Physicae Organum, v. 6, n. 2, p. 1-23, Brasília, 2020.
Instituto de Física - Universidade de Brasília

PHYSICÆ ORGANUM

Artigo original

Física e Afins

O Teleparalelismo como uma Teoria de *Gauge* para a Gravitação

Teleparallelism as a Gauge Theory for Gravitation

Luigi Lucas de Carvalho Silva[1], Vanessa Carvalho de Andrade[2]

[1,2]Instituto de Física - Universidade de Brasília

Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma teoria de gravitação cujo formalismo seja análogo aos das demais interações fundamentais, as quais são descritas por teorias de gauge, ou teorias de calibre. A teoria apresentada é também análoga à relatividade geral em níveis clássicos. Define-se, inicialmente, as teorias de gauge. O eletromagnetismo é apresentado como um exemplo dessa classe de teorias. Define-se as lagrangianas de Dirac e Maxwell, e por meio do requisito de que elas sejam invariantes por transformações de gauge locais, um termo de acoplamento é acrescentado à soma das lagrangianas, levando à obtenção da lagrangiana correta para a eletrodinâmica quântica. Em seguida, as equações associadas à teoria de Yang-Mills, uma teoria de gauge para grupos especiais unitários de ordem n, são então apresentadas. Após isso, são apresentados os fundamentos do teleparalelismo, e essa teoria é então descrita como uma teoria de gauge para o grupo de translação, sendo os potenciais de gauge do modelo associados à gravitação. O papel das tetradas e da torção na descrição da gravitação é então discutida, bem como seus significados geométricos. A lagrangiana do teleparalelismo, quadrática na torção, é então apresentada, e duas aplicações são desenvolvidas: uma partícula sob a ação de um campo gravitacional e a questão da densidade de energia-momento do campo gravitacional são apresentadas sob o ponto de vista da gravitação teleparalela. Conclui-se que o teleparalelismo, além de abranger os fenômenos clássicos já tratados pela relatividade geral, vai além e propicia novas descrições, como a definição de um tensor de energia-momento de espaço-tempo e de gauge verdadeiro para o campo gravitacional.

Palavras-chave: *Teleparalelismo. Gauge. Yang-Mills. Unificação.*

Abstract

The objective of the present work is to present a theory o gravitation whose formalism is analogous to the other fundamental interactions, which are described by gauge theories. The theory presented is also analogous to general relativity in classical levels. Initially, gauge theories are defined. Electromagnetism is presented as an example of this class of theories. The Dirac and Maxwell lagrangians are defined, and making then invariant by local gauge transformations leads to *the sum of a coupling term, which leads to the obtaining of the correct lagrangian for the quantum electrodynamics. Then, the equations associated to the Yang-Mills theory, a gauge theory for special unitary groups of order n, are then presented. After this, the fundamentals of teleparallelism are discussed, which is presented as a gauge theory for the translation group, with the gauge potentials of the model being associated to gravitation. The role of the tetrads and torsion in the description of gravitation is discussed, as well as their geometrical meanings. The teleparallel lagrangian, quadratic in torsion, is then presented, and two applications are explained: a particle under the action of a gravitational field and the question of the energy-momentum density of the gravitational field are presented from the point of view of teleparallel gravity. It follows that teleparallelism, in addition to covering the classical phenomena already treated by general relativity, goes beyond and provides new descriptions, as the definition of a real spacetime and gauge energy-momentum tensor for the gravitational field.*

Keywords: *Teleparallelism. Gauge. Yang-Mills. Unification.*

I. Introdução

Até o século XX, ainda eram predominantes as ideias de espaço e tempo absolutos e indeformáveis advindas da mecânica newtoniana. Vários cientistas e matemáticos, como James Clerk Maxwell, Hendrik Lorentz, Hermann Minkowski, Bernhard Riemann, dentre inúmeros outros, introduziram, ao longo do século XIX e início do século XX, os questionamentos e ferramentas necessárias para uma superação dessas ideias, rumo a uma teoria de maior abrangência e domínio de validade. Todo esse processo culminou, em 1915, na publicação da teoria da relatividade geral por Albert Einstein, a qual motivou diversas pesquisas, e foi estudada e explorada por vários cientistas ao longo das décadas seguintes.

Ao longo de toda a história da física também é muito presente a ideia de unificação. Newton, por exemplo, conseguiu relacionar a gravitação na terra com o movimento dos corpos celestes. Outro exemplo de unificação refere-se aos fenômenos óticos, cujas leis começaram a ser obtidas já no século XVII, porém só foram associados ao eletromagnetismo no século XIX.

No entanto, os anseios em unificar a relatividade geral com as demais interações físicas levou à identificação de diversos problemas. Como exemplos, temos o fato de a teoria da relatividade geral ser não renormalizável, e também o fato de que o espaço-tempo na relatividade geral está intimamente ligado à dinâmica das distribuições de massa e energia, o que não ocorre nas demais interações, onde o espaço-tempo aparece como um "plano de fundo" sobre a qual a dinâmica dos objetos é determinada (BOSSO, 2017) (BURGESS, 2003). Esses problemas levaram diversos cientistas a buscar uma teoria de gravitação que englobasse os resultados bem sucedidos da relatividade geral, mas que também apontasse para uma possível compatibilização com as demais teorias.

Nesse contexto, Hermann Weyl fez uma tentativa, em 1918, de unificar a relatividade geral e o eletromagnetismo (PEREIRA; ALDROVANDI, 2010, p. i). Embora não tenha sido bem sucedido, ele introduziu os conceitos de transformação de *gauge* e invariância de *gauge*. A introdução desses conceitos no contexto das teorias de gravitação foi muito importante, dado que as demais teorias físicas "fundamentais", como o eletromagnetismo e, posteriormente, a eletrodinâmica quântica e o modelo padrão, são teorias de *gauge*. Essas teorias também são chamadas de teorias de calibre. No presente trabalho, a denominação mais utilizada será teorias de *gauge*.

Einstein também fez uma tentativa nesse sentido cerca de dez anos depois. A ideia era definir um sistema de coordenadas local a partir de quatro vetores ortogonais (tetradas), de modo que o conceito de "paralelismo distante" pudesse ser definido. Vetores com coordenadas locais iguais seriam ditos paralelos (UNZICKER; CASE, 2005, p. 1–3). Surge, então, o conceito de teleparalelismo. As tetradas têm 16 componentes, enquanto que o campo gravitacional, representado pela métrica do espaço tempo, tem apenas dez componentes. A ideia é que esses seis graus de liberdade a mais pudessem estar relacionados com as seis componentes do campo eletromagnético. Essa tentativa, no entanto, falhou, pois os graus de liberdade a mais eram eliminados pela invariância de Lorentz local da teoria (PEREIRA; ALDROVANDI, 2010, p. i).

Essas duas tentativas, no entanto, abriram portas para o desenvolvimento da gravitação teleparalela como uma teoria de *gauge* para a gravitação. Ao longo das décadas seguintes, outros cientistas, como Møller, Pellegrini e Plebanski, Hayashi e Nakano (ANDRADE; PEREIRA, 1997a), Maluf, Rocha-Neto e Ulhoa (MALUF; ROCHA-NETO; ULHOA, 2015) (MALUF; ROCHA-NETO, 2001), voltaram a estudar essas ideias, e diversas novas contribuições foram realizadas, culminando na gravitação teleparalela atual. Essa teoria alternativa, apesar de equivalente à relatividade geral, exibe um formalismo análogo à teoria de Yang-Mills, que é utilizada para descrever as demais interações fundamentais. Além disso, ela aponta para a solução de alguns problemas da relatividade geral, como a questão da definição da densidade de energia-momento do campo gravitacional.

Houve, além das tentativas descritas acima, diversas outras, como a teoria de Kaluza-Klein (KALUZA, 1921), que estendeu a relatividade geral para um espaço-tempo de cinco dimensões, com foco em unificar a gravitação e o eletromagnetismo. Outros exemplos são a teoria de supercordas (SCHWARZ; SEIBERG, 1998), a teoria M (DUFF, 1996) e a teoria de gravitação em loop (ROVELLI, 1997).

