Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster
Ámbito Matemáticas

Resolución de problemas de proporcionalidad directa e inversa por estudiantes de 2º ESO

ALEJANDRO VAQUERO RIVERO

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar la resolución de problemas de proporcionalidad directa e inversa por estudiantes de 2º ESO.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre proporcionalidad aritmética, que se ha puesto en marcha en un aula de 2º ESO en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

La proporcionalidad en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de la noción de proporcionalidad en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis de divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a la noción de proporcionalidad en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 2ª ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1
La proporcionalidad en el currículo vigente

En este primer capítulo se analiza longitudinalmente en el tiempo la noción de proporcionalidad presente en el currículo oficial, tanto para la etapa de educación Primaria, como para las etapas de Secundaria y Bachillerato. Esta sección se dividen en cinco tablas pertenecientes a tercer ciclo de primaria, primer ciclo de secundaria, segundo ciclo de secundaria, bachillerato de ciencias y tecnología y bachillerato para ciencias sociales. Cada una de ellas se divide en diferentes descriptores que tienen relación de alguna manera con la proporcionalidad. Los descriptores que se extraen del currículo basándose en localización de todo aquello necesario para que los alumnos puedan afrontar con garantías dicha noción. Por ello, se han elegido los siguientes ocho descriptores: *Números fraccionarios, Porcentajes, Semejanza, Razón y Proporción, Tablas y Gráficas, Proporcionalidad directa e inversa, Relación entre magnitudes y Tecnologías de la información*.

Por último, remarcar que estos contenidos mínimos del currículo oficial que se seleccionan están recogidos en los Boletines Oficiales del Estado (el Real Decreto 1513/2006 para Primaria, Real Decreto 1631/2006 para Secundaria y Real Decreto 1467/2007 para Bachillerato).

1.1.- <u>Contenidos en Primaria</u>

Tabla 1.1.a.- *Contenidos mínimos para tercer ciclo de primaria.*

CONTENIDOS EN TERCER CICLO DE PRIMARIA	
Descriptor	**Contenido**
C1: Números fraccionarios	*Bloque 1. Números y operaciones. Números enteros, decimales y fracciones.* - Números fraccionarios. Obtención de fracciones equivalentes.
C2: Porcentajes	*Bloque 1. Números y operaciones. Números enteros, decimales y fracciones.* - Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes. *Bloque 1. Números y operaciones. Estrategias de cálculo.* - Calculo de tantos por ciento básicos en situaciones reales.
C3: Semejanza	*Bloque 3. Geometría. Regularidades y simetrías.* - Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones.

1.2.- Contenidos en Secundaria

Tabla 1.2.a.- *Contenidos mínimos para primer ciclo de secundaria.*

CONTENIDOS EN PRIMER CICLO DE SECUNDARIA		
Descriptor	**Contenido**	
	1º ESO	**2º ESO**
C1: Números fraccionarios	*Bloque 2. Números.* - Fracciones y decimales en entornos cotidianos. Diferentes significados y usos de las fracciones. Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente.	*Bloque 2. Números.* - Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes. Uso de estas relaciones para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes. *(unido al C2).*
C2: Porcentajes	*Bloque 2. Números.* - Porcentajes para expresar composiciones o variaciones. Cálculo mental y escrito con porcentajes habituales.	*Bloque 2. Números.* - Aumentos y disminuciones porcentuales.
C3: Semejanza	--	*Bloque 4. Geometría.* - Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de relaciones de semejanza. - Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes. - Utilización de los teoremas de Tales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras.
C4: Razón y Proporción	*Bloque 2. Números.* - Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas en las que intervenga la proporcionalidad directa.	--

Tabla 1.2.b.- *Contenidos mínimos para primer ciclo de secundaria. (cont.)*

CONTENIDOS EN PRIMER CICLO DE SECUNDARIA		
Descriptor	**Contenido**	
	1º ESO	**2º ESO**
C5: Tablas y gráficas	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* - Organización de datos en tablas de valores. - Coordenadas cartesianas. Representación de puntos en un sistema de ejes coordenados. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas. - Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla o representadas en una gráfica. - Detección de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación.	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* - Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica. - Obtención de la relación *(unido a C7)* entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales. - Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla.
C6: Proporcionalidad directa e inversa	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* - Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales.	*Bloque 2. Números.* - Proporcionalidad directa e inversa. Análisis de tablas *(unido a C5)*. Razón de proporcionalidad. - Resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana en los que aparezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa.
C7: Relación entre magnitudes	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* - Identificación y verbalización de relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* - Interpretación de las gráficas *(unido a C5)* como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.

Tabla 1.2.c.- *Contenidos mínimos para primer ciclo de secundaria. (cont.)*

CONTENIDOS EN PRIMER CICLO DE SECUNDARIA		
Descriptor	**Contenido**	
	1º ESO	**2º ESO**
C8: Tecnologías de la Información	*Bloque 1. Contenidos comunes.* - Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.	*Bloque 1. Contenidos comunes.* - Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas. *Bloque 5. Funciones y gráficas.* - Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas. *Bloque 6. Estadística y probabilidad.* - Utilización de la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar los cálculos y generar los gráficos más adecuados.

Tabla 1.3.a.- *Contenidos mínimos para segundo ciclo de secundaria.*

CONTENIDOS EN SEGUNDO CICLO DE SECUNDARIA			
Descriptor	**Contenido**		
	3º ESO	**4º ESO – A**	**4º ESO - B**
C1: Números fraccionarios	*Bloque 2. Números.* - Números decimales y fracciones. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz.	------------------------------------	*Bloque 2. Números.* - Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales.

