sich im Kapitel 7.

### 3.1 Modellierung des Fahrzeugaufbaus

Die Fahrdynamik lässt sich mit Modellen beschreiben, die mithilfe der Mehrkörpermodellierung erstellt werden. Mehrkörpersysteme (MKS) bestehen aus Kraftelementen (z. B. Federn und Dämpfern), starren Körpern und idealen Gelenken, die masselos, reibungs- und spielfrei sind. Die in dieser Arbeit erstellten Modelle berücksichtigen nur diejenigen Komponenten, die wesentlich für eine realitätsnahe Wiedergabe der Fahrdynamik sind. Zu diesen Elementen gehören neben dem Fahrzeugaufbau die Vorder- und Hinterachse, die Lenkung sowie die Räder. Da das Fahrzeugfahrverhalten vor allem die Querdynamik wiedergeben soll, wird der Antriebsstrang nicht berücksichtigt.

#### 3.1.1 Allgemeine Freiheitsgrade des MKS-Fahrzeugmodells

Der Fahrzeugaufbau (tragende Fahrzeugkarosserie) ist als ein starrer Körper mit sechs Starrkörperfreiheitsgraden modelliert, der sich relativ zum Inertialsystem (s. Abschnitt 2.1) bewegt. An dem Fahrzeugaufbau sind die Bestandteile der Vorder- und Hinterachse gelagert. Die Achsen bestehen aus jeweils einer rechten und einer linken Radaufhängung. In Abb. 3.1 sind die Freiheitsgrade eines allgemeinen Fahrzeugs dargestellt. Um eine allgemeine Radaufhängung zu berücksichtigen, wird deren Einfederbewegung jeweils durch eine verallgemeinerte Koordinate  $c_i, i = 1, \dots, 4$  wiedergegeben. Der Lenkwinkel ist ein Eingang mit der Variablen  $\delta$ . Die Lenkbewegung der Räder kann durch einen Zahnstangenmechanismus oder ein Lenktrapez unter Berücksichtigung einer Lenkübersetzung erzeugt werden. Der Lenkwinkel lässt sich jedoch auch direkt an den Vorderrädern einprägen. Die Radeigendrehung erhält die verallgemeinerte Koordinate  $\rho_{R_i}, i = 1, \dots, 4$ . Der Radaufhängungstyp ist zunächst unbestimmt und die Kinematik von Radträger und Rad wird in Abhängigkeit von  $c_i, \delta$  und  $\rho_{R_i}$  ausgedrückt. Der Vortrieb des Fahrzeugs wird durch ein an den Rädern angreifendes Antriebs- bzw. Bremsmoment  $M_{A,B}$  gewährleistet, das ebenfalls eine Eingangsgröße ist.

Das in Abb. 3.1 dargestellte Fahrzeugmodell besteht aus neun Körpern (s. Tabelle 3.1). Es wird nur die Masse und Trägheit der dominierenden Körper wie Radträger und Rad berücksichtigt. Die Massen und Trägheit der einzelnen Lenker der Radaufhängungs- sowie der Lenkungsmechanik werden nicht berücksichtigt bzw. zum Körper des Radträgers aufaddiert. Das Fahrzeugmodell besitzt insgesamt  $f = 14$  Freiheitsgrade und zwei Eingänge. In Tabelle 3.2 werden die verallgemeinerten Koordinaten und in Tabelle 3.3 die verallgemeinerten Geschwindigkeiten des Modells wiedergegeben, in Tabelle 3.4 die Eingangsgrößen am Fahrzeug.

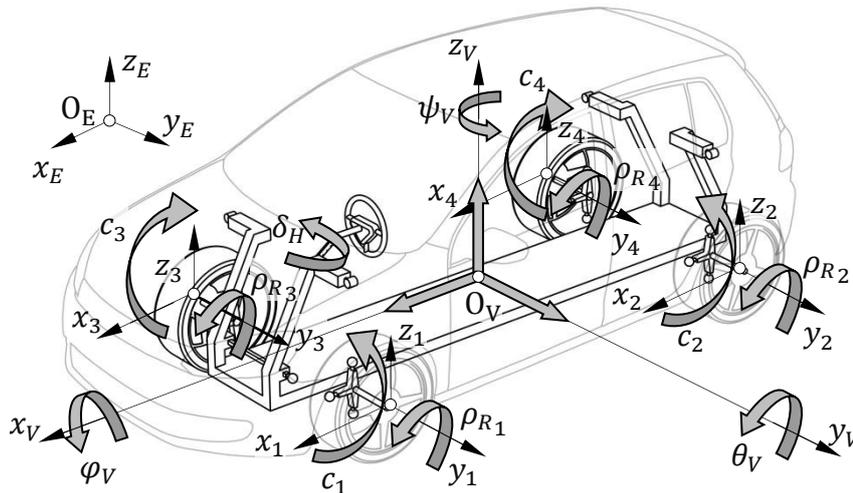


Abb. 3.1: MKS-Modell des repräsentativen Referenzfahrzeugs

Tabelle 3.1: Massebehaftete Körper  $K_i$ , mit  $i=1, \dots, 9$

Körper	Beschreibung	Masse	Trägheitstensor im körperfesten Koordinatensystem, bezogen auf den jeweiligen Massenmittelpunkt
$K_1$	Aufbau	$m_V$	${}^V\theta_V$
$K_2, \dots, K_5$	Radträger	$m_{T_i}$	${}^V\theta_{T_i}$
$K_6, \dots, K_9$	Räder	$m_{R_i}$	${}^V\theta_{R_i}$

Tabelle 3.2: Verallgemeinerte Koordinaten  $q_i$ , mit  $i=1, \dots, 14$ .

Bezeichnung	Beschreibung
$x_V, y_V, z_V$	Koordinaten des Fahrzeugaufbaus
$\psi_V, \theta_V, \varphi_V$	KARDAN-Winkel zur Beschreibung der Fahrzeugaufbauorientierung
$c_i, i = 1, \dots, 4$	Koordinate der Radträgereinfederung
$\rho_{R_i}, i = 1, \dots, 4$	Drehwinkel der Räder um ihre Drehachse $\mathbf{u}_{R_i}$

Tabelle 3.3: Verallgemeinerte Geschwindigkeiten  $z_i$ , mit  $i=1, \dots, 14$ .

Bezeichnung	Beschreibung
$v_{V_x}, v_{V_y}, v_{V_z}$	Koordinaten der translatorischen Aufbaugeschwindigkeit
$\omega_{V_x}, \omega_{V_y}, \omega_{V_z}$	Koordinaten der rotatorischen Aufbaugeschwindigkeiten
$\dot{c}_i, i = 1, \dots, 4$	Koordinate der Radträgereinfederungsgeschwindigkeit
$\dot{\rho}_{R_i}, i = 1, \dots, 4$	Drehgeschw. der Räder um ihre Drehachse $\mathbf{u}_{R_i}$

Die verallgemeinerten Koordinaten und die verallgemeinerten Geschwindigkeiten werden jeweils zu einem  $14 \times 1$ -Vektor

$$\mathbf{q} = [x_V \ y_V \ z_V \ \psi_V \ \theta_V \ \varphi_V \mid c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \mid \rho_{R_1} \ \rho_{R_2} \ \rho_{R_3} \ \rho_{R_4}]^T \quad (3.1)$$

und

$$\mathbf{z} = [v_{Vx} \ v_{Vy} \ v_{Vz} \ \omega_{Vx} \ \omega_{Vy} \ \omega_{Vz} \mid \dot{c}_1 \ \dot{c}_2 \ \dot{c}_3 \ \dot{c}_4 \mid \dot{\rho}_{R_1} \ \dot{\rho}_{R_2} \ \dot{\rho}_{R_3} \ \dot{\rho}_{R_4}]^T \quad (3.2)$$

zusammengefasst.

Tabelle 3.4: Eingangsgrößen  $u_i$ , mit  $i=1,2$ .

Bezeichnung	Beschreibung
$\delta(t, \mathbf{r}_V)$	Lenkwinkelbewegung in Abhängigkeit der Zeit bzw. der Position
$M_{A,B}$	Antriebs- bzw. Bremsmoment

### 3.1.2 Kinematik des Fahrzeugaufbaus

Der Fahrzeugaufbau bewegt sich frei im Raum. Seine Freiheitsgrade setzen sich aus drei translatorischen und drei rotatorischen Freiheitsgraden zusammen, die die räumliche Bewegung beschreiben. Um die Position eines beliebigen aufbaufesten Punktes im Inertialsystem zu beschreiben, müssen die dementsprechenden Gleichungen aufgestellt werden. Dazu werden die Position des Fahrzeugs im Inertialsystem und die Drehung des Fahrzeugs gegenüber dem Inertialsystem benötigt. Im Folgenden werden die Translation und die Rotation des Fahrzeugaufbaus beschrieben und die entsprechenden translatorischen und rotatorischen JACOBI-Matrizen des Fahrzeugaufbaus aufgestellt.

#### Translation

Der Ortsvektor vom Ursprung des Inertialsystems  $K_E$  zum Massenmittelpunkt des Fahrzeugaufbaus  $K_V$  lautet

$${}^E \mathbf{r}_1 = {}^E \mathbf{r}_V = [{}^E x_V \quad {}^E y_V \quad {}^E z_V]^T = {}^E \mathbf{T}_V [{}^V x_V \quad {}^V y_V \quad {}^V z_V]^T. \quad (3.3)$$

Die Drehung vom fahrzeugfesten Koordinatensystem  $K_V$  ins Inertialsystem  $K_E$  wird durch die Drehmatrix (Transformationsmatrix)  ${}^E \mathbf{T}_V$  (s. Gl. (2.2)) beschrieben. Dargestellt in Koordinaten des Inertialsystems ergibt sich die absolute Translationsgeschwindigkeit des Aufbaus durch Differenzieren von Gleichung (3.3) - unter der Berücksichtigung, dass  ${}^E \dot{\mathbf{T}}_V \mathbf{x} = {}^E \mathbf{T}_V ({}^V \boldsymbol{\omega}_V \times \mathbf{x})$  der POISSON-Gleichung entspricht - zu

$${}^E \mathbf{v}_1 = {}^E \mathbf{v}_V = \begin{bmatrix} {}^E \dot{x}_V \\ {}^E \dot{y}_V \\ {}^E \dot{z}_V \end{bmatrix} = {}^E \mathbf{T}_V \begin{bmatrix} {}^V v_{Vx} \\ {}^V v_{Vy} \\ {}^V v_{Vz} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Die verallgemeinerten Geschwindigkeiten sind die Geschwindigkeiten in den Koordinatenrichtungen des fahrzeugfesten Systems. Die Translationsbeschleunigung des Aufbaus relativ zum Inertialsystem ergibt sich durch das Differenzieren von der Gleichung (3.4). Unter Berücksichtigung der POISSON-Gleichung bestimmt sich die Translationsbeschleunigung des Aufbaus zu

$${}^E \mathbf{a}_1 = {}^E \mathbf{a}_V = \begin{bmatrix} {}^E \ddot{x}_V \\ {}^E \ddot{y}_V \\ {}^E \ddot{z}_V \end{bmatrix} = {}^E \mathbf{T}_V \left( \begin{bmatrix} {}^V \dot{v}_{Vx} \\ {}^V \dot{v}_{Vy} \\ {}^V \dot{v}_{Vz} \end{bmatrix} + {}^V \boldsymbol{\omega}_V \times \begin{bmatrix} {}^V v_{Vx} \\ {}^V v_{Vy} \\ {}^V v_{Vz} \end{bmatrix} \right). \quad (3.5)$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Aufbaus  ${}^V \boldsymbol{\omega}_V$  wurde bereits in Kapitel 2 mit der Gleichung (2.3) angegeben. Unter Berücksichtigung der verallgemeinerten Koordinaten der Radträger und Räder wird die JACOBI-Matrix der Translation des Aufbaus im aufbaufesten Koordinatensystem als  $3 \times 14$ -Blockmatrix wiedergegeben. Dadurch ist die Zuordnung der durch die Matrixbereiche beschriebenen verallgemeinerten Geschwindigkeiten zu den einzelnen Baugruppen des Fahrzeugs

$$\mathbf{J}_{Tra_1} = \mathbf{J}_{Tra_V} = \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{I}_{[3 \times 3]} & \mathbf{0}_{[3 \times 3]} & \mathbf{0}_{[3 \times 4]} \\ \hline \text{Aufbau} & \text{Radträger} & \text{Rad} \end{array} \right]. \quad (3.6)$$

### Rotation

Die KARDAN -Winkel  $\psi_V$ ,  $\theta_V$  und  $\varphi_V$  (s. Abschnitt 2.1) beschreiben die Fahrzeugaufbau-drehung relativ zum Inertialsystem. Die mathematische Beschreibung erfolgt durch die Transformationsmatrix  ${}^E \mathbf{T}_V$  (s. Gl. (2.2)), die die Drehung vom fahrzeugfesten Koordinatensystem in das Inertialsystem beschreibt.

Dargestellt in Koordinaten des fahrzeugfesten Koordinatensystems ergibt die Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugaufbaus relativ zum Inertialsystem

$${}^V_E \boldsymbol{\omega}_V = \begin{bmatrix} \omega_{Vx} \\ \omega_{Vy} \\ \omega_{Vz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_V - \dot{\psi}_V s \theta_V \\ \dot{\theta}_V c \varphi_V + \dot{\psi}_V c \theta_V s \varphi_V \\ -\dot{\theta}_V s \varphi_V + \dot{\psi}_V c \theta_V c \varphi_V \end{bmatrix} = \mathbf{T}_\omega \begin{bmatrix} \dot{\psi}_V \\ \dot{\theta}_V \\ \dot{\varphi}_V \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

$\mathbf{T}_\omega$  ist durch die Gleichung (2.3) gegeben. Dargestellt im aufbaufesten Koordinatensystem wird die Beschleunigung des Aufbaus relativ zum Inertialsystem durch die Differentiation der Gleichung (3.7) berechnet. Die verallgemeinerten Beschleunigungen des Fahrzeugaufbaus in Abhängigkeit von den verallgemeinerten Koordinaten ergeben sich somit zu

$${}^V_E \boldsymbol{\alpha}_V = {}^V_E \dot{\boldsymbol{\omega}}_V = [\dot{\omega}_{Vx} \quad \dot{\omega}_{Vy} \quad \dot{\omega}_{Vz}]^T, \quad (3.8)$$

(s. Gl. 2.4). Die  $3 \times 14$ -JACOBI-Blockmatrix der Rotation für den Fahrzeugaufbau ergibt sich entsprechend der Gleichung (3.7) mit derselben Blockaufteilung wie in Gleichung (3.6) zu

$$\mathbf{J}_{Rot_1} = \mathbf{J}_{Rot_V} = \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{0}_{[3 \times 3]} & \mathbf{I}_{[3 \times 3]} & \mathbf{0}_{[3 \times 4]} \\ \hline \text{Aufbau} & \text{Radträger} & \text{Rad} \end{array} \right]. \quad (3.9)$$

### Zusammenhang zwischen verallgemeinerten Geschwindigkeiten und Koordinaten

Der Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Geschwindigkeiten und der Ableitung der verallgemeinerten Koordinaten für den Fahrzeugaufbau ist durch die Blockdiagonalmatrix  $\mathbf{K}(\mathbf{q})$  gegeben zu

$$\mathbf{z} = \mathbf{K}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} {}^V T_E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\omega & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{[4 \times 4]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{[4 \times 4]} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.10)$$

Zur Lösung der Bewegungsgleichungen bedarf es der Invertierung der Gl. (3.10) zu

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{z}. \quad (3.11)$$

Die Matrix  $\mathbf{T}_\omega$  ist invertierbar für  $\theta_V \neq 90^\circ$ . Es ergibt sich

$$\mathbf{T}_\omega^{-1} = \frac{1}{c\theta_V} \begin{bmatrix} 0 & s\varphi_V & c\varphi_V \\ 0 & c\theta_V c\varphi_V & -c\theta_V s\varphi_V \\ c\theta_V & s\theta_V s\varphi_V & s\theta_V c\varphi_V \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Die Bedingung eines Nickwinkels  $\theta_V \neq 90^\circ$  ist für normale Fahrsituationen erfüllt.

## 3.2 Kinematik der Radaufhängung

In Fahrzeugen werden unterschiedlichste Radaufhängungstypen verbaut. Die Aufgabe der Radaufhängung ist es, das Rad relativ zum Fahrzeugaufbau zu führen, sodass der Reifen-Fahrbahn-Kontakt in jeder Fahrsituation optimal hergestellt ist. Um möglichst viele Fahrzeugvarianten nachbilden zu können, muss die Radaufhängung des Fahrzeugmodells variabel sein. In Abschnitt 3.3 wird eine Möglichkeit aufgezeigt, eine Modularisierung bzw. Austauschbarkeit von Radaufhängungstypen auch modelltechnisch zu realisieren. Durch diese Modularisierung ist es nicht mehr notwendig, die gesamte globale Kinematik des Gesamtfahrzeugs auszuwerten. Sie kann für jedes Radaufhängungsmodell separat berechnet und in Form von Jacobi-Blockmatrizen dargestellt werden. Der Einfluss der modularen Struktur auf die Jacobi-Matrizen des Gesamtfahrzeugs wird im Abschnitt 3.3 erläutert.

### 3.2.1 Grundaufgabe der Kinematik

Die Radaufhängung ist ein mechanisches System. Systeme dieser Art besitzen  $f$  Freiheitsgrade und lassen sich durch  $f$  Variablen, die die verallgemeinerten Koordinaten darstellen, beschreiben. Die zum Vektor  $\mathbf{q}$  zusammengefassten verallgemeinerten Koordinaten  $q_i$ , mit  $i = 1, \dots, f$ , müssen die Lage des Systems eindeutig beschreiben, unabhängig und mit den Bindungen verträglich sein (Hiller 1983). Die Position und Orientierung der Koordinatensysteme sowie deren Geschwindigkeit und Beschleunigung berechnen sich durch die verallgemeinerten Koordinaten und deren zeitliche Ableitungen durch Auswertung der globalen Kinematik. Die globale Kinematik wird durch Einführung der  $n_\beta$  Gelenkkordinaten zum Vektor  $\boldsymbol{\beta}$  zusammengefasst und in relative und absolute Kinematik unterteilt (Abb. 3.2).

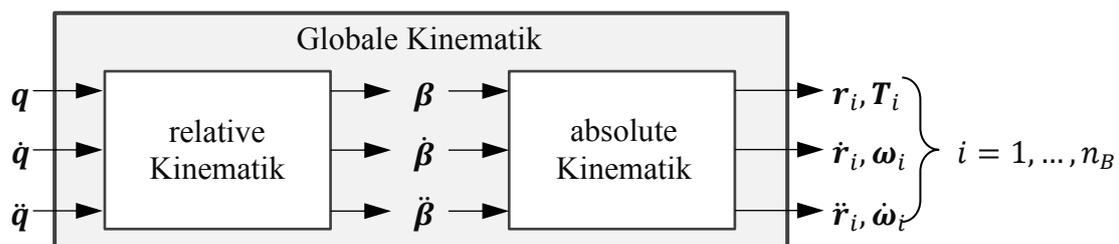


Abb. 3.2: Aufteilung der globalen Kinematik geschlossener MKS

Die Lösung der Bindungsgleichungen wird als relative Kinematik bezeichnet und die Bestimmung der absoluten Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung der  $n_B$  Körper als absolute Kinematik (Kecskeméthy 1993).

Die Radaufhängungskinematik der MacPherson- und Mehrlenkerradaufhängung im Abschnitt 3.6 berechnet sich folgendermaßen: Zuerst wird die relative Kinematik der Einzelschleifen unter Verwendung der kinematischen Transformatoren (s. Abschnitt 3.2.4) und der bekannten verallgemeinerten Koordinaten  $\mathbf{q}$  gelöst und danach die absolute Kinematik der Radaufhängung mit den errechneten Gelenkkoordinaten  $\boldsymbol{\beta}$  aufgestellt.

### 3.2.2 Relativkinematik

Ein Mehrkörpersystem, das aus  $n_B$  Körpern und  $n_G$  Gelenken besteht, besitzt

$$n_L = n_G - n_B \quad (3.13)$$

unabhängige kinematische Schleifen (Hiller 1983). Eine kinematische Schleife ist eine geschlossene Verbindung von Gelenken und Körpern. Durch Summierung der Gelenkfreiheitsgrade  $f_{G_i}$  aller Gelenke ergeben sich

$$n_\beta = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} \quad (3.14)$$

Gelenkkoordinaten und durch Anwendung des GRÜBLER-KUTZBACH-Kriteriums

$$f = n_\beta - 6n_L = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L \quad (3.15)$$

globale Freiheitsgrade (Hiller 1983).

Bei Radaufhängungen mit geschlossenen Schleifen, wie z. B. der Mehrlenkerachse oder der MacPherson-Achse, muss zunächst die Relativkinematik gelöst werden. Bei der Relativkinematik werden die abhängigen Koordinaten durch Auflösen der Schließbedingungen der Schleife ermittelt. Zur Bestimmung der interessierenden Lagegrößen (Koordinaten) werden die Einzelschleifen nach Woernle (1988) effizient mit der Methode des charakteristischen Gelenkpaars gelöst, wobei die Schleifen an zwei Gelenken  $G_m$  und  $G_n$ , dem charakteristischen Gelenkpaar, in zwei Segmente aufgetrennt werden. Jedem Gelenkpaar mit  $f_{G_m}$  und  $f_{G_n}$  Gelenkkoordinaten werden  $6 - (f_{G_m} + f_{G_n})$  skalare Bindungsparameter zugeordnet. Diese berechnen sich in den beiden Segmenten, die durch das Auftrennen einer Schleife entstehen. Durch das Gleichsetzen der in beiden Segmenten berechneten Bindungsparameter ergeben sich die Bindungsgleichungen. Durch Umformen dieser kann nach den gesuchten Gelenkkoordinaten  $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{q})$  in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten  $\mathbf{q}$  aufgelöst werden.

Abhängig vom Typ der Radaufhängung und der enthaltenen charakteristischen Gelenkpaare ergibt sich eine analytische oder numerische Auflösung der impliziten Schließbedingungen, um zu den expliziten Schließbedingungen zu gelangen. Bei einer numerischen Lösung muss ein iteratives Lösungsverfahren nachgeschaltet werden.

Für die Bestimmung von Geschwindigkeit und Beschleunigung werden die Schleifen an je einem spezifischen Gelenk aufgetrennt und dann die Geschwindigkeit dieses Gelenkpunktes von beiden Seiten bestimmt (Woernle 1988). Die entstehenden Terme werden gleichgesetzt und nach der gesuchten Größe umgeformt.

### 3.2.3 Verfahren der kinematischen Transformatoren

Zum Lösen der geschlossenen Schleifen bietet sich eine topologische Methode an. Kinematische Schleifen werden als kinematische Übertragungselemente aufbereitet, die in der Folge als kinematische Transformatoren bezeichnet und in Form von Blockschaltbildern (s. Abb. 3.3) dargestellt werden (Schramm 2010, Kapitel 6) (Hiller 1986). Jede räumliche Schleife  $L_i$  besitzt bei  $n_\beta$  Gelenkkoordinaten 6 abhängige (Ausgänge) und  $f_{L_i} = n_\beta - 6$  unabhängige Gelenkkoordinaten (Eingänge). Durch dieses Blockschaltbild bestimmt sich ein optimaler Lösungsfluss (kinematisches Netz) in Abhängigkeit der gewählten verallgemeinerten Koordinaten.

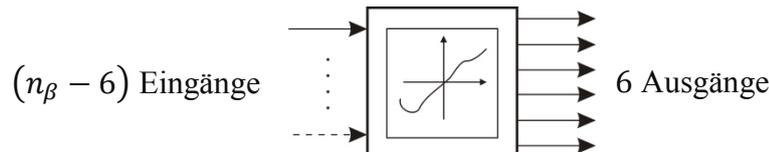


Abb. 3.3: Kinematischer Transformator zur Darstellung einer Einzelschleife

### 3.2.4 Berechnung der absoluten Kinematik

Für die absolute Kinematik werden nacheinander die absolute Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Koordinatensysteme aus der Kenntnis der zum Vektor  $\beta$  zusammengefassten Gelenkkoordinaten und deren erster und zweiter Ableitung explizit berechnet. Hierbei wird die absolute Kinematik mithilfe der Relativbewegung starrer Körper bei zwei aufeinanderfolgenden Körpern  $i$  und  $j$ , einer kinematischen Kette (s. Abb. 3.4), mit den Bezugssystemen  $K_i$  und  $K_j$  und dem Inertialsystem  $K_E$ , aus

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i,j}, \quad (3.16)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{r}}_j + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,j}, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_j &= \ddot{\mathbf{r}}_i + \ddot{\mathbf{r}}_j + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_{i,j} + \boldsymbol{\omega}_i \times \dot{\mathbf{r}}_j + \boldsymbol{\omega}_i \times (\dot{\mathbf{r}}_j + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,j}) \\ &= \ddot{\mathbf{r}}_i + \ddot{\mathbf{r}}_j + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_{i,j} + 2\boldsymbol{\omega}_i \times \dot{\mathbf{r}}_j + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,j}), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{}_i\boldsymbol{\omega}_j, \text{ und} \quad (3.19)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_j = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \mathbf{}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_j + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{}_i\boldsymbol{\omega}_j \quad (3.20)$$

berechnet (Pichler 1998). Die Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{r}}_j$  und Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{r}}_j$  sowie die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_i$  und Winkelbeschleunigung  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$  werden Führungsbewegung genannt (Schramm 2010).

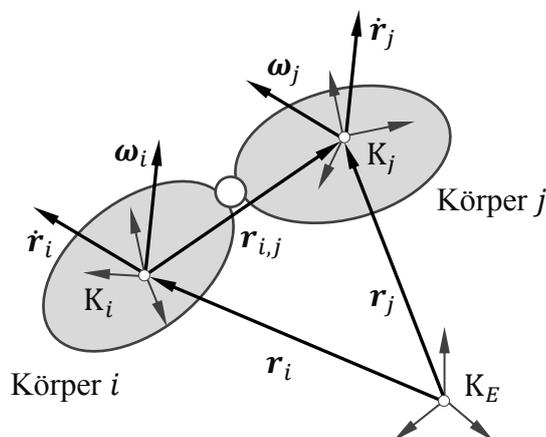


Abb. 3.4: Relativbewegung zweier starrer Körper

Diese Vektorgleichungen können in beliebigen Koordinatensystemen aufgestellt werden. Um zeitliche Ableitungen zu bilden, benötigt man die Koordinaten verschiedener Systeme. Es ist daher häufig erforderlich, eine Koordinatentransformation durchzuführen, weil die Glieder einer Gleichung für dasselbe Koordinatensystem auszuwerten sind.

### 3.3 Ansatz zur Modularisierung von Radaufhängungen

Um die Austauschbarkeit der Radaufhängungen zu gewährleisten, wird eine allgemeine Vorgehensweise zur Erstellung der Radaufhängungskinematik gezeigt, die auf dem Modularisierungsprinzip in Schramm (2010) beruht. Der Radaufhängungsmechanismus, der das Rad mit dem Fahrzeugaufbau verbindet, wird als nichtlineares Übertragungsglied in Form eines kinematischen Transformators betrachtet (s. Abb. 3.3 bzw. Abb. 3.5). Dabei entsprechen der obere und der untere Transformator in Abb. 3.5 dem kinematischen Übertragungselement für den Radträger bzw. dem Rad. Die Übertragungselemente sind durch JACOBI-Matrizen repräsentiert und abhängig von der verwendeten Radaufhängung. Diese JACOBI-Matrizen sind wichtig für die Aufstellung der Bewegungsgleichung des Gesamtfahrzeugs im Abschnitt 3.4. Die translatorischen und rotatorischen JACOBI-Matrizen der relativen und absoluten Radaufhängungskinematik werden nun allgemein aufgestellt und dienen als Platzhalter für eine beliebige Radaufhängung. Die vier Radaufhängungen am Fahrzeug werden durch den Index  $i = 1, \dots, 4$  angegeben.

#### 3.3.1 Relative Modulare Radaufhängungskinematik

##### *Translation*

Für die jeweilige Einzelradaufhängung wird ein Ortsvektor vom Fahrzeugmassenmittelpunkt  $O_V$  zum fahrzeugfesten Bezugspunkt  $A_i$  durch

$${}^V_V \mathbf{r}_{A_i} = [x_{A_i} \quad y_{A_i} \quad z_{A_i}]^T, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.21)$$

gegeben (Abb. 3.5). Dieser Vektor ist konstant im fahrzeugfesten Koordinatensystem. Die Anbindung der Radaufhängung erfolgt gemäß Abb. 3.5. Jedem Radträger wird eine verallgemeinerte Koordinate  $c_i$  zugeordnet.  $c_i$  beschreibt eine allgemeine Einfederbewegung, beispielsweise den Drehwinkel eines Querlenkers, und lässt sich zum Vektor

$$\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4]^T \quad (3.22)$$

zusammenfassen. Die Drehwinkel der vier Räder des Fahrzeugs werden ebenfalls zu einem Vektor

$$\boldsymbol{\rho} = [\rho_{R_1} \quad \rho_{R_2} \quad \rho_{R_3} \quad \rho_{R_4}]^T \quad (3.23)$$

zusammengefasst. Um die allgemeine Vorder- und Hinterachslenkung berücksichtigen zu können, benötigt man den jeweiligen Lenkwinkel für jedes Rad als Eingang. Es ergibt sich der Vektor

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4]^T. \quad (3.24)$$

Der Lenkwinkel kann über einen Mechanismus (z. B. Zahnstangenlenkung mit Lenkübersetzung) am Lenkrad oder durch eine lineare oder nichtlineare Funktion direkt am Rad eingestellt werden.

Gesucht sind Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Radträger sowie der Räder relativ zum Inertialsystem in Abhängigkeit der Vektoren  $\mathbf{c}$ ,  $\boldsymbol{\rho}$  und  $\boldsymbol{\delta}$ . Die translatorischen

Größen relativ zum Inertialsystem werden durch die Abhängigkeit der Vektoren angegeben mit

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{T_i} &= \mathbf{r}_{T_i}(c_i, \delta_i), \\ \mathbf{v}_{T_i} &= \dot{\mathbf{r}}_{T_i}(c_i, \delta_i, \dot{c}_i, \dot{\delta}_i) \text{ und} \\ \mathbf{a}_{T_i} &= \ddot{\mathbf{r}}_{T_i}(c_i, \delta_i, \dot{c}_i, \dot{\delta}_i, \ddot{c}_i, \ddot{\delta}_i) \end{aligned} \quad (3.25)$$

und die rotatorischen Größen entsprechend mit

$$\begin{aligned} {}^E\mathbf{T}_{T_i} &= {}^E\mathbf{T}_{T_i}(c_i, \delta_i), \\ \boldsymbol{\omega}_{T_i} &= \boldsymbol{\omega}_{T_i}(c_i, \delta_i, \dot{c}_i, \dot{\delta}_i) \text{ und} \\ \boldsymbol{\alpha}_{T_i} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T_i} = \boldsymbol{\alpha}_{T_i}(c_i, \delta_i, \dot{c}_i, \dot{\delta}_i, \ddot{c}_i, \ddot{\delta}_i). \end{aligned} \quad (3.26)$$

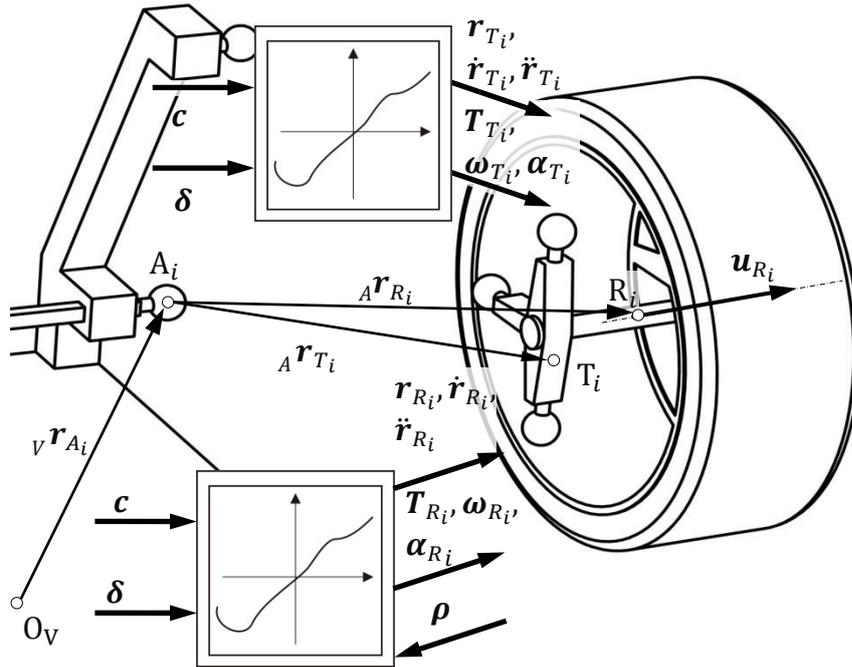


Abb. 3.5: Fahrzeugmodell mit allgemeinem Radaufhängungs-Übertragungsverhalten

Nachfolgend werden diese unter Verwendung der kinematischen Transformatoren (Abschnitt 3.2.3) zunächst allgemein verwendet und im folgenden Abschnitt explizit für eine MacPherson-Vorderradaufhängung und eine Vierpunkt-Hinterradaufhängung hergeleitet. Der Ortsvektor  $\mathbf{r}_{T_i}$  zum Massenmittelpunkt  $T_i$  des Radträgers relativ zum Inertialsystem wird bestimmt zu

$$\mathbf{r}_{T_i} = \mathbf{r}_V + {}_V\mathbf{r}_{T_i}, \quad (3.27)$$

wobei die Ortsvektoren  $\mathbf{r}_V$  zum Fahrzeugschwerpunkt und  ${}_V\mathbf{r}_{T_i}$  zum Radträger relativ zum Fahrzeugaufbau sind. Der Ortsvektor  ${}_V\mathbf{r}_{T_i}$  setzt sich zusammen aus dem fahrzeugfesten Ortsvektor  ${}_V\mathbf{r}_{A_i}$  vom Fahrzeugschwerpunkt  $O_V$  zum Bezugspunkt  $A_i$  (z. B. eines Kugel- oder Drehgelenkes) der Radaufhängung sowie dem Ortsvektor  ${}_A\mathbf{r}_{T_i}$  von  $A_i$  zum Radträgermassenmittelpunkt  $T_i$  zu

$${}_V\mathbf{r}_{T_i}(c, \delta) = \underbrace{{}_V\mathbf{r}_{A_i}}_{\text{const.}} + {}_A\mathbf{r}_{T_i}(c, \delta). \quad (3.28)$$

Damit ergeben sich die Relativgeschwindigkeiten des Radträgers gegenüber dem Aufbau zu

$${}^v\mathbf{v}_{T_i} = {}^v\dot{\mathbf{r}}_{T_i} = \frac{\partial {}^A\mathbf{r}_{T_i}}{\partial \mathbf{c}} \dot{\mathbf{c}} + \frac{\partial {}^A\mathbf{r}_{T_i}}{\partial \boldsymbol{\delta}} \dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (3.29)$$

und die Relativbeschleunigungen zu

$${}^v\boldsymbol{\alpha}_{T_i} = {}^v\ddot{\mathbf{r}}_{T_i} = \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i} \ddot{\boldsymbol{\delta}} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}}. \quad (3.30)$$

Dabei sind  $\mathbf{H}_{Tra_c, T_i}$  und  $\mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i}$  translatorische  $3 \times 4$ -JACOBI-Untermatrizen der translatorischen  $3 \times 14$ -JACOBI-Blockmatrix  $\mathbf{J}_{Tra_i}$  der jeweiligen Radaufhängung. Die Besonderheit der  $3 \times 4$ -JACOBI-Untermatrix ist, dass die Matrix abhängig vom Index  $i$  in der entsprechenden  $i$ -ten Spalte einen Eintrag  $\mathbf{x}$  hat. Die restlichen Spalten sind mit dem Nullvektor  $\mathbf{0}_{[3 \times 1]}$  belegt. Die translatorische JACOBI-Untermatrix des Radträgers ergibt sich z. B. zu

$$\mathbf{H}_{Tra_c, T_i} = \left[ \begin{array}{c|ccc} \mathbf{0}_{[3 \times 1]} & \cdots & \mathbf{x}_{[3 \times 1]} & \cdots & \mathbf{0}_{[3 \times 1]} \\ & & \text{\small } i\text{-te Spalte} & & \end{array} \right]_{[3 \times 4]}. \quad (3.31)$$

Die partiellen Ableitungen bzw. die JACOBI-Untermatrizen hängen von der eingesetzten Radaufhängung ab und lassen sich im Falle einer Radaufhängung in Baumstruktur (z. B. eines Schräglenkers wie in Abschnitt 3.5) durch direkte kinematische Betrachtungen oder im Falle einer kinematischen Schleife (z. B. der MacPherson-Radaufhängung in Abschnitt 3.6) mit den Methoden der kinematische Transformatoren berechnen. Dadurch wird eine Modularisierung des Fahrzeugmodells ermöglicht. Diese Methode hat den Vorteil, Teilbereiche besser zu überschauen und kinematische Zusammenhänge einfacher berechnen zu können. Dadurch wird auch ein Austausch einzelner Fahrzeugkomponenten einfacher, weil z. B. für den Einsatz einer anderen Vorderradaufhängung keine Veränderungen am Modul der Hinterachse vorgenommen werden müssen. Die Gleichungsstruktur des Fahrzeugmodells wird allgemein aufgebaut, indem in den JACOBI-Untermatrizen die jeweilige Relativkinematik der entsprechenden Radaufhängung abgelegt wird.

### Rotation

Zur Berechnung der Relativkinematik der Rotation wird die Drehmatrix  ${}^V\mathbf{T}_{T_i}(\mathbf{c}, \boldsymbol{\delta})$  verwendet, die die räumliche Orientierung des Radträgers gegenüber dem Aufbau beschreibt. Daraus berechnen sich die Winkelgeschwindigkeit zu

$${}^v\boldsymbol{\omega}_{T_i} = \frac{\partial {}^V\boldsymbol{\varphi}_{T_i}}{\partial \mathbf{c}} \dot{\mathbf{c}} + \frac{\partial {}^V\boldsymbol{\varphi}_{T_i}}{\partial \boldsymbol{\delta}} \dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (3.32)$$

und die Winkelbeschleunigung zu

$${}^v\boldsymbol{\alpha}_{T_i} = {}^v\dot{\boldsymbol{\omega}}_{T_i} = \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \ddot{\boldsymbol{\delta}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}}, \quad (3.33)$$

wobei  $\mathbf{H}_{Rot_c, T_i}$  und  $\mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i}$  die rotatorischen  $3 \times 4$ -JACOBI-Untermatrizen sind.

### 3.3.2 Absolute Modulare Radaufhängungskinematik

#### Translation

Aufbauend auf den Gleichungen (3.29) bis (3.33) lassen sich für den Radträger die absoluten Geschwindigkeiten zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{T_i} &= \dot{\mathbf{r}}_{T_i} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{r}_{T_i}}_{\text{Führungsbewegung}} + \underbrace{{}_V\dot{\mathbf{r}}_{T_i}}_{\text{Relativbewegung}} \\
 &= \mathbf{v}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{r}_{T_i} + \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{[3 \times 3]} & | & -{}_V\tilde{\mathbf{r}}_{T_i} & | & \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} & | & \mathbf{0}_{[3 \times 4]} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{Tra, T_i}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_V \\ \boldsymbol{\omega}_V \\ \dot{\mathbf{c}} \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} + \mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{J}_{Tra, T_i} \mathbf{z} + \bar{\mathbf{v}}_{T_i} \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

und die Beschleunigungen zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{T_i} &= \ddot{\mathbf{r}}_{T_i} = \mathbf{a}_V + \boldsymbol{\alpha}_V \times {}_V\mathbf{r}_{T_i} + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\dot{\mathbf{r}}_{T_i} + \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i} \ddot{\boldsymbol{\delta}} \\
 &\quad + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{r}_{T_i} + \underbrace{\mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}}}_{{}_V\mathbf{v}_{T_i}}) \\
 &= \mathbf{J}_{Tra, T_i} \dot{\mathbf{z}} \\
 &\quad + \underbrace{2(\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{v}_{T_i}) + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i} \ddot{\boldsymbol{\delta}} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{r}_{T_i})}_{\bar{\mathbf{a}}_{T_i}} \quad (3.35) \\
 &= \mathbf{J}_{Tra, T_i} \dot{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{a}}_{T_i}(\boldsymbol{\omega}_V, {}_V\mathbf{v}_{T_i}, \dot{\mathbf{c}}, \dot{\boldsymbol{\delta}}, \ddot{\boldsymbol{\delta}}, {}_V\mathbf{r}_{T_i}).
 \end{aligned}$$

berechnen. In den Gleichungen (3.34) und (3.35) wurden die translatorischen  $3 \times 14$ -JACOBI-Blockmatrizen

$$\mathbf{J}_{Tra, T_i} = \mathbf{J}_{Tra, T_i}(\mathbf{q}) \quad (3.36)$$

und die Restbeschleunigungsvektoren  $\bar{\mathbf{a}}_{T_i}$  für die Radträger eingeführt.

### Rotation

Entsprechend ergeben sich für die absoluten Winkelgeschwindigkeiten bzw. die absoluten Winkelbeschleunigungen die Beziehungen zu

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}_{T_i} &= \boldsymbol{\omega}_V + {}_V\boldsymbol{\omega}_{T_i} = \boldsymbol{\omega}_V + \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[3 \times 3]} & | & \mathbf{I}_{[3 \times 3]} & | & \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} & | & \mathbf{0}_{[3 \times 4]} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{Rot, T_i}} \mathbf{z} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \\
 &= \mathbf{J}_{Rot, T_i} \mathbf{z} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_{T_i} \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\alpha}_{T_i} &= \boldsymbol{\alpha}_V + {}_V\boldsymbol{\alpha}_{T_i} = \boldsymbol{\alpha}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\boldsymbol{\omega}_{T_i} + {}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}_{T_i} \\
 &= \boldsymbol{\alpha}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times (\mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}}) + \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \ddot{\boldsymbol{\delta}} \\
 &\quad + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \\
 &= \mathbf{J}_{Rot, T_i} \dot{\mathbf{z}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\boldsymbol{\omega}_{T_i} + \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \ddot{\boldsymbol{\delta}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}}}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{T_i}} \\
 &= \mathbf{J}_{Rot, T_i} \dot{\mathbf{z}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{T_i}(\boldsymbol{\omega}_V, {}_V\boldsymbol{\omega}_{T_i}, \dot{\mathbf{c}}, \dot{\boldsymbol{\delta}}, \ddot{\boldsymbol{\delta}}). \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

Die entsprechenden translatorischen Größen für die Räder werden genauso berechnet, wobei in den Gleichungen (3.27) bis (3.30) und den Gleichungen (3.34) bis (3.35) jeweils der Index  $T_i$  durch  $R_i$  ersetzt wird. Bei der Rotation hingegen wird neben der Anpassung der Indizes auch die Rotation der Räder um ihre Drehachse ergänzt. Es ergeben sich die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung zu

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{R_i} &= \boldsymbol{\omega}_V + {}_V\boldsymbol{\omega}_{R_i} = \boldsymbol{\omega}_V + \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\rho, R_i} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[3 \times 3]} & \mathbf{I}_{[3 \times 3]} & \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} & \mathbf{H}_{Rot_\rho, R_i} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{Rot, R_i}} \mathbf{z} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{J}_{Rot, R_i} \mathbf{z} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_{R_i}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

und

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{R_i} &= \boldsymbol{\alpha}_V + {}_V\boldsymbol{\alpha}_{R_i} = \boldsymbol{\alpha}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\boldsymbol{\omega}_{R_i} + {}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}_{R_i} \\
&= \boldsymbol{\alpha}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times \left( \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\rho, R_i} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \right) + \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \\
&\quad \mathbf{H}_{Rot_\rho, R_i} \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\rho, R_i} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \ddot{\boldsymbol{\delta}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \\
&= \mathbf{J}_{Rot, R_i} \dot{\mathbf{z}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\boldsymbol{\omega}_{R_i} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\rho, R_i} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \ddot{\boldsymbol{\delta}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}}}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{R_i}} \\
&= \mathbf{J}_{Rot, R_i} \dot{\mathbf{z}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{R_i}(\boldsymbol{\omega}_V, {}_V\boldsymbol{\omega}_{R_i}, \dot{\mathbf{c}}, \dot{\boldsymbol{\rho}}, \ddot{\boldsymbol{\delta}}),
\end{aligned} \tag{3.40}$$

wobei  $\mathbf{H}_{Rot_c, R_i} = \mathbf{H}_{Rot_c, T_i}$  und  $\mathbf{H}_{Rot_\delta, R_i} = \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i}$  sind, da das Rad bis auf die Raddrehung dem Radträger folgt.

Für eine einfachere Schreibweise für die Bewegungsgleichungen werden die Jacobi-Blockmatrizen der Translation und der Rotation folgendermaßen durchnummeriert:

$$\text{Aufbau} \quad \mathbf{J}_{Tra_1} = \mathbf{J}_{Tra_V}, \quad \mathbf{J}_{Rot_1} = \mathbf{J}_{Rot_V}, \tag{3.41}$$

$$\text{Radträger} \quad \mathbf{J}_{Tra_{1+i}} = \mathbf{J}_{Tra, T_i}, \quad \mathbf{J}_{Rot_{1+i}} = \mathbf{J}_{Rot, T_i}, \quad i = 1, \dots, 4, \tag{3.42}$$

$$\text{Räder} \quad \mathbf{J}_{Tra_{5+i}} = \mathbf{J}_{Tra, R_i}, \quad \mathbf{J}_{Rot_{5+i}} = \mathbf{J}_{Rot, R_i}, \quad i = 1, \dots, 4. \tag{3.43}$$

Mit den errechneten allgemeinen JACOBI-Untermatrizen  $\mathbf{H}_i$  und den Restbeschleunigungsvektoren  $\bar{\mathbf{a}}_i$  lassen sich die Bewegungsgleichungen bestimmen.

### 3.4 Bewegungsgleichungen des Gesamtfahrzeugs

Durch die Aufstellung der Absolutkinematik für den Fahrzeugaufbau und die Radaufhängungen ist die Vorarbeit für eine Aufstellung der Bewegungsgleichungen des Gesamtfahrzeugs gegeben. Für alle massebehafteten Körper können nun die NEWTON'schen und EULER'schen Gleichungen unter Verwendung der bereits berechneten Größen wie JACOBI-Matrizen und der Restbeschleunigungen aufgestellt werden. Alle Größen beziehen sich auf die Massenmittelpunkte relativ zum Inertialsystem und werden im fahrzeugfesten Koordinatensystem angegeben. Die allgemeine Form der NEWTON'schen Gleichung ergibt sich gemäß Schramm (2010) zu

$$m_i \mathbf{J}_{Tra_i} \dot{\mathbf{z}} + m_i \bar{\mathbf{a}}_i(\mathbf{q}, \mathbf{z}, t) = \mathbf{F}_i^e + \mathbf{F}_i^r, \quad \text{mit } i = 1, \dots, 9, \tag{3.44}$$

mit dem Vektor der eingepprägten Kräfte  $\mathbf{F}_i^e$  und dem Vektor der Reaktionskräfte  $\mathbf{F}_i^r$ . Gleichermäßen ergibt sich für die EULER'schen Gleichung

$$\boldsymbol{\Theta}_i \mathbf{J}_{Rot_i} \dot{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\Theta}_i \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i(\mathbf{q}, \mathbf{z}, t) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i(\boldsymbol{\Theta}_i \boldsymbol{\omega}_i) = \mathbf{T}_i^e + \mathbf{T}_i^r, \quad \text{mit } i = 1, \dots, 9, \tag{3.45}$$

mit dem Vektor der eingepprägten Momente  $\mathbf{T}_i^e$  und dem Vektor der Reaktionsmomente  $\mathbf{T}_i^r$ . Es ist hierbei darauf zu achten, dass die Trägheitsmatrizen  $\boldsymbol{\Theta}_i$  im fahrzeugfesten Koordinatensystem angegeben werden. Aus den Gleichungen (3.44) und (3.45) ergeben sich durch Multiplikation von links mit den transponierten JACOBI-Matrizen unter der Ver-

wendung des JORDAINSchen Prinzips für starre Körper (virtuelle Leistung der Reaktionskräfte verschwindet) und anschließendem Aufsummieren über alle Körper die Bewegungsgleichungen des Systems zu

$$\sum_{i=1}^{n_B} \underbrace{[J_{Tra_i}^T m_i J_{Tra_i} + J_{Rot_i}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\theta}_i J_{Rot_i}]}_{\text{Massenmatrix } \mathbf{M}(\mathbf{q}, t)} \dot{\mathbf{z}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_B} m_i J_{Tra_i}^T \bar{\mathbf{a}}_i + J_{Rot_i}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\theta}_i \bar{\mathbf{a}}_i + J_{Rot_i}^T \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{V} \boldsymbol{\theta}_i \boldsymbol{\omega}_i)}_{\text{Zentrifugal-, Kreisel und Corioliskräfte } \mathbf{b}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_P} J_{Tra_i}^T \mathbf{F}_i^e + J_{Rot_i}^T \mathbf{T}_i^e}_{\text{verallg. Kräfte } \mathbf{Q}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)}, \quad (3.46)$$

mit der verallgemeinerten  $f \times f$ -Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)$ , dem  $f \times 1$ -Vektor  $\mathbf{b}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)$  der verallgemeinerten Kreisel-, Coriolis- und Zentrifugalkräfte und dem  $f \times 1$ -Vektor  $\mathbf{Q}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)$  der verallgemeinerten eingepprägten Kräfte. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die JACOBI-Untermatrizen  $\mathbf{H}_i$  sowie die Restbeschleunigungsvektoren  $\bar{\mathbf{a}}_i$  entsprechend in den Elementen der Massenmatrix, der verallgemeinerten Kreisel-, Coriolis- und Zentrifugalkräfte und in den verallgemeinerten eingepprägten Kräfte einhergehen, sodass die Bewegungsgleichung nicht neu aufgestellt werden muss.

Der Übersichtlichkeit halber wird die symmetrische  $14 \times 14$ -Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)$  in die entsprechenden Untermatrizen der einzelnen Körper mit den in Anhang A.1 Gleichungen (A.1) bis (A.11) angegebenen Untermatrizenelementen aufgeteilt zu

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{VV} & \mathbf{M}_{V\omega} & \mathbf{M}_{VT} & \mathbf{M}_{VR} \\ \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} & \mathbf{M}_{\omega\omega} & \mathbf{M}_{\omega T} & \mathbf{M}_{\omega R} \\ \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} & \text{symmetrisch} & \mathbf{M}_{TT} & \mathbf{M}_{TR} \\ \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} & \mathbf{M}_{RR} \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

In Abb. 3.6 sind die Massenmatrix und die verallgemeinerten Kraftvektoren in einzelne Unterblöcke aufgeteilt. Die Unterblöcke, die sich auf Größen ohne dynamische Kopplung beziehen, enthalten nur Nullen und sind durch eine „ $\mathbf{0}$ “ gekennzeichnet. Z. B. sind die Koordinaten der Hinterachse nicht mit denen der Vorderachse gekoppelt. Die Belegung der mit „ $\blacksquare$ “ gekennzeichneten übrigen Unterblöcke charakterisieren eine dynamische Kopplung, wobei die mit  $a$  bis  $f$  bezeichneten Unterbereiche unterschieden werden.

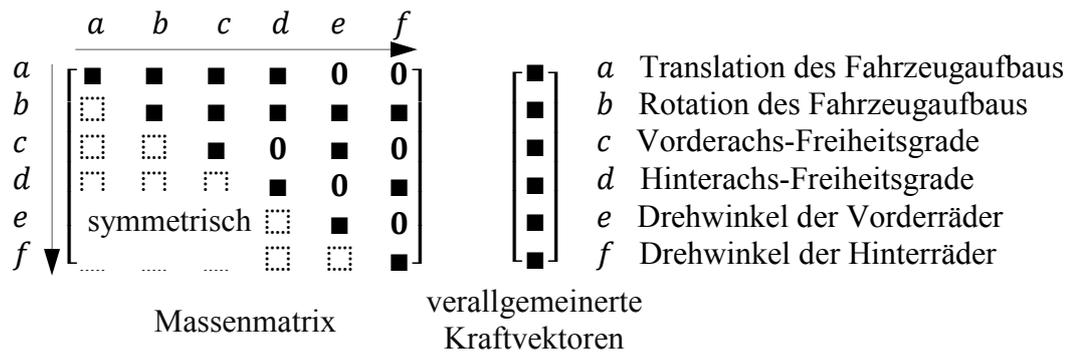


Abb. 3.6: Struktur von Massenmatrix und Kraftvektor

Werden nun die Unterblöcke der Massenmatrix unter Berücksichtigung der in Anhang A.1 angegebenen Gleichungen (A.1) bis (A.11) noch weiter aufgeteilt, erhält die Massenmatrix die Struktur der dynamischen Koppelung in Abb. 3.7.

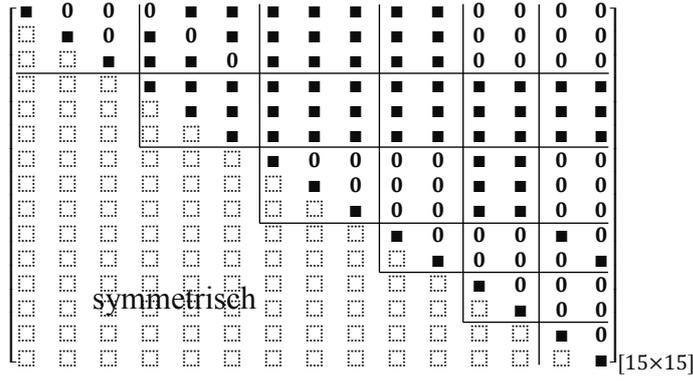


Abb. 3.7: Struktur der dynamischen Koppelung der Massenmatrix

### 3.4.1 Vektor der verallgemeinerten Zentrifugal-, Kreisel- und Corioliskräfte

Mit den Jacobi-Matrizen und den Restbeschleunigungen der Radträger und Räder werden nun die verallgemeinerten Zentrifugal-, Kreisel- und Corioliskräfte berechnet zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, t) &= \sum_{i=1}^9 \left[ m_i \mathbf{J}_{Tra_i}^T \bar{\mathbf{a}}_i + \mathbf{J}_{Rot_i}^T \left( {}^V \boldsymbol{\theta}_i \bar{\mathbf{a}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i (\boldsymbol{\theta}_i \boldsymbol{\omega}_i) \right) \right] \\
 &= \begin{bmatrix} m_V \tilde{\boldsymbol{\omega}}_V \mathbf{v}_V \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_V (\boldsymbol{\theta}_V \boldsymbol{\omega}_V) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} m_{T_i} \bar{\mathbf{a}}_{T_i} + m_{R_i} \bar{\mathbf{a}}_{R_i} \\ -(m_{T_i} v \tilde{\mathbf{r}}_{T_i}^T \bar{\mathbf{a}}_{T_i} + m_{R_i} v \tilde{\mathbf{r}}_{R_i}^T \bar{\mathbf{a}}_{R_i}) \\ m_{T_i} \mathbf{H}_{Tra_{c,T_i}}^T \bar{\mathbf{a}}_{T_i} + m_{R_i} \mathbf{H}_{Tra_{c,R_i}}^T \bar{\mathbf{a}}_{R_i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\theta}_{T_i} \bar{\mathbf{a}}_{T_i} + \boldsymbol{\theta}_{R_i} \bar{\mathbf{a}}_{R_i} \\ \mathbf{H}_{Rot_{c,T_i}}^T \boldsymbol{\theta}_{T_i} \bar{\mathbf{a}}_{T_i} + \mathbf{H}_{Rot_{\rho,R_i}}^T \boldsymbol{\theta}_{R_i} \bar{\mathbf{a}}_{R_i} \\ \mathbf{H}_{Rot_{\rho,R_i}}^T \boldsymbol{\theta}_{R_i} \bar{\mathbf{a}}_{R_i} \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{T_i} (\boldsymbol{\theta}_{T_i} \boldsymbol{\omega}_{T_i}) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{R_i} (\boldsymbol{\theta}_{R_i} \boldsymbol{\omega}_{R_i}) \\ \mathbf{H}_{Rot_{c,T_i}}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{T_i} (\boldsymbol{\theta}_{T_i} \boldsymbol{\omega}_{T_i}) + \mathbf{H}_{Rot_{c,T_i}}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{R_i} (\boldsymbol{\theta}_{R_i} \boldsymbol{\omega}_{R_i}) \\ \mathbf{H}_{Rot_{\rho,R_i}}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{R_i} (\boldsymbol{\theta}_{R_i} \boldsymbol{\omega}_{R_i}) \end{bmatrix}. \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

### 3.4.2 Verallgemeinerte Kräfte

Mit den eingepägten Kräften und Momenten der Feder-, Dämpfer- und Stabilisatorelementen werden die verallgemeinerten Kräfte berechnet. Dafür müssen zunächst die eingepägten Kräfte auf die einzelnen Körper bestimmt werden. Für den Aufbau ergeben sich die Kräfte und Momente zu

$$\mathbf{F}_V^e = \mathbf{F}_W + \sum_{i=1}^4 (\mathbf{F}_{F_i} + \mathbf{F}_{D_i}) - m_V g \mathbf{e}_z \tag{3.49}$$

und

$$\mathbf{T}_V^e = v \mathbf{r}_W \times \mathbf{F}_W + \sum_{i=1}^4 (v \mathbf{r}_{A,F_i} \times \mathbf{F}_{F_i} + v \mathbf{r}_{A,D_i} \times \mathbf{F}_{D_i}) + \mathbf{M}_{St}, \tag{3.50}$$

für den Radträger zu

$$\mathbf{F}_{T_i}^e = -(\mathbf{F}_{F_i} + \mathbf{F}_{D_i} + \mathbf{F}_{St_i}) - m_{T_i} g \mathbf{e}_z \tag{3.51}$$

und

$$\mathbf{T}_{T_i}^e = -\left({}_T\mathbf{r}_{T,F_i} \times \mathbf{F}_{F_i} + {}_T\mathbf{r}_{T,D_i} \times \mathbf{F}_{D_i}\right) + {}_T\mathbf{r}_{T,St_i} \times \mathbf{F}_{St_i} \quad (3.52)$$

und für die Räder zu

$$\mathbf{F}_{R_i}^e = \mathbf{F}_{R_i} - m_{R_i}g\mathbf{e}_z \quad (3.53)$$

und

$$\mathbf{T}_{R_i}^e = {}_R\mathbf{r}_{R,A_i} \times \mathbf{F}_{R_i} + \left(M_{A_i} - M_{B_i}\text{sign}(\dot{\rho}_{R_i})\right)\mathbf{u}_{R_i}. \quad (3.54)$$

Die Indizes der Gleichungen (3.51) bis (3.54) laufen jeweils von  $i = 1, \dots, 4$ . In Tabelle 3.5 werden die entsprechenden Größen aus den Gleichungen (3.49) bis (3.54) beschrieben.

Die Berechnung der Wind-, Feder-, Dämpfer- und Stabilisatorkräfte und -momente sowie des Rad-Straße-Kontaktpunktes sind wie in Schramm (2010, Kapitel 7, 10 und 11) vorzunehmen.

Tabelle 3.5: Bedeutung der Formelvariablen zur Berechnung der eingprägten Kräfte und Momente

Bezeichnung	Beschreibung
$\mathbf{F}_W$	resultierende Windkraft
$\mathbf{F}_{F_i}$	jeweils wirkende Federkraft
$\mathbf{F}_{D_i}$	jeweils wirkende Dämpferkraft
$\mathbf{F}_{St_i}$	jeweils wirkende Stabilisatorkraft
$\mathbf{M}_{St}$	resultierendes Stabilisatormoment
$\mathbf{F}_{R_i}$	jeweilige wirkende Reifenkraft
${}_v\mathbf{r}_W$	fiktiver Windkraftangriffspunkt
${}_v\mathbf{r}_{A_i,F}$	aufbaufester Vektor zum Federangriffspunkt
${}_v\mathbf{r}_{A_i,D}$	aufbaufester Vektor zum Dämpferangriffspunkt
${}_T\mathbf{r}_{T,F_i}$	radträgerfester Vektor zum Federangriffspunkt
${}_T\mathbf{r}_{T,D_i}$	radträgerfester Vektor zum Dämpferangriffspunkt
${}_T\mathbf{r}_{T,St_i}$	radträgerfester Vektor zum Stabilisatorangriffspunkt
${}_R\mathbf{r}_{R,A_i}$	radträgerfester Vektor zum Reifenaufstandspunkt
$M_{A_i}$	Antriebsmomente
$M_{B_i}$	Bremsmomente
$g$	Erdbeschleunigung
$\mathbf{e}_z$	Straßennormalenvektor
$\mathbf{u}_{R_i}$	Raddrehachse

Mit den nun berechneten eingprägten Kräften und Momenten lassen sich die verallgemeinerten Kräfte zu

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, t) = \sum_{i=1}^9 [\mathbf{J}_{Tra_i}^T \mathbf{F}_i^e + \mathbf{J}_{Rot_i}^T \mathbf{T}_i^e] = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{T_1}^e \\ \mathbf{T}_{T_1}^e \\ \mathbf{0}_{[4 \times 1]} \\ \mathbf{0}_{[4 \times 1]} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{T_i}^e \\ -{}_v\tilde{\mathbf{r}}_{T_i}^T \mathbf{F}_{T_i}^e \\ \mathbf{H}_{Tra_c, T_i}^T \mathbf{F}_{T_i}^e \\ \mathbf{0}_{[4 \times 1]} \end{bmatrix} + \quad (3.55)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[3 \times 1]} \\ \mathbf{T}_{T_i}^e \\ \mathbf{H}_{Rot_c, T_i}^T \mathbf{T}_{T_i}^e \\ \mathbf{0}_{[4 \times 1]} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{R_i}^e \\ -v \tilde{\mathbf{r}}_{R_i}^T \mathbf{F}_{R_i}^e \\ \mathbf{H}_{Tra_c, R_i}^T \mathbf{F}_{R_i}^e \\ \mathbf{0}_{[4 \times 1]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[3 \times 1]} \\ \mathbf{T}_{R_i}^e \\ \mathbf{H}_{Rot_c, T_i}^T \mathbf{T}_{R_i}^e \\ \mathbf{H}_{Rot_\rho, R_i}^T \mathbf{T}_{R_i}^e \end{bmatrix}$$

berechnen.

### 3.4.3 Bewegungs- und Zustandsgleichungen

Die allgemeine Vorgehensweise zur Berechnung der Dynamik des Systems über die Kinematik ist in Abb. 3.8 zusammengefasst. Mit den berechneten Größen  $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)$  und  $\mathbf{Q}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)$ , den verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten und deren Ableitung kann nun die Zustandsgleichung aufgestellt werden.

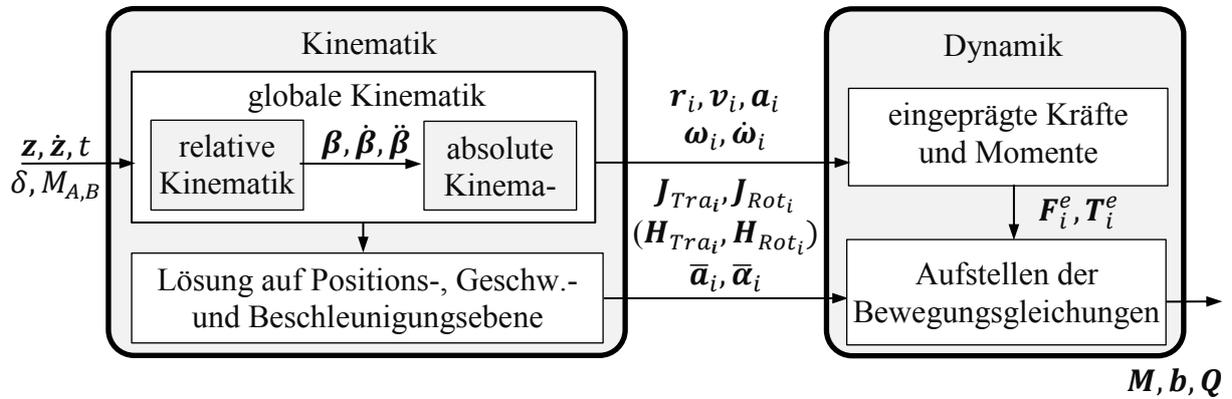


Abb. 3.8: Aufbaustruktur der Bewegungsgleichungen über die Dynamik

Mit dem  $28 \times 1$ -Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

und den Zusammenhängen

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{q}, t) \mathbf{z} = \begin{bmatrix} {}^V \mathbf{T}_E^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\omega^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{[4 \times 4]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{[4 \times 4]} \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad (3.57)$$

und

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}, t) (\mathbf{Q}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t) - \mathbf{b}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)) \quad (3.58)$$

ergibt sich schließlich die Zustandsgleichung des Systems zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{q}, t) \mathbf{z} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}, t) (\mathbf{Q}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t) - \mathbf{b}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)) \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Die Zustandsgleichung wird mit dem expliziten Euler-Verfahren numerisch integriert (siehe z. B. Gipser (1999)).

### 3.5 Kinematik einer einfachen Radaufhängung

Eine einfache Radaufhängungskinematik eignet sich, um eine, im Vergleich zur komplexen Radaufhängungskinematik, geringe Simulationszeit zu erreichen. Mit einer vereinfachten Radkinematik kann ein Modell erstellt werden, das

- relativ flexibel das Fahrverhalten unterschiedlicher Fahrzeugtypen wiedergibt,
- genereller einsetzbar und
- rechenzeiteffektiv ist.

Hierfür eignet sich die Schräglenkerachse, da sie relativ einfach zu parametrieren ist und in weiten Teilen das Fahrverhalten unterschiedlicher Fahrzeugtypen wiedergeben kann (vergl. Rill 1994, Kapitel 3).

Durch die Verwendung der Schräglenkerachse wird das Modell stark vereinfacht, wodurch Rechenzeit eingespart wird, die Modellgüte im Vergleich zur komplexen Radaufhängung allerdings abnimmt. Für Simulationen, bei denen Echtzeit erforderlich ist, wie z. B. bei Fahrsimulatoren oder Hardware-in-the-Loop-Prüfständen, wird dies in Kauf genommen. Bei einer allgemeinen Hardware-in-the-Loop Anwendung werden Hardware (beispielweise Lenkung und Pedalerie) und Software (Fahrzeugmodell und Umgebung) gekoppelt in Echtzeit simuliert.

In Abb. 3.9 ist ein Zweispurmodell mit Schräglenkerachsen mit seinen 14 Freiheitsgraden dargestellt, wie es Schramm (2010) beschreibt. In Tabelle 3.6 sind die verallgemeinerten Koordinaten des Modells benannt. Der Lenkwinkel an der Vorderachse wird aus dem Lenkradwinkel mit einer Lenkübersetzung zu

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta = \frac{1}{i_L} \delta_H \quad (3.60)$$

berechnet.

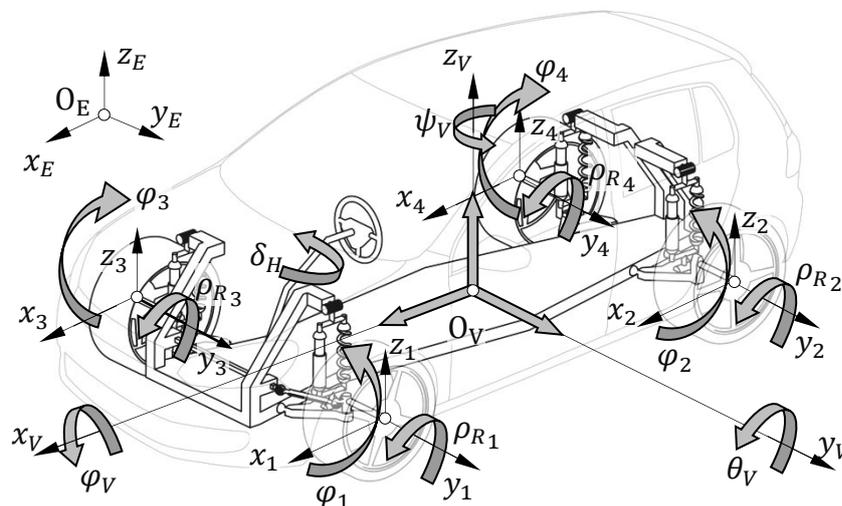


Abb. 3.9: Freiheitsgrade des generischen Zweispurmodells mit einfacher Schräglenker-Radaufhängungskinematik (Schramm 2010)

Die Schräglenker- sowie die Lenk- und die Raddrehachsen der jeweiligen Radaufhängung sind frei wählbar und durch die Einheitsvektoren  $\mathbf{u}_{S_i}$ ,  $\mathbf{u}_{L_i}$  und  $\mathbf{u}_{R_i}$  beschrieben (s. schematische Darstellung in Abb. 3.10). Die Radaufhängung besitzt den Freiheitsgrad  $\varphi_i$ , der den Schwenkwinkel des  $i$ -ten Schräglenkers um seine Drehachse  $\mathbf{u}_{S_i}$  beschreibt. Mit der Ausrichtung der Schräglenkerachse und dem Abstand der Achse in Querrichtung von der

Fahrzeuginnenachse wird die räumliche Kinematik (Sturz- und Spurwinkel) beeinflusst. Dadurch lassen sich unterschiedlich komplexe Radaufhängungen in einem entsprechenden Arbeitsbereich approximieren.

Tabelle 3.6: Verallgemeinerte Koordinaten  $q_i, i = 1, \dots, 14$

Bezeichnung	Beschreibung
$x_V, y_V, z_V$	Koordinaten des Massenmittelpunktes des Fahrzeugaufbaus im Inertialsys.
$\psi_V, \theta_V, \varphi_V$	Kardanwinkel zur Beschreibung des Fahrzeugaufbaus rel. zum Inertialsys.
$\varphi_i, i = 1, \dots, 4$	Schwenkwinkel des Querlenkers um die Drehachse $\mathbf{u}_{S_i}$
$\rho_{R_i}, i = 1, \dots, 4$	Drehwinkel der Räder um ihre Drehachse $\mathbf{u}_{R_i}$

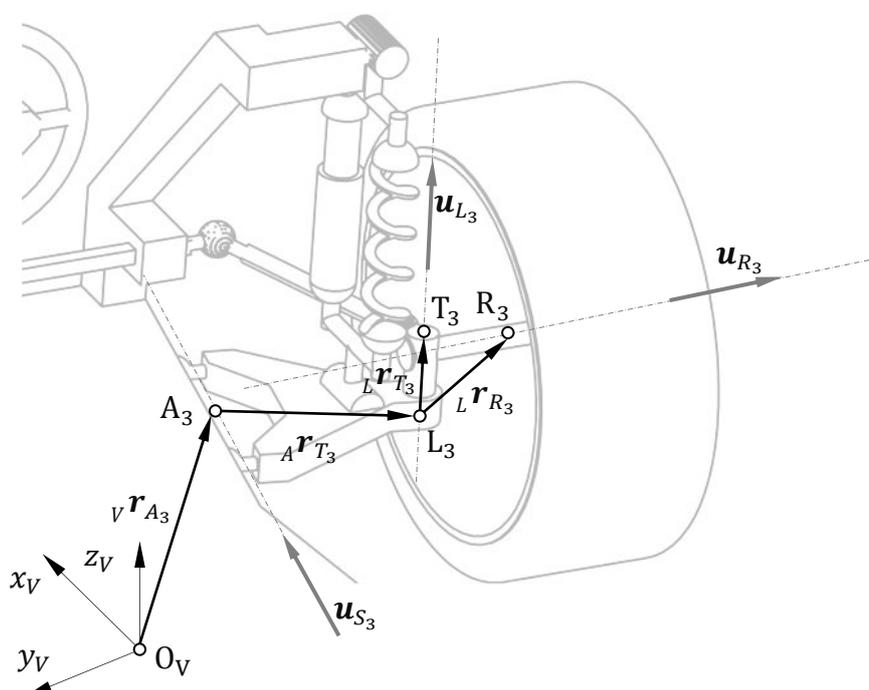


Abb. 3.10: Drehachsen der Schräglenkerradaufhängung, schematische Darstellung (Schramm 2010)

Durch Verwendung der Schräglenkerachse entsteht ein Zweispurmodell, das aus einem Mehrkörpermodell mit offener kinematischer Struktur besteht. Neben Aufbaufedern und -dämpfern werden auch Stabilisatorkräfte zwischen Aufbau und Radträger berücksichtigt.

Als Vorarbeit zur Parameterwertefindung (Kapitel 6) wird in Kapitel 5 eine Parameteridentifikation des Zweispurmodells durchgeführt. Der Parametersatz des Modells wird mithilfe der Referenzgrößen aus Kapitel 4 an eine bestimmte Fahrzeugklasse angepasst. Die Modellqualität ist für einen Großteil von Simulationen ausreichend. Im Vordergrund der Untersuchungen steht der wirtschaftliche Aufwand bei der Parametrierung sowie der Simulation.

Die JACOBI-Matrizen und die Restbeschleunigungen der Schräglenker-Radaufhängung werden in Schramm (2010) hergeleitet. Das hier beschriebene generische Zweispurmodell unterscheidet sich nur in der Radaufhängung vom speziellen Modell. Die allgemeine Berechnung der Dynamik ist für beide Modelle identisch.