Nesse trabalho, serão apresentados os conceitos associados às teorias de *gauge*, utilizando o exemplo do eletromagnetismo, bem como o caso geral da teoria de Yang-Mills. Em seguida, o teleparalelismo será apresentado como uma teoria de *gauge* para a gravitação e serão discutidas duas aplicações nesse contexto, o de uma partícula massiva em um campo gravitacional e o da densidade de energia-momento desse campo. Essas aplicações visam demonstrar tanto a capacidade do teleparalelismo de tratar os fenômenos já resolvidos no contexto a relatividade geral, quanto a de ir além e apresentar novas descrições físicas.

II. Um Panorama Geral das Teorias de Gauge

Na física, uma teoria de *gauge*, ou teoria de calibre, é uma teoria de campo cuja Lagrangiana é invariante sob um grupo contínuo de transformações locais. Esse é um grupo de Lie, e a cada gerador do grupo está associado um campo vetorial, o campo de calibre, que é incluído na Lagrangiana para que esta permaneça invariante sob transformações locais do grupo (BATTERMAN, 2013, p. 395).

O nome "calibre" vem de um fato histórico. Hermann Weyl buscava, no início do século XX, obter o eletromagnetismo a partir de uma simetria do espaço-tempo, que seria relacionada à invariância local sob mudanças da escala de comprimento. Apesar de ter falhado em sua tentativa, algum tempo depois ele conseguiu encontrar a simetria correta para derivar o eletromagnetismo, porém o nome permaneceu (SCHWICHTENBERG, 2018, p. 133).

As teorias de *gauge* que descrevem as interações eletromagnética, eletrofraca e forte estão associadas com transformações que ocorrem em espaços "internos", que não tem relação direta com o espaço-tempo. Em cada ponto do espaço-tempo, tem-se diferentes transformações no espaço interno (PEREIRA; ALDROVANDI, 2013, p. 25).

A estrutura matemática que engloba os aspectos geométricos desse tipo de teoria é chamada de *fiber bundle*("maço de fibras"). Para se ter uma noção do que seria um *fiber bundle*, será utilizado o exemplo de um elétron percorrendo um caminho ao longo do espaço. Na mecânica quântica, aparecem fatores de fase nas soluções da equação de Schrödinger, do tipo $e^{i\theta(\vec{x},t)}$, onde $\theta(\vec{x},t)$ é uma determinada função do tempo e espaço. Elas são números complexos de módulo unitário. Podemos, então, encará-las como pontos em um círculo unitário.

A função de onda associada a um elétron pode ser escrita como

$$\Psi(\vec{x},t) = |\Psi(\vec{x},t)|e^{i\theta(\vec{x},t)}, \tag{1}$$

ou seja, ela possui uma determinada fase para cada ponto $\vec{x}$ e para cada instante t. Cada uma dessas fases pode ser representada como um ponto no círculo unitário (JAKOB, 2018).

Assim, conforme o elétron se move no espaço, ele também percorre uma trajetória em seu "espaço interno", associado à sua fase. Pode-se pensar em "grudar", em cada ponto do espaço, uma cópia do círculo unitário, e em cada um desses pontos "marcar", nesse círculo, o ponto correspondente à fase do elétron. Isso é ilustrado na figura a seguir:

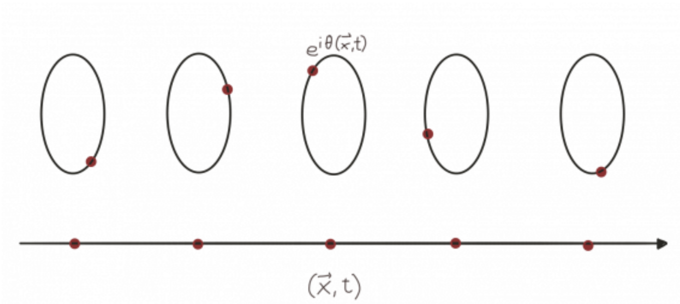

Figura 1: *Representação de um elétron se movendo pelo espaço. Ao se mover, ele também muda a sua fase. (JAKOB, 2018)*

Representando esses círculos por linhas, como pontos iniciais e finais identificados, tem-se a estrutura pictórica de um "fibrado". Nessa figura, a parte inferior é o espaço onde o elétron efetivamente se move, e a parte superior é o espaço interno, que é o que se chama de *fiber bundle*.

A ferramenta que permite dizer qual a trajetória seguida no espaço interno é chamada de conexão, e na física ela corresponde a um campo de calibre (JAKOB, 2018).

III. O Eletromagnetismo como um Exemplo

A lagrangiana de Dirac, da qual se obtém as equações de movimento para partículas e campos de spin $\frac{1}{2}$ (um exemplo é o elétron), pode ser escrita da seguinte forma (SCHWICHTENBERG, 2018, p. 27)

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = -m\bar{\Psi}\Psi + i\bar{\Psi}\gamma_\mu\partial^\mu\Psi = \bar{\Psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\Psi, \tag{2}$$

onde m é a massa, Ψ é um espinor de Dirac, γ_μ é uma matriz dada por

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

onde σ_μ são as matrizes de Pauli,

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 = I_{2\times 2}, \tag{4}$$

sendo $I_{2\times 2}$ a identidade, e

$$\bar{\sigma}_i = -\sigma_i. \tag{5}$$

As matrizes com índices superiores podem ser obtidas a partir da métrica de Minkowiski, $\eta_{\mu\nu}$,

$$\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu, \tag{6}$$

tendo em mente que

$$\eta_{\mu\nu}\sigma^\nu = \bar{\sigma}_\mu. \tag{7}$$

Por último, os $\bar{\Psi}$ estão associados com os Ψ por

$$\bar{\Psi} \equiv (\Psi)^\dagger\gamma_0. \tag{8}$$

A equação permanece a mesma se o campo for transformado como

$$\Psi' = e^{ia}\Psi, \tag{9}$$

onde a é um número real qualquer. Isso pode ser facilmente verificado substituindo-se Ψ por $e^{ia}\Psi$ e $\bar{\Psi}$ por $\bar{\Psi}e^{-ia}$ na lagrangiana, pois

$$\bar{\Psi}' = \Psi'^\dagger\gamma_0 = (e^{ia}\Psi)^\dagger\gamma_0 = \bar{\Psi}e^{-ia}. \tag{10}$$

Todos os números complexos de módulo unitário podem ser escritos na forma e^{ia} e formam o grupo chamado U(1) ("U" vem de unitário). Assim, podemos dizer que a lagrangiana é invariante sob a ação desse grupo. O tipo de transformação exibida acima é chamada de transformação global, pois o termo e^{ia} é o mesmo, independente da posição no espaço-tempo, ou seja, o campo é multiplicado em cada ponto pelo mesmo fator. Mas a escolha desse fator em um ponto não deveria, *a priori*, determiná-lo nos demais pontos.

Pode-se verificar, então, se a lagrangiana permanece invariante mesmo que a transformação seja local. Para isso, o fator e^{ia} passará a depender do ponto, ou seja, $e^{ia(x)}$. Se agora for feita a substituição Ψ por $e^{ia(x)}\Psi$ e $\bar{\Psi}$ por $\bar{\Psi}e^{-ia(x)}$, a lagrangiana transformada fica

$$\mathcal{L}'_{\text{Dirac}} = -m\bar{\Psi}\Psi + i\bar{\Psi}\gamma_\mu\partial^\mu\Psi + i^2(\partial^\mu a(x))\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi \neq \mathcal{L}_{\text{Dirac}}, \tag{11}$$

ou seja, a lagrangiana não é mais invariante sob uma ação local do grupo U(1).

Considere agora a lagrangiana de Proca, da qual se obtém a equação de movimento para partículas e campos massivos de spin 1. Ela é dada por (SCHWICHTENBERG, 2018, p. 129)

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu + m^2 A^\mu A_\mu, \tag{12}$$

onde m é a massa e A^μ é um determinado campo vetorial.

Para partículas de massa nula, como o fóton, a lagrangiana fica

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu. \tag{13}$$

Essa é justamente a lagrangiana da qual se obtém a equação inomogênea de Maxwell (sem termo de correntes elétricas). Ela pode ser escrita na forma convencional fazendo a seguinte identificação

$$F^{\sigma\rho} \equiv \partial^\sigma A^\rho - \partial^\rho A^\sigma, \tag{14}$$

onde $F^{\sigma\rho}$ é o tensor eletromagnético.

Essa lagrangiana possui uma simetria local, dada por

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu a(x), \tag{15}$$

onde a(x) é uma função arbitrária.