Tabla 1.3.b.- Contenidos mínimos para segundo ciclo de secundaria. (cont.)

CONTENIDOS EN SEGUNDO CICLO DE SECUNDARIA			
Descriptor	**Contenido**		
	3º ESO	**4º ESO – A**	**4º ESO - B**
C2: Porcentajes	------------------------------------	*Bloque 2. Números.* - Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes sucesivos. Interés simple y compuesto.	------------------------------------
C3: Semejanza	*Bloque 4. Geometría.* - Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.	*Bloque 4. Geometría.* - Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas. Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana.	*Bloque 4. Geometría.* - Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.
C4: Razón y Proporción	------------------------------------	------------------------------------	------------------------------------

Tabla 1.3.c.- *Contenidos mínimos para segundo ciclo de secundaria. (cont.)*

CONTENIDOS EN SEGUNDO CICLO DE SECUNDARIA			
Descriptor	**Contenido**		
	3º ESO	**4º ESO – A**	**4º ESO - B**
C5: Tablas y gráficas	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* - Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. - Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* - Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* - Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.
C6: Proporcionalidad directa e inversa	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* - Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.	*Bloque 2. Números.* - Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana.	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* - Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales.

Tabla 1.3.d.- Contenidos mínimos para segundo ciclo de secundaria. (cont.)

CONTENIDOS EN SEGUNDO CICLO DE SECUNDARIA			
Descriptor	**Contenido**		
	3º ESO	**4º ESO – A**	**4º ESO - B**
C7: Relación entre magnitudes	*Bloque 5. Funciones y gráficas.* - Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.	------------------------------------	------------------------------------
C8: Tecnologías de la Información	*Bloque 1. Contenidos comunes.* - Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas. *Bloque 5. Funciones y gráficas.* - Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas.	*Bloque 1. Contenidos comunes.* - Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas. *Bloque 2. Números.* - Uso de la hoja de cálculo para la organización de cálculos asociados a la resolución de problemas cotidianos y financieros.	*Bloque 1. Contenidos comunes.* - Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas. *Bloque 5. Funciones y gráficas.* - Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.

1.3.- Contenidos en Bachillerato

Tabla 1.4.a.- *Contenidos mínimos para bachillerato – ciencias y tecnologías.*

CONTENIDOS EN BACHILLERATO – CIENCIAS Y TECNOLOGÍA		
Descriptor	**Contenido**	
	1º BACHILLERATO	**2º BACHILLERATO**
C1: Números fraccionarios	---	---
C2: Porcentajes	---	---
C3: Semejanza	*2. Geometría:* - Medida de un ángulo en radianes. Razones trigonométricas de un ángulo. Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos.	---
C4: Razón y Proporción	---	---
C5: Tablas y gráficas	*3. Análisis:* - Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.	---
C6: Proporcionalidad directa e inversa	*3. Análisis:* - Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones **polinómicas**, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas	---
C7: Relación entre magnitudes	---	---
C8: Tecnologías de la Información	---	---

Tabla 1.5.a.- *Contenidos mínimos para bachillerato – ciencias sociales.*

CONTENIDOS EN BACHILLERATO – CIENCIAS SOCIALES		
Descriptor	**Contenido**	
	1º BACHILLERATO	**2º BACHILLERATO**
C1: Números fraccionarios	---	---
C2: Porcentajes	*1. Aritmética y álgebra:* - Resolución de problemas de matemática financiera en los que intervienen el interés simple y compuesto, y se utilizan tasas, amortizaciones, capitalizaciones y números índice. Parámetros económicos y sociales.	---
C3: Semejanza	---	---
C4: Razón y Proporción	---	---
C5: Tablas y gráficas	*2. Análisis:* - Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o de gráficas. Aspectos globales de una función. Utilización de las funciones como herramienta para la resolución de problemas y la interpretación de fenómenos sociales y económicos. - Interpolación y extrapolación lineal. Aplicación a problemas reales.	---

Tabla 1.5.b.- *Contenidos mínimos para bachillerato – ciencias sociales. (cont.)*

CONTENIDOS EN BACHILLERATO – CIENCIAS SOCIALES		
Descriptor	**Contenido**	
	1º BACHILLERATO	**2º BACHILLERATO**
C6: Proporcionalidad directa e inversa	*2. Análisis:* - Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones **polinómicas**, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera y racionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos.	*3. Análisis:* - Aplicación de las derivadas al estudio de las propiedades locales de funciones habituales y a la resolución de problemas de optimización relacionados con las ciencias sociales y la economía. - Estudio y representación gráfica de una función **polinómica** o racional sencilla a partir de sus propiedades globales.
C7: Relación entre magnitudes	--	--
C8: Tecnologías de la Información	--	--

Capítulo 2

Los criterios de evaluación de la proporcionalidad en el currículo vigente

En el presente capítulo se utilizan de nuevo los Reales Decretos de primaria, secundaria y bachillerato para extraer del currículo los criterios de evaluación correspondientes a los descriptores descritos en el capítulo anterior. Según la etapa, varios criterios se unifican para simplificar al análisis.