### 3.6 Kinematik von komplexen Radaufhängungen

Mit einer komplexen Radkinematik wird ein Modell erstellt, das

- speziell einsetzbar ist,
- das Fahrverhalten eines bestimmten Fahrzeugtypen detailliert wiedergibt und
- als Grundlage zur Auslegung und Optimierung von Fahrdynamikregelung verwendet werden kann.

Die Lösung der Relativkinematik und die Aufstellung der globalen Kinematik werden jeweils am Beispiel der MacPherson-Vorderachse und der Mehrlenker-Hinterachse des repräsentativen Referenzfahrzeugs aus Kapitel 4 aufgezeigt. Bei der MacPherson-Radaufhängung wird eine explizite Lösung der Kinematik erreicht, während bei der Mehrlenkerhinterachse ein iteratives Lösungsverfahren verwendet wird. Die Radaufhängungen zusammen mit dem Fahrzeugaufbau bilden das in der Einführung beschriebene spezielle MKS-Fahrzeugmodell. In Kapitel 7 werden die Sturz- und Spurkurven der modellierten Radaufhängungen im Vergleich zur gemessenen Radaufhängung dargestellt.

#### 3.6.1 MacPherson-Federbeinradaufhängung

Zur Bestimmung der Radaufhängungen des repräsentativen Referenzfahrzeugs wird der Konsens aus den ausgewählten Kompaktklassefahrzeugmodellen gebildet (s. Kapitel 4). Diese Untersuchung ergibt, dass der dominierende Radaufhängungstyp an der Vorderachse der MacPherson-Aufhängung in der Federbeinausführung entspricht (s. Abb. 3.11). Diese Radaufhängung, die nach ihrem Erfinder Earle S. MacPherson benannt ist, wurde über die Jahrzehnte kontinuierlich weiterentwickelt. Sie ist heute eine Standardbauform für viele Unter- und Mittelklassefahrzeuge. Nach Heißing et al. (2007) ist die MacPherson-Federbeinaufhängung eine Einzelradaufhängung, bei der das Feder-Dämpfer-Element einen Teil der Radführungsaufgaben übernimmt. Die Vorteile dieser Bauform sind geringe ungefederte Massen, eine große Abstützbasis, niedrige Kräfte in den Gelenken und ein geringer Raumbedarf. Aufgrund der platzsparenden Bauweise und der kostengünstigen Konstruktion ist dieser Radaufhängungstyp bei PKWs und leichten LKWs sehr verbreitet (Heißing et al. 2007). Der Nachteil dieser Bauform ist die unzureichende räumliche Radführung in dynamisch anspruchsvollen Fahrsituationen, wie sie z. B. im Rennsport entstehen. Das verwendete Modell orientiert sich hauptsächlich an den Ausarbeitungen zur MacPherson-Aufhängung in Schnelle (1990) und Schramm (2010).

In Abb. 3.11 ist eine gängige Federbeinachse dargestellt. Das Rad (10) ist drehbar auf dem Radträger (1) gelagert. Der Radträger ist fest mit der unteren Hälfte des Dämpfers, dem Dämpferrohr (5b), verbunden. Die Kolbenstange (5a), die obere Hälfte des Dämpfers, gleitet im radträgerfesten Rohr des Dämpfers (5b) und ist am oberen Ende über ein Kugelgelenk am Fahrzeugaufbau drehbar gelagert. Kolbenstange (5a) und Dämpferrohr (5b) bilden das Schubgelenk bzw. den Dämpfer. Die Bauteile (4), (5a) und (5b) werden auch als Federbein bezeichnet. Das Federbein übernimmt somit die Verbindung zwischen Radträger und Karosserie und dient als Führung des Radträgers (Schubführung). Das Federbein dient als Federung des Fahrzeugs, Begrenzung der Ein- und Ausfederwege (Zug und Druckanschlag) und als Schwingungsdämpfung. An der Kolbenstange (5a) stützt sich die Feder (4) gegen den Aufbau ab. Am unteren Teller der Feder greift als ein weiteres Kraftelement der Stabilisator (2a) über die Pendelstütze (2b) an. Querlenker (3) und Radträger sind über ein Kugelgelenk verbunden. Die Führung des Radträgers wird zusätzlich vom Querlenker (3) übernommen, der über zwei Querlenkerlager drehbar am Fahrzeug-

aufbau gelagert ist. Die Lenkbewegung des Rades wird durch die Drehung des Radträgers um die Lenkachse, die durch die Verbindungslinie zwischen Kugelgelenk am Federbein und am Querlenker verläuft, realisiert. Eine Komforteigenschaft wird durch ein Nachgeben (Ausweichen) des Radträgers in Längsrichtung bewerkstelligt, welches zu einem komfortableren und sichereren Fahrverhalten führt. Die Längsnachgiebigkeit der Vorderachse wird durch das Komfortquerlager (9) ausgeführt, welches eine geringe Drehung des Querlenkers um eine Vertikale Achse zulässt. Die Lenkbewegung wird über die Spurstange (7), die an den beiden Enden Kugelgelenke besitzt, in den Spurhebel (6), der Teil des Radträgers (1) ist, eingeleitet. Durch eine Verschiebung der Zahnstangenlenkung (8) in Fahrzeugquerrichtung wird die Lenkbewegung über ein Kugelgelenk in die Spurstange eingeleitet.

- 1 Radträger
- 2a Stabilisator
- 2b Pendelstütze
- 3 Querlenker
- 4 Feder
- 5a Kolbenstange
- 5b Dämpferrohr
- 6 Spurhebel
- 7 Spurstange
- 8 Zahnstangenlenkung
- 9 Komfortquerlager
- 10 Rad

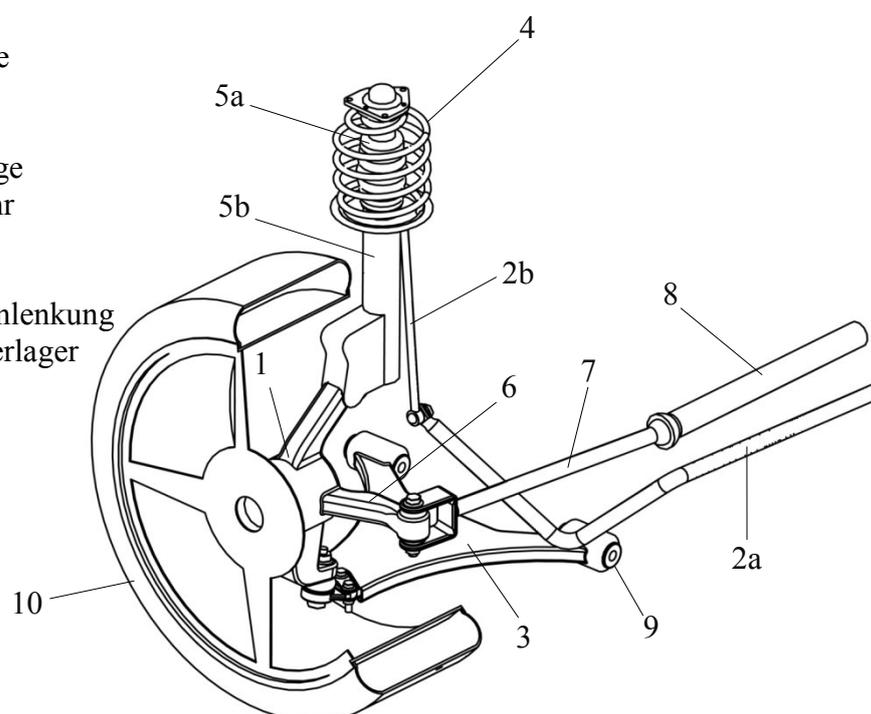


Abb. 3.11: MacPherson-Radaufhängung eines Kompaktklassenfahrzeugs (Schramm 2010)

Aus dem in Abb. 3.11 dargestellten Modell der MacPherson-Radaufhängung wird ein Ersatzsystem hergeleitet, das nur noch aus starren Körpern und Gelenken besteht und die Grundlage für die weiteren kinematischen Analysen bildet. Es sei angemerkt, dass das Komfortlager aus Vereinfachungsgründen durch ein Kugelgelenk ohne Komforteigenschaften ersetzt und der Stabilisator durch ein Kraftgesetz (siehe Schramm (2010)) modelliert wird.

### 3.6.2 Aufstellung der Relativkinematik einer MacPherson-Radaufhängung

Die Relativkinematik der MacPherson-Achse wird in Anlehnung an die Vorgehensweise in (Schnelle 1990) gelöst. In Abb. 3.12 ist eine schematische Darstellung des mechanischen Starrkörpermodells abgebildet, in der die entsprechenden Gelenktypen verbaut und entsprechend der Nomenklatur gekennzeichnet sind. In dieser Modellierung erfolgt die Radführung durch einen Querlenker (3) unterhalb der Radmitte, ein Federbein (2) und ei-

ne Spurstange (4). Der Querlenker ist drehbar am Fahrzeugaufbau gelagert (Querlenkerverdrehwinkel  $\alpha$ ) und durch ein Kugelgelenk mit dem Radträger (1) verbunden. Der Radträger kann sich damit bei der Lenkbewegung um die Verbindungslinie der radträgerseitigen Kugelgelenke von Federbein und Querlenker drehen. Am fahrzeugseitigen Kugelgelenk der Spurstange wird durch die Zahnstangenverschiebung  $s$  die Lenkbewegung erzeugt und über die Spurstange in den Radträger eingeleitet. Die Feder und der Stabilisator sind keine Bestandteile des kinematischen Modells, sondern treten später als eingeprägte Kräfte in den Bewegungsgleichungen auf. Der Dämpfer bildet das Schubgelenk des kinematischen Modells. Die Kraftwirkung des Dämpfers geht ebenfalls in die Bewegungsgleichungen ein.

Werden alle höherwertigen Gelenktypen durch einwertige Gelenke (Dreh- und Schubgelenke) und virtuelle Körper ersetzt, ergibt sich die topologische Struktur in Abb. 3.13. Der isolierte Freiheitsgrad der Spurstange wird durch den Austausch des radträgerseitigen Kugelgelenks mit einem KARDAN-Gelenk eliminiert. Die Anzahl der unabhängigen kinematischen Schleifen wird mit  $n_B = 5$  Körpern und  $n_G = 7$  mehrwertigen Gelenken zu

$$n_L = n_G - n_B = 7 - 5 = 2 \quad (3.61)$$

bestimmt. Da nur noch einwertige Gelenke auftreten, ergibt sich für die Anzahl der Gelenkfreiheitsgrade

$$f_{G_i} = 14. \quad (3.62)$$

Die Gesamtfreiheitsgrade des Systems ergeben sich nach dem GRÜBLER-KUTZBACH-Kriterium zu

$$f = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 14 - 6 \cdot 2 = \underbrace{1}_{\text{Einfedern}} + \underbrace{1}_{\text{Lenken}}. \quad (3.63)$$

Die beiden Freiheitsgrade lassen sich den Bewegungen „Einfedern“ und „Lenken“ zuordnen. Als verallgemeinerte Koordinaten werden der Drehwinkel  $\alpha$  des Querlenkers und die Verschiebung  $s$  der Zahnstange gewählt und zur Beschreibung der Kinematik die Schleifen  $L_1$  und  $L_2$  in die topologische Struktur gelegt (s. Abb. 3.12 und Abb. 3.13).

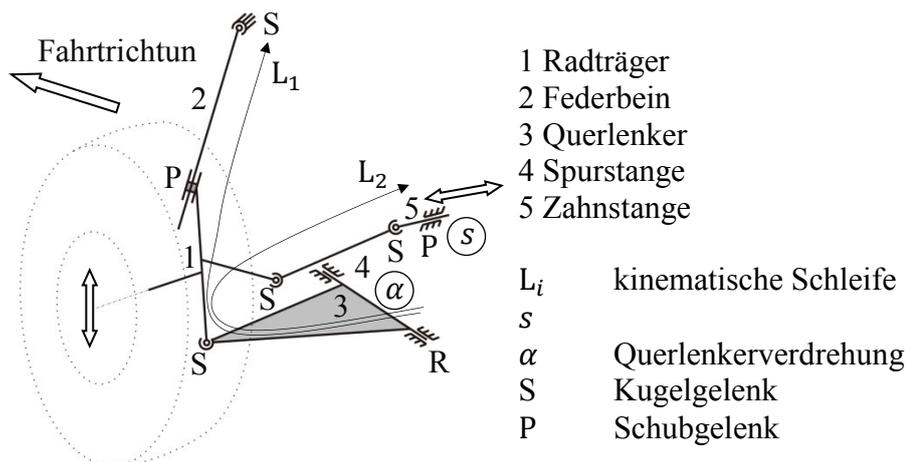


Abb. 3.12: Starrkörpermodell der MacPherson-Radaufhängung vorne links

Durch die topologische Untersuchung der Einzelschleifen lässt sich dann der Lösungsfluss bestimmen. Die Schleife  $L_1$  verläuft ausgehend vom Fahrzeugaufbau über den Querlenker zum Radträger und von dort über das Federbein zurück zum Fahrzeugaufbau. Aus Abb. 3.12 wird ersichtlich, dass Schleife  $L_1$  einer räumlichen Schubkurbel entspricht und

mit der aus Hiller (1986) bekannten Vorgehensweise gelöst werden kann. Die Schleife für sich gesehen beinhaltet einen redundanten (isolierten) Freiheitsgrad, der durch die Verwendung von zwei Kugelgelenken für die Lenkbewegung entsteht. Die Drehwinkel  $\beta_4$  und  $\beta_6$  der Kugelgelenke zwischen Querlenker, Radträger, Federbein und Fahrzeugaufbau sind identisch und können entsprechend zum Drehwinkel  $\Delta\beta_{46}$  zusammengefasst werden (Abb. 3.13). Es verbleiben sieben Gelenkkoordinaten, eine verallgemeinerte Koordinate  $\alpha$  als Eingang und sechs abhängige Koordinaten als Ausgang, die Dämpferverschiebung  $\beta_5$ , die drei Winkel ( $\Delta\beta_{46}, \beta_7, \beta_8$ ) des oberen Kugelgelenks und die zwei Winkel ( $\beta_2, \beta_3$ ) des unteren Kugelgelenks. Die Lage des Radträgers ist bis auf die Drehung  $\beta_4$  um die Lenkachse bestimmt. Der Schleifenfreiheitsgrad der ersten Schleife wird zu

$$f_{L_1} = f_{G_{L_1}} - 6n_{L_1} = 7 - 6 = 1 \quad (3.64)$$

berechnet. Die Kinematik der ersten Schleife kann nun bis auf die Drehbewegung um die Lenkachse durch die Vorgabe von  $\alpha$  gelöst werden.

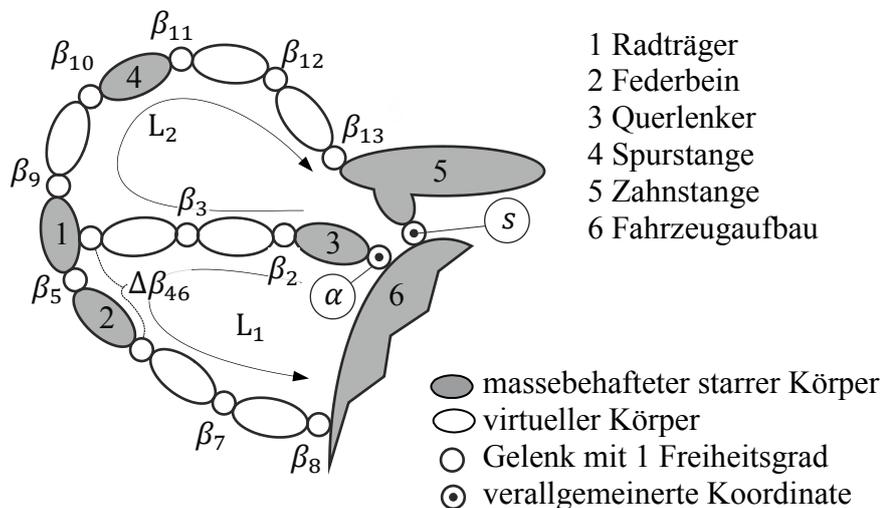


Abb. 3.13: Topologische Darstellung der MacPherson-Radaufhängung

Die Drehung des Radträgers um die (momentane) Lenkachse wird durch die zweite Schleife bestimmt. Über den Lenkmechanismus führt der Weg der Schleife zum Radträger und über den Querlenker zurück zum Fahrzeugaufbau. Aufgrund der Paarung Kugelgelenk-Kugelgelenk (s. Abb. 3.12) besitzt auch diese Schleife einen isolierten Freiheitsgrad. Diese Verdrehung der Spurstange um ihre Längsachse hat jedoch keinen Einfluss auf das Übertragungsverhalten. Der entsprechende Gelenkfreiheitsgrad wurde nicht in die topologische Struktur (Abb. 3.13) eingezeichnet. Bei festgehaltenem  $\alpha$  reduziert sich die Bindungsgleichung der zweiten Schleife auf die eines räumlichen Gelenkvierecks mit translatorischem Eingang  $s$ . Die Schleife verfügt über zehn Gelenkfreiheitsgrade und muss folglich gemäß

$$f_{L_2} = f_{G_{L_2}} - 6n_{L_2} = 10 - 6 = 4 \quad (3.65)$$

vier Eingänge erhalten. Die beiden Schleifen haben drei gemeinsame Gelenkkoordinaten ( $\alpha, \beta_2$  und  $\beta_3$ ). Somit verbleiben zwei Eingänge, die Verschiebung  $s$  der Zahnstange und die Verdrehung  $\alpha$  des Querlenkers als verallgemeinerte Koordinaten. Bei der späteren Berechnung werden die Koordinaten und Geschwindigkeiten des Gelenkpunktes zwischen Spur- und Zahnstange vom Lenkmechanismus übernommen. Die zweite Schleife ist mithilfe der Ergebnisse aus Schleife  $L_1$  und des Lenkmechanismus (Zahnstangenverschiebung  $s$ ) bzw. der Schließbedingung über die Spurstange lösbar.

In Abb. 3.14 ist der Lösungsfluss zur Bestimmung der Aufhängungsbewegungen durch ein Blockschaltbild (kinematisches Netz) dargestellt, das die kinematischen Transformatoren der Schleifen  $L_1$  und  $L_2$  enthält. Da der Lösungsfluss eindeutig und ohne Iterationsstellen ist, handelt es sich um ein explizit auflösbares System. Im Folgenden werden die Positionen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Radträgerschwerpunktes berechnet, mit denen die benötigten Größen für das Aufstellen der Bewegungsgleichungen bestimmt werden.

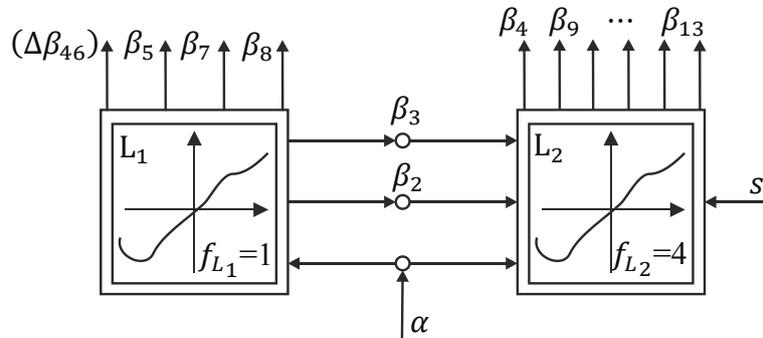


Abb. 3.14: Blockschaltbild und Lösungsfluss (kinematisches Netz) der MacPherson-Radaufhängung

### Position

Zur Ermittlung der Lage des Radträgers müssen die Schleifen mithilfe der Methode des charakteristischen Gelenkpaars, wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben, gelöst werden. Der Fahrzeugursprung liegt im Punkt  $O_V$  und der Radträgerursprung im Punkt  $O_T$ . Der fahrzeugfeste Punkt A ist der Lotfußpunkt des Kugelgelenkpunktes  $R_1$  auf die Drehachse  $\mathbf{u}_1$ .

Die Schleife  $L_1$  wird, wie in Abb. 3.15 gezeigt, an den Kugelgelenken, die das Federbein mit dem Fahrzeugaufbau und den Radträger mit dem Querlenker verbinden, aufgetrennt. Dadurch entstehen ein oberes Segment mit Radträger und Federbein und ein unteres Segment mit Querlenker und Fahrzeugaufbau. Die Schließbedingung dieser Gelenkpaarung ist der konstante Abstand  $d_1$  zwischen den Gelenkpunkten  $R_1$  und  $F_2$ . Dabei entspricht Gelenkpunkt  $R_1$  dem Ursprung des Radträgerfesten-Systems. Mithilfe der Schließbedingung

$$g_1 = d_{1o}^2 - d_{1u}^2 = 0 \quad (3.66)$$

kann die unbekannte Gelenkkoordinate  $h$  in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinate  $\alpha$  ermittelt werden.

Im unteren Segment sind die fahrzeugaufbaufesten Punkte A und F sowie die Querlenkerachse  $\mathbf{u}_1$  gegeben. Damit gelingt die Ermittlung des Verbindungsvektors  $\mathbf{r}_{T,f_2}$  der Punkte  $R_1$  und  $F_2$  zu

$$\mathbf{r}_{T,f_2} = \mathbf{r}_{V,f_2} - \mathbf{r}_{V,T} = \mathbf{r}_{V,f_2} - {}^V\mathbf{r}_A - {}^A\mathbf{r}_T. \quad (3.67)$$

Der Vektor  ${}^A\mathbf{r}_T$  beschreibt die Lage des Querlenkers, der eine Drehung mit dem Drehwinkel  $\alpha$  um die Achse  $\mathbf{u}_1$  erfährt. Beschreibt  ${}^A\mathbf{r}_{T0}$  den Vektor  ${}^A\mathbf{r}_T$  in seiner Ausgangslage ( $\alpha = 0$ ), so beschreibt

$${}^V\mathbf{r}_T = {}^V\mathbf{T}_S(\mathbf{u}_1, \alpha) {}^A\mathbf{r}_{T0} \quad (3.68)$$

die Lage des Querlenkers in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinate  $\alpha$ . Die Orientierung des Querlenkers ist durch die Drehmatrix  ${}^V\mathbf{T}_S$  festgelegt, die die Orientierung

des querlenkerfesten Koordinatensystems relativ zum aufbaufesten Koordinatensystem beschreibt. Es bietet sich eine Beschreibung der Kinematik durch Drehzeiger an (Schramm 2010). Die Verdrehung des Querlenkers um eine fahrzeugfeste Drehachse wird durch

$${}^V T_S = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + (\mathbf{I} - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T) \cos \alpha + \tilde{\mathbf{u}}_1 \sin \alpha \quad (3.69)$$

erhalten.

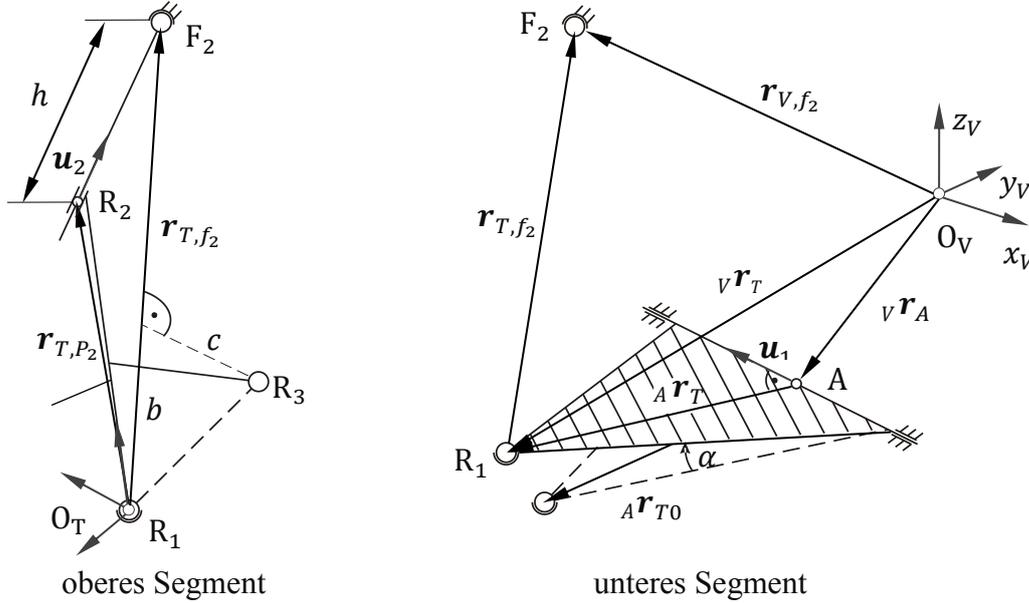


Abb. 3.15: Auftrennen der ersten Schleife in zwei Segmente (Schnelle 1990)

Das Quadrat des Abstandes  $d_{1u}$  im unteren Segment ergibt sich aus

$$d_{1u}^2 = {}^V \mathbf{r}_{T,f_2}^T {}^V \mathbf{r}_{T,f_2} \quad (3.70)$$

durch Aufstellen der Gleichungen (3.67) und (3.68) in den Komponenten des Fahrzeugsystems  $K_V$ .

Im oberen Segment ist der Abstand  $d_{1o}$  von der Hilfsgröße  $h$  abhängig. Durch die folgende Vektorbeziehung in Komponenten des Radträgersystems

$$\mathbf{r}_{T,f_2} = \mathbf{r}_{T,P_2} + h \mathbf{u}_2 \quad (3.71)$$

lässt sich der quadratische Abstand zu

$$d_{1o}^2 = {}^T \mathbf{r}_{T,f_2}^T {}^T \mathbf{r}_{T,f_2} \quad (3.72)$$

bestimmen.

Werden nun die Gleichungen (3.69) und (3.70) in die Schließbedingung (3.66) eingesetzt, ergibt sich durch Umformung der quadratische Ausdruck

$$h^2 \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2 + 2h \mathbf{r}_{T,P_2}^T \mathbf{u}_2 + r_{T,P_2}^2 - d_{1u}^2 = h^2 + 2h \mathbf{r}_{T,P_2}^T \mathbf{u}_2 + r_{T,P_2}^2 - d_{1u}^2 = 0 \quad (3.73)$$

und durch Auflösen der quadratischen Gleichung die Verschiebung  $h$  des Federbeins in Abhängigkeit der Querlenkerdrehung  $\alpha$  zu

$$h = \frac{-2 \mathbf{r}_{T,P_2}^T \mathbf{u}_2 \pm \sqrt{4 (\mathbf{r}_{T,P_2}^T \mathbf{u}_2)^2 - 4 (r_{T,P_2}^2 - d_{1u}^2)}}{2} = -\mathbf{r}_{T,P_2}^T \mathbf{u}_2 \pm d_{1u}(\alpha). \quad (3.74)$$

Die momentane Lenkachse wird durch

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{r}_{T,f_2}}{\|\mathbf{r}_{T,f_2}\|_2} \quad (3.75)$$

beschrieben (s. Abb. 3.16). Die erste Schleife ist somit durch die vorhergegangenen Berechnungen gelöst.

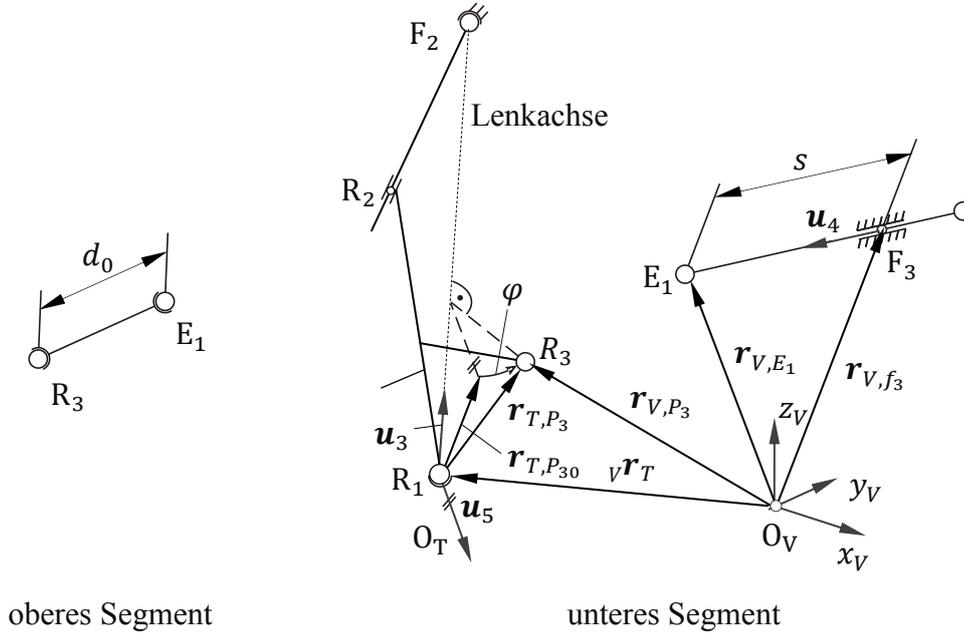


Abb. 3.16: Auftrennen der zweiten Schleife in zwei Segmente (Schnelle 1990)

Die zweite Schleife  $L_2$  wird an den Kugelgelenken der Spurstange aufgetrennt (Abb. 3.16). Die Schließbedingung erhält analog zur ersten Schleife die Bindungsgleichung

$$g_2 = d_{2_u}^2 - d_{2_o}^2 = 0. \quad (3.76)$$

Dabei ist der Bindungsparameter  $d_{2_o}^2$  des oberen Segments unmittelbar durch das Quadrat der Länge der Spurstange gegeben. Im unteren Segment kann zunächst die Lage des Zahnstangenendpunktes  $E_1$  als Funktion der verallgemeinerten Koordinate  $s$ , die von der Zahnstangenverschiebung abhängt, mit

$$\mathbf{r}_{V,E_1} = \mathbf{r}_{V,f_3} + s \mathbf{u}_4 \quad (3.77)$$

angegeben werden.

Die Lage des radträgerseitigen Gelenkpunktes der Spurstange  $R_3$  muss mithilfe des noch unbekanntes Drehwinkels  $\varphi$  konstruiert werden. Dieser Winkel beschreibt die Drehung der Radträger um die momentane Lenkachse  $\mathbf{u}_3$ . Die Lage des Punktes  $R_3$  wird somit durch den Ortsvektor

$${}^V \mathbf{r}_{V,P_3} = {}^V \mathbf{r}_T + {}^V \mathbf{T}_T({}^V \mathbf{u}_3, \varphi) {}^T \mathbf{r}_{T,P_{30}}, \quad (3.78)$$

ausgehend vom Fahrzeugsystem  $K_V$ , bestimmt. Der Vektor  ${}^V \mathbf{r}_T$  liegt bereits aus der Lösung der ersten Schleife vor. Die Orientierung des Radträgers wird durch die Drehmatrix  ${}^V \mathbf{T}_T$  festgelegt, die die Orientierung des radträgerfesten Koordinatensystems relativ zum aufbaufesten System beschreibt. Sie kann erneut durch einen Drehzeiger beschrieben werden und wird errechnet zu

$${}^V \mathbf{T}_T = \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3^T + (\mathbf{I} - \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3^T) \cos \varphi + \tilde{\mathbf{u}}_3 \sin \varphi \quad (3.79)$$

Die Konstruktion der Ausgangslage  $\mathbf{r}_{T,P_{30}}$  des Punktes  $R_3$  ist in Abb. 3.17 erläutert. Zunächst wird im Radträgersystem  $K_R$  der Vektor  $\mathbf{r}_{T,P_3}$ , der aus Konstruktionsdaten bekannt ist, auf die momentane Lenkachse projiziert. Zusammen mit den Strecken

$$b = {}^T\mathbf{u}_3 {}^T\mathbf{r}_{T,P_3}, \text{ und } c = \|\| {}^T\mathbf{u}_3 \times {}^T\mathbf{r}_{T,P_3} \|\|_2, \quad (3.80)$$

der Lenkachse  ${}^V\mathbf{u}_3$  sowie dem Einheitsvektor

$${}^V\mathbf{u}_5 = \frac{{}^V\mathbf{u}_3 \times {}^V\mathbf{r}_T}{\|\| {}^V\mathbf{u}_3 \times {}^V\mathbf{r}_T \|\|_2}, \quad (3.81)$$

der senkrecht auf der Lenkachse steht, wird die Ausgangslage

$${}^V\mathbf{r}_{T,P_{30}} = b {}^V\mathbf{u}_3 + c {}^V\mathbf{u}_5 \quad (3.82)$$

des Radträgerpunktes  $R_3$  im Fahrzeugsystem  $K_V$  berechnet. Nun lässt sich der Bindungsparameter

$$d_{2u}^2 = ({}^V\mathbf{r}_{V,P_3} - {}^V\mathbf{r}_{V,E_1})^T ({}^V\mathbf{r}_{V,P_3} - {}^V\mathbf{r}_{V,E_1}) \quad (3.83)$$

des unteren Segments bestimmen.

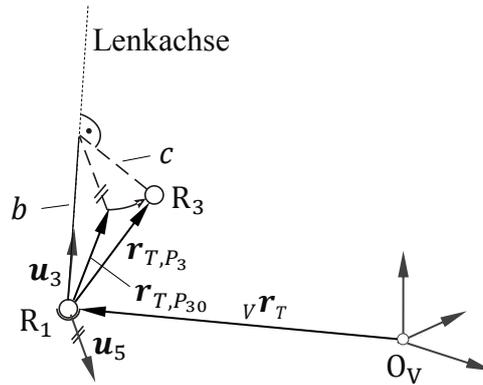


Abb. 3.17: Projektion des radträgerfesten Vektors  $\mathbf{r}_{T,P_3}$

Das Gleichsetzen von  $d_{2u}^2$  mit der gegebenen Größe  $d_{2o}^2$  (s. Gl. (3.76)) ergibt eine explizit lösbare Gleichung für den unbekannt Winkel  $\varphi$ . Durch Einsetzen von Gleichung (3.79) in Gleichung (3.78) und dem Ergebnis in die Bindungsgleichung (3.76) ergibt sich

$$\begin{aligned} g_2 = & \cos^2 \varphi \left[ r_{T,P_{30}}^2 - (\mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}})^2 \right] + \sin^2 \varphi \left[ \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_{30}} \right]^T \left[ \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_{30}} \right] + v r_T^2 \\ & + 2 {}^V\mathbf{r}_T^T \mathbf{u}_3 \mathbf{r}_{T,P_{30}}^T \mathbf{u}_3 + (\mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}})^2 + 2 \cos \varphi (\mathbf{r}_{T,P_{30}}^T - \mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}} \mathbf{u}_3) {}^V\mathbf{r}_T \\ & + 2 \sin \varphi \left[ \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_{30}} \right]^T {}^V\mathbf{r}_T - 2 \cos \varphi \left[ \mathbf{r}_{T,P_{30}} - \mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}} \mathbf{u}_3 \right]^T \mathbf{r}_{V,E_1} \\ & - 2 \sin \varphi \left[ \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_{30}} \right]^T \mathbf{r}_{V,E_1} - 2 \left[ {}^V\mathbf{r}_T + \mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}} \mathbf{u}_3 \right]^T \mathbf{r}_{V,E_1} + r_{V,E_1}^2 \\ & - l_{R_3,E_1}^2. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Diese Gleichung vereinfacht sich wegen des verschwindenden Skalarprodukts senkrecht aufeinander stehender Vektoren zu

$$\begin{aligned}
g_2 = & \cos^2 \varphi \left[ r_{T,P_{30}}^2 - (\mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}})^2 \right] + 2 \cos \varphi \left[ \mathbf{r}_{T,P_{30}} - \mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}} \mathbf{u}_3 \right]^T (\mathbf{v} \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{V,E_1}) \\
& + \sin^2 \varphi \left[ \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_{30}} \right]^T \left[ \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_{30}} \right] \\
& + 2 \sin \varphi \left[ \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_{30}} \right]^T (\mathbf{v} \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{V,E_1}) \\
& + (\mathbf{v} \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{V,E_1})^T (\mathbf{v} \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{V,E_1}) + 2 (\mathbf{v} \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{V,E_1})^T \mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}} \mathbf{u}_3 \\
& + (\mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}})^2 - l_{R_{3,E_1}}^2.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Mit der LAGRANGE-Identität (Bronstein 1999) ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\left[ \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_{30}} \right]^T \left[ \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_{30}} \right] = r_{T,P_{30}}^2 - (\mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}})^2. \tag{3.86}$$

Gleichung (3.86) wird in Gleichung (3.85) eingesetzt und ergibt

$$\begin{aligned}
g_2 = & 2 \cos \varphi \left[ \mathbf{r}_{T,P_{30}} - \mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}} \mathbf{u}_3 \right]^T (\mathbf{v} \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{V,E_1}) \\
& + 2 \sin \varphi \left[ \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_{30}} \right]^T (\mathbf{v} \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{V,E_1}) \\
& + (\mathbf{v} \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{V,E_1})^T (\mathbf{v} \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{V,E_1}) + 2 (\mathbf{v} \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{V,E_1})^T \mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}} \mathbf{u}_3 \\
& + (\mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}})^2 - l_{R_{3,E_1}}^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Dies ist ein Gleichungssystem der Form

$$D(s) \cos \varphi + E(s) \sin \varphi + F(s) = 0, \tag{3.88}$$

mit

$$D(s) = 2 (\mathbf{r}_{T,P_{30}} - \mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}} \mathbf{u}_3)^T (\mathbf{v} \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{V,E_1}), \tag{3.89}$$

$$E(s) = 2 (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_{30}})^T (\mathbf{v} \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{V,E_1}) \tag{3.90}$$

und

$$\begin{aligned}
F(s) = & (\mathbf{v} \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{V,E_1})^T (\mathbf{v} \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{V,E_1}) + 2 (\mathbf{v} \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{V,E_1})^T \mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}} \mathbf{u}_3 + \\
& (\mathbf{u}_3^T \mathbf{r}_{T,P_{30}})^2 - l_{R_{3,E_1}}^2.
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Um den Winkel  $\varphi$  zu berechnen, der abhängig von der verallgemeinerten translatorischen Koordinate  $s$  ist, wird die Gleichung (3.88) umgeformt zur quadratischen Lösungsformel (Woernle 2011)

$$\begin{aligned}
D \cos \varphi + F &= -E \sin \varphi \\
\Rightarrow (D \cos \varphi + F)^2 &= (-E \sin \varphi)^2 \\
\Leftrightarrow (D \cos \varphi + F)^2 &= E^2 (1 - \cos^2 \varphi) \\
\Leftrightarrow (D^2 + E^2) \cos^2 \varphi + 2DF \cos \varphi + F^2 - E^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Der Winkel  $\varphi$  lässt sich durch das Lösen der quadratischen Gleichung zu

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi)_i &= \frac{-DF - (-1)^i E \sqrt{D^2 + E^2 - F^2}}{D^2 + E^2} \\
\sin(\varphi)_i &= \frac{-DF + (-1)^i E \sqrt{D^2 + E^2 - F^2}}{D^2 + E^2}
\end{aligned} \quad \text{mit } i = 1, 2 \tag{3.93}$$

bestimmen. Der Ausdruck für  $\sin(\varphi)_i$  wird berechnet, indem die Lösung für  $\cos(\varphi)_i$  in die Gleichung (3.88) eingesetzt und wie in Gleichung (3.92) umgeformt wird. Mit den berechneten Ausdrücken aus Gleichung (3.93) lassen sich mithilfe der  $\text{atan}(x_i, y_i)$  bzw.  $\text{atan2}(x_i, y_i)$  Funktion die Lösungen für den Winkel  $\varphi$  berechnen zu

$$\varphi_i = \text{atan2}(\sin(\varphi)_i, \cos(\varphi)_i), \text{ mit } i = 1, 2. \tag{3.94}$$

Mit der Gleichung (3.94) ergeben sich zwei Lösungen im Intervall  $-\pi < \varphi < \pi$ , wobei eine die naheliegende Lösung (dies wird durch Simulation festgestellt) und die andere eine Komplementärlösung ist. Der Winkel  $\varphi$  wird zur Bestimmung des Ortsvektors  $\mathbf{r}_{V,P_3}$  nach Gleichung (3.78) benötigt. Die Lage der Punkte  $R_1$ ,  $F_2$  und  $R_3$  ist nun sowohl in den Komponenten des Fahrzeugsystems als auch in den Komponenten des Radträgersystems gegeben. Zusammen mit den Ortsvektoren der Punkte  $R_1$  und  $F_2$  kann die Transformationsmatrix  ${}^V\mathbf{T}_T$  bestimmt werden. Die Bestimmung dieser Matrix erfordert die Richtungsvektoren

$$\mathbf{e}_{H_x} = \mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{r}_{T,f_2}}{\|\mathbf{r}_{T,f_2}\|_2}, \quad \mathbf{e}_{H_y} = \frac{\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3}}{\|\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3}\|_2}, \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{H_z} = \mathbf{u}_3 \times \mathbf{e}_{H_y} \quad (3.95)$$

einer orthogonalen Hilfsbasis  $K_H$  in den Komponenten des Fahrzeugsystems  $K_V$  und des Radträgersystems  $K_T$ . Die Transformationsmatrix ergibt sich somit zu

$${}^V\mathbf{T}_T = {}^V\mathbf{T}_H {}^H\mathbf{T}_T = \left[ \begin{array}{c|c|c} {}^V\mathbf{e}_{H_x} & {}^V\mathbf{e}_{H_y} & {}^V\mathbf{e}_{H_z} \end{array} \right] \begin{bmatrix} {}^T\mathbf{e}_{H_x}^T \\ {}^T\mathbf{e}_{H_y}^T \\ {}^T\mathbf{e}_{H_z}^T \end{bmatrix}. \quad (3.96)$$

Mithilfe dieser Matrix lässt sich die Lage beliebiger Radträgerpunkte berechnen.

### Geschwindigkeit

Aus der nun bekannten Lage aller Aufhängungspunkte und der zeitlichen Ableitungen der Eingänge lassen sich die gesuchten Geschwindigkeiten berechnen. Dafür ist vor allem die Geschwindigkeit des Radträgers wichtig, da sie zur Berechnung der Geschwindigkeiten der Gelenkpunkte zum Rad und Stabilisator beiträgt. Für die Bestimmung werden die Schleifen an je einem Kugelgelenk aufgetrennt und dann die Geschwindigkeit dieses Gelenkpunktes von beiden Seiten bestimmt (Woernle 1988). Die entstehenden Terme werden gleichgesetzt und nach der gesuchten Größe umgeformt.

Die Schleife  $L_1$  wird am Gelenkpunkt  $F_2$  zwischen Federbein und Aufbau getrennt (vgl. Abb. 3.15). Von der Fahrzeugseite ist die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{V,f_2}$  des Punktes relativ zum Fahrzeug

$$\mathbf{v}_{V,f_2} = \mathbf{0}, \quad (3.97)$$

da es sich um einen fahrzeugaufbaufesten Punkt handelt. Auf dem zweiten Weg vom Fahrzeug über den Querlenker, Radträger und das Federbein wird die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{V,f_2}$  für die Relativbewegung von Körpern zu

$$\mathbf{v}_{V,f_2} = {}^V\mathbf{v}_T + {}^V\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T,f_2} + \mathbf{v}_{T,f_2} = \dot{\alpha} \mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T + {}^V\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T,f_2} + \dot{h} \mathbf{u}_2 \quad (3.98)$$

bestimmt. Durch das Gleichsetzen von (3.97) und (3.98) und der Bildung des Skalarprodukts mit dem Vektor  $\mathbf{r}_{T,f_2}$  ergibt sich die unbekannte Geschwindigkeit  $\dot{h}$  der Federbeinverschiebung zu

$$\begin{aligned} \dot{h} &= - \frac{\dot{\alpha} (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T)^T \mathbf{r}_{T,f_2} + \overbrace{({}^V\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T,f_2})^T \mathbf{r}_{T,f_2}}{=0}}{\mathbf{u}_2^T \mathbf{r}_{T,f_2}} = - \frac{(\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T)^T \mathbf{r}_{T,f_2}}{\underbrace{\mathbf{u}_2^T \mathbf{r}_{T,f_2}}_{C_{Z_1}}} \dot{\alpha} \\ &= -\dot{\alpha} C_{Z_1}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Wird anstatt des Skalarprodukts das linksseitige Vektorprodukt von  $\mathbf{r}_{T,f_2}$  mit der Gleichung (3.98) gebildet, ergibt sich mithilfe des Entwicklungssatzes und nach Einsetzen von  $\dot{h}$  derjenige Anteil der Radträger-Winkelgeschwindigkeit  ${}_V\boldsymbol{\omega}_T$ , der senkrecht auf der Lenkachse  $\mathbf{u}_3$  bzw. dem Vektor  $\mathbf{r}_{T,f_2}$  steht, zu (s. im Anhang Gl. (A.12))

$$\begin{aligned}
({}_V\boldsymbol{\omega}_T)_\perp &= -\frac{\mathbf{r}_{T,f_2} \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T)}{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}} \dot{\alpha} - \frac{(\mathbf{r}_{T,f_2} \times \mathbf{u}_2)}{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}} \dot{h} \\
&= \left( -\frac{\mathbf{r}_{T,f_2} \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T)}{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}} + \frac{(\mathbf{r}_{T,f_2} \times \mathbf{u}_2)}{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}} \underbrace{\left( \frac{(\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T)^T \mathbf{r}_{T,f_2}}{\mathbf{u}_2^T \mathbf{r}_{T,f_2}} \right)}_{C_{Z_1}} \right) \dot{\alpha} \\
&= \underbrace{\left( -\frac{\mathbf{r}_{T,f_2} \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T - \mathbf{u}_2 C_{Z_1})}{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}} \right)}_{C_{\omega_T}} \dot{\alpha} = C_{\omega_T} \dot{\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Der restliche Anteil kann aus der ersten Schleife nicht bestimmt werden (vgl. auch die topologische Lösung in Abb. 3.13 bzw. Abb. 3.14).

Die Berechnung der Geschwindigkeiten in der zweiten Schleife erfolgt analog (s. Abb. 3.16). Durch das Auftrennen der zweiten Schleife am Kugelgelenk zwischen Spurstange und Radträger am Punkt  $R_3$  wird die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi}$  berechnet. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{V,P_3}$  des Gelenkpunktes  $R_3$  relativ zum Fahrzeugaufbau lässt sich über die Radträgerbewegung bestimmen zu

$$\mathbf{v}_{V,P_3} = {}_V\mathbf{v}_T + \overbrace{\left( ({}_V\boldsymbol{\omega}_T)_\perp + \dot{\phi} \mathbf{u}_3 \right)}{{}_V\boldsymbol{\omega}_T} \times \mathbf{r}_{T,P_3}. \tag{3.101}$$

Die Geschwindigkeit  ${}_V\mathbf{v}_T$  des Punktes  $R_1$  und die senkrecht auf der Lenkachse stehende Komponente  $({}_V\boldsymbol{\omega}_T)_\perp$  der Winkelgeschwindigkeit des Radträgers sind bereits bekannt. Gesucht wird die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi}$ , mit der sich der Radträger um die momentane Lenkachse dreht. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{V,P_3}$  wird mithilfe der Zahnstangen- bzw. Spurstangenbewegung zu

$$\mathbf{v}_{V,P_3} = \dot{s} \mathbf{u}_4 + {}_V\boldsymbol{\omega}_S \times \underbrace{(\mathbf{r}_{V,P_3} - \mathbf{r}_{V,E_1})}_{\mathbf{r}_{P_3,E_1}} \tag{3.102}$$

bestimmt. Hier ist die Translationsgeschwindigkeit  $\dot{s}$  der Zahnstange als Eingangsgröße gegeben. Die Winkelgeschwindigkeit  ${}_V\boldsymbol{\omega}_S$  der Spurstange ist noch unbekannt, weshalb auch hier nur ihre senkrecht auf der Spurstange stehende Komponente  $({}_V\boldsymbol{\omega}_S)_\perp$  bestimmt werden kann. Die unbekannte Winkelgeschwindigkeit, die in Richtung der Längsrichtung der Spurstange wirkt, ist nicht von Interesse, da sie dem isolierten Freiheitsgrad entspricht. Nach dem Gleichsetzen von Gleichungen (3.101) und (3.102) sowie dem Skalarmultiplizieren mit dem Vektor  $\mathbf{r}_{P_3,E_1} = \mathbf{r}_{V,P_3} - \mathbf{r}_{V,E_1}$  und Einsetzen von Gleichung (3.100) wird die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi}$  des Radträgers um die momentane Drehachse  $\mathbf{u}_3$  als Funktion der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{V,E_1} = \dot{s} \mathbf{u}_4$  berechnet zu

$$\dot{\phi} = \frac{\mathbf{r}_{P_3,E_1}^T \left( \dot{s} \mathbf{u}_4 - {}_V\mathbf{v}_T - ({}_V\boldsymbol{\omega}_T)_\perp \times \mathbf{r}_{T,P_3} \right)}{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3})^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\dot{s} \mathbf{u}_4^T \mathbf{r}_{P_3, E_1} - \dot{\alpha} (\mathbf{u}_1 \times {}_A \mathbf{r}_T + \mathbf{C}_{\omega_T} \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}} \\
&= \dot{s} \underbrace{\left( \frac{\mathbf{u}_4^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}} \right)}_{D_s} - \dot{\alpha} \underbrace{\left( \frac{(\mathbf{u}_1 \times {}_A \mathbf{r}_T + \mathbf{C}_{\omega_T} \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}} \right)}_{E_\alpha} = \dot{s} D_s - \dot{\alpha} E_\alpha. \quad (3.103)
\end{aligned}$$

Die Winkelgeschwindigkeit resultiert aus der Zahnstangenverschiebung  $s$  und deren Geschwindigkeit  $\dot{s}$ . Werden die Resultate aus den Gleichungen (3.100) und (3.103) zusammengesetzt, kann die Winkelgeschwindigkeit  ${}_{V} \boldsymbol{\omega}_T$  des Radträgers relativ zum Fahrzeugaufbau bestimmt werden zu

$${}_{V} \boldsymbol{\omega}_T = ({}_{V} \boldsymbol{\omega}_T)_\perp + \dot{\phi} \mathbf{u}_3 = \dot{\alpha} \underbrace{(\mathbf{C}_{\omega_T} - E_\alpha \mathbf{u}_3)}_{\mathbf{C}_{\omega E}} + \dot{s} D_s \mathbf{u}_3 = \dot{\alpha} \mathbf{C}_{\omega E} + \dot{s} D_s \mathbf{u}_3. \quad (3.104)$$

Nach dem Einsetzen aller bekannten Größen wird die Winkelgeschwindigkeit der Spurstange berechnet zu (s. auch Gl. (A.13))

$$\begin{aligned}
({}_{V} \boldsymbol{\omega}_S)_\perp &= \frac{\mathbf{r}_{P_3, E_1} \times ({}_{V} \mathbf{v}_T + {}_{V} \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T, P_3} - \dot{s} \mathbf{u}_4)}{\mathbf{r}_{P_3, E_1}^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}} \\
&= \dot{\alpha} \underbrace{\frac{\mathbf{r}_{P_3, E_1} \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A \mathbf{r}_T + \mathbf{C}_{\omega E} \times \mathbf{r}_{T, P_3})}{\mathbf{r}_{P_3, E_1}^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}}_{N_\alpha} \\
&\quad + \dot{s} \underbrace{\frac{\mathbf{r}_{P_3, E_1} \times (D_s \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3} - \mathbf{u}_4)}{\mathbf{r}_{P_3, E_1}^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}}_{N_s} = \dot{\alpha} N_\alpha + \dot{s} N_s. \quad (3.105)
\end{aligned}$$

Damit ist die Geschwindigkeit eines beliebigen radträgerfesten Punktes  $R_i$  relativ zum Fahrzeugaufbau bekannt und kann berechnet werden durch

$${}_{V} \mathbf{v}_{T_i} = {}_{V} \mathbf{v}_T + {}_{V} \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T, P_i}. \quad (3.106)$$

Mit den Beziehungen der Relativbewegungen lässt sich im nächsten Abschnitt die Absolutgeschwindigkeit im Inertialsystem bestimmen.

### Beschleunigungen

Diese Art zur Ermittlung der Geschwindigkeiten bietet sich auch bei den Beschleunigungen an. Die Schleifen werden an den gleichen Gelenkpunkten aufgetrennt. In der Schleife  $L_1$  wird die Beschleunigung  ${}_F \mathbf{a}_{F_2}$  des Gelenkpunktes  $F_2$  auf zwei Arten bestimmt zu

$$\mathbf{a}_{V, f_2} = 0 \quad (3.107)$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{V, f_2} &= \ddot{\alpha} \mathbf{u}_1 \times {}_A \mathbf{r}_T + \dot{\alpha}^2 \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A \mathbf{r}_T) + {}_{V} \dot{\boldsymbol{\omega}}_T \times \mathbf{r}_{T, f_2} + 2\dot{h} {}_{V} \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{u}_2 + {}_{V} \boldsymbol{\omega}_T \\
&\quad \times ({}_{V} \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T, f_2}) + \ddot{h} \mathbf{u}_2. \quad (3.108)
\end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der Gleichungen (3.107) und (3.108), skalarer Multiplikation mit  $\mathbf{r}_{T, f_2}$  und Einsetzen der bekannten Geschwindigkeiten wird die Beschleunigung  $\ddot{h}$  am Dämpferrohr ermittelt zu

$$\begin{aligned}
\dot{h} &= -\ddot{\alpha} \frac{(\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T)^T \mathbf{r}_{T,f_2}}{\underbrace{\mathbf{u}_2^T \mathbf{r}_{T,f_2}}_{C_{h_1}}} \\
&\quad - \ddot{\alpha}^2 \frac{\left( (\mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T))^T \mathbf{r}_{T,f_2} - 2C_{Z_1} \left( \mathbf{C}_{\omega_T} \times (\mathbf{u}_2 - (\mathbf{C}_{\omega_T} \times \mathbf{r}_{T,f_2})) \right)^T \mathbf{r}_{T,f_2} \right)}{\underbrace{\mathbf{u}_2^T \mathbf{r}_{T,f_2}}_{C_{h_2}}} \quad (3.109) \\
&= \ddot{\alpha} C_{h_1} - \ddot{\alpha}^2 C_{h_2}.
\end{aligned}$$

Die zur Lenkachse senkrechte Winkelbeschleunigungskomponente  $({}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}_T)_\perp$  des Radträgers wird aus dem linksseitigen Vektorprodukt der Gleichung (3.108) mit  $\mathbf{r}_{T,f_2}$  ermittelt zu (s. Gl. (A.14))

$$\begin{aligned}
({}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}_T)_\perp &= \ddot{\alpha} \left( -\frac{\mathbf{r}_{T,f_2} \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T - C_{hZ_1} \mathbf{u}_2)}{\underbrace{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}}_{C_{\omega_T}}} \right) \\
&\quad - \ddot{\alpha}^2 \frac{\mathbf{r}_{T,f_2} \times (\mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T) - 2C_{Z_1} \mathbf{C}_{\omega_T} \times \mathbf{u}_2 - C_{h_2} \mathbf{u}_2)}{\underbrace{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}}_{K_{\ddot{\alpha}^2}}} \quad (3.110) \\
&= \ddot{\alpha} \mathbf{C}_{\omega_T} - \ddot{\alpha}^2 \mathbf{K}_{\ddot{\alpha}^2}.
\end{aligned}$$

Für die Schleife  $L_2$  wird die Beschleunigung  $\mathbf{a}_{V,f_3}$  des Punktes  $R_3$ , dem Gelenkpunkt zwischen Radträger und Spurstange, ermittelt. Die entsprechenden Beziehungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{V,f_3} &= {}_V\dot{\mathbf{v}}_T + {}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}_T \times \mathbf{r}_{T,P_3} + {}_V\boldsymbol{\omega}_T \times ({}_V\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T,P_3}) \\
&= \ddot{\alpha} \mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T + \ddot{\alpha}^2 \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T) + \left( ({}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}_T)_\perp + \ddot{\varphi} \mathbf{u}_3 \right) \times \mathbf{r}_{T,P_3} \\
&\quad + {}_V\boldsymbol{\omega}_T \times ({}_V\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T,P_3}) \quad (3.111)
\end{aligned}$$

und

$$\mathbf{a}_{V,f_3} = \ddot{s} \mathbf{u}_4 + ({}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}_S)_\perp \times \mathbf{r}_{P_3,E_1} + ({}_V\boldsymbol{\omega}_S)_\perp \times \left( ({}_V\boldsymbol{\omega}_S)_\perp \times \mathbf{r}_{P_3,E_1} \right). \quad (3.112)$$

Nach dem Gleichsetzen der Gleichungen (3.111) und (3.112) wird durch das Skalarprodukt mit dem Vektor  $\mathbf{r}_{P_3,E_1}$  die Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}$  des Radträgers um die Lenkachse ermittelt

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= \frac{1}{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3})^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}} \left( \ddot{s} \mathbf{u}_4 + ({}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}_S)_\perp \times \left( ({}_V\boldsymbol{\omega}_S)_\perp \times \mathbf{r}_{P_3,E_1} \right) - \ddot{\alpha} \mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T - \ddot{\alpha}^2 \mathbf{u}_1 \right. \\
&\quad \left. \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T) - ({}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}_T)_\perp \times \mathbf{r}_{T,P_3} - {}_V\boldsymbol{\omega}_T \times ({}_V\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T,P_3}) \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}. \quad (3.113)
\end{aligned}$$

Um die Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}$  zusammengefasst darzustellen, werden zunächst die einzelnen Terme der Gleichung (3.113) ausgewertet und substituiert zu (s. Gl. (3.103))

$$\dot{s} \frac{\mathbf{u}_4^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{\underbrace{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}_{D_s}} = \dot{s} D_s \quad (3.114)$$

(s. Gl. (A.15)),

$$\begin{aligned} & \frac{\left( ({}_{V}\boldsymbol{\omega}_S)_\perp \times \left( ({}_{V}\boldsymbol{\omega}_S)_\perp \times \mathbf{r}_{P_3, E_1} \right) \right)^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}} \\ &= \dot{s}^2 \frac{\left( \mathbf{N}_{\dot{s}} \times \mathbf{N}_{\dot{s}} \times \mathbf{r}_{P_3, E_1} \right)^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{\underbrace{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}_{F_{\omega \dot{s}^2}}} + \dot{\alpha}^2 \frac{\left( \mathbf{N}_{\dot{\alpha}} \times (\mathbf{N}_{\dot{\alpha}} \times \mathbf{r}_{P_3, E_1}) \right)^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{\underbrace{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}_{F_{\omega \dot{\alpha}^2}}} \\ & \quad + \dot{\alpha} \dot{s} \frac{\left( \mathbf{N}_{\dot{s}} \times (\mathbf{N}_{\dot{\alpha}} \times \mathbf{r}_{P_3, E_1}) + \mathbf{N}_{\dot{\alpha}} \times (\mathbf{N}_{\dot{s}} \times \mathbf{r}_{P_3, E_1}) \right)^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{\underbrace{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}_{F_{\omega \dot{\alpha} \dot{s}}}} \\ &= \dot{\alpha}^2 F_{\omega \dot{\alpha}^2} + \dot{\alpha} \dot{s} F_{\omega \dot{\alpha} \dot{s}} + \dot{s}^2 F_{\omega \dot{s}^2}, \end{aligned} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\left( ({}_{V}\dot{\boldsymbol{\omega}}_T)_S \times \mathbf{r}_{T, P_3} \right)^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}} = - \frac{\left( (\ddot{\alpha} \mathbf{c}_{\omega_T} - \dot{\alpha}^2 \mathbf{K}_{\dot{\alpha}^2}) \times \mathbf{r}_{T, P_3} \right)^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}} \\ &= -\ddot{\alpha} \frac{(\mathbf{c}_{\omega_T} \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{\underbrace{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}_{K_{1\ddot{\alpha}}}} + \dot{\alpha}^2 \frac{(\mathbf{K}_{\dot{\alpha}^2} \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{\underbrace{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}_{K_{1\dot{\alpha}^2}}} = -\ddot{\alpha} E_{\alpha_2} + \dot{\alpha}^2 K_{1\dot{\alpha}^2}, \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\left( ({}_{V}\boldsymbol{\omega}_T \times ({}_{V}\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T, P_3})) \right)^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}} \\ &= \dot{\alpha}^2 \frac{\left( \mathbf{C}_{\omega E} \times (\mathbf{C}_{\omega E} \times \mathbf{r}_{T, P_3}) \right)^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{\underbrace{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}_{V_{\dot{\alpha}^2}}} \\ & \quad + \dot{\alpha} \dot{s} \frac{D_s \left( \mathbf{u}_3 \times (\mathbf{C}_{\omega E} \times \mathbf{r}_{T, P_3}) + \mathbf{C}_{\omega E} \times (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3}) \right)^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{\underbrace{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}_{V_{\dot{\alpha} \dot{s}}}} \\ & \quad + \dot{s}^2 \frac{D_s^2 \left( \mathbf{u}_3 \times (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3}) \right)^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{\underbrace{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}_{V_{\dot{s}^2}}} = \dot{\alpha}^2 V_{\dot{\alpha}^2} + \dot{\alpha} \dot{s} V_{\dot{\alpha} \dot{s}} + \dot{s}^2 V_{\dot{s}^2} \end{aligned}$$

(s. Gl. (A.16)),

(3.117)

$$-\ddot{\alpha} \frac{(\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T)^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{\underbrace{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}_{W_{\ddot{\alpha}}}} = -\ddot{\alpha} E_{\alpha_1}, \quad (3.118)$$

und

$$-\dot{\alpha}^2 \frac{(\mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T))^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}{\underbrace{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, P_3})^T \mathbf{r}_{P_3, E_1}}_{W_{\dot{\alpha}^2}}} = -\dot{\alpha}^2 W_{\dot{\alpha}^2}. \quad (3.119)$$

Nachfolgend werden die Terme (3.114) bis (3.117) zusammengefasst, in die Gleichung (3.113) eingesetzt und nach  $\ddot{s}$ ,  $\dot{s}^2$ ,  $\ddot{\alpha}$ ,  $\dot{\alpha}^2$  und  $\dot{\alpha}\dot{s}$  zusammengefasst zu

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \ddot{s}D_s + \dot{\alpha}^2 F_{\omega\dot{\alpha}^2} + \dot{\alpha}\dot{s}F_{\omega\dot{\alpha}\dot{s}} + \dot{s}^2 F_{\omega\dot{s}^2} + \dot{s}^2 V_{\dot{s}^2} - \ddot{\alpha}W_{\ddot{\alpha}} - \dot{\alpha}^2 W_{\dot{\alpha}^2} - \ddot{\alpha}K_{1\ddot{\alpha}} \\ &\quad + \dot{\alpha}^2 K_{1\dot{\alpha}^2} + \dot{\alpha}^2 V_{\dot{\alpha}^2} + \dot{\alpha}\dot{s}V_{\dot{\alpha}\dot{s}} \\ &= \ddot{s}D_s - \ddot{\alpha}(E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2}) + \dot{\alpha}^2(F_{\omega\dot{\alpha}^2} - W_{\dot{\alpha}^2} + K_{1\dot{\alpha}^2} + V_{\dot{\alpha}^2}) + \dot{\alpha}\dot{s}(F_{\omega\dot{\alpha}\dot{s}} + V_{\dot{\alpha}\dot{s}}) \\ &\quad + \dot{s}^2(F_{\omega\dot{s}^2} + V_{\dot{s}^2}) \\ &= \ddot{s}D_s - \ddot{\alpha}E_{\alpha} + \dot{\alpha}^2 Z_{\dot{\alpha}^2} + \dot{\alpha}\dot{s}Z_{\dot{\alpha}\dot{s}} + \dot{s}^2 Z_{\dot{s}^2}. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Mit der Gleichung (3.120) lässt sich die gesamte Winkelbeschleunigung  ${}_v\dot{\boldsymbol{\omega}}_T$  des Radträgers bestimmen zu

$${}_v\dot{\boldsymbol{\omega}}_T = ({}_v\dot{\boldsymbol{\omega}}_T)_{\perp} + \ddot{\varphi} \mathbf{u}_3. \quad (3.121)$$

Damit ist die Beschleunigung eines beliebigen radträgerfesten Punktes  $R_i$  relativ zum Fahrzeugaufbau bekannt und kann berechnet werden durch den Ausdruck

$${}_v\mathbf{a}_{T, P_i} = {}_v\mathbf{a}_T + {}_v\dot{\boldsymbol{\omega}}_T \times \mathbf{r}_{T, P_i} + {}_v\boldsymbol{\omega}_T \times ({}_v\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T, P_i}). \quad (3.122)$$

Die Berechnung der Relativkinematik der MacPherson-Radaufhängung ist damit abgeschlossen. Die für das Aufstellen der Bewegungsgleichung benötigte Absolutkinematik wird im nächsten Abschnitt bestimmt. Die hierfür notwendigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen relativ zum Inertialsystem können mithilfe der Vorwärtskinematik aus 3.2.4 berechnet werden. Ein Vorteil der hier gezeigten Methode ist, dass bei diesem Aufhängungstyp die Bindungen explizit lösbar sind. Somit sind keine iterativen Verfahren notwendig. Hinzu kommt, dass alle Beziehungen in Vektorform aufgestellt werden und so der Übergang zur Komponentendarstellung erst bei der numerischen Auswertung erfolgt.

### 3.6.3 Aufstellung der Absolutkinematik einer MacPherson-Radaufhängung

Mit der gelösten Relativkinematik aus dem vorherigen Abschnitt wird nun die Absolutkinematik der Radaufhängung aufgestellt. Die Vorgehensweise zur Modularisierung der Radaufhängung aus Abschnitt 3.3 ist nötig, um die kinematischen Beziehungen der MacPherson-Radaufhängung aufzustellen. Es werden die Übertragungsgesetze für die in Abb. 3.5 dargestellten Ein- und Ausgangsgrößen der MacPherson-Radaufhängung berechnet.

Die Anbindung der Radaufhängung erfolgt nun gemäß Abb. 3.18 durch Zuordnung der verallgemeinerten Koordinaten  $\alpha_i$  und des Eingangs  $s_i$ , die der Einfeder- bzw. Lenkbewegung entsprechen, zum Radträger. Damit ergeben sich die Vektoren der verallgemeinerten Koordinaten und Eingänge für die vorderen Radaufhängungen zu

$$\mathbf{c} = [\alpha_1 \quad \alpha_3]^T \quad (3.123)$$

und

$$\boldsymbol{\delta} = [s_1 \quad s_3]^T. \quad (3.124)$$

Die verallgemeinerten Koordinaten für die vorderen Räder des Fahrzeugs ergeben sich zu

$$\boldsymbol{\rho} = [\rho_{R_1} \quad \rho_{R_3}]^T. \quad (3.125)$$

Gesucht sind nun die Lage-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsgrößen der Radträger und der Räder relativ zum Inertialsystem in Abhängigkeit von den Vektoren  $\mathbf{c}$ ,  $\boldsymbol{\delta}$  und  $\boldsymbol{\rho}$ . Die JACOBI-Untermatrizen (z. B.  $\mathbf{H}_{Tra_c, T_i}$ ) und ihre Ableitungen werden durch Koeffizientenvergleich der Absolutgrößen aufgestellt.

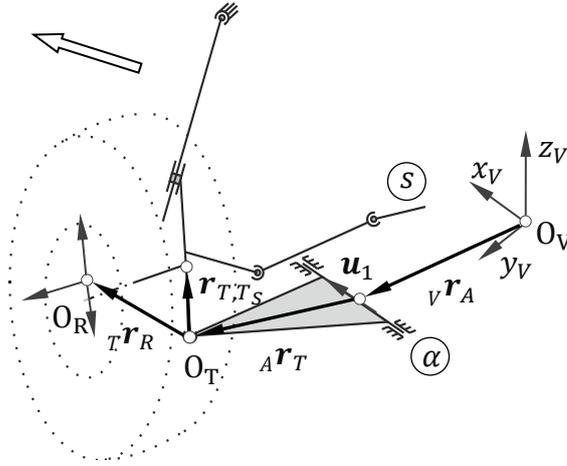


Abb. 3.18: Vektorzug zu den Massenschwerpunkten der MacPherson-Radaufhängung

### Translation des Radträgers

Der Ortsvektor  $\mathbf{r}_{T,S_i}$  (s. Abb. 3.18) zum Massenmittelpunkt des Radträgers  $T_i$  relativ zum Inertialsystem errechnet sich aus

$${}^V\mathbf{r}_{T,S_i} = \mathbf{r}_V + {}^V\mathbf{r}_{T,S_i} = \mathbf{r}_V + {}^V\mathbf{r}_{A_i} + {}^A\mathbf{r}_{T_i} + \mathbf{r}_{T,T,S_i}. \quad (3.126)$$

Der Ortsvektor  ${}^V\mathbf{r}_{T_i}$  setzt sich zusammen aus dem fahrzeugfesten Ortsvektor  ${}^V\mathbf{r}_{A_i}$  vom Aufbaumassenmittelpunkt  $K_V$  zum Bezugspunkt der Radaufhängung  $A_i$  sowie dem Ortsvektor  ${}^A\mathbf{r}_{T_i}$  von  $A_i$  zum Ursprung  $T_i$  und dem Vektor  $\mathbf{r}_{T,T,S_i}$  zum Schwerpunkt des Radträgers (s. Abb. 3.18) zu

$${}^V\mathbf{r}_{T,S_i}(\mathbf{c}, \boldsymbol{\delta}) = \underbrace{{}^V\mathbf{r}_{A_i}}_{\text{const.}} + {}^A\mathbf{r}_{T_i}(\mathbf{c}) + \underbrace{\mathbf{r}_{T,T,S_i}}_{\text{const.}}(\mathbf{c}, \boldsymbol{\delta}). \quad (3.127)$$

Der Ortsvektor  ${}^V\mathbf{r}_{A_i}$  vom Punkt  $A_i$  zum Radträgerursprung  $T_i$  im fahrzeugfesten System kann mit der Rotationsmatrix aus Gleichung (3.69) berechnet werden zu

$${}^V\mathbf{r}_{A_i} = {}^V\mathbf{T}_S {}^S\mathbf{r}_{A_i}. \quad (3.128)$$

Der Vektor  ${}^V\mathbf{r}_{T,S_i}$  vom Radträgerursprung  $T_i$  zum Schwerpunkt des Radträgers  $T_{S_i}$  im fahrzeugfesten System wird mit der Rotationsmatrix aus Gleichung (3.96) berechnet zu

$${}^V\mathbf{r}_{T,S_i} = {}^V\mathbf{T}_T {}^T\mathbf{r}_{T,S_i}. \quad (3.129)$$

Damit ergeben sich die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der vorderen Radträger relativ zum Aufbau unter Zuhilfenahme der Gleichungen (3.97) bis (3.105) bzw. (3.107) bis (3.121) zu (s. Gl. (A.6))

$$\begin{aligned} {}_v\mathbf{v}_{T_{S_i}} &= {}_v\mathbf{v}_T + {}_v\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}} = {}_v\mathbf{v}_T + ({}_v\boldsymbol{\omega}_T)_\perp \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}} + \dot{\phi} \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}} \\ &= \dot{\alpha} \underbrace{(\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T + (\mathbf{C}_{\omega_T} - E_\alpha \mathbf{u}_3) \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}})}_{\mathbf{H}_{Tra_c,T_i}} + \dot{s} \underbrace{D_s \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}}}_{\mathbf{H}_{Tra_\delta,T_i}} \end{aligned} \quad (3.130)$$

und (s. Gl. (A.7))

$$\begin{aligned} {}_v\mathbf{a}_{T_{S_i}} &= {}_v\mathbf{a}_T + {}_v\dot{\boldsymbol{\omega}}_T \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}} + {}_v\boldsymbol{\omega}_T \times ({}_v\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}}) \\ &= \ddot{\alpha} \underbrace{(\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T + (\mathbf{C}_{\omega_T} - E_\alpha \mathbf{u}_3) \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}})}_{\mathbf{H}_{Tra_c,T_i}} + \ddot{s} \underbrace{D_s \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}}}_{\mathbf{H}_{Tra_\delta,T_i}} + \\ &\quad \dot{\alpha} \dot{\alpha} \underbrace{(\mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T) - (\mathbf{K}_{\alpha^2} + Z_{\alpha^2} \mathbf{u}_3) \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}} + \mathbf{C}_{\omega_E} \times (\mathbf{C}_{\omega_E} \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}}))}_{\dot{\mathbf{H}}_{Tra_c,T_i}} + \\ &\quad \dot{s} \dot{\alpha} (Z_{s\alpha} \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}} + D_s (\mathbf{u}_3 \times (\mathbf{C}_{\omega_E} \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}}) + \mathbf{C}_{\omega_E} \times (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}}))) + \\ &\quad \dot{s} (Z_{s^2} \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}} + D_s^2 \mathbf{u}_3 \times (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,T_{S_i}})). \end{aligned} \quad (3.131)$$

Die Gleichungen (3.130) und (3.131) enthalten die translatorischen JACOBI-Untermatrizen  $\mathbf{H}_{Tra_c,T_i}$  und  $\mathbf{H}_{Tra_\delta,T_i}$  sowie deren zeitliche Ableitungen.

Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gegenüber dem Inertialsystem werden durch die Beachtung der Führungsbewegung (s. Gl. (3.16) und (3.18)) des Fahrzeugaufbaus berechnet zu

$${}_E\mathbf{v}_{T_{S_i}} = {}_E\mathbf{v}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_v\mathbf{r}_{T_{S_i}} + {}_v\mathbf{v}_{T_{S_i}} \quad (3.132)$$

und

$${}_E\mathbf{a}_{T_{S_i}} = {}_E\mathbf{a}_V + 2\boldsymbol{\omega}_V \times {}_v\mathbf{v}_{T_{S_i}} + \boldsymbol{\alpha}_V \times {}_v\mathbf{r}_{T_{S_i}} + {}_v\mathbf{a}_{T_{S_i}} + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\omega}_V \times {}_v\mathbf{r}_{T_{S_i}}). \quad (3.133)$$

Die JACOBI-Blockmatrizen  $\mathbf{J}_{Tra,T_i}$  lassen sich nach Gleichung (3.35) berechnen zu

$$\mathbf{J}_{Tra,T_i} = \left[ \mathbf{I}_{[3 \times 3]} \mid -{}_v\tilde{\mathbf{r}}_{T_{S_i}} \mid \mathbf{H}_{Tra_c,T_i} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 4]} \right], i = 2, 4. \quad (3.134)$$

Die Translationsbeschleunigung des Radträgers kann somit ausgedrückt werden durch

$${}_E\mathbf{a}_{T_i} = \mathbf{J}_{Tra,T_i} \dot{\mathbf{z}} + {}_E\bar{\mathbf{a}}_{T_i}, \quad (3.135)$$

mit der translatorischen Restbeschleunigung des Radträgers, die sich berechnet zu

$$\begin{aligned} {}_E\bar{\mathbf{a}}_{T_i} &= 2 \boldsymbol{\omega}_V \times {}_v\mathbf{v}_{T_i} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_c,T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Tra_\delta,T_i} \ddot{\delta} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_\delta,T_i} \dot{\delta} \\ &\quad + \boldsymbol{\omega}_V \times \boldsymbol{\omega}_V \times {}_v\mathbf{r}_{T_{S_i}}, i = 2, 4. \end{aligned} \quad (3.136)$$

### Rotation des Radträgers

Die Rotationsgeschwindigkeit des Radträgers wird ausgedrückt durch

$${}^V\boldsymbol{\omega}_{T_i} = ({}^V\boldsymbol{\omega}_{T_i})_S + \dot{\varphi} \mathbf{u}_3 = \dot{\alpha} \underbrace{(\mathbf{C}_{\omega_T} - E_\alpha \mathbf{u}_3)}_{\mathbf{H}_{Rot_c, T_i}} + \dot{s} \underbrace{D_s \mathbf{u}_3}_{\mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i}}. \quad (3.137)$$

Demnach berechnet sich die Rotationsbeschleunigung des Radträgers zu

$$\begin{aligned} {}^V\boldsymbol{\alpha}_T &= {}^V\dot{\boldsymbol{\omega}}_T = ({}^V\dot{\boldsymbol{\omega}}_T)_S + \ddot{\varphi} \mathbf{u}_3 \\ &= \ddot{\alpha} \mathbf{C}_{\omega_T} - \dot{\alpha}^2 \mathbf{K}_{\dot{\alpha}^2} + (\ddot{s} D_s - \dot{\alpha} \dot{E}_\alpha + \dot{\alpha}^2 Z_{\dot{\alpha}^2} + \dot{s} \dot{\alpha} Z_{\dot{s}\dot{\alpha}} + \dot{s}^2 Z_{\dot{s}^2}) \mathbf{u}_3 \\ &= \ddot{\alpha} \underbrace{(\mathbf{C}_{\omega_T} - E_\alpha \mathbf{u}_3)}_{\mathbf{H}_{Rot_c, T_i}} + \ddot{s} \underbrace{D_s \mathbf{u}_3}_{\mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i}} + \dot{\alpha} \underbrace{\dot{\alpha} (Z_{\dot{\alpha}^2} \mathbf{u}_3 - \mathbf{K}_{\dot{\alpha}^2})}_{\mathbf{H}_{Rot_c, T_i}} + \dot{s} \underbrace{(\dot{\alpha} Z_{\dot{s}\dot{\alpha}} \mathbf{u}_3 + \dot{s} Z_{\dot{s}^2} \mathbf{u}_3)}_{\mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i}}. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Die Gleichungen (3.137) und (3.138) enthalten die rotatorischen JACOBI-Untermatrizen  $\mathbf{H}_{Rot_c, T_i}$  und  $\mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i}$  sowie deren zeitliche Ableitungen. Die absolute Winkelgeschwindigkeit der Radträger berechnet sich zu

$${}^E\boldsymbol{\omega}_{T_i} = {}^E\boldsymbol{\omega}_V + {}^V\boldsymbol{\omega}_{T_i} = {}^E\boldsymbol{\omega}_V + \dot{\alpha} \underbrace{(\mathbf{C}_{\omega_T} - E_\alpha \mathbf{u}_3)}_{\mathbf{H}_{Rot_c, T_i}} + \dot{s} \underbrace{D_s \mathbf{u}_3}_{\mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i}}. \quad (3.139)$$

Die absolute Winkelbeschleunigung der Radträger wird durch Ableiten der Gleichung (3.139) erhalten

$$\begin{aligned} {}^E\boldsymbol{\alpha}_{T_i} &= {}^E\boldsymbol{\alpha}_V + {}^V\boldsymbol{\alpha}_{T_i} \\ &= {}^E\boldsymbol{\alpha}_V + {}^E\boldsymbol{\omega}_V \times {}^V\boldsymbol{\omega}_{T_i} + \ddot{\alpha} \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} + \ddot{s} \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} + \dot{\alpha} \dot{\mathbf{H}}_{Rot_c, T_i} + \dot{s} \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\delta, T_i}. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Die Zusammenhänge für die rotatorische JACOBI-Blockmatrizen ergeben sich zu

$$\mathbf{J}_{Rot, T_i} = [\mathbf{0}_{[3 \times 3]} \mid \mathbf{I}_{[3 \times 3]} \mid \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 4]}], i = 2, 4. \quad (3.141)$$

Damit können die rotatorischen Beschleunigungen des Radträgers auch wie folgt ausgedrückt werden

$${}^V_E\boldsymbol{\alpha}_{T_i} = \mathbf{J}_{R, T_i} \dot{\mathbf{z}} + {}^E\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{T_i} \quad (3.142)$$

mit den rotatorischen Restbeschleunigungen des Radträgers

$${}^E\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{T_i} = {}^E\boldsymbol{\omega}_V \times {}^V\boldsymbol{\omega}_{T_i} + \ddot{s} \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} + \dot{\alpha} \dot{\mathbf{H}}_{Rot_c, T_i} + \dot{s} \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\delta, T_i}, i = 2, 4. \quad (3.143)$$

### Translation des Rades

Lage und Bewegung der Räder (Drehung um die Lenkachse und Einfederung) unterscheiden sich zum Radträger nur hinsichtlich der Drehung um die Raddrehachse sowie durch einen anderen radträgerfesten Bezugspunkt. Dementsprechend sind die JACOBI-Blockmatrizen der Translation des Rades ähnlich denen des Radträgers aufgebaut. Der Ortsvektor  $\mathbf{r}_{T, R_i}$  zum radträgerfesten Bezugspunkt des Rades bezüglich des Radträgersystems  $K_T$  ergibt sich zu

$${}^V\mathbf{r}_{R_i} = {}^V\mathbf{r}_{T_i} + {}^T\mathbf{r}_{R_i}, \quad (3.144)$$

die Geschwindigkeit entsprechend zu

$${}^V\mathbf{v}_{R_i} = \dot{\alpha} \underbrace{(\mathbf{u}_1 \times {}^A\mathbf{r}_T + (\mathbf{C}_{\omega_T} - E_\alpha \mathbf{u}_3) \times \mathbf{r}_{T, R_i})}_{\mathbf{H}_{Tra_c, R_i}} + \dot{s} \underbrace{D_s \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, R_i}}_{\mathbf{H}_{Tra_\delta, R_i}} \quad (3.145)$$

und die Beschleunigung zu

$$\begin{aligned} {}_V\mathbf{a}_{R_i} &= {}_V\mathbf{a}_T + {}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}_T \times \mathbf{r}_{T,R_i} + {}_V\boldsymbol{\omega}_T \times ({}_V\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T,R_i}) \\ &= \mathbf{H}_{Tra_{c,R_i}}\ddot{\alpha} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_{c,R_i}}\dot{\alpha} + \mathbf{H}_{Tra_{\delta,R_i}}\ddot{s} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_{\delta,R_i}}\dot{s}. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gegenüber dem Inertialsystem werden durch die Beachtung der Führungsbewegung (s. Gl. (3.16) bis (3.18)) des Fahrzeugaufbaus berechnet zu

$${}_E\mathbf{v}_{R_i} = {}_E\mathbf{v}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{r}_{R_i} + {}_V\mathbf{v}_{R_i} \quad (3.147)$$

und

$${}_E\mathbf{a}_{R_i} = {}_E\mathbf{a}_V + 2\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{v}_{R_i} + \boldsymbol{\alpha}_V \times {}_V\mathbf{r}_{R_i} + {}_V\mathbf{a}_{R_i} + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{r}_{R_i}). \quad (3.148)$$

Die JACOBI-Blockmatrizen  $\mathbf{J}_{Tra,R_i}$  berechnen sich somit zu

$$\mathbf{J}_{Tra,R_i} = [\mathbf{I}_{[3 \times 3]} \mid -{}_V\tilde{\mathbf{r}}_{R_i} \mid \mathbf{H}_{Tra_{c,R_i}} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 4]}], i = 6, 8. \quad (3.149)$$

Die Translationsbeschleunigung des Rades kann wiedergegeben werden durch

$${}_E\mathbf{a}_{R_i} = \mathbf{J}_{Tra,R_i}\dot{\mathbf{z}} + {}_E\bar{\mathbf{a}}_{R_i} \quad (3.150)$$

mit den translatorischen Restbeschleunigungen des Rades

$$\begin{aligned} {}_E\bar{\mathbf{a}}_{R_i} &= 2{}_E\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{v}_{R_i} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_{c,R_i}}\dot{\alpha} + \mathbf{H}_{Tra_{\delta,R_i}}\ddot{s} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_{\delta,R_i}}\dot{s} \\ &\quad + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{r}_{R_i}), \quad i = 6, 8. \end{aligned} \quad (3.151)$$

### Rotation des Rades

Die Räder drehen sich um die Radachsen, wodurch sich die rotatorischen Größen zwischen Radträger und Rädern geringfügig unterscheiden. Die Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung der Räder ergeben sich aus den Gleichungen (3.139) und (3.140) durch Hinzufügen der Radeigendrehung  $\dot{\rho}_{R_i}$  bzw.  $\ddot{\rho}_{R_i}$ . Die Winkelgeschwindigkeit berechnet sich zu

$${}_E\boldsymbol{\omega}_{T_i} = {}_E\boldsymbol{\omega}_V + {}_V\boldsymbol{\omega}_{T_i} = {}_E\boldsymbol{\omega}_V + \dot{\alpha} \underbrace{(\mathbf{C}_{\omega_T} - E_{\alpha}\mathbf{u}_3)}_{\mathbf{H}_{Rot_{c,T_i}}} + \dot{s} \underbrace{D_s\mathbf{u}_3}_{\mathbf{H}_{Rot_{\delta,T_i}}} + \underbrace{\mathbf{u}_{R_i}}_{\mathbf{H}_{Rot_{\rho,R_i}}} \dot{\rho}_{R_i} \quad (3.152)$$

und die Winkelbeschleunigung zu

$$\begin{aligned} {}_E\boldsymbol{\alpha}_{R_i} &= {}_E\boldsymbol{\alpha}_V + {}_V\boldsymbol{\alpha}_{T_i} + {}_T\boldsymbol{\alpha}_{R_i} \\ &= {}_E\boldsymbol{\alpha}_V + {}_E\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\boldsymbol{\omega}_{T_i} + \ddot{\alpha} \underbrace{(\mathbf{C}_{\omega_T} - E_{\alpha}\mathbf{u}_3)}_{\mathbf{H}_{Rot_{c,T_i}}} + \ddot{s} \underbrace{D_s\mathbf{u}_3}_{\mathbf{H}_{Rot_{\delta,T_i}}} + \dot{\alpha}^2 \underbrace{(Z_{\dot{\alpha}^2}\mathbf{u}_3 - \mathbf{K}_{\dot{\alpha}^2})}_{\mathbf{H}_{Rot_{c,T_i}}} \\ &\quad + \dot{s} \underbrace{(\dot{\alpha}Z_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}\mathbf{u}_3 + \dot{s}Z_{\dot{s}^2}\mathbf{u}_3)}_{\mathbf{H}_{Rot_{\delta,T_i}}} + \underbrace{\mathbf{u}_{R_i}}_{\mathbf{H}_{Rot_{\rho,R_i}}} \ddot{\rho}_{R_i} + \underbrace{{}_V\boldsymbol{\omega}_{T_i} \times \mathbf{u}_{R_i}}_{\mathbf{H}_{Rot_{\rho,R_i}}} \dot{\rho}_{R_i}. \end{aligned} \quad (3.153)$$

Die Zusammenhänge für die rotatorische JACOBI-Blockmatrix ergeben sich zu

$$\mathbf{J}_{Rot,R_i} = [\mathbf{0}_{[3 \times 3]} \mid \mathbf{I}_{[3 \times 3]} \mid \mathbf{H}_{Rot_{c,T_i}} \mid \mathbf{H}_{Rot_{\rho,R_i}}], i = 6, 8. \quad (3.154)$$

Damit können die rotatorischen Beschleunigungen des Rades auch wie folgt ausgedrückt werden

$${}_E\boldsymbol{\alpha}_{R_i} = \mathbf{J}_{Rot,R_i}\dot{\mathbf{z}} + {}_E\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{R_i} \quad (3.155)$$

mit den rotatorischen Restbeschleunigungen des Radträgers

$${}^E\bar{\alpha}_{T_i} = {}^E\omega_V \times {}^V\omega_{T_i} + \dot{\alpha}^2 \dot{H}_{Rot_c, T_i} + \dot{s} H_{Rot_\delta, T_i} + \dot{s} \dot{H}_{Rot_\delta, T_i} + \dot{H}_{Rot_\rho, R_i} \dot{\rho}_{R_i}, \quad (3.156)$$

$$i = 6, 8.$$

Die berechneten kinematischen Größen, die Jakobimatrizen, deren Ableitungen und Restbeschleunigungen der Radträger und Räder fließen im Abschnitt 0 in die Bewegungsgleichungen ein. Im nächsten Abschnitt wird die Kinematik der Hinterradaufhängung gelöst.

### 3.6.4 Mehrlenkerradaufhängung

Das Hinterachsprinzip des repräsentativen Referenzfahrzeugs aus Kapitel 4 entspricht einer Mehrlenkeraufhängung mit jeweils vier Lenkern (s. Abb. 3.19 und Abb. 3.20). Sie wird als Vierlenker- oder auch Schwertlenkerradaufhängung bezeichnet (Heißing 2007). Feder (6) und Dämpfer (7) sind getrennt angeordnet und dienen zur Vertikalabstützung und Schwingungsdämpfung. Der Radträger (1) ist über einen schwertähnlichen Lenker (2) in Längsrichtung drehbar über ein Kugelgelenk verbunden. Dieser biegeeweiche Längslenker (2) ist fest mit dem Radträger verbunden (s. Abb. 3.19). Durch seine elastische Eigenschaft lässt er Spur- und Sturzänderungen bedingt durch die anderen quer angeordneten Lenker (3, 4 und 5) zu.

Der Querlenker (3) oben, die Spurstange (4) und der Federlenker (5) unten nehmen die Radquerkräfte auf. Die Trennung von Längs- und Querkraftabstützung sind besondere Merkmale dieser Radaufhängung. Diese Konstruktion führt einerseits zu einer hohen Quersteifigkeit zugunsten optimaler Handling-Eigenschaften, andererseits ermöglicht sie eine Nachgiebigkeit in Fahrzeuginnenrichtung, was zur Verbesserung des Fahrkomforts führt (Heißing 2007). Aus einem größeren Bauraumbedarf und mehr Einzelteilen resultieren jedoch höhere Kosten. Aus diesen Gründen kommt dieser Radaufhängungstyp meist nur bei höherwertigen Fahrzeugen der Mittel- und Oberklasse zum Einsatz. Im Laufe der Zeit erhielt diese Radaufhängung aufgrund ihrer guten kinematischen Eigenschaften auch Einzug in die Kompaktklasse (Heißing 2007).

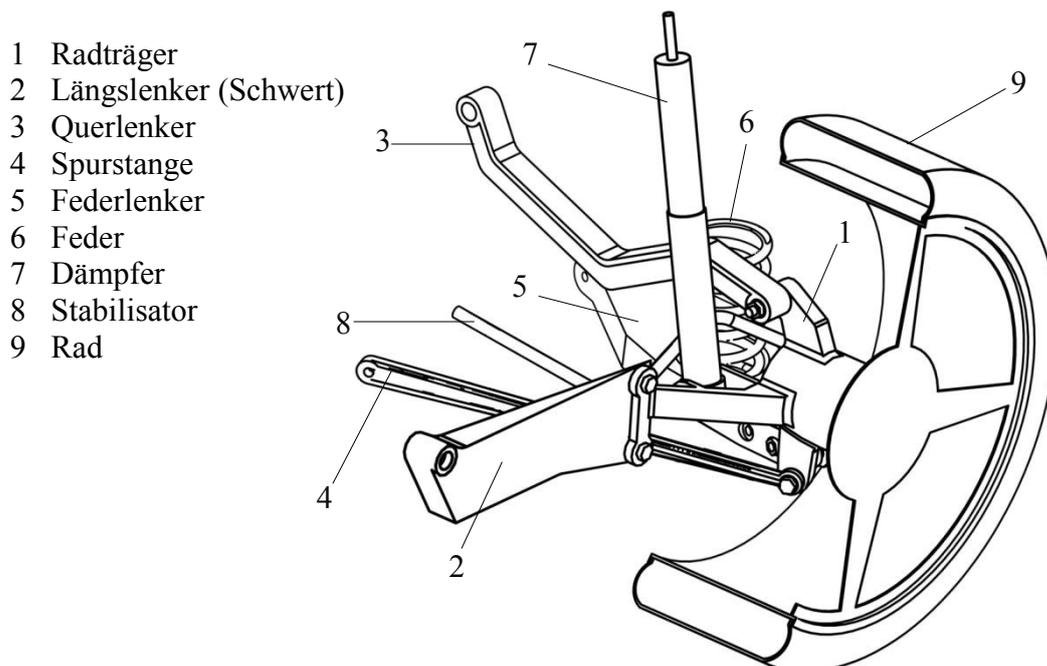


Abb. 3.19: Mehrlenkerradaufhängung eines Kompaktklassenfahrzeugs hinten (von vorne)

- 1 Radträger
- 2 Längslenker (Schwert)
- 3 Querlenker
- 4 Spurstange
- 5 Federlenker
- 6 Feder
- 7 Dämpfer
- 8 Stabilisator
- 9 Rad

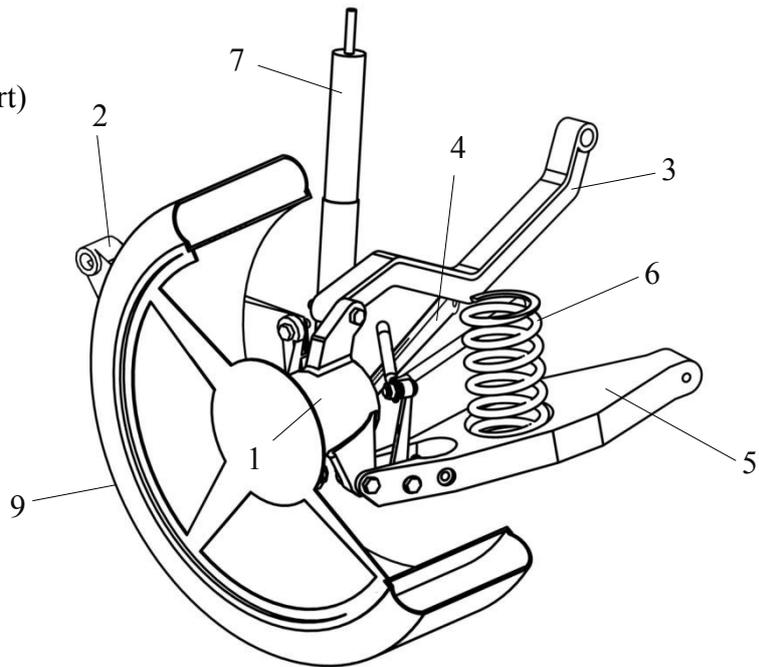


Abb. 3.20: Mehrlenkerradaufhängung eines Kompaktklassenfahrzeugs hinten (von hinten)

Die MKS-Konstruktion der Aufhängung, dargestellt in Abb. 3.21, am linken Hinterrad besteht aus einem Radträger (1), zwei unten liegenden Querlenkern (Spurstange (4) und Federlenker (5)) und einem oben angeordnetem Querlenker (3). Das kinematische Ersatzmodell des biegeweichen Längslenkers besteht aus einem starren Längslenker (2), der über ein Drehgelenk mit dem Radträger und über ein Kugelgelenk mit dem Aufbau verbunden ist. Eine genauere Modellierung des biegeweichen Lenkers kann durch eine Ansatzfunktion erreicht werden, die mithilfe einer statischen Finite-Elemente-Analyse ermittelt wird. Bei der Beschränkung auf eine lineare Ansatzfunktion hat das Gelenk wie in Abb. 3.21 dargestellt einen Freiheitsgrad.

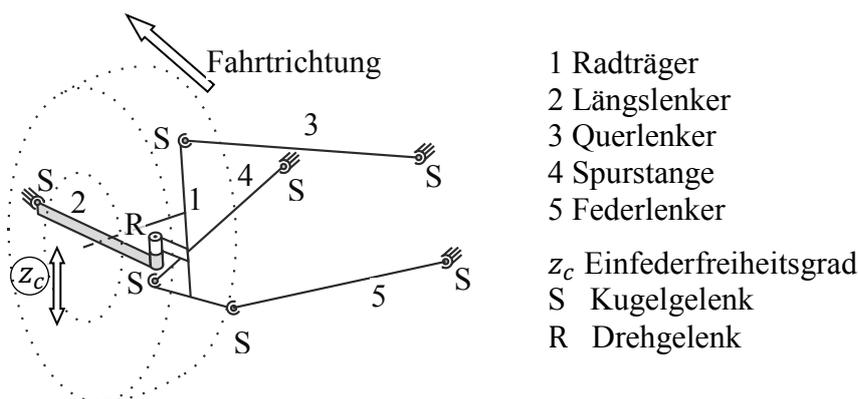


Abb. 3.21: Starrkörpermodell der Mehrlenkerradaufhängung hinten links

### 3.6.5 Aufstellung der Relativkinematik einer Mehrlenkerradaufhängung

Die kinematische Analyse orientiert sich an den Untersuchungen in Schnelle (1990) und Schramm (2010) zur Fünfpunkt-Radaufhängung. Die sechs Starrkörperfreiheitsgrade des Radträgers werden durch fünf Bindungen (vier konstante Lenkerlänge und ein konstanter

Winkel) so beschränkt, dass nur der Freiheitsgrad der Einfederung bleibt. Bei der kinematischen Analyse werden Feder, Dämpfer und Stabilisator nicht berücksichtigt, sondern als Kraftelement in die Bewegungsgleichungen eingearbeitet. Der Radträger und die vier Lenker werden durch starre Körper beschrieben (Abb. 3.21). Alle Lenker sind durch Kugelgelenke mit dem Aufbau verbunden. Spurstange, Feder- und Querlenker sind mit KARDAN-Gelenken und der Längslenker mit einem Drehgelenk mit dem Radträger verbunden. Die Topologie der Radaufhängung, die durch Ersetzen der fahrzeugseitigen Kugelgelenke an den Körpern 2, 3 und 4 durch je drei Drehgelenke und zwei virtuelle Körper entsteht, wird in Abb. 3.22 gezeigt. Unter Berücksichtigung der Körper und Einzelgelenke kann der Freiheitsgrad berechnet werden zu

$$f = 6n_B - \sum_{i=1}^{n_G} (6 - f_{G_i}) = 6 \cdot 5 - \underbrace{4 \cdot (6 - 3)}_{4 \text{ Kugelgelenke}} - \underbrace{3 \cdot (6 - 2)}_{3 \text{ Kardangelenke}} - \underbrace{1 \cdot (6 - 1)}_{1 \text{ Drehgelenke}} = \underbrace{1}_{\text{einfedern}}. \quad (3.157)$$

Bei dieser Radaufhängung ist es, im Gegensatz zur MacPherson-Vorderradaufhängung (vgl. Abschnitt 3.4.2), nicht möglich, einen expliziten Lösungsfluss festzulegen, da es keine kinematische Schleife mit einem einzelnen Eingang gibt, mit der der Lösungsfluss begonnen werden kann. Daher muss die Kinematik iterativ gelöst werden. Hierzu werden sechs Hilfsvariablen zur Lagebeschreibung des Radträgers im Fahrzeugsystem eingeführt, wozu der Ortsvektor  ${}_A \mathbf{r}_T = (x_c, y_c, z_c)^T$  und die drei KARDAN-Winkel  $\psi_c, \theta_c, \varphi_c$  gehören. Dies wird durch eine Kette von drei Drehgelenken und drei Schubgelenken zwischen Fahrzeugaufbau und Radträgern dargestellt. Die dadurch entstehende Gelenk-Körper-Darstellung mit vier kinematischen Schleifen wird in Abb. 3.22 gezeigt. Als verallgemeinerte Koordinate wird die Vertikalkomponente  $z_c$  des Radträger-Ortsvektor gewählt. Die übrigen 5 Radträger-Koordinaten sind unbekannt, jedoch von  $z_c$  abhängig und müssen iterativ ermittelt werden.

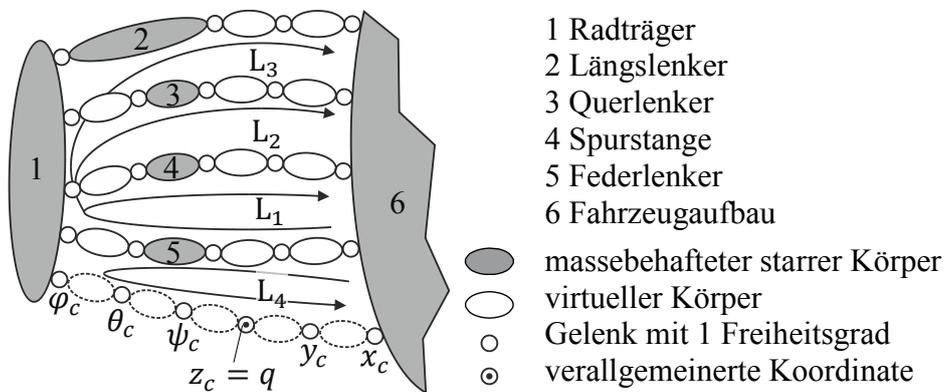


Abb. 3.22: Topologie der Mehrlenkerradaufhängung

### Position

Die Lage des Radträgerschwerpunktes wird mit den translatorischen Komponenten  $x_c, y_c, z_c$  des Ortsvektors  ${}_A \mathbf{r}_T$  und den drei KARDAN-Winkeln  $\psi_c, \theta_c, \varphi_c$  beschrieben. Als verallgemeinerte Koordinate wird  $q = z_c$  bestimmt, die restlichen fünf Radträgerkoordinaten werden iterativ aus den Bindungsgleichungen ermittelt. Die abhängigen Lagegrößen, die mithilfe der Bindungsgleichungen  $\mathbf{g}$  bestimmt werden, werden zum Vektor

$$\boldsymbol{\beta} = [x_c, y_c, z_c, \psi_c, \theta_c, \varphi_c]^T \quad (3.158)$$

zusammengefasst. Die Bindungsgleichungen, die gelöst werden müssen, ergeben sich aus der Struktur der Radaufhängung. Aus der Wahl der verallgemeinerten Koordinaten folgt die erste Bindungsgleichung

$$g_1(\boldsymbol{\beta}, q) = \beta_3 - q. \quad (3.159)$$

Weitere vier Bindungsgleichungen ergeben sich aus dem Vektorprodukt der Vektorzüge  $\mathbf{d}_n$  abzüglich des Quadrats der entsprechenden konstanten Lenkerabstände  $d_n$  zwischen den fahrzeugseitigen und radträgerseitigen Lenkerlagern  $F_n$  und  $P_n$  (s. Abb. 3.23) zu

$$g_n(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{d}_n^T \mathbf{d}_n - d_n^2 = 0 \quad \text{mit } n = 2, \dots, 5. \quad (3.160)$$

Der Vektorzug  $\mathbf{d}_n$  in den Komponenten des Fahrzeugsystems  $K_V$  wird gemäß Abb. 3.23 aus der entsprechenden Schleife  $L_i$  durch

$${}^V \mathbf{d}_n = \begin{bmatrix} d_{x_n} \\ d_{y_n} \\ d_{z_n} \end{bmatrix} = {}^V \mathbf{r}_T + {}^T \mathbf{r}_{p_n} - {}^V \mathbf{r}_{f_n} \quad \text{mit } n = 2, \dots, 5 \quad (3.161)$$

berechnet. Die Vektorzüge beinhalten den Ortsvektor  ${}^V \mathbf{r}_T$  des Fahrzeugursprungs zum Radträgerbezugspunkt  $K_T$ , den Ortsvektor der radträgerseitigen Lenkerlager  ${}^T \mathbf{r}_{p_n}$  bezüglich  $K_T$  und den Ortsvektor der Lenkerlager am Fahrzeugaufbau  ${}^V \mathbf{r}_{f_n}$  bezüglich  $K_V$ . Diese Vektoren werden in Abhängigkeit des Vektors  $\boldsymbol{\beta}$  wie folgt ausgedrückt

$${}^V \mathbf{r}_T(\boldsymbol{\beta}) = [x_c, y_c, z_c]^T, \quad (3.162)$$

$${}^T \mathbf{r}_{p_n}(\boldsymbol{\beta}) = {}^V \mathbf{T}_T(\psi_c, \theta_c, \varphi_c) {}^T \mathbf{r}_{p_n}, \quad (3.163)$$

wobei der Vektor  ${}^V \mathbf{r}_{f_n}$  konstant ist und sich die Rotationsmatrix  ${}^V \mathbf{T}_T$ , die zwischen dem radträgerfesten System und dem fahrzeugfesten System liegt, durch die KARDAN-Winkel berechnen lässt zu

$${}^V \mathbf{T}_T(\psi_c, \theta_c, \varphi_c) = \mathbf{T}_z(\psi_c) \cdot \mathbf{T}_y(\theta_c) \cdot \mathbf{T}_x(\varphi_c) = \begin{bmatrix} c\theta_c c\psi_c & s\varphi_c s\theta_c c\psi_c - c\varphi_c s\psi_c & c\varphi_c s\theta_c c\psi_c + s\varphi_c s\psi_c \\ c\theta_c s\psi_c & s\varphi_c s\theta_c s\psi_c + c\varphi_c c\psi_c & c\varphi_c s\theta_c s\psi_c - s\varphi_c c\psi_c \\ -s\theta_c & s\varphi_c c\theta_c & c\varphi_c c\theta_c \end{bmatrix}. \quad (3.164)$$

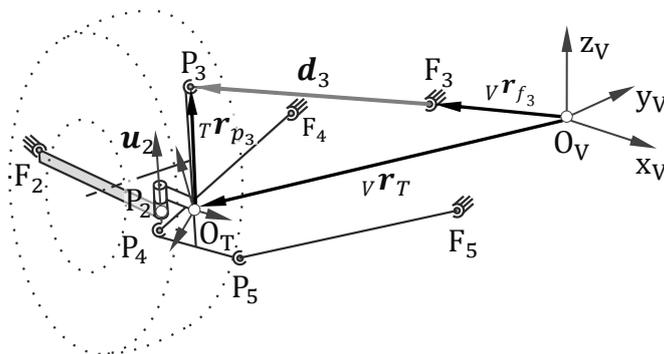


Abb. 3.23: Geschlossener Vektorzug bei der Mehrlenkerradaufhängung

Die letzte Bindungsgleichung ergibt sich aus der Bewegungseinschränkung des Längslenkers aufgrund des Drehgelenkes. Der Winkel zwischen dem Längslenkervektor  $\mathbf{d}_2$  und der Drehachse  $\mathbf{u}_2$  ist stets konstant. Diese Bindung wird ausgedrückt durch

$$g_6(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{u}_2^T \mathbf{d}_2 - \mathbf{u}_2^T \mathbf{d}_{20}, \quad (3.165)$$

mit der Ausgangslage  $\mathbf{d}_{20}$  des Längslenkervektors  $\mathbf{d}_2$ . Das System der Bindungsgleichungen

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ g_6(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.166)$$

lässt sich nun iterativ lösen. Mit dem NEWTON-Verfahren ergibt sich folgender Ausdruck

$$\boldsymbol{\beta}_{i+1} = \boldsymbol{\beta}_i - \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\beta}_i} \right)^{-1} \mathbf{g}. \quad (3.167)$$

Der Vektor der abhängigen Koordinaten

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(q) \quad (3.168)$$

wird in Abhängigkeit des Eingangs  $q = z_c$  berechnet.

### Geschwindigkeit

Nach der Berechnung der Position des Radträgers werden die translatorische und rotatorische Geschwindigkeit  ${}^V \mathbf{v}_T$  bzw.  ${}^V \boldsymbol{\omega}_T$  des Radträgers relativ zum Fahrzeugaufbau bestimmt. Dazu werden die ersten zeitlichen Ableitungen  $\dot{\mathbf{g}}$  der sechs Bindungsgleichungen  $\mathbf{g}$  bestimmt zu

$$\dot{g}_1(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{q}) = \dot{\beta}_3 - \dot{q} = 0, \quad (3.169)$$

$$\dot{g}_n(\boldsymbol{\beta}) = 2\mathbf{d}_n^T \dot{\mathbf{d}}_n = 0, \text{ mit } n = 2, \dots, 5 \quad (3.170)$$

und

$$\dot{g}_6(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{u}_2^T \dot{\mathbf{d}}_2 = 0. \quad (3.171)$$

Die Lenkergeschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{d}}_n$  lassen sich über die Radträgergeschwindigkeiten  ${}^V \mathbf{v}_T$  und  ${}^V \boldsymbol{\omega}_T$  explizit berechnen zu

$$\dot{\mathbf{d}}_n = {}^V \mathbf{v}_T + {}^V \boldsymbol{\omega}_T \times {}_T \mathbf{r}_{p_n}. \quad (3.172)$$

Die Winkelgeschwindigkeit  ${}^V \boldsymbol{\omega}_T$  kann durch die kinematischen KARDAN-Gleichungen nach Hiller (1997) zu

$${}^V \boldsymbol{\omega}_T = \begin{bmatrix} \omega_{Tx} \\ \omega_{Ty} \\ \omega_{Tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_c - \psi_c s\theta_c \\ \dot{\theta}_c c\varphi_c + \dot{\psi}_c c\theta_c s\varphi_c \\ -\dot{\theta}_c s\varphi_c + \dot{\psi}_c c\theta_c c\varphi_c \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\omega_T} \begin{bmatrix} \dot{\psi}_c \\ \dot{\theta}_c \\ \dot{\varphi}_c \end{bmatrix} \quad (3.173)$$

bestimmt werden, mit der  $[3 \times 3]$ -Matrix

$$\mathbf{T}_{\omega_T} = \begin{bmatrix} -s\theta_c & 0 & 1 \\ c\theta_c s\varphi_c & c\varphi_c & 0 \\ c\theta_c c\varphi_c & -s\varphi_c & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.174)$$

Damit werden die Lenkergeschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{d}}_n$  elementweise dargestellt zu

$${}^V \dot{\mathbf{d}}_n = \mathbf{v}_T + {}_V \boldsymbol{\omega}_T \times {}_T \mathbf{r}_{p_n} = \begin{bmatrix} \dot{d}_{x_n} \\ \dot{d}_{y_n} \\ \dot{d}_{z_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{z}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_c - \dot{\psi}_c s\theta_c \\ \dot{\theta}_c c\varphi_c + \dot{\psi}_c c\theta_c s\varphi_c \\ -\dot{\theta}_c s\varphi_c + \dot{\psi}_c c\theta_c c\varphi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x_n} \\ p_{y_n} \\ p_{z_n} \end{bmatrix}. \quad (3.175)$$

Die Bindungen der Geschwindigkeiten aus (3.169) bis (3.172) lassen sich zum linearen Gleichungssystem

$$\mathbf{J}_\beta \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{J}_q \dot{q} = 0 \quad (3.176)$$

zusammenfassen mit den JACOBI-Matrizen

$$\mathbf{J}_\beta \text{ mit } J_{\beta_{nj}} = \frac{\partial g_n}{\partial \beta_j} \quad \text{und} \quad \mathbf{J}_q \text{ mit } J_{q_n} = \frac{\partial g_n}{\partial q}. \quad (3.177)$$

Die Bestimmung der partiellen Ableitung der ersten Bindungsgleichung nach dem Vektor  $\boldsymbol{\beta}$  ist ohne großen Aufwand analytisch durchführbar. Die partiellen Ableitungen der anderen Bindungsgleichungen nach diesem Vektor werden bestimmt, indem die entsprechenden zeitlichen Ableitungen der Bindungen mit den speziellen Geschwindigkeiten

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(j)} = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1^{(j)} \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_6^{(j)} \end{bmatrix} \text{ mit } \tilde{\beta}_k^{(j)} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad j = 1, \dots, 6 \quad (3.178)$$

ausgewertet werden. Die sogenannten kinematischen Differentiale  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(j)}$  werden berechnet (Hiller 1997) und die partiellen Ableitungen bestimmt zu

$$\frac{\partial g_n}{\partial \beta_j} = \tilde{g}_n^{(j)} = \dot{g}_n(\boldsymbol{\beta}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(j)}). \quad (3.179)$$

Da nur die erste Bindungsgleichung von der verallgemeinerten Koordinate  $q$  abhängig ist, können die Komponenten der JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_q$  analytisch ermittelt werden. Somit entsteht durch Umstellen von (3.176) die Beziehung

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = -\mathbf{J}_\beta^{-1} \mathbf{J}_q \dot{q}, \quad (3.180)$$

womit die Geschwindigkeiten der Hilfsvariablen bestimmt werden können. Die translatorische Geschwindigkeit  ${}_V \dot{\mathbf{v}}_T$  des Radträgerbezugspunktes liegt direkt durch die Berechnung der ersten drei Komponenten des Vektors  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  vor.

Mit der Methode der kinematischen Differentiale ergeben sich damit die einzelnen Terme der JACOBI-Matrix. Der Anteil der JACOBI-Matrix, der durch die erste Bindung entsteht, ergibt sich mit

$$\tilde{g}_1 = \frac{\partial g_1}{\partial \beta} = \frac{\partial(\beta_3 - \dot{q})}{\partial \beta} \quad (3.181)$$

zu

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_c} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y_c} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial z_c} = 1, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \psi_c} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \theta_c} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \varphi_c} = 0. \quad (3.182)$$

Die Anteile der JACOBI-Matrix, die durch die zweite bis fünfte Bindung entstehen, ergeben sich mit

$$\text{für } \tilde{g}_n = \frac{\partial g_n}{\partial \beta} = \frac{\partial 2\mathbf{d}_n^T \dot{\mathbf{d}}_n}{\partial \beta}, \quad n = 2, \dots, 5 \quad (3.183)$$

zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_i}{\partial x_c} &= 2\mathbf{d}_i^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2d_{ix}, & \frac{\partial g_i}{\partial z_c} &= 2\mathbf{d}_i^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2d_{iz}, \\
\frac{\partial g_i}{\partial z_c} &= 2\mathbf{d}_i^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2d_{iz}, & \frac{\partial g_i}{\partial \psi_c} &= \left( \begin{bmatrix} -s\theta_c \\ c\theta_c s\varphi_c \\ c\theta_c c\varphi_c \end{bmatrix} \times {}_T\mathbf{r}_{p_i} \right) 2\mathbf{d}_i, \\
\frac{\partial g_i}{\partial \theta_c} &= \left( \begin{bmatrix} 0 \\ c\varphi_c \\ -s\varphi_c \end{bmatrix} \times {}_T\mathbf{r}_{p_i} \right) 2\mathbf{d}_i, & \frac{\partial g_i}{\partial \varphi_c} &= \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times {}_T\mathbf{r}_{p_i} \right) 2\mathbf{d}_i.
\end{aligned} \tag{3.184}$$

Der Anteil der JACOBI-Matrix, der durch die sechste Bindung entsteht, ergibt sich mit

$$\tilde{\mathbf{g}}_6 = \frac{\partial g_6}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial \mathbf{u}_2^T \dot{\mathbf{d}}_2}{\partial \boldsymbol{\beta}} \text{ zu} \tag{3.185}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_6}{\partial x_c} &= \mathbf{u}_2^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = u_{2x}, & \frac{\partial g_6}{\partial y_c} &= \mathbf{u}_2^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u_{2y}, & \frac{\partial g_i}{\partial z_c} &= \mathbf{u}_2^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = u_{2z}, \\
\frac{\partial g_i}{\partial \psi_c} &= \mathbf{u}_2^T \left( \begin{bmatrix} -s\theta_c \\ c\theta_c s\varphi_c \\ c\theta_c c\varphi_c \end{bmatrix} \times {}_T\mathbf{r}_{p_i} \right), & \frac{\partial g_i}{\partial \psi_c} &= \mathbf{u}_2^T \left( \begin{bmatrix} -s\theta_c \\ c\theta_c s\varphi_c \\ c\theta_c c\varphi_c \end{bmatrix} \times {}_T\mathbf{r}_{p_i} \right), & \frac{\partial g_i}{\partial \varphi_c} &= \mathbf{u}_2^T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times {}_T\mathbf{r}_{p_i} \right).
\end{aligned} \tag{3.186}$$

Somit kann die gesamt 6×6 JACOBI -Matrix  $\mathbf{J}_\beta$  mit

$$\mathbf{J}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2d_{x_2} & 2d_{y_2} & 2d_{z_2} & \left( \begin{bmatrix} -s\theta_c \\ c\theta_c s\varphi_c \\ c\theta_c c\varphi_c \end{bmatrix} \times {}_T\mathbf{r}_{p_2} \right) 2\mathbf{d}_2 & \left( \begin{bmatrix} 0 \\ c\varphi_c \\ -s\varphi_c \end{bmatrix} \times {}_T\mathbf{r}_{p_2} \right) 2\mathbf{d}_2 & \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times {}_T\mathbf{r}_{p_2} \right) 2\mathbf{d}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2d_{x_5} & 2d_{y_5} & 2d_{z_5} & \left( \begin{bmatrix} -s\theta_c \\ c\theta_c s\varphi_c \\ c\theta_c c\varphi_c \end{bmatrix} \times {}_T\mathbf{r}_{p_5} \right) 2\mathbf{d}_5 & \left( \begin{bmatrix} 0 \\ c\varphi_c \\ -s\varphi_c \end{bmatrix} \times {}_T\mathbf{r}_{p_5} \right) 2\mathbf{d}_5 & \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times {}_T\mathbf{r}_{p_5} \right) 2\mathbf{d}_5 \\ u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} & \mathbf{u}_2^T \left( \begin{bmatrix} -s\theta_c \\ c\theta_c s\varphi_c \\ c\theta_c c\varphi_c \end{bmatrix} \times {}_T\mathbf{r}_{p_2} \right) & \mathbf{u}_2^T \left( \begin{bmatrix} 0 \\ c\varphi_c \\ -s\varphi_c \end{bmatrix} \times {}_T\mathbf{r}_{p_2} \right) & \mathbf{u}_2^T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times {}_T\mathbf{r}_{p_2} \right) \end{bmatrix} \tag{3.187}$$

und die Matrix  $\mathbf{J}_q$ , die auch Verteilungsmatrix genannt wird, mit

$$\mathbf{J}_q = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \tag{3.188}$$

angegeben werden.

### Beschleunigung

Die Beschleunigung des Radträgers wird ähnlich berechnet wie seine Geschwindigkeit. Zunächst werden die Bindungsgleichungen zweimal nach der Zeit abgeleitet zu

$$\ddot{g}_1(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{q}) = \ddot{\beta}_3 - \ddot{q} = 0, \tag{3.189}$$

$$\ddot{g}_n(\boldsymbol{\beta}) = 2(\mathbf{d}_n^T \ddot{\mathbf{d}}_n + \dot{\mathbf{d}}_n^T \dot{\mathbf{d}}_n) = 0 \quad n = 2, \dots, 5, \tag{3.190}$$

$$\ddot{g}_6(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{u}_2^T \ddot{\mathbf{d}}_2 = 0, \quad (3.191)$$

mit

$$\ddot{\mathbf{d}}_n = \dot{\mathbf{v}}_T + {}_v\dot{\boldsymbol{\omega}}_T \times {}_T\mathbf{r}_{p_n} + {}_v\boldsymbol{\omega}_T \times ({}_v\boldsymbol{\omega}_T \times {}_T\mathbf{r}_{p_n}) \quad n = 2, \dots, 5 \quad (3.192)$$

und

$$\dot{\mathbf{d}}_n = \mathbf{v}_T + {}_v\boldsymbol{\omega}_T \times {}_T\mathbf{r}_{p_n} \quad n = 2, \dots, 5. \quad (3.193)$$

Die Winkelbeschleunigung  ${}_v\dot{\boldsymbol{\omega}}_T$  des Radträgers kann aus der zeitlichen Ableitung der Gleichung (3.173) bestimmt werden. Die Ableitung der kinematischen KARDAN-Gleichung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} {}_v\dot{\boldsymbol{\omega}}_T &= \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{Tx} \\ \dot{\omega}_{Ty} \\ \dot{\omega}_{Tz} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\omega_T} \begin{bmatrix} \ddot{\psi}_c \\ \ddot{\theta}_c \\ \ddot{\phi}_c \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{T}}_{\omega_T} \begin{bmatrix} \dot{\psi}_c \\ \dot{\theta}_c \\ \dot{\phi}_c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_c - \ddot{\psi}_c s\theta_c \\ \ddot{\theta}_c c\varphi_c + \ddot{\psi}_c c\theta_c s\varphi_c \\ -\ddot{\theta}_c s\varphi_c + \ddot{\psi}_c c\theta_c c\varphi_c \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -\dot{\psi}_c c\theta_c \dot{\theta}_c \\ -\dot{\psi}_c (s\theta_c s\varphi_c \dot{\theta}_c - c\theta_c c\varphi_c \dot{\phi}_c) - \dot{\theta}_c s\varphi_c \dot{\phi}_c \\ -\dot{\psi}_c (s\theta_c c\varphi_c \dot{\theta}_c + c\theta_c s\varphi_c \dot{\phi}_c) - \dot{\theta}_c c\varphi_c \dot{\phi}_c \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.194)$$

mit der  $[3 \times 3]$ -Matrix

$$\dot{\mathbf{T}}_{\omega_T} = \begin{bmatrix} -c\theta_c \dot{\theta}_c & 0 & 0 \\ -s\theta_c s\varphi_c \dot{\theta}_c + c\theta_c c\varphi_c \dot{\phi}_c & -s\varphi_c \dot{\phi}_c & 0 \\ -s\theta_c c\varphi_c \dot{\theta}_c - c\theta_c s\varphi_c \dot{\phi}_c & -c\varphi_c \dot{\phi}_c & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.195)$$

Die zweite Ableitung der Bindungsgleichung lässt sich wie auch die Geschwindigkeiten zu

$$\ddot{\mathbf{g}} = \mathbf{J}_\beta \ddot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{j}_\beta \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{J}_q \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\mathbf{j}_q \dot{\mathbf{q}}}_{=0} = \mathbf{0} \quad (3.196)$$

berechnen, da die JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_q$  konstant ist. Der unbekannte Term  $\mathbf{j}_\beta \dot{\boldsymbol{\beta}}$  kann mit den Pseudo-Beschleunigungen  $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$  und  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  aus den Gleichungen (3.189) bis (3.191) bestimmt werden. Für den Übergang auf  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{j}_\beta \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}. \quad (3.197)$$

Die Pseudo-Beschleunigungen berechnen sich aus den Bindungsgleichungen 1 bis 5 zu

$$\tilde{g}_1 = 0 \quad (3.198)$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{g}_n &= 2 \left( \mathbf{d}_n^T \tilde{\mathbf{d}}_n + \dot{\mathbf{d}}_n^2 \right) \\ &= 2 \left( \mathbf{d}_n^T \left( {}_v\dot{\boldsymbol{\omega}}_T \times {}_T\mathbf{r}_{p_n} + {}_v\boldsymbol{\omega}_T \times ({}_v\boldsymbol{\omega}_T \times {}_T\mathbf{r}_{p_n}) \right) + \dot{\mathbf{d}}_n^2 \right), \quad n = 2, \dots, 5, \end{aligned} \quad (3.199)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{d}}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\psi}_c c \theta_c \dot{\theta}_c \\ -\dot{\psi}_c (s \theta_c s \varphi_c \dot{\theta}_c - c \theta_c c \varphi_c \dot{\varphi}_c) - \dot{\theta}_c s \varphi_c \dot{\varphi}_c \\ -\dot{\psi}_c (s \theta_c c \varphi_c \dot{\theta}_c + c \theta_c s \varphi_c \dot{\varphi}_c) - \dot{\theta}_c c \varphi_c \dot{\varphi}_c \end{bmatrix} \times {}_T \mathbf{r}_{p_n} \quad (3.200)$$

$$+ {}_V \boldsymbol{\omega}_T \times ({}_V \boldsymbol{\omega}_T \times {}_T \mathbf{r}_{p_n}).$$

Mit dem Übergang von der normalen Beschleunigung auf die Pseudo-Beschleunigungen  ${}_V \boldsymbol{\omega}_T \Rightarrow {}_V \tilde{\boldsymbol{\omega}}_T$  durch Anwendung von  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\mathbf{q}} = 0$  ergibt sich für die letzte Bindungsgleichung die Beschleunigung

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{g}}_6(\boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{u}_2^T \tilde{\mathbf{d}}_2 \\ &= \mathbf{u}_2^T \begin{bmatrix} -\dot{\psi}_c c \theta_c \dot{\theta}_c \\ -\dot{\psi}_c (s \theta_c s \varphi_c \dot{\theta}_c - c \theta_c c \varphi_c \dot{\varphi}_c) - \dot{\theta}_c s \varphi_c \dot{\varphi}_c \\ -\dot{\psi}_c (s \theta_c c \varphi_c \dot{\theta}_c + c \theta_c s \varphi_c \dot{\varphi}_c) - \dot{\theta}_c c \varphi_c \dot{\varphi}_c \end{bmatrix} \times {}_T \mathbf{r}_{p_2} \quad (3.201) \\ &+ {}_V \boldsymbol{\omega}_T \times ({}_V \boldsymbol{\omega}_T \times {}_T \mathbf{r}_{p_2}). \end{aligned}$$

Zusammengefasst führt die Pseudo-Beschleunigung zu

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{J}_\beta \dot{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 2 \left( \mathbf{d}_2^T \tilde{\mathbf{d}}_2 + \dot{\mathbf{d}}_2^2 \right) \\ \vdots \\ 2 \left( \mathbf{d}_5^T \tilde{\mathbf{d}}_5 + \dot{\mathbf{d}}_5^2 \right) \\ \mathbf{u}_2^T \tilde{\mathbf{d}}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.202)$$

Die zweite Ableitung des Vektors  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  lässt sich nun mit der Beziehung

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = -\mathbf{J}_\beta^{-1} (\dot{\mathbf{J}}_\beta \boldsymbol{\beta} + \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.203)$$

berechnen. Somit liegt die translatorische Beschleunigung  ${}_V \mathbf{a}_T$  des Radträgerbezugs punktes explizit vor.

Die Relativkinematik der Hinterradaufhängung ist nun komplett bekannt. Damit können Absolutgeschwindigkeiten  ${}_V \mathbf{v}_{T_i}$  und -beschleunigung  ${}_V \mathbf{a}_{T_i}$  eines beliebigen radträgerfesten Punktes  $T_i$  relativ zum Fahrzeugsystem  $K_V$  berechnet werden.

### 3.6.6 Aufstellung der Absolutkinematik einer Mehrlenkerradaufhängung

Wie auch bei der MacPherson-Radaufhängung werden nun für die Mehrlenkerradaufhängung die kinematischen Beziehungen nach der Vorgehensweise aus Abschnitt 3.3 aufgestellt. Da es sich hierbei um eine un gelenkte Hinterachse handelt, werden die Übertragungsgesetze für die in Abb. 3.24 dargestellten Ein- und Ausgangsgrößen berechnet.

Dem Radträger wird eine verallgemeinerte Koordinate  $z_c$  zugeordnet, die der Einfederbewegung entspricht. Damit werden die Vektoren der verallgemeinerten Koordinaten für die hinteren Radträger mit

$$\mathbf{c} = [z_{c_2} \quad z_{c_4}]^T \quad (3.204)$$

und die Räder mit

$$\boldsymbol{\rho} = [\rho_{R_2} \quad \rho_{R_4}]^T \quad (3.205)$$

definiert. Gesucht sind Lage-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsgrößen der Radträger und der Räder relativ zum Inertialsystem in Abhängigkeit der Vektoren  $\mathbf{c}$  und  $\boldsymbol{\rho}$ .

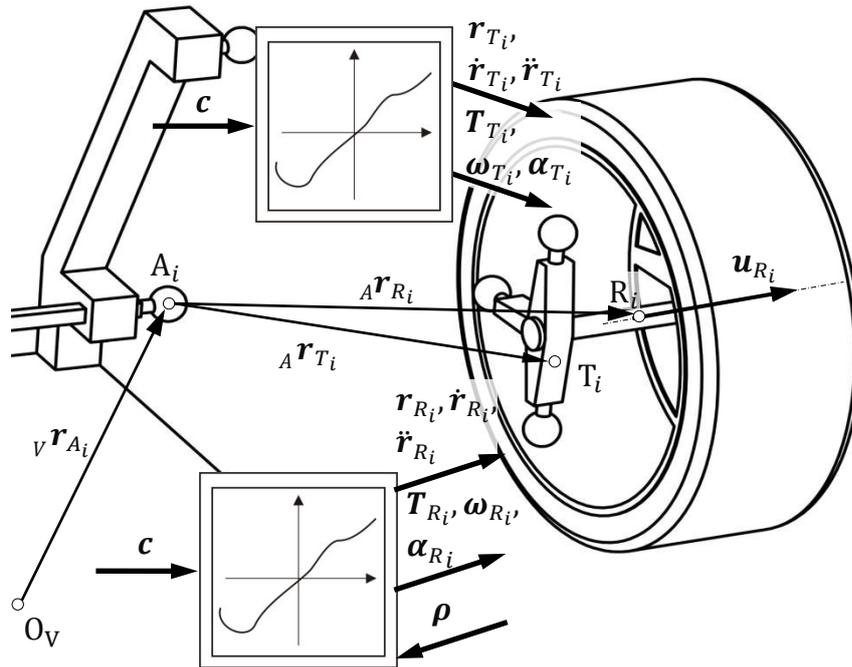


Abb. 3.24: Fahrzeugmodell mit allgemeinem Übertragungsverhalten der Hinterradaufhängung

### Translation des Radträgers

Die in Abschnitt 3.6.3 beschriebene Vorgehensweise zur Aufstellung der Absolutkinematik wird nun für den Fall der Mehrlenkerradaufhängung hergeleitet (Abb. 3.25). Der Ortsvektor  $\mathbf{r}_{T_i}$  zum Massenmittelpunkt  $K_T$  des Radträgers relativ zum Inertialsystem wird berechnet zu

$$\mathbf{r}_{T_i} = \mathbf{r}_V + {}_V\mathbf{r}_{T_i}, \quad (3.206)$$

mit dem Ortsvektor des Radträgers relativ zum Fahrzeugaufbau  ${}_V\mathbf{r}_{T_i}$  und dem Ortsvektor zum Aufbaumassenmittelpunkt  $\mathbf{r}_V$  (s. Abb. 3.25). Damit ergeben sich, mit Verwendung von Gleichung (3.180), die Relativgeschwindigkeiten des Radträgers gegenüber dem Aufbau zu

$$\begin{aligned} {}_V\mathbf{v}_{T_i} &= {}_V\dot{\mathbf{r}}_{T_i} = \frac{\partial {}_A\mathbf{r}_{T_i}}{\partial \mathbf{c}} \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix} = [-\mathbf{J}_\beta^{-1} \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}}]_{[1:3]} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{[1:3]} \dot{\mathbf{q}} = \underbrace{[-\mathbf{J}_\beta^{-1}]_{[1:3,3]}}_{\mathbf{H}_{Tra_c, T_i}} \dot{\mathbf{z}}_c \end{aligned} \quad (3.207)$$

und unter Verwendung der Gleichung (3.203) die Relativbeschleunigungen zu

$$\begin{aligned} {}_v\mathbf{a}_{T_i} &= {}_v\dot{\mathbf{r}}_{T_i} = \dot{\boldsymbol{\beta}}_{[1:3]} = \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_c, T_i} \mathbf{c} = [-\mathbf{J}_\beta^{-1}(\dot{\mathbf{J}}_\beta \boldsymbol{\beta} + \mathbf{J}_q \ddot{\mathbf{q}})]_{[1:3]} \\ &= [-\mathbf{J}_\beta^{-1}]_{[1:3,3]} \dot{z}_c + [-\mathbf{J}_\beta^{-1} \dot{\mathbf{J}}_\beta \boldsymbol{\beta}]_{[1:3]} = [-\mathbf{J}_\beta^{-1}]_{[1:3,3]} \dot{z}_c + [-\mathbf{J}_\beta^{-1} \dot{\mathbf{J}}_\beta]_{[1:3,3]} \dot{z}_c. \end{aligned} \quad (3.208)$$

Die Gleichung (3.208) enthält die translatorischen JACOBI-Untermatrizen  $\mathbf{H}_{Tra_c, T_i}$  des Rad-trägers sowie deren zeitliche Ableitungen. Die JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_\beta$  kann, wenn erforderlich, durch das zeitliche Differenzieren nach der Zeit aufgestellt werden. Diese Matrix wird jedoch zum Aufstellen der Kinematik (s. Abschnitt 3.3) nicht explizit benötigt, sondern tritt nur im kombinierten Ausdruck  $\dot{\mathbf{J}}_\beta \boldsymbol{\beta}$  auf, der durch die Relativkinematik unter Verwendung der kinematischen Differentiale auf Beschleunigungsebene berechnet wird. Das explizite Auflösen nach  $\boldsymbol{\beta}$  ist in diesem Falle nicht möglich, da die Bindungsgleichungen implizit aufgestellt sind und nur durch Iteration gelöst werden können.

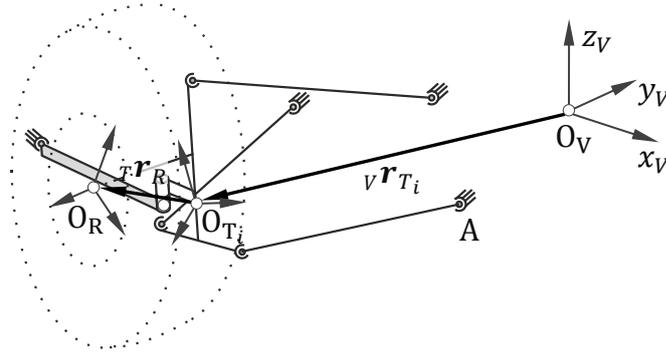


Abb. 3.25: Vektorzug zu den Masseschwerpunkten der Mehrlenkerradaufhängung

Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gegenüber dem Inertialsystem werden durch Beachtung der Führungsbewegung (s. Gl. (3.16) bis (3.18)) des Fahrzeugaufbaus berechnet zu

$${}^E\mathbf{v}_{T_i} = {}^E\mathbf{v}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_v\mathbf{r}_{T_i} + {}_v\mathbf{v}_{T_i} \quad (3.209)$$

und

$${}^E\mathbf{a}_{T_i} = {}^E\mathbf{a}_V + 2\boldsymbol{\omega}_V \times {}_v\mathbf{v}_{T_i} + \boldsymbol{\alpha}_V \times {}_v\mathbf{r}_{T_i} + {}_v\mathbf{a}_{T_i} + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\omega}_V \times {}_v\mathbf{r}_{T_i}). \quad (3.210)$$

Die JACOBI-Matrizen  $\mathbf{J}_{Tra, T_i}$  lassen sich in Anlehnung an Gleichung (3.35), jedoch ohne Lenkbewegung, berechnen zu

$$\mathbf{J}_{Tra, T_i} = [\mathbf{I}_{[3 \times 3]} \mid -{}_v\tilde{\mathbf{r}}_{T_i} \mid \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 4]}], i = 3, 5. \quad (3.211)$$

Die Translationsbeschleunigung des Radträgers kann ausgedrückt werden durch

$${}^E\mathbf{a}_{T_i} = \mathbf{J}_{Tra, T_i} \dot{\mathbf{z}} + {}^E\bar{\mathbf{a}}_{T_i}, \quad (3.212)$$

mit den translatorischen Restbeschleunigungen des Radträgers  ${}^E\bar{\mathbf{a}}_{T_i}$ , die sich durch Einsetzen von (3.208) in (3.210) ergeben zu

$$\begin{aligned} {}^E\bar{\mathbf{a}}_{T_i} &= 2\boldsymbol{\omega}_V \times {}_v\mathbf{v}_{T_i} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_c, T_i} \mathbf{c} + \boldsymbol{\omega}_V \times \boldsymbol{\omega}_V \times {}_v\mathbf{r}_{T_i} \\ &= 2{}^E\boldsymbol{\omega}_V \times {}_v\mathbf{v}_{T_i} + [-\mathbf{J}_\beta^{-1} \dot{\mathbf{J}}_\beta]_{[1:3,3]} \dot{z}_c + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\omega}_V \times {}_v\mathbf{r}_{T_i}). \end{aligned} \quad (3.213)$$

### Rotation des Radträgers

Für die Relativkinematik der Rotation wird zunächst die Drehmatrix  ${}^V T_{T_i}(\mathbf{c}, \boldsymbol{\delta})$  benötigt, die die räumliche Orientierung des Radträgers gegenüber dem Aufbau beschreibt (s. Gl. (3.164)). Daraus werden die Winkelgeschwindigkeit zu

$${}^V \boldsymbol{\omega}_{T_i} = \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} = [-J_{\beta}^{-1}]_{[4:6,3]} \dot{z}_c \quad (3.214)$$

und die Winkelbeschleunigung zu

$$\begin{aligned} {}^V \boldsymbol{\alpha}_{T_i} &= {}^V \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T_i} = \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} = [-J_{\beta}^{-1}]_{[4:6,3]} \ddot{z}_c + [-J_{\beta}^{-1} \dot{J}_{\beta} \dot{\boldsymbol{\beta}}]_{[4:6]} \\ &= [-J_{\beta}^{-1}]_{[4:6,3]} \ddot{z}_c + [-J_{\beta}^{-1} \dot{J}_{\beta}]_{[4:6,3]} \dot{z}_c, \end{aligned} \quad (3.215)$$

berechnet. Die absolute Winkelgeschwindigkeit der Radträger berechnet sich zu

$${}^E \boldsymbol{\omega}_{T_i} = {}^E \boldsymbol{\omega}_V + {}^V \boldsymbol{\omega}_{T_i} = {}^E \boldsymbol{\omega}_V + \underbrace{[-J_{\beta}^{-1}]_{[4:6,3]}}_{\mathbf{H}_{Rot_c, T_i}} \dot{z}_c. \quad (3.216)$$

Aus Gleichung (3.216) wird durch Ableiten die absolute Winkelbeschleunigung der Radträger zu

$$\begin{aligned} {}^E \boldsymbol{\alpha}_{T_i} &= {}^E \boldsymbol{\alpha}_V + {}^V \boldsymbol{\alpha}_{T_i} \\ &= {}^E \boldsymbol{\alpha}_V + {}^E \boldsymbol{\omega}_V \times {}^V \boldsymbol{\omega}_{T_i} + \underbrace{[-J_{\beta}^{-1}]_{[4:6,3]}}_{\mathbf{H}_{Rot_c, T_i}} \ddot{z}_c + \underbrace{[-J_{\beta}^{-1} \dot{J}_{\beta}]_{[4:6,3]}}_{\dot{\mathbf{H}}_{Rot_c, T_i}} \dot{z}_c. \end{aligned} \quad (3.217)$$

bestimmt. Die Zusammenhänge für die rotatorische JACOBI-Blockmatrix sind gegeben durch

$$\mathbf{J}_{Rot, T_i} = [\mathbf{0}_{[3 \times 3]} \mid \mathbf{I}_{[3 \times 3]} \mid \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 4]}] \quad i = 3, 5. \quad (3.218)$$

Damit können die rotatorischen Beschleunigungen des Radträgers auch wie folgt ausgedrückt werden

$${}^V \boldsymbol{\alpha}_{T_i} = \mathbf{J}_{R, T_i} \dot{\mathbf{z}} + {}^E \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{T_i} \quad (3.219)$$

mit den rotatorischen Restbeschleunigungen des Radträgers als

$${}^E \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{T_i} = {}^E \boldsymbol{\omega}_V \times {}^V \boldsymbol{\omega}_{T_i} + [-J_{\beta}^{-1} \dot{J}_{\beta}]_{[4:6,3]} \dot{z}_c. \quad (3.220)$$

### Translation des Rades

Lage und Bewegung der Räder unterscheiden sich von den Radträgern nur bezüglich der Raddrehung um die Nabe sowie durch einen anderen radträgerfesten Bezugspunkt. Dementsprechend sind die JACOBI-Matrizen der Translation ähnlich zu denen des Radträgers aufgebaut. Mit dem Ortsvektor zum Radschwerpunkt  ${}^T \mathbf{r}_{R_i}$  bezüglich des Radträgersystems  $K_T$  berechnet sich der Lagevektor zu

$${}^V \mathbf{r}_{R_i} = {}^V \mathbf{r}_{T_i} + {}^T \mathbf{r}_{R_i}, \quad (3.221)$$

die Geschwindigkeit zu

$${}^V \mathbf{v}_{R_i} = {}^V \mathbf{v}_T + {}^V \boldsymbol{\omega}_T \times {}^T \mathbf{r}_{R_i} = \underbrace{[-J_{\beta}^{-1}]_{[1:3,3]}}_{\mathbf{H}_{Tra_c, T_i}} \dot{z}_c + \underbrace{{}^V \boldsymbol{\omega}_T \times {}^T \mathbf{r}_{R_i}}_{\ll {}^V \mathbf{v}_T} \quad (3.222)$$

und die Beschleunigung zu

$$\begin{aligned} {}_V\mathbf{a}_{R_i} &= {}_V\mathbf{a}_T + {}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}_T \times {}_T\mathbf{r}_{R_i} + {}_V\boldsymbol{\omega}_T \times {}_T\dot{\mathbf{r}}_{R_i} \\ &= \left[-\mathbf{J}_\beta^{-1}\right]_{[1:3,3]} \ddot{\mathbf{z}}_c + \left[-\mathbf{J}_\beta^{-1}\mathbf{J}_\beta\right]_{[1:3,3]} \dot{\mathbf{z}}_c + {}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}_T \times {}_T\mathbf{r}_{R_i} + {}_V\boldsymbol{\omega}_T \times ({}_V\boldsymbol{\omega}_T \times {}_T\mathbf{r}_{R_i}). \end{aligned} \quad (3.223)$$

In den Gleichungen (3.222) und (3.223) berechnen sich im Gegensatz zum Radträger zusätzliche Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsterme. Der Abstand  $|\mathbf{r}_{R_i}|$  zwischen den Schwerpunkten des Radträgers und des Rades ist verhältnismäßig gering. Somit ist der Anteil des Geschwindigkeitsterms  ${}_V\boldsymbol{\omega}_T \times {}_T\mathbf{r}_{R_i} \ll {}_V\mathbf{v}_T$  bzw. des Beschleunigungsterms  ${}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}_T \times {}_T\mathbf{r}_{R_i} + {}_V\boldsymbol{\omega}_T \times ({}_V\boldsymbol{\omega}_T \times {}_T\mathbf{r}_{R_i}) \ll {}_V\mathbf{a}_T$  gering und kann vernachlässigt werden. Für die Berechnung der translatorischen JACOBI-Blockmatrizen des Rades  $\mathbf{J}_{Tra,R_i}$  ist es daher zulässig, diesen Geschwindigkeitsterm zugunsten der Modularisierung der Radaufhängung nicht zu beachten.

Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gegenüber dem Inertialsystem werden unter Beachtung der Führungsbewegung (s. Gl. (3.16) bis (3.18)) des Fahrzeugaufbaus berechnet zu

$${}_E\mathbf{v}_{T_i} = {}_E\mathbf{v}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{r}_{R_i} + {}_V\mathbf{v}_{R_i} \quad \text{und} \quad (3.224)$$

$${}_E\mathbf{a}_{R_i} = {}_E\mathbf{a}_V + 2\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{v}_{R_i} + \boldsymbol{\alpha}_V \times {}_V\mathbf{r}_{R_i} + {}_V\mathbf{a}_{R_i} + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{r}_{R_i}). \quad (3.225)$$

Die JACOBI-Blockmatrizen  $\mathbf{J}_{Tra,R_i}$  berechnen sich zu

$$\mathbf{J}_{Tra,R_i} = [\mathbf{I}_{[3 \times 3]} \mid -{}_V\tilde{\mathbf{r}}_{R_i} \mid \mathbf{H}_{Tra_c,T_i} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 4]}], \quad i = 7, 9. \quad (3.226)$$

Die Translationsbeschleunigung des Rades kann durch

$${}_E\mathbf{a}_{R_i} = \mathbf{J}_{Tra,R_i} \dot{\mathbf{z}} + {}_E\bar{\mathbf{a}}_{R_i} \quad (3.227)$$

ausgedrückt werden. Die translatorischen Restbeschleunigungen des Rades  ${}_E\bar{\mathbf{a}}_{R_i}$  werden

$$\begin{aligned} \text{mit } {}_E\bar{\mathbf{a}}_{R_i} &= 2\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{v}_{R_i} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_c,T_i} \dot{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\omega}_V \times \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{r}_{R_i} \\ &= 2{}_E\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{v}_{R_i} + \left[-\mathbf{J}_\beta^{-1}\mathbf{J}_\beta\right]_{[1:3,3]} \dot{\mathbf{z}}_c + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{r}_{R_i}) \end{aligned} \quad (3.228)$$

angegeben.