Agora, se as duas lagrangianas, a de Dirac e a de Maxwell, forem somadas, e se for imposta a simetria local pelo grupo U(1), por meio da adição do termo $A_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$, cuja transformação é dada por[1]

$$A_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \to (A_\mu + \partial_\mu a(x))\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = A_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi + \partial_\mu a(x)\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \tag{16}$$

obtém-se justamente a lagrangiana da eletrodinâmica quântica,

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac+Termo Extra+Maxwell}} = -m\bar{\Psi}\Psi + i\bar{\Psi}\gamma_\mu D^\mu\Psi - \frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu). \tag{17}$$

Ou seja, o fato de impor-se que uma simetria interna, sem relação com o espaço-tempo, seja invariante localmente com relação a um certo grupo de simetria leva justamente à lagrangiana que descreve a física que se esperava do sistema.

IV. Teoria de Yang-Mills

As equações de Maxwell homogêneas e não homogêneas podem ser obtidas a partir de uma teoria de *gauge* referente a uma simetria local do grupo U(1). Ao se utilizar diferentes

[1]Veja que o termo extra nessa transformação cancela justamente o termo extra que surge na transformação local da equação de Dirac.

grupos de simetria, outras estruturas são obtidas, as quais descrevem as demais interações, exceto a gravitação.

A generalização dessas estruturas é uma teoria de *gauge* que engloba os grupos especiais unitários de ordem n, denominada teoria de Yang-Mills. Por meio dessa, é possível descrever três das interações fundamentais: a interação forte, fraca e o eletromagnetismo. A ideia a seguir é apenas apresentar a forma das equações dessa teoria, sem um aprofundamento em seus significados, e verificar que o eletromagnetismo pode ser obtido a partir dessa teoria mais geral.

Antes de apresentar a lagrangiana dessa teoria, serão apresentadas algumas definições. Primeiramente, considerando-se um campo Ψ associado a uma certa representação de um grupo, pode-se escrever os elementos do grupo como

$$U(x) = [exp[\epsilon^B(x)T_B]], \tag{18}$$

onde T_B são os geradores do grupo nessa dada representação e $\epsilon^B(x)$ os parâmetros de transformação. Uma transformação de *gauge* que tenha esse grupo como seu grupo de simetria, realizada sobre o campo Ψ, pode ser escrita como

$$\Psi'(x) = exp[\epsilon^B(x)T_B]\Psi(x). \tag{19}$$

A transformação infinitesimal correspondente, obtida para parâmetros infinitesimais, pode ser escrita como

$$\delta\Psi = \epsilon^B(x)T_B\Psi(x). \tag{20}$$

Os geradores T_B satisfazem a relação de comutação

$$[T_B, T_C] = f^A{}_{BC}\,T_A, \tag{21}$$

onde $f^A{}_{BC}$ são as constantes de estrutura da álgebra de Lie do grupo. A representação adjunta[2], cujos geradores são representados por J_B, é dada por matrizes $n \times n$ com componentes

$$(J_B)^A{}_C = f^A{}_{BC}\,. \tag{22}$$

Pode-se definir o campo bosônico de *gauge*(PEREIRA; ALDROVANDI, 2013, p. 27) como sendo uma 1-forma assumindo valores na álgebra de Lie do grupo de *gauge*,

$$A = T_C A^C{}_\mu \mathrm{d}x^\mu. \tag{23}$$

Em termos físicos, esse campo é responsável por mediar as interações fundamentais.

Por meio da definição geral de derivada covariante de *gauge* (PEREIRA; ALDROVANDI, 1995),

$$D_\mu\Psi(x) = \partial_\mu\Psi(x) - A^B{}_\mu \frac{\delta\Psi(x)}{\delta\epsilon^B(x)}, \tag{24}$$

[2]Podemos buscar representações de um grupo em qualquer tipo de espaço vetorial, mas existe um espaço vetorial único que vem automaticamente com cada grupo - esse espaço é sua álgebra de Lie. A representação adjunta de um grupo de Lie é uma maneira de representar os elementos do grupo como transformações lineares da álgebra de Lie do grupo.

e da relação 20, é possível obter a derivada covariante do campo Ψ, dada por

$$D_\mu \Psi(x) = \partial_\mu \Psi(x) - A^B{}_\mu T_B \Psi(x), \tag{25}$$

onde a 1-forma A_μ assume valores na representação apropriada do grupo para o campo Ψ.

A derivada covariante do campo bosônico, que pertence à representação adjunta do grupo de *gauge*, é a sua 2-forma de curvatura,

$$F = \frac{1}{2} J_A F^A{}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{26}$$

cujas componentes são definidas por

$$F^A{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^A{}_\nu - \partial_\nu A^A{}_\mu + f^A{}_{BC} A^B{}_\mu A^C{}_\nu. \tag{27}$$

Essas componentes também podem ser obtidas por meio do comutador da derivada covariante[3],

$$[D_\mu, D_\nu] = J_A F^A{}_{\mu\nu}. \tag{28}$$

Da definição dessas componentes, segue a identidade de Bianchi,

$$D_\rho F^A{}_{\mu\nu} + D_\nu F^A{}_{\rho\mu} + D_\mu F^A{}_{\nu\rho} = 0. \tag{29}$$

Finalmente, as equações dinâmicas seguem da lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \gamma_{AB} F^A{}_{\mu\nu} F^{B\mu\nu}, \tag{30}$$

onde γ_{AB} é a métrica de Cartan-Killing, definida por

$$\gamma_{AB} = f^C{}_{AD} f^D{}_{BC}. \tag{31}$$

A partir dessa lagrangiana, e somando-se um termo de fonte na mesma, obtido a partir da lagrangiana para o campo Ψ livre e pelo princípio de acoplamento mínimo (substituir derivadas ordinárias por covariantes), é possível obter as equações de Yang-Mills,

$$\partial_\mu F^{A\mu\nu} + f^A{}_{BC} A^B{}_\mu F^{C\mu\nu} = J^{A\nu}, \tag{32}$$

onde

$$J^{A\nu} = -\frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial A_{A\nu}} \tag{33}$$

é a corrente de fonte ($\mathcal{L}$ refere-se ao termo de fonte na lagrangiana).

No caso do eletromagnetismo, tem-se um grupo abeliano[4], o grupo U(1). Assim,

[3]Há um detalhe envolvendo a definição das relações de comutação dos geradores e a definição de derivada covariante, que muda o sinal do termo $f^A{}_{BC}$ nessa relação de comutação das derivadas covariantes. A forma apresentada aqui para esse comutador é uma forma geral, e o sinal pode variar dependendo da convenção adotada.

[4]Um grupo abeliano é um grupo cujos elementos comutam.

os coeficientes de estrutura são nulos, de forma que as equações 29 e 32 recuperam, respectivamente, as equações homogênea e não homogênea de Maxwell.

Uma teoria de *gauge* para um grupo não abeliano implica na interação do campo de *gauge* consigo mesmo. Isso pode ser visto no termo à esquerda na equação 32, envolvendo os coeficientes $f^{A}{}_{BC}$. Esse termo define a chamada auto-corrente,

$$j^{A\nu} = -f^{A}{}_{BC}\, A^{B}{}_{\mu} F^{C\mu\nu}, \tag{34}$$

que é a corrente carregada pelos próprios campos de *gauge*. No caso abeliano do eletromagnetismo, o fóton não possui carga eletromagnética, e, portanto, não interage consigo mesmo. No entanto, os glúons na cromodinâmica, por exemplo, associada a um grupo não abeliano, interagem entre si.

V. Teleparalelismo - Discussões Preliminares

O espaço-tempo é uma variedade diferenciável, e em cada ponto é possível definir um espaço tangente, que engloba todos os vetores que podem ser associados ao ponto. É importante ressaltar que a variedade carrega automaticamente consigo os espaços tangentes, a partir do momento em que é definida.

No contexto da gravitação teleparalela, o espaço tangente é um espaço quadridimensional de Minkowski associado a um ponto. Intuitivamente, é muito comum, nesse momento, imaginar a origem desse espaço grudada no ponto. Porém, para entender o teleparalelismo, é importante que isso não seja tomado a risca. O melhor é imaginá-lo como um espaço "independente"[5], onde é possível realizar todas as operações comumente feitas em um espaço de Minkowski, como translações, rotações e boosts.