2.1.- Criterios de evaluación en Primaria

Tabla 2.1.a.- *Criterios de evaluación para tercer ciclo de primaria.*

CRITERIOS DE EVALUACIÓN EN TERCER CICLO DE PRIMARIA	
Descriptor	**Criterio de evaluación**
CE1: Números fraccionarios CE2: Porcentajes	*3. Utilizar los números decimales, fraccionarios y los porcentajes sencillos para interpretar e intercambiar información en contextos de la vida cotidiana. Con este criterio se pretende comprobar la utilización de los diferentes tipos de números en contextos reales, estableciendo equivalencias entre ellos, y la capacidad de identificarlos y utilizarlos como operadores en la interpretación y la resolución de problemas.*
CE3: Semejanza	*5. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana. En este criterio es importante detectar que los estudiantes han aprendido estas nociones y saben utilizar los términos correspondientes para dar y pedir información. Se evaluará si dichos contenidos son utilizados con propiedad para comprender y emitir informaciones diversas, en particular si son utilizados en la resolución de problemas geométricos del entorno.* *6. Interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares. Este criterio pretende evaluar el desarrollo de capacidades espaciales en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y, en ciertos casos, ejes de coordenadas, mediante representaciones de espacios familiares.*

2.2.- Criterios de evaluación en Secundaria

Tabla 2.2.a.- *Criterios de evaluación para primer ciclo de secundaria.*

<table>
<tr><th colspan="3">CRITERIOS DE EVALUACIÓN EN PRIMER CICLO DE SECUNDARIA</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Descriptor</th><th colspan="2">Criterio de evaluación</th></tr>
<tr><th>1º ESO</th><th>2º ESO</th></tr>
<tr><td>CE1:
Números fraccionarios
CE2:
Porcentajes</td><td>1. Utilizar números naturales y enteros y fracciones y decimales sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información. Se trata de comprobar la capacidad de identificar y emplear los números y las operaciones siendo consciente de su significado y propiedades, elegir la forma de cálculo más apropiada (mental, escrita o con calculadora) y transmitir informaciones utilizando los números de manera adecuada. Se debe prestar una especial atención a valorar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas.

2. Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones con números enteros, decimales y fraccionarios, utilizando la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto. Se trata de valorar la capacidad para asignar a las distintas operaciones nuevos significados y determinar cuál de los métodos de cálculo es adecuado a cada situación. Se pretende evaluar, asimismo, cómo se interpretan los resultados obtenidos en los cálculos y comprobar si se adopta la actitud que lleva a no tomar el resultado por bueno sin contrastarlo con la situación de partida.</td><td>1. Utilizar números enteros, fracciones, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. Se trata de valorar la capacidad de identificar y emplear los números y las operaciones siendo consciente de su significado y propiedades, elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora) y estimar la coherencia y precisión de los resultados obtenidos. Entre las operaciones a las que se refiere este criterio deben considerarse incluidas las potencias de exponente natural. Adquiere especial relevancia evaluar el uso de diferentes estrategias que permitan simplificar el cálculo con fracciones, decimales y porcentajes, así como la habilidad para aplicar esos cálculos a una amplia variedad de contextos.</td></tr>
</table>

Tabla 2.2.b.- *Criterios de evaluación para primer ciclo de secundaria. (cont.)*

CRITERIOS DE EVALUACIÓN EN PRIMER CICLO DE SECUNDARIA		
Descriptor	**Criterio de evaluación**	
	1º ESO	**2º ESO**
CE3: Semejanza CE6: Proporcionalidad directa e inversa	--	*2. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana. Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Se trata, asimismo, de utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad.*
CE4: Razón y Proporción	--	--

Tabla 2.2.c.- *Criterios de evaluación para primer ciclo de secundaria. (cont.)*

CRITERIOS DE EVALUACIÓN EN PRIMER CICLO DE SECUNDARIA		
Descriptor	**Criterio de evaluación**	
	1º ESO	**2º ESO**
CE5: Tablas y gráficas CE7: Relación entre magnitudes	*6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.*	*5. Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado. Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, en especial el paso de la gráfica correspondiente a una relación de proporcionalidad a cualquiera de los otros tres: verbal, numérico o algebraico. Se trata de evaluar también la capacidad de analizar una gráfica y relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.*
CE8: Tecnologías de la Información	--	--

Tabla 2.3.a.- *Criterios de evaluación para segundo ciclo de secundaria.*

CRITERIOS DE EVALUACIÓN EN SEGUNDO CICLO DE SECUNDARIA			
Descriptor	**Criterio de evaluación**		
	3º ESO	**4º ESO – A**	**4º ESO - B**
CE1: Números fraccionarios	*1. Utilizar los números racionales, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. Se trata de valorar la capacidad de identificar y emplear los números y las operaciones siendo conscientes de su significado y propiedades, elegir la forma de cálculo apropiada: mental, escrita o con calculadora, y estimar la coherencia y precisión de los resultados obtenidos. Es relevante también la adecuación de la forma de expresar los números: decimal, fraccionaria o en notación científica, a la situación planteada. En los problemas que se han de plantear en este nivel adquiere especial relevancia el empleo de la notación científica así como el redondeo de los resultados a la precisión requerida y la valoración del error cometido al hacerlo.*	*1. Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. Se trata de valorar la capacidad de identificar y emplear los números y las operaciones siendo conscientes de su significado y propiedades, elegir la forma de cálculo apropiada: mental, escrita o con calculadora, y estimar la coherencia y precisión de los resultados obtenidos. En este nivel adquiere especial importancia observar la capacidad de los alumnos para manejar los números en diversos contextos cercanos a lo cotidiano, así como otros aspectos de los números relacionados con la medida, números muy grandes o muy pequeños.*	*1. Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico. Se trata de valorar la capacidad de identificar y emplear los distintos tipos de números y las operaciones siendo conscientes de su significado y propiedades, elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora) y estimar la coherencia y precisión de los resultados obtenidos. En este nivel adquiere especial importancia observar la capacidad para adecuar la solución (exacta o aproximada) a la precisión exigida en el problema, particularmente cuando se trabaja con potencias, radicales o fracciones.*

Tabla 2.3.b.- *Criterios de evaluación para segundo ciclo de secundaria. (cont.)*