### Rotation des Rades

Die rotatorischen Größen zwischen Radträger und Rädern unterscheiden sich voneinander nur durch die Drehung der Räder um die Radachsen. Die Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung der Räder ergeben sich aus den Gleichungen (3.214) und (3.215) durch Hinzufügen der Radeigendrehung  $\dot{\rho}_{R_i}$  und  $\ddot{\rho}_{R_i}$ . Die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich durch die rotatorische JACOBI-Untermatrix  $\mathbf{H}_{Rot_c,T_i}$  und  $\mathbf{H}_{Rot_\rho,R_i}$  sowie deren zeitlichen Ableitungen zu

$${}_V\boldsymbol{\omega}_{R_i} = \mathbf{H}_{Rot_c,T_i} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{H}_{Rot_\rho,R_i} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \underbrace{\left[-\mathbf{J}_\beta^{-1}\right]_{[4:6,3]}}_{\mathbf{H}_{Rot_c,T_i}} \dot{\mathbf{z}}_c + \mathbf{u}_{R_i} \dot{\rho}_{R_i} \quad (3.229)$$

und die Winkelbeschleunigung zu

$$\begin{aligned}
{}^V\boldsymbol{\alpha}_{R_i} &= {}^V\dot{\boldsymbol{\omega}}_{T_i} = \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Rot_{\rho}, R_i} \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_{\rho}, R_i} \dot{\boldsymbol{\rho}} \\
&= \underbrace{[-\mathbf{J}_{\beta}^{-1}]_{[4:6,3]}}_{\mathbf{H}_{Rot_c, T_i}} \ddot{\mathbf{z}}_c + \underbrace{[-\mathbf{J}_{\beta}^{-1} \dot{\mathbf{J}}_{\beta}]_{[4:6]}}_{\dot{\mathbf{H}}_{Rot_c, T_i}} \dot{\mathbf{z}}_c + \mathbf{u}_{R_i} \ddot{\boldsymbol{\rho}}_{R_i} \\
&= \underbrace{[-\mathbf{J}_{\beta}^{-1}]_{[4:6,3]}}_{\mathbf{H}_{Rot_c, T_i}} \ddot{\mathbf{z}}_c + \underbrace{[-\mathbf{J}_{\beta}^{-1} \dot{\mathbf{J}}_{\beta}]_{[4:6,3]}}_{\dot{\mathbf{H}}_{Rot_c, T_i}} \dot{\mathbf{z}}_c + \underbrace{\mathbf{u}_{R_i}}_{\mathbf{H}_{Rot_{\rho}, R_i}} \ddot{\boldsymbol{\rho}}_{R_i} + \underbrace{{}^V\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{u}_{R_i}}_{\dot{\mathbf{H}}_{Rot_{\rho}, R_i}} \dot{\boldsymbol{\rho}}_{R_i}
\end{aligned} \tag{3.230}$$

Die absolute Winkelgeschwindigkeit der Radträger wird errechnet zu

$${}^E\boldsymbol{\omega}_{R_i} = {}^E\boldsymbol{\omega}_V + {}^V\boldsymbol{\omega}_{R_i} = {}^E\boldsymbol{\omega}_V + \underbrace{[-\mathbf{J}_{\beta}^{-1}]_{[4:6,3]}}_{\mathbf{H}_{Rot_c, T_i}} \dot{\mathbf{z}}_c + \mathbf{u}_{R_i} \dot{\boldsymbol{\rho}}_{R_i}. \tag{3.231}$$

Durch Ableiten der Gleichung (3.231) berechnet sich die absolute Winkelbeschleunigung der Radträger zu

$$\begin{aligned}
{}^E\boldsymbol{\alpha}_{R_i} &= {}^E\boldsymbol{\alpha}_V + {}^V\boldsymbol{\alpha}_{R_i} \\
&= {}^E\boldsymbol{\alpha}_V + {}^E\boldsymbol{\omega}_V \times {}^V\boldsymbol{\omega}_{R_i} + \underbrace{[-\mathbf{J}_{\beta}^{-1}]_{[4:6,3]}}_{\mathbf{H}_{Rot_c, T_i}} \ddot{\mathbf{z}}_c + \underbrace{[-\mathbf{J}_{\beta}^{-1} \dot{\mathbf{J}}_{\beta}]_{[4:6,3]}}_{\dot{\mathbf{H}}_{Rot_c, T_i}} \dot{\mathbf{z}}_c + \underbrace{\mathbf{u}_{R_i}}_{\mathbf{H}_{Rot_{\rho}, R_i}} \ddot{\boldsymbol{\rho}}_{R_i} \\
&\quad + \underbrace{{}^V\boldsymbol{\omega}_{T_i} \times \mathbf{u}_{R_i}}_{\dot{\mathbf{H}}_{Rot_{\rho}, R_i}} \dot{\boldsymbol{\rho}}_{R_i}.
\end{aligned} \tag{3.232}$$

Die Zusammenhänge für die rotatorische JACOBI-Matrix ergeben sich zu

$$\mathbf{J}_{Rot, R_i} = \left[ \mathbf{0}_{[3 \times 3]} \mid \mathbf{I}_{[3 \times 3]} \mid \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \mid \mathbf{H}_{Rot_{\rho}, R_i} \right] \quad i = 7, 9. \tag{3.233}$$

Damit können die rotatorischen Beschleunigungen des Rades auch ausgedrückt werden

$$\text{als} \quad {}^V\boldsymbol{\alpha}_{R_i} = \mathbf{J}_{Rot, R_i} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{E}\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{R_i}, \tag{3.234}$$

mit den rotatorischen Restbeschleunigungen des Radträgers

$${}^E\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{R_i} = {}^E\boldsymbol{\omega}_V \times {}^V\boldsymbol{\omega}_{R_i} + \underbrace{[-\mathbf{J}_{\beta}^{-1} \dot{\mathbf{J}}_{\beta}]_{[4:6,3]}}_{\dot{\mathbf{H}}_{Rot_c, T_i}} \dot{\mathbf{z}}_c + {}^V\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{u}_{R_i} \dot{\boldsymbol{\rho}}_{R_i}. \tag{3.235}$$



## 4 Referenzdatengenerierung

Die in Kapitel 3 erstellten Fahrzeugmodelle sollen das Fahrverhalten eines bestimmten Referenzfahrzeugs wiedergeben. In diesem Kapitel werden das Referenzfahrzeug und dessen Referenzdaten beschrieben. Das Fahrverhalten des Referenzfahrzeugs soll stellvertretend eine bestimmte Fahrzeugklasse wiedergeben. Es wird aus charakteristischen Fahrmanövern gewonnen (vgl. Kapitel 2) und dient als Grundlage für den in Kapitel 6 behandelten Optimierungsprozess.

Zunächst werden die Fahrzeugklassen mit ihrer jeweiligen Zulassungsstatistik und ihren Kenndaten vorgestellt und anschließend aus diesen ein repräsentatives Referenzfahrzeug ausgewählt und die durchschnittlichen Fahrzeugparameter erstellt. Abschließend wird die Generierung von fahrdynamischen Referenzdaten aus Fahrversuchen beschrieben. Aus Gründen der Geheimhaltung sind die verwendeten Fahrzeuge anonymisiert.

### 4.1 Fahrzeugklassen

Fahrzeuge unterscheiden sich nach der Außenabmessung (Form), dem Gewicht und ihrem Einsatz. Als Fahrzeugklasse wird eine abgegrenzte Gruppe von KFZ-Modellen bezeichnet, die nach Form, Größe, Motorleistung und Preisspanne gruppiert werden und miteinander konkurrieren (Heißing 2007). Im Vergleich zu den Fahrzeugmodellen von vor 25 Jahren ist die heutige Abgrenzung nicht mehr klar, da häufiger neue Modellvarianten und Variationen (sogenannte Cross Overs) auf den Markt kommen (Heißing 2007). In der vorliegenden Arbeit wird die in Tabelle 4.1 aufgeführte Klassifizierung genutzt, die auf (Heißing 2007) und (KBA 2011) basiert.

Jeder Original Equipment Manufacturer (OEM) hat eine begrenzte Anzahl von Fahrwerks- und Antriebskonzepten. Diese werden modellspezifisch durch Anpassung des Radstands, der Spurweite, der Radlasten und Motorisierung nach dem Baukastenprinzip aufgebaut. Die Konzepte für Fahrzeugplattformen richten sich nach den Baureihen und deren Marktpreis (Heißing 2007). Die Baureihen der OEMs reichen von kostengünstigen Fahrzeugkonzepten mit geringer Motorisierung und Fahrzeugabmaßen bis hin zu teuren, technisch aufwändigen, hochmotorisierten und luxuriösen Fahrzeugkonzepten.

In Tabelle 4.1 sind die einzelnen Fahrzeugklassen nach der Zulassungsstatistik des Jahres 2011 (KBA 2011) sortiert wiedergegeben. Für jede Fahrzeugklasse werden die entsprechenden Fahrzeuge benannt, die in der jeweiligen Fahrzeugklasse am häufigsten zugelassen wurden.

In Tabelle 4.2 sind die klassentypischen Kenndaten (Leergewicht, Radstand, Spurweite, Leistung, maximales Drehmoment, Antrieb und Radaufhängungstyp) gemittelt dargestellt. Die Fahrzeugdaten werden für die Fahrzeuge gemittelt die mit einem Anteil von 80 Prozent in einer Klasse vertreten sind. Dadurch kann es vorkommen, dass es beispielsweise ein Fahrzeug in der Mittelklasse gibt, das ein geringeres oder höheres Leergewicht besitzt als in Tabelle 4.2 angegeben. Die Mittelung der Kenndaten dient hier als Richtwert und kann als Startwert für Fahrzeugmodellparametrierung verwendet werden.

Tabelle 4.1: Fahrzeugklassen nach Heiing (2007) und KBA (2011)

<b>Fahrzeugklasse</b>	<b>Fahrzeugbeispiele</b>	<b>PKW-Bestand (KBA 2011)</b>
Kompaktklasse	VW Golf, Opel Astra, Ford Focus, Audi A3, BMW Series 1, Toyota Corolla, Skoda Octavia, Mercedes A-Klasse	25,61 %
Kleinwagen	VW Polo, Opel Corsa, Ford Fiesta, Skoda Fabia, Mini, Audi A1, Seat Ibiza, Peugeot 207, Fiat Punto, Renault Clio	17,63 %
Mittelklasse	VW Passat, Mercedes C-Klasse, BMW Series 3, Audi A4, Opel Insignia, Ford Mondeo	14,09 %
Geländewagen (SUV)	VW Tiguan, BMW X3, Mercedes GLK, Audi Q5, BMW X5, Mercedes M-Klasse, Nissan Qashqai	13,30 %
Minivans	VW Touran, Opel Meriva, Opel Zafira, Ford C- Max, Renault Scenic, Mazda 5, Hunday iX20	7,59 %
Obere Mittelklasse	Mercedes E-Klasse, BMW Series 5, Audi A6, VW Passat-CC	6,19 %
Minifahrzeuge	Smart Fortwo, Renault Twingo, Fiat 500, Hyun- dai I10, Toyota Aygo, Ford KA, Citroen C1	5,80 %
Groraumvans	VW Sharan, Ford S-Max, Mercedes Viano, Ford Galaxy	2,24 %
Sportwagen	Mercedes SLK, Porsche 911, Audi TT, BMW Z4	1,57 %
Oberklasse	BMW Series 7, Mercedes S-Klasse, Audi A8, Por- sche Panamera	0,69 %
Sonstige	Utilities, Stadtlieferwagen etc.	5,24 %

## 4.2 Erstellung der Referenzfahrzeugparameter

Um die Eigenschaftsabsicherung von Fahrzeugsimulationsmodellen zu gewährleisten, ist ein geeigneter Referenzdatensatz notwendig. Dieser Datensatz wird verwendet, um das Fahrverhalten von Fahrzeugmodellen durch Optimierung der Modellparameter anzupassen. Der Datensatz enthält gemittelte Referenzparameter (z. B. Massen und Längen) und durch Fahrversuche ermittelte Fahrdynamikdaten (z. B. EG und GV).

Das repräsentative Referenzfahrzeug soll der Fahrzeugklasse entsprechen, die die höchste Zulassungszahl in Deutschland besitzt (KBA 2011). In Tabelle 4.2 ist die Kompaktklasse (untere Mittelklasse) mit circa 25,61 Prozent die häufigste Fahrzeugkategorie in der Zulassungsstatistik. Diese Fahrzeugklasse wird als Grundlage für das repräsentative Referenzfahrzeug gewählt.

Aus den Daten von drei aktuellen PKW-Modellen der Kompaktklasse wird ein Durchschnittsmodell (DM) als repräsentatives Referenzfahrzeug bestimmt. Durch die Auswahl von Fahrzeugen unterschiedlicher Hersteller ist ein breiteres Datenspektrum für die Kompaktklasse möglich. Anschließend werden aus den Parametern der Fahrzeuge die Mittelwerte in den Kategorien Gewicht, Gewichtsverteilung, Abmessungen, Achskinematik, Lenkübersetzung und Reifen gebildet (Tabelle 4.3). Die berechneten Mittelwerte dienen als Referenzwert und als Startparameter für die Sensitivitätsanalyse und die Optimierung des Fahrverhaltens des generischen Modells aus Kapitel 3.

Tabelle 4.2: Kenndaten von Fahrzeugklassen (Auto Katalog 2011)

Fahrzeugklasse	Leergewicht in kg	Radstand in mm	Spurweite in mm	Leistung in kW	Max. Dreh- moment in Nm	Antrieb	Radaufhängung	
							Vorne	Hinten
Kompaktklasse	1.307 – 1.506	2.434 – 2.722	1.520 – 1.547	67 – 156	120 – 335	F	QL, FB, QS	ML, SF, QS
Kleinwagen	1.054 – 1.206	2.451 – 2.575	1.461 – 1.474	52 – 113	114 – 231	F	QL, FB, QS	VL, SF
Mittelklasse	1.452 – 1.828	2.761 – 2.772	1.561 – 1.566	91 – 268	208 – 485	F/H/Ap	DQL/QL, FB, QS	ML, SF, QS
Geländewagen	1.451 – 2.211	2.661 – 2.874	1.562 – 1.651	93 – 205	209 – 644	F/Ap	DQL, QL, FB, QS	ML/VL, SF/FB, QS
Minivans	1.409 – 1.567	2.678 – 2.698	1.510 – 1.550	74 – 112	137 – 296	F	QL, FB, QS	ML/VL, SF, QS
Obere Mittel- klasse	1.588 – 1.989	2.818 – 2.930	1.572 – 1.613	121 – 307	268 – 560	F/H/Ap	DQL, FB/LF/SF, QS	ML, SF/FB, QS
Minifahrzeuge	930 – 1.056	1.867 – 2.450	1.394 – 1.397	47 – 71	96 – 156	F	QL, FB, QS	VL, SF
Großraumvans	1.764 – 1.844	2.955 – 3.430	1.589 – 1.609	93 – 156	230 – 400	F	QL, FB, QS	ML/SL, SF, QS
Sportwagen	1.437 – 1.623	2.505 – 2.781	1.531 – 1.562	153 – 269	248 – 477	F/H/Ap	QL, FB, QS	ML, SF/FB, QS
Oberklasse	1.939 – 2.212	2.980 – 3.125	1.629 – 1.634	190 – 373	398 – 762	H/Ap	DQL, FB/LF, QS	DQL/ML, LF, QS

Antriebsart: F Frontantrieb, H Heckantrieb, Ap Allradantrieb permanent  
Vorder- und Hinterachse: QL Querlenker, DQL Doppelquerlenker, SF Schräglenker, ML Mehrlenker, VL Verbundlenker, FB Federbein,  
SF Schraubenfeder, LF Luftfeder, QS Querstabilisator

Tabelle 4.3: Mittelung der Fahrzeugparameter

Parameter	Fahrzeug A	Fahrzeug B	Fahrzeug C	DM	$\sigma$	
Leergewicht	1376 kg	1328,50 kg	1.370 kg	1.358 kg	1,56 %	
Gewicht	zul. Gesamtgewicht	1.745 kg	1.785 kg	1.745 kg	1.758 kg	1,10 %
	Achslast bei Leergewicht	vorne 841,50 kg	817 kg	816 kg	825 kg	4,70 %
Abmessung	hinten	534,50 kg	511 kg	553 kg	533 kg	10,45 %
	Radstand	2.578 mm	2.600 mm	2.64 mm	2.606 mm	1,21 %
	Spurweite	vorne	1.539 mm	1.525 mm	1.535 mm	1.533 mm
hinten		1.528 mm	1.520 mm	1.531 mm	1.526 mm	0,37 %
Achskinematik	vorne	MacPherson	MacPherson	MacPherson	MacPherson	
	hinten	Mehrlenker	Mehrlenker	Verbundlenker	Mehrlenker	
Lenkübersetzung	15	18	15,80	16,30	4,73 %	
Reifen	205/55 R16V	205/55 R16V	205/55 R16V	205/55 R16V		

In den Kategorien Motor, Fahrwerk und Reifen dient die am häufigsten verwendete Variante der drei Fahrzeuge für das Durchschnittsmodell. Die Eckdaten des Kompaktklasse-DM sind in Tabelle 4.4 zusammengefasst.

Tabelle 4.4: Eckdaten des Kompaktklasse-DM

Motor	Antriebsart	Frontantrieb
	Max. Leistung	100 kW bei 5000 U/min
	Max. Drehmoment	124 Nm bei 3500 U/min
	Max. Drehzahl	5500 U/min
	Getriebe	5-Gang Schaltgetriebe
Fahrwerk	Vorderachse	MacPherson-Einzelradaufhängung (Federbein-Ausführung), Stabilisator
	Hinterachse	Mehrlenker-Einzelradaufhängung (Schwertlenker), oben liegender Querlenker, Stabilisator
	Lenkung	Zahnstangenlenkung mit elektromechanischer Unterstützung
	Lenkübersetzung	16,3 -
Abmessungen	Länge	4531 mm
	Breite	1790 mm
	Höhe	1484 mm
	Spurweite vorne	1533 mm
	Spurweite hinten	1526 mm
	Radstand	2606 mm
Gewichte	Leergewicht	1358 kg
	Zul. Gesamtgewicht	1758 kg
	Achslast bei Leergewicht vorne	825 kg
	Achslast bei Leergewicht hinten	553 kg
Reifen	vorne/hinten	205/55 R 16 V

In Abb. 4.1 ist die mechanische MKS-Struktur des Modells für das Referenzfahrzeug dargestellt. Das Fahrzeug ist mit einer MacPherson-Vorderachse und einer Mehrlenker-Hinterachse ausgestattet. In Kapitel 3 werden diese Achsen ausführlich beschrieben und modelliert.

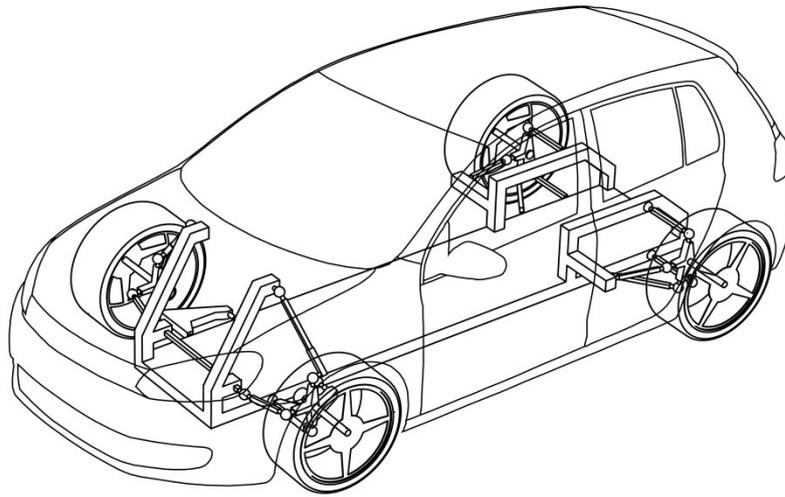


Abb. 4.1: MKS-Modell des repräsentativen Referenzfahrzeugs

### 4.3 Erstellung der fahrdynamischen Referenzdaten

Die Daten des Referenzfahrzeugs werden aus Fahrversuchen gewonnen und sollen das Fahrverhalten der untersuchten Fahrzeuge wiedergeben. Ein Testfahrer fährt dazu genormte Fahrmanöver auf einer geeigneten Teststrecke (s. Abschnitt 2.3). Diese Manöver wurden mit jedem der drei Kompaktklassefahrzeuge gefahren. Für eine bessere statistische Absicherung der Messwerte werden die Fahrmanöver mehrmals wiederholt und abhängig vom jeweiligen Fahrmanöver im Links- und Rechtskreis ausgeführt, um eine einseitige Reifenerwärmung bzw. einen einseitigen Reifenverschleiß zu vermeiden. Die Fahrzeuge sind zusätzlich mit einem dreiachsigen Translations- und Rotationsbeschleunigungssensor und einem Lenkradwinkelsensor ausgestattet. Die fahrdynamischen Messergebnisse werden aus den Signalen der zusätzlichen Sensoren sowie aus den serienmäßig verbauten Sensoren über den CAN-Bus aufgezeichnet. Unter anderem werden die Signale Zeit, Fahrzeuggeschwindigkeit, Lenkradwinkel, Zentrifugalbeschleunigung, Gierrate, Position sowie Schwimm- und Wankwinkel aufgezeichnet. Die Größen Zentrifugalbeschleunigung, Gierrate, Schwimm- und Wankwinkel werden relativ zum Schwerpunkt bestimmt. Die Fahrdynamikrohmessdaten müssen zunächst aufbereitet werden, da sie zum Teil stark verrauscht sind. Durch Filterung der Messergebnisse wird das Messrauschen beseitigt bzw. die Signale geglättet, wie beispielsweise für das Zeitsignal der Zentrifugalbeschleunigung in Abb. 4.2 a und das Signal des Lenkradwinkels in Abb. 4.2 b dargestellt.

Aus den Fahrdynamikmessdaten ergibt sich, dass die Messqualität der aufgezeichneten Schwimmwinkel nicht ausreichend ist. Der Schwimmwinkel wird lediglich im ESP-Steuergerät durch einen Beobachter geschätzt und nicht weiter betrachtet. Zur exakten Bestimmung des Schwimmwinkels könnte ein Correvit-Sensor (optisches Messverfahren) dienen, der allerdings sehr kostenintensiv ist. Deshalb wird auf die weitere Verwendung des Schwimmwinkels in der vorliegenden Arbeit verzichtet.

Da jedes Fahrmanöver mit jedem der drei Fahrzeuge mehrmals gefahren wird, steht eine große Datenmenge zur Verfügung, die eine gewisse Streuung aufweist. Um aussagekräftige Werte für jedes der drei Fahrzeuge zu erhalten, werden zunächst die Fahrdynamikgrößen des entsprechenden Manövers für das jeweilige Fahrzeug gemittelt. Die gemittelten Daten der drei Fahrzeuge wiederum werden zu einem Referenzwert gemittelt. Diese Referenz spiegelt das Fahrverhalten des repräsentativen DM wider. Die erstellten Referenzdaten der Fahrmanöver stationäre Kreisfahrt, Frequenzgang und Lenkwinkelsprung werden im Folgenden beschrieben und diskutiert.

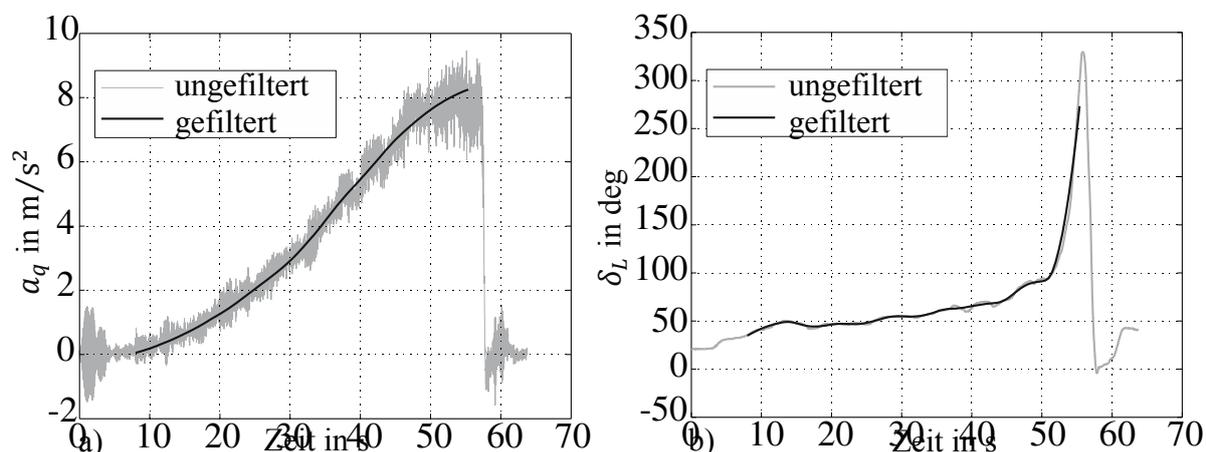


Abb. 4.2: Gefiltertes und ungefiltertes Messsignal a) der Zentrifugalbeschleunigung, b) des Lenkradwinkels

### 4.3.1 Referenzdaten der stationären Kreisfahrt

Aus dem Fahrmanöver stationäre Kreisfahrt (siehe Abschnitt 2.2.1 und 2.3.1) werden aus den Messergebnissen der Fahrversuche der Eigenlenkgradient, die Gierverstärkung und der Wankgradient für das repräsentative Durchschnittsfahrzeugmodell erstellt. Es ist anzumerken, dass die Lenkwinkelverläufe durch die entsprechende Lenkübersetzung dividiert wurden ( $\delta \approx \delta_L/i_L$ ), womit der Lenkradwinkel ungefähr dem Radlenkwinkel entspricht. Dies erleichtert die Vergleichbarkeit der Messdaten der drei Referenzfahrzeuge.

#### **Eigenlenkgradient (EG)**

Folgende Schritte zur Erstellung der Referenzwerte für den EG sind nötig (s. Abb. 4.3): Bestimmung des Mittelwerts des EG für die Fahrzeuge A (Abb. 4.3 a), B (Abb. 4.3 b) und C (Abb. 4.3 c) aus den Kreisfahrten im Links- und Rechtskreis. Der Referenz-EG des DM wird durch die Mittelwertbildung der EG der Fahrzeuge A, B und C gebildet (Abb. 4.3 d).

In Abb. 4.3 d) ist erkennbar, dass der EG des DM im linearen Bereich zunächst konstant ist und im nichtlinearen Bereich, der für Kompaktklasse-Fahrzeuge ab ca.  $a_q = 4 \text{ m/s}^2$  beginnt, progressiv ansteigt. Die Zentrifugalbeschleunigung ist im Bereich von  $0,5 \text{ m/s}^2$  bis  $7,2 \text{ m/s}^2$  begrenzt, um eine möglichst homogene Betrachtung der Fahrmanöverergebnisse zu ermöglichen. Der Ackermannlenkwinkel, die charakteristische Geschwindigkeit und der EG des DM ergeben sich für den linearen Bereich zu  $\delta_A \approx 2,1^\circ$ ,  $v_{chlin} \approx 78,2 \text{ km/h}$  und  $EG_{lin} \approx 0,0055 \text{ rad s}^2/\text{m}$ .

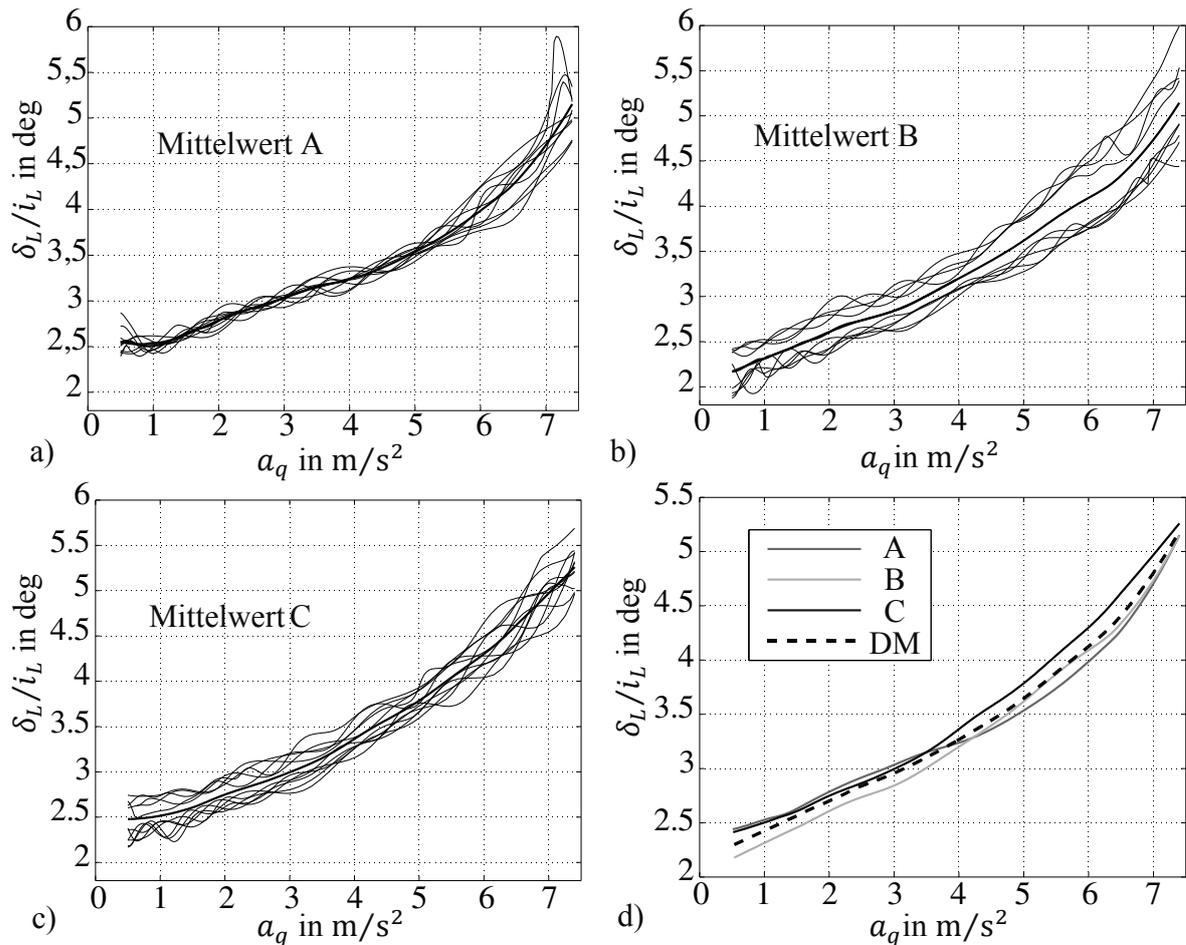


Abb. 4.3: Lenkwinkelbedarf der drei Fahrzeuge (a) Fahrzeug A, b) Fahrzeug B, c) Fahrzeug C), d) Mittelwerte der Lenkwinkelbedarf der Fahrzeuge A, B und C und des DM

### **Gierverstärkung (GV)**

Die GV des DM wird ebenfalls durch die stationäre Kreisfahrt bestimmt. In Abb. 4.4 sind die aus den Fahrversuchen bestimmte GV der Fahrzeuge A, B und C und der gemittelte Referenzwert des DM dargestellt. Auch hier werden die Lenkwinkelverläufe durch die entsprechende Lenkübersetzung dividiert.

Aus dem Verlauf der GV des Durchschnittsmodells (Abb. 4.4) wird die gemittelte charakteristische Geschwindigkeit zu  $v_{ch} \approx 69$  km/h bestimmt. Diese charakteristische Geschwindigkeit ist niedriger als die theoretisch durch ein lineares Einspurmodell bestimmte, da im aktuellen Fahrzustand zusätzliche Effekte auftreten (z. B. Radlastdifferenzen, Änderung des Seitenkraftpotentials durch Elastokinematik). Nach Zomotor (1987) liegt die charakteristische Geschwindigkeit von PKW im Bereich von 65 km/h bis 100 km/h. Je geringer  $v_{ch}$  ist, umso höher ist die Untersteuertendenz.

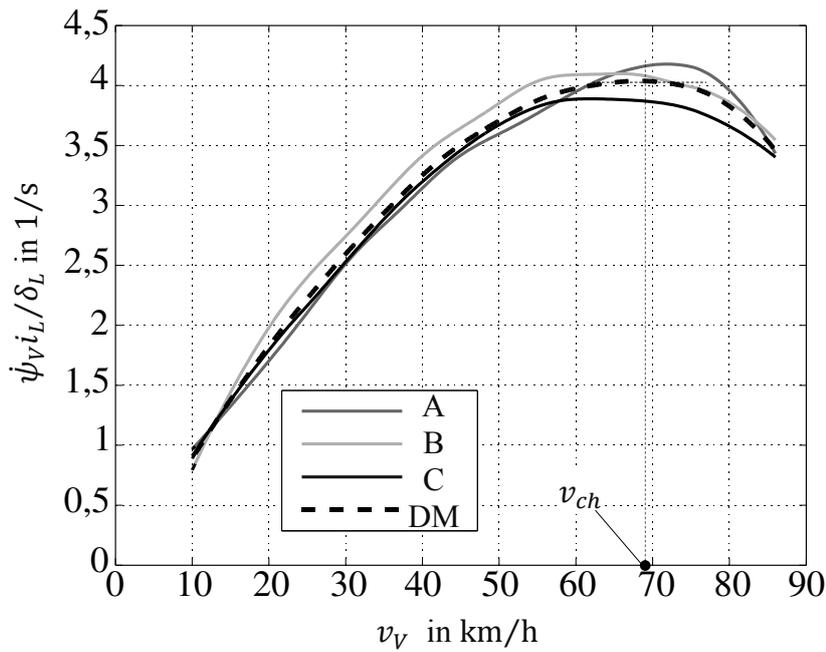


Abb. 4.4: Mittelwert (DM) der GV der Fahrzeuge A, B und C aus dem Manöver stationäre Kreisfahrt

### Wankgradient (WG)

In Abb. 4.5 ist der Verlauf des Wankwinkels der drei Fahrzeuge und des resultierenden Referenzwertes für das DM dargestellt. Der jeweilige gemessene Wankwinkel wurde um die Neigung der Dynamikfläche korrigiert. Der Wankwinkel steigt linear mit der Querbesehleunigung (Abb. 4.5).

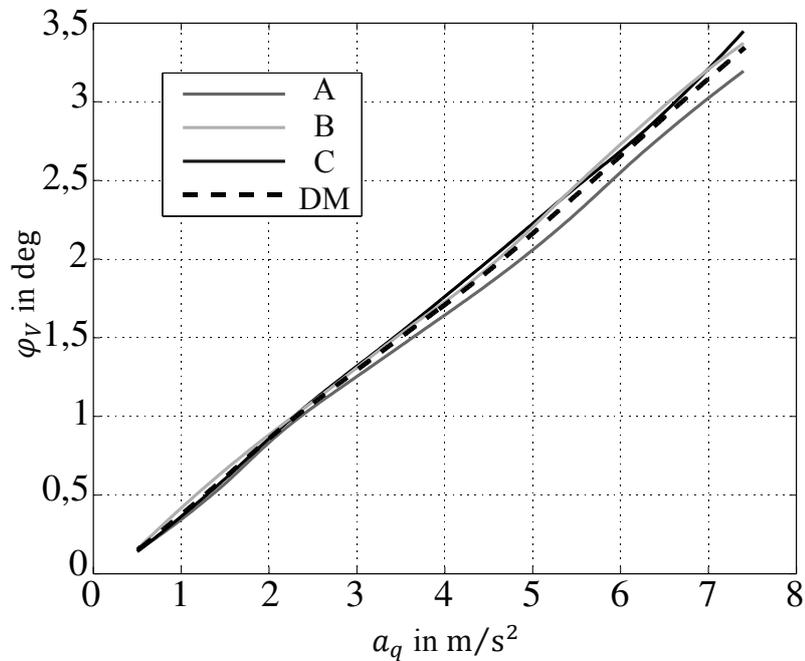


Abb. 4.5: Mittelwert (DM) des WG der Fahrzeuge A, B und C aus dem Manöver stationäre Kreisfahrt

### 4.3.2 Referenzdaten des Frequenzgangs

Für den Frequenzgang werden nun aus den Messergebnissen der Fahrversuche der Amplituden- und Phasengang jeweils für die Übertragungsfunktionen Querschleunigungsfrequenzgang (Querfrequenz), Gierratenfrequenzgang (Gierfrequenz) und Wankwinkelfrequenzgang (Wankfrequenz) für das repräsentative Durchschnittsfahrzeugmodell erstellt. Die Übertragungsfunktionen des Frequenzgangs sind in Abschnitt 2.2.2 und 2.3.2 beschrieben.

#### **Querschleunigungsfrequenz (QF)**

Der Querschleunigungsfrequenzgang (Querfrequenz) des DM wurde aus den gefilterten QF der Fahrzeuge A, B und C gemittelt. Die QF des DM (Abb. 4.6) weist eine sehr geringe Amplitudenüberhöhung bei  $f=1,2$  Hz auf. Ab einer Frequenz von ca.  $f=1,3$  Hz fällt die Amplitude kontinuierlich ab. Je geringer die Untersteuertendenz ist, desto später fällt die Amplitude ab (Zomotor 1987). Der Phasenverzug beginnt schon bei sehr geringen Frequenzen und nimmt stetig bis ca. 2 Hz ab. Dies bedeutet, dass die Querschleunigung der Lenkeingabe nacheilt. Der Phasenverzug bleibt zwischen 2 und 3 Hz bei ca.  $-60^\circ$  relativ konstant. Für ein gutes Fahrverhalten ist anzustreben, dass der Phasenverzug bis 1.5 Hz möglichst gering ist und der Amplitudenabfall möglichst spät erfolgt (Schindler 2007).

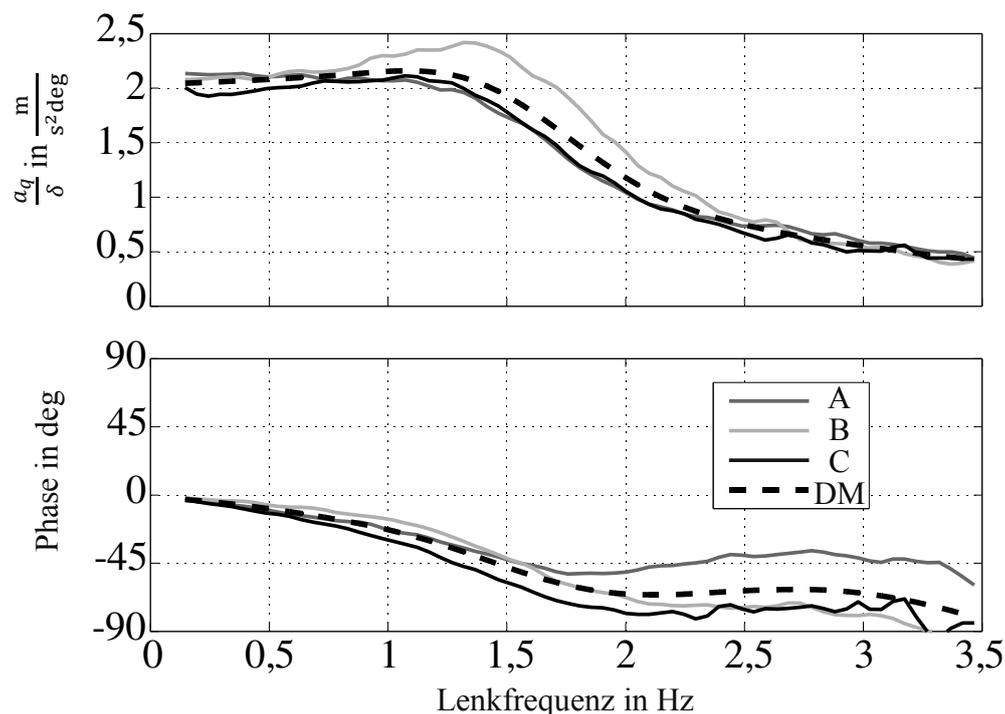


Abb. 4.6: Mittelwert der QF der Fahrzeuge A, B und C aus dem Manöver Frequenzgang

#### **Gierfrequenz (GF)**

Der Gierfrequenzgang in Abb. 4.7 zeigt im Vergleich zum Querschleunigungsfrequenzgang ein anderes Verhalten. Er weist beim Amplitudengang von ca.  $f=1,6$  Hz eine Amplitudenüberhöhung auf. Bei dieser Frequenz reagiert das Fahrzeug stärker auf Lenkeingaben als es im stationären Zustand der Fall wäre. Das Maximum liegt im Bereich der

Gier-eigenfrequenz und die Höhe des Maximums hängt von der Gierdämpfung ab. Bei höheren Frequenzen zeigt die Gierübertragung ein Tiefpassverhalten mit stetig abnehmender Amplitude. Beim Phasengang zeigt sich dies durch den zunehmendem Phasenverzug. Bei niedrigen Frequenzen ist der Phasenverzug relativ gering.

Ein guter Gierfrequenzgang ist gegeben, wenn die Amplitudenüberhöhung möglichst gering ist und der Phasenverzug erst nach ca. 1,3 Hz eintritt. Es hat sich gezeigt, dass der Fahrer unter diesen Bedingungen das Fahrverhalten des Fahrzeugs gut einschätzen kann (Schindler 2007).

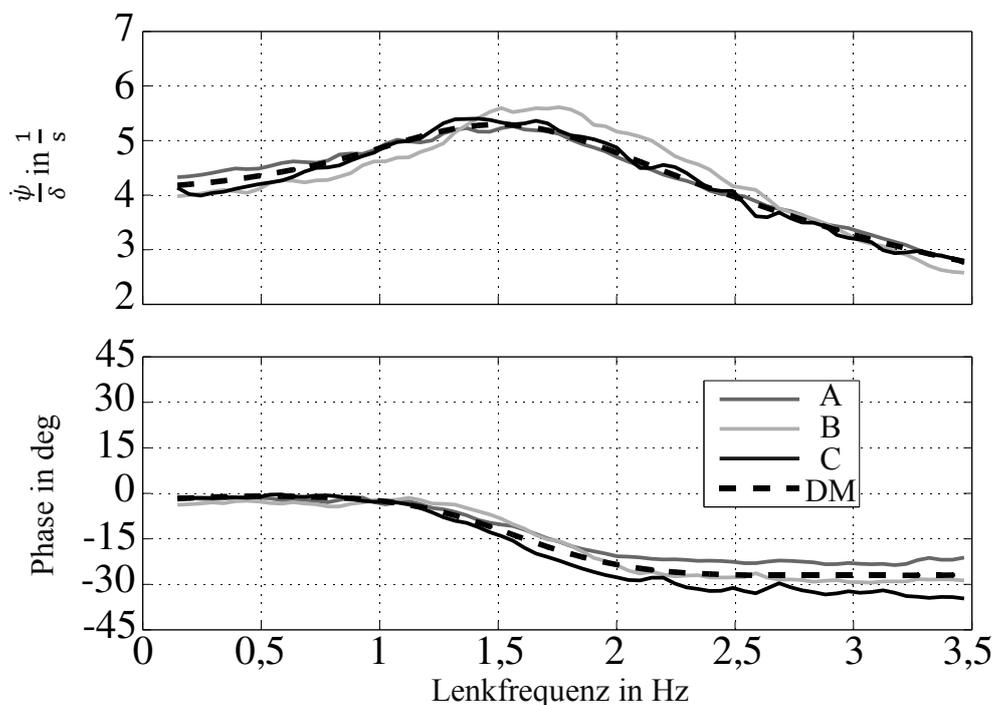


Abb. 4.7: Mittelwert der GF der Fahrzeuge A, B und C aus dem Manöver Frequenzgang

### **Wankfrequenz (WF)**

Die Wankfrequenz in Abb. 4.8 weist einen relativ konstanten Amplitudenverlauf bis ca. 1,2 Hz auf und fällt dann kontinuierlich bis ca. 2,2 Hz ab. Der Phasenverzug nimmt stetig bis circa 1,6 Hz ab. Dies suggeriert dem Fahrer ein einschätzbares bzw. plausibles und sicheres Wankverhalten im relevanten Frequenzbereich. Der Verlauf der Wankfrequenz ist ähnlich zum Verlauf der Querfrequenz, da die Querschleunigung mitunter Ursache der Wankbewegung ist.

### **4.3.3 Referenzdaten des Lenkwinkelsprungs**

Der Lenkwinkelsprung (s. Abschnitte 2.2.2 und 2.3.3) benötigt die Messergebnisse der Größen Lenkwinkel, Querschleunigung, Gierrate und Wankwinkel. Die Ausgangsgrößen Querschleunigung, Gierrate und Wankwinkel werden auf die Eingangsgröße Lenkwinkel bezogen. Durch den Quotienten Ausgangs- durch Eingangsgröße ist der Vergleich von unterschiedlichen Fahrten des gleichen Manövers möglich. Diese Quotienten beschreiben das Übertragungsverhalten (Übergangsverhalten) des Fahrzeugs. Mit den gemessenen Größen wird die Querschleunigungsübertragung (Querübertragung, QU),

die Gierratenübertragung (Gierübertragung, GU) und die Wankwinkelübertragung (Wankübertragung, WU) für das repräsentative Durchschnittsfahrzeugmodell gebildet.

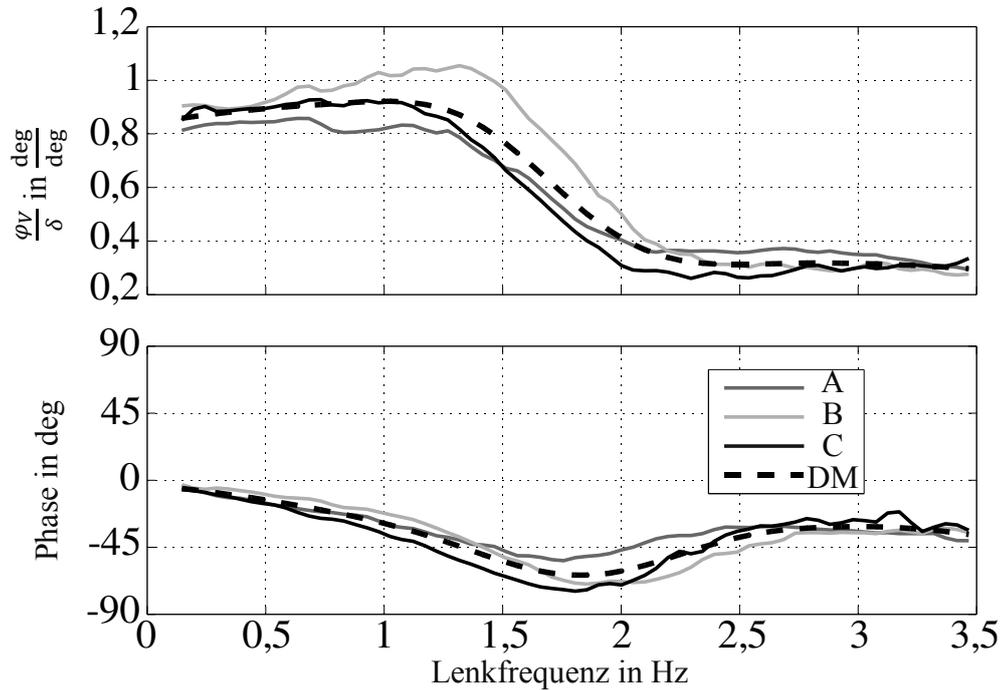


Abb. 4.8: Mittelwert der WF der Fahrzeuge A, B und C aus dem Manöver Frequenzgang

In Abb. 4.9 ist der gemittelte Lenkwinkel der drei Fahrzeuge und des resultierenden Lenkwinkels des DM dargestellt, auch hierbei wurde der Lenkradwinkel durch die jeweilige Lenkübersetzung geteilt.

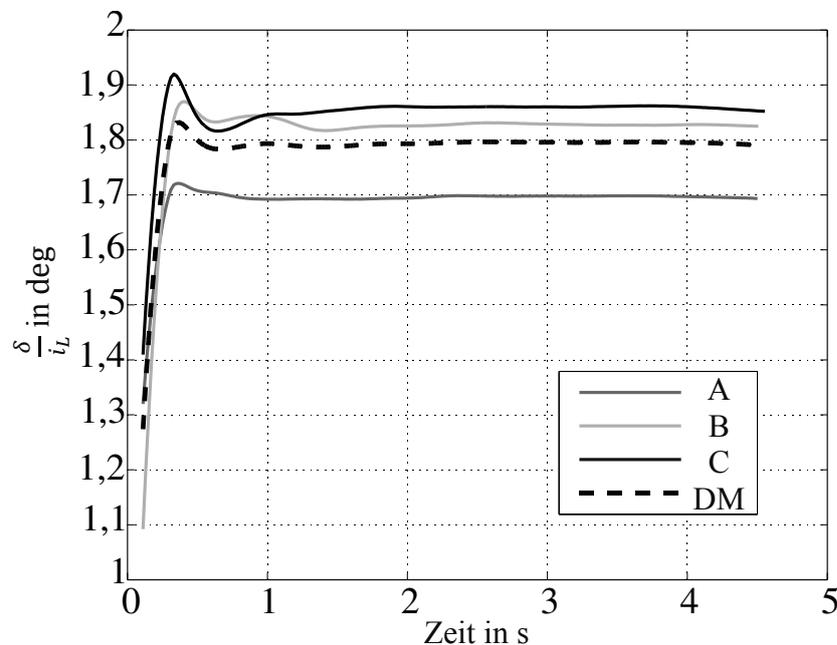


Abb. 4.9: Mittelwert des Lenkwinkels der Fahrzeuge A, B und C aus dem Manöver Lenkwinkelsprung

### Querübertragung (QU)

Der Verlauf der Querübertragung in Abb. 4.10 zeigt, dass nach einem Übergangsverhalten ein stationärer Zustand erreicht wird. Der maximale Wert der Querbeschleunigung ergibt sich bei einer Ansprechzeit von ca.  $T_{a_{qmax}} = 0,4$  s nach dem Lenkwinkelsprung. Die Überschwingweite der Querbeschleunigung beträgt ca.  $U_{a_q} = 1,1$ . Der stationäre Endwert der Querübertragung beträgt ca.  $QU_{stat} = 2,07$  m·deg/s<sup>2</sup>.

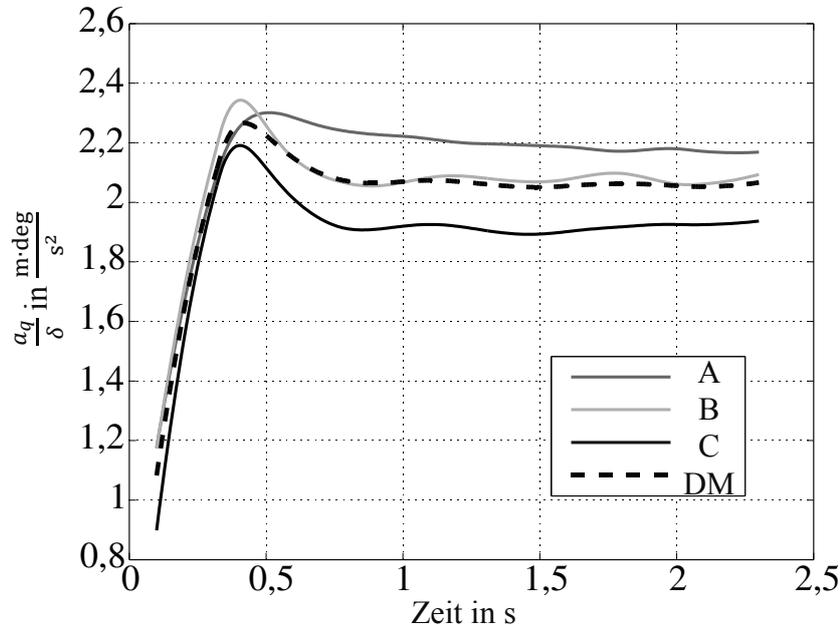


Abb. 4.10: Mittelwert QU der Fahrzeuge A, B und C aus dem Manöver Lenkwinkelsprung

### Gierübertragung (GU)

Die Gierübertragung in Abb. 4.11 weist eine ähnliche Charakteristik auf wie die Querübertragung. Nach dem Lenkwinkelsprung wird der maximale Wert der Gierrate bei einer Ansprechzeit von ca.  $T_{\dot{\psi}_{max}} = 0,35$  s erreicht. Die Überschwingweite der Gierrate beträgt ca.  $U_{\dot{\psi}} = 1,15$  und der stationäre Endwert ca.  $GU_{stat} = 4,4$  1/s. Im Vergleich zur Querübertragung ist die Gierübertragung weniger gedämpft, jedoch reagiert sie schneller und erreicht zügiger den stationären Endwert. Die Reaktion der Querbeschleunigung ist langsamer als die der Gierrate, da erst die Reifenquerkräfte an der Vorder- und Hinterachse aufgebaut werden müssen, um den maximalen Querbeschleunigungswert zu erreichen (die Gierrate entsteht direkt mit dem Aufbau der Seitenkräfte an der Vorderachse).

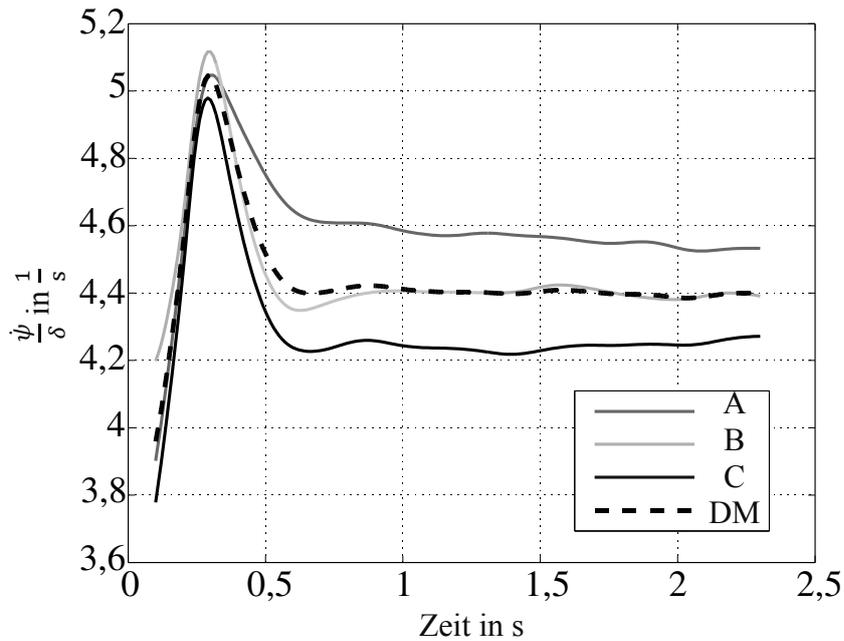


Abb. 4.11: Mittelwert GU der Fahrzeuge A, B und C aus dem Manöver Lenkwinkelsprung

### **Wankübertragung (WU)**

Die Wankübertragung in Abb. 4.12 weist ein ähnliches Übergangsverhalten auf wie die Querübertragung. Der maximale Wert des Wankwinkels wird bei der Ansprechzeit von ca.  $T_{\varphi_{max}} = 0,45$  s nach dem Lenkwinkelsprung erreicht. Der stationäre Endwert beträgt ca.  $WU_{stat} = 0,88$  deg/deg. Die Überschwingweite des Wankwinkels beträgt ca.  $U_{\varphi} = 1,12$ . Die Wankübertragung verhält sich qualitativ wie die Querübertragung, was darauf zurückzuführen ist, dass die Wankbewegung von der Querbeschleunigung abhängig ist.

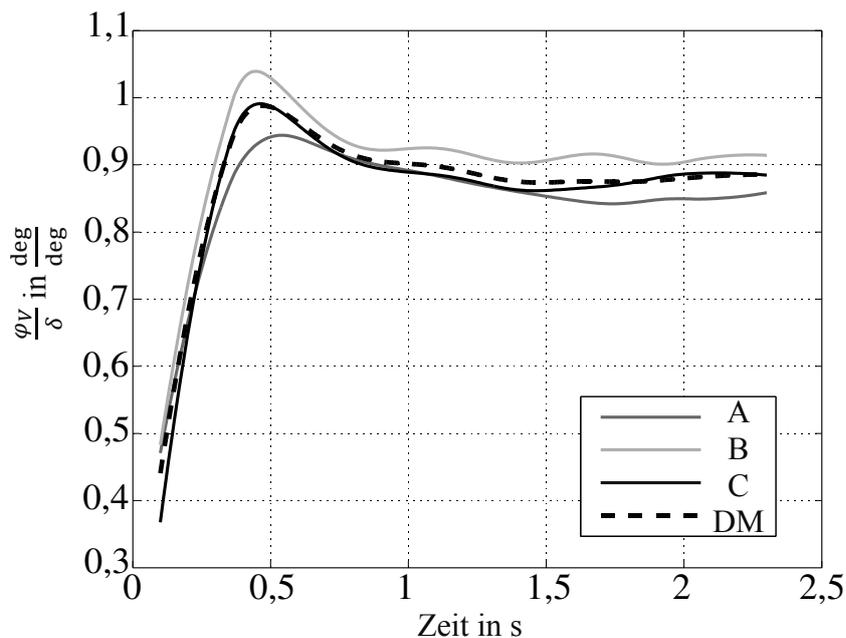


Abb. 4.12: Mittelwert WU der Fahrzeuge A, B und C aus dem Manöver Lenkwinkelsprung



## 5 Einfluss von Modellparametern auf fahrdynamische Kenndaten

Der Einfluss von Parametern auf fahrdynamische Kenndaten wird durch eine Sensitivitätsanalyse (SA) der Modellparameter des generischen Zweispurmodells bewerkstelligt. Diese umfasst in der vorliegenden Arbeit die Untersuchung der Auswirkung von Parametervariationen auf den Modellausgang bzw. auf die Gütefunktion (Sensitivität) und die anschließende vergleichende Betrachtung der Ergebnisse, um die Parameterrelevanz festzustellen.

### 5.1 Sensitivitätsanalyse zur Systembetrachtung

Um das generische Fahrzeugmodell zu optimieren (s. Kapitel 6), muss festgestellt werden, wie stark der Einfluss der Modellparameter auf das Fahrverhalten und somit auf das Simulationsergebnis ist. Dafür wird die Sensitivitätsanalyse (SA), oft auch als Empfindlichkeitsanalyse bezeichnet, verwendet. Aufgrund der Modellkomplexität und der Größe des Parameterraums stellt die SA ein effektives Werkzeug dar, um den relevanten Parameterraum einzugrenzen und das Modellverhalten besser zu verstehen.

Generell wird mit der SA der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgrößen (Übertragungsverhalten) eines Systems untersucht. In Bezug auf die Fahrdynamiksimulation wird geprüft, welche Modellparameter den relevanteren Einfluss auf das Fahrverhalten haben.

Das Ergebnis der SA ist ein möglichst reduzierter Parametersatz um

- den Optimierungsumfang einzugrenzen,
- eine sinnvolle Startparameterauswahl einzurichten und
- den Parameterwertebereich zu begrenzen.

Mit diesem reduzierten Parametersatz soll ein ähnlich gutes Optimierungsergebnis erzielt werden wie bei der Verwendung des vollen Parametersatzes.

Zudem wird untersucht, welche Parameter die Sensitivität der fahrdynamischen Größen (z. B. EG, GV, WG), die mit Hilfe der in Abschnitt 2.3 vorgestellten Manöver erstellt werden, beeinflussen.

Sind die Zusammenhänge zwischen variierten Parametern und den errechneten fahrdynamischen Größen bekannt, kann dies bei der Erstellung neuer und bei der Verbesserung bestehender Fahrzeugmodelle helfen.

#### 5.1.1 Methoden der Sensitivitätsanalyse

Nach Saltelli (2008) kann die SA in lokale und globale Methoden (oft auch als singuläre und parametrische SA bezeichnet) unterteilt werden.

Bei der lokalen SA wird der quantitative Einfluss eines einzelnen Modellparameters auf den betrachteten Modellausgang (Ausgangsgröße) untersucht. Mathematisch entspricht dies der partiellen Differentiation der Ausgangsgröße nach den einzelnen Parametern (s. Gl. (5.1)). Damit wird die Sensitivität eines einzelnen Parameters auf das Simulationsergebnis beschrieben. Ein Vorteil der lokalen SA ist, dass Modelle mit sehr vielen Modellparametern untersucht werden können, da immer nur ein einziger Parameter variiert wird. Ein Nachteil der lokalen SA ist, dass Effekte unterschiedlicher Kombinationen von Parametermengen nicht untersucht und die Sensitivität für nur einen Parameterwert (im entsprechenden Arbeitspunkt) bestimmt werden. Dadurch ist der tatsächliche Verlauf der Sensitivität über einen bestimmten Parameterwertebereich unbekannt. Diese Vorgehensweise eignet sich daher besonders für lineare Modelle, bei denen diese Form der Sensitivität konstant bleibt.

Im Unterschied zur lokalen Methode steht in der globalen SA der qualitative Einfluss eines Parametersatzes auf den Modellausgang im Fokus. Bei der globalen Methode, z. B. nach Morris (1991), wird jeder Parameter entsprechend seines Wertebereichs variiert, während gleichzeitig auch die restlichen Parameter verändert werden können. Der Vorteil der globalen SA besteht darin, nichtlineare Modelle zu untersuchen, weil die Sensitivität für einen größeren Parameterwertebereich bestimmt werden kann. Zudem ist es möglich, die Robustheit oder die Risikobewertung von einem Zustandsbeobachter bezüglich Parameterunsicherheiten (Parameterkorrelation) zu analysieren. Der Nachteil der globalen SA ist die aufwendige Berechnung, die bei einer hohen Anzahl von Kombination und Variation der Modellparametersätze entsteht. Ist z. B.  $n$  die Parameteranzahl und  $m$  die Anzahl der Variationen, müssen  $O(n^m)$  Auswertungen vorgenommen werden. Eine detaillierte Übersicht der globalen SA und Anwendungsbeispiele finden sich in Saltelli (2008).

Obwohl die globale SA für die Untersuchung von nichtlinearen Modellen geeignet ist, würde sie bei der Anwendung auf das generische Zweispurmodell, das eine hohe Modellkomplexität, eine hohe Parameteranzahl und einen großen Parameterwertebereich aufweist, einen erheblichen Mehraufwand erzeugen. Da das Ziel der SA darin besteht, die Parameter zu bestimmen, die den größten Einfluss auf den Modellausgang haben, ist dieser Mehraufwand an dieser Stelle nicht gerechtfertigt. In der vorliegenden Arbeit wird daher die lokale SA verwendet, jedoch mit einer Erweiterung für nichtlineare Modelle. Dabei wird der Verlauf der Sensitivität (Gradient) über einen größeren Parameterwertebereich (Intervall) bestimmt. Mit dieser erweiterten Methode lässt sich plausibel feststellen, welche Parameter den größten Beitrag zur Streuung des Ergebnisses der Gütefunktion haben und wie ihre Wertebereiche zu wählen sind. Mit dieser Information wird anschließend die Optimierung durchgeführt.

### 5.1.2 Vorgehensweise der erweiterten lokalen Sensitivitätsanalyse

Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Parametersensitivität  $S$  ist in Abb. 5.1 dargestellt. Dabei wird zunächst mit dem Fahrzeugmodell ein spezifisches Manöver simuliert (s. Abschnitt 2.3) und die Ausgangsgröße  $y_{ai}$  aufgezeichnet, die im Weiteren als Referenzausgangsgröße  $\mathbf{y}_{ai,ref}$  bezeichnet ist. Die initialen Parameterwerte hierfür werden von dem Kompaktklassen-Durchschnittsmodell aus Kapitel 4 übernommen. Im nächsten Schritt wird systematisch ein Parameter pro Simulation in einem bestimmten Wertebereich variiert und die entsprechende Ausgangsgröße  $\mathbf{y}_{aj, sim}$  mit der Referenzausgangsgröße  $\mathbf{y}_{aj, ref}$  verglichen, um die Sensitivität  $S_{ji}$  zu bestimmen. Die Vorgehensweise wird anschließend mit anderen Manövern wiederholt.

Im Prinzip entspricht diese Vorgehensweise einer partiellen Ableitung der Ausgangsgröße  $y_{aj}$  (z. B. EG, GV) nach dem Parameter  $x_{pi}$  (z. B.  $m_v, l_v, l_h$ )

$$S_{ji} = \frac{\partial y_{aj}}{\partial x_{pi}}. \quad (5.1)$$

Der jeweilige Parameterwert wird nun um  $\pm 30\%$  des initialen Wertes geändert. Mit dem geänderten Wert wird ein entsprechendes Manöver (vgl. Abschnitt 2.3) simuliert und die Ausgangsgröße berechnet  $y_{aj, sim}(\pm 30x_{pi})$  (z. B. EG, GV, vgl. Abschnitt 2.2). Danach wird der nächste Parameter variiert und das Manöver erneut durchfahren.

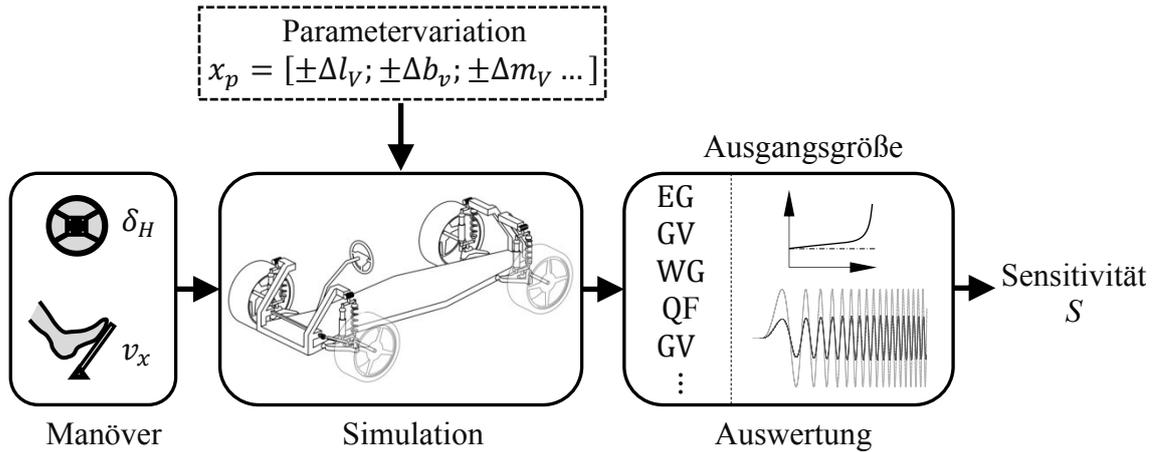


Abb. 5.1: Ablauf der Sensitivitätsanalyse

Abb. 5.2 zeigt die Streuung der Gierverstärkung in Abhängigkeit der Variation von  $\pm 30\%$  der Modellparameter des nichtlinearen Einspurmodells (NLESM) für das Fahrmanöver stationäre Kreisfahrt (Abschnitt 2.3.1). Bei der Variation bestimmter Parameter fällt die Streuung der Gierverstärkung deutlich aus (Parameter sind sensitiver) und das Manöver kann zum Teil nicht mehr stabil durchfahren werden. Ergo haben diese Parameter einen großen Einfluss auf das Simulationsergebnis. Solche Parameter sind, unter Berücksichtigung des Wertebereichs, für anschließende Optimierungsaufgaben wichtig.

Um die Sensitivität der einzelnen Parameter kompakt darzustellen, wird zunächst der Mittelwert der relativen Abweichung (MRA) zwischen dem ursprünglichen Modellausgang  $y_{ai, ref}$  und dem durch Parametervariation entstandenen Modellausgang  $y_{ai, sim}$  zu

$$\varepsilon_{n_j}(x_p) = \frac{y_{aj, sim}(x_p) - y_{aj, ref}(x_p)}{y_{aj, ref}(x_p)} \quad (5.2)$$

berechnet. Der Index  $j$  steht als Platzhalter für fahrdynamische Größen (z. B. EG, GV, WG ect.). Um diese Abweichung übersichtlich in einem Netzdiagramm darstellen zu können (s. Abb. 5.3), wird der Nullwert der MRA durch

$$\varepsilon_{n_j}(x_p) = 1 + \frac{y_{aj, sim}(x_p) - y_{aj, ref}(x_p)}{y_{aj, ref}(x_p)} \quad (5.3)$$

auf 1 verschoben. Der normierte Mittelwert der relativen Abweichung (NMRA) hat somit bei sehr geringer Abweichung einen Wert  $\varepsilon_{n_j} \approx 1$ . Wird durch Parametervariation die Modellausgangsgröße  $y_{ai, sim}$  größer, ist der Wert der NMRA  $\varepsilon_{n_j} > 1$ , wird sie kleiner,

verringert sich der entsprechende Wert der NMRA  $\varepsilon_{n_j} < 1$ . Jeder Parameterwert wird also mit  $\pm 30\%$  variiert, die NMRA des Modellausgangs in ein Netzdiagramm eingetragen und die einzelnen Werte verbunden. In Abb. 5.3 sind die NMRA für die charakteristischen Größen Eigenlenkgradient (EG) und Gierverstärkung (GV) (vgl. Abschnitt 2.2) für das Manöver stationäre Kreisfahrt bezüglich ausgewählter Parameter des nichtlinearen Einspurmodells dargestellt. Die Parameter, für die die Punkte auf dem Einheitskreis liegen, weisen eine geringe Sensitivität für dieses Manöver bezüglich der entsprechenden fahrdynamischen Ausgangsgröße auf.

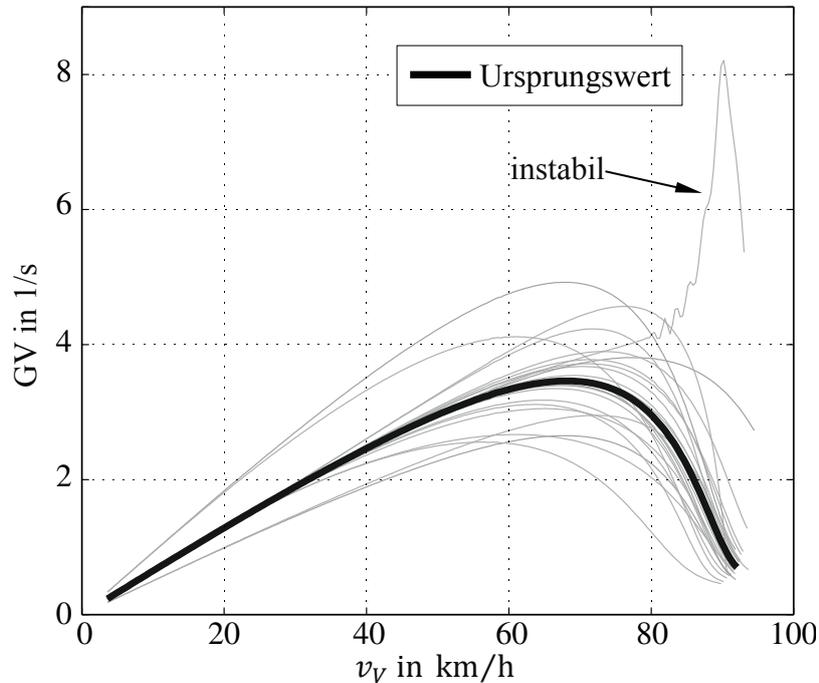


Abb. 5.2: Streuung der Gierverstärkung bei der Modellparametervariation des nichtlinearen Einspurmodells (NLESM) im Fahrmanöver stationäre Kreisfahrt

Aus Abb. 5.3 geht hervor, dass die Lenkübersetzung  $i_L$  einen großen Einfluss auf den EG und die GV hat. Weiterhin ist zu erkennen, dass die Reifenparameter in Querrichtung ( $\mu_{R,y_v}$ ,  $\mu_{R,y_h}$ ,  $B_{R,y_v}$ ,  $B_{R,y_h}$ ,  $C_{R,y_v}$  und  $C_{R,y_h}$ ) und die Schwerpunktlage in Längsrichtung ( $l$  und  $l_v$ ) im Vergleich zu den anderen Parametern eine größere Sensitivität aufweisen.

Der Verlauf der Parametersensitivität über den Parameterwertebereich ist bei nichtlinearen Modellen nicht konstant. Deshalb wird die lokale SA erweitert, indem der Verlauf der Parametersensitivität für ein Werteintervall bestimmt wird. Die Parameter werden in einem Werteintervall von  $\pm 30\%$  an äquidistanten Stützstellen  $\pm \Delta x_{pi}$  variiert (Parametervariation) und der Einfluss auf die Ausgangsgröße ermittelt. An diesen Stützstellen wird der MRA  $\varepsilon_j$  bestimmt und in ein Diagramm eingezeichnet. In Abb. 5.4 ist der Gradient der MRA  $\varepsilon_{GV}$  der Parameter des NLESM der GV im Intervall  $\pm 30\%$  über äquidistanten Stützstellen von  $\Delta 5\%$  dargestellt. Hier ist der nichtlineare Charakter der Sensitivitätsverläufe einzelner Parameter sichtbar. Die Abweichung ändert sich mit zunehmendem bzw. abnehmendem Parameterwert unproportional (z. B.  $i_L$  und  $\mu_{R,y_v}$ ). Somit lässt sich feststellen, ob bestimmte Parameter an den Grenzen ihres Wertebereichs angekommen sind und dies entsprechend für die Optimierung berücksichtigt werden muss.

Im folgenden Abschnitt 5.2 wird die Sensitivität des generischen Zweispurmodells für ausgewählte Manöver erstellt.

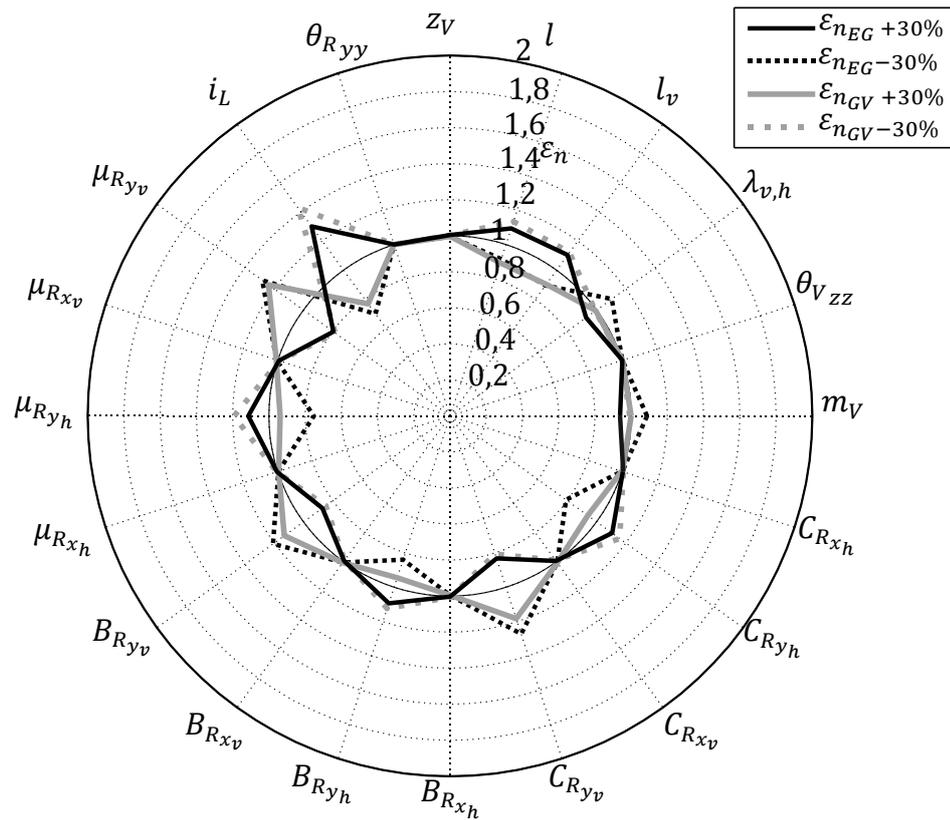


Abb. 5.3: Netzdiagramm ausgewählter Parameter des nichtlinearen Einspurmodells (NLESM) für den Eigenlenkgradient (EG) und die Gierverstärkung (GV) beim Fahrmanöver stationäre Kreisfahrt

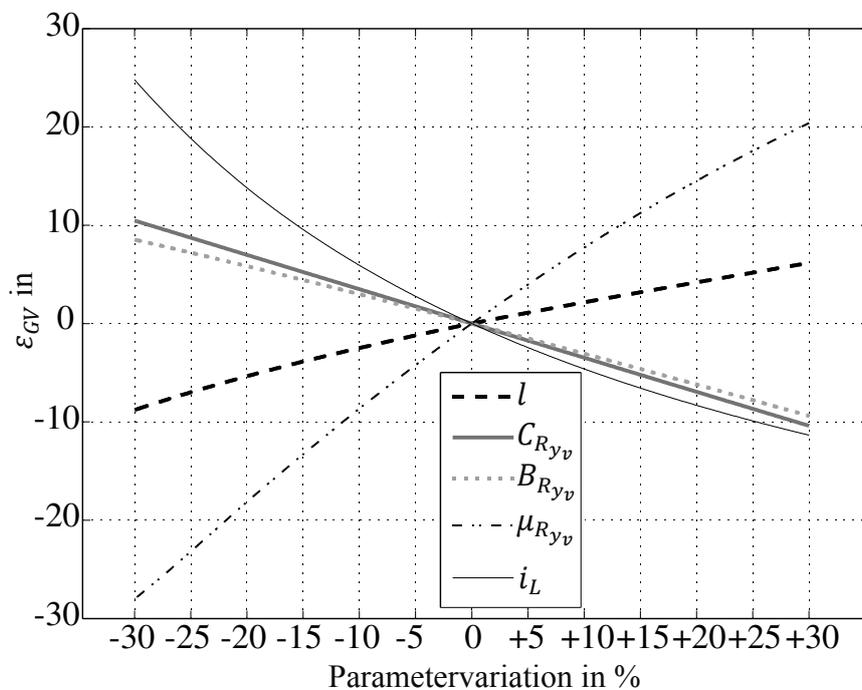


Abb. 5.4: Gradient der Sensitivität ausgewählter Parameter für die Gierverstärkung (GV) beim Manöver stationäre Kreisfahrt

## 5.2 Sensitivitätsanalyse am generischen Zweispurmodell

Die SA wird in diesem Abschnitt zur Analyse des generischen Zweispurmodells aus Abschnitt 3.5 verwendet. Wie vorher beschrieben, soll festgestellt werden, welche Parameter des Zweispurmodells eine hohe Sensitivität aufweisen und damit den meisten Einfluss auf das entsprechende Manöverergebnis haben.