Como o espaço tangente está intimamente ligado ao ponto onde é definido, há uma correspondência entre as bases escolhidas nesse espaço, denominadas tetradas, e as bases "anexadas" ao ponto no espaço tempo, que aqui serão tomadas como sendo as bases coordenadas. Para explicitar isso na notação matemática, quando estiver se tratando dos elementos[6] escritos em termos da base geral escolhida para o espaço tangente[7], os índices usados serão latinos (a, b, c...), enquanto que os índices gregos (μ, ν, λ...) serão reservados para os elementos escritos em termos da base "anexada" ao espaço tempo.

No teleparalelismo, o espaço-tempo de Riemann, que possui curvatura apenas, é substituído pelo espaço-tempo de Weitzenböck, que possui apenas torção. Isso faz surgir duas estruturas geométricas com formalismos distintos. Por outro lado, ambas as estruturas podem ser usadas para descrever a gravitação, devido à universalidade dessa. Vale ressaltar, no entanto, que apenas uma das estruturas é suficiente para realizar tal descrição. Além

[5] Ele está intimamente ligado ao ponto onde é definido, mas agora há uma liberdade na escolha de sua origem.

[6] "Elementos" aqui é usado não apenas para quadrivetores, mas também para outros objetos construídos a partir das bases, como tensores.

[7] Em alguns momentos pode ser usada também a expressão "espaço interno" para denominar o espaço tangente, em analogia com as teorias de calibre (o mesmo que teoria de *Gauge*) para as interações fundamentais. É uma analogia no sentido em que o teleparalelismo não é uma teoria de calibre convencional, pois o "espaço interno" aqui não é independente do espaço-tempo.

disso, o teleparalelismo é, ao menos macroscopicamente, equivalente à relatividade geral, no sentido em que os resultados experimentais esperados são idênticos.

O teleparalelismo é atualmente estudado a partir dos formalismos lagrangiano e hamiltoniano (MALUF; ROCHA-NETO, 2001). Ambas as formas de abordá-lo têm apresentado avanços consideráveis na descrição de fenômenos não explicados no contexto da relatividade geral. Neste trabalho, porém, será utilizado apenas o formalismo lagrangiano.

A seguir, essa teoria de gravitação será discutida a partir do ponto de vista de uma teoria de *gauge* [8] para o grupo de translação.

VI. A Teoria de *Gauge* para o Grupo de Translação

Nesse primeiro momento, será assumido que o espaço-tempo é um espaço de Minkowski. Em cada ponto desse espaço, tem-se um espaço tangente. As bases coordenadas desses espaços podem ser relacionadas da seguinte forma[9]

$$\partial_\mu = (\partial_\mu x^a)\partial_a \;\text{ e }\; \partial_a = (\partial_a x^\mu)\partial_\mu, \tag{35}$$

onde x^a e x^μ são as coordenadas nesses espaços.

Uma translação local na fibra, que é a transformação de *gauge* de interesse, pode ser expressa como

$$x'^a = x^a + a^a(x^\mu), \tag{36}$$

onde $a^a(x^\mu)$ são os parâmetros da transformação. Essa transformação também pode ser escrita com $x' = Ux$, onde U é um elemento do grupo de translação. Assim, pode-se representar uma transformação infinitesimal como

$$U = 1 + \delta a^a P_a, \tag{37}$$

onde δa^a são os parâmetros de transformação e $P_a = \partial_a$ são os geradores de translações infinitesimais. Eles satisfazem a relação de comutação

$$[P_a, P_b] = 0. \tag{38}$$

A transformação 36 pode ser então escrita, em sua versão infinitesimal, como

$$\delta x^a = \delta\alpha^b P_b x^a. \tag{39}$$

Agora, considere um campo de fonte, denominado $\Phi(x^\mu)$. A transformação de *gauge* para esse campo pode ser escrita como

$$\Phi'(x^\mu) = U\Phi(x^\mu), \tag{40}$$

[8] Apenas para lembrar: teoria de *gauge* é o mesmo que teoria de calibre.
[9] Aqui, índices latinos referem-se ao espaço tangente, e índices gregos ao espaço-tempo.

e a transformação infinitesimal desse campo fica

$$\delta\Phi = \delta a^a P_a \Phi. \tag{41}$$

Perceba que essa mudança $\delta\Phi$ no campo é feita localmente, ou seja, no mesmo ponto x^μ. Veja também que, por causa da relação 35, os geradores P_a podem agir em qualquer campo de fonte por meio de seus argumentos x^μ.

Para poder-se definir a derivada covariante de *gauge*, é necessário introduzir os potenciais de gauge B_μ do modelo, dados pela equação a seguir

$$B_\mu = B^a{}_\mu P_a, \tag{42}$$

onde $B^a{}_\mu$ são as componentes ao longo dos geradores P_a.

A definição geral de derivada covariante de *gauge*, dada pela equação 24, pode ser escrita, para os potenciais B_μ e parâmetros δa^a, da seguinte forma

$$D_\mu = \partial_\mu + c^{-2} B^a{}_\mu \frac{\delta}{\delta a^a}, \tag{43}$$

onde o inverso ao quadrado da velocidade da luz, c^{-2}, é introduzido apenas por razões dimensionais. Utilizando-se essa definição e a relação 41, pode-se escrever

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + c^{-2} B^a{}_\mu P_a \Phi. \tag{44}$$

Como os geradores P_α são definidos em termos de derivadas que agem sobre o campo por meio de seus argumentos, como já mencionado acima, todo campo de fonte acopla com o potencial B_μ. É daqui que irá surgir o conceito de universalidade da gravitação, de acordo com esse modelo (ANDRADE; PEREIRA, 1997a).

Ao impor que a derivada se transforme de forma covariante, obtém-se a lei de transformação para o potencial, dada a seguir

$$B'_\mu = U B_\mu U^{-1} + c^2 U \partial_\mu U^{-1}, \tag{45}$$

e a transformação infinitesimal correspondente é dada por

$$B'^a{}_\mu = B^a{}_\mu - c^2 \partial_\mu \delta a^a. \tag{46}$$

A força de campo (análoga à 2-forma curvatura dada na equação 26) $F^a{}_{\mu\nu}$ é definida a partir da derivada covariante do potencial de *gauge* $B^a{}_\mu$, e pode ser escrita como

$$F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a{}_\nu - \partial_\nu B^a{}_\mu. \tag{47}$$

Ela assume essa forma pois o comutador dos geradores do grupo é nulo, ou seja, os coeficientes de estrutura são nulos.

Finalmente, as equações dinâmicas podem ser obtidas a partir de uma lagrangiana quadrática na força de campo, de forma análoga à equação 30. Essa lagrangiana é dada a seguir

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G}\left[\frac{1}{4}F^{a}{}_{\mu\nu}F^{b}{}_{\theta\rho}\eta^{\mu\theta}N_{ab}{}^{\nu\rho}\right], \tag{48}$$

onde G é a constante gravitacional e

$$N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab}\eta^{\nu\rho}. \tag{49}$$

VII. Partícula de Massa m em um Campo Gravitacional

Agora, será apresentada a descrição do movimento de uma partícula de massa m sob a ação de um campo gravitacional, como descrito pela teoria de *gauge* para o grupo de translação. O espaço-tempo ainda é um espaço de Minkowski, de modo que é possível fazer uma analogia com o caso do eletromagnetismo.

Para o termo de acoplamento da partícula com o campo, assume-se que a ação é dada por(ANDRADE; PEREIRA, 1997a)

$$c^{-2}\int_a^b B^{a}{}_{\mu}p_a dx^{\mu}, \tag{50}$$

onde a integral é realizada ao longo da linha de mundo da partícula, e p_a é a carga de Noether conservada associada às transformações do grupo de *gauge* considerado, que no caso das translações é justamente o quadri-momento,

$$p_\alpha = mcu_\alpha, \tag{51}$$

onde u_α é a quadri-velocidade.