CRITERIOS DE EVALUACIÓN EN SEGUNDO CICLO DE SECUNDARIA			
Descriptor	**Criterio de evaluación**		
	3º ESO	**4º ESO – A**	**4º ESO - B**
CE2: Porcentajes CE8: Tecnologías de la Información	--------------------------------------	*2. Aplicar porcentajes y tasas a la resolución de problemas cotidianos y financieros, valorando la oportunidad de utilizar la hoja de cálculo en función de la cantidad y complejidad de los números. Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para aplicar porcentajes, tasas, aumentos y disminuciones porcentuales a problemas vinculados a situaciones financieras habituales y a valorar la capacidad de utilizar las tecnologías de la información para realizar los cálculos, cuando sea preciso.*	--------------------------------------
CE3: Semejanza	--------------------------------------	----------------------------------	--------------------------------------
CE4: Razón y Proporción	--------------------------------------	----------------------------------	--------------------------------------

Tabla 2.3.c.- *Criterios de evaluación para segundo ciclo de secundaria. (cont.)*

CRITERIOS DE EVALUACIÓN EN SEGUNDO CICLO DE SECUNDARIA			
Descriptor	**Criterio de evaluación**		
	3º ESO	**4º ESO – A**	**4º ESO - B**
CE5: Tablas y gráficas CE6: Proporcionalidad directa e inversa CE7: Relación entre magnitudes	*5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica. Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.*	*5. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático o exponencial, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información.* *6. Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento. A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de las tasas de variación a partir de los datos gráficos o numéricos.*	*4. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.* *Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático, de proporcionalidad inversa, exponencial o logarítmica, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información. Además, a la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de la tasa de variación media a partir de los datos gráficos, numéricos o valores concretos alcanzados por la expresión algebraica.*

2.3.- Criterios de evaluación en Bachillerato

Tabla 2.4.a.- *Criterios de evaluación para bachillerato – ciencias y tecnología.*

CRITERIOS DE EVALUACIÓN EN BACHILLERATO – CIENCIAS Y TECNOLOGÍA		
Descriptor	**Criterio de evaluación**	
	1º BACHILLERATO	**2º BACHILLERATO**
CE1: Números fraccionarios	*1. Utilizar correctamente los números reales y sus operaciones para presentar e intercambiar información; estimar los efectos de las operaciones sobre los números reales y sus representaciones gráfica y algebraica y resolver problemas extraídos de la realidad social y de la naturaleza que impliquen la utilización de ecuaciones e inecuaciones, así como interpretar los resultados obtenidos. Se pretende comprobar con este criterio la adquisición de las destrezas necesarias para la utilización de los números reales, incluyendo la elección de la notación, las aproximaciones y las cotas de error acordes con la situación. Asimismo, se pretende evaluar la comprensión de las propiedades de los números, del efecto de las operaciones y del valor absoluto y su posible aplicación. También se debe valorar la capacidad para traducir algebraicamente una situación y llegar a su resolución, haciendo una interpretación de los resultados obtenidos.*	---
CE2: Porcentajes	---	---
CE3: Semejanza	---	---
CE4: Razón y Proporción	---	---

Tabla 2.4.b.- Criterios de evaluación para bachillerato – ciencias y tecnología. (cont.)

CRITERIOS DE EVALUACIÓN EN BACHILLERATO – CIENCIAS Y TECNOLOGÍA		
Descriptor	**Criterio de evaluación**	
	1º BACHILLERATO	**2º BACHILLERATO**
CE5: Tablas y gráficas	*4. Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. Particularmente, se pretende comprobar la capacidad de traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y extraer conclusiones sobre su comportamiento local o global.*	*3. Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto. Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida. Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en álgebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente.*
CE6: Proporcionalidad directa e inversa	--	--
CE7: Relación entre magnitudes	--	--
CE8: Tecnologías de la Información	--	--

Tabla 2.5.a.- *Criterios de evaluación para bachillerato – ciencias sociales.*

CRITERIOS DE EVALUACIÓN EN BACHILLERATO – CIENCIAS SOCIALES		
Descriptor	**Criterio de evaluación**	
	1º BACHILLERATO	**2º BACHILLERATO**
CE1: Números fraccionarios	--	--
CE2: Porcentajes	*3. Utilizar los porcentajes y las fórmulas de interés simple y compuesto para resolver problemas financieros e interpretar determinados parámetros económicos y sociales. Este criterio pretende comprobar si se aplican los conocimientos básicos de matemática financiera a supuestos prácticos, utilizando, si es preciso, medios tecnológicos al alcance del alumnado para obtener y evaluar los resultados.*	--
CE3: Semejanza	--	--
CE4: Razón y Proporción	--	--

Tabla 2.5.b.- *Criterios de evaluación para bachillerato – ciencias sociales. (cont.)*

CRITERIOS DE EVALUACIÓN EN BACHILLERATO – CIENCIAS SOCIALES		
Descriptor	**Criterio de evaluación**	
	1º BACHILLERATO	**2º BACHILLERATO**
CE5: Tablas y gráficas CE6: Proporcionalidad directa e inversa	*4. Relacionar las gráficas de las familias de funciones con situaciones que se ajusten a ellas; reconocer en los fenómenos económicos y sociales las funciones más frecuentes e interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, gráficas o expresiones algebraicas. Se trata de evaluar la destreza para realizar estudios del comportamiento global de las funciones a las que se refiere el criterio: polinómicas; exponenciales y logarítmicas; valor absoluto; parte entera y racionales sencillas, sin necesidad de profundizar en el estudio de propiedades locales desde un punto de vista analítico. La interpretación, cualitativa y cuantitativa, a la que se refiere el enunciado exige apreciar la importancia de la selección de ejes, unidades, dominio y escalas.* *5. Utilizar las tablas y gráficas como instrumento para el estudio de situaciones empíricas relacionadas con fenómenos sociales y analizar funciones que no se ajusten a ninguna fórmula algebraica, propiciando la utilización de métodos numéricos para la obtención de valores no conocidos. Este criterio está relacionado con el manejo de datos numéricos y en general de relaciones no expresadas en forma algebraica. Se dirige a comprobar la capacidad para ajustar a una función conocida los datos extraídos de experimentos concretos y obtener información suplementaria mediante técnicas numéricas.*	--