### 5.2.1 Parameter des generischen Zweispurmodells

Bei der verwendeten Radaufhängungskinetik handelt es sich um eine Schräglenkerradaufhängung (s. Abschnitt 3.5), welche als Prinzipskizze in Abb. 5.5 dargestellt ist.  ${}^v r_{y_{A_v}}$  und  ${}^v r_{y_{A_h}}$  sind die Abstände der Fahrzeuglängsachse zur Querlenkerachse (Punkte  $A_1$  und  $A_2$ ) vorne und hinten. Bei der Modellierung sind die Drehachsen der Querlenker und der Lenkung frei wählbar. Diese Achsen werden hier durch die Winkelparameter der Schräglenkerachsen vorne ( $\beta_{Sv}$  und  $\gamma_{Sv}$ ) und hinten ( $\beta_{Sh}$  und  $\gamma_{Sh}$ ) und der Lenkachse vorne ( $\tau_{Lv}$  und  $\sigma_{Lv}$ ) beschrieben. Beispielsweise wird der Einheitsvektor der Drehachse des Querlenkers vorne zu

$$\mathbf{u}_{S_1} = \frac{[\cos \beta_{S_1} \quad -\sin \beta_{S_1} \quad \sin \gamma_{S_1}]^T}{\|[\cos \beta_{S_1} \quad -\sin \beta_{S_1} \quad \sin \gamma_{S_1}]\|} \quad (5.4)$$

und der Einheitsvektor der Drehachse des Lenkvektors zu

$$\mathbf{u}_{L_1} = \frac{[-\sin \tau_{S_1} \quad -\sin \sigma_{S_1} \quad \cos \tau_{S_1}]^T}{\|[-\sin \tau_{S_1} \quad -\sin \sigma_{S_1} \quad \cos \tau_{S_1}]\|} \quad (5.5)$$

bestimmt. Durch die Modellierung der Achskinetik ist es möglich, den Einfluss von Spur- und Sturzänderungen auf die Fahrdynamik des Modells zu analysieren.

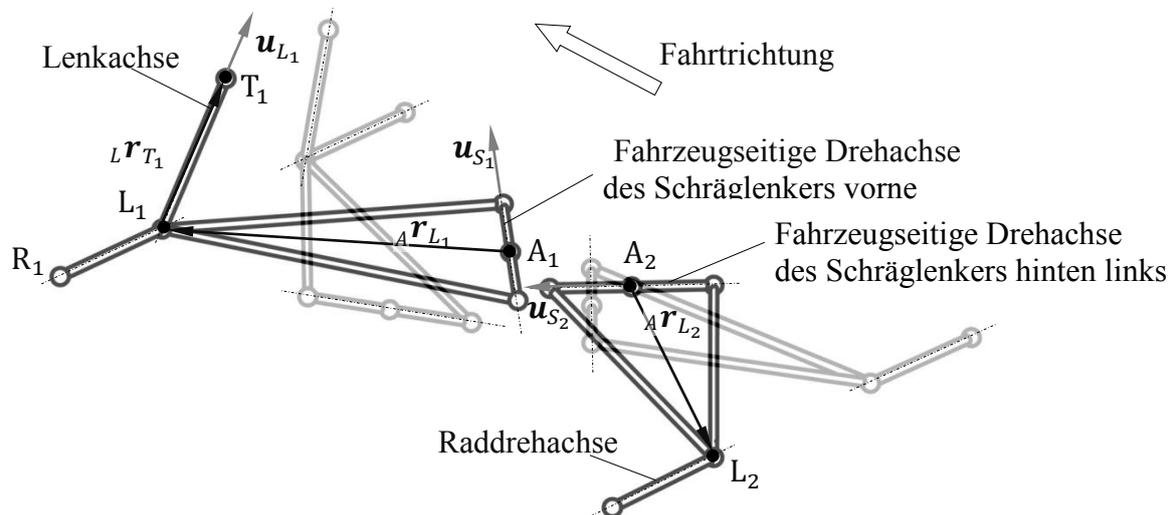


Abb. 5.5: Prinzipskizze der Schräglenkerradaufhängung des Zweispurmodells

Insgesamt werden 43 Parameter in Kombination mit den Manövern stationäre Kreisfahrt, Frequenzgang und Lenkwinkelsprung untersucht, um festzustellen, welche der Parameter ausschlaggebend für die Fahrdynamik sind (Tabelle 5.1).

Tabelle 5.1: Parameter des Zweispurmodells für die Sensitivitätsanalyse

Bezeichnung	Beschreibung	Bezeichnung	Beschreibung
$i_L$	Lenkübersetzung	$\mu_{R_{y_h}}$	Formparameter Reifenlängskraftkurve hinten
$m_V$	Fahrzeugmasse	$B_{R_{y_v}}$	Steifigkeitsfaktor Reifenquerkraftkurve vorn
$\theta_{V_{xx}}, \theta_{V_{yy}}, \theta_{V_{zz}}$	Fahrzeugträgheitstensor um die Hauptachsen	$B_{R_{y_h}}$	Steifigkeitsfaktor Reifenquerkraftkurve hinten
$l_V$	Radstand	$C_{R_{y_v}}$	Formfaktor Reifenquerkraftkurve vorn
$b_V$	Spurweite	$C_{R_{y_h}}$	Formfaktor Reifenquerkraftkurve hinten
$\lambda_{v,h}$	Längenverhältnis vorne/hinten	$e_{R_z}$	Radlast-Degressionsparameter
$z_V$	Schwerpunkthöhe	$\sigma_{R_{y_v}}$	Reifeneinlauflänge in Querrichtung vorne
$\theta_{T_{xx}}, \theta_{T_{yy}}, \theta_{T_{zz}}$	Radträgerträgheitstensor um die Hauptachsen	$\sigma_{R_{y_h}}$	Reifeneinlauflänge in Querrichtung hinten
$\theta_{R_{xx}}, \theta_{R_{yy}}, \theta_{R_{zz}}$	Radträgheitsmoment um die Hauptachsen	$d_{R_{y_v}}$	Reifeneinlaufdämpfung in Querrichtung vorne
$c_{V_v}$	Federsteifigkeit vorne	$d_{R_{y_h}}$	Reifeneinlaufdämpfung in Querrichtung hinten
$c_{V_h}$	Federsteifigkeit hinten	$v^r_{y_{A_v}}$	Querabstand zum Anlenkpunkt A der Schräglenkerachse vorne
$d_{V_v}$	Dämpferkonstante vorne	$v^r_{y_{A_h}}$	Querabstand des Anlenkpunkts A der Schräglenkerachse hinten
$d_{V_h}$	Dämpferkonstante hinten	$\beta_{S_v}$	Schräglenkervektoranteil x/y vorne
$c_R$	Reifenfedersteifigkeit	$\gamma_{S_v}$	Schräglenkervektoranteil z vorne
$c_{St_v}$	Stabilisatorsteifigkeit vorne	$\beta_{S_h}$	Schräglenkervektoranteil x/y hinten
$c_{St_h}$	Stabilisatorsteifigkeit hinten	$\gamma_{S_h}$	Schräglenkervektoranteil z hinten
$b_{St}$	Stabilisatorhebellänge	$\tau_{L_v}$	Lenkachsenvektoranteil x/y vorne (entspricht dem Nachlaufwinkel)
$l_{St}$	Stabilisatorlänge	$\sigma_{L_v}$	Lenkachsenvektoranteil z vorne (entspricht dem Spreizungswinkel)
$\mu_{R_{y_v}}$	Formparameter Reifenlängskraftkurve vorn		

### 5.2.2 Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse

Die Sensitivität der Modellparameter des generischen Zweispurmodells wird im Folgenden anhand der charakteristischen Fahrdynamikmanöver stationäre Kreisfahrt, Frequenzgang und Lenkwinkelsprung bestimmt. Anschließend werden die sensitivsten Parameter anhand der vorher beschriebenen Auswertungsmethoden (Streuung, Netzdiagramm und Sensitivitätsgradient) benannt und ein Fazit gegeben.

### SA mit stationärer Kreisfahrt

Mit der Simulation der stationären Kreisfahrt werden der EG, die GV und der Wankwinkelgradient (WG) des generischen Zweispurmodells bestimmt (s. Abschnitt 2.2.1 und 2.3.1). Abb. 5.6 zeigt die parameterabhängige Streuung des EG. Es ist zu erkennen, dass die Streuung mit höheren Querbeschleunigungen zunimmt. Die maximal erreichten Querbeschleunigungen liegen bei den Werten von 6,5 bis über 8 m/s<sup>2</sup>.

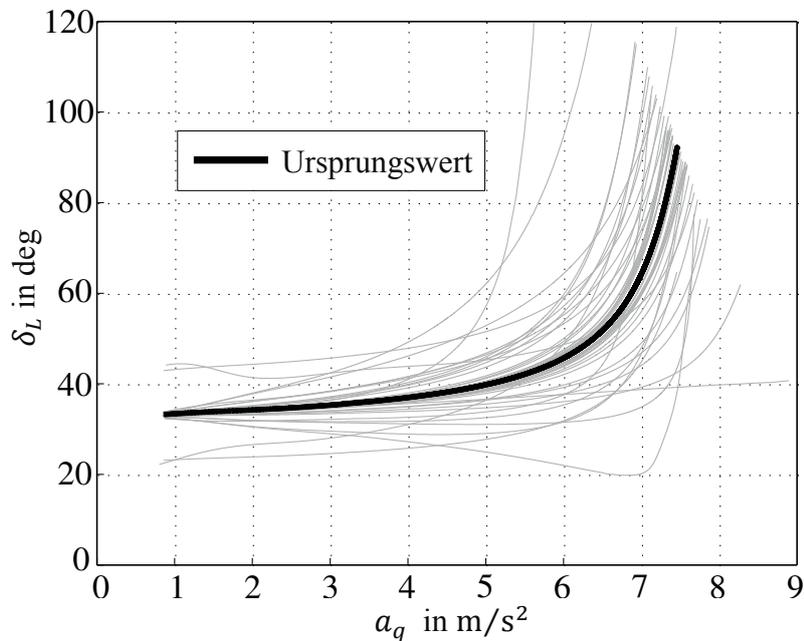


Abb. 5.6: Streuung des Eigenlenkgradienten (EG) bei Variation der Zweispurmodellparameter um  $\pm 30\%$

In Abb. 5.7 ist die Streuung der GV deutlich zu erkennen. Ebenfalls ist ersichtlich, dass die Höhe und die zugehörige Fahrzeuggeschwindigkeit des GV-Maximums variieren.

Die Streuung des WG, dargestellt in Abb. 5.8, nimmt proportional mit der Querbeschleunigung zu. Dies bedeutet, dass der Wankwinkel hin zu höheren Querbeschleunigungen annähernd linear zunimmt.

Der Einfluss der einzelnen um  $\pm 30\%$  variierten Parameter auf die fahrdynamischen Größen wird kompakt in dem Netzdiagramm durch die NMRA  $\varepsilon_n$  in Abb. 5.9 dargestellt. Es ist erkennbar, welche Parameter in diesem Manöver die charakteristischen Größen EG, GV und WG beeinflussen. Die deutlich vom Einheitskreis abweichenden Parameter sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst dargestellt.

In Abb. 5.10 bis Abb. 5.12 ist der MRA  $\varepsilon$  der charakteristischen Fahrdynamikengrößen EG, GV und WG über der Parametervariation dargestellt. Die Parameterwerte werden von  $-30\%$  bis  $+30\%$  in  $5\%$ -Schritten variiert. Aus den Abbildungen geht hervor, dass der Sensitivitätsgradient einiger Parameter stark zunimmt. Steigt der Gradient deutlich an bzw. ab, bedeutet dies, dass die Wertebereichsgrenze des entsprechenden Parameters erreicht ist. Eine Erhöhung oder Verringerung des Parameterwerts würde dem Fahrzeug ein zu sehr über- bzw. untersteuerndes Fahrverhalten geben.

Aus der Sensitivitätsbewertung für den EG (Abb. 5.10) geht hervor, dass die Reifenparameter  $\mu_{R_{y_v}}$  und  $C_{R_{y_v}}$  die stationäre Kreisfahrt deutlich beeinflussen. Zudem beeinflusst

die Lenkübersetzung  $i_L$  den EG proportional. Die Trägheitsparameter (z. B.  $\theta_V$ ,  $\theta_R$ ,  $\theta_T$ ) hingegen haben bei der stationären Kreisfahrt keinen Einfluss.

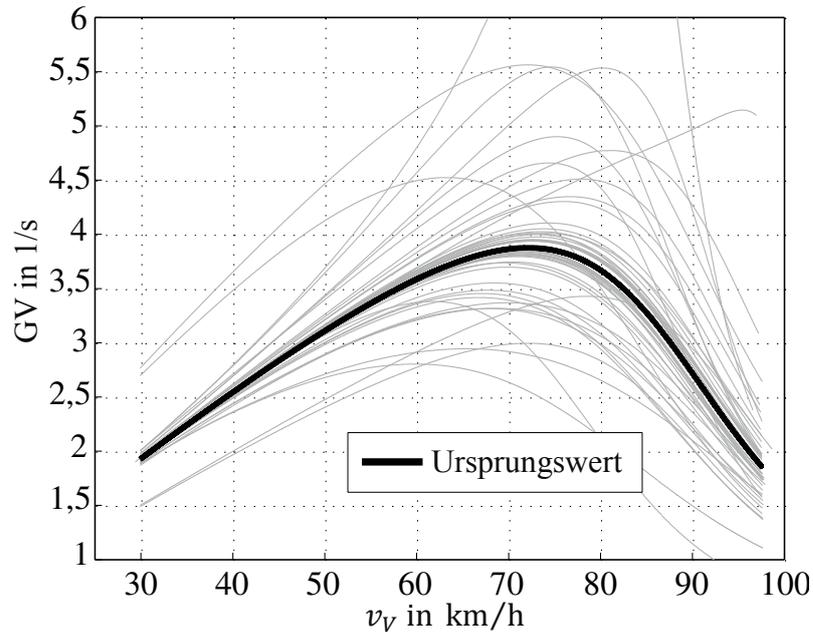


Abb. 5.7: Streuung der Gierverstärkung (GV) bei Variation der Zweispurmodellparameter um  $\pm 30\%$

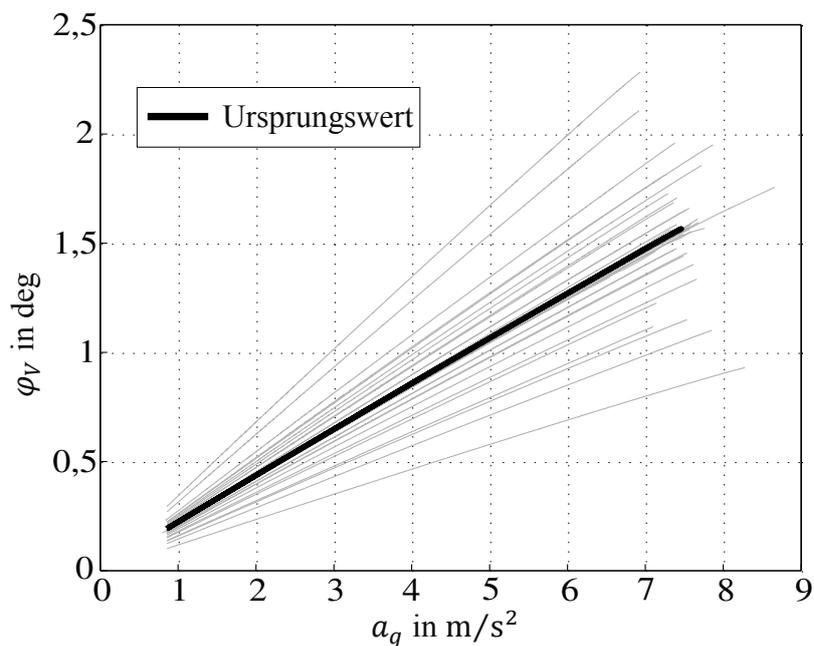


Abb. 5.8: Streuung des Wankwinkelgradienten (WG) bei Variation der Zweispurmodellparameter um  $\pm 30\%$

Durch die Variierung der Parameterwerte kann es vorkommen, dass die Manöver nicht mehr stabil durchfahren werden können. Ein solcher Fall wird aus Abb. 5.11 ersichtlich, wo bei einer Verringerung des Parameterwertes  $\mu_{R_{y_v}} < 85\%$  des ursprünglichen Wertes ein stabiles Durchfahren der stationären Kreisfahrt nicht mehr möglich wäre. Bei der Optimierung der Parameterwerte müssen die sich hieraus ergebenden Grenzwerte in die Nebenbedingung eingehen.

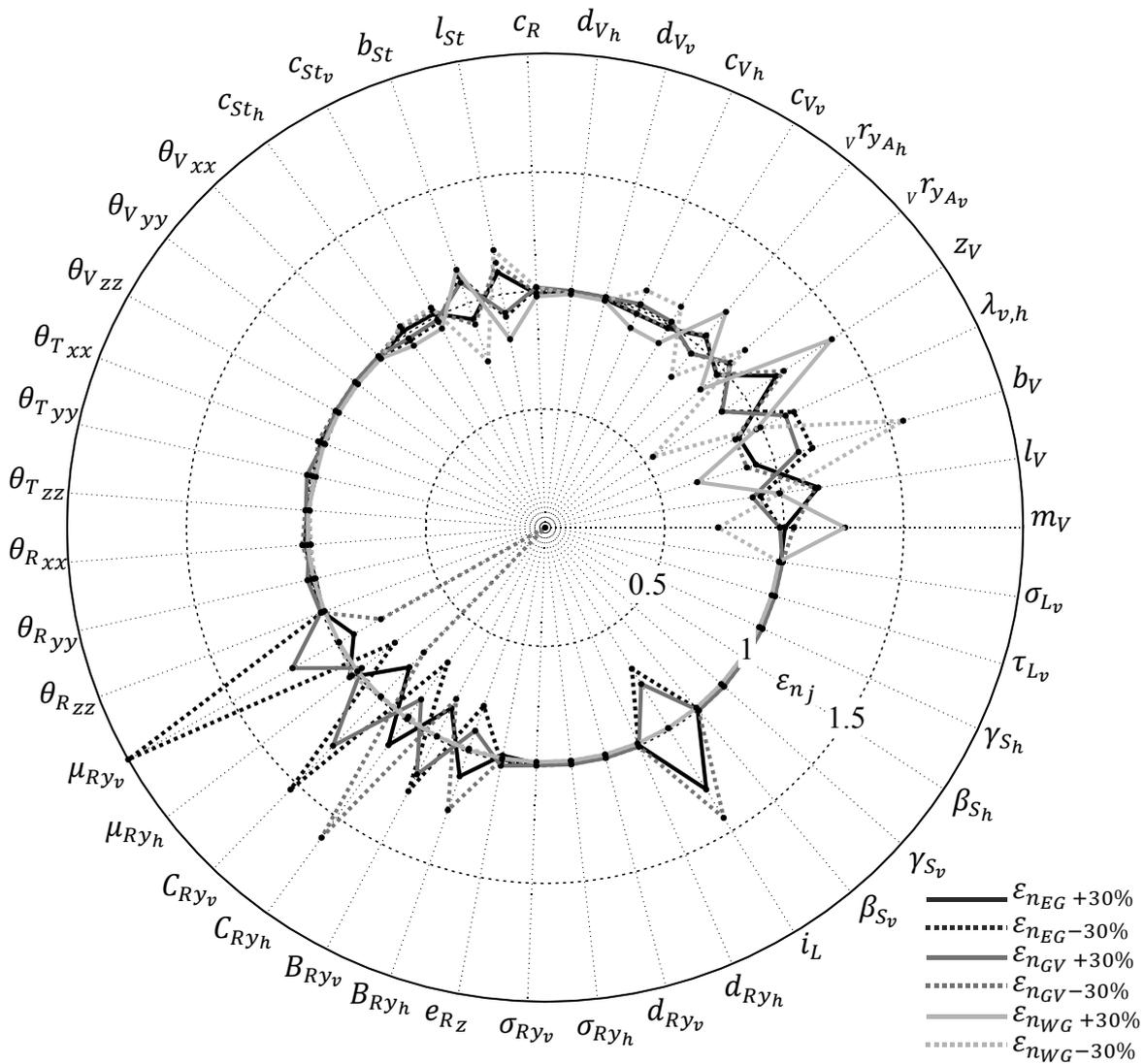


Abb. 5.9: Netzdiagramm des Manövers stat. Kreisfahrt bei Variation der Param. um  $\pm 30\%$

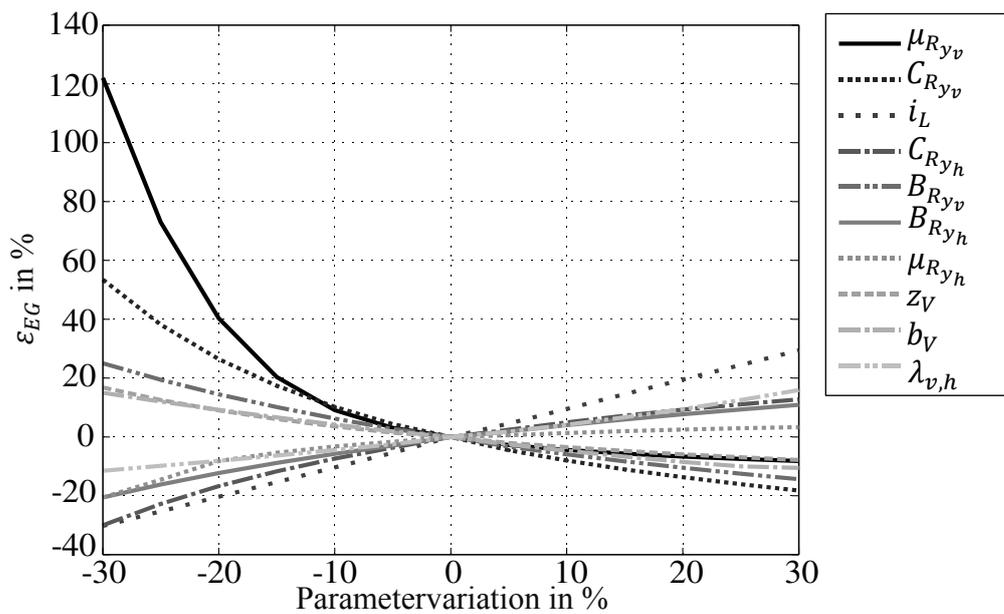


Abb. 5.10: Rel. Abweichung des EG bei Variation der zehn signifikantesten Parameter

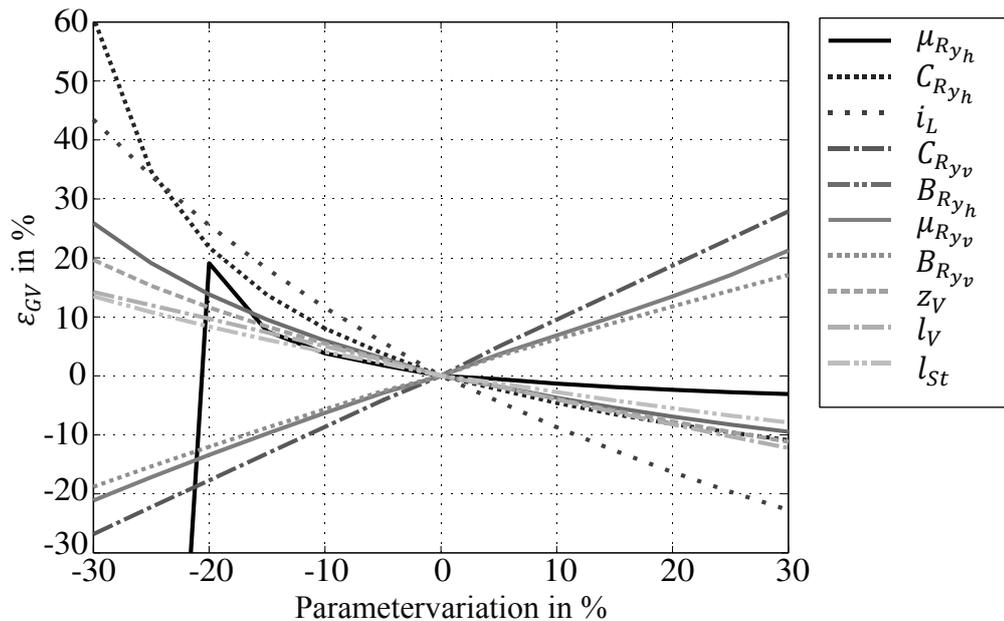


Abb. 5.11: Relative Abweichung der Gierverstärkung (GV) bei Variation für die zehn signifikantesten Parameter

Nach Abb. 5.12 haben die Spurweite  $b_V$ , die Schwerpunkthöhe  $z_V$  und die Fahrzeugmasse  $m_V$  sowie die Stabilisatorabmessungen,  $b_{St}$  und  $l_{St}$ , einen großen Einfluss auf das Wankverhalten.

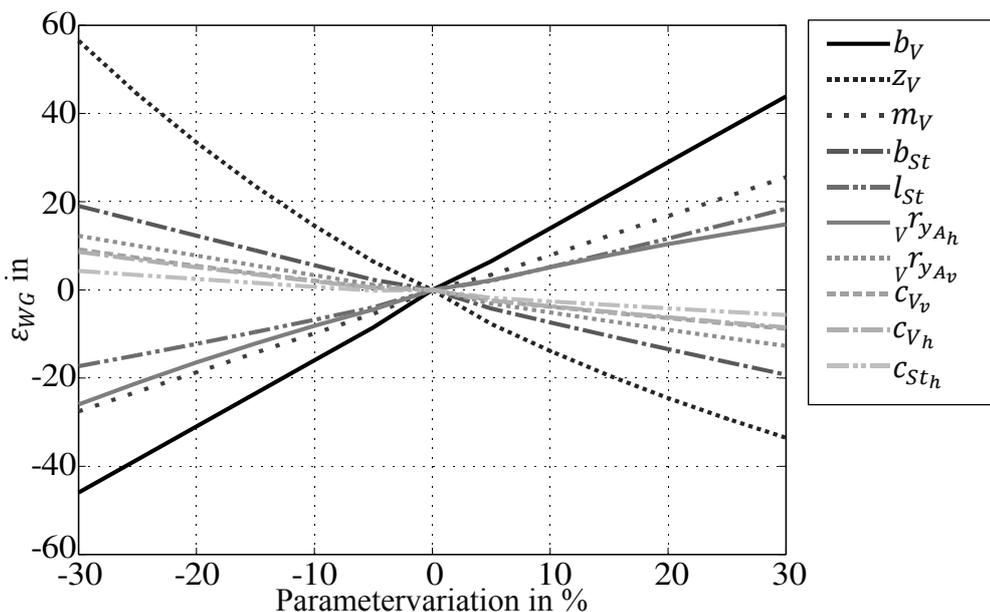


Abb. 5.12: Relative Abweichung des Wankwinkelgradienten (WG) über der Variation der zehn signifikantesten Parameter

Tabelle 5.2 fasst die in Abb. 5.10 bis Abb. 5.12 dargestellten, besonders sensitiven Parameter für die Gütefunktionen EG, GV und WG zusammen. Zudem werden die sensitiven Parameter für eine relative Abweichung des Parameteroriginalwertes von +30% und -30% unterteilt. In Tabelle 5.2 werden auch die Parameter markiert, deren Wertebereich beschränkt werden muss.

Die Untersuchungen ergeben, dass besonders die formgebenden Parameter der Reifenkraftkurven  $\mu_R$ ,  $C_R$  und  $B_R$  Einfluss auf das Simulationsergebnis bzw. den Systemausgang

haben. Auf den Wertebereich dieser Parameter ist für die nachfolgende Parameteroptimierung speziell zu achten. Für das Wankverhalten sind die geometrischen Fahrzeugabmessungen und die Fahrzeugmasse von vorrangiger Bedeutung.

Tabelle 5.2: Parameter mit hoher Sensitivität bei stationärer Kreisfahrt

Manöver	Gütefunktion	+30%	-30%
Stationäre Kreisfahrt	EG	$i_L, C_{R_{y_v}}, B_{R_{y_v}}, l_V, z_V, C_{R_{y_h}}, \lambda_{v,h},$ $B_{R_{y_h}}, \mu_{R_{y_v}}, l_{St}, b_V, b_{St},$	$\mu_{R_{y_v}}^*, C_{R_{y_v}}, i_L, C_{R_{y_h}}, B_{R_{y_v}},$ $B_{R_{y_h}}, \mu_{R_{y_h}}, b_V, \lambda_{v,h}, z_V, l_V$
	GV	$C_{R_{y_v}}, i_L, \mu_{R_{y_v}}, B_{R_{y_v}}, \lambda_{v,h}, l_V, C_{R_{y_h}},$ $z_V, b_V, B_{R_{y_h}}, b_{St}, l_{St}, v_{r_{y_{Av}}}$	$\mu_{R_{y_h}}^*, C_{R_{y_h}}^*, i_L^*, C_{R_{y_v}}, B_{R_{y_h}},$ $\mu_{R_{y_v}}, B_{R_{y_v}}, z_V, l_V, l_{St}, \lambda_{v,h}, b_V$
*Parameterbereich begrenzt	WG	$z_V, b_V, m_V, l_{St}, v_{r_{y_{Ah}}}, b_{St}, v_{r_{y_{Av}}},$ $c_{V_v}, c_{V_h}, c_{St_h}, c_{St_v}, c_R$	$b_V, z_V, m_V, b_{St}, l_{St},$ $v_{r_{y_{Ah}}}, v_{r_{y_{Av}}}, c_{V_v}, c_{V_h}, c_{St_h}, c_{St_v}$

### SA beim Frequenzgang

Mit der Simulation des Frequenzgangs (FG) werden die Querfrequenz (QF), Gierfrequenz (GF) und Wankfrequenz (WF) des generischen Zweispurmodells bestimmt (s. Abschnitt 2.2.2 und 2.3.2). Abb. 5.13 zeigt die parameterabhängige Streuung der Amplitude und der Phase der QF. Die Streuung der Amplitude und der Phase hin zu höheren Frequenzen nimmt ab. Der Amplitudenverlauf bei 0,2 Hz besitzt Werte zwischen 1,5 und 1,3. Bei 3 Hz ist die Streuung geringer und die Amplitudenwerte bewegen sich zwischen 0,7 und 1,3. Die Phasenverläufe variieren am stärksten im Frequenzband von 0,2 bis 2 Hz.

Die Streuung der Amplitude und Phase der GF ist in Abb. 5.14 dargestellt. Durch die Änderung der Parameterwerte werden die Eigenfrequenzen der QF beeinflusst, wobei die Werte zwischen 0,7 und 1,6 Hz liegen. Die Phase streut vor allem im Frequenzband von 0,5 bis ca. 2 Hz.

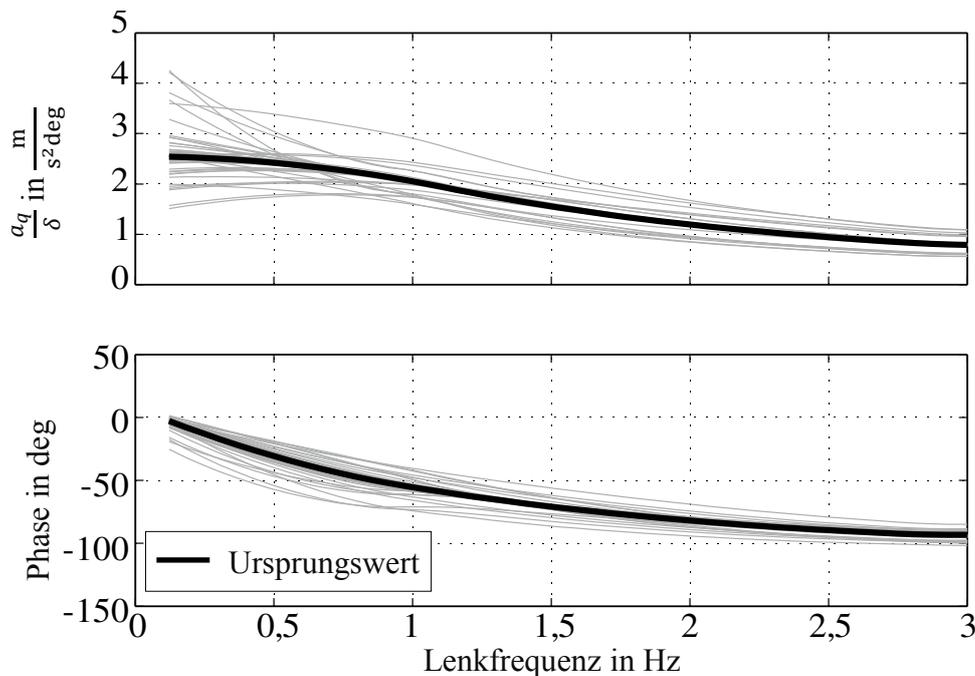


Abb. 5.13: Streuung der QF bei Variation der Zweispurmodellparameter um ±30 %

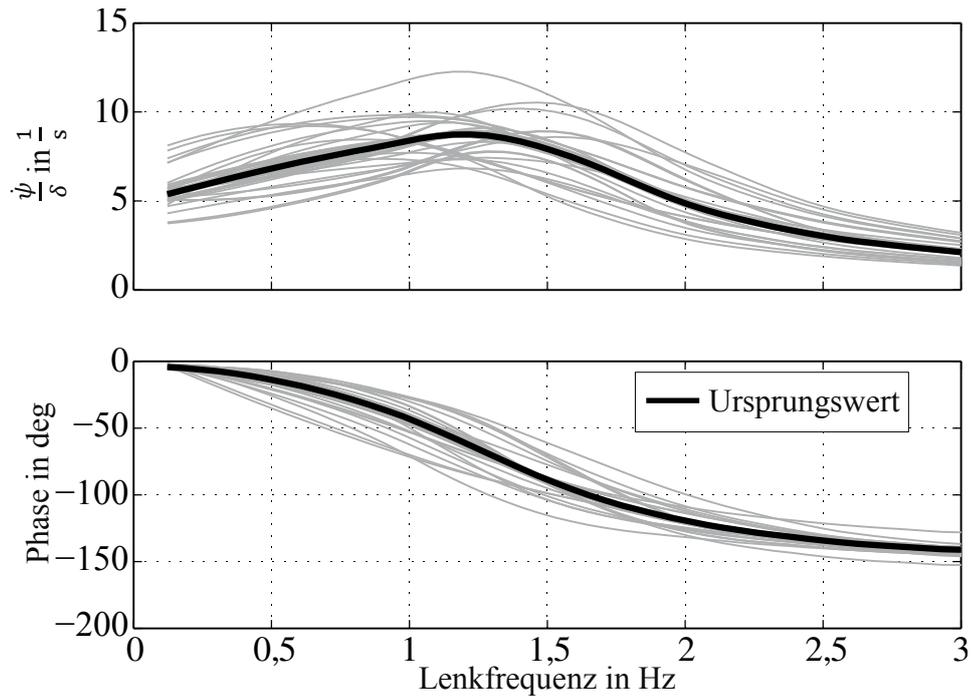


Abb. 5.14: Streuung der Gierfrequenz (GF) bei Variation der Zweispurmodellparameter um  $\pm 30\%$

In Abb. 5.15 ist die Streuung der Amplitude und der Phase der WF erkennbar. Die Amplitudenwerte bei 0,2 Hz streuen zwischen circa 0,65 und 1,5. Ab circa 2 Hz bündeln sich die Amplitudenverläufe und bei 3 Hz variieren die Werte zwischen 0,1 und 0,3. Die Phasenverläufe fallen im Bereich von 1,2 bis 2 Hz auf Werte von circa -100 bis unter -150 Grad und steigen danach wieder an.

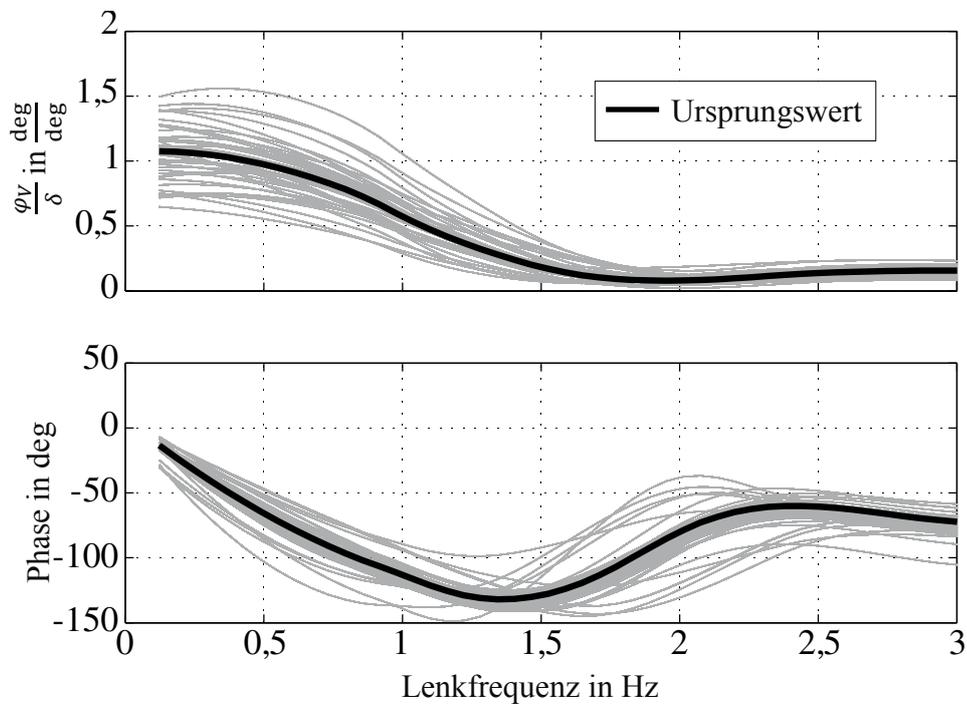


Abb. 5.15: Streuung der Wankfrequenz (WF) bei Variation der Zweispurmodellparameter um  $\pm 30\%$

Abb. 5.16 und Abb. 5.17 zeigen den Einfluss der einzelnen um  $\pm 30\%$  variierten Parametern auf die fahrdynamischen Größen im Netzdiagramm für Amplitude und Phase. Es ist unmittelbar ersichtlich, welche Parameter in diesem Manöver die charakteristischen Größen QF, GF und WF beeinflussen. Die Parameter, die deutlich vom Einheitskreis abweichen, werden in Tabelle 5.3 zusammengefasst.

Die Amplituden und die Phasen werden größtenteils von identischen Parametern beeinflusst. Im Vergleich zur stationären Kreisfahrt ist dieses Manöver ein dynamisches Manöver, womit auch Masse- und Trägheitsparameter einen erhöhten Einfluss auf die Ergebnisse der Fahrdynamik haben.

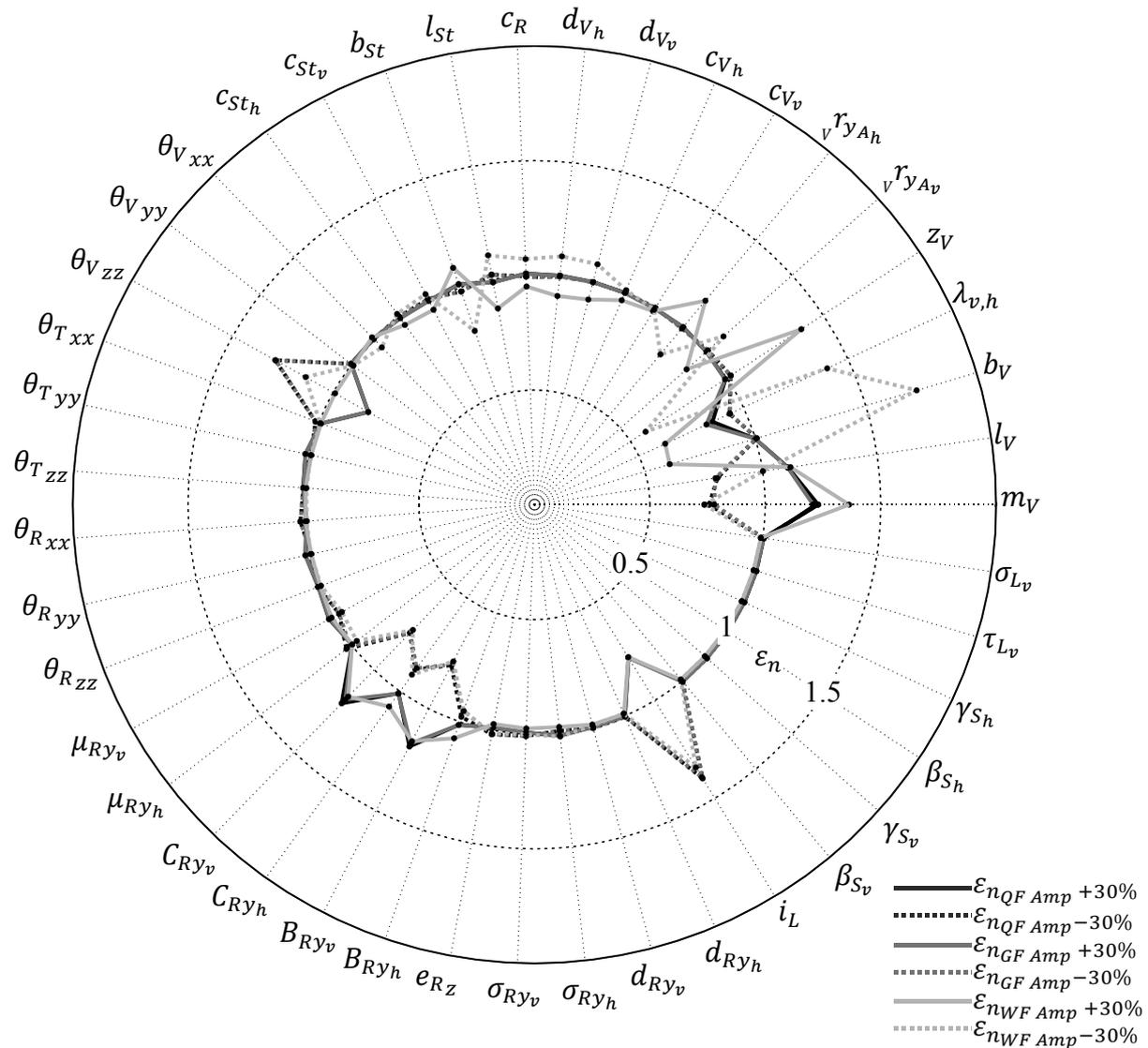


Abb. 5.16: Netzdiagramm der Amplitudenwerte des Frequenzgangs (FG) bei Variation der Modellparameter um  $\pm 30\%$

Abb. 5.18 bis Abb. 5.20 zeigen den Mittelwert der relativen Abweichung von Amplitude und Phase der charakteristischen Fahrdynamikengrößen QF, GF und WF über die Parametervariation. Die Parameterwerte werden zwischen  $-30\%$  und  $+30\%$  in  $5\%$ -Schritten variiert. Die dominierenden Sensitivitätsgradienten der Amplitude werden durch andere Parameter beeinflusst als die der Phase.

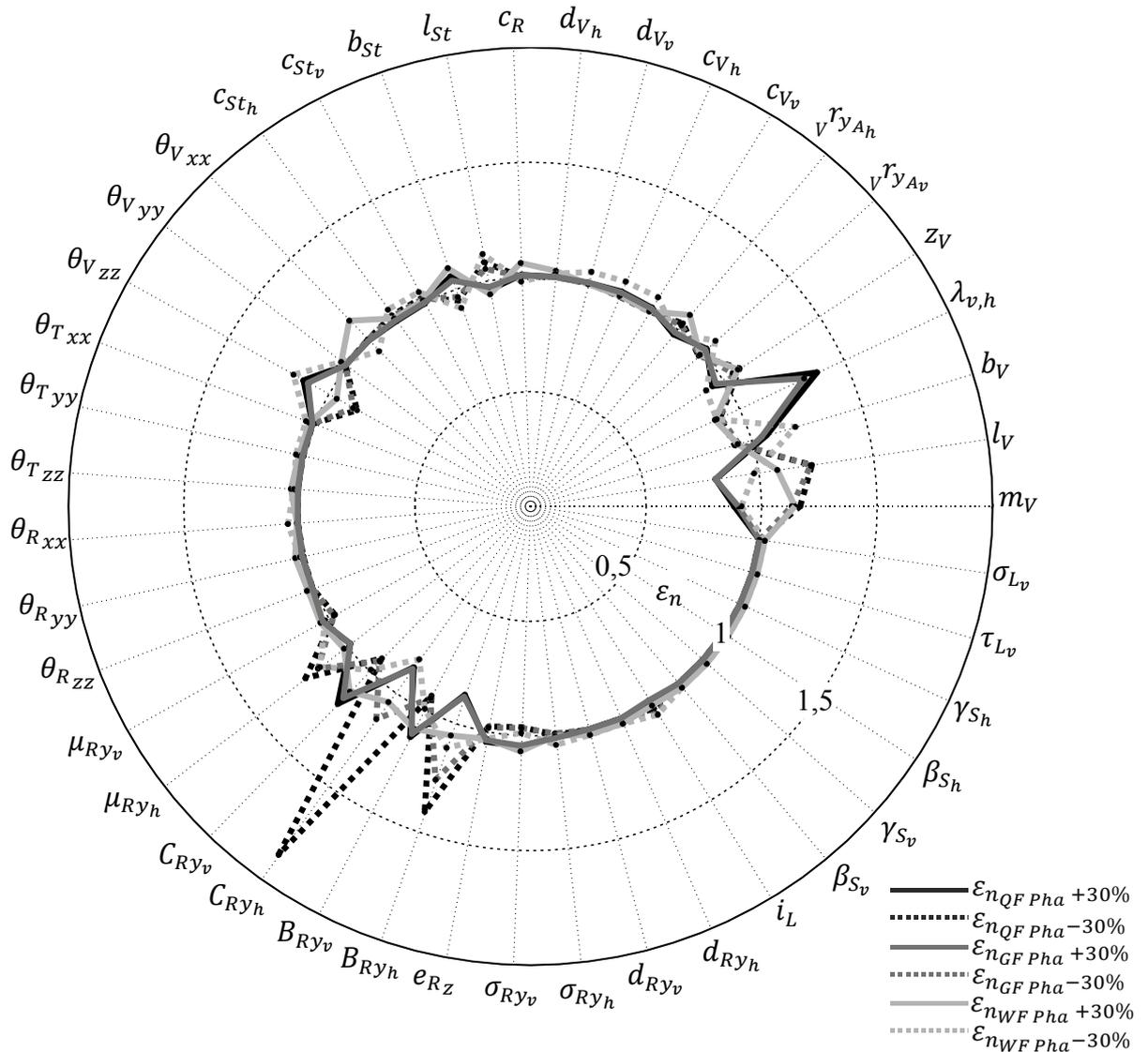


Abb. 5.17: Netzdiagramm der Phasenwerte des Frequenzgangs (FG) bei Variation der Modellparameter um  $\pm 30\%$

Aus der Sensitivitätsbewertung für die QF (s. Abb. 5.18) geht hervor, dass die Amplitude besonders durch die Lenkübersetzung, die Gierträgheit und die Fahrzeugmasse beeinflusst wird. Für die Phase sind die Reifenparameter  $\mu_{Ryv}$ ,  $C_{Ryv}$  und die Schwerpunktlage ( $l_v$  und  $l_h$ ) besonders sensitiv.

Bei der Betrachtung der GF (s. Abb. 5.19) wird deutlich, dass sich die Sensitivität der Parameter ähnlich verhält wie bei der Analyse der QF. Auch verhalten sich die Abweichungen bei Amplitude und Phase für verschiedene Parameter so unterschiedlich, dass die Parameter der Amplitude zunehmen, während die der Phase abnehmen. Die normierte mittlere Abweichung der Amplitude für den Parameter Lenkübersetzung  $i_L$  nimmt beispielsweise bei einer Parametervariation von  $-30\%$  den Wert  $\varepsilon_{GF\text{ Amplitude}} = 40\%$  an, während die Abweichung der Phase  $\varepsilon_{GF\text{ Phase}} = -8,5\%$  beträgt.

Bei der WF (Abb. 5.20) sind Fahrzeugabmessungen, Gierträgheit und Fahrzeugmasse besonders sensitiv.

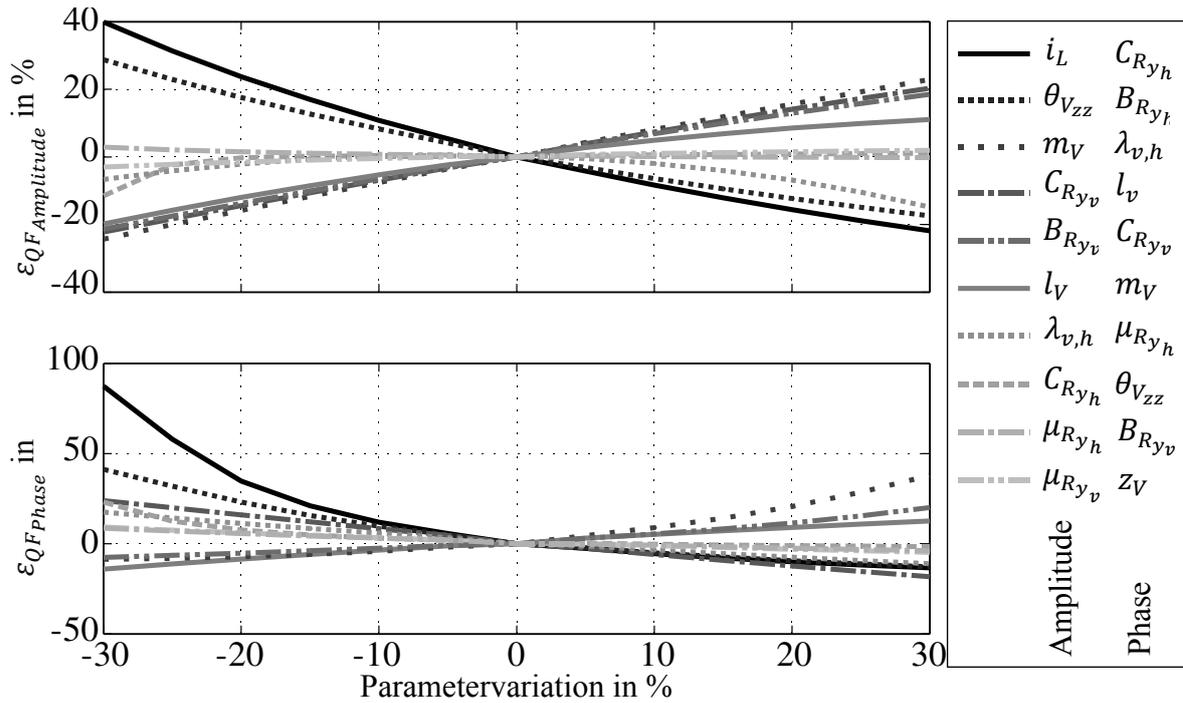


Abb. 5.18: Relative Abweichung der Querfrequenz (QF) bei Variation der zehn signifikantesten Parameter %

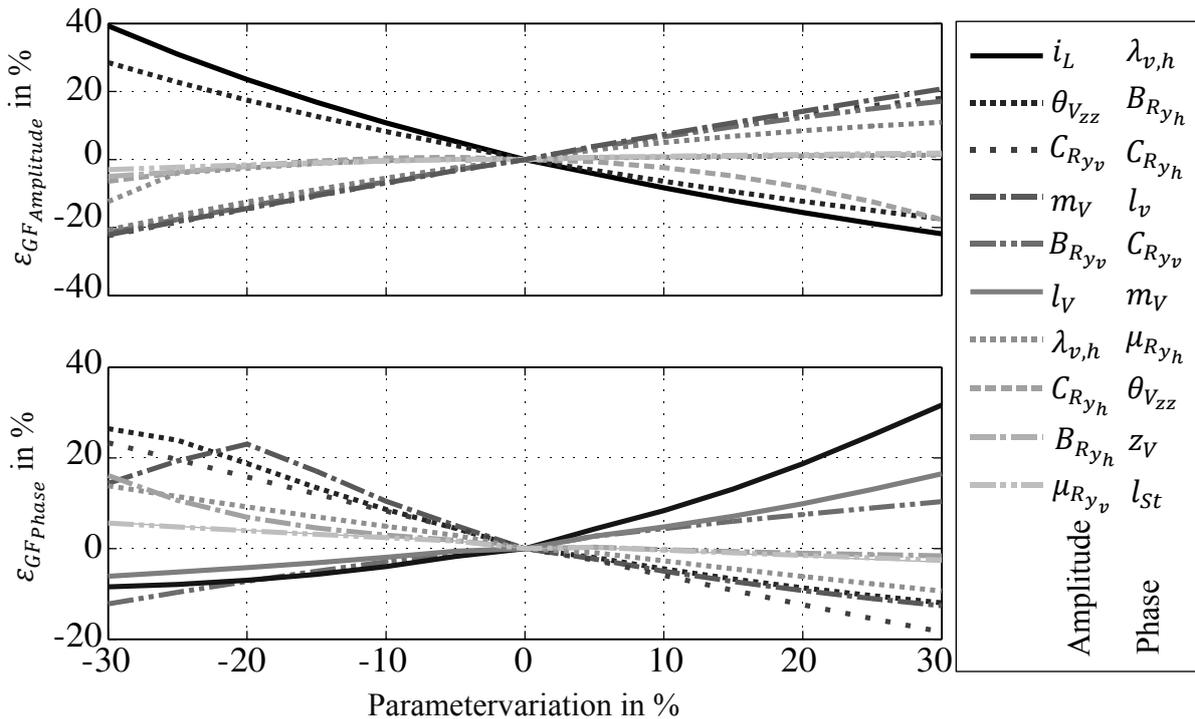


Abb. 5.19: Relative Abweichung der Gierfrequenz (GF) über der Variation für die zehn signifikantesten Parameter

Auch bei dem Manöver Frequenzgang ist die Sensitivität stark durch die Reifenparameter beeinflusst, aber auch durch die Parameter Trägheitstensor, Masse und Schwerpunktlage. Der Abstand der Schräglengerachse zur Fahrzeuglängsachse, die Aufbaufedersteifigkeiten und die Stabilisatorgrößen haben deutlichen Einfluss auf das Wankverhalten. Auffäl-

lig ist, dass die Lenkübersetzung die Phase im Vergleich zur Amplitude nur wenig beeinflusst.

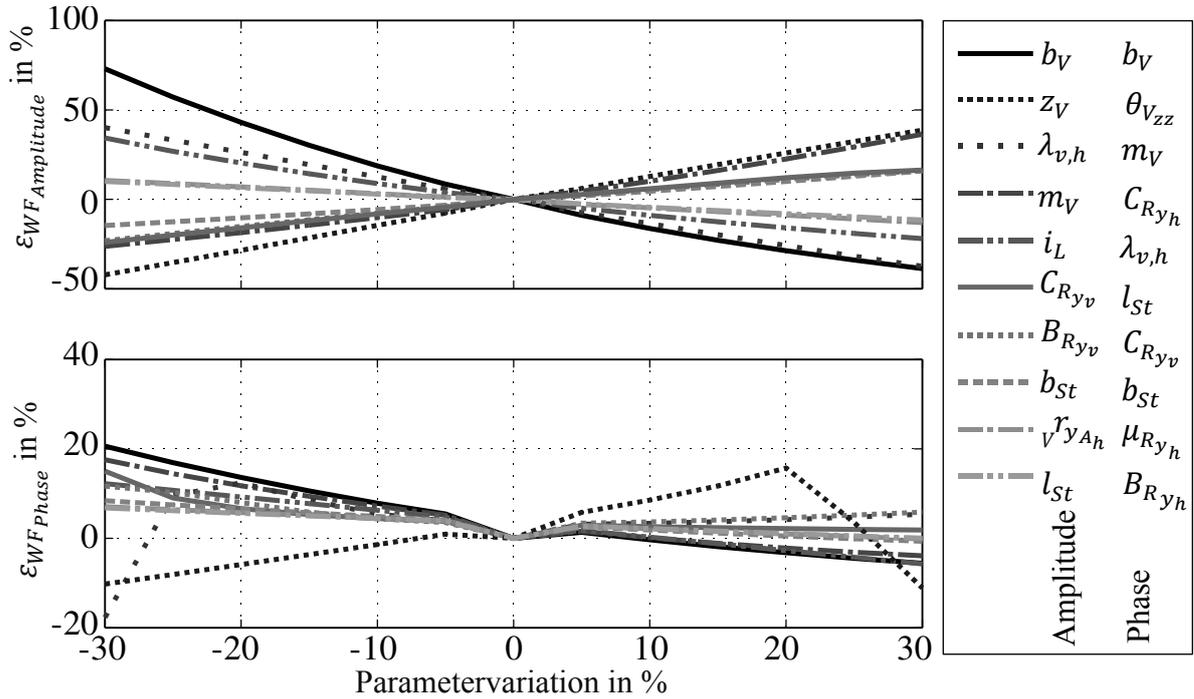


Abb. 5.20: Relative Abweichung der Wankfrequenz (WF) bei Variation der zehn signifikantesten Parameter

Die Reifenparameter dominieren besonders bei der QF und GF, während sich geometrische Größen und die Masse stärker auf das Wankverhalten auswirken.

Tabelle 5.3: Parameter mit hoher Sensitivität beim Frequenzgangmanöver

Manöver	Gütefunktion	+30%	-30%	
QF	Amplitude	$m_V, i_L, C_{R_{y_v}}, B_{R_{y_v}}, \theta_{V_{zz}}, l_V, \lambda_{v,h}, i_L, \theta_{V_{zz}}, m_V, C_{R_{y_v}}, B_{R_{y_v}}, l_V, \mu_{R_{y_v}}, b_{St}, B_{R_{y_h}}, \sigma_{R_{y_h}}$	$C_{R_{y_h}}, \lambda_{v,h}, \mu_{R_{y_h}}, \mu_{R_{y_v}}, l_{St}$	
	Phase	$\lambda_{v,h}, l_V, C_{R_{y_v}}, C_{R_{y_h}}, B_{R_{y_h}}, B_{R_{y_v}}, \theta_{V_{zz}}, m_V, b_V, \sigma_{R_{y_v}}, b_{St}$	$C_{R_{y_h}}, B_{R_{y_h}}, l_V, m_V, \mu_{R_{y_h}}, \theta_{V_{zz}}, \lambda_{v,h}, z_V, l_{St}, C_{R_{y_v}}, B_{R_{y_v}}, b_V$	
Frequenzgang	GF	Amplitude	$i_L, m_V, C_{R_{y_v}}, \theta_{V_{zz}}, B_{R_{y_v}}, \lambda_{v,h}, l_V, i_L, \theta_{V_{zz}}, C_{R_{y_v}}, m_V, B_{R_{y_v}}, l_V, \mu_{R_{y_v}}, B_{R_{y_h}}, b_{St}, \sigma_{R_{y_h}}$	$C_{R_{y_h}}, \lambda_{v,h}, B_{R_{y_h}}, \mu_{R_{y_v}}, z_V$
	Phase	$\lambda_{v,h}, l_V, C_{R_{y_v}}, C_{R_{y_h}}, B_{R_{y_h}}, B_{R_{y_v}}, \theta_{V_{zz}}, m_V, b_V, \sigma_{R_{y_v}}, b_{St}$	$B_{R_{y_h}}, C_{R_{y_h}}, l_V, m_V, \mu_{R_{y_h}}, \theta_{V_{zz}}, \lambda_{v,h}, C_{R_{y_v}}, z_V, l_{St}, i_L, B_{R_{y_v}}$	
WF	Amplitude	$b_V, z_V, \lambda_{v,h}, m_V, i_L, C_{R_{y_v}}, B_{R_{y_v}}, v_{r_{y_{A_h}}}, l_{St}, v_{r_{y_{A_v}}}, l_V$	$b_V, z_V, \lambda_{v,h}, i_L, m_V, C_{R_{y_v}}, B_{R_{y_v}}, b_{St}, v_{r_{y_{A_h}}}, \theta_{V_{zz}}, l_{St}$	
	Phase	$m_V, \lambda_{v,h}, \theta_{V_{xx}}, b_{St}, l_V, B_{R_{y_v}}, z_V, v_{r_{y_{A_h}}}, \sigma_{R_{y_v}}$	$b_V, \theta_{V_{zz}}, C_{R_{y_h}}, l_{St}, \mu_{R_{y_h}}, B_{R_{y_h}}, v_{r_{y_{A_v}}}, \lambda_{v,h}, c_{V_v}, c_{V_h}$	

### SA beim Lenkwinkelsprung

Mit der Simulation des Manövers Lenkwinkelsprung werden die normierten Größen Querübergang (QU), Gierübergang (GU) und Wankübergang (WU) des generischen Zweispurmodells bestimmt (Abschnitt 2.2.2 und 2.3.3). In Abb. 5.21 bis Abb. 5.23 sind die Streuungen in den Überschwingweiten, dem Erreichen der Maxima und der stationären Endwerte der Größen QU, GU und WU deutlich zu sehen. Die Streuung der stationären Endwerte  $QU_{stat}$  der QU liegen etwa zwischen den Werten 0,72 und 1,12 Sekunden. Die Ansprechzeiten  $T_{a_q,max}$  liegen bei ungefähr 0,7 bis 1 Sekunde. Die Werte der Überschwingweiten  $U_{a_q}$  liegen etwa zwischen 0,82 und 1,45 Sekunden.

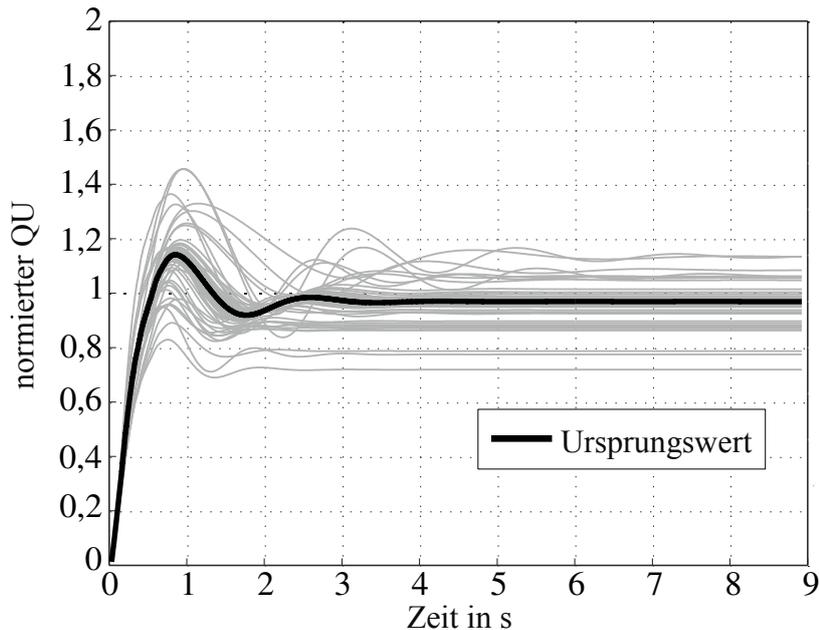


Abb. 5.21: Streuung des normierten Querübergangs ( $QU_{norm}$ ) bei Variation der Zweispurmodellparameter um  $\pm 30\%$

Die Streuung der GU (Abb. 5.22) fällt deutlicher aus ( $GU_{stat}$  zwischen ca. 0,56 und 1,3 Sekunden) als bei der QU (Abb. 5.21). Auch ist die Ansprechzeit des GU kürzer ( $T_{\dot{\psi}max}$  zwischen 0,5 und 0,85 Sekunden) als die des QU. Die Überschwingweiten  $U_{\dot{\psi}}$  der GU sind höher (Werte ca. zwischen 0,73 und 1,83 Sekunden) als die Überschwingweite  $U_{a_q}$  der QU.

Die Überschwingwerte  $U_{\varphi}$  der WU (Abb. 5.23) sind geringer (Werte zwischen ca. 0,82 und 1,57 Sekunden) als bei den GU und ähnlich zu denen der QU. Die Ansprechzeiten  $T_{\varphi,max}$  der WU sind ähnlich (Werte zwischen 0,7 und 0,92 Sekunden) zu der Ansprechzeit der QU und höher als bei den GU. Die stationären Endwerte  $WU_{stat}$  der WU streuen etwa ähnlich zu den Werten der QU (Werte zwischen ca. 0,7 und 1,2 Sekunden) und geringer als die zu den GU.

Abb. 5.24 zeigt den Einfluss der einzelnen um  $\pm 30\%$  variierten Parameter auf die fahrdynamischen Größen. Es ist unmittelbar ersichtlich, welche Parameter in diesem Manöver die charakteristischen Größen QU, GU und WU beeinflussen. Die Parameter, die deutlich vom Einheitskreis abweichen, sind in Tabelle 5.4 zusammengefasst.

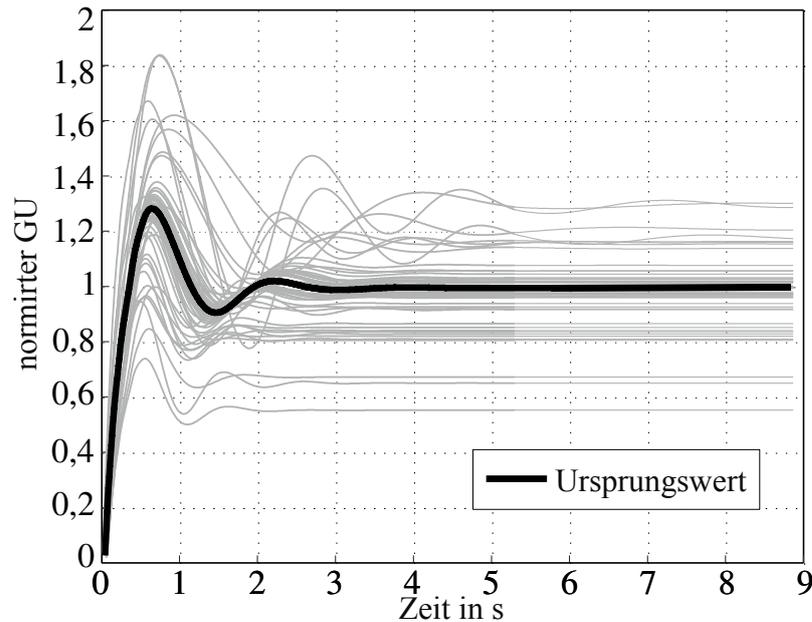


Abb. 5.22: Streuung des normierten Gierübergangs ( $GU_{\text{norm}}$ ) bei Variation der Zweispurmodellparameter um  $\pm 30\%$

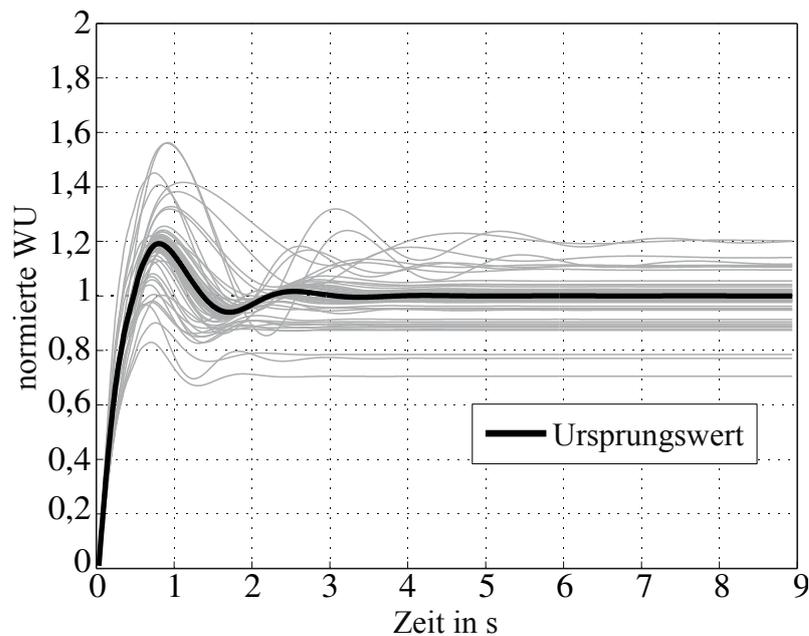


Abb. 5.23: Streuung des normierten Wankübergangs ( $WU_{\text{norm}}$ ) bei Variation der Zweispurmodellparameter um  $\pm 30\%$

Die Mittelwerte der relativen Abweichungen der charakteristischen Fahrdynamikkenngrößen QU, GU und WU über die Parametervariation werden in Abb. 5.25 bis Abb. 5.27 gezeigt. Die Parameterwerte werden von  $-30\%$  bis  $+30\%$  in  $5\%$ -Schritten variiert.

Aus der Sensitivitätsbewertung für die QU (Abb. 5.25) geht hervor, dass die Überschwingweite insbesondere durch die Reifenparameter beeinflusst wird.

Auch für das Verhalten der GU sind besonders die Reifenparameter ausschlaggebend, wie in Abb. 5.26 ersichtlich.

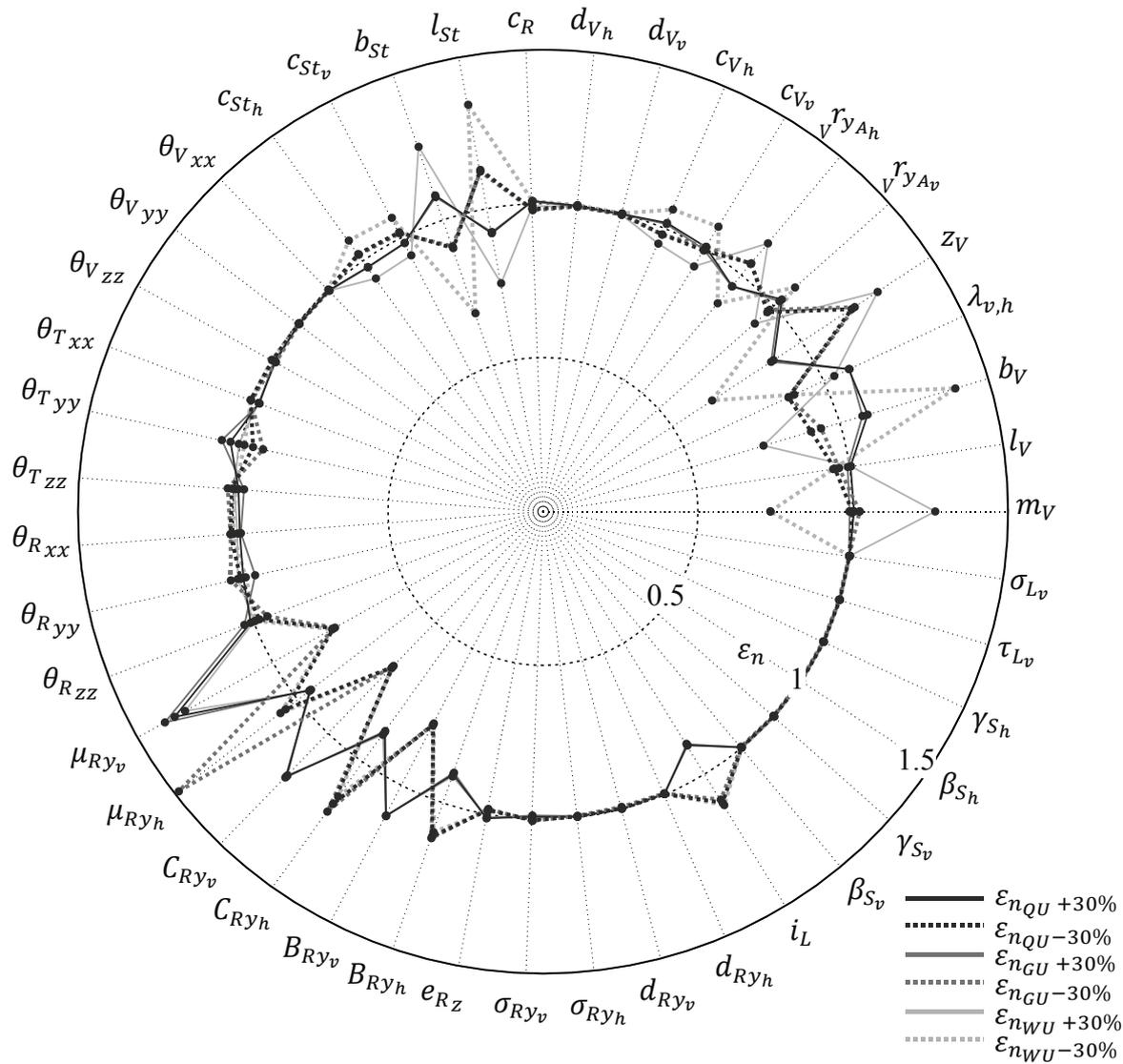


Abb. 5.24: Netzdiagramm des Lenkwinkelsprungs bei Variation der Zweispurmodellparameter um  $\pm 30\%$

Die WU (Abb. 5.27) wird in erster Linie durch die Fahrzeuggeometrie und die Stabilisatordimensionen beeinflusst. Auch hier tragen die Reifenparameter maßgeblich zum Wankverhalten bei.