A ação completa da partícula no campo gravitacional é dada por

$$S = \int_a^b L\mathrm{d}s \equiv \int_a^b \left[-mc\sqrt{-u^2} + \frac{m}{c}B^{a}{}_{\mu}u_a u^{\mu}\right]\mathrm{d}s, \tag{52}$$

onde o parâmetro utilizado foi a raiz do intervalo, $\mathrm{d}s = (\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu})^{\frac{1}{2}}$, e $u^2 = \eta_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}$. Perceba que a primeira parte dessa ação é apenas a ação para uma partícula livre na relatividade especial, e a segunda é o termo de acoplamento da partícula com o campo. Ao apresentar-se ambas as massas na ação acima como sendo iguais, já se assume a igualdade entre massa inercial e gravitacional.

Por meio das equações de Euler-Lagrange, é possível obter as equações de movimento, dada por

$$mc\left[\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} + c^{-2}B^{a}{}_{\mu}\frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}s}\right] = \frac{m}{c}F^{a}{}_{\mu\nu}u_a u^{\nu}, \tag{53}$$

ou, usando-se a relação

$$\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}\right)\frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}s}, \tag{54}$$

obtém-se

$$(\partial_\mu x^a + c^{-2} B^a{}_\mu) \frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}s} = c^{-2} F^a{}_{\mu\nu}\, u_a u^\nu. \tag{55}$$

Essa equação é análoga à força de Lorentz do eletromagnetismo, dada, na formulação covariante, por

$$\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau} = c^{-1} \frac{q}{m} F_{\mu\nu} u^\nu. \tag{56}$$

onde u_μ é a quadri-velocidade, τ é o tempo próprio, q é a carga elétrica e $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético. Veja que, na equação 55, não aparece um termo análogo ao $\frac{q}{m}$ na força de Lorentz. Isso é porque as massas inercial e gravitacional se cancelam.

VIII. As Tetradas e a Torção na Descrição da Gravitação

Nas seções anteriores, o espaço considerado era um espaço de Minkowski. No entanto, a introdução de uma tetrada não trivial leva ao aparecimento de outras estruturas no espaço-tempo, e essas estruturas podem ser associadas à gravitação, devido à sua universalidade (ANDRADE; PEREIRA, 1997a). A seguir, tem-se uma discussão de como isso ocorre.

A equação 44, que define a derivada covariante referente ao grupo de translação, pode ser reescrita, a partir da equação 35, como

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu x^a + c^{-2} B^a{}_\mu) \partial_a \Phi. \tag{57}$$

Se a expressão entre parênteses for denominada $h^a{}_\mu$, pode-se escrever,

$$D_\mu = h^a{}_\mu \partial_a. \tag{58}$$

Veja que essa é, na verdade, a definição de uma nova base no espaço tangente, ou seja, de uma nova tetrada. Nesse sentido, o campo gravitacional, associado ao potencial $B^a{}_\mu$, aparece como a parte não trivial da tetrada. Sem esse campo, ela vira novamente a tetrada trivial da equação 35. É possível verificar também que essa nova tetrada é invariante por transformações do grupo de translação.

O comutador da derivada covariante fornece a expressão

$$[D_\mu, D_\nu] = c^{-2} F^a{}_{\mu\nu} P_a, \tag{59}$$

que, como é comum nas teorias de gauge (ver equação 28), fornece a força de campo, ou 2-forma curvatura.

A introdução da tetrada não trivial leva também à definição de uma conexão de Cartan, que é a conexão de Weitzenböck,

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \partial_\nu h^a{}_\mu. \tag{60}$$

Essa conexão apresenta apenas torção, dada pelo tensor

$$T^\rho{}_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}. \tag{61}$$

Com base nesse tensor, é possível escrever a força de campo como

$$F^a{}_{\mu\nu} = c^2 h^a{}_\rho T^\rho{}_{\mu\nu}. \tag{62}$$

Com essas definições, o comutador 59 pode ser escrito como

$$[D_\mu, D_\nu] = T^\rho{}_{\mu\nu} D_\rho, \tag{63}$$

ou seja, a torção está associada justamente ao coeficiente de holonomia da tetrada. Esse coeficiente, no caso de uma tetrada não trivial, engloba os efeitos gravitacionais. Em outras palavras, a presença de um campo gravitacional no espaço-tempo induz uma torção, essa, por sua vez, associada à tetrada que, em sua definição, engloba os potenciais de *gauge* associados à gravitação.

VIII.subsection. Significado da Torção

Nesse ponto, é importante dar uma pausa e entender um pouco do significado da torção. Quando são discutidas a conexão e a curvatura no contexto da relatividade geral, geralmente se recorre ao conceito de transporte paralelo. Aqui, não é diferente.

Seja uma curva $x^\mu(\lambda)$ e um tensor qualquer $T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l}$. A condição de que esse tensor seja constante ao longo da curva pode ser traduzida na constância de suas componentes (CARROLL, 2004, p. 105):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = 0. \tag{64}$$

Para que a equação acima tenha caráter tensorial, define-se a derivada covariante direcional, substituindo-se a derivada parcial acima pela derivada covariante:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \nabla_\mu. \tag{65}$$

Por fim, define-se o transporte paralelo do tensor T ao longo do caminho $x^\mu(\lambda)$ como sendo a condição de que a derivada covariante desse tensor ao longo do caminho seja nula:

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\lambda} T\right)^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} \equiv \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = 0 \tag{66}$$

Essa equação é conhecida como equação do transporte paralelo. Para um vetor V^μ, por exemplo, ela tem a forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} V^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda} V^\rho = 0, \tag{67}$$

onde $\Gamma^\mu_{\sigma\rho}$ é a conexão. Como se pode ver, o transporte paralelo de tensores depende da conexão utilizada. Diferentes resultados são obtidos para diferentes conexões.

A conexão de Levi-Civita, que tem apenas curvatura, diz como é possível transportar um tensor de forma paralela ao longo de uma curva. No entanto, no transporte específico definido por essa conexão, o tensor não "rotaciona" ao longo do "eixo" definido pela própria curva. Esse tensor é apenas deslizado ao longo da curva, "rolando" enquanto a segue (ver imagem 2 - o "rolamento" do vetor ao longo da curva é melhor evidenciado no caminho N-A; perceba, no entanto, que o vetor não "rotaciona" em torno da curva, pois não há torção).

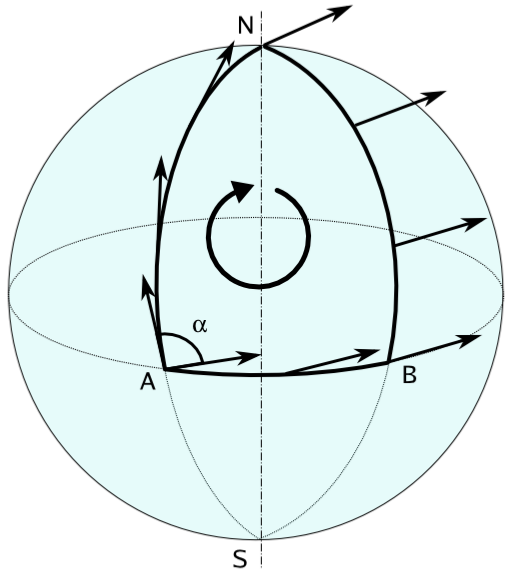

Figura 2: *Representação do transporte paralelo de um vetor no polo norte de uma esfera(ANTONY, 2006), por dois caminhos distintos, N-A e N-B-A. Perceba que o vetor no ponto final depende do caminho tomado.*

O transporte paralelo definido pela conexão de Weitzenböck, no entanto, faz com que o tensor "rotacione" ao longo de seu transporte pela curva, sem "rolar" ao longo dessa. Essa definição intuitiva é exibida na figura a seguir:

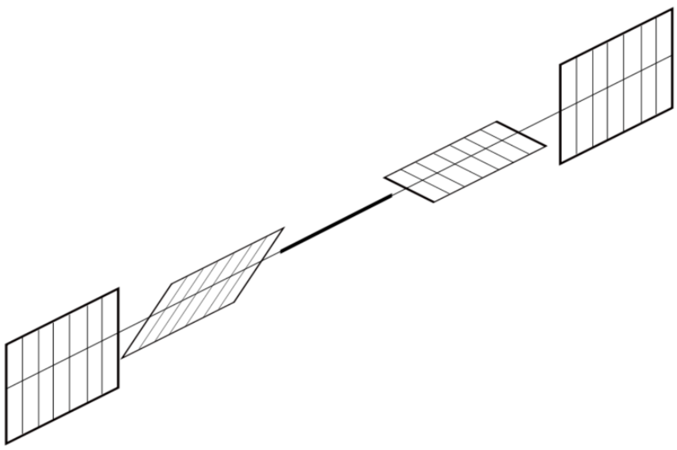

Figura 3: *Representação de um transporte paralelo envolvendo a conexão de Weitzenböck. (KASUGAHUANG, 2007)*

VIII.subsection. O Transporte Paralelo da Tetrada

A definição da conexão de Weitzenböck permite a introdução de uma derivada covariante no espaço tempo, a derivada covariante de Weitzenböck. Para um vetor covariante V_μ, por exemplo, ela tem a seguinte forma

$$\nabla_\nu V_\mu = \partial_\nu V_\mu - \Gamma^\theta{}_{\mu\nu} V_\theta. \tag{68}$$

As equações do transporte paralelo obtidas anteriormente são válidas aqui, bastando se considerar a conexão de Weitzenböck. Desse modo, o transporte paralelo é definido a partir da imposição de que a derivada covariante do tensor ao longo do caminho definido seja nula (equação 66).