Tabla 2.5.c.- *Criterios de evaluación para bachillerato – ciencias sociales. (cont.)*

CRITERIOS DE EVALUACIÓN EN BACHILLERATO – CIENCIAS SOCIALES		
Descriptor	**Criterio de evaluación**	
	1º BACHILLERATO	**2º BACHILLERATO**
CE7: Relación entre magnitudes	*6. Distinguir si la relación entre los elementos de un conjunto de datos de una distribución bidimensional es de carácter funcional o aleatorio e interpretar la posible relación entre variables utilizando el coeficiente de correlación y la recta de regresión. Se pretende comprobar la capacidad de apreciar el grado y tipo de relación existente entre dos variables, a partir de la información gráfica aportada por una nube de puntos; así como la competencia para extraer conclusiones apropiadas, asociando los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden. En este sentido, más importante que su mero cálculo es la interpretación del coeficiente de correlación y la recta de regresión en un contexto determinado.*	--
CE8: Tecnologías de la Información	--	--

Capítulo 3

Ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones tipo sobre proporcionalidad en los libros de texto

En este capítulo se realiza una clasificación de los diferentes ejercicios y problemas tipo sobre proporcionalidad aritmética que se plantean con mayor frecuencia en los libros de tercer ciclo de primaria y en los de secundaria, y cuestiones o situaciones que poseen algún interés didáctico. Los libros utilizados pertenecen a las editoriales *EDEBÉ* para 6º de primaria y 2º ESO y *SM* para todos los cursos de educación secundaria.

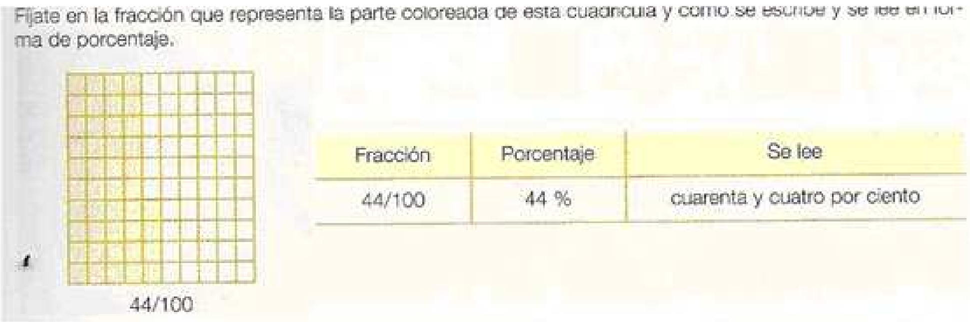
3.1.- <u>Ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones para 6º de Primaria</u>

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☒ Situación

Descripción: Transformaciones en el uso de los porcentajes. Primero gráficamente mediante la parte correspondiente sobre 100 unidades, luego como fracción, seguido de la expresión en forma de porcentaje y su posterior lectura.

Ejemplo:

Figura 3.1. (EDEBÉ, 2008, 91)


Fíjate en la fracción que representa la parte coloreada de esta cuadrícula y cómo se escribe y se lee en forma de porcentaje.

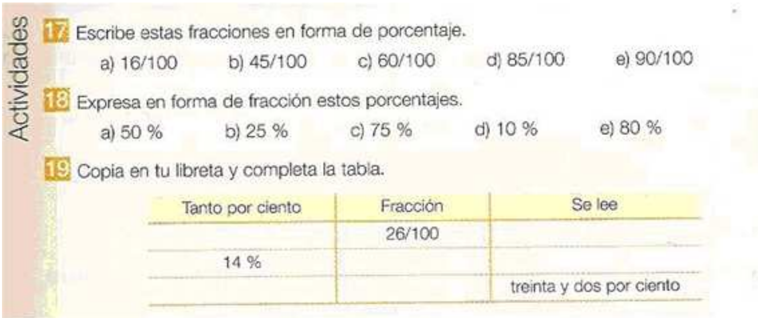
Fracción	Porcentaje	Se lee
44/100	44 %	cuarenta y cuatro por ciento

Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Uso de la expresión fraccionaria o de la expresión en porcentaje para expresar tantos por ciento. Lectura de tantos por ciento.

Ejemplo:

Figura 3.2. (EDEBÉ, 2008, 91)



Actividades

17 Escribe estas fracciones en forma de porcentaje.

a) 16/100 b) 45/100 c) 60/100 d) 85/100 e) 90/100

18 Expresa en forma de fracción estos porcentajes.

a) 50 % b) 25 % c) 75 % d) 10 % e) 80 %

19 Copia en tu libreta y completa la tabla.

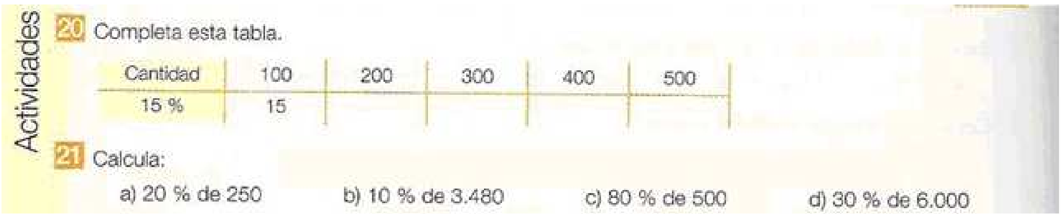
Tanto por ciento	Fracción	Se lee
	26/100	
14 %		
		treinta y dos por ciento

Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Cálculo de porcentajes descontextualizados de forma manual (Figura 3.3.) y mediante la calculadora (Figura 3.4.).