Aus Tabelle 5.4 wird ersichtlich, dass die Parametersensitivität der QU und GU am deutlichsten durch die Reifenparameter beeinflusst werden, die WU am stärksten durch die Fahrzeuggeometrie und die Stabilisatordimensionen.

Zusammengefasst kann gesagt werden, dass für die Manöver stationäre Kreisfahrt, Frequenzgang und Lenkwinkelsprung besonders die Reifenparameter, die Lenkübersetzung, die Fahrzeug- und Stabilisatordimensionen, die Fahrzeugmasse und das Gierträgheitsmoment das Ergebnis beeinflussen. Außerdem muss der Wertebereich der Reifenparameter beschränkt werden, um ein Manöver sinngemäß wiederzugeben. Durch die SA hat sich ergeben, dass die Trägheitsmomente des Radträgers und der Räder, die Winkelparameter der Schräglenker- und Lenkerachsen und die Reifeneinlaufänge und -dämpfung weniger Einfluss auf das hier beschriebene Fahrverhalten haben. Diese Ergebnisse werden für die Parameteroptimierung im folgenden Kapitel 6 berücksichtigt.

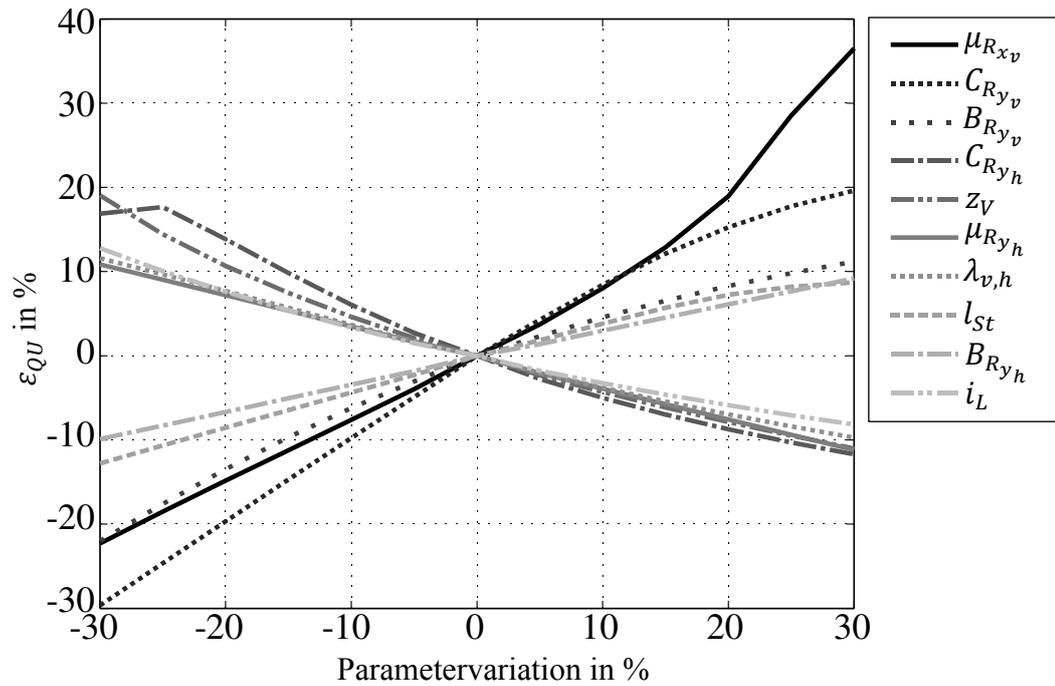


Abb. 5.25: Relative Abweichung der Querübertragung (QU) bei Variation der zehn signifikantesten Parameter

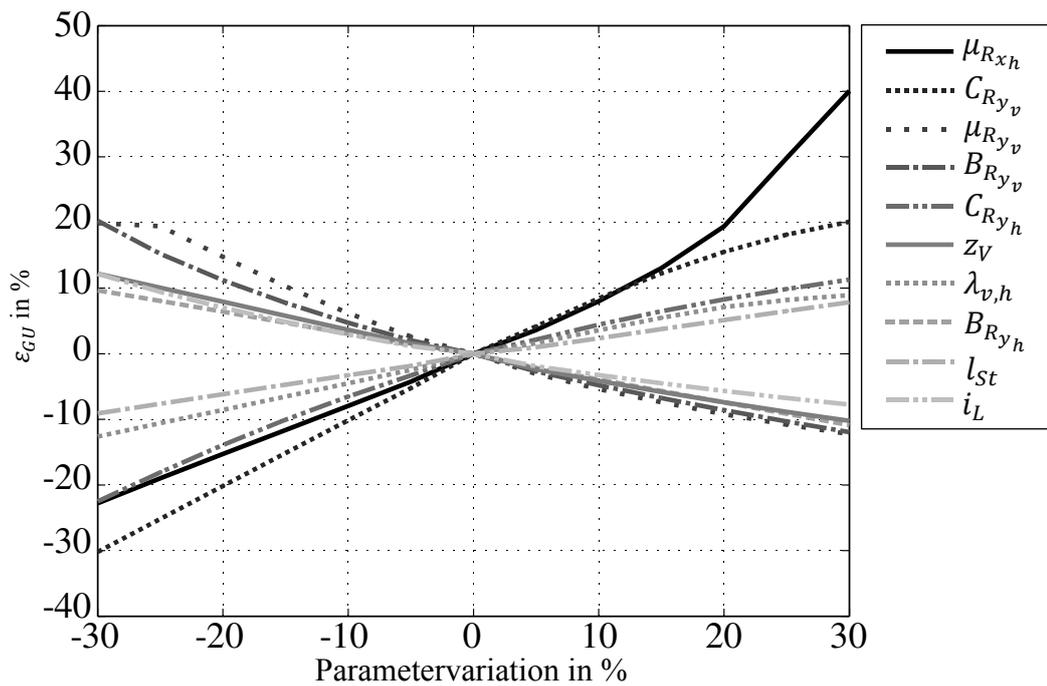


Abb. 5.26: Relative Abweichung der Gierübertragung (GU) bei Variation der zehn signifikantesten Parameter

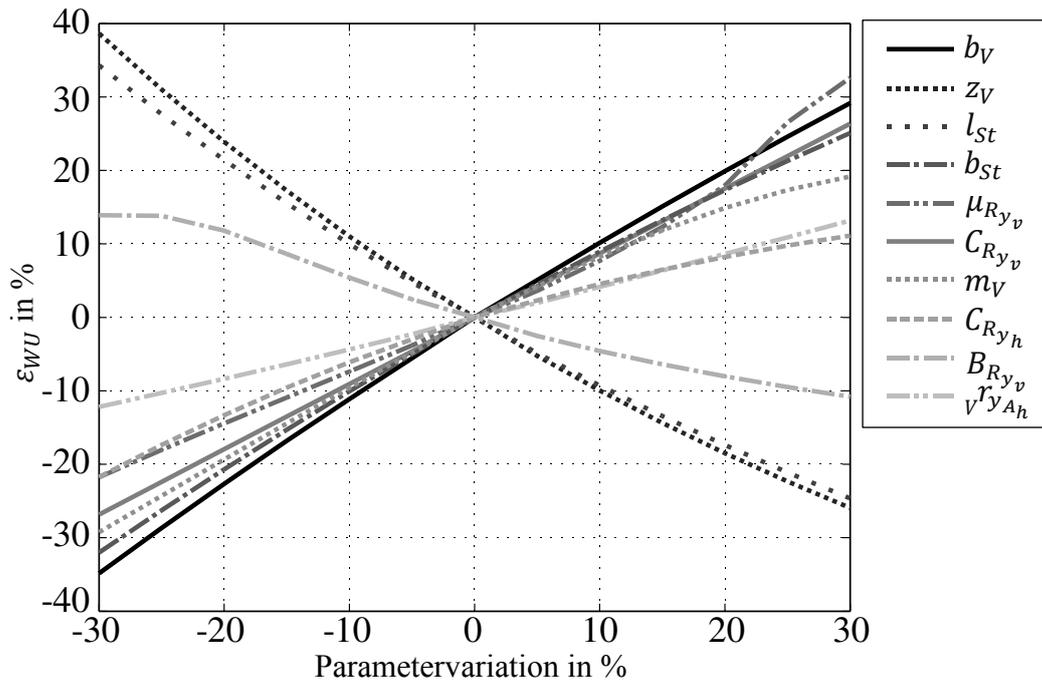


Abb. 5.27: Relative Abweichung der Wankübertragung (WU) bei Variation der zehn signifikantesten Parameter

Tabelle 5.4: Parameter mit hoher Sensitivität beim Lenkwinkelsprung

Manöver	Gütefunktion	+30%	-30%
Lenkwinkelsprung	QU	$\mu_{Ry_v}^*, C_{Ry_v}, C_{Ry_h}, B_{Ry_v}, z_V,$ $i_L, B_{Ry_h}, \lambda_{v,h}, b_V, b_{St}, \mu_{Ry_v}$	$C_{Ry_v}^*, \mu_{Ry_v}, B_{Ry_v}, C_{Ry_h}, z_V,$ $\mu_{Ry_h}, \lambda_{v,h}, l_{St}, B_{Ry_h}, i_L, b_V$
	GU	$\mu_{Ry_v}^*, C_{Ry_v}, C_{Ry_h}, z_V, B_{Ry_v},$ $i_L, B_{Ry_h}, \lambda_{v,h}, l_{St}, b_{St}, b_V$	$\mu_{Ry_h}^*, C_{Ry_v}, \mu_{Ry_v}, B_{Ry_v},$ $C_{Ry_h}, z_V, \lambda_{v,h}, B_{Ry_h}, l_{St}, i_L,$ $b_{St}$
*Parameterbereich begrenzt	WU	$z_V, \mu_{Ry_v}, b_V, m_V, l_{St}, b_{St},$ $C_{Ry_v}, v^r_{y_{Ah}}, B_{Ry_v}, C_{Ry_h}$	$b_V, z_V, l_{St}, b_{St}, C_{Ry_v}, m_V,$ $\mu_{Ry_v}, B_{Ry_v}, C_{Ry_h}, v^r_{y_{Ah}}$

### 5.2.3 Parametersätze für die Optimierung

Mit den Ergebnissen der Sensitivitätsanalyse aus dem vorherigen Abschnitt werden nun 3 Parametersätze zusammengestellt. P1 mit 43, P2 mit 30 und P3 mit 14 Parametern (Tabelle 5.5). Mit diesen Parametersätzen wird in Kapitel 6 jeweils eine Anpassung des Modellverhaltens an das Referenzverhalten mittels Optimierung durchgeführt und anschließend bewertet.

Der Satz P3 (14 Parameter, s. Tabelle 5.5) umfasst die Parameter, die das Reifenlängs- und Reifenquerkraftverhalten (s. Magic Formula-Reifenmodell, Abschnitt 2.4.4) beeinflussen: Die Fahrzeugmasse, das Längenverhältnis der Achsen zum Schwerpunkt, die Schwerpunkthöhe, den Querabstand zu den Anlenkpunkten der Schräglenkerachsen, die Trägheitsmomente um die Fahrzeuglängs- und Fahrzeughochachse und die Lenkübersetzung.

Der Satz P2 (30 Parameter, s. Tabelle 5.5) umfasst alle Parameter, die auch im Satz P3 enthalten sind. Zudem enthält er die Aufbaufedersteifigkeiten, die Aufbaudämpferkennwerte, die Stabilisatordimensionen sowie die Stabilisatorsteifigkeiten, das Trägheitsmoment um die Fahrzeugquerachse, die Trägheitstensenoren des Radträgers und des Rades, die die dynamische Reifenkraft beeinflussende Reifeneinlaufänge und Reifeneinlaufdämpfung in Querrichtung sowie den Radlast-Degressionsparameter.

Der Satz P1 (43 Parameter, s. Tabelle 5.5) umfasst alle Parameter, die im Satz P2 enthalten sind, zuzüglich derjenigen Parameter, die die Ausrichtung der Schräglenk- und Lenkachse beschreiben. In Tabelle 5.1 sind alle Parameter mit ihrer Bezeichnung und Beschreibung aufgelistet.

Tabelle 5.5: Parametersätze für die Optimierung

Parameter- satz	Parameter- anzahl	Parameterauswahl
P1	43	$m_V, l_V, b_V, \lambda_{v,h}, z_V, v_{r_{y_{A_v}}}, v_{r_{y_{A_h}}}, c_{V_v}, c_{V_h}, d_{V_v}, d_{V_h}, l_{St}, b_{St}, c_{St_v}, c_{St_h}, \theta_{V_{xx}}, \theta_{V_{yy}}, \theta_{V_{zz}}, \theta_{T_{xx}}, \theta_{T_{yy}}, \theta_{T_{zz}}, \theta_{R_{xx}}, \theta_{R_{yy}}, \theta_{R_{zz}}, \mu_{R_{y_v}}, \mu_{R_{y_h}}, C_{R_{y_v}}, C_{R_{y_h}}, B_{R_{y_v}}, B_{R_{y_h}}, e_z, \sigma_{R_{y_v}}, \sigma_{R_{y_h}}, d_{R_{y_v}}, d_{R_{y_h}}, i_L, \beta_{S_v}, \beta_{S_h}, \gamma_{S_v}, \gamma_{S_h}, \tau_{L_v}, \sigma_{L_v}$
P2	30	$m_V, l_V, b_V, \lambda_{v,h}, z_V, v_{r_{y_{A_v}}}, v_{r_{y_{A_h}}}, c_{V_v}, c_{V_h}, d_{V_v}, d_{V_h}, l_{St}, b_{St}, c_{St_v}, c_{St_h}, \theta_{V_{xx}}, \theta_{V_{yy}}, \theta_{V_{zz}}, \mu_{R_{y_v}}, \mu_{R_{y_h}}, C_{R_{y_v}}, C_{R_{y_h}}, B_{R_{y_v}}, B_{R_{y_h}}, e_{R_z}, \sigma_{R_{y_v}}, \sigma_{R_{y_h}}, d_{R_{y_v}}, d_{R_{y_h}}, i_L$
P3	14	$m_V, \lambda_{v,h}, z_V, v_{r_{y_{A_v}}}, v_{r_{y_{A_h}}}, \theta_{V_{xx}}, \theta_{V_{zz}}, \mu_{R_{y_v}}, \mu_{R_{y_h}}, C_{R_{y_v}}, C_{R_{y_h}}, B_{R_{y_v}}, B_{R_{y_h}}, i_L$



## 6 Parameteridentifikation

Ziel der Parameteridentifikation ist es, durch Bestimmung geeigneter Parameterwerte ausgewählte Fahrdynamikgrößen des generischen Fahrzeugmodells an die des repräsentativen Referenzfahrzeugs anzuleichen. Die Parameterwerte werden mithilfe eines geeigneten Optimierungsverfahrens bestimmt. In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise der Parameteridentifikation durch einen Optimierungsprozess beschrieben. Zunächst wird auf die allgemeine Optimierungsaufgabe und deren Ablauf eingegangen. Anschließend werden die verwendete Methode und die Gütefunktion vorgestellt. Mit den Ergebnissen der Parameteridentifikation (vgl. Kapitel 5) werden für ausgewählte Manöver Parameterwertoptimierungen der Modellparameter des generischen Fahrzeugmodells durchgeführt.

### 6.1 Grundlagen

In der Fahrzeugdynamik werden zur Validierung von Fahrzeugmodellen Modellparameterwerte hinsichtlich einer Gütefunktion optimiert. Der Vergleich von Referenz- und Simulationsgrößen ist der Prüfstein jedes Simulationsmodells. Die Optimierung soll das Simulationsmodell durch Bestimmung geeigneter Parameterwerte so nah wie möglich an das Referenzmodell angleichen. Wie genau das Ergebnis sein kann, ist von der Optimierungsmethode und den ausgewählten Modellparametern, aber auch vom Detaillierungsgrad des Modells abhängig.

Der in dieser Arbeit verwendete grundlegende Optimierungsablauf ist in Abb. 6.1 dargestellt. Referenzdaten für die Optimierung können durch definierte Fahrdynamikmessungen gewonnen werden (vgl. Abb. 6.1, Blöcke: Manöver, Messung, Referenzdaten). Hierzu werden, unter definierten Umgebungsbedingungen mit einem Referenzfahrzeug normierte Manöver gefahren. Das Referenzfahrzeug ist mit Sensoren ausgestattet, die die fahrdynamischen Größen messen. Diese Messergebnisse werden daraufhin aufbereitet und stehen als Referenzdaten  $y_{ai,ref}$  zur Verfügung.

Die für die Optimierung benötigten Simulationsdaten werden durch virtuelle Fahrversuche gewonnen (vgl. Abb. 6.1, Blöcke: Manöver, Regler, Simulation, Simulationsdaten). Hierzu werden die aufgezeichneten Fahrerinputs (z. B. Zeitverläufe des Lenkradwinkels und der Fahrzeuggeschwindigkeit) an einen Regler weitergeleitet. Dieser fungiert als virtueller Fahrer und fährt in der Simulation mit dem virtuellen Fahrzeug die entsprechenden Manöver nach, wodurch sich die Simulationsdaten  $y_{ai,sim}$  erzeugen lassen.

Der Optimierungsablauf erfolgt in einer Iterationsschleife (vgl. Abb. 6.1, Schleife mit den Blöcken Gütefunktionsberechnung, Parametervariation, Simulation und Simulationsdaten). Die Simulationsgrößen werden mit den Referenzgrößen verglichen, indem eine Gesamtgütefunktion  $K(x_p)$  berechnet wird. Die Gesamtgütefunktion berechnet sich aus den einzelnen Gütefunktionen  $\varepsilon_{K_i}$ , die aus den relativen mittleren Abweichungen der fahrdynamischen Größen berechnet werden (vgl. Abschnitt 6.3). Die Gesamtgütefunktion wird an die Optimierung weitergegeben, die durch systematische Variation der Parameterwerte

$x_p$  den Wert der Gesamtgütefunktion zu minimieren versucht. Es erfolgt ein iterativer Prozess, bei dem versucht wird, die Simulationsdaten an die Messdaten anzunähern.

Optimierungen sind oft rechenzeitintensiv, da die Parameterwerte iterativ identifiziert werden müssen. Deshalb ist es wichtig, die Anzahl der Parameter gering zu halten. Das gewährleistet die Parameteridentifikation in Kapitel 5. Der Erfolg der Optimierung hängt zudem wesentlich von der Gütefunktion, den Startwerten, den Optimierungsverfahren, den Abbruchkriterien und der Beschränkung durch Nebenbedingungen ab (Kobetz 2004). Diese Komponenten müssen daher alle problemspezifisch bestimmt werden.

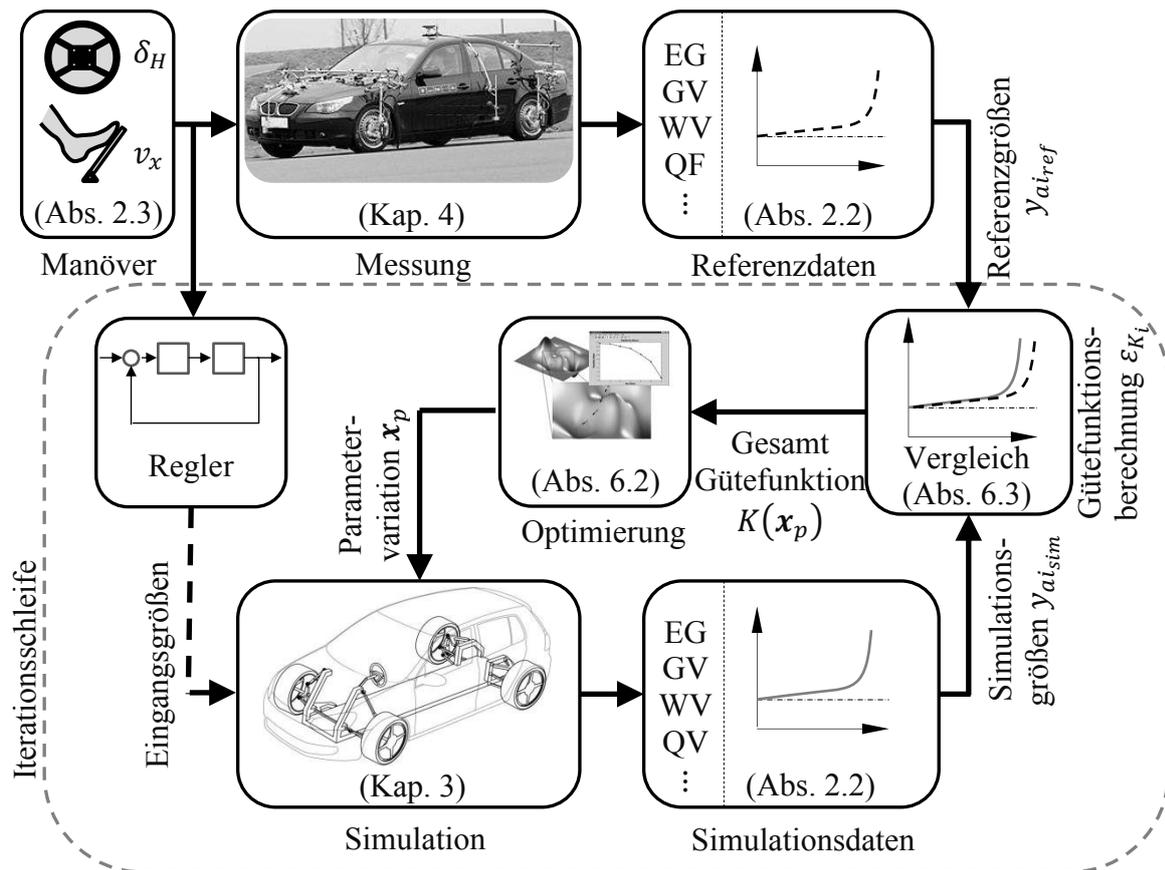


Abb. 6.1: Parameteridentifikation

## 6.2 Optimierungsverfahren

Zur Durchführung der oben beschriebenen Prozedur (Abb. 6.1) stehen verschiedene Optimierungsverfahren zur Verfügung. Diese Verfahren lassen sich mitunter in gradientenbasierte und heuristische Verfahren klassifizieren. Der Unterschied zwischen diesen Klassen ist nachfolgend kurz beschrieben.

### 6.2.1 Gradientenbasierte Verfahren

Ein gradientenbasiertes (deterministisches) Optimierungsverfahren benutzt den Gradienten, also die Ableitung der Gütefunktion, an den auszuwertenden Punkten (Parameterwerten), um das Minimum der Gütefunktion zu bestimmen. Voraussetzung bei diesem Verfahren ist die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Gütefunktion. Das Verfahren zeichnet sich durch eine hohe Effizienz aus, ist jedoch meist bei der Suche nach den Optimie-

rungswerten auf die lokalen Minima beschränkt, da der Funktionsverlauf der Gütefunktion aufgrund der Modellkomplexität nicht analytisch vorliegt. Diese Verfahren sind deterministisch, da sie ein reproduzierbares Ergebnis liefern, wenn eine Suche mit den gleichen Werten gestartet wird (Blume 2009) (Jako 2012).

Den prinzipiellen Ablauf eines gradientenbasierten Suchalgorithmus zeigt Abb. 6.2. Beginnend mit den Startwerten bzw. den zuletzt ermittelten Parameterwerten werden (unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen) die Suchrichtung und Schrittweite bestimmt, um anschließend neue Parameterwerte zu errechnen, die durch Berechnung des Gütefunktionwertes bewertet werden. Ist das Abbruchkriterium nicht erfüllt, ändert der Algorithmus die Parameterwerte in Richtung des negativen Gradienten der Gütefunktion. Die unterschiedlichen Suchverfahren unterscheiden sich in der Ermittlung der Suchrichtung und der Schrittlänge (Schwefel 1995) (Jako 2012). Ein typisches Verfahren bei der Identifikation ist das Gauß-Newton-Verfahren. Es ist für die quadratische Form der Zielfunktion (nichtlineares Least-Squares-Problem) formuliert.

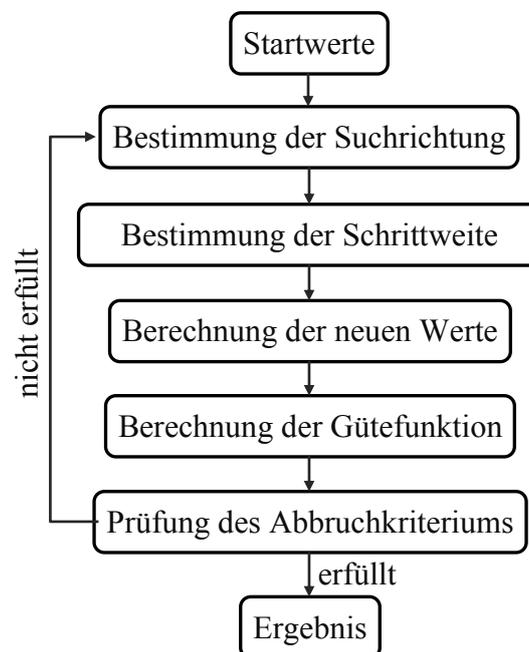


Abb. 6.2: Optimierungsablauf bei einem gradientenbasierten Suchverfahren

### 6.2.2 Heuristische Verfahren

Für ein heuristisches (stochastisches) Verfahren wird im Allgemeinen keine Anforderung an die stetige Differenzierbarkeit der Gütefunktion gestellt. Der Parameterraum wird mit unterschiedlichen Strategien stochastisch bzw. nach dem Zufallsprinzip durchforstet. Gegenüber den gradientenbasierten Verfahren ist die Chance zur approximativen Auffindung des globalen Minimums wahrscheinlicher. Heuristische Verfahren sind auch bei Problemen anwendbar, bei denen keine geschlossene Formulierung der Gütefunktion vorliegt. Im Unterschied zu gradientenbasierten liefern heuristische Verfahren bei gleichen Startwerten unterschiedliche Ergebnisse, die jedoch nah beieinander liegen können. Ein Nachteil dieser Verfahren ist, dass das Ergebnis im Vergleich zu gradientenbasierten Verfahren häufig langsamer konvergiert (Blume 2009).

Eine weitverbreitete Klasse von heuristischen Optimierungsverfahren sind die Evolutionsalgorithmen (EA). EA versuchen, die Prinzipien der natürlichen biologischen Evo-

lution nachzubilden, um neue Parameter nach den Methoden der Mutation, Rekombination und Selektion zu finden, anstatt sie analytisch zu berechnen. Entsprechend dem natürlichen Vorbild stellen sie kaum Voraussetzungen an den Suchraum. Die Gütefunktion muss weder stetig noch differenzierbar sein, es wird lediglich gefordert, dass sie so beschaffen ist, dass eine Suche in irgendeiner Weise zum Ziel führen kann (Rechenberg 1973). EA arbeiten gleichzeitig mit mehreren potentiellen Lösungen, die im Sinne der evolutionären Entwicklung der Population von Individuen entspricht. Die Suche nach den Optimierungswerten geht nicht nur von einzelnen Punkten aus, sondern von mehreren Punkten einer Population. Dadurch ist eine Parallelisierung des Optimierungsalgorithmus möglich. Die Individuen sollen im Sinne einer Gütefunktion immer bessere Individuen erzeugen, die schlussendlich zu einer optimalen Lösung führen. Es kann jedoch nicht garantiert werden, dass ein approximatives Minimum gefunden wird (Blume 2009).

Zu Beginn generiert der evolutionäre Algorithmus mit den Startwerten die Anfangspopulation (s. Abb. 6.3). Die Startwerte können vorgegeben oder nach dem Zufallsprinzip bestimmt werden. Durch die Berechnung der Gütefunktion ist die Anfangspopulation bewertet und somit die erste Generation erzeugt. Erfüllt die erste Generation das Abbruchkriterium nicht, beginnt die Erstellung einer neuen Generation. In jeder Generation werden neue Lösungswerte für die Parameter erstellt. Es folgt die Selektion. Hierbei werden die einzelnen Individuen (Parameterwerte) einer Generation nach der erreichten Güte (Gütefunktion) eingestuft und mit einem Fitnessfaktor bewertet. Anhand des besseren Fitnessfaktors werden die Eltern (Vorgänger-Individuen) bestimmt, aus denen mithilfe evolutionärer Reproduktionsmaßnahmen, wie Rekombination und Mutation (Störungen), neue Nachkommen (Individuen) erzeugt werden. Die neuen Individuen ersetzen in der Population die alten Individuen, wodurch eine neue Population entsteht, die der Ausgangspunkt für die Erstellung neuer Individuen der nächsten Generation ist. Dieser Prozess wiederholt sich so oft, bis ein definiertes Abbruchkriterium erreicht ist. Das Abbruchkriterium kann je nach Aufgabenstellung unterschiedlich formuliert sein, beispielsweise das Erreichen eines Zeit- oder Generationslimits, einer Mindestqualität oder einer vorgegebenen Anzahl von Generationen ohne weiteren Fortschritt (Polheim 2000). Dies führt zur Evolution von Populationen von Individuen, die immer besser an die jeweilige Zielsetzung angepasst werden (Holland 1975).

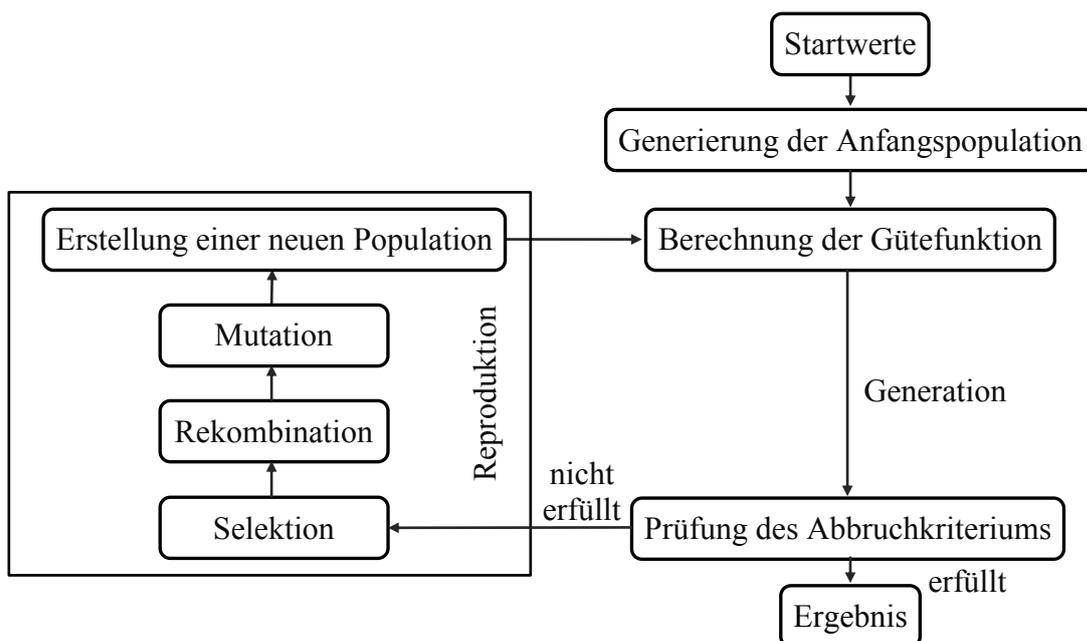


Abb. 6.3: Optimierungsablauf beim heuristischen Suchverfahren

### 6.2.3 Verwendeter Optimierungsalgorithmus

Ausgehend von den jeweiligen Eigenschaften gradientenbasierter und evolutionärer Verfahren hat sich eine Kombination aus beiden als vorteilhaft erwiesen. Das sogenannte hybride Verfahren sucht zuerst mithilfe eines heuristischen Verfahrens, zum Beispiel des EA, das Gebiet um ein globales Minimum. Hat es dieses Gebiet gefunden, wechselt es automatisch in einen gradientenbasierten Suchalgorithmus, der die zuletzt durch den GA errechneten Parameterwerte als Startwerte verwendet. Dieser konvergiert zielstrebig als das stochastische Verfahren allein.

Für die Optimierung der Modellparameter wird eine von MATLAB bereitgestellte Optimierungs-Toolbox genutzt.

### 6.3 Gütefunktion

Eine Gütefunktion (s. Gl. (5.2)) beschreibt eine bestimmte Abweichung zwischen Modell- und Systemverhalten (Simulations- und Referenzverhalten, s. Abb. 6.1). Der Wert der Gütefunktion hängt von den verwendeten Werten der Modellparameter ab, da diese das Simulationsergebnis beeinflussen. Der Optimierungsalgorithmus soll den Wert der Gütefunktionen minimieren, weshalb die verschiedenen Gütefunktionen im Sinne der kleinsten Quadrate zu einer einzelnen Gütefunktion zusammengefasst werden. Die fahrdynamischen Eigenschaften, die durch das simulierte Modell wiedergegeben werden sollen, müssen möglichst genau beschrieben werden. Um die Parameterstreuung gering zu halten, ist eine möglichst hohe Sensitivität der Gütefunktionen gegenüber Änderungen der Parameter anzustreben (vgl. Kapitel 5). Der Informationsaustausch zwischen Optimierung und Simulation beschränkt sich auf die aktuellen Werte der Parameter und der Gütefunktion, sodass sowohl das Optimierungsverfahren als auch das Modell separat verändert werden können. Für die Modellentwicklung ist diese Flexibilität günstig (Mljekov 2003).

Die Berechnung der Gütefunktion für eine Ausgangsgröße  $y_{ai}$  geschieht analog zur Berechnung der Sensitivität in Kapitel 5.1.2 (Gleichung 5.2). Zunächst wird der Mittelwert der relativen Abweichung (MRA) in Prozent zwischen dem simulierten Modell- und den Referenzgrößen  $y_{a_j, sim}$  und  $y_{a_j, ref}$  mit dem Vektor der Parameter  $\mathbf{x}_p$  berechnet zu

$$\varepsilon_{K_j} = \left\| \frac{y_{a_j, sim}(\mathbf{x}_p) - y_{a_j, ref}(\mathbf{x}_p)}{y_{a_j, ref}(\mathbf{x}_p)} \right\|. \quad (6.1)$$

Daraufhin wird das skalare Gesamtkriterium der Gütefunktion  $K$  über die Summe  $n_K$  der quadrierten Gütefunktionen  $\varepsilon_{K_j}^2$  mit einer entsprechender Gewichtung  $g_j$  berechnet zu

$$K(\mathbf{x}_p) = \sum_{j=1}^{n_K} g_j \varepsilon_{K_j}^2, \quad (6.2)$$

wobei  $n_K$  die Anzahl der betrachteten Gütefunktionen ist. Da die relativen Abweichungen in Prozent angegeben werden, ist auch die Größenordnung der Gütefunktion ähnlich groß, wodurch eine Gewichtung einfacher ist. In Gleichung (6.2) ist eine ausgewogene Festlegung der Gewichte  $g_i$  wichtig, um einen stärkeren Fokus auf entsprechend wichtigere fahrdynamische Eigenschaften zu legen.

Zusätzliche Gütefunktionen sind der quadratische Abstand zwischen den relativen Abweichungen der Amplitudenmaximalwerte (Überhöhung)  $\varepsilon_{K_{max,y}}^2$  und der horizontale Abstand zwischen den Maximalwerten  $\varepsilon_{K_{max,x}}^2$  (vgl. Abb. 6.4).

Die relative Abweichung der Amplitudenmaximalwerte wird zu

$$\varepsilon_{K_{i_{max,y}}} = 100 \cdot \left| \frac{y_{a_{max_{sim}}} - y_{a_{max_{ref}}}}{y_{a_{max_{ref}}}} \right| \quad (6.3)$$

und der horizontale Abstand zwischen den Maximalwerten zu

$$\varepsilon_{K_{i_{max,x}}} = 100 \cdot \left| \frac{x_{a_{max_{sim}}} - x_{a_{max_{ref}}}}{x_{a_{max_{ref}}}} \right| \quad (6.4)$$

berechnet.

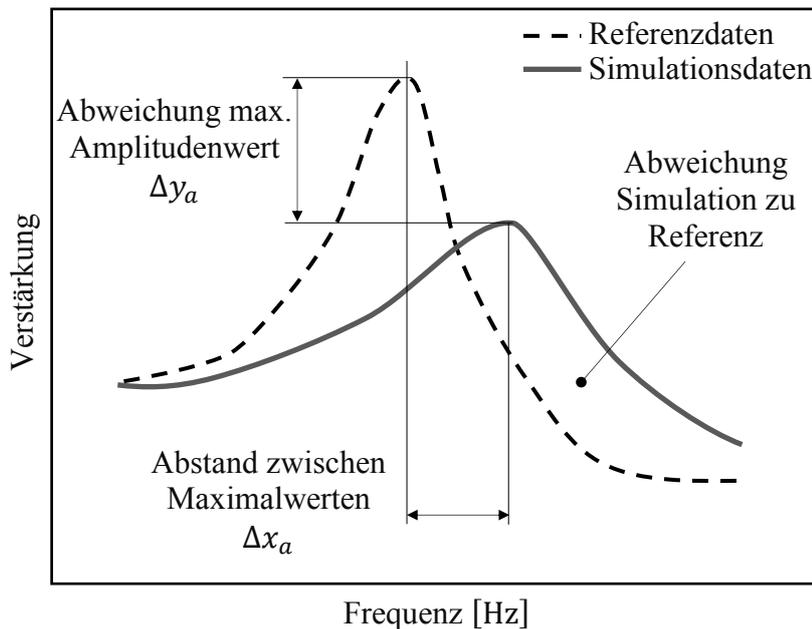


Abb. 6.4: Abweichungen der maximalen Amplitudenwerte und Abstand der Maximalwerte am Beispiel des Frequenzganges

Die Zusammensetzung der Gesamtgütefunktion der jeweilig zu identifizierenden Manöver ist nachfolgend beschrieben. Für die Formulierung der Gütefunktionen dienen die in Kapitel 2 beschriebenen Fahrdynamikgrößen, je nach Fahrmanöver sind unterschiedliche Größen notwendig.

### **Gütefunktion des Manövers stationäre Kreisfahrt**

Für die Berechnung der Gesamtgütefunktion für das Manöver stationäre Kreisfahrt werden die quadratischen Abweichungen der fahrdynamischen Größen Eigenlenkgradient (EG), Gierverstärkung (GV) und Wankwinkelgradient (WG) (s. Abschnitt 2.2.1 und 2.3.1) als Summe verwendet. Die Gesamtgütefunktion errechnet sich zu

$$K_{SK} = g_{EG} \varepsilon_{K_{EG}}^2 + g_{GV} \varepsilon_{K_{GV}}^2 + g_{WG} \varepsilon_{K_{WG}}^2 \quad (6.5)$$

Die einzelnen fahrdynamischen Größen werden dabei gleich gewichtet zu  $g_{EG} = 1$ ,  $g_{GV} = 1$  und  $g_{WG} = 1$ . Diese kombinierte Gesamtgütefunktion erfasst das für die stationäre Kreisfahrt ausschlaggebenden Fahrverhalten bestmöglich.

### **Gütefunktion des Frequenzgangmanövers**

Zur Berechnung der Gesamtgütefunktion mit dem Frequenzgangmanöver (FG) werden die Größen Gierfrequenz (GF), Quersfrequenz (QF) und Wankfrequenz (WF) (Abschnitt 2.2.2 und 2.3.2) verwendet und die quadratischen relativen Abweichungen von Amplitude und Phase zwischen Referenz und Simulation im Frequenzbereich berechnet. Eine zusätzliche Gütefunktion ist der quadratische Abstand zwischen den quadratischen relativen Abweichungen der Amplitudenmaximalwerte der Gierfrequenz  $\varepsilon_{GF_{max,y}}^2$  und des relativen Abstands zwischen diesen Frequenzmaximalwerten (Resonanzfrequenzen)  $\varepsilon_{GF_{max,x}}^2$ . Die Gesamtgütefunktion berechnet sich zu

$$K_{FG} = g_{FG_{Amp}} \left( \varepsilon_{K_{GF_{Amp}}}^2 + \varepsilon_{K_{QF_{Amp}}}^2 + \varepsilon_{K_{WF_{Amp}}}^2 \right) + g_{FG_{Pha}} \left( \varepsilon_{K_{GF_{Pha}}}^2 + \varepsilon_{K_{QF_{Pha}}}^2 + \varepsilon_{K_{WF_{Pha}}}^2 \right) + g_{GF_{max}} \left( \varepsilon_{K_{GF_{max,y}}}^2 + \varepsilon_{K_{GF_{max,x}}}^2 \right). \quad (6.6)$$

Dabei werden die Abweichung der Amplitude mit  $g_{FG_{Amp}} = 1,5$ , die Abweichung der Phasen mit  $g_{FG_{Pha}} = 0,8$  sowie die Abweichung der Amplitudenmaximalwerte der GF und des Abstands zu diesen Maximalwerten mit  $g_{GF_{max}} = 1,2$  gewichtet. Der Fokus liegt hierbei mehr auf den Amplituden- als auf den Phasengrößen, da die Amplitude auf das Fahrverhalten und die maximalen fahrdynamischen Größen einen stärkeren Einfluss hat.

### **Gütefunktion des Manövers Lenkwinkelsprung**

Die Gesamtgütefunktion für das Manöver Lenkwinkelsprung wird mit den normierten Größen Querübergang ( $QU_{norm}$ ), Gierübergang ( $GU_{norm}$ ) und Wankübergang ( $WU_{norm}$ ) berechnet (Abschnitt 2.2.3 und 2.3.3). Auch hier werden die quadratischen relativen Abweichungen zwischen diesen Größen aufsummiert und zusätzlich die quadratischen relativen Abweichungen der Überschwingweiten  $\varepsilon_{K_{iU_{max}}}^2$  und der Ansprechzeiten  $\varepsilon_{K_{iT_{max}}}^2$  der einzelnen, in diesem Fahrmanöver ausschlaggebenden Größen berücksichtigt. Die Gesamtgütefunktion für die Optimierung der Modellparameter im Manöver Lenkwinkelsprung berechnet sich zu

$$K_{LS} = g_{QU} \varepsilon_{K_{QU}}^2 + g_{GU} \varepsilon_{K_{GU}}^2 + g_{WU} \varepsilon_{K_{WU}}^2 + g_{QU_{max}} \left( \varepsilon_{K_{QU_{U_{max}}}}^2 + \varepsilon_{K_{QU_{T_{max}}}}^2 \right) + g_{GU_{max}} \left( \varepsilon_{K_{GU_{U_{max}}}}^2 + \varepsilon_{K_{GU_{T_{max}}}}^2 \right) + g_{WU_{max}} \left( \varepsilon_{K_{WU_{U_{max}}}}^2 + \varepsilon_{K_{WU_{T_{max}}}}^2 \right). \quad (6.7)$$

Die quadratischen relativen Abweichungen der Größen  $QU_{norm}$ ,  $GU_{norm}$  und  $WU_{norm}$  werden mit  $g_{QU} = 1,2$ ,  $g_{GU} = 1,2$  und  $g_{WU} = 1,2$  gewichtet. Die quadratischen relativen Abweichungen der Überschwingweiten werden jeweils mit  $g_{QU_{max}} = 0,8$ ,  $g_{GU_{max}} = 0,8$  und  $g_{WU_{max}} = 0,8$  gewichtet.

## **6.4 Optimierungsergebnisse**

Die Optimierung geschieht mit drei unterschiedlichen Parametersätzen P1, P2 und P3 (jeweils mit 43, 30 und 14 Parametern, siehe Abschnitt 5.2.3).

Auf einem Rechner mit einem Dual-Core-Prozessor mit der Prozessortaktrate 2,13 GHz und einem Arbeitsspeicher von 2 GB hing die Optimierungsdauer u. a. von der Parameteranzahl, den Startwerten, dem Parameterwertebereich und den simulierten Manövern ab. Die Optimierungsdauer beläuft sich für die Optimierung mit dem Parametersatz P1 auf Werte zwischen 20 und 26 Stunden, für die Optimierung mit dem Parametersatz P2 auf Werte von 8 bis 11 Stunden und für die Optimierung mit dem Parametersatz P3 auf Werte von 2 bis 4 Stunden.

Die Optimierungsergebnisse für das jeweilige Manöver finden sich qualitativ durch Abbildungen und quantitativ mittels Zahlenwerte für die Abweichung von der Referenz in Tabellen am jeweiligen Abschnittsende wieder.

#### 6.4.1 Optimierungsergebnisse für die stationäre Kreisfahrt

Abb. 6.5 bis Abb. 6.7 zeigen die mit den optimierten Modellparametersets simulierten fahrdynamischen Größen EG, GV und WG gegenüber den Referenzgrößen des Manövers stationäre Kreisfahrt (s. Abschnitt 4.3.1). Der jeweilige Modellparametersatz wurde mit dem hybriden Optimierungsalgorithmus optimiert.

Die Verläufe des EG der Simulation und der Referenz werden in Abb. 6.5 dargestellt. Der charakteristische Verlauf des EG wird gut mit den optimierten Parametersätzen wiedergegeben. Es wird deutlich, dass die EG-Verläufe bis circa  $6\text{m/s}^2$  sehr nah an der Referenz liegen, danach weicht der EG für die Simulation mit Parametersatz P3 (14 Parameter) stärker von der Referenz ab, als bei den Sätzen P2 und P3. In Abb. 6.5 ist kaum eine Abweichung zwischen dem mit P2 bzw. P3 simulierten EG und dem Referenz-EG feststellbar.

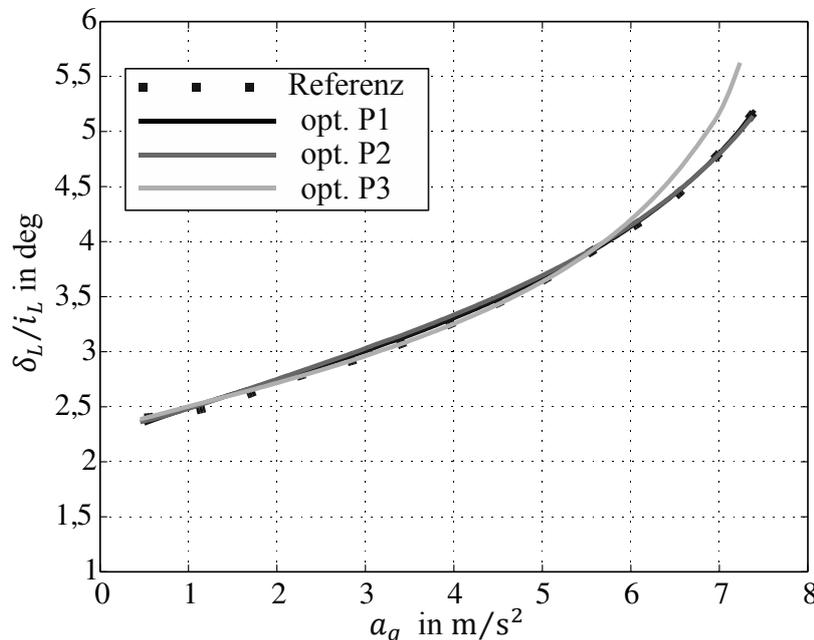


Abb. 6.5: Eigenlenkgradient (EG) der Referenz und Simulation mit drei Parametersätzen

Abb. 6.6 zeigt die Annäherung des qualitativen Verlaufs der GV durch alle drei Parametersätze. Die charakteristische Geschwindigkeit, bei der das Maximum der Gierverstärkung liegt (ca. 69 km/h), wird qualitativ gut wiedergegeben (für P3 ca. 68 km/h und P2 ca. 71 km/h). Die Referenz-GV wird am besten durch die Simulation mit dem Parametersatz P1 angenähert.

Abb. 6.7 zeigt den Vergleich zwischen den simulierten WG und der Referenz. Auch hier ist zu sehen, dass Simulation und Referenz qualitativ gut übereinstimmen. Das beste Ergebnis erzielt auch hier der Parametersatz P1. Der mit P2 simulierte WG divergiert ab circa  $4,5 \text{ m/s}^2$  von dem Referenz-WG, während der mit P3 simulierte WG schon ab circa  $2,5 \text{ m/s}^2$  von der Referenz abweicht.

In Tabelle 6.1 werden für das Manöver stationäre Kreisfahrt der Gesamtgütfunktionswert, die einzelnen Gütfunktionswerte und die maximale relative Abweichung der Gütefunktion für die drei Parametersätze wiedergegeben. Die einzelnen Gütefunktionen wurden durch die Optimierung minimiert und weisen daher für alle drei Parametersätze einen kleinen Wert auf (Tabelle 6.1). Für P3 ist die Gütefunktion des WG ( $\varepsilon_{K_{WG}}$ ) verhältnismäßig hoch. Das hängt damit zusammen, dass die Parameter im Parametersatz P3 einen geringen Einfluss auf die Wankbewegung haben und die Optimierung somit nur bedingt Einfluss auf den simulierten WG hat.

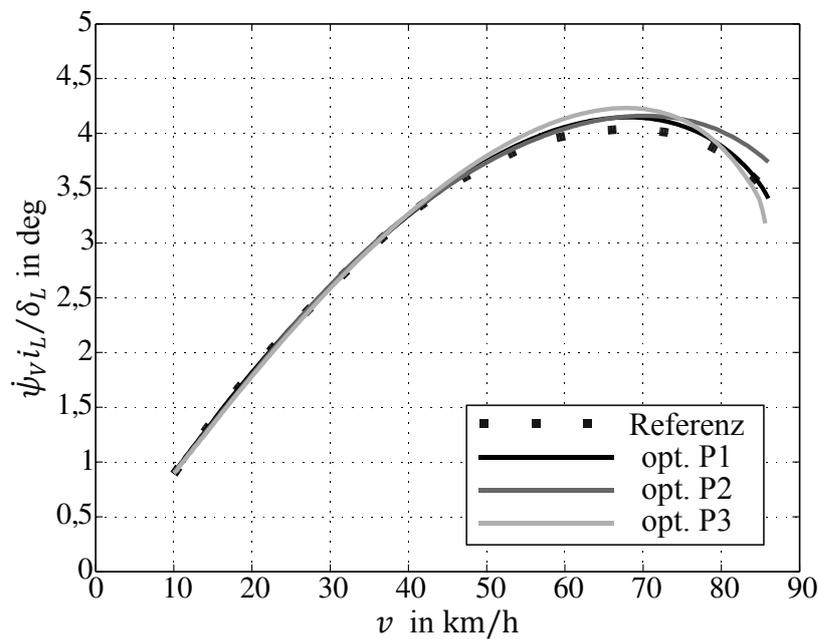


Abb. 6.6: Gierverstärkung (GV) der Referenz und Simulation mit drei Parametersätzen

Tabelle 6.1: Gesamtgütfunktionswerte, Gütfunktionswerte und maximale relative Abweichung der Gütefunktionen bei der stationären Kreisfahrt

Manöver	Parameter-satz	$K_{SK}$	$\varepsilon_{K_{EG}}$ in %	$\varepsilon_{K_{GV}}$ in %	$\varepsilon_{K_{WG}}$ in %	$\varepsilon_{K_{EG,max}}$ in %	$\varepsilon_{K_{GV,max}}$ in %	$\varepsilon_{K_{WG,max}}$ in %
Stationäre Kreisfahrt	P1	4,06	1,014	1,338	1,11	2,47	3,73	3,92
	P2	20,85	1,4	1,904	3,91	2,6	8,07	15,53
	P3	68,72	1,761	2,313	7,76	15,81	8,92	14,98

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich alle drei optimierten Parametersätze an die Referenz der stationären Kreisfahrt gut annähern. Bei zunehmender Querschleunigung entfernen sich zunächst die mit P3 und bei weiter zunehmender Querschleunigung die mit P2 simulierten stationären fahrdynamischen Größen von der Referenz. Die Simulation mit P1 folgt der Referenz auch bei hoher Querschleunigung sehr gut.

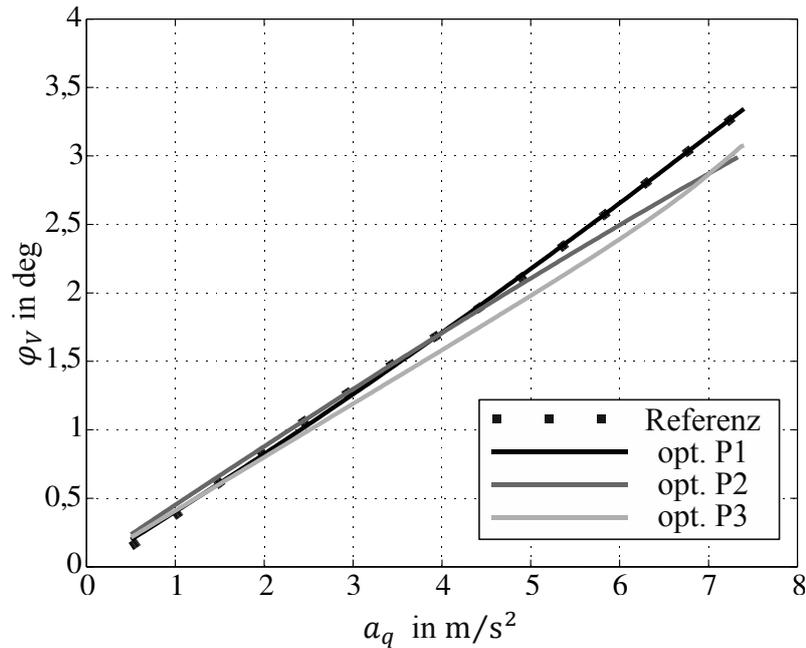


Abb. 6.7: Wankwinkelgradient (WG) der Referenz und Simulation mit 3 Parametersätzen

#### 6.4.2 Optimierungsergebnisse für den Frequenzgang

In Abb. 6.8 bis Abb. 6.10 werden die mit den optimierten Modellparametersets simulierten fahrdynamischen Größen QF, GF und WF gegen die Referenzgrößen des Manövers Frequenzgang (s. Abschnitt 4.3.2) dargestellt.

Die Verläufe der Amplitude und der Phase der QF der Simulation und der Referenz zeigt Abb. 6.8. Der mit den optimierten Parametersets simulierte Amplitudenverlauf der QF weicht ab circa 0,65 Hz von der Referenz ab. Die Simulation mit P1 folgt der Referenz am besten, während die Simulation mit P3 die höchste Abweichung aufweist.

Ein ähnliches Verhalten kann beim Phasenverlauf der QF beobachtet werden. Die Abweichung der Simulation zur Referenz nimmt bei höheren Frequenzen zu.

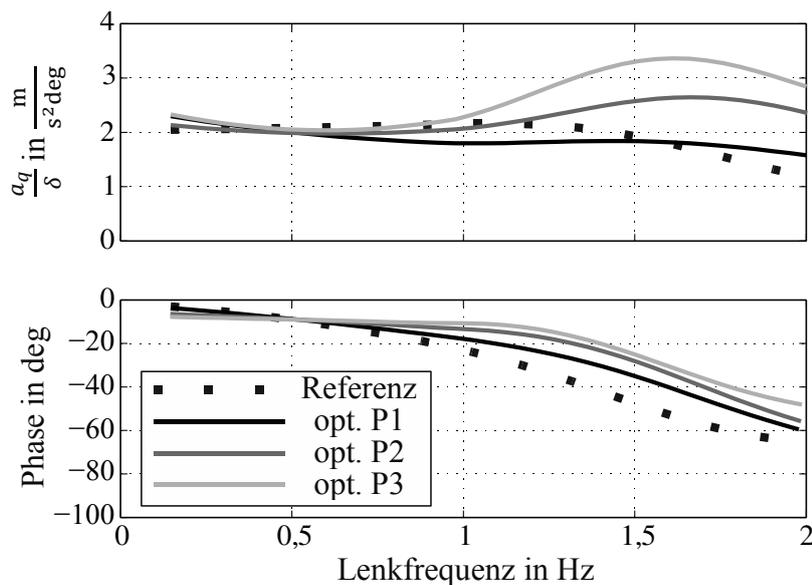


Abb. 6.8: Querfrequenz (QF) der Referenz und Simulation mit drei Parametersätzen

Die Verläufe der Amplitude und der Phase der GF der Simulation und der Referenz werden in Abb. 6.9 dargestellt. Der mit den optimierten Parametersets simulierte Amplitudenverlauf der QF weicht auch hier ab circa 0,7 Hz von der Referenz ab. Der charakteristische Amplitudenverlauf der Referenz wird am deutlichsten mit P1 angenähert.

Der mit den drei Parametersätzen simulierte Phasenverlauf der QF nähert sich bis circa 1,3 Hz gut an die Referenz an. Steigt die Frequenz weiter an, steigt auch die Abweichung.

Die Verläufe der Amplitude und der Phase der WF der Simulation und der Referenz zeigt Abb. 6.10. Der mit den optimierten Parametersets simulierte Amplitudenverlauf der QF weicht für die Simulation mit P2 bzw. P3 deutlich von der Referenz ab. Der charakteristische Amplitudenverlauf der Referenz ist hier am besten mit P1 abgebildet, wohingegen P3 die größte Abweichung aufweist.

Am Phasenverlauf der WF ist zu sehen, dass die Simulation mit P1 die Referenz gut nachbildet. Die mit P2 und P3 simulierten Phasenverläufe folgen qualitativ der Referenz bis circa 1,2 Hz.

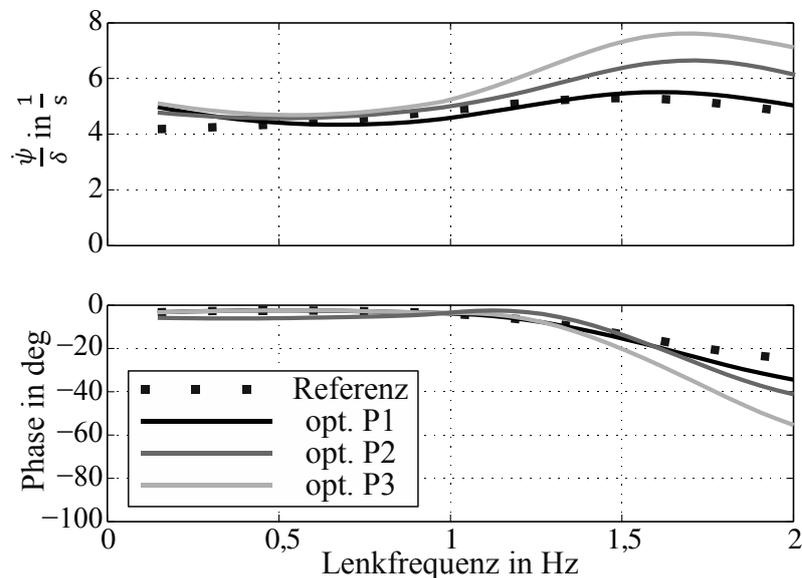


Abb. 6.9: Gierfrequenz (GF) der Referenz und Simulation mit drei Parametersätzen

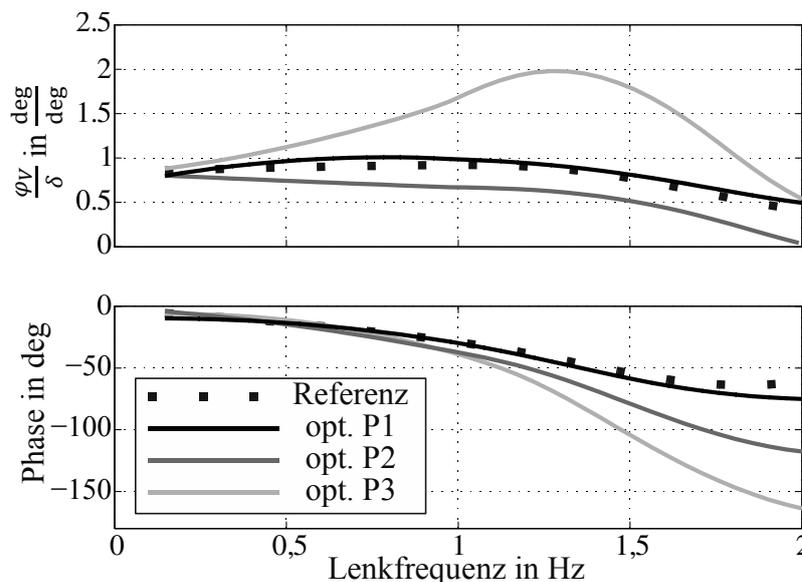


Abb. 6.10: Wankfrequenz (WF) der Referenz und Simulation mit drei Parametersätzen

In Tabelle 6.2 und Tabelle 6.3 sind für das Manöver Frequenzgang der Gesamtgütefunktionswert, die einzelnen Gütefunktionswerte der Amplitude und Phase sowie die maximale relative Abweichung der Gütefunktion der Amplitude und Phase für die drei Parametersätze wiedergegeben.

Aus Tabelle 6.2 geht hervor, dass die Gütefunktionswerte der Phase und Amplitude für P3 generell höher ausfallen als für P1 und P2. Dies liegt an der geringen Anzahl von Parametern (14 Parameter), die zur Optimierung mit P3 zur Verfügung stehen.

Für die Optimierung mit dem Manöver Frequenzgang liefert die Simulation mit P1 das beste Ergebnis. Die Simulation mit P3 weicht deutlich von der Referenz ab. Die Abweichungen im Manöver Frequenzgang sind zum Teil erheblich größer als beim Manöver stationäre Kreisfahrt, da es sich beim Frequenzgang um ein dynamisches (instationäres) Manöver handelt. Diese Abweichung tritt vor allem bei höheren Frequenzen auf, da hier Effekte auftreten, die nur teilweise mit dem Komplexitätsgrad des an dieser Stelle benutzten Fahrzeugmodells erfasst werden können.

Tabelle 6.2: Gesamtgütefunktionswert und Gütefunktionswerte von Amplitude und Phase beim Frequenzgang

Manöver	Parametersatz	$K_{FG}$	$\varepsilon_{K_{QF}amp}$ in %	$\varepsilon_{K_{GF}amp}$ in %	$\varepsilon_{K_{WF}amp}$ in %	$\varepsilon_{K_{QF}pha}$ in %	$\varepsilon_{K_{GF}pha}$ in %	$\varepsilon_{K_{WF}pha}$ in %
Frequenzgang	P1	3.798	21,94	5,13	13,3	53,61	12,2	9,53
	P2	11.915	34,09	21,92	16,6	84,44	34,44	35,08
	P3	26.583	41,75	30,18	107,17	88,62	40,46	58,34

Tabelle 6.3: Maximale relative Abweichung der Gütefunktionen von Amplitude und Phase beim Frequenzgang

Manöver	Parametersatz	$\varepsilon_{K_{QF}amp,max}$ in %	$\varepsilon_{K_{GF}amp,max}$ in %	$\varepsilon_{K_{WF}amp,max}$ in %	$\varepsilon_{K_{QF}pha,max}$ in %	$\varepsilon_{K_{GF}pha,max}$ in %	$\varepsilon_{K_{WF}pha,max}$ in %
Frequenzgang	P1	34,39	18,99	29,91	68,2	44	32,64
	P2	50,2	36,6	29,95	110,57	142,17	93,04
	P3	142,31	56,09	166,89	122,37	177,78	168,6

### 6.4.3 Optimierungsergebnisse für den Lenkwinkelsprung

Abb. 6.11 bis Abb. 6.13 zeigen die mit den optimierten Modellparametersets simulierten fahrdynamischen Größen QU, GU und WU gegen die Referenzgrößen des Manövers Lenkwinkelsprung (s. Abschnitt 4.3.3).

Der Verlauf der GU der Simulation und der Referenz wird in Abb. 6.11 dargestellt. Die simulierte QU gibt das Maximum der Referenz (ca.  $2,26 \text{ m} \cdot \text{deg}/\text{s}^2$ ) und den Zeitpunkt des Erreichens des Maximums (ca. 5,4 s) gut wieder. Die mit P2 und P3 simulierten Verläufe der QU schwingen stärker als bei P1. Der stationäre Endwert ( $2,1 \text{ m} \cdot \text{deg}/\text{s}^2$ ) wird mit allen drei Sätzen gut wiedergegeben.

In Abb. 6.12 wird der qualitative Verlauf der GU gut durch alle drei Parametersätze angenähert. Sowohl das Maximum der GU (ca. 5,05 1/s) als auch das Schwingungsverhalten werden durch die Simulation gut wiedergegeben. Der stationäre Endwert der mit P2 und P3 simulierten Verläufe liegt ein wenig höher (ca. 4,5 1/s) als die Referenz (ca. 4,4

1/s). Die Referenz-GU wird durch die Simulation mit dem Parametersatz P1 am besten nachgebildet.

Beim Vergleich zwischen dem simulierten WU und der Referenz (Abb. 6.13) ist zu sehen, dass Simulation und Referenz qualitativ gut übereinstimmen, das beste Ergebnis jedoch der Parametersatz P1 erzielt. Der mit P3 simulierte WU hat im Vergleich zum Referenzmaximum (ca. 0,99) ein niedrigeres Maximum (ca. 0,91). Der Zeitpunkt, bei dem das Maximum des WU erreicht ist, wird durch alle drei Simulationen sehr gut getroffen (ca. 5,6 s). Auch der stationäre Endwert des simulierten WU liegt sehr nah an der Referenz (ca. 0,89).

Aus Tabelle 6.4 geht hervor, dass sich die einzelnen Gütefunktionen durch die Optimierung gut minimieren ließen und daher für alle drei Parametersätze einen kleinen Wert aufweisen. Der quantitative Unterschied des Gesamtgütefunktionswertes zwischen den einzelnen Parametersätzen ist verhältnismäßig gering.

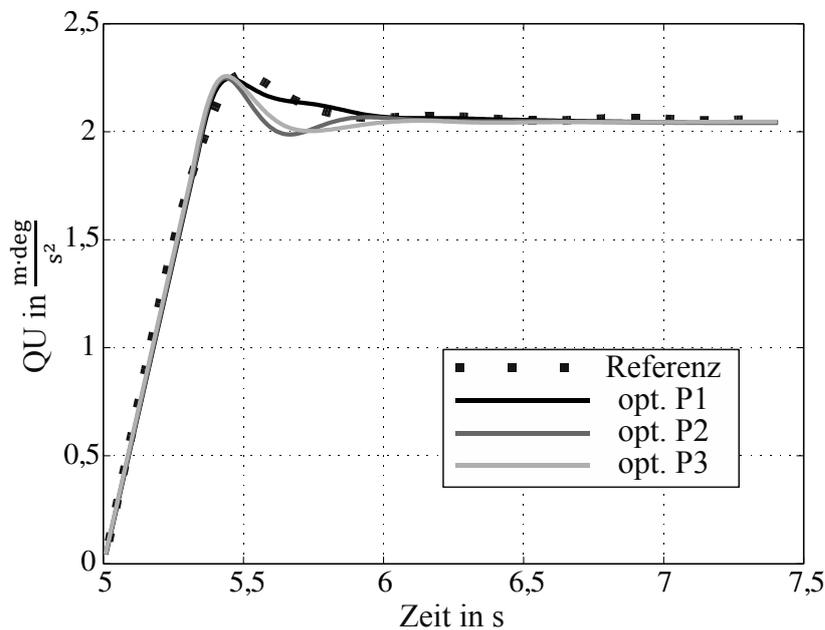


Abb. 6.11: Querübergang (QU) der Referenz und Simulation mit drei Parametersätzen

Tabelle 6.4: Gesamtgütefunktionswerte, Gütefunktionswerte und maximale relative Abweichung der Gütefunktionen beim Manöver Lenkwinkelsprung

Manöver	Parameter- satz	$K_{LS}$	$\varepsilon_{K_{QU}}$ in %	$\varepsilon_{K_{GU}}$ in %	$\varepsilon_{K_{WU}}$ in %	$\varepsilon_{K_{QU,max}}$ in %	$\varepsilon_{K_{GU,max}}$ in %	$\varepsilon_{K_{WU,max}}$ in %
Lenkwinkel- sprung	P1	19,3	2,98	2,49	2,06	16,25	6,77	15,18
	P2	28,6	3,24	3,02	3	18,81	4,38	22,93
	P3	36,2	3,29	3,8	3,31	16,8	5,93	25,8

Für die Optimierung mit dem Manöver Lenkwinkelsprung liefert die Simulation mit P1 das beste Ergebnis, da P1 den Parametersatz mit der höchsten Anzahl von Parametern hat. Jedoch ist auch die benötigte Optimierungszeit mit P1 am höchsten. Insgesamt gibt das verwendete Modell mit den optimierten Parametersätzen die charakteristischen Referenzgrößen des Manövers gut wieder. Es ist aus den Ergebnissen ersichtlich, dass eine geringe Anzahl von Parametern (P2 bzw. P3) bestimmte Effekte (z. B. Frequenzgang bei niedrigen Frequenzen) genügend abbildet. Deshalb muss vorher das Aufwand-Nutzen-Verhältnis abgewogen und ein entsprechender Parametersatz gewählt werden.

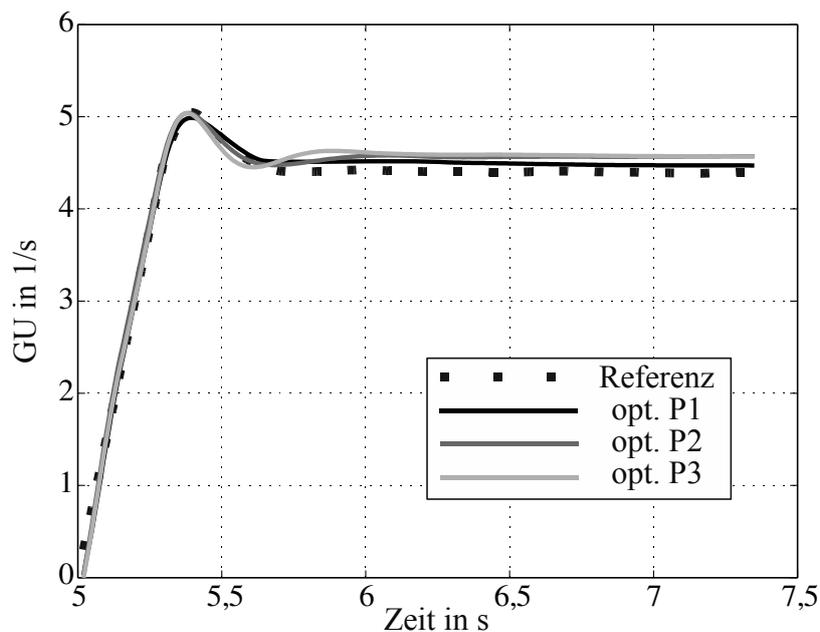


Abb. 6.12: Gierübergang (GU) der Referenz und Simulation mit drei Parametersätzen

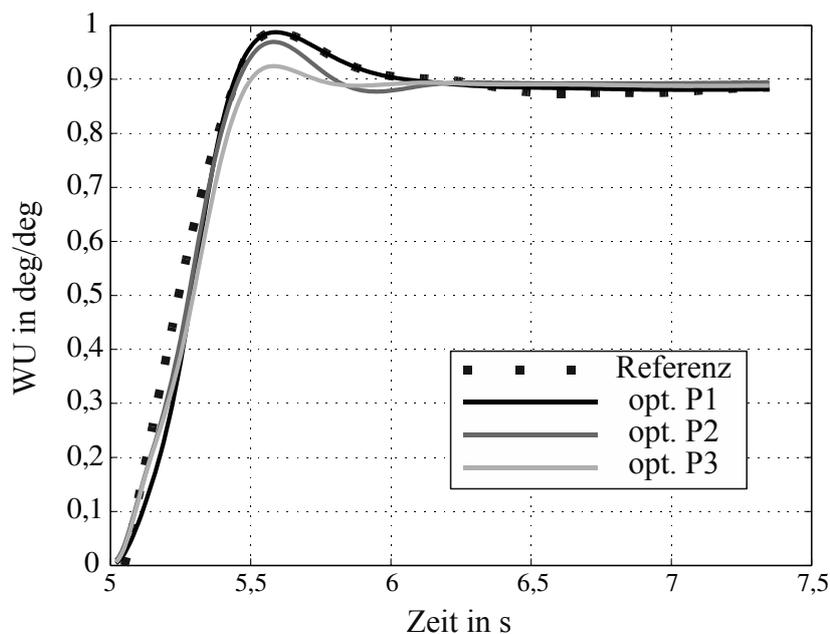


Abb. 6.13: Wankübergang (WU) der Referenz und Simulation mit drei Parameter-sätzen

Die Ergebnisse zeigen, dass für verschiedene Manöver die optimierten Parameterwerte ähnliche Ergebnisse liefern. Damit besitzt das Modell für die in Kapitel 7 vorgesehene Aufgabe eine ausreichende Vorhersagegenauigkeit. Die Optimierung sollte mit den Manövern ausgeführt werden, welche am ehesten der zu untersuchenden fahrdynamischen Aufgabe entsprechen.