Aplicando a derivada covariante de Weitzenböck à tetrada, obtém-se, por causa da equação 60,

$$\nabla_\nu h^a{}_\mu = \partial_\nu h^a{}_\mu - h^a{}_\rho \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \equiv 0, \tag{69}$$

ou seja, a tetrada é transportada paralelamente com relação à conexão de Weitzenböck. Essa é a condição de paralelismo absoluto.

VIII.subsection. A Tetrada e a Estrutura Riemaniana do Espaço-Tempo

A presença de uma tetrada não trivial também induz, no espaço-tempo, uma estrutura riemanniana. Como a tetrada satisfaz as equações,

$$h^a{}_\mu h_a{}^\nu = \delta^\nu_\mu \;\text{ e }\; h^a{}_\mu h_b{}^\mu = \delta^a_b, \tag{70}$$

se η^{ab} é a métrica usada para subir e descer os índices latinos, os índices tensoriais são levantados e abaixados por meio da métrica riemaniana,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu. \tag{71}$$

Isso é consequência de a tetrada ser pseudo-ortogonal em relação à métrica riemaniana.

É possível, a partir da métrica, introduzir uma conexão que tenha apenas curvatura - essa é justamente a conexão de Levi-Civita da relatividade geral,

$$\mathring{\Gamma}^\theta{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\theta\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \tag{72}$$

A curvatura associada a essa conexão é dada por

$$\mathring{R}^\theta{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \mathring{\Gamma}^\theta{}_{\rho\nu} + \mathring{\Gamma}^\theta{}_{\sigma\mu} \mathring{\Gamma}^\sigma{}_{\rho\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu). \tag{73}$$

Essa é a curvatura induzida no espaço tempo por um campo gravitacional, de acordo com a relatividade geral. Com a conexão de Levi-Civita, como já foi visto, é possível introduzir uma outra derivada covariante. Em um vetor, ela é dada por

$$\mathring{\nabla}_\nu V_\mu = \partial_\nu V_\mu - \mathring{\Gamma}^\theta{}_{\mu\nu} V_\theta. \tag{74}$$

É possível verificar, dadas as definições anteriores, que ambas as conexões $\Gamma^{\theta}{}_{\mu\nu}$ e $\mathring{\Gamma}^{\theta}{}_{\mu\nu}$ preservam a métrica,

$$\mathring{\nabla}_{\nu} g_{\rho\mu} = \nabla_{\nu} g_{\rho\mu} = 0. \tag{75}$$

Agora, se a equação 71 for substituída na equação 72, tendo em mente a definição da conexão $\Gamma^{\theta}{}_{\mu\nu}$ (equação 60), é possível obter

$$\Gamma^{\theta}{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^{\theta}{}_{\mu\nu} - K^{\theta}{}_{\mu\nu}, \tag{76}$$

onde

$$K^{\theta}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[T_{\mu}{}^{\theta}{}_{\nu} + T_{\nu}{}^{\theta}{}_{\mu} - T^{\theta}{}_{\mu\nu}] \tag{77}$$

é denominado tensor de contorção.

Como já comentado anteriormente, a curvatura da conexão de Weitzenböck é nula,

$$R^{\theta}{}_{\rho\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\theta}{}_{\rho\nu} + \Gamma^{\theta}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu) \equiv 0. \tag{78}$$

Se nessa expressão a conexão $\Gamma^{\theta}{}_{\mu\nu}$ for substituída de acordo com a expressão 76, obtém-se

$$R^{\theta}{}_{\rho\mu\nu} = \mathring{R}^{\theta}{}_{\rho\mu\nu} + (DK)^{\theta}{}_{\rho\mu\nu} - K^{\theta}{}_{\sigma\mu}K^{\sigma}{}_{\rho\nu} + K^{\theta}{}_{\sigma\nu}K^{\sigma}{}_{\rho\mu} \equiv 0, \tag{79}$$

onde

$$(DK)^{\theta}{}_{\rho\mu\nu} = \partial_{\mu}K^{\theta}{}_{\rho\nu} + \Gamma^{\theta}{}_{\sigma\mu}K^{\sigma}{}_{\rho\nu} + \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu}K^{\theta}{}_{\sigma\mu}. \tag{80}$$

Pode-se perceber, portanto, que a presença de uma tetrada não-trivial na teoria de *gauge* para o grupo de translação induz tanto uma estrutura riemaniana como uma estrutura teleparalela no espaço tempo. Veja também que a curvatura da conexão de Levi-Civita é justamente o que compensa a "contribuição" de curvatura advinda da estrutura teleparalela (em termos do tensor de contorção), levando a uma curvatura total nula.

IX. A Lagrangiana Teleparalela

No espaço-tempo induzido pela tetrada não-trivial, a lagrangiana 48 se escreve(ANDRADE; PEREIRA, 1997a)

$$\mathcal{L} = \frac{h}{16\pi G}\left[\frac{1}{4}F^{a}{}_{\mu\nu}F^{b}{}_{\theta\rho}g^{\mu\theta}N_{ab}{}^{\nu\rho}\right], \tag{81}$$

onde $h = det(h^{a}{}_{\mu})$ é o jacobiano da transformação dada pela equação 58. Porém, o termo $N_{ab}{}^{\nu\rho}$ não é dado simplesmente pela equação 49,

$$N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab}g^{\nu\rho} \equiv \eta_{ab}h_{c}{}^{\nu}h^{c\rho}, \tag{82}$$

isso porque agora os índices do espaço tangente (latinos) e de espaço-tempo (gregos) podem ser relacionados por meio da tetrada, e portanto aparecem misturados na lagrangiana acima. É necessário incluir, na expressão de $N_{ab}{}^{\nu\rho}$, as permutações cíclicas dos índices latinos, de modo que obtém-se

$$N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab}h_{c}{}^{\nu}h^{c\rho} + 2h_{a}{}^{\rho}h_{b}{}^{\nu} - 4h_{a}{}^{\nu}h_{b}{}^{\rho}. \tag{83}$$

Substituindo essa equação na lagrangiana 81, e usando a equação 62, é possível escrever

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{16\pi G}\left[\frac{1}{4}T^{\rho}{}_{\mu\nu}T_{\rho}{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}T^{\rho}{}_{\mu\nu}T^{\nu\mu}{}_{\rho} - T_{\rho\mu}{}^{\rho}T^{\nu\mu}{}_{\nu}\right], \tag{84}$$

que é a lagrangiana da teoria translacional de *gauge*, escrita em termos da torção.

A lagrangiana obtida acima também pode ser obtida a partir do contexto da relatividade geral. A lagrangiana associada à dinâmica do campo gravitacional é a lagrangiana de Einstein-Hilbert, exibida a seguir

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}c^4}{16\pi G}\mathring{R}, \tag{85}$$

onde $\mathring{R} = g^{\mu\nu}\mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$ é a curvatura escalar (escalar de Ricci) da conexão de Levi-Civita, e $g = det(g_{\mu\nu})$. Substituindo $\mathring{R}$ de acordo com a equação 79, é possível obter(ANDRADE; PEREIRA, 1997b) justamente a lagrangiana 84, com $h = det(h^{a}{}_{\mu}) = \sqrt{-g}$. Esse resultado demonstra que a teoria de *gauge* para o grupo de translação, com uma lagrangiana quadrática na torção, é completamente equivalente à relatividade geral, com sua lagrangiana envolvendo a curvatura escalar.