Ejemplos:

Figura 3.3. (EDEBÉ, 2008, 92)


Actividades

20 Completa esta tabla.

Cantidad	100	200	300	400	500
15 %	15				

21 Calcula:

a) 20 % de 250 b) 10 % de 3.480 c) 80 % de 500 d) 30 % de 6.000

Figura 3.4. (EDEBÉ, 2008, 93)


23 Calcula utilizando la calculadora.

a) 20 % de 2.300 b) 65 % de 5.000 c) 25 % de 3.200 d) 15 % de 6.500

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☒ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Cálculo de porcentajes contextualizados.

Ejemplo:

Figura 3.5. (EDEBÉ, 2008, 92)

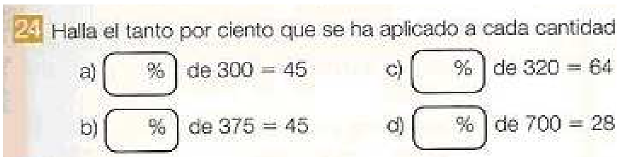

22 El 45 % de los 1.800 trabajadores de una empresa acuden al trabajo en tren. ¿Cuántos trabajadores no van en tren?

Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Cálculo del porcentaje aplicado a una cantidad sabiendo el resultado, manualmente (Figura 3.6.) y con calculadora (Figura 3.7.)

Ejemplo:

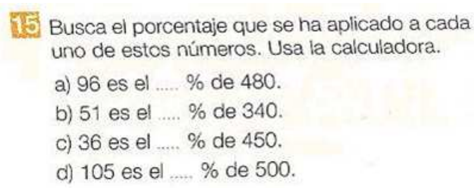
Figura 3.6. (EDEBÉ, 2008, 93)


24 Halla el tanto por ciento que se ha aplicado a cada cantidad

a) ☐ % de 300 = 45 c) ☐ % de 320 = 64

b) ☐ % de 375 = 45 d) ☐ % de 700 = 28

Figura 3.7. (EDEBÉ, 2008, 95)


15 Busca el porcentaje que se ha aplicado a cada uno de estos números. Usa la calculadora.

a) 96 es el ..... % de 480.

b) 51 es el ..... % de 340.

c) 36 es el ..... % de 450.

d) 105 es el ..... % de 500.

Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Cálculo mental de porcentajes característicos (50%, 25%,…) en ejercicios descontextualizados.

Ejemplos:

Figura 3.8. (EDEBÉ, 2008, 99)

Aprende a calcular mentalmente el 50 % de un número.

50 % de 48 = 48 : 2 = 24

50 % de 322 = 322 : 2 = 161

— Calcula mentalmente:

a) 50 % de 34	i) 50 % de 620
b) 50 % de 66	j) 50 % de 842
c) 50 % de 74	k) 50 % de 416
d) 50 % de 88	l) 50 % de 944
e) 50 % de 12	m) 50 % de 528
f) 50 % de 46	n) 50 % de 706
g) 50 % de 52	ñ) 50 % de 102
h) 50 % de 24	o) 50 % de 348

Figura 3.9. (EDEBÉ, 2008, 113)

Aprende a calcular mentalmente el 25 % de un número.

25 % de 88 = 88 : 4 = 22

25 % de 484 = 484 : 4 = 121

— Calcula mentalmente:

a) 25 % de 56	i) 25 % de 128
b) 25 % de 32	j) 25 % de 288
c) 25 % de 80	k) 25 % de 112
d) 25 % de 36	l) 25 % de 116
e) 25 % de 88	m) 25 % de 312
f) 25 % de 64	n) 25 % de 400
g) 25 % de 96	ñ) 25 % de 644
h) 25 % de 16	o) 25 % de 132

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☒ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Cálculo mental de porcentajes característicos (50%, 25%,…) en problemas contextualizados.

Ejemplos:

Figura 3.10. (EDEBÉ, 2008, 99)

2 Resuelve mentalmente:

a) Una tienda de artículos de deporte ofrece un 50 % de descuento en el precio de los siguientes productos: mochilas de 14 €; sudaderas de 20 € y zapatillas de 18 €. ¿Qué precio final tendrá cada artículo?

b) Las bicicletas tienen un precio de 624 € y las tiendas de campaña de 344 €. Si se les aplica el descuento del 50 %, ¿cuánto valdrá cada artículo?

c) Si compramos un chándal que costaba 46 euros, aplicando el descuento, ¿tendremos suficiente dinero con un billete de 20 euros?

Figura 3.11. (EDEBÉ, 2008, 113)

2 Resuelve mentalmente:

a) En una tienda de alquiler de coches, se ha alquilado el fin de semana un 25 % de los 200 coches de los que disponen. ¿Cuántos coches se han alquilado?

b) El precio del alquiler por un día de un coche de 7 plazas cuesta 92 € y el de 4 plazas cuesta un 25 % menos. ¿Cuánto cuesta el alquiler de este coche?

c) Iker ha alquilado 5 días un coche que cuesta 64 euros al día. Si le aplican un 25 % de descuento en el total del precio, ¿cuánto deberá pagar?