## 7 Modellvergleich und Fahrsimulatorstudie

Dieses Kapitel untersucht im ersten Teil die Ergebnisse der Kinematiksimulation der komplexen Mehrkörperradaufhängungen und zeigt den fahrdynamischen Unterschied zwischen einem Fahrzeug mit einfacher und mit komplexer Radaufhängung auf. Im zweiten Teil wird der Einfluss der Modellkomplexität auf das Fahrgefühl von Probanden an einem bewegten Fahrsimulator untersucht. Dazu werden vier unterschiedliche Fahrzeugmodelle verwendet, die mithilfe der in dieser Arbeit vorgestellten Modellierungs- und Validierungsmethoden erstellt wurden. Ziel ist es, eine Aussage darüber zu erhalten, inwieweit Unterschiede zwischen den einzelnen Modellen „erfahren“ werden können.

### 7.1 Vergleich der Fahrzeugmodelle

Im Folgenden wird näher auf die Simulation, die Auswertung und den Vergleich der Radkinematiken der modellierten Radaufhängungen (Abschnitt 3.5 bzw. 3.6) eingegangen. Danach werden die fahrdynamischen Eigenschaften des generischen und speziellen Fahrzeugmodells verglichen.

#### 7.1.1 Untersuchung der Radaufhängungsbewegung

Die Position und Orientierung des Rades gegenüber dem Fahrzeug und der Straße beeinflussen maßgeblich die Kraftübertragung und damit das Fahrverhalten des Fahrzeugs. Die Radmittelpunkttrajektorie sowie die Sturz- und Spurwinkeländerung bei Radeinfederung beschreiben Position und die Orientierung des Rades. Diese werden für die MacPherson-Federbeinradaufhängung und die Mehrlenkerradaufhängung untersucht. Die Anlenkpunkte sowie die Sturz- und Spurwinkeländerungen der Radaufhängung wurden aus der Vermessung eines typischen Mittelklassefahrzeugs mit einer MacPherson-Vorderachse und einer Mehrlenker-Hinterachse (s. Kapitel 4) gewonnen. Mit diesen Messungen soll die Simulationsgüte der Radaufhängungen bewertet werden. Die Simulationsergebnisse der Vorder- und Hinterachse werden nun nacheinander vorgestellt.

#### ***Vorderachse***

Bei der räumlichen Radmittelpunkttrajektorie der MacPherson-Radaufhängung mit ihren Projektionen auf die drei Achsenebenen ( $x_R - z_R$ ,  $z_R - y_R$  und  $x_R - y_R$  Ebene) durchläuft das Rad beim Ein- bzw. Ausfedern eine räumliche Bewegung mit gleichzeitiger Rotation. Die Radtrajektorie geht beim Einfedern leicht in Richtung positiver  $x_R$ -Achse (s. Abb. 7.1 und Abb. 7.2). Die Spurweite an der Vorderachse verkleinert sich beim Ein- und Ausfedern leicht (Abb. 7.2 mittleres Diagramm).

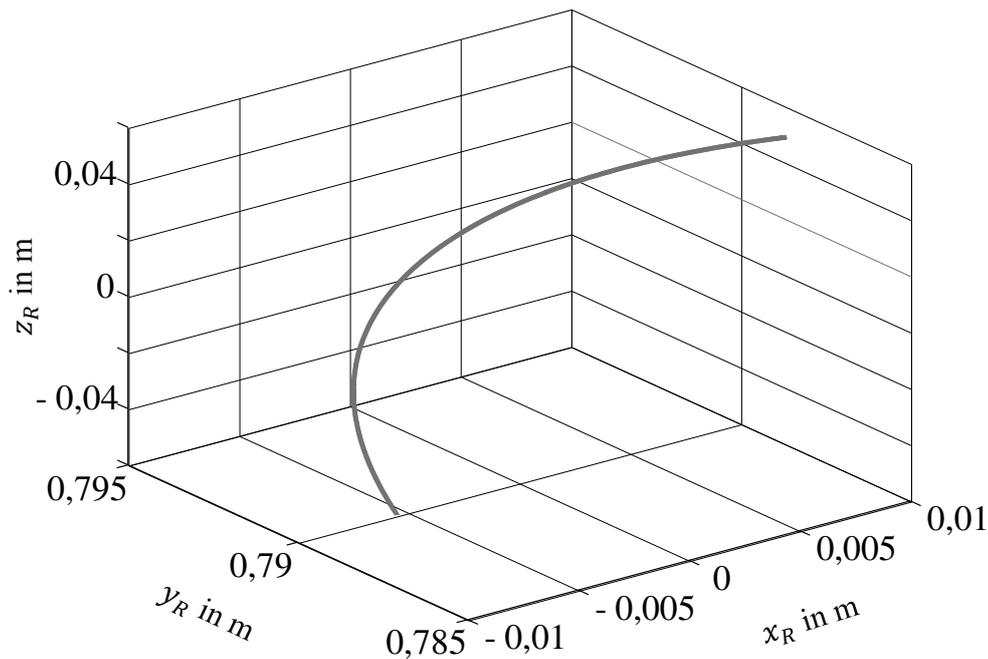


Abb. 7.1: Simulierte Radmittelpunkttrajektorie der linken MacPherson-Radaufhängung im Raum

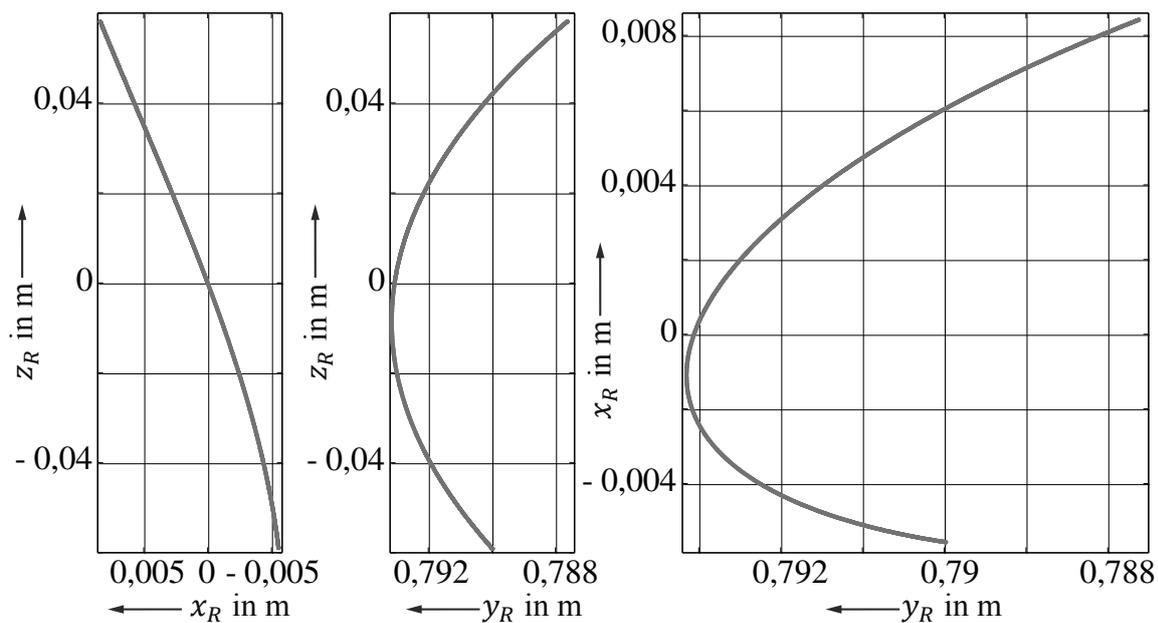


Abb. 7.2: Projektion der simulierten Radmittelpunkttrajektorie der linken MacPherson-Radaufhängung auf die Ebene

Beim Ein- bzw. Ausfedern des Rades wird die Lenkung in der Nulllage fixiert. Es ist zu sehen, dass die Simulation qualitativ die Messungen abbildet. Der mittlere Fehler des Sturzwinkels beträgt  $0,025^\circ$ , der des Spurwinkels  $0,012^\circ$  (s. Abb. 7.3).

Beim Einfedern nimmt der Sturzwinkel ab und wird teilweise auch negativ (s. Abb. 7.3 links), was bedeutet, dass das Rad sich hin zum Fahrzeug neigt. Diese Eigenschaft ist besonders bei einer Kurvenfahrt von Vorteil. Während einer Kurvenfahrt neigt sich der Fahrzeugaufbau durch die Fliehkraft nach außen. Das kurvenäußere Rad wird dabei ein- und das kurveninnere Rad gleichzeitig ausgefedert. Die Vorderräder neigen sich – be-

günstigt durch die Radkinematik der MacPherson-Vorderachse – in Richtung der Kreisbahnmitte. Dies erzeugt eine bessere Druckverteilung im Reifenlatsch und dadurch einen höheren Seitenkraftaufbau an den Rädern.

Beim Einfedern wird ebenfalls der Spurwinkel an der Vorderachse negativ (s. Abb. 7.3 rechts). Federt das Rad ein, dreht es sich von der Fahrzeugmitte weg (Rad geht in Nachspur). Dieses Verhalten ist bei angetriebenen Vorderachsen gewünscht. Bei einer Kurvenfahrt wird durch diesen Effekt, unabhängig vom Fahrer, der Lenkwinkel an der Vorderachse leicht beeinflusst (untersteuernd). Insgesamt lässt sich das Fahrzeug ruhiger und stabiler („gutmütiger“) in die Kurve lenken.

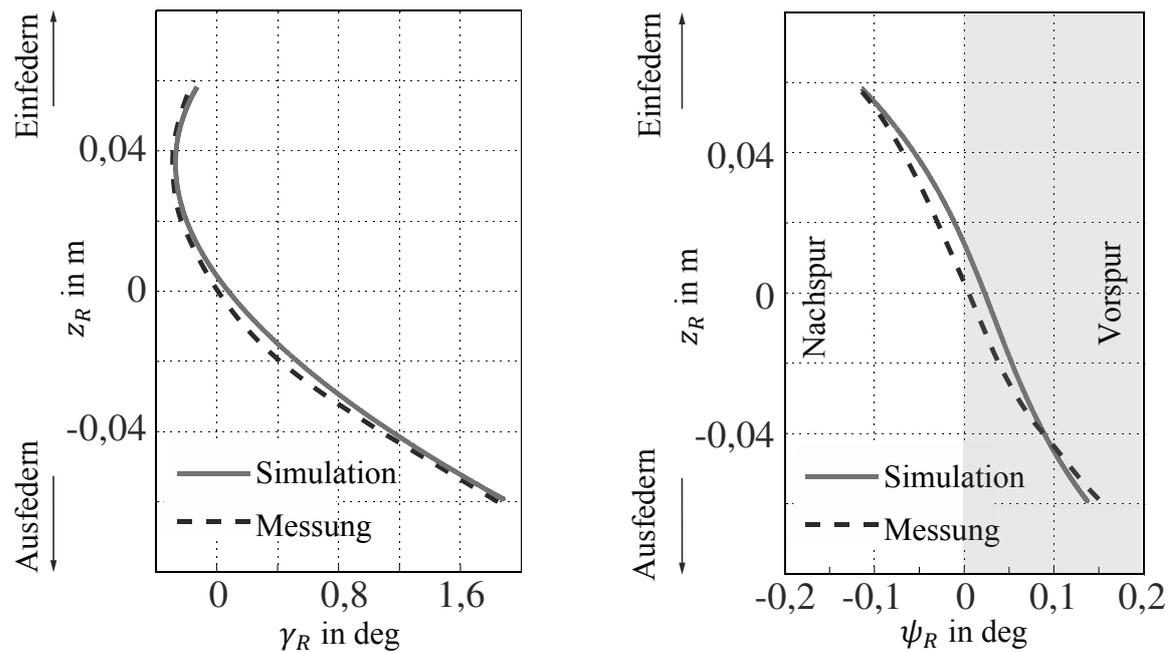


Abb. 7.3: Gemessener und simulierter Sturz- und Spurwinkelverlauf der linken MacPherson-Radaufhängung

### Hinterachse

Auch in Abb. 7.4 und Abb. 7.5 durchläuft das Rad eine räumliche Bewegung mit gleichzeitiger Rotation. Auch diese Radtrajektorie weist beim Einfedern eine positive  $x_R$ -Komponente auf, die für die Mehrlenkerradaufhängung jedoch größer ist als für die MacPherson-Radaufhängung. Bei der Hinterachse verkleinert sich leicht die Spurweite beim Einfedern (s. Abb. 7.5 mittleres Diagramm).

Die Simulation bildet qualitativ die Messungen ab (s. Abb. 7.6). Der mittlere Fehler des Sturzwinkels beträgt  $0,1^\circ$  und der des Spurwinkels  $0,035^\circ$ .

Beim Einfedern des Rades nimmt der Sturzwinkel im Vergleich zur Vorderachse mehr zu (s. Abb. 7.6 links), weshalb das höher belastete kurvenäußere Rad die erforderliche Seitenkraft bei kleineren Schräglaufwinkeln realisieren kann und zusätzlich die Hinterachse stabilisiert (untersteuernde Wirkung).

Der Spurwinkel an der Hinterachse verhält sich gegenläufig zur Vorderachse. Beim Einfedern des Hinterrades wird der Spurwinkel positiv (Vorspur) (s. Abb. 7.6 rechts), weshalb sich das Hinterrad beim Einfedern leicht zum Fahrzeug hindreht. Bei einer Kurven-

fahrt wird durch diesen Effekt unabhängig vom Fahrer ein zusätzlicher Lenkwinkel an der Hinterachse erzeugt (untersteuernd), der das Fahrzeug an der Hinterachse stabilisiert.

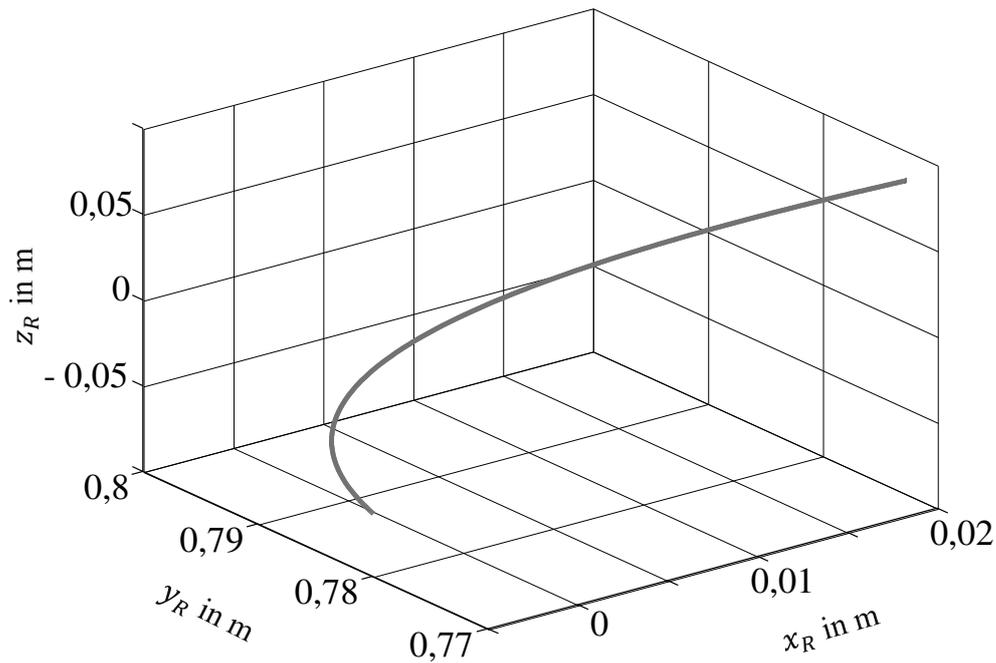


Abb. 7.4: Simulierte Radmittelpunkttrajektorie der linken Mehrlenkerradaufhängung im Raum

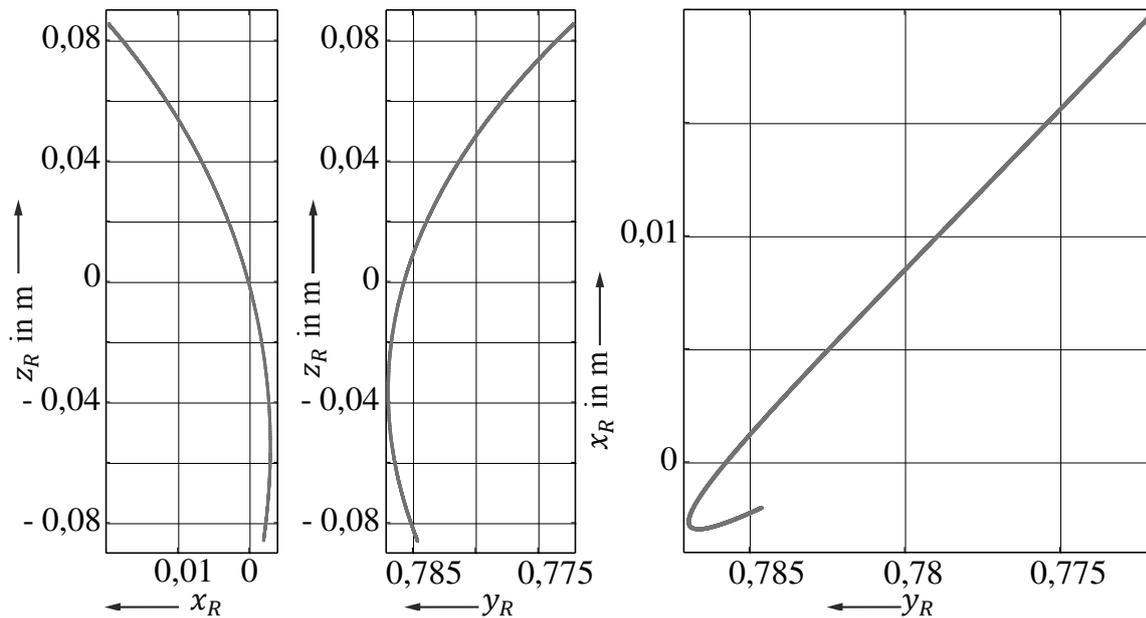


Abb. 7.5: Projektion der simulierten Radmittelpunkttrajektorie der linken Mehrlenkerradaufhängung auf die Ebene

Die Abweichungen zwischen Simulation und Messung an den beiden Achsen sind einerseits durch Messfehler und andererseits durch die Vernachlässigung der Elastokinematik bei der Modellierung begründet. Schramm (2010) berücksichtigt die Elastokinematik durch kinematische Ersatzmechanismen.

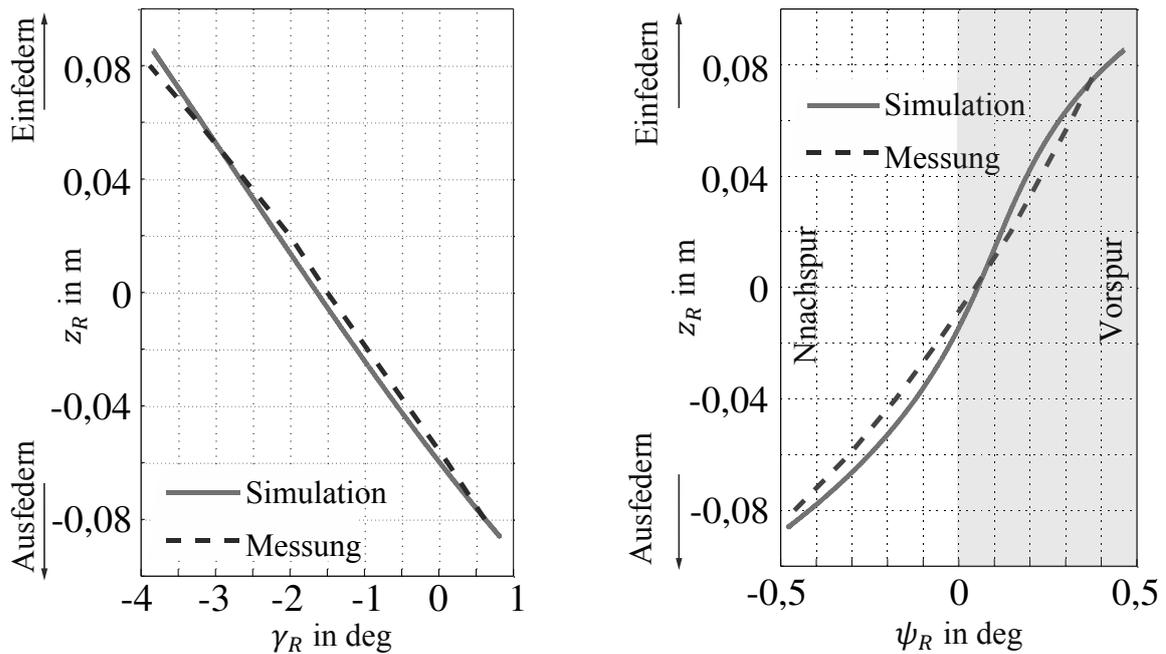


Abb. 7.6: Gemessener und simulierter Sturz- und Spurwinkelverlauf der linken Mehrlenkerradaufhängung

### 7.1.2 Vergleich der Fahrdynamik

Mit dem in dieser Arbeit modellierten und parametrisierten generischen Fahrzeugmodell (einfache Radaufhängungen) und dem aus vermessenen Achs-Anlenkpunkten generierten speziellen Fahrzeugmodell (komplexe Radaufhängungen) werden eine Fahrt auf einer Kreisbahn mit Radius  $R=75\text{m}$  simuliert. Zuvor wurde mithilfe des hybriden Optimierungsverfahrens aus Abschnitt 6.2.3 unter Verwendung des Manövers „stationäre Kreisfahrt“ das generische an das spezielle Fahrzeugmodell angepasst (mittlerer relativer Fehler der Gütefunktion des Eigenlenkgradienten beträgt  $\varepsilon_K=1,21\%$ ). Während der Kreisfahrt wird die Geschwindigkeit langsam gesteigert bis der fahrdynamische Grenzbereich erreicht ist. Beide Fahrzeuge weisen bis zu einer Querschleunigung von circa  $a_q=4\text{m/s}^2$  einen ähnlichen Verlauf des Eigenlenkgradienten auf (s. Abb. 7.7). Beide Fahrzeuge verfügen über ein untersteuerndes Fahrverhalten. Mit dem speziellen Fahrzeugmodell wird im Vergleich zum generischen Fahrzeugmodell weniger Lenkwinkel benötigt, um die gleiche Querschleunigung zu erreichen. Zudem erreicht das spezielle Fahrzeugmodell eine etwas höhere Querschleunigung als das generische.

Die komplexen Radaufhängungen (s. Abs. 7.1.1) des speziellen Fahrzeugmodells positionieren den Reifen im Vergleich zur einfacheren Radaufhängung besser auf der Fahrbahn. Das bedeutet, dass mit den komplexen Vorder- und Hinterachsen im Verhältnis zu den einfacheren Achsen der Sturz- und Spurwinkel der Räder günstiger eingestellt werden kann. Somit muss weniger eingelenkt werden um auf der Kreisbahn zu bleiben. Das generische Fahrzeugmodell hat im Vergleich zum speziellen eine schlechtere Balance zwischen Vorder- und Hinterachsseitensteifigkeit (welche unter anderem auch auf die ungünstige Radpositionierung auf der Fahrbahn zurück zu führen ist), weshalb der Lenkwinkel erhöht werden muss, um auf dem gleichen Bahnradius zu fahren. Das generische Modell hat im Vergleich zum speziellen Modell eine höhere Untersteuertendenz.

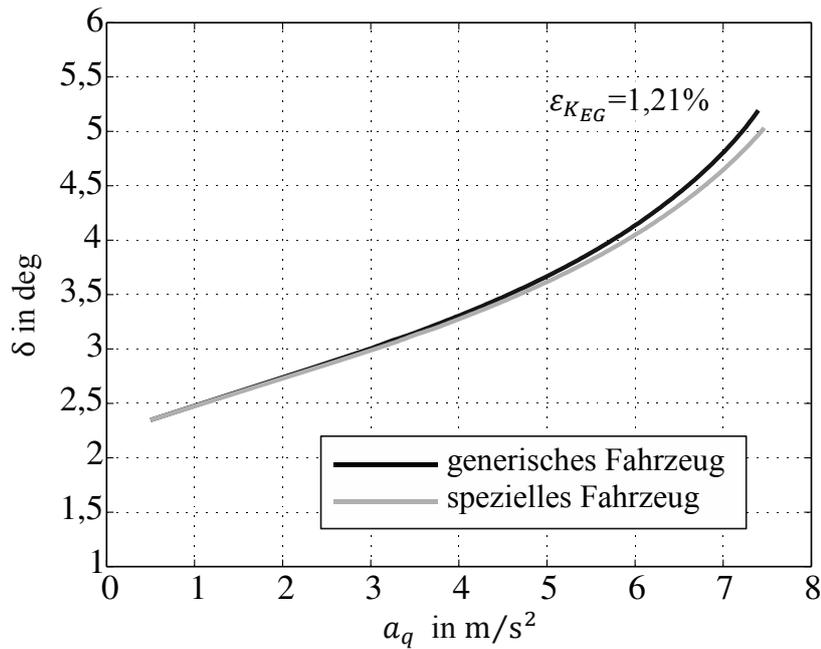


Abb. 7.7: Vergleich des Eigenlenkgradienten zwischen dem speziellen und generischen Fahrzeugmodell

Das generische Fahrzeugmodell ist ein rein mathematisches Fahrzeugmodell und seine Kinematik (Schräglenerachsen und Lenkung) spiegelt die momentane Schraubachse einer komplexen Radführung in der Konstruktionslage wieder. Es ist konstruktiv als reale Baugruppe nicht verwirklichtbar. Auch wenn sich das in dieser Arbeit modellierte und parametrisierte generische Fahrzeugmodell vom speziellen Fahrzeugmodell in der Nachbildungstiefe unterscheidet, ist die Wiedergabe des Fahrverhaltens gut und für viele Anwendungsfälle und Untersuchungen mehr als ausreichend. Zudem benötigt das generische im Vergleich zum speziellen Fahrzeugmodell beispielsweise für die hier simulierte stationäre Kreisfahrt circa ein Drittel weniger Rechenzeit (Intel Core2 Quad CPU 2,4 GHz, mit 4 GB RAM). Für viele Anwendungen, bei denen es auf die Rechenzeit ankommt, ist das generische Fahrzeugmodell ein willkommener Kompromiss zwischen Rechenzeit und Abbildungsgüte. Zudem besteht das generische Fahrzeugmodell durch seine Anpassungsfähigkeit an das Fahrverhalten unterschiedlicher Fahrzeugklassen.

## 7.2 Fahrsimulatorstudie

Um festzustellen, wie Probanden im Fahrsimulator das Fahrverhalten in Abhängigkeit von der Fahrzeugmodellkomplexität subjektiv bewerten, werden vier Fahrzeugmodelle unterschiedlicher Komplexität verwendet, um die Fahrsimulatorbewegung zu berechnen. Die Modelle wurden mit den in dieser Arbeit vorgestellten Modellierungs- und Validierungsmethoden generiert.

Im Folgenden werden zunächst die Grundkonzepte von Fahrsimulatoren erläutert und der verwendete Fahrsimulator beschrieben. Anschließend werden die genutzten Fahrzeugmodelle, der Versuchsaufbau und die Durchführung der Fahrsimulatorstudie beschrieben. Abschließend wird die Versuchsauswertung vorgestellt und die subjektive Fahrerwahrnehmung bewertet.

### 7.2.1 Grundkonzept von Fahrsimulatoren

Fahrsimulatoren gestatten es, von realen Fahrern gesteuerte virtuelle Fahrzeuge in virtuellen Verkehrsszenarien zu erproben. Dadurch kann schon im Anfangsstadium der Entwicklung von Assistenzsystemen (wie beispielsweise des adaptiven Tempomaten (ACC) oder des Spurhalteassistenten (LKA)) die Kommunikation zwischen Fahrer und Fahrzeug getestet und die Akzeptanz beim Fahrer berücksichtigt werden. Daraus lassen sich Rückschlüsse auf technische Machbarkeit, Bedienbarkeit, Wirkungsweise und Akzeptanz zukünftiger Fahrzeugtechnologien ziehen.

Für den Entwicklungsprozess von Assistenzsystemen werden Simulatoren eingesetzt, bei denen Fahrer realitätsnahe Fahrzeugmodelle auf detaillierten virtuellen Streckenmodellen fahren. Der Simulator wird dabei als sogenannter Human-in-the-Loop-Prüfstand (HIL) eingesetzt (Hesse 2011) (Hiesgen 2011). Bei einer allgemeinen HIL-Anwendung werden Hardware (beispielsweise Lenkung und Pedalerie) und Software (Fahrzeugmodell und Umgebung) gekoppelt und in Echtzeit simuliert.

Die wesentlichen Vorteile für den Einsatz von Fahrsimulatoren im Entwicklungsprozess von menschenzentrierten Fahrerassistenzsystemen ergeben sich nach Breuer (2009) aus

- der Einsetzbarkeit in der frühen Entwicklungsphase,
- der exakten Parametrier- und Reproduzierbarkeit der zu untersuchenden Szenarien,
- der hohen Variationsmöglichkeit bezüglich der Umgebungsbedingungen und Systemparameter und
- der gefahrlosen Darstellung kritischer Fahrsituationen.

Dementgegen bestehen nach Breuer (2009) die Nachteile insbesondere in

- den simulationsspezifischen Artefakten wie
  - dem eingeschränkten Gefährdungsbewusstsein und dem darüber hinaus veränderten menschlichen Fahrverhalten,
  - den wahrnehmungsphysiologischen Einschränkungen, die durch eine begrenzte Visualisierung und ein eingeschränktes bzw. nicht vorhandenes Bewegungsverhalten des Simulators entstehen und
  - der häufig unzureichenden Modellqualität,
- dem hohen Soft- und Hardwareaufwand und
- dem Auftreten der Kinetose („motion sickness“ (Schlender 2008)) und dem damit verbundenen Probandenausfall.

Die Qualität einer Fahrsimulatorstudie hängt maßgeblich von der Gestaltung der Mensch-Maschine-Schnittstelle (MMS) und der Interaktionskanäle ab. Um einen möglichst hohen Immersionsgrad für den Fahrer zu realisieren, sollten das Fahrzeugcockpit, die Visualisierung der virtuellen Realität, das Bewegungssystem, das Rückstellmoment am Lenkrad und gegebenenfalls die Fahrakustik hinreichend realitätsnah sein.

Abb. 7.8 zeigt die vier wesentlichen Interaktionskanäle bzw. Sender- und Empfängergrößen für Mensch und Maschine (Fahrsimulator). Die olfaktorischen und gustatorische Interaktionskanäle werden in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Jeder Kanal stellt einen Informationsaustausch zwischen Fahrer und Fahrsimulator dar.

Für die Fahrzeugführung ist der visuelle Kanal sehr wichtig. Die zum Führen des Fahrzeugs benötigten optischen Informationen werden mithilfe von Displays oder Projektionen an den Fahrer übermittelt (Hesse 2011). Somit kann sich der Fahrer in der virtuellen Welt orientieren.

Der akustische Kanal gibt den Zustand des Fahrzeugs wieder. Beispielsweise können Motoren-, Abroll- oder Windgeräusche, die die aktuelle Motordrehzahl und die Fahrzeuggeschwindigkeit widerspiegeln, durch Lautsprecher an den Fahrer übermittelt werden. Informations- und Warnhinweise können ebenfalls durch akustische Stimulation bzw. Sprachausgaben an den Fahrer gesendet werden.

Der haptische Kanal steuert die Wahrnehmung von Vibrationen, Kräften und Momenten. So werden Informationen über die Beschaffenheit der Straße durch Vibrationen an Sitz und Lenkung an den Fahrer weitergegeben und der befahrene Bahnradius (Fahrzustand) über das Lenkmoment am Lenkrad, das durch ein Force-Feedback-Lenkrad gestellt wird.

Der vestibuläre (den Gleichgewichtssinn betreffende) Kanal informiert über die translatorischen (Längs-, Quer- und Vertikalbewegung) und rotatorischen (Nick-, Wank- und Gierbewegung) Lage- und Bewegungsgrößen des Fahrzeugs. Die Plattform des Simulators bewegt sich, abhängig von Fahrzustand, Fahrerposition und -orientierung. Dadurch erhält der Fahrer eine Rückmeldung über das Beschleunigungs-, Verzögerungs- und Lenkverhalten des Fahrzeugs. Die Plattformbewegung errechnet sich durch das verwendete Fahrzeugmodell.

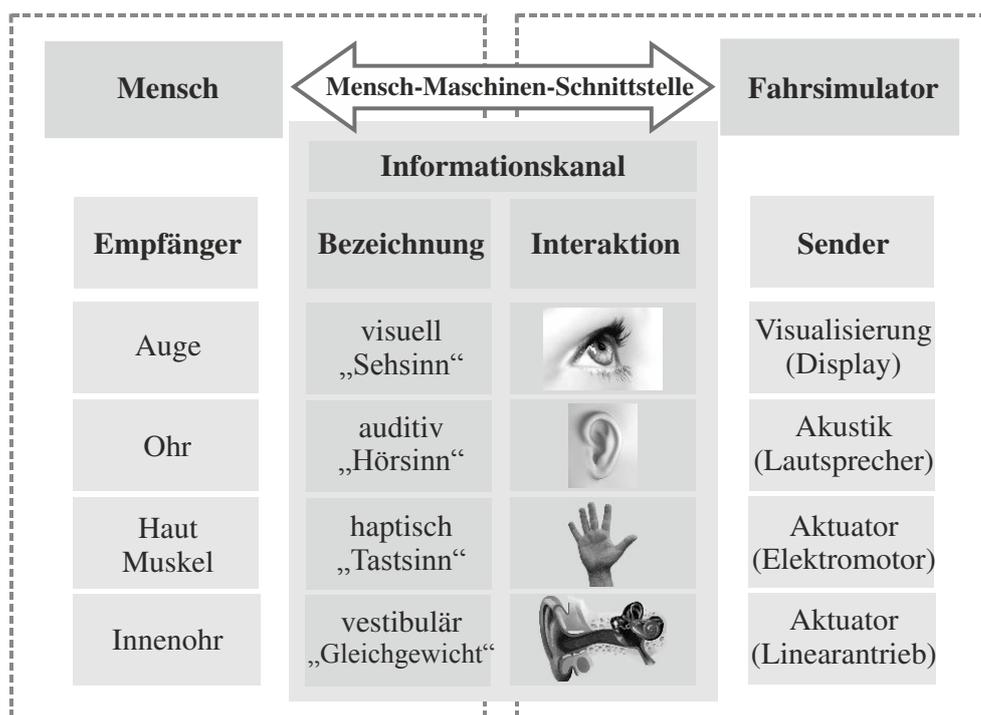


Abb. 7.8: Interaktionskanäle zwischen Mensch und Maschine nach Ebenen (abgeleitet aus Hiesgen (2011))

In der Probandenstudie liegt der Fokus auf dem vestibulären Kanal und wird näher untersucht, indem das Bewegungsverhalten des Simulators durch den Modellkomplexitätsgrad beeinflusst wird.

## 7.2.2 Bewegter Fahrsimulator

Am Lehrstuhl für Mechatronik der Universität Duisburg-Essen werden verschiedene Simulatoren für unterschiedliche Anwendungszwecke entwickelt und eingesetzt (s. Hiesgen (2011)). Abb. 7.9 zeigt zwei der am häufigsten genutzten Fahrsimulatoren, den statischen und den dynamischen.

Der statische Simulator besteht aus einem umgebauten Ford Fiesta und einer Rundumsicht, die aus einer Kombination von Projektoren und LCD-Geräten realisiert wird. Der Simulator verfügt über ein Force-Feedback-Lenkrad. Der Fahrersitz wird durch eine entsprechende Kinematik aktuiert und suggeriert dem Fahrer durch entsprechende Sitznickenbewegungen die Fahrzeuglängsdynamik. Zudem verfügt der Simulator über eine elektrische Unterdruckpumpe am Bremskraftverstärker und realisiert somit ein situationsabhängiges Bremsgefühl. Weiterhin wird das Kombiinstrument durch ein frei konfigurierbares LCD realisiert. (Für weitere Informationen s. Hesse (2011) und Hiesgen (2011)).

Der dynamische Fahrsimulator (Abb. 7.9 und Abb. 7.10) wurde zusammen mit der Westfälischen Hochschule, Abteilung Bocholt, entwickelt (s. (Rode 2007)). Er realisiert durch drei Linearaktuatoren eine Bewegungsplattform mit drei Freiheitsgraden (Nicken, Wanken und Heben), wie in Abb. 7.10 dargestellt. Auf der Plattform sind ein originales Fahrzeugcockpit, mit Force-Feedback-Lenkrad, Pedalerie und einem frei konfigurierbaren LCD montiert. Auch hier wird die Rundumsicht mit entsprechenden Projektoren und LCDs gewährleistet.

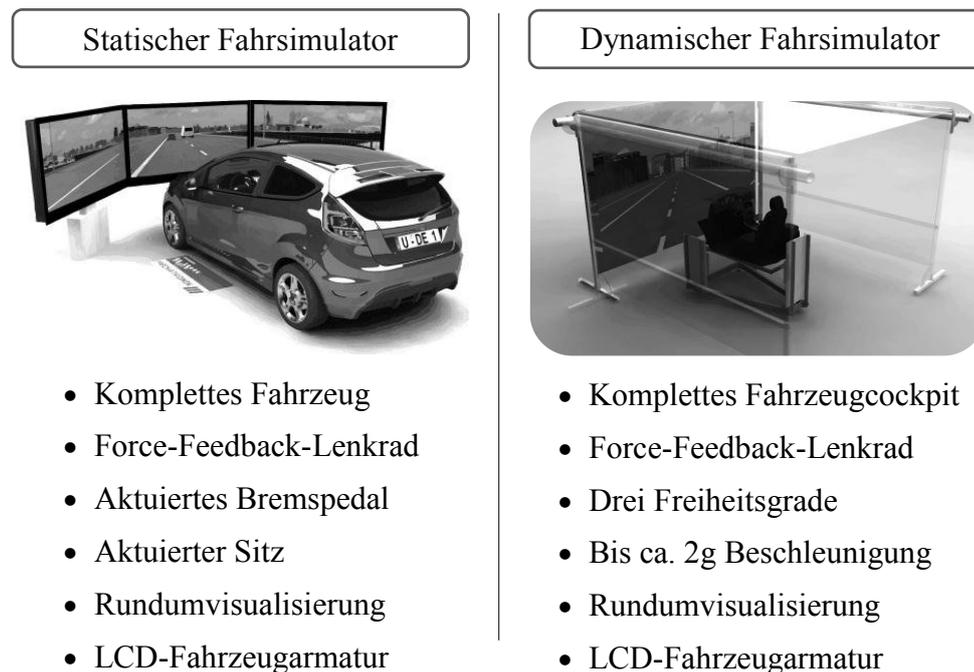


Abb. 7.9: Fahrsimulatorvarianten am Lehrstuhl für Mechatronik an der Universität Duisburg-Essen

Der dynamische Fahrsimulator ist eine kostengünstige Alternative zu den sonst sehr teuren bewegten Simulatoren wie beispielsweise der dynamische DLR-Fahrsimulator in Braunschweig oder der kürzlich fertiggestellte dynamische Fahrsimulator des Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren (FKFS) der Universität Stuttgart (für eine Simulatorübersicht s. Hiesgen (2011)).

In dieser Arbeit wird eine Probandenstudie mithilfe des dynamischen Fahrsimulators durchgeführt. Der Simulator wird durch

- einen realitätsgetreuen individuellen Fahrerarbeitsplatz (vollwertiges Fahrzeugcockpit),
  - ein Force-Feedback-Lenkrad,
  - ein hochdynamisches elektromechanisches Antriebssystem,
  - 3 Freiheitsgrade (Nicken, Wanken, Heben),
  - Beschleunigungen bis zu 2g,
  - Schwingungsanregung bis 40 Hz,
  - Nutzlast bis zu 350 kg,
  - Transportierbarkeit und
  - Rekuperationsmöglichkeiten
- charakterisiert.

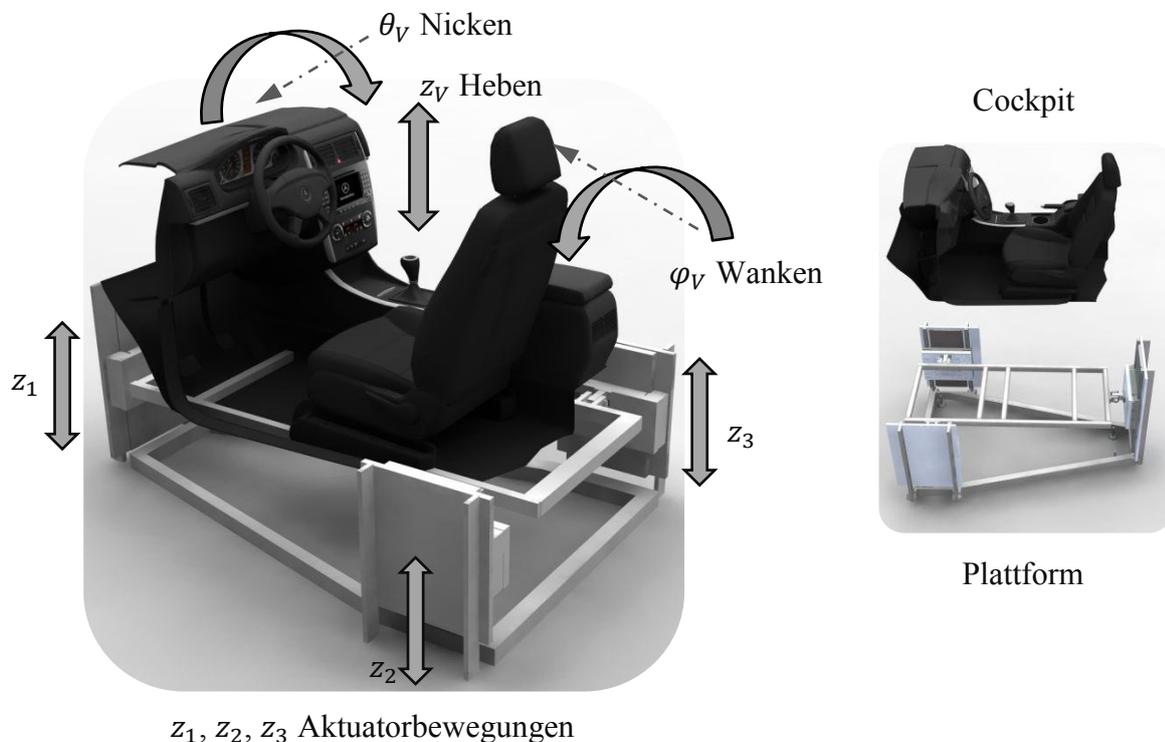


Abb. 7.10: Bewegungsrichtungen und Aktuatorbewegungen des Fahrsimulators

Die Wank-, Nick- und Hubbewegung werden durch das Fahrzeugmodell bestimmt und durch inverse Kinematik auf Freiheitsgrade der Plattform umgerechnet. Sie sind somit auf den Fahrer eingepreist. Die Lenkmomente werden über einen permanenterregten Elektromotor erzeugt. Das Rückstellmoment, das der Proband spürt, wird aus der aktuellen Fahrgeschwindigkeit, dem momentanen Lenkradwinkel und dem Nachlauf errechnet (s. Hesse (2011) und Hiesgen (2011)).

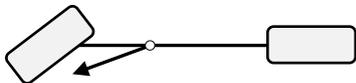
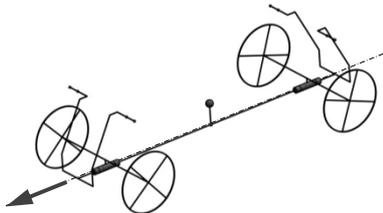
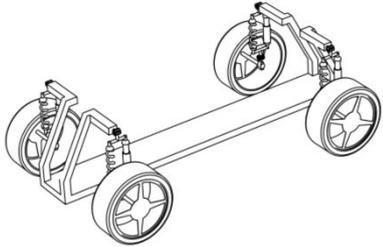
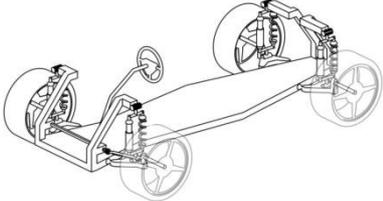
### 7.2.3 Fahrsimulator-Fahrzeugmodelle

Die Probandenstudie untersucht den Einfluss von unterschiedlich komplexen Fahrzeugmodellen auf das empfundene Fahrverhalten der Probanden. Das Augenmerk liegt darauf, wie sich die unterschiedlichen Fahrzeugmodelle auf die vestibuläre Ebene und dadurch auf den Immersionsgrad des Fahrers auswirken. Hierzu werden die Fahrzeugmodelle am bewegten Fahrsimulator implementiert und die Bewegungsplattform abhängig von den Modellfreiheitsgraden und dem Fahrverhalten aktuiert.

Die verwendeten Fahrzeugmodelle sind ein nichtlineares Einspurmodell (Modell A), ein nichtlineares Einspurmodell gekoppelt mit einem Wankmodell (Modell B), ein einfaches Zweispurmodell (Modell C) und das generische Zweispurmodell (Modell D) (s. Tabelle 7.1). (Mehr Informationen zu den Modellen sind in Schramm (2010, Kapitel 10) gegeben).

Die ersten beiden Fahrzeugmodelle in Tabelle 7.1 (Modell A und B) unterscheiden sich nur in der Wankbewegung, die durch eine reine Kraftkopplung zwischen dem nichtlinearen Einspurmodell und dem Wankmodell realisiert wird (keine kinematische Kopplung). Die Zweispurmodelle C und D besitzen die gleichen Freiheitsgrade (Tabelle 7.1), jedoch unterscheidet sich die Komplexität der Radaufhängung (s. Abschnitt 3.5 und 3.6). Die am Fahrsimulator auf den Fahrer einwirkenden Kräfte beim Beschleunigen oder Bremsen werden durch Nickbewegungen, die durch eine Kurvenfahrt erzeugten Kräfte durch eine Wankbewegung der Simulatorplattform eingepreist.

Tabelle 7.1: Fahrzeugmodelle der Probandenstudie

Fahrzeugmodell	Freiheitsgrade	Schematische Darstellung
<i>Modell A</i> Nichtlineares Einspurmodell	Ebene Translation, Gieren, 2 Raddrehung, → $f = 5$	
<i>Modell B</i> Nichtlineares Einspurmodell + Wankmodell	Ebene Translation, Gieren, Wanken, 2 Raddrehung, → $f = 6$	
<i>Modell C</i> Einfaches Zweispurmodell	Räumliche Translation, Nicken, Gieren, Wanken, 4 Raddrehungen, 4 Radeinfederbewegungen, → $f = 14$	
<i>Modell D</i> Generisches Zweispurmodell	Räumliche Translation, Nicken, Gieren, Wanken, 4 Raddrehungen, 4 Einfederbewegungen der MKS- Radaufhängungen, → $f = 14$	

Die Fahraufgabe der Probandenstudie ist der doppelte Spurwechsel (vgl. Abschnitt 7.2.4). Alle Modelle werden mit dem hybriden Optimierungsmethoden aus Kapitel 6 auf das querdynamische Fahrverhalten des Referenzfahrzeugs aus Kapitel 4 angepasst. Als Grundlage dienen die Daten des Referenzfahrzeugs (DM) bezüglich des Lenkwinkelsprungs (s. Kapitel 4). Das querdynamische Fahrverhalten eines Fahrzeugs während eines Lenkwinkelsprungs ist in erster Näherung ähnlich dem eines Fahrzeugs während des doppelten Spurwechsels und wird deshalb als Optimierungsmanöver verwendet. Nach der Optimierung konnte ein sehr ähnliches Fahrverhalten bei allen vier Modellen erreicht werden (s. Abb. 7.11 bis Abb. 7.13).

Tabelle 7.2 gibt die durch Optimierung der Modelle A-D erreichten relativen Abweichungen der Gütefunktionen zum Referenzfahrzeug beim Manöver Lenkwinkelsprung wieder. Die einzelnen Gütefunktionen wurden durch die Optimierung gut minimiert und weisen daher für alle vier Modelle einen kleinen Wert auf. Der quantitative Unterschied der Gütefunktionen zwischen den einzelnen Modellen ist verhältnismäßig gering.

Das Modell A verfügt über keinen Wankfreiheitsgrad, weshalb in Abb. 7.13 nur die Wankübertragung der Modelle B, C und D optimiert werden.

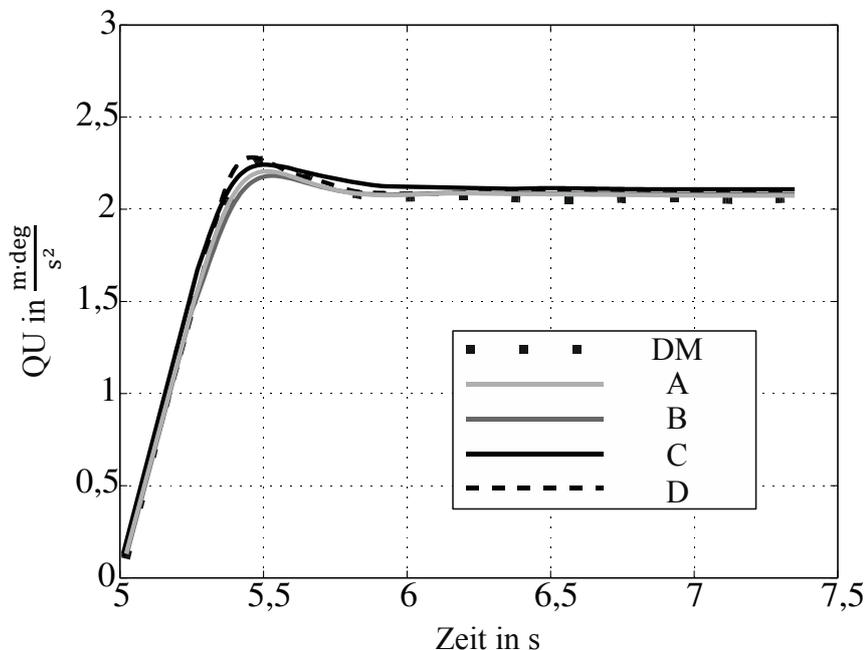


Abb. 7.11: Querübertragung der Referenz (DM) und der Modelle A, B, C und D nach der Optimierung

Tabelle 7.2: Durch Optimierung der Modelle A-D erreichte relative Abweichung der Gütefunktionen zur Referenz beim Manöver Lenkwinkelsprung

Manöver	Modell	$\varepsilon_{K_{QU}}$ in %	$\varepsilon_{K_{GU}}$ in %	$\varepsilon_{K_{WU}}$ in %
Lenkwinkelsprung	A	3,49	3,41	-
	B	3,45	3,30	3,81
	C	3,25	2,82	3,2
	D	2,99	2,48	2,01

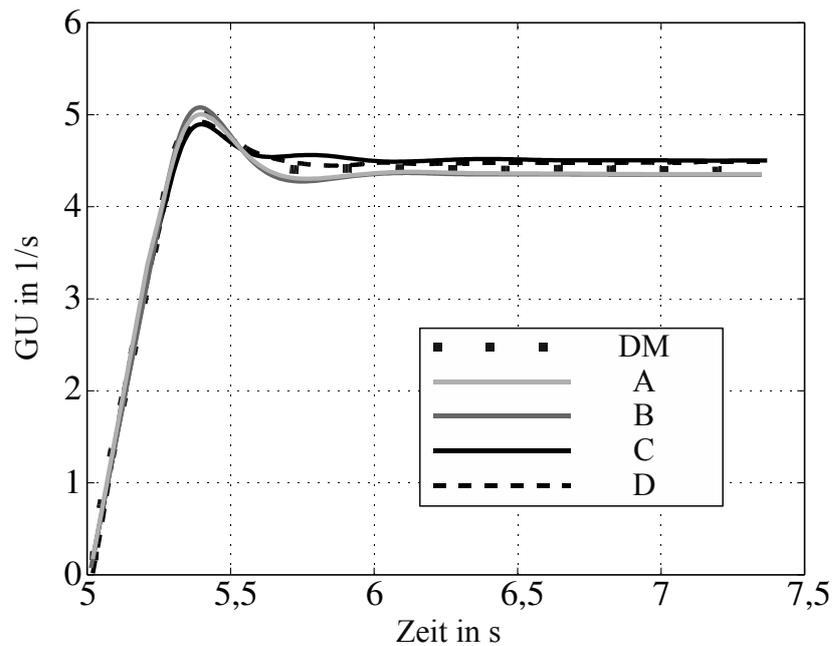


Abb. 7.12: Gierübertragung der Referenz (DM) und der Modelle A, B, C und D nach der Optimierung

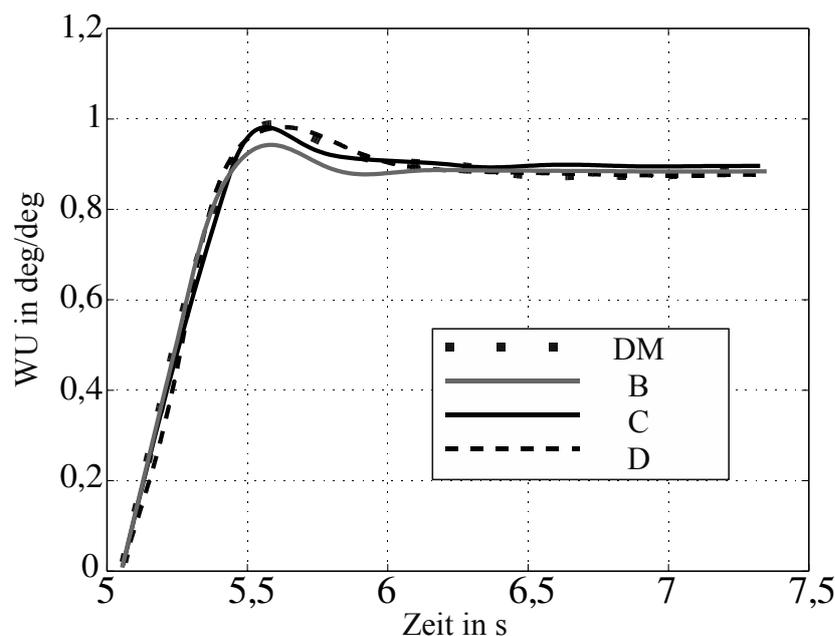


Abb. 7.13: Wankübertragung der Referenz (DM) und der Modelle B, C und D nach der Optimierung

#### 7.2.4 Versuchsaufbau und Durchführung

In der Simulatorstudie wird das Fahrgefühl von Probanden bei unterschiedlichen Fahrzeugmodellen mittels eines bewegten Fahrsimulators untersucht. Hierzu bedarf es eines Manövers, das sowohl die Quer- als auch die Längsdynamik beansprucht. Der doppelte Spurwechsel (oft auch Elchtest genannt) stellt ein anspruchsvolles querdynamisches Manöver dar. In Hesse (2011) wurde ein von der Norm ISO 3882-2 (ISO 3882-2 1997) abgewandelter Spurwechsel entwickelt, der in einer Probandenstudie zum Einsatz kam, um den Einfluss eines möglichen Leistungsausfall einer elektrischen Servolenkung auf den

Fahrer zu untersuchen. Der doppelte Spurwechsel ist ein Closed-Loop-Manöver, bei dem der Fahrer das Fahrzeug durch eine Pylonengasse manövriert. In der vorliegenden Arbeit wird der Spurwechsel aus Hesse (2011) übernommen und um eine Haltelinie am Ende des Spurwechselmanövers erweitert (s. Abb. 7.14). An der Haltelinie sollten die Probanden das Fahrzeug zum Stehen bringen.

Die Fahraufgabe setzt sich aus folgenden Schritten zusammen: der Fahrer fährt aus dem Stillstand los und aktiviert den Fahrgeschwindigkeitsregler, der das Fahrzeug auf 60 km/h beschleunigt. Das Fahrzeug nähert sich der ersten von drei Pylonengassen mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h (s. Abb. 7.15). Die Aufgabe des Fahrers besteht darin, das Fahrzeug mittig durch die Pylonengassen zu lenken. Nach dem Durchfahren der dritten Pylonengasse soll der Fahrer das Fahrzeug vor der Haltelinie zum Stehen bringen (s. Abb. 7.16). Die Probanden fahren das Manöver mit jedem Modell dreimal. Nach dem Fahren mit dem jeweiligen Fahrzeugmodell füllen die Probanden einen Fragebogen aus. Durch Permutation der Modellreihenfolge (statistische Versuchsplanung) wird versucht, einen Gewöhnungseffekt (Antizipation) zu vermeiden.

Tabelle 7.3 fasst die demografischen Daten der Probanden zusammen. An der Probandenstudie nahmen insgesamt 48 Personen teil. Über 80% der Probanden waren männlich. Die Fahrerfahrung zeigte sowohl im Hinblick auf die pro Jahr gefahrenen Kilometer als auch die Erfahrung in Jahren ein breites Spektrum. Die Probanden wurden im Vorfeld über die Fahraufgabe unterrichtet. Vor Versuchsbeginn bekamen die Probanden in einer Testfahrt die Möglichkeit, sich mit dem Simulator und der Fahraufgabe vertraut zu machen. Hierfür wurde Modell B eingesetzt (s. Tabelle 7.1). Für Menschen ohne Simulatorerfahrung ist die Fahraufgabe zunächst ungewohnt, weshalb diese eine längere Eingewöhnungszeit benötigen. Die Dauer der einzelnen Probandenstudien betrug im Durchschnitt circa 30 Minuten.

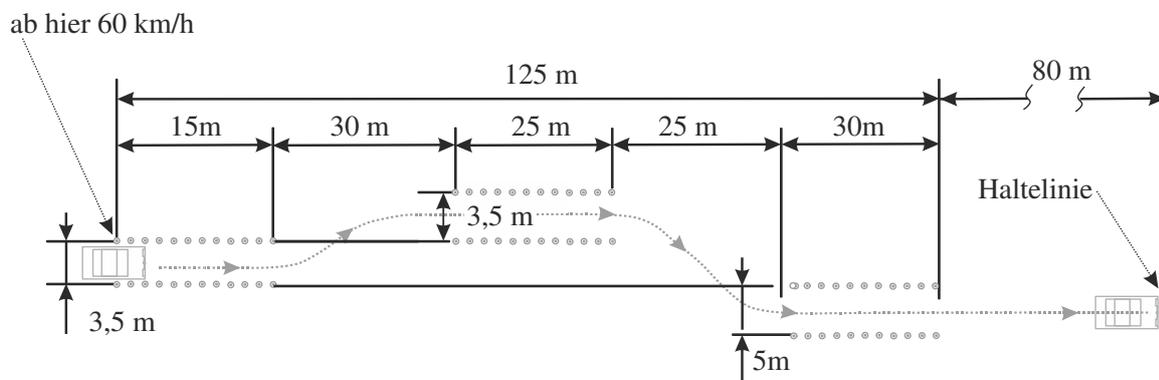


Abb. 7.14: Spurwechsel übernommen aus Hesse (2011) und um eine Haltelinie erweitert



Abb. 7.15: Visualisierung der Einfahrt in die erste Pylonengasse

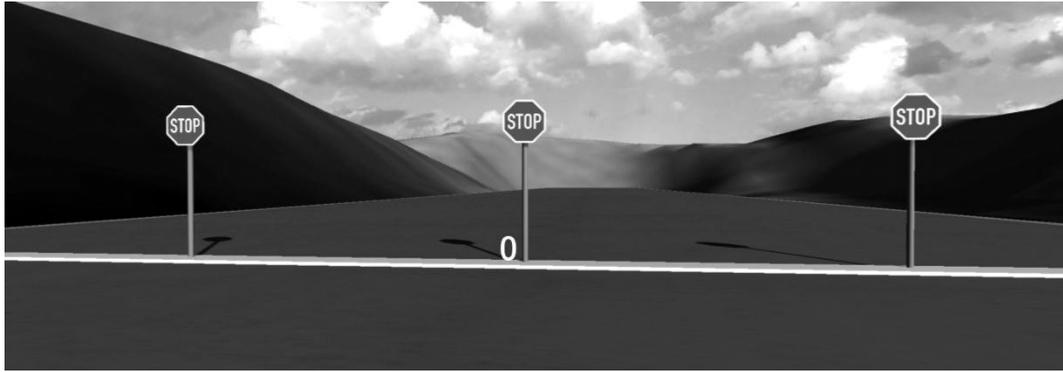


Abb. 7.16: Visualisierung des Anhaltens vor der Haltelinie

Tabelle 7.3: Demografiedaten der an der Simulatorstudie teilnehmenden Probanden

Kenngröße	Durchschnitt	Minimum	Maximum
Alter	31	18	56
Jahreskilometer	15.929	4.500	35.000
Fahrerfahrung in Jahren	13	1	38
Fahrsimulatorerfahrung	36% ja	64% nein	
Geschlecht	19% weiblich	81% männlich	

Neben den im Fahrsimulator relativ problemlos messbaren physikalischen und modellierten Größen des Fahrzeugs wurden auch physiologische und psychologische Phänomene durch eine qualitative und quantitative Auswertung eines Fragebogens untersucht (s. Anhang A2). Die Auswertung der physiologischen Auswirkungen auf den Menschen beschreibt Hesse (2011).

### 7.2.5 Versuchsauswertung und Bewertung des Immersionsgrades

Die Auswertung der Probandenstudie erfolgte mithilfe der Varianzanalyse (Analysis of Variance (ANOVA)) in Anlehnung an Bortz (2006). Die Abhängigkeit des Immersionsgrades von der Fahrzeugmodellkomplexität soll sowohl auf der Basis des subjektiven Empfindens als auch von objektiven technischen Größen bewertet werden. Der Fragebogen (Anhang A2) erfasst zunächst demografische Informationen des Probanden, um beispielsweise eine Übersicht über Alter und Fahrerfahrung zu erhalten. Im Hauptteil des Fragebogens werden Fragen zum Fahrempfinden und zu den empfundenen Bewegungen beim Fahren gestellt. Je nach Fragestellung müssen die Probanden eigene Angaben machen und eine absolute Aussage treffen.

Die Auswertungsdarstellung der Fragen erfolgt kompakt durch gekerbte Kastengrafiken (englisch: notched boxplots). Die Kastengrafik ist ein Diagramm zur grafischen Darstellung von Datenverteilung. Die markanten Werte sind durch fünf Markierungen charakterisiert. Der Median, der den mittleren Strich im gekerbten Kasten darstellt, teilt das gesamte Diagramm in zwei Hälften, in dem jeweils 50% der Daten liegen. Die äußeren Kanten sind jeweils das untere (25. Perzentil) und obere Quartil (75. Perzentil) und die Antennenenden die Extremwerte (s. Abb. 7.17). Zwischen dem unteren bzw. oberen Quartil und den Antennenenden liegen jeweils 25% der Daten. Der Kasten entspricht dem Interquartilsabstand (IQA), also dem Bereich, in dem die mittleren 50% der Daten bzw. der Probandenantworten liegen und der ein Maß für die Streuung der Daten ist. Als Aus-

reißer werden Werte betrachtet, die außerhalb des 1,5-fachen IQA liegen. Selbige sind durch ein Pluszeichen gekennzeichnet (Polasek 1994).

Die Kerbenlänge in den Kastengrafiken (s. Abb. 7.17) wird auch als Konfidenzintervall für den Median bezeichnet. Dadurch kann mit gekerbten Kastengrafiken grafisch festgehalten werden, welche Paare (hier Modellpaare) sich bei einer entsprechenden Probandenfragestellung signifikant (überzufällig) unterscheiden. Die Kerbenlänge gibt also Aufschluss darüber, wie sehr der Median einer Verteilung in Abhängigkeit von der Anzahl der Probanden und der Streuung variiert (Polasek 1994). Wenn sich die Kerbenbereiche von zwei Kastengrafiken nicht überschneiden, ist der Unterschied in der Regel statistisch signifikant. Ist die Kerbenlänge länger als das untere bzw. obere Quartil, dann wird dies durch die invertierte Form des gekerbten Boxplot dargestellt (s. rechte Seite Abb. 7.18 Modell D) (Polasek 1994).

Ein weiteres Maß zur Bewertung statistischer Untersuchungen ist der p-Wert ( $p$  steht für probability). Er wird auch als Signifikanzwert bezeichnet. Der p-Wert beschreibt eine Wahrscheinlichkeit und nimmt Werte zwischen Null und Eins an ( $p \in [0,1]$ ). Je kleiner der p-Wert, desto geringer die Wahrscheinlichkeit, unter Annahme der Nullhypothese gleiche Ergebnisse zu erzielen. Die Nullhypothese besagt in der Statistik, dass bei der Untersuchung eines Effektes kein Unterschied zwischen verschiedenen Verteilungen besteht. In der vorliegenden Analyse bedeutet das, dass bei der Untersuchung eines bestimmten Phänomens kein Unterschied zwischen den Modellen besteht. Ab der Unterschreitung eines bestimmten p-Werts wird die Nullhypothese verworfen und das Resultat als statistisch signifikant bezeichnet. In verschiedenen wissenschaftlichen Disziplinen hat sich ein Signifikanzlevel von 5% (p-Wert = 0.05) etabliert, ab dem die Nullhypothese abgelehnt werden kann (Fischer 1990).

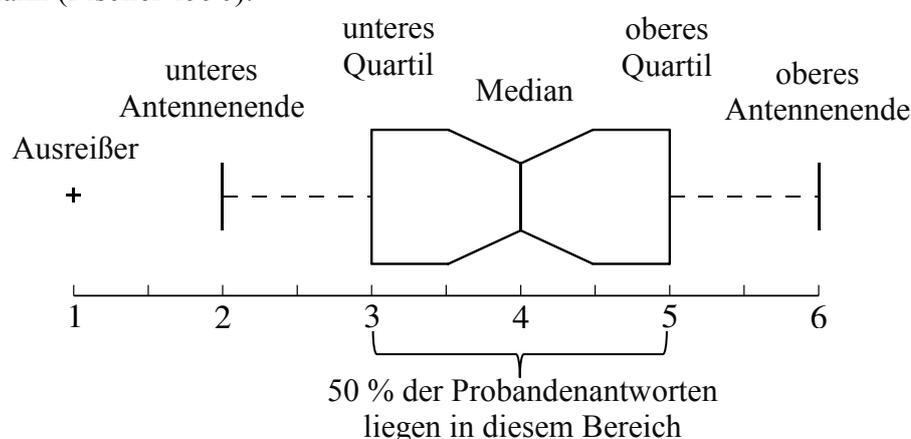


Abb. 7.17: Beispiel für eine gekerbte Kastengrafik

### **Subjektive und Qualitative Analyse**

Das Spektrum der Antwortmöglichkeit im Fragebogen umfasst eine Skala von 1 bis 6. Der Proband hat die Möglichkeit, das entsprechende Modell zwischen ungewohnt und vertraut zu bewerten (Abb. 7.18). Antwort 1 entspricht einem sehr ungewohnten Fahrverhalten, Antwort 6 einem sehr vertrauten Fahrverhalten. Die Zahlen 2 und 3 entsprechen einem weiteren Abschwächen des ungewohnten Verhaltens bzw. 4 und 5 ein Abschwächen des vertrauten Fahrverhaltens. Am linken Rand der jeweiligen Kastengrafik werden die gemittelten Antwortwerte zum entsprechenden Fahrzeugmodell angegeben. Unter der Kastengrafik ist der p-Wert dargestellt.

Die linke Hälfte von Abb. 7.18 zeigt, dass die Frage, ob das Fahrverhalten ungewohnt oder vertraut ist, mit einem Antwortwert von  $p = 0,84$  keine statistisch verwertbare Aussage zum Modellunterschied gibt. Demnach werden alle vier Modelle durch die Probanden als ähnlich ungewohnt bzw. vertraut eingestuft. Die Antworten zu den Modellen streuen stark.

In der rechten Hälfte von Abb. 7.18 befinden sich die ausgewerteten Antworten zur Frage, ob das Fahrverhalten eher dynamisch oder schwerfällig ist. Mit einem Wert von  $p = 0,37$  kann auch hier keine statistisch haltbare Aussage darüber getroffen werden, ob die Modelle sich in ihrem dynamischen bzw. schwerfälligen Fahrverhalten voneinander unterscheiden. Die gemittelten Antworten zu Modell C und D verleiten zu der Annahme, dass diese Modelle im Vergleich zu den Modellen A und B in ihrem Fahrverhalten dynamischer sind (alle Simulatorfreiheitsgrade werden genutzt). Dies wird jedoch mit Hinblick auf die Anzahl der Probanden und dem p-Wert als nicht signifikant eingestuft.

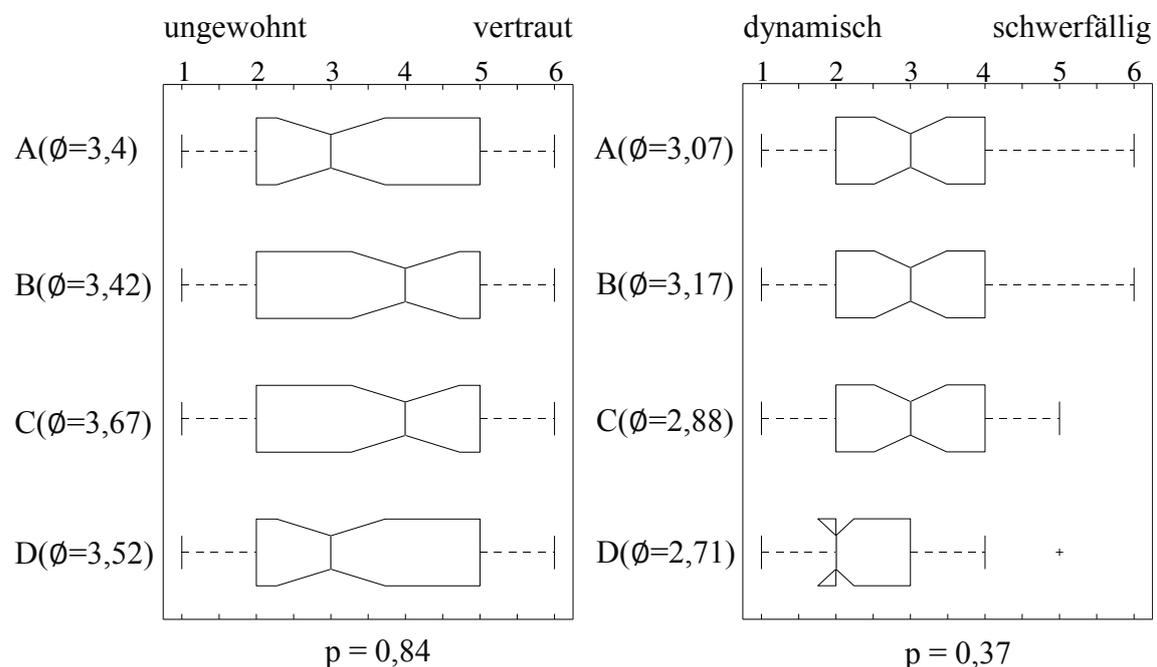


Abb. 7.18: Auswertung der Antworten zum ungewohnten oder vertrauten bzw. dynamischen oder schwerfälligen Fahrverhalten

Wie aus der linken Hälfte der Abb. 7.19 zu entnehmen ist, wird das Fahrverhalten der Modelle im Durchschnitt als eher sicher und weniger gefährlich bewertet. Mit einem Wert von  $p = 0,39$  hebt sich hier kein Modell signifikant von den anderen ab. Bei Betrachtung der Mittelwerte scheint es, als würden die Modelle A und B im Vergleich zu den Modellen C und D als sicherer bewertet. Es ist anzumerken, dass die Antworten zu Modell A im Vergleich zu den anderen Modellen mehr streuen.

Mit einem Wert von  $p = 0,001$  kann eine statistisch signifikante Aussage darüber getroffen werden, dass die Modelle A und B ein sanfteres Fahrverhalten aufweisen als die Modelle C und D (s. Abb. 7.19 rechte Seite). Dies kann auf die Modellfreiheitsgrade zurückgeführt werden, da Modell A keine Freiheitsgrade und Modell B nur den Wankfreiheitsgrad besitzt. Dadurch wird der Fahrsimulator im Vergleich zu den Modellen C und D weniger bewegt und die Probanden beurteilen das Fahrverhalten als eher sanft. Beim Vergleich der Mittelwerte ist Modell D als am wenigsten sanft in seinem Fahrverhalten bewertet worden.