A lagrangiana 84 pode ser reescrita de modo a obter-se uma equação de campo no vácuo, análoga à equação de Yang-Mills 32. Para tal, define-se

$$S_{\rho}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(T_{\rho}{}^{\mu\nu} + T^{\mu}{}_{\rho}{}^{\nu} - T^{\nu}{}_{\rho}{}^{\mu}) - \frac{1}{2}(\delta^{\nu}_{\rho}T_{\theta}{}^{\mu\theta} - \delta^{\mu}_{\rho}T_{\theta}{}^{\nu\theta}), \tag{86}$$

de modo que a lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{16\pi G}S_{\rho}{}^{\mu\nu}T^{\rho}{}_{\mu\nu}. \tag{87}$$

Variando a lagrangiana acima com relação ao potencial $B^{a}{}_{\mu}$, obtém-se

$$\partial_{\nu}S_{\rho}{}^{\mu\nu} - \frac{4\pi G}{c^4}t_{\rho}{}^{\mu} = 0, \tag{88}$$

onde

$$\begin{aligned} t_{\rho}{}^{\mu} = \frac{c^4}{16\pi G}[4S_{\rho}{}^{\mu\theta}\Gamma^{\nu}_{\nu\theta} + 2S^{\mu\nu\theta}T_{\rho\nu\theta} + T_{\sigma}{}^{\theta\mu}T^{\sigma}{}_{\theta\rho} \\ +T^{\theta}{}_{\sigma}{}^{\mu}T^{\sigma}{}_{\theta\rho} - 2T^{\theta\mu}{}_{\theta}T^{\theta}{}_{\rho\theta} + \frac{1}{2}T^{\mu\theta}{}_{\sigma}T_{\rho\theta}{}^{\sigma}] - \delta^{\mu}_{\rho}h^{-1}\mathcal{L} \end{aligned} \tag{89}$$

é a auto-corrente do campo de *gauge*, análoga àquela que aparece na equação de Yang-Mills, dada pela equação 34. No caso tratado acima, ela é o pseudo-tensor de energia-momento do campo gravitacional. Perceba que, apesar da analogia com a equação de Yang-Mills, esse termo de auto-corrente não pode ser obtido a partir dos coeficientes de estrutura do grupo considerado, pois o grupo de translações é abeliano. Assim, a auto-corrente aqui tem uma natureza diferente daquela que aparece na equação de Yang-Mills.

É possível mostrar, a partir da equação 76, que a equação 88 é equivalente à equação de campo de Einstein no vácuo,

$$\mathring{R}_{\rho\theta} - \frac{1}{2} g_{\rho\theta} \mathring{R} = 0, \tag{90}$$

onde $\mathring{R}_{\rho\theta}$ é o tensor de curvatura de Ricci.

X. A Equação de Força

Considere novamente a equação 55. Em termos da tetrada, ela pode ser escrita agora como

$$h^a{}_\mu \frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}s} = c^{-2} F^a{}_{\mu\nu}\, u_a u^\nu. \tag{91}$$

A partir da equação 62 e das relações

$$h^a{}_\mu \frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}s} = \omega_\mu \equiv \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} - \Gamma_{\theta\mu\nu} u^\theta u^\nu \tag{92}$$

e

$$u_a = h_{a\theta} u^\theta, \tag{93}$$

onde ω_μ é a quadri-aceleração da partícula no espaço-tempo, pode-se escrever

$$\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} - \Gamma_{\theta\mu\nu} u^\theta u^\nu = T_{\theta\mu\nu}\, u^\theta u^\nu. \tag{94}$$

Do lado esquerdo dessa equação, tem-se a derivada covariante de Weitzenböck de u_μ ao longo da linha de mundo da partícula. A torção no lado direito da equação faz o papel de uma força externa, o que implica que as partículas não irão seguir geodésicas no espaço-tempo de Weitzenböck. De acordo com a descrição teleparalela, portanto, o papel do campo gravitacional é induzir uma torção no espaço-tempo, responsável por determinar a trajetória da partícula.

O formato da equação de força teleparalela 91 é o que mais se assemelha à equação de Lorentz do eletromagnetismo 56, e por isso ela é chamada de "equação de Lorentz gravitacional". Reescrevendo essa equação na forma 94 e usando a relação 76, obtém-se exatamente a equação da geodésica da relatividade geral. Ou seja, a gravidade pode ser descrita tanto por uma equação geométrica, com as partículas percorrendo geodésicas no espaço-tempo, quanto por uma equação de força, cuja forma aproxima a gravitação das demais interações fundamentais, descritas no contexto da teoria de Yang-Mills.

XI. O Tensor Energia-Momento

Um dos problemas mais antigos no contexto da gravitação é o da definição da densidade de energia-momento para o campo gravitacional. Apresentando-o como um campo verdadeiro, é de se esperar que ele tenha uma densidade local de energia-momento própria. No entanto, geralmente se afirma que não é possível definir tal densidade por causa do princípio de equivalência (ANDRADE; GUILLEN; PEREIRA, 2000). Como consequência disso, a tentativa de uma definição dessa densidade leva a objetos que não se transformam tensorialmente. Einstein, por exemplo, quando estava estudando esse problema, propôs uma expressão para essa densidade, que era a expressão canônica obtida partir do teorema de Noether. No entanto, o que ele obteve foi apenas um pseudo-tensor.

Parece, portanto, que na relatividade geral não é possível definir uma densidade de energia-momento para o campo gravitacional que seja realmente um tensor. Porém, no teleparalelismo como uma teoria de *gauge* para a gravitação, é possível encontrar uma expressão para essa densidade que seja realmente um tensor de espaço-tempo e um tensor de *gauge*, como será exibido a seguir.

É possível obter, a partir da variação da lagrangiana 87 com relação ao potencial e manipulações algébricas envolvendo a tetrada, a seguinte equação de campo gravitacional,

$$\partial_\sigma(hS_a{}^{\sigma\rho}) - \frac{4\pi G}{c^4}(hj_a{}^\rho) = 0, \tag{95}$$

onde $S_a{}^{\sigma\rho} \equiv h_a{}^\lambda S_\lambda{}^{\sigma\rho}$, sendo $S_\lambda{}^{\sigma\rho}$ obtido a partir da equação 86, e

$$hj_a{}^\rho \equiv -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h^a{}_\rho} = \frac{c^4}{4\pi G} h h_a{}^\lambda S_\mu{}^{\nu\rho} T^\mu{}_{\nu\lambda} - h_a{}^\rho \mathcal{L}. \tag{96}$$

A equação 95 é equivalente à equação 88, porém agora ela é escrita em termos também de índices tangentes, de forma análoga à equação de Yang-Mills 32. O termo $hj_a{}^\rho$, cuja definição é dada acima, é a corrente de *gauge* gravitacional, que representa, nesse caso, o tensor de energia-momento do campo gravitacional (ANDRADE; GUILLEN; PEREIRA, 2000). Já o termo $hS_a{}^{\sigma\rho}$ é denominado super-potencial, no sentido em que pode-se obter, a partir de sua derivada, a corrente de *gauge*.

A assimetria de $S_a{}^{\sigma\rho}$ nos seus dois últimos índices implica na conservação da corrente de *gauge* gravitacional, $hj_a{}^\rho$, por causa da equação de campo

$$\partial_\rho(hj_a{}^\rho) = 0, \tag{97}$$

obtida pela aplicação da derivada parcial ∂_ρ na equação 95. Por meio da identidade

$$\partial_\rho h \equiv h\Gamma^\nu{}_{\nu\rho} = h(\Gamma^\nu{}_{\rho\nu} - K^\nu{}_{\rho\nu}), \tag{98}$$

é possível reescrever a equação 97 como

$$D_\rho j_a{}^\rho \equiv \partial_\rho j_a{}^\rho + (\Gamma^\rho{}_{\lambda\rho} - K^\rho{}_{\lambda\rho}) j_a{}^\lambda = 0, \tag{99}$$

onde D_ρ é apenas a derivada covariante de Levi-Civita escrita em termos da conexão de Weitzenböck por meio da equação 76. É possível verificar que a quantidade $j_a{}^\rho$ se transforma de forma covariante sob uma transformação de coordenadas do espaço-tempo e também que ela é invariante sob transformações locais de *gauge* das coordenadas do espaço tangente. Isso significa que ela é um tensor de espaço-tempo e de *gauge* verdadeiro. No entanto, ela só se transforma de maneira covariante sob uma transformação de Lorentz global do espaço tangente.