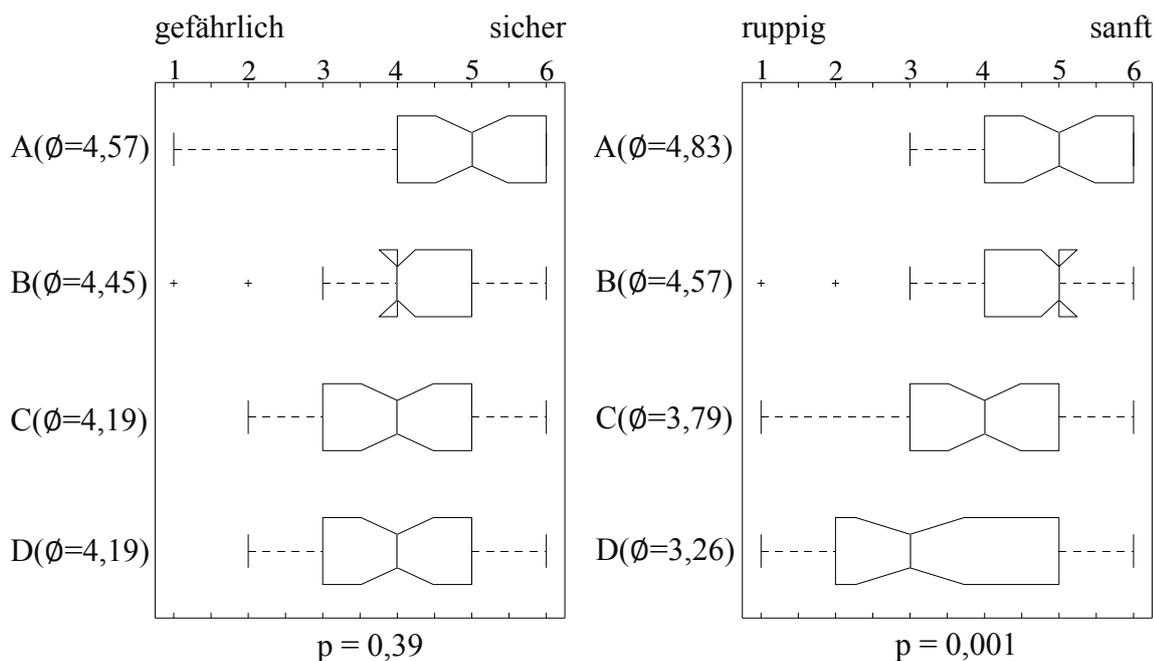


Abb. 7.19: Auswertung der Antworten zum gefährlichen oder sicheren bzw. ruppigen oder sanften Fahrverhalten

Der Mittelwert der Modelle in der linken Seite von Abb. 7.20 zeigt, dass die Modelle A und B im Vergleich zu den Modellen C und D als eher kontrollierbar bewertet werden. Mit einem Wert von  $p = 0,25$  ist jedoch kein signifikanter Unterschied zwischen den Modellen feststellbar. Ebenso werden die Modelle A und B als angenehmer bewertet als Modell C und D (s. rechte Seite in Abb. 7.20). Mit einem niedrigen Wert von  $p = 0,085$  fällt das angenehmere Fahrverhalten der Modelle A und B deutlicher aus. Der Grund hierfür könnte sein, dass der Fahrsimulator der Modelle A und B in seiner Bewegung eingeschränkt wird. Interessant an dieser Stelle ist, dass sich ein Wert von  $p < 0,05$  einstellt, wenn die Ausreißer vernachlässigt werden. Somit läge ein signifikanter Modellunterschied vor.

Im Folgenden werden die Antworten zu den Fragen bezüglich des Bewegungsverhaltens des simulierten Fahrzeugs und der Fahrempfindung der Probanden ausgewertet.

Abb. 7.21 zeigt die Auswertungen zum Bewegungsverhalten und Fahrverhalten der Modelle. Das Bewegungsverhalten der Modelle B, C und D wird eher dem eines realen PKWs zugeschrieben (s. Abb. 7.21 linke Seite). Mit einem Signifikanzwert von  $p = 0,01$  ist dies auch statistisch feststellbar.

Das Fahrverhalten des Modells A mit einem Wert von  $p = 0,01$  wird im Vergleich zu den restlichen Modellen als eher unrealistisch eingestuft (s. Abb. 7.21 rechte Seite). Das ist plausibel, da der Fahrsimulator mit Modell A nicht bewegt wird. Interessant hierbei ist, dass durch nur eine Wankbewegung beim Fahrsimulator des Modells B ein zu den Modellen C und D ähnlich guter Immersionsgrad erzeugt wird.

Die Auswertung der Fragen, wie gut die Probanden der Fahrspur des Elchtests folgen und an der anschließenden Haltelinie stoppen konnten, ist in Abb. 7.22 festgehalten. Mit  $p = 0,49$  kann kein signifikanter Unterschied zwischen den Modellen bezüglich des Folgens der Fahrspur festgestellt werden (s. linke Hälfte Abb. 7.22). Betrachtet man nur den Mittelwert, scheint es, dass die Probanden das Modell A als eher geeignet empfinden, um der Fahrspur zu folgen (s. linke Hälfte Abb. 7.22). Ein Grund hierfür könnte sein, dass der

Fahrer nicht durch Wank- und Nickbewegungen in der Lenkaufgabe beeinflusst wird. Mit  $p = 0,11$  kann auch kein signifikanter Modellunterschied bezüglich des Stoppens an der Haltelinie festgestellt werden (s. rechte Hälfte Abb. 7.22). Werden die Mittelwerte betrachtet, tendieren die Aussagen dazu, dass mit den Modellen C und D besser an der Haltelinie gestoppt werden kann. Dies könnte an der Nickbewegung der Modelle liegen, die den Probanden eventuell ein Gefühl für die Längsverzögerung vermittelt.

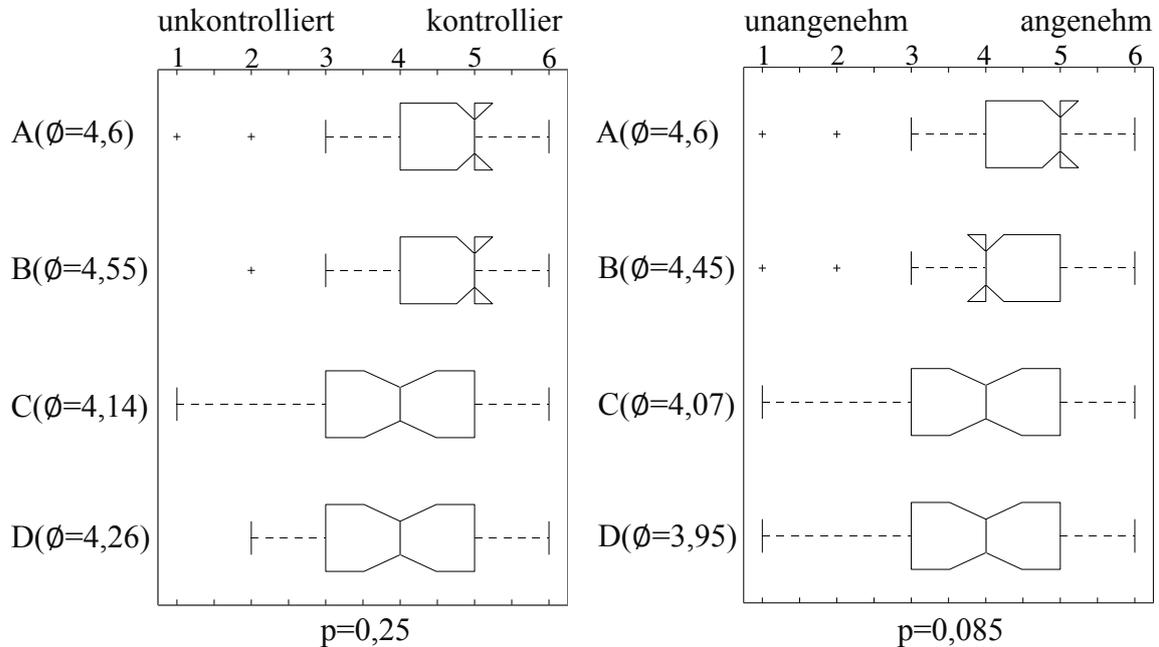


Abb. 7.20: Auswertung der Antworten zum unkontrollierten oder kontrollierten bzw. unangenehmen oder angenehmen Fahrverhalten

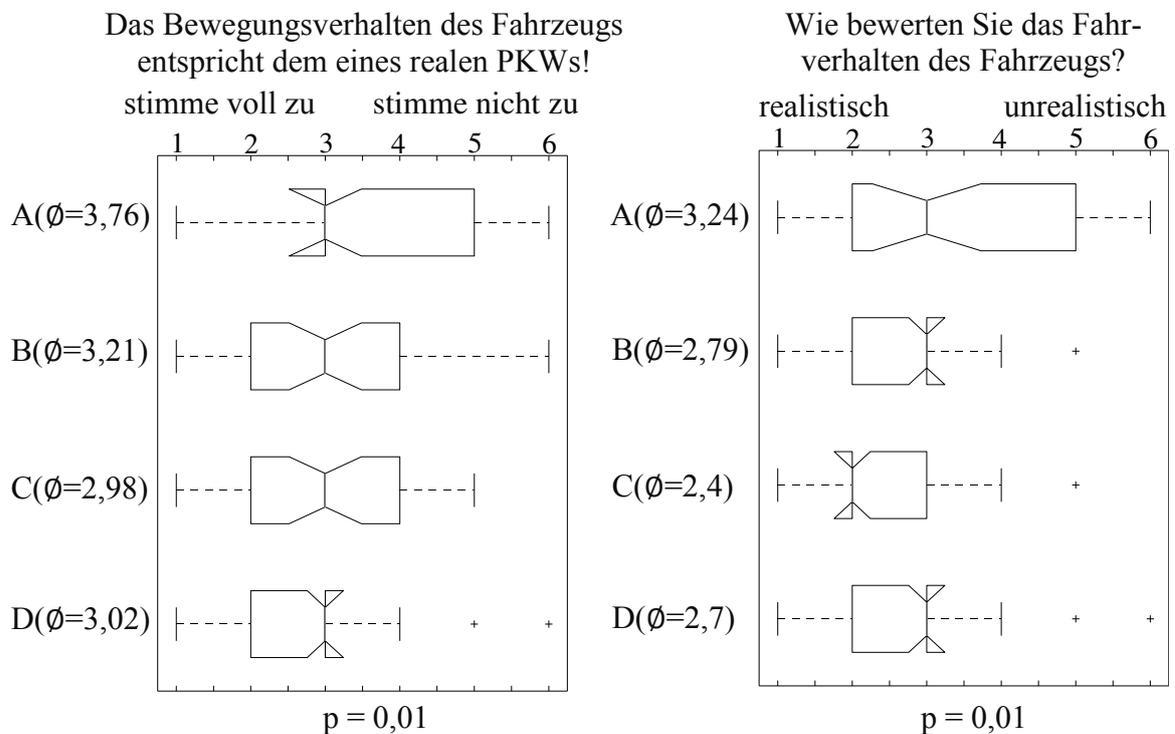


Abb. 7.21: Auswertung der Antworten zum Fahrzeugbewegungsverhalten und zur Bewertung des Realitätseindrucks des Fahrverhaltens

Die Auswertung der Frage, wie die Probanden das Wankverhalten der Modelle empfunden haben, wird in der linken Hälfte der Abb. 7.23 dargestellt. Demnach wird das Modell A als unrealistisch empfunden, was mit einem Wert von  $p = 0,001$  auch statistisch belegt ist. Da der Fahrsimulator mit dem Modell A im Vergleich zu den anderen Modellen keine Bewegungsrückwirkung auf den Fahrer verursacht, ist dieses Ergebnis stichhaltig.

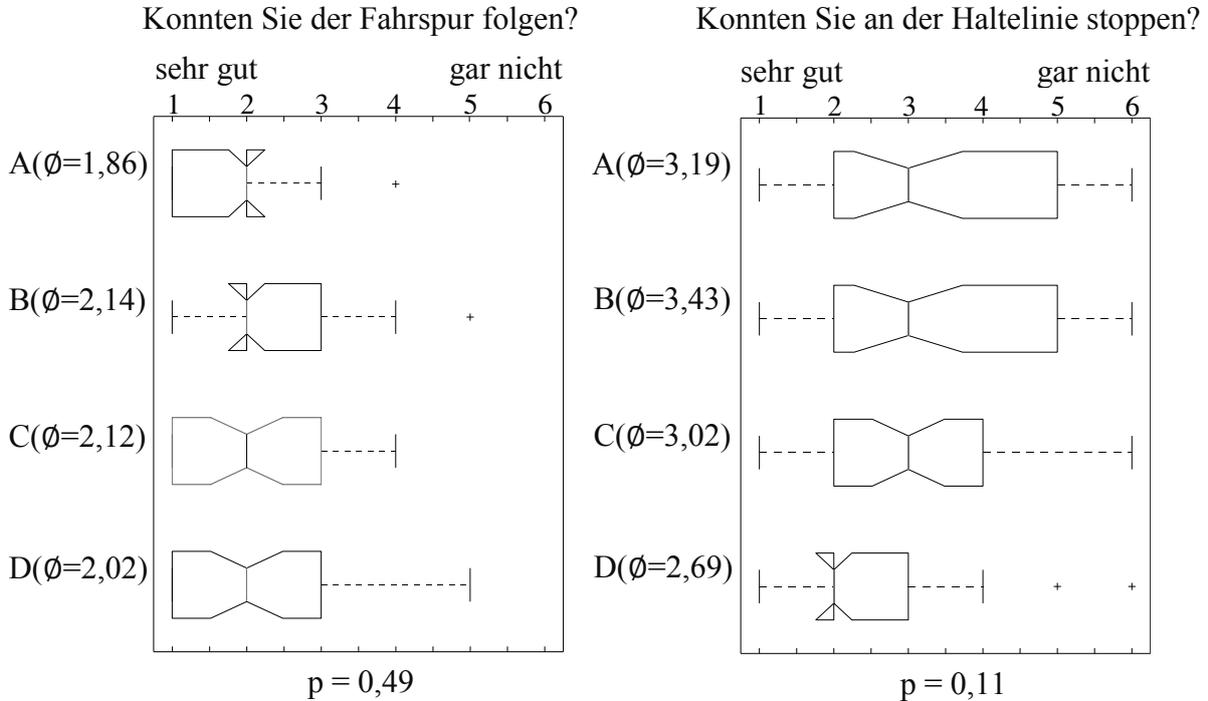


Abb. 7.22: Auswertung der Fragen, wie gut die Probanden der Fahrspur folgen und an der Haltelinie stoppen konnten

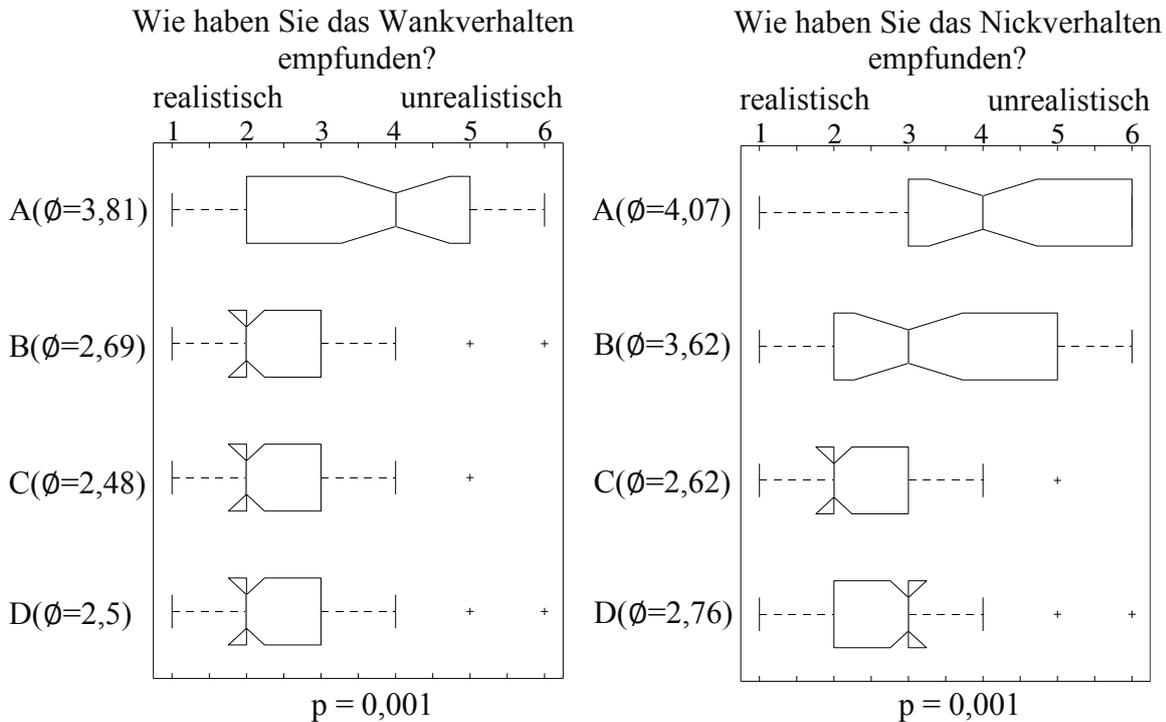


Abb. 7.23: Auswertung der Fragen, wie realistisch das Wank- bzw. Nickverhalten der Fahrzeugmodelle ist

Das Nickverhalten wird bei den Modellen A und B als eher unrealistisch bewertet (s. rechte Hälfte in Abb. 7.23), was mit einem Wert von  $p = 0,001$  als statistisch erwiesen gilt. Der Nickfreiheitsgrad wird mit beiden Modellen nicht wiedergegeben, weshalb ist auch dieses Ergebnis schlüssig.

### ***Quantitative und Objektive Analyse***

Die Aufzeichnungen der Probanden-Fahrmanöver werden nun statistisch ausgewertet. Bewertet werden die Querabweichungen von der Referenzspur während des Spurwechselmanövers. Die Referenzspur wurde so aufgebaut, dass sie einem Minimum an Querbeschleunigungsänderung während des Spurwechsels genügt (s. Kumar (1995)). Zur Erzeugung der Referenzspur wurden die Mittelpunkte der drei Pylonengassen als Fixpunkte von Splinekurven gewählt. Eine solche Fahrweise verursacht eine kontinuierlich hohe Seitenführungskraft am Reifen und beugt einem Ausbrechen des Fahrzeugs vor. Zudem führt die Spur mittig durch die Pylonengasse (den Probanden wurde vor dem Test mitgeteilt, dass sie mittig durch die Pylonengasse fahren sollen). Ferner wird der Halteabstand zur Haltelinie bewertet. Im oberen Teil von Abb. 7.24 sind exemplarisch die gemittelten Spurwechsel, die der dritte Proband mit den vier Modellen gefahren ist, gegen die Referenzspur dargestellt. Bei diesem Probanden ist erkennbar, dass er mit allen Modellen relativ nahe an der Referenzspur gefahren ist. Beim Eintritt in die dritte Pylonenreihe ist der Proband mit dem Modell A am nächsten zur Referenz (Gassenmitte) gefahren. Im unteren Teil der Abb. 7.24 ist die gemittelte Haltedistanz zur Haltelinie eingezeichnet. Mit Modell B bzw. C konnte der Proband nahe an der Haltelinie stoppen.

Die Auswertungen der aufgezeichneten Spurwechseltrajektorien und des Haltemanövers der gesamten Probandenstudie zeigt Abb. 7.25. Die Auswertung des Spurwechsels ergibt mit einem Wert von  $p = 0,39$  keine signifikanten Unterschiede der gefahrenen Modelle (s. linke Hälfte Abb. 7.25). Der gemittelte Querabstand zur Referenztrajektorie aller Probanden liegt bei unter einem Meter. Die Probanden sind demnach mit keinem der Modelle signifikant besser oder schlechter durch den Spurwechsel gefahren. Der Grund hierfür könnte die Anpassungsfähigkeit der Fahrer an die unterschiedlichen Modelle sein. Um eine signifikante Aussage darüber zu erhalten, mit welchem Modell der Spurwechsel am besten gefahren werden kann, müssten zusätzliche Probanden an der Studie teilnehmen. Wird nun die Auswertung des Haltemanövers betrachtet (s. Abb. 7.25 rechts), ist mit einem Wert von  $p = 0,011$  ein signifikanter Unterschied zwischen den Modellen festzustellen. Demnach können die Probanden mit den Modellen C und D näher an der Haltelinie stoppen. Dies ist nachvollziehbar, da der Nickfreiheitsgrad eine gute Rückmeldung über die Längsverzögerung gibt. Hierbei kommt es zu einer relativen Übereinstimmung mit der subjektiven Auswertung der Frage, wie gut die Probanden an der Haltelinie stoppen konnten (s. rechte Hälfte Abb. 7.22). Bei der Betrachtung der durchschnittlichen Haltedistanzen ist auffällig, dass mit dem Modell B näher an der Haltelinie gestoppt wurde als mit dem Modell A, obwohl beide Modelle keinen Nickfreiheitsgrad besitzen. Dies kann damit zusammenhängen, dass für die Eingewöhnung der Probanden vor dem Test das Modell B genutzt wurde, jedoch ist der Unterschied zwischen den Modellen A und B nicht signifikant.

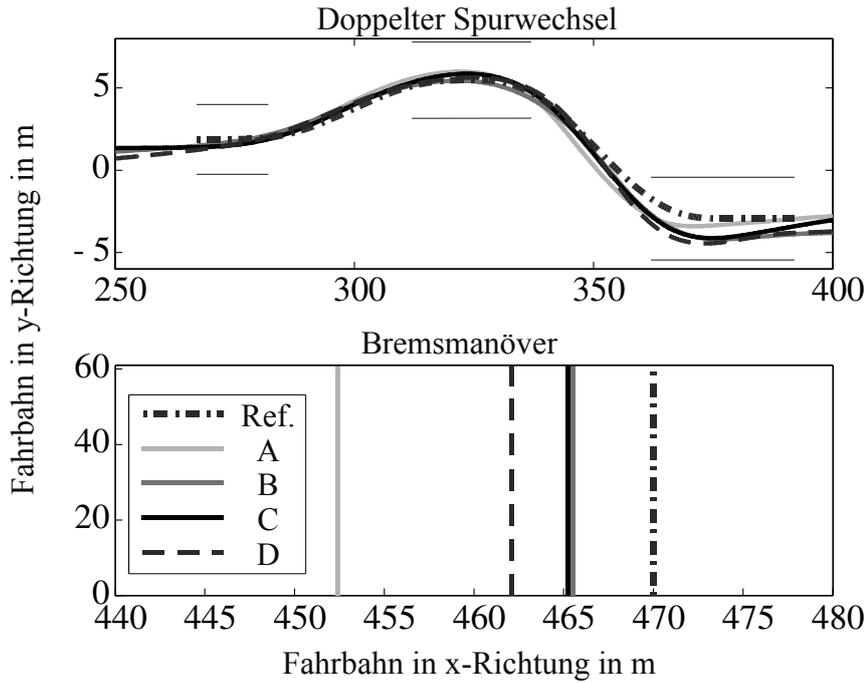


Abb. 7.24: Aufzeichnung des doppelten Spurwechsels und des Bremsmanövers des Probanden Nr. 3

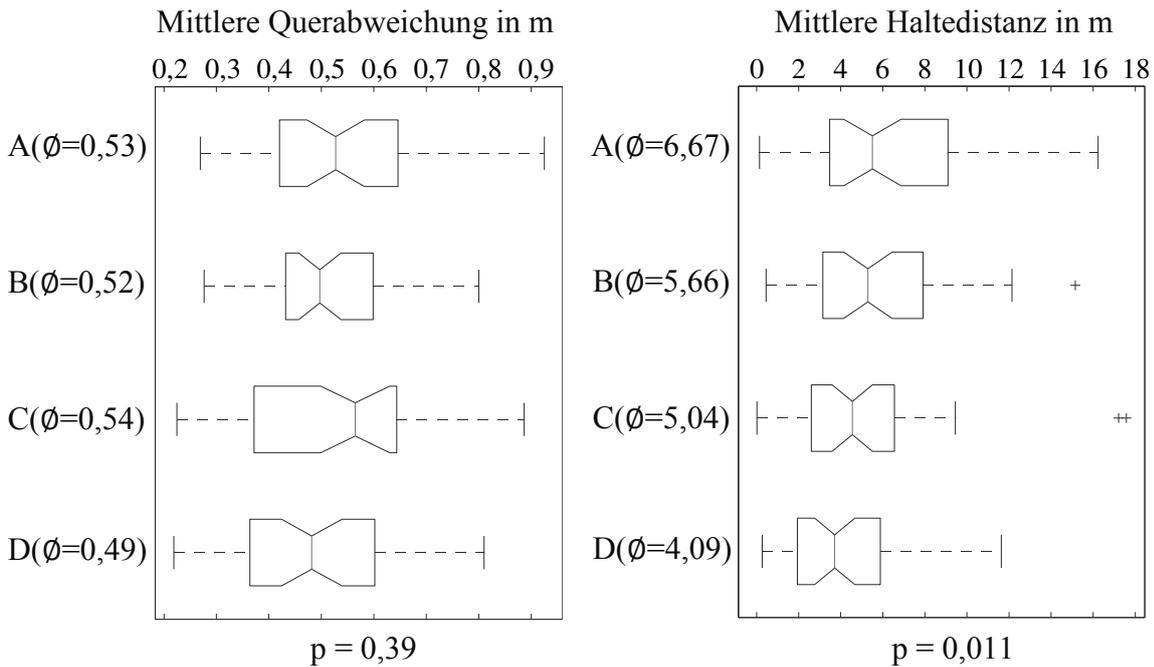


Abb. 7.25: Kastengrafik der gemessenen mittleren Querabweichung und Haltedistanz

### Fazit der Probandenstudie

Das Bewegungsverhalten der Modelle B, C und D wird subjektiv eher dem eines realen PKWs zugeschrieben. Sowohl das Fahrverhalten wie auch das Wank- und Nickverhalten des Modells A werden als eher unrealistisch im Vergleich zu den restlichen Modellen eingestuft, da der Fahrsimulator mit Modell A nicht bewegt wird. Auffällig ist, dass mit Modell B mit einem Simulatorfreiheitsgrad (Wanken) verglichen mit den Modellen C und D ein ähnlich guter Immersionsgrad erzeugt wird.

Bei Betrachtung der objektiven Auswertung des Haltemanövers können die Probanden mit den Modellen C und D näher an der Haltelinie stoppen. Dies ist zurückzuführen auf den Nickfreiheitsgrad, der eine gute Rückmeldung über die Längsverzögerung zu geben scheint. Zudem gibt es eine relative Übereinstimmung mit der subjektiven Auswertung der Frage, wie gut die Probanden an der Haltelinie stoppen konnten.

Abschließend lässt sich festhalten, dass der Modellkomplexitätsgrad nicht notwendigerweise hoch sein muss, um den Fahrer ausreichend in die hier gestellte Fahraufgabe und die Simulationsumwelt einzugewöhnen. Obwohl Modell C mit einer einfachen und Modell D mit einer komplexen Radaufhängung modelliert wurden, konnten bei den gefahrenen Manövern keine signifikanten Unterschiede im subjektiven Fahrverhalten festgestellt werden. Zudem ist anzumerken, dass Modell B mit dem einfachen Wankfreiheitsgrad abgesehen vom Haltemanöver eine gute Rückmeldung an den Fahrer sendete. Dieses Modell kann trotz seiner verhältnismäßig einfachen Modellierung für einen großen Teil der Fahraufgaben am Fahrsimulator empfohlen werden, da es einen guten und weitgehend realistischen Fahrerimmersionsgrad realisiert.

Festzuhalten ist, dass für dynamische Fahrmanöver ein Zweispurmodell zu empfehlen ist. Soll die Simulatorfahrt den linearen fahrdynamischen Bereich wiedergeben, ist der Immersionsgrad des Einspurmodells mit Wankerweiterung ausreichend. Weitere Einflussfaktoren für das subjektive Fahrempfinden sind ein realistisches Rückstellmoment am Lenkrad, eine detailgetreue Visualisierung und Motor-, Fahrt- und Umgebungsgeräusche.



## 8 Zusammenfassung, wissenschaftlicher Beitrag und Ausblick

Im Folgenden werden die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammengefasst und der wissenschaftliche Beitrag hervorgehoben. Das Kapitel schließt mit einem Ausblick auf zukünftige Arbeiten ab.

### 8.1 Zusammenfassung und wissenschaftlicher Beitrag

Mathematische Fahrzeugmodelle werden zur Forschung und Entwicklung von neuen funktionalen Systemen eingesetzt. Zudem tragen solche Modelle zum Verständnis der Fahrphysik und der Analyse von Wirkungsprozessen bei. Je nach Anwendung werden dafür Modelle eingesetzt, deren Komplexitätsgrad von linearen einfachen Modellen bis zu komplexen Mehrkörpermodellen reichen. Die Vorgehensweise der mathematischen Modellierung und der Systemidentifikation von Zweispurmodellen und Mehrkörpermodellen mit einer höheren Anzahl von Freiheitsgraden ist derzeit noch immer ungenügend gelöst. In Industrie und Forschung herrscht nach wie vor ein Bedarf an universell einsetzbaren, schnell an unterschiedliche Fahrzeugklassen anpassbaren und die Fahrphysik hinreichend genau beschreibenden Fahrzeugmodellen. Ebenso werden spezielle Modelle benötigt, die einzelne Subsysteme und ihre fahrdynamischen Auswirkungen detailliert wiedergeben, um dadurch z. B. bestimmte Fahrzeugklassen sehr genau abbilden zu können. Fahrzeugmodelle werden zur Auslegung von Fahrdynamikregelsystemen, aber auch zum Betrieb von Fahrsimulatoren benötigt. Speziell die Frage, wie komplex ein Fahrzeugmodell für den Betrieb eines bewegten Fahrsimulators sein muss, ist noch unzureichend beantwortet.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden exemplarisch zwei Fahrzeugmodelle unterschiedlicher Komplexität erstellt (ein generisches Fahrzeugmodell mit einfacher Radaufhängung und ein spezielles Fahrzeugmodell mit komplexer Radaufhängung). Die Modelle wurden auf der Grundlage eines topologischen Modellierungsansatzes zur Erstellung von Mehrkörpermodellen erstellt.

Das generische Fahrzeugmodell stellt durch seine vergleichsweise einfache Parametrierung ein vielseitig einsetzbares Modell dar. Zur Eigenschaftsabsicherung des generischen Modells wurde eine Vorgehensweise beschrieben, die eine Parameteridentifikation (Sensitivitätsanalyse) der Parameter mit einer nachgeschalteten Parameterwertefindung (Parameteroptimierung unter Verwendung eines hybriden Algorithmus) enthält. Das dafür notwendige Referenzmodell wurde aus Fahrzeugdaten und Fahrdynamikmessungen erstellt und spiegelt die Kompaktklasse mit ihren spezifischen Parametern und ihrem typischen Fahrverhalten wider.

Das spezielle Fahrzeugmodell bildet eine bestimmte Fahrzeugklasse sehr genau ab. Die Radaufhängungen werden dabei detailliert modelliert und können zudem modular ausgetauscht werden, wodurch eine Ausgangsbasis für unterschiedliche Fahrzeugtypen geschaffen wird. Für diesen modularen Ansatz wurden speziell eine MacPherson-Federbeinachse und eine Mehrlenkerradaufhängung umfassend hergeleitet. Dabei konnte die Radkinematik der MacPherson-Achse geschlossen gelöst werden. Die Radkinematik der Vorder- und Hinterachse wurde anhand von gemessenen Anlenkpunkten simuliert.

Der simulierte Sturz- und Spurwinkelverlauf beider Achsen wurde mit Messungen verglichen und bewertet. Daraufhin wurden das generische und spezielle Fahrzeugmodell anhand einer stationären Kreisfahrt fahrdynamisch gegeneinander verglichen und bewertet.

Das generische Modell konnte sehr gut an das Referenzmodell angepasst werden. Schon ein minimaler Satz an Parametern reicht aus, um das Fahrverhalten angemessen an die des Referenzmodells anzupassen. Auch wenn sich das generische Fahrzeugmodell vom speziellen Fahrzeugmodell in der Nachbildungstiefe unterscheidet, ist die Wiedergabe des Fahrverhaltens genügend und für viele Anwendungsfälle und Untersuchungen mehr als ausreichend. Zudem benötigt das generische Fahrzeugmodell im Vergleich zum speziellen weniger Rechenzeit und ist dadurch echtzeitfähig. Für viele Anwendungen, bei denen es auf die Rechenzeit ankommt, ist das generische Fahrzeugmodell ein willkommener Kompromiss zwischen Rechenzeit und Abbildungsgüte. Zudem besticht das generische Fahrzeugmodell durch seine Anpassungsfähigkeit an unterschiedliche Fahrzeugklassen.

Abschließend wurde in einem Praxistest das Fahrgefühl des Fahrers an einem bewegten Fahrsimulator in Abhängigkeit von der Fahrzeugmodellkomplexität bewertet. In dieser Probandenstudie wurden das Einspurmodell (Modell A), das erweiterte Einspurmodell (Modell B), ein Zweispurmodell mit vergleichsweise einfacher Radaufhängung (Modell C) und ein Zweispurmodell mit komplexer Radaufhängung (Modell D) verwendet. Die Untersuchungen ergaben, dass das Bewegungsverhalten der Modelle B, C und D subjektiv eher dem eines realen PKWs zugeschrieben werden. Sowohl das Fahrverhalten generell wie auch das Wank- und Nickverhalten des Modells A wurden im Vergleich zu den restlichen Modellen als eher unrealistisch eingestuft, da der Fahrsimulator mit Modell A nicht bewegt wurde. Auffallend ist zudem, dass mit Modell B, mit nur einem Simulatorfreiheitsgrad (Wanken), ein zu den Modellen C und D ähnlich guter Immersionsgrad erzeugt wird. Wird die objektive Auswertung des Haltemanövers betrachtet, konnten die Probanden mit den Modellen C und D näher an der Haltelinie stoppen. Dies ist auf den Nickfreiheitsgrad zurückzuführen, der offenbar eine gute Rückmeldung über die Längsverzögerung gibt. Zudem stimmte die subjektive Auswertung der Frage, wie gut die Probanden an der Haltelinie stoppen konnten, relativ überein.

Abschließend kann gesagt werden, dass der Modellkomplexitätsgrad nicht notwendigerweise hoch sein muss, um den Fahrer ausreichend in die Fahraufgabe und die Simulationsumwelt einzugewöhnen. Obwohl Modell C mit einer einfachen und Modell D mit einer komplexen Radaufhängung modelliert wurden, konnten keine signifikanten Unterschiede im subjektiven Fahrempfinden festgestellt werden. Zudem ist anzumerken, dass Modell B mit dem einfachen Wankfreiheitsgrad, abgesehen vom Haltemanöver, eine gute Rückmeldung an den Fahrer sendete. Dieses Modell kann trotz seiner verhältnismäßig einfachen Modellierung für einen großen Teil an Fahraufgaben am Fahrsimulator empfohlen werden, da es einen guten und weitgehend realistischen Fahrerimmersionsgrad wiedergibt.

## **8.2 Ausblick**

Die vorliegende Arbeit hat eine Grundlage geschaffen, auf der verschiedene theoretische Forschungsansätze aufbauen können. In weiterführenden Arbeiten können sowohl die Modelle erweitert und die computergestützte Verarbeitung hinsichtlich der Rechenzeit optimiert werden. Zudem könnte der Validierungsprozess ausgeweitet werden, um entsprechende fahrdynamische Anforderungen zu berücksichtigen.

Die Reduzierung der Rechenzeit ist wichtig, damit das spezielle Fahrzeugmodell auf Rechnern mit geringer Rechenleistung echtzeitfähig simuliert werden kann. Mögliche Ansatzpunkte sind

- die Vernachlässigung von Kreiseltermen,
- das Konstantsetzen der Massenmatrix (s. Frik (1994)) und
- die Beschreibung der Radaufhängungskinetik durch Kennfelder (vgl. Lange (1997)).

Diese Ansatzpunkte sind auch für die Rechenzeitoptimierung des generischen Modells denkbar.

Ferner wäre das Erstellen einer Modellbibliothek in MATLAB/SIMULINK möglich. Dadurch könnte eine Datenbank mit einer Vielzahl an validierten Fahrzeugklassen aufgebaut werden. Die dafür notwendigen komplexen Radaufhängungen könnten vorab modelliert und mit den entsprechenden Parametern versehen in der Datenbank abgelegt werden. Zudem ist eine Erweiterung der Radaufhängung um eine Elastokinematik zu empfehlen, die für die detaillierte Beschreibung der Fahrdynamik essentiell ist, da sie gezielt das Unter- bzw. Übersteuerverhalten beschreibt. Hierzu müssten für den modularen Ansatz allgemeine Freiheitsgrade eingeführt werden, die den elastischen Freiheitsgraden entsprechen. In Schramm (2010) wird eine Methode vorgestellt, mit der die Elastokinematik durch entsprechende kinematische Ersatzmechanismen größtenteils geschlossen lösbar dargestellt werden kann. Ferner ist es denkbar, einen modularen Antriebsstrang in das Fahrzeug zu implementieren.

Des Weiteren könnte die Radaufhängung des generischen Fahrzeugmodells gezielt an die Radaufhängungskinetik von komplexen Radaufhängungen angepasst werden. Zum Beispiel könnten die generische Radaufhängungen an vermessene Radmittelpunktstrajektorien sowie Spur- und Sturzwinkeländerungen komplexer Radaufhängungen angepasst werden. Eine Möglichkeit wäre, die komplexen Radaufhängungen gezielt um einen spezifischen Arbeitspunkt zu linearisieren und durch die generische Radaufhängung nachzubilden.

In dieser Arbeit lag der Fokus auf der Modellvalidierung durch objektive querdynamische Manöver. In weiterführenden Arbeiten sollten die Fahrzeugmodelle auch auf längs- und vertikaldynamische Manöver validiert werden. Hierzu könnten längsdynamische Eingriffe wie Bremsen und Beschleunigen verwendet werden, um Antriebs- und Bremsmomentenabstützung zu validieren. Zudem könnten Fahrten auf unebenen Fahrbahnen simuliert werden, um die Längsfederung der Achse zu verifizieren.

Ein weiterer Ansatz zur Erstellung generischer, echtzeitfähiger Modelle wäre durch ein Modellreduktionsverfahren von komplexen Modellen gegeben (s. Mikelsons und Unterreiner (2009) und Mikelsons (2012)). Kontinuierliche Modellvereinfachung, wie beispielsweise das symbolische Reduktionsverfahren, vereinfacht Gleichungsterme durch Linearisierung, Konstantsetzung oder Streichung. Durch Angabe der zulässigen Fehlertoleranz können auf diese Weise Modelle für eine beliebige Zielhardware erstellt werden.

Ein Vorschlag für die Erweiterung des bewegten Fahrsimulators ist, das Rückstellmoment am Lenkrad anhand vermessener Kennfelder für unterschiedliche Fahrzeugklassen zu validieren. Eine Probandenstudie könnte das Rückstellmoment anhand subjektiver Bewertung testen. Sinnvoll wäre zudem, das Probandenmanöver um eine Straßenanregung (z. B. Bodenwelle) zu erweitern. Dadurch könnte gezielt die Vertikaldynamik der Modelle beurteilt werden und eventuell. ein Unterschied zwischen den Modellen C und D festgestellt werden.

Die Probandenstudie ist ein erster Beitrag zur Beurteilung des Immersionsgrades auf Personen in Abhängigkeit der Fahrzeugmodelle. Nachfolgende Untersuchungen können auf dieser Arbeit aufbauen und z. B. die fahrdynamischen Grenzen der einzelnen Modelle weiter ausreizen, um dann ein sachliches Urteil des Fahrers bezüglich des Immersionsgrades zu erhalten.

## Anhang

### A.1 Gleichungen aus Kap. 3

$$\mathbf{M}_{VV} = \mathbf{I}(m_v + \sum_{i=1}^4(m_{T_i} + m_{R_i})), \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{M}_{V\omega} = -\sum_{i=1}^4(v\tilde{\mathbf{r}}_{T_i}m_{T_i} + v\tilde{\mathbf{r}}_{R_i}m_{R_i}), \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{M}_{VT} = \sum_{i=1}^4(\mathbf{H}_{Tra_c,T_i}m_{T_i} + \mathbf{H}_{Tra_c,R_i}m_{R_i}), \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{M}_{VR} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{M}_{\omega\omega} = {}^V\boldsymbol{\theta}_V + \sum_{i=1}^4({}^V\boldsymbol{\theta}_{T_i} + {}^V\boldsymbol{\theta}_{R_i} + v\tilde{\mathbf{r}}_{T_i}^T v\tilde{\mathbf{r}}_{T_i}m_{T_i} + v\tilde{\mathbf{r}}_{R_i}^T v\tilde{\mathbf{r}}_{R_i}m_{R_i}), \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{M}_{\omega T} = \sum_{i=1}^4(-v\tilde{\mathbf{r}}_{T_i}^T \mathbf{H}_{Tra_c,T_i}m_{T_i} - v\tilde{\mathbf{r}}_{R_i}^T \mathbf{H}_{Tra_c,R_i}m_{R_i} + ({}^V\boldsymbol{\theta}_{T_i} + {}^V\boldsymbol{\theta}_{R_i})\mathbf{H}_{Rot_c,T_i}), \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{M}_{\omega R} = \sum_{i=1}^4 {}^V\boldsymbol{\theta}_{R_i} \mathbf{H}_{Rot_\rho,R_i}, \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{M}_{TT} = \sum_{i=1}^4 (\mathbf{H}_{Tra_c,T_i}^T \mathbf{H}_{Tra_c,T_i} m_{T_i} + \mathbf{H}_{Tra_c,R_i}^T \mathbf{H}_{Tra_c,R_i} m_{R_i} + \mathbf{H}_{Rot_c,T_i}^T ({}^V\boldsymbol{\theta}_{T_i} + {}^V\boldsymbol{\theta}_{R_i}) \mathbf{H}_{Rot_c,T_i}), \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{M}_{TR} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{H}_{Rot_c,T_i}^T {}^V\boldsymbol{\theta}_{R_i} \mathbf{H}_{Rot_\rho,R_i}, \quad (\text{A.9})$$

und

$$\mathbf{M}_{RR} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{H}_{Rot_\rho,R_i}^T {}^V\boldsymbol{\theta}_{R_i} \mathbf{H}_{Rot_\rho,R_i}. \quad (\text{A.10})$$

Bei den Matrizenprodukten

$$\mathbf{H}_{Tra_c,T_i}^T \mathbf{H}_{Tra_c,T_i} \quad (\text{A.11})$$

handelt es sich um Diagonalmatrizen.

$$\begin{aligned}
({}_V\boldsymbol{\omega}_T)_\perp &= -\frac{\mathbf{r}_{T,f_2} \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T)}{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}} \dot{\alpha} - \frac{(\mathbf{r}_{T,f_2} \times \mathbf{u}_2)}{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}} \dot{h} \\
&= \left( -\frac{\mathbf{r}_{T,f_2} \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T)}{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}} + \frac{(\mathbf{r}_{T,f_2} \times \mathbf{u}_2)}{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}} \frac{(\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T)^T \mathbf{r}_{T,f_2}}{\mathbf{u}_2^T \mathbf{r}_{T,f_2}} \right) \dot{\alpha} \\
&= \left( -\frac{\mathbf{r}_{T,f_2} \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T)}{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}} + \frac{(\mathbf{r}_{T,f_2} \times \mathbf{u}_2)}{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}} \underbrace{\left( \frac{(\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T)^T \mathbf{r}_{T,f_2}}{\mathbf{u}_2^T \mathbf{r}_{T,f_2}} \right)}_{C_{Z_1}} \right) \dot{\alpha} \\
&= \underbrace{\left( -\frac{\mathbf{r}_{T,f_2} \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T - \mathbf{u}_2 C_{Z_1})}{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}} \right)}_{\mathbf{C}_{\omega_T}} \dot{\alpha} = \mathbf{C}_{\omega_T} \dot{\alpha}.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
({}_V\boldsymbol{\omega}_S)_\perp &= \frac{\mathbf{r}_{P_3,E_1} \times ({}_V\mathbf{v}_T + {}_V\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T,P_3} - \dot{s} \mathbf{u}_4)}{\mathbf{r}_{P_3,E_1}^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}} \\
&= \frac{\mathbf{r}_{P_3,E_1} \times (\dot{\alpha} \mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T + (\dot{\alpha} \mathbf{C}_{\omega E} + \dot{s} D_S \mathbf{u}_3) \times \mathbf{r}_{T,P_3} - \dot{s} \mathbf{u}_4)}{\mathbf{r}_{P_3,E_1}^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}} \\
&= \frac{\mathbf{r}_{P_3,E_1} \times (\dot{\alpha} (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T + \mathbf{C}_{\omega E} \times \mathbf{r}_{T,P_3}) + \dot{s} (D_S \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3} - \mathbf{u}_4))}{\mathbf{r}_{P_3,E_1}^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}} \\
&= \dot{\alpha} \underbrace{\frac{\mathbf{r}_{P_3,E_1} \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T + \mathbf{C}_{\omega E} \times \mathbf{r}_{T,P_3})}{\mathbf{r}_{P_3,E_1}^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}}_{\mathbf{N}_\alpha} \\
&\quad + \dot{s} \underbrace{\frac{\mathbf{r}_{P_3,E_1} \times (D_S \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3} - \mathbf{u}_4)}{\mathbf{r}_{P_3,E_1}^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}}_{\mathbf{N}_s} = \dot{\alpha} \mathbf{N}_\alpha + \dot{s} \mathbf{N}_s.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
({}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}_T)_\perp &= -\frac{\mathbf{r}_{T,f_2} \times (\ddot{\alpha} \mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T + \dot{\alpha}^2 \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T) + 2\dot{h}({}_V\boldsymbol{\omega}_T)_\perp \times \mathbf{u}_2 + \ddot{h} \mathbf{u}_2)}{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}} \\
&= \ddot{\alpha} \underbrace{\left( -\frac{\mathbf{r}_{T,f_2} \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T - C_{hZ_1} \mathbf{u}_2)}{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}} \right)}_{\mathbf{C}_{\omega_T}} \\
&\quad - \dot{\alpha}^2 \underbrace{\frac{\mathbf{r}_{T,f_2} \times (\mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T) - 2C_{Z_1} \mathbf{C}_{\omega_T} \times \mathbf{u}_2 - C_{h_2} \mathbf{u}_2)}{\mathbf{r}_{T,f_2}^T \mathbf{r}_{T,f_2}}}_{\mathbf{K}_{\dot{\alpha}^2}} \\
&= \ddot{\alpha} \mathbf{C}_{\omega_T} - \dot{\alpha}^2 \mathbf{K}_{\dot{\alpha}^2}.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left( ({}_{\nu}\boldsymbol{\omega}_S)_{\perp} \times \left( ({}_{\nu}\boldsymbol{\omega}_S)_{\perp} \times \mathbf{r}_{P_3,E_1} \right) \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}{\left( \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3} \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}} \\
 &= \frac{\left( (\dot{\alpha} \mathbf{N}_{\dot{\alpha}} + \dot{s} \mathbf{N}_{\dot{s}}) \times (\dot{\alpha} \mathbf{N}_{\dot{\alpha}} \times \mathbf{r}_{P_3,E_1} + \dot{s} \mathbf{N}_{\dot{s}} \times \mathbf{r}_{P_3,E_1}) \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}{\left( \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3} \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}} \\
 &= \dot{s}^2 \frac{\left( \mathbf{N}_{\dot{s}} \times \mathbf{N}_{\dot{s}} \times \mathbf{r}_{P_3,E_1} \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}{\underbrace{\left( \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3} \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}_{F_{\omega \dot{s}^2}}} + \dot{\alpha}^2 \frac{\left( \mathbf{N}_{\dot{\alpha}} \times (\mathbf{N}_{\dot{\alpha}} \times \mathbf{r}_{P_3,E_1}) \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}{\underbrace{\left( \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3} \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}_{F_{\omega \dot{\alpha}^2}}} \\
 & \quad + \dot{\alpha} \dot{s} \frac{\left( \mathbf{N}_{\dot{s}} \times (\mathbf{N}_{\dot{\alpha}} \times \mathbf{r}_{P_3,E_1}) + \mathbf{N}_{\dot{\alpha}} \times (\mathbf{N}_{\dot{s}} \times \mathbf{r}_{P_3,E_1}) \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}{\underbrace{\left( \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3} \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}_{F_{\omega \dot{\alpha} \dot{s}}}} \\
 &= \dot{\alpha}^2 F_{\omega \dot{\alpha}^2} + \dot{\alpha} \dot{s} F_{\omega \dot{\alpha} \dot{s}} + \dot{s}^2 F_{\omega \dot{s}^2},
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left( {}_{\nu}\boldsymbol{\omega}_T \times ({}_{\nu}\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T,P_3}) \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}{\left( \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3} \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}} \\
 &= \frac{\left( (\dot{\alpha} \mathbf{C}_{\omega E} + \dot{s} D_s \mathbf{u}_3) \times \left( (\dot{\alpha} \mathbf{C}_{\omega E} + \dot{s} D_s \mathbf{u}_3) \times \mathbf{r}_{T,P_3} \right) \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}{\left( \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3} \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}} \\
 &= \dot{\alpha}^2 \frac{\left( \mathbf{C}_{\omega E} \times (\mathbf{C}_{\omega E} \times \mathbf{r}_{T,P_3}) \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}{\underbrace{\left( \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3} \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}_{V_{\dot{\alpha}^2}}} \\
 & \quad + \dot{\alpha} \dot{s} \frac{D_s \left( \mathbf{u}_3 \times (\mathbf{C}_{\omega E} \times \mathbf{r}_{T,P_3}) + \mathbf{C}_{\omega E} \times (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3}) \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}{\underbrace{\left( \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3} \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}_{V_{\dot{\alpha} \dot{s}}}} \\
 & \quad + \dot{s}^2 \frac{D_s^2 \left( \mathbf{u}_3 \times (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3}) \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}{\underbrace{\left( \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T,P_3} \right)^T \mathbf{r}_{P_3,E_1}}_{V_{\dot{s}^2}}} = \dot{\alpha}^2 V_{\dot{\alpha}^2} + \dot{\alpha} \dot{s} V_{\dot{\alpha} \dot{s}} + \dot{s}^2 V_{\dot{s}^2}.
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{\nu}\mathbf{v}_{T_{S_i}} &= {}_{\nu}\dot{\mathbf{r}}_{T_{S_i}} = \frac{\partial {}_A\mathbf{r}_{T_{S_i}}}{\partial \mathbf{c}} + \frac{\partial {}_A\mathbf{r}_{T_{S_i}}}{\partial \boldsymbol{\delta}} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Tra_{\delta}, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \\
 &= {}_{\nu}\mathbf{v}_T + {}_{\nu}\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}} = {}_{\nu}\mathbf{v}_T + ({}_{\nu}\boldsymbol{\omega}_T)_{\perp} \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}} + \dot{\phi} \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}} \\
 &= \dot{\alpha} \mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T + \dot{\alpha} \mathbf{C}_{\omega T} \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}} + (\dot{s} D_s - \dot{\alpha} E_{\alpha}) \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}} \\
 &= \dot{\alpha} \underbrace{\left( \mathbf{u}_1 \times {}_A\mathbf{r}_T + (\mathbf{C}_{\omega T} - E_{\alpha} \mathbf{u}_3) \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}} \right)}_{\mathbf{H}_{Tra_c, T_i}} + \dot{s} \underbrace{D_s \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}}}_{\mathbf{H}_{Tra_{\delta}, T_i}}
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
{}_V \mathbf{a}_{T_{S_i}} &= {}_V \ddot{\mathbf{r}}_{T_{S_i}} = \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i} \ddot{\delta} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_\delta, T_i} \dot{\delta} \\
&= {}_V \mathbf{a}_T + {}_V \dot{\boldsymbol{\omega}}_T \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}} + {}_V \boldsymbol{\omega}_T \times ({}_V \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}}) \\
&= {}_V \mathbf{a}_T + ({}_V \dot{\boldsymbol{\omega}}_T)_\perp \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}} + \dot{\varphi} \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}} + ({}_V \boldsymbol{\omega}_T)_\perp \times (({}_V \boldsymbol{\omega}_T)_\perp \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}}) \\
&+ \dot{\varphi} \mathbf{u}_3 \times (({}_V \boldsymbol{\omega}_T)_\perp \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}}) + ({}_V \boldsymbol{\omega}_T)_\perp \times (\dot{\varphi} \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}}) + \dot{\varphi} \mathbf{u}_3 \times (\dot{\varphi} \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}}) \\
&= \ddot{\alpha} \mathbf{u}_1 \times {}_A \mathbf{r}_T + \dot{\alpha}^2 \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A \mathbf{r}_T) \\
&+ (\ddot{\alpha} \mathbf{C}_{\omega_T} - \dot{\alpha}^2 \mathbf{K}_{\alpha^2} + (\ddot{s} D_s - \ddot{\alpha} E_\alpha + \dot{\alpha}^2 Z_{\alpha^2} + \dot{s} \dot{\alpha} Z_{s\alpha} + \dot{s}^2 Z_{s^2}) \mathbf{u}_3) \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}} \\
&+ (\dot{\alpha} \mathbf{C}_{\omega_T} + \dot{s} D_s \mathbf{u}_3) \times ((\dot{\alpha} \mathbf{C}_{\omega_T} + \dot{s} D_s \mathbf{u}_3) \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}}) \\
&= \ddot{\alpha} \left( \underbrace{\mathbf{u}_1 \times {}_A \mathbf{r}_T + (\mathbf{C}_{\omega_T} - E_\alpha \mathbf{u}_3) \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}}}_{\mathbf{H}_{Tra_c, T_i}} + \underbrace{\dot{s} D_s \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}}}_{\mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i}} + \right. \\
&\quad \left. \underbrace{\dot{\alpha} \dot{\alpha} \left( \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_1 \times {}_A \mathbf{r}_T) - (\mathbf{K}_{\alpha^2} + Z_{\alpha^2} \mathbf{u}_3) \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}} + \mathbf{C}_{\omega_E} \times (\mathbf{C}_{\omega_E} \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}}) \right)}_{\dot{\mathbf{H}}_{Tra_c, T_i}} \right) + \\
&\dot{s} \dot{\alpha} \left( Z_{s\alpha} \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}} + D_s (\mathbf{u}_3 \times (\mathbf{C}_{\omega_E} \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}}) + \mathbf{C}_{\omega_E} \times (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}})) + \dot{s} (Z_{s^2} \mathbf{u}_3 \times \right. \\
&\quad \left. \mathbf{r}_{T, T_{S_i}} + D_s^2 \mathbf{u}_3 \times (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{T, T_{S_i}})) \right).
\end{aligned} \tag{A.18}$$



Einschätzbar							Uneinschätzbar
--------------	--	--	--	--	--	--	----------------

Wie bewerten Sie das Fahrverhalten des Fahrzeugs?	realistisch						unrealistisch
Konnten Sie der Fahrspur folgen?	sehr gut						gar nicht
Konnten Sie an der Haltelinie stoppen?	sehr gut						gar nicht
Wie haben Sie das Wankverhalten beim Lenken bzw. bei Kurvenfahrt empfunden?	realistisch						unrealistisch
Wie haben Sie das Nickverhalten beim Anfahren und Bremsen empfunden?	realistisch						unrealistisch
Das Bewegungsverhalten des Fahrzeugs entspricht dem eines realen PKWs!	Stimme <u>voll</u> zu						Stimme <u>nicht</u> zu

Ist Ihnen bei der Simulatorfahrt etwas Ungewöhnliches aufgefallen?

### Fragen nach Test

Was denken Sie sollte getestet werden?

Aussage	Stimme voll zu					Stimme nicht zu
Ich bewerte den Simulator als realitätsgetreu						
Die Visualisierung ist realistisch						
Das Lenkverhalten des Fahrzeugs entspricht dem eines realen PKW						

## Literaturverzeichnis

- Alloum, A.; Charara, A.; Mackhourt, H. (1997): *Parameter nonlinear identification for vehicle's model*, In Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Control Applications, Seiten 505-510. Hartford, CT.
- Antoun, R. J. et al. (1986): *Vehicle Dynamic Handling Computer Simulation – Model Development, Correlation, and Application Using ADAMS*, SAE Paper No. 860574.
- Auto Katalog (2011): Modelljahr 2011, *Auto Katalog, Das Modellangebot Weltweit*, Auto Motor und Sport Spezial, 54. Jahressausgabe 2010/2011, Motor Presse Stuttgart GmbH & Co. KG, Stuttgart, ISSN: 0940-3833.
- Blume, C., Jakob, W. (2009): *GLEAM - General Learning Evolutionary Algorithm and Methode: ein Evolutionärer Algorithmus und seine Anwendungen*, Lehrbuch, KIT Scientific Publishing, Karlsruhe.
- Bolzern, P., Cheli, F., Falciola, G.; Resta, F. (1999): *Estimation of the Non-Linear Suspension Tyre Cornering Forces from Experimental Road Test Data*, Vehicle System Dynamics, 1999, vol 31 no 1, pp 23-34.
- Bortz, J., Döring, N. (2006): *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler*, 4. Auflage, Springer Medizin Verlag, Heidelberg, 2006.
- Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A. (2000): *Taschenbuch der Mathematik*, 5. Auflage, Harri Deutsch Verlag.
- Breuer, J. (2009): *Handbuch Fahrerassistenzsysteme*. Kap. Bewertungsverfahren und Fahrerassistenzsysteme, S. 55-68, Vieweg+Teubner, 2009.
- Burkhardt, M. (1993): *Fahrwerktechnik: Radschlupf-Regelsystem*, Vogel Verlag, 1. Auflage.
- Du, Yu. (2006): *Zur Optimierung des dynamischen Verhaltens von Gesamtfahrzeugen mit mechatronischen Komponenten*, Dissertation, Technische Universität Aachen.
- Dugoff, H.; Fancher, P.S.; Segel, L. (1969): *Tire Performance Characteristics Affecting Vehicle Characteristics to Steering and Braking Control Inputs*, Technical Report, Highway Safety Research Institute, University of Michigan. Ann Arbor.
- Einsle, S. (2010): *Analyse und Modellierung des Reifenübertragungsverhaltens bei transienten und extremen Fahrmanövern*, Dissertation. Technische Universität Dresden.
- Fischer, R. A.; Bennett, J. H.; Yates (1994): *Statistical Methods, Experimental Design, and Scientific Inference: A Re-issue of Statistical Methods for Research Workers, The Design of Experiments, and Statistical Methods and Scientific Inference*, Oxford University Press.
- Frik, S. (1994): *Untersuchungen zur erforderlichen Modellkomplexität bei der Fahrdynamiksimulation*, Dissertation. Fortschritt-Bericht VDI Reihe 12 Nr. 208. Universität Duisburg.

- Gillespie, T. (1992): *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, Society of Automotive Engineers.
- Gipser, M. (1999): *Systemdynamik und Simulation*, Stuttgart: B.G. Teubner.
- Gipser, M. (2006): *Reifensimulation mit FTire: Stand und Ausblick*, 15. Aachener Kolloquium für Fahrzeug- und Motorentchnik. RVTH Aachen.
- Halfmann, C.; Halzmann, H. (2003): *Adaptive Modelle für die Kraftfahrzeugdynamik*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- Hayes, M. (1996): *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, Lehrbuch, John Wiley & Sons; 1. Auflage, New York.
- Heißing, B.; Brandl, H.J. (2002): *Subjektive Beurteilung des Fahrverhaltens*, Vogel Verlag, 1. Auflage.
- Heißing, B. (2006): *Dynamik der Straßenfahrzeuge*, Vorlesungsmanuskript, Lehrstuhl für Fahrzeugtechnik, TU München.
- Heißing, B.; Ersoy, M. (Hrsg.) (2007): *Fahrwerkhandbuch: Grundlagen, Fahrdynamik, Komponenten, Systeme, Mechatronik, Perspektiven*, Wiesbaden: Vieweg.
- Heer, A. (2008): *Sensitivitätsanalyse und Parameteroptimierung eines MKS Fahrzeugmodells*, Diplomarbeit Universität Stuttgart.
- Hesse, B. (2011): *Wechselwirkung von Fahrzeugdynamik und Kfz-Bordnetz unter Berücksichtigung der Fahrzeugbeherrschbarkeit*, Dissertation, Universität Duisburg-Essen.
- Hiesgen, G. (2011): *Effiziente Entwicklung eines menschenzentrierten Querführungsassistenz-systems mit einem Fahrsimulator*, Dissertation, Universität Duisburg-Essen.
- Hiller, M. (1983): *Mechanische Systeme*, Hochschultext, Springer Berlin, Heidelberg.
- Hiller, M.; Kecskeméthy, A. (1989): *Equations of motion of complex multibody systems using kinematical differentials*, Transactions of the CSME, Bd. 13 Nr. 4, S. 113-121.
- Hiller, M.; Kecskeméthy, A.; Woernle, C. (1986): *Computergestützte Kinematik und Dynamik für Fahrzeuge, Roboter und Mechanismen*, Manuskript zum Carl-Cranz-Kurs 1986 Carl-Cranz-Gesellschaft, Oberpfaffenhofen.
- Holland, J. H. (1975): *Adaption in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control and artificial intelligence*. Cambridge Massachusetts, MIT Press 1975.
- Huang, F.; Chen, J. R.; Twisai, L. W. (1993): *The use of random steer test data for vehicle parameter estimation*, In Vehicle Dynamics and Simulation, Band SP-950, Seiten 163-174.
- Isermann, R. (2006): *Fahrdynamik-Regelung: Modellbildung, Fahrerassistenzsysteme, Mechatronik*, Vieweg+Teubner Verlag.
- Jindra, F. (1976): *Mathematical Model of Four-Wheeled Vehicle for Hybrid Computer Vehicle Handling Program*, National Highway Traffic Safety Administration, DOT HS 801800.
- Kecskeméthy, A. (1993): *Objektorientierte Modellierung der Dynamik von Mehrkörpersystemen mit Hilfe von Übertragungselementen*, Fortschritt-Berichte VDI Reihe 20 Nr. 88. Düsseldorf: VDI-Verlag.

- Kinjawadekar, T.; Heydinger, G. J.; Guenther, D. A.; Salaani, M. K. (2009): *Vehicle Dynamics Modeling and Validation of the 2003 Ford Expedition with ESC using CarSim*, SAE Technical Paper 2009-01-0452
- Klaus, B. (2000): *Subjektive Fahreindrücke sichtbar machen*, Expert Verlag, Renningen-Malmsheim.
- Kobetz, C. (2004): *Modellbasierte Fahrdynamikanalyse durch ein Fahrmanöver parameter-identifiziertes querdynamisches Simulationsmodell*, Dissertation. Technische Universität Wien.
- Kortüm, W. und P. Lugner. (1994): *Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen, Einführung und Beispiele*, Springer Berlin Heidelberg.
- Kortüm, W.; Sharp, R.; de Pater, A (1991): *Review of multibody computer codes for vehicle system dynamics: problems, requirements, codes and experiences with benchmark problems*, In: Application of Multibody Computer Codes to Vehicle Dynamics, Progress Report to the 12th IAVSD Symposium on a Workshop and Resulting Activities, Volume 12.
- Kumar, V.; Zefran, M.; Croke, C. (1995): *On the generation of smooth three-dimensional rigid body motions*, IEEE Transactions on Robotics and Automation.
- Kraftfahrt-Bundesamt. (2011): *Ihr zentraler Informationsdienstleister rund um das Kraftfahrzeug und seine Nutzer*, Pressemitteilung Nr. 25/2011, Septemeber 2011, www.kba.de.
- Lang, H.-P. (1997): *Kinematik-Kennfelder in der objektorientierten Mehrkörpermodellierung von Fahrzeugen mit Gelenkelastizitäten*, Dissertation, Fortschritt-Berichte VDI Reihe 12 Nr. 323. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Meyer-Tuve, H. (2008): *Modellbasiertes Analysetool zur Bewertung der Fahrzeugquerdynamik anhand von objektiven Bewegungsgrößen*, Dissertation. Verlag Dr. Hut, Reihe Fahrzeugtechnik, Technische Universität München.
- Meljenkov, D. (2003): *Entwicklung von Modellen zur Bewertung des Fahrverhaltens von Kraftfahrzeugen*. Dissertation, Universität Stuttgart.
- Matschinsky, W. (1987): *Die Radführungen der Straßenfahrzeuge*, Verlag TÜV Rheinland.
- McHenry, R. R. (1973): *Research in Automobile Dynamics- A Computer Simulation of Gen-eral Three-Dimensional Motions*, SAE Trans., Vol. 80, pg. 1455.
- Mikelsons, L. (2012): *Generierung vereinfachter Modelle mechatronischer Systeme auf Basis symbolischer Gleichungen*. Dissertation, Universität Duisburg-Essen.
- Mikelsons, L.; Unterreiner, M.; Brandt, T. (2009): *Generation of continuously adjustable vehicle model using symbolic reduction methods*. Multibody Dynamics 2009, ECCOMAS Thematic Conference, 29 June – 2 July, 2009, Warsaw, Poland.
- Milliken, W. F.; Whitcomb, D. W; Segel, L.. (1956): *Research in automobile stability and control and in tyre performance*, Inst. Mech. Engrs., London.
- Mitschke, M.; Wallentowitz, H. (2003): *Dynamik der Kraftfahrzeuge*, Springer Verlag, 4. Auflage.
- Morris, M. D. (1991): *Factorial sampling plans for preliminary computational experiments*, Technometrics, 33:161-174, 1991.

- Negele, H. J. (2008): *Anwendungsgerechte Konzipierung von Fahr simulatoren für die Fahr-zeugentwicklung*, Dissertation, Technische Universität München.
- Nikraves, P. E. (1988): *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- Olley, M. (1946): *Road Manners of the Modern Car*, In: Proc. Inst. Aut. Engrs. (1946/47).
- Orlandea, N. (1977): *Simulation of a Vehicle Suspension With The Adams Computer Program*, SAE Paper No. 770053.
- Pacejka, H. B. (1973): *Simplified Analysis of Steady-State Turning Behavior of Motor Vehicles*, VSD. 2 pp. 161-183, pp. 185-204.
- Pacejka, H. B.; Bakker, E. (1993): *The magic formula tyre model, tyre models for vehicle dynamic analysis*, Proceedings of the 1st International Colloquium on Tyre Models for Vehicle Dynamic Analysis, ed. H.B. Pacejka, Swets&Zeitlinger, Lisse, pp. 1-18.
- Pacejka, H. (2005): *Tyre and Vehicle Dynamics*, Lehrbuch, Elsevier Books; 2. Auflage, Oxford.
- Pichler, V. (1998): *Modellbildung der Dynamik von Kraftfahrzeugen unter Anwendung ob-jektorientierter Konzepte*, Dissertation. Fortschritt-Bericht VDI Reihe 12 Nr. 282 Gesamt-hochschule Duisburg.
- Polasek, W. (1994): *EDA Explorative Datenanalyse: Einführung in die deskriptive Statistik*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage.
- Polheim, H. (2000): *Evolutionäre Algorithmen – Verfahren, Operatoren und Hinweise für die Praxis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Popp, K.; Schiehlen, W. (1993): *Fahrzeugdynamik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- Rau, M. (2007): *Koordination aktiver Fahrwerk-Regelsysteme zur Beeinflussung der Querdynamik mittels Verspannungslenkung*, Dissertation. Universität Stuttgart.
- Rechenberg, I. (1973): *Evolutionsstrategie – Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*, Fromann-Holzboog Verlag, Stuttgart-Bad Cannstatt.
- Reichelt, W. (1987): *Identifikationsmethoden für fahrdynamische Untersuchungen*, In Systemidentifikation in der Fahrdynamik, Seiten 267-286. Deutsche Forschungs- und Versuchs-anstalt für Luft und Raumfahrt DFVLR.
- Riekert, P.; Schunck, T. (1940): *Zur Fahrmechanik des gummibereiften Kraftfahrzeugs*, In: Ingenieur Archiv, Vol. 11, S. 210-224.
- Rill, G. (1994): *Simulation von Kraftfahrzeugen*, Vieweg Verlag, Braunschweig Wiesbaden.
- Rode, J. P. (2007): *Entwicklung eines hochdynamischen Fahr simulators mit Linearantrieben mit realitätsnahem Fahrwerksverhalten für wissenschaftliche und industrielle Anwendungsmöglichkeiten*, Diplomarbeit, Fachhochschule Gelsenkirchen, Abteilung Bocholt.
- Roscher, T. (2005): *Identifikation von Modellparametern an Mehrkörpersystemen am Beispiel eines Antriebsstranges*, Dissertation, Fachhochschule Gelsenkirchen, Abteilung Bocholt.

- Saltelli, A.; Ratto, M.; u. A (2008): *Global Sensitivity Analysis – The Primer*, Verlag John Wiley & Sons.
- Sayers, M. W.; Han, D. (1996): *A Generic Multibody Vehicle Model for Simulating Handling and Braking*, Journal: Vehicle System Dynamics, Ann Arbor.
- Schiehlen, W. (1986): *Technische Dynamik: Eine Einführung in die analytische Mechanik und ihre technischen Anwendungen*, B.G.Teubner Stuttgart.
- Schiehlen, W. (1990): *Multibody System Handbook*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Schindler, E. (2007): *Fahrdynamik*, Expert-Verlag, 1. Auflage.
- Schmidt, A. (1989): *Methoden und Werkzeuge zur Erstellung von fahrdynamischen Simulationsmodellen*, Automobil-Industrie 1/1989, S. 83-89.
- Schnelle, K.-P. (1990): *Simulationsmodelle für die Fahrdynamik von Personenwagen unter Berücksichtigung der nichtlinearen Fahrwerkskinematik*, Dissertation. Fortschritt-Bericht VDI Reihe 12 Nr. 146. Universität Stuttgart.
- Schramm, D.; Hiller, M.; Bardini, R (2010): *Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen*, Springer Berlin Heidelberg; 1. Auflage.
- Schroeder, H. K. (2003): *Beiträge der Parameteridentifikation zur Fahrdynamikanalyse*, Dissertation, Universität München.
- Schwefel, H. P. (1995): *Evolution and Optimum Seeking*, Wiley & Sons, New York, 1995.
- Jako W. (2012): *Ablauf eines deterministischen Suchverfahrens*, <http://www.iai.fzk.de/www-extern/index.php?id=297>, Februar 2012.
- Segel, L. (1990): *Keynot Adress: Some Reflections on Early Efforts to Investigate the Directional Stability and Control of the Motor Car*, Transportation System, ASME Publication AMD, Vol. 108.
- Segel, L. (1956): *Theoretical Prediction and Experimental Substantiation of the Response of the Automobile of Steering Control*, Proc. Auto. Div. The Institute of Mechanical Engineers, London. 1956-1957, Vol. 171, pg. 310.
- Sorgatz, U. (1973): *Ein theoretisches Fahrzeugmodell zur Abbildung der Fahrdynamik bis in den Grenzbereich*, Dissertation, Technische Hochschule Aachen.
- Speckhart, F. (1973): *A Computer Simulation for Three-Dimensional Vehicle Dynamics*, SAE Technical Paper 730526.
- Wittenburg, J. (1977): *Dynamic of systems of rigid bodies*, B.G.Teubner Stuttgart.
- Woernle, C. (1988): *Ein systematisches Verfahren zur Aufstellung der geometrischen Schließbedingungen in kinematischen Schleifen mit Anwendung bei der Rückwärts-transformation für Industrieroboter*, Fortschritt-Bericht VDI Reihe 18 Nr. 59, Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Woernle, C. (2011): *Mehrkörpersysteme, Eine Einführung in die Kinematik und Dynamik von Systemen starrer Körper*, Springer Berlin Heidelberg; 1. Auflage.
- Wöhler, A.; Jürgensohn, T.; Willumeit, H.-P. (1994): *Identification of System Parameters of Simulation Models for Driving Control Systems*, In 25. FISITA Congress Paper 945070, Band 2, Vehicle Dynamics, Seiten 77-83. Beijing.

Zamow, J. (1994): *Beitrag zur Identifizierung unbekannter Parameter für fahrdynamische Simulationsmodelle*, Dissertation, TU Karlsruhe.

Zomotor, A. (1987): *Fahrwerktechnik: Fahrverhalten*, Vogel Verlag, 1. Auflage

Zomotor, Z. (2002): *Online-Identifikation der Fahrdynamik zur Bewertung des Fahrverhaltens von Pkw*, Dissertation, Universität Stuttgart, 2002.

### **Normen**

ISO 7401 (2011): *Road vehicles; Lateral transient response test methods -- Open-loop test methods*, International Organization for Standardization.

DIN 70000 (1994): *Fahrzeugdynamik und Fahrverhalten*, November 1997.

ISO 3882-2 (1997): *VDA-Spurwechseltest*, International Organization for Standardization.

ISO 4138 (2004): *Passenger cars; Steady-state circular driving behavior -- Open-loop test methods*, International Organization for Standardization.

ISO/TR 8726 (1988): *Road vehicles; Transient open-loop response test method with pseudo-random steering input*, International Organization for Standardization.