O pseudo-tensor de energia-momento do campo gravitacional 89 pode ser escrito em termos da corrente de *gauge* $j_a{}^{\rho}$ por meio da expressão

$$t_\lambda{}^{\rho} = h^a{}_\lambda j_a{}^{\rho} + \frac{c^4}{4\pi G}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu} S_\mu{}^{\nu\rho}. \tag{100}$$

É justamente esse termo envolvendo a conexão que transforma a corrente de *gauge* $j_a{}^{\rho}$, que é um tensor de espaço-tempo verdadeiro, no pseudo-tensor de energia-momento $t_\lambda{}^{\rho}$. Cada definição desse pseudo-tensor está associada à definição de um dado super-potencial $hS_\lambda{}^{\rho\sigma}$. Assim como a corrente de *gauge*, o pseudo-tensor é conservado como consequência da equação de campo

$$\partial_\rho(ht_\lambda{}^{\rho}) = 0, \tag{101}$$

porém essa equação não pode ser reescrita em termos da derivada covariante, dado o caráter não tensorial de $t_\lambda{}^{\rho}$.

XII. Conclusão

Com o advento da relatividade geral de Einstein, a descrição atribuída à gravitação foi modificada de forma marcante. Antes, ela era descrita por uma força, a lei da gravitação universal de Newton, porém Einstein percebeu que, por causa dos princípios discutidos neste trabalho, ela poderia ser interpretada também como algo geométrico: a curvatura do espaço-tempo. A partir desse ponto de vista, fenômenos como o lenteamento gravitacional e o avanço no periélio de mercúrio foram previstos e verificados. A teoria de Einstein, portanto, estendeu os limites de validade da teoria de Newton.

Apesar de seus méritos, a teoria da relatividade geral apresenta problemas quando são feitas tentativas de conciliá-la com as demais interações físicas, essas, por sua vez, descritas por teorias de *gauge*. Essas teorias foram estudadas e desenvolvidas ao longo do século XX, e proporcionaram avanços notáveis na descrição das interações. O eletromagnetismo, por exemplo, pode ser obtido a partir da teoria de *gauge* para o grupo U(1). Um conjunto de teorias de *gauge* para os grupos especiais unitários de ordem n foi proposto por Chen Ning Yang e Robert Mills, culminando na denominada teoria de Yang-Mills, da qual se obtém as interações fundamentais, a depender do grupo de simetria escolhido.

Por causa dos problemas de compatibilização da relatividade geral, diversos cientistas, inclusive o próprio Einstein, trabalharam na elaboração de outras teorias que viabilizassem essa compatibilização. Uma dessas teorias alternativas de gravitação, que foi desenvolvida ao longo do século XX, foi a gravitação teleparalela. O teleparalelismo é obtido a partir de uma teoria de *gauge* para o grupo de translação, o que o aproxima do formalismo das demais interações fundamentais. Essa teoria implica em uma estrutura tetrada no espaço-tempo, da qual pode se obter tanto a descrição remanniana quanto a teleparalela da gravitação. No caso teleparalelo, ela leva à definição natural de uma conexão, a conexão de Weitzenböck, que é a utilizada no teleparalelismo. Essa conexão apresenta apenas torção, que no caso de uma partícula de massa m aparece como uma força em sua equação de movimento. Isso não acontece na relatividade geral, onde a trajetória de uma partícula é descrita por uma geodésica.

O teleparalelismo foi utilizado por vários cientistas na tentativa de solucionar problemas advindos da relatividade geral. Um deles é o problema da densidade de energia-momento do campo gravitacional. Na relatividade geral, esta é necessariamente descrita por um pseudo-tensor. Porém, no contexto do teleparalelismo, é possível achar uma auto-corrente de *gauge*, associada ao pseudo-tensor de energia momento usual, que se transforma como um tensor de espaço-tempo e de *gauge* verdadeiro.

O teleparalelismo aparece, portanto, como uma forma de estudar e entender fenômenos não explicados no contexto da relatividade geral. É um campo de pesquisa promissor, com desenvolvimentos ocorrendo ainda na atualidade.

Referências

ANDRADE, V. C. de; GUILLEN, L. C. T.; PEREIRA, J. G. *Gravitational Energy-Momentum Density in Teleparallel Gravity* . 2000. <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0003100.pdf>. [Acessado em 09/11/2019]. 19, 20

ANDRADE, V. C. de; PEREIRA, J. G. *Gravitational Lorentz Force and the Description of the Gravitational Interaction*. 1997. <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9703059.pdf>. [Acessado em 03/11/2019]. 3, 11, 12, 13, 17

ANDRADE, V. C. de; PEREIRA, J. G. *Riemannian and Teleparallel Descriptions of the Scalar Field Gravitational Interaction* . 1997. <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9706070.pdf>. [Acessado em 08/11/2019]. 18

ANTONY, L. *Ficheiro:Parallel_transport.png*. 2006. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parallel_transport.png>. [Acessado em 30/09/2019]. 15

BATTERMAN, R. W. *The Oxford Handbook of Philosophy of Physics*. [S.l.]: Oxford University Press, 2013. 3

BOSSO, P. *Generalized Uncertainty Principle and Quantum Gravity Phenomenology* . 2017. <https://arxiv.org/pdf/1709.04947.pdf>. [Acessado em 29/07/2018]. 2

BURGESS, C. P. *Quantum Gravity in Everyday Life: General Relativity as an Effective Field Theory*. 2003. <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0311082>. [Acessado em 23/07/2018]. 2

CARROLL, S. *Spacetime and Geometry - An Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Addison Wesley, 2004. 14

DUFF, M. J. *M-Theory (the Theory Formerly Known as Strings)*. 1996. <https://arxiv.org/abs/hep-th/9608117>. [Acessado em 14/02/2020]. 3

JAKOB. *Fiber Bundles*. 2018. <https://physicstravelguide.com/advanced_tools/fiber_bundles>. [Acessado em 18/10/2019]. 4

KALUZA, T. *On the Unification Problem in Physics*. 1921. <https://arxiv.org/abs/1503.03695>. [Acessado em 14/02/2020]. 3

KASUGAHUANG. *File:Torsion along a geodesic.svg*. 2007. <https://en.wikipedia.org/wiki/File:Torsion_along_a_geodesic.svg>. [Acessado em 07/11/2019]. 15

MALUF, J. W.; ROCHA-NETO, J. F. da. Hamiltonian formulation of general relativity in the teleparallel geometry. *Physical Review D*, v. 64, 09 2001. Disponível em: <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.64.084014>. Acesso em: 11 nov. 2019. 3, 10

MALUF, J. W.; ROCHA-NETO, J. F. da; ULHOA, S. C. *Bondi-Sachs energy-momentum and the energy of gravitational radiation*. 2015. <https://arxiv.org/abs/1503.03695>. [Acessado em 14/02/2020]. 3

PEREIRA, J. G.; ALDROVANDI, R. *An Introduction to Geometrical Physics*. [S.l.]: World Scientific, 1995. 7

PEREIRA, J. G.; ALDROVANDI, R. *An Introduction to Teleparallel Gravity*. 2010. <http://www.ift.unesp.br/users/jpereira/classnotes.html>. [Acessado em 22/03/2019]. 2, 3

PEREIRA, J. G.; ALDROVANDI, R. *Teleparallel Gravity - An Introduction*. [S.l.]: Springer, 2013. 4, 7

ROVELLI, C. *Loop Quantum Gravity*. 1997. <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9710008>. [Acessado em 14/02/2020]. 3

SCHWARZ, J. H.; SEIBERG, N. *String Theory, Supersymmetry, Unification, and All That*. 1998. <https://arxiv.org/abs/hep-th/9803179>. [Acessado em 14/02/2020]. 3

SCHWICHTENBERG, J. *Physics from Symmetry*. [S.l.]: Springer, 2018. 4, 5, 6

UNZICKER, A.; CASE, T. *Translation of Einstein's Attempt of a Unified Field Theory with Teleparallelism*. 2005. 1-3 p. <https://arxiv.org/pdf/physics/0503046.pdf>. [Acessado em 10/06/2019]. 3