Actividad tipo: [ ] Ejercicio [ ] Problema [X] Cuestión [ ] Situación

Descripción: Descomposición de una cantidad total en subgrupos mediante el porcentaje asociado a cada grupo. Comprobación del correcto porcentaje de cada grupo (comprobación que la suma es 100%).

Ejemplo:

Figura 3.11. (EDEBÉ, 2008, 123)

11 En un parque de 300 árboles, el 35 % son pinos; el 45 %, chopos, y el 25 %, sauces. ¿Es posible?

Actividad tipo: [ ] Ejercicio [X] Problema [ ] Cuestión [ ] Situación

Descripción: Disminuciones e incrementos porcentuales en problemas contextualizados.

Ejemplos:

Figura 3.12. (EDEBÉ, 2008, 111)

5 Julia ha ido de compras. Calcula el dinero que ha pagado y lo que se ha ahorrado.

Producto	Descuento	Precio final	Ahorro
Vestido 120 €	10 %		
Jersey 155 €	20 %		
Pantalones 80 €	15 %		

Figura 3.13. (EDEBÉ, 2008, 123)

2 Los precios de los electrodomésticos han sufrido un incremento respecto al año anterior. Completa esta tabla y calcula cuánto más habrá que pagar por la compra de estos electrodomésticos.

Producto	Incremento	Aumento	Precio final
Frigorífico 590 €	8 %		
Lavadora 365 €	10 %		
Secadora 465 €	9 %		

Actividad tipo: [ ] Ejercicio [X] Problema [ ] Cuestión [ ] Situación

Descripción: Problemas contextualizados de proporcionalidad directa de manera implícita. Resolución de problemas de la vida cotidiana.

Ejemplos:

Figura 3.14. (EDEBÉ, 2008, 111)

6 Raúl gasta 7 € cada día. ¿Cuántos euros ha gastado en 7 semanas?

3.2.- Ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones para 1º ESO

Actividad tipo: [X] Ejercicio [ ] Problema [ ] Cuestión [ ] Situación

Descripción: Tratamiento aritmético de razones y proporciones. Uso de los números fraccionarios y de la propiedad fundamental de las proporciones.

Ejemplos:

Figura 3.15. (SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 147)

Halla la razón entre 5 y 2.

Comprueba si son ciertas estas proporciones.

a) $\frac{7}{12} = \frac{6}{7}$ b) $\frac{13}{25} = \frac{1313}{2525}$

Actividad tipo: [ ] Ejercicio [X] Problema [ ] Cuestión [ ] Situación

Descripción: Tratamiento algebraico de razones y proporciones. Uso de los números fraccionarios y de la propiedad fundamental de las proporciones.

Ejemplos:

Figura 3.16. (SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 147)

Calcula el valor de las letras en las siguientes proporciones.

a) $\frac{6}{15} = \frac{8}{x}$ c) $\frac{6}{15} = \frac{z+3}{50}$

b) $\frac{6}{15} = \frac{y}{10}$ d) $\frac{6}{15} = \frac{2}{t-1}$

¿Qué valor ha de tomar x para que los números 3, 5, 12 y x formen una proporción?

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Relación de proporcionalidad directa entre magnitudes. Es común recurrir a la frase "cuanto más, más", "cuanto menos, menos" para explicar la proporcionalidad directa sin dar importancia a que debe ser en la misma proporción (x2, x3,… la primera magnitud, x2, x3,… la segunda magnitud también, /2, /3,… la primera magnitud, /2, /3,… la segunda magnitud también).

Ejemplos:

Figura 3.17. (SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 148)

Ejemplo. *En la taquilla de un cine se expone la siguiente tabla con el precio de las entradas según el número que se compren:*

Número de entradas	1	2	3	4	5	...	x
Precio (€)	5	10	15	20	25	...	120

× 2   × 3

Si se han recaudado 120 euros, ¿cuántas entradas se han vendido?

Para comprar doble número de entradas se tiene que pagar doble cantidad de euros; al comprar triple número de entradas se pagará el triple, etc. Por tanto, las magnitudes *número de entradas* y *cantidad que se paga* son directamente proporcionales.

Si dos magnitudes son tales que a doble, triple... cantidad de la primera corresponde doble, triple... de la segunda, entonces se dice que esas **magnitudes** son **directamente proporcionales**.

Observa la tabla y verás que se verifica: $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \ldots$

Por tanto, $\frac{1}{5} = \frac{x}{120} \Rightarrow x = \frac{120}{5} = 24$. Se han vendido 24 entradas.

Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Comprobación y cálculo de magnitudes directamente proporcionales mediante el formato de tablas.

Ejemplos:

Figura 3.18. (SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 148)   *Figura 3.19. (SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 160)*

5 Comprueba si la siguiente tabla corresponde a magnitudes directamente proporcionales.

NO

Magnitud 1.ª	2	4	5	6
Magnitud 2.ª	10	20	30	40

3 Copia y completa la siguiente tabla que relaciona magnitudes directa e inversamente proporcionales e indica la razón de proporcionalidad.

Magnitud 1.ª	1	2	3	4
Magnitud 2.ª		10	15	

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Determinación de relación de proporcionalidad o no entre magnitudes de la vida cotidiana.

Ejemplos:

Figura 3.20. (SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 160)

Razona en qué casos las magnitudes son directamente proporcionales.

a) Cantidad de limones en kilogramos y precio por kilogramo.

b) Distancia entre dos ciudades y tiempo que se tarda en llegar de una a otra.

c) Número de asientos vacíos en el cine y personas que asisten a una sesión.

Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Uso de razones, decimales y porcentajes.

Ejemplos:

Figura 3.21. (SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 151)

12 Indica el porcentaje expresado por las siguientes razones y números decimales.

a) $\frac{2}{100}$ b) $\frac{99}{100}$ c) 0,007 d) 0,27

13 Encuentra la razón y el número decimal equivalentes a cada uno de los siguientes porcentajes.

a) 70 % b) 95 % c) 1 % d) 0,09 %

Actividad tipo: [X] Ejercicio [ ] Problema [ ] Cuestión [ ] Situación

Descripción: Ejercicios de porcentajes. Cálculo sabiendo el porcentaje y el total, sabiendo la parte y el total y sabiendo el porcentaje y la parte.

Ejemplos:

Figura 3.22. (SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 152)

14 Aplica los siguientes porcentajes a la cantidad 5400, utilizando la razón y el número decimal equivalentes en cada caso.

a) 12 %   c) 1 %
b) 5 %   d) 25,5 %

15 Una marca de margarina tiene un 85 % de grasa. ¿Cuántos gramos de grasa hay en 500 gramos de esta margarina?

Actividad tipo: [ ] Ejercicio [X] Problema [ ] Cuestión [ ] Situación

Descripción: Problemas de porcentajes. Cálculo sabiendo el porcentaje y el total, sabiendo la parte y el total y sabiendo el porcentaje y la parte.

Ejemplos:

Figura 3.23. (SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 152)

16 Unos ciclistas han recorrido 45 kilómetros de una etapa que tiene 180 kilómetros.
¿Qué porcentaje de la etapa han recorrido?

17 El 15 % de los alumnos de Secundaria de un centro escolar participan como voluntarios en una campaña para mantener limpia su ciudad.
Si participan 24 alumnos, ¿cuántos alumnos de Secundaria hay en el centro?

Actividad tipo: [X] Ejercicio [X] Problema [ ] Cuestión [ ] Situación

Descripción: Ejercicios y Problemas de porcentajes. Incrementos y disminuciones porcentuales.

Ejemplos:

Figura 3.24. (SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 153) – a) Ejercicios, b) Problemas

a)

18 Calcula la cantidad que resulta después de aplicar los siguientes aumentos a 6800 euros.

a) 20 %   c) 93 %
b) 40 %   d) 4 %

19 Calcula la cantidad que resulta después de aplicar las siguientes disminuciones a 3200 litros.

a) 10 %   c) 78 %
b) 50 %   d) 3 %

b)

20 Ana ahorra 12 euros todos los meses para colaborar con una ONG. A partir de enero decide aumentar un 25 % la cantidad de dinero que ahorra cada mes.
¿Cuántos euros ahorra a partir de ese momento?

21 Luis compra un libro que cuesta 18 euros. Al ir a pagar le hacen un 15 % de descuento.
a) ¿Cuánto dinero le descuentan?
b) ¿Cuánto le cuesta el libro?

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Es habitual estudiar la función de proporcionalidad directa mediante el marco de tabla, mediante su expresión algebraica y mediante su representación gráfica.

Ejemplos:

Figura 3.25. (SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 169)

Las magnitudes peso y precio que muestra la tabla son directamente proporcionales, siendo 1,20 la razón de proporcionalidad.

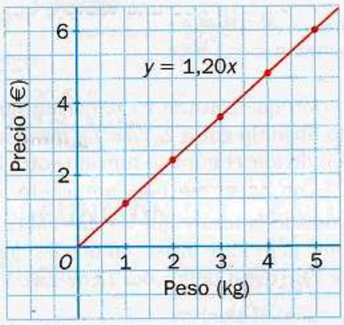
x	Peso (kg)	1	2	3	4	5
y	Precio (€)	1,20	2,40	3,60	4,80	6

Y = m.

Al representar los valores de la tabla como puntos del plano, comprobamos que están alineados.

La gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Si llamamos x al peso e y al precio, la expresión $y = 1{,}20x$ es la fórmula asociada.



Las funciones cuyas gráficas son rectas que pasan por el origen de coordenadas se llaman **funciones de proporcionalidad directa**. La fórmula de estas funciones es de la forma $y = m \cdot x$, donde m es la razón de proporcionalidad.

Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Representación de funciones de proporcionalidad directa calculando previamente la función en forma de tabla.

Ejemplos:

Figura 3.26. (SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 169)

22 Copia y completa en tu cuaderno esta tabla y dibuja la gráfica de la función asociada.

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	−6				2	

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación

Descripción: En el tema de funciones se diferencia entre las funciones afines y las funciones lineales de proporcionalidad directa. Es habitual no explicitar que las funciones de proporcionalidad directa deben pasar por el origen de coordenadas.

Ejemplos:

Figura 3.27. (SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 175)

Funciones de proporcionalidad directa y gráficas

57 Halla el valor de la variable dependiente para los números −3, 0, 1 y 2 en las siguientes funciones.

a) $y = -2x$ c) $y = -x$

b) $y = 3x + 5$ d) $y = x\,(x + 1)$

Indica cuáles son de proporcionalidad directa.

Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Utilizar el gráfico cartesiano de funciones para la representación de funciones de proporcionalidad directa. Uso de la razón de proporcionalidad para deducir la expresión algebraica de la función y posteriormente realizar su representación lineal.

Ejemplos:

Figura 3.28. (SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 175)

58 Representa gráficamente estas funciones de proporcionalidad directa.

a) $y = 5x$ d) $y = -\frac{3}{5}x$

b) $y = -5x$ e) $y = 0{,}25x$

c) $y = \frac{1}{2}x$ f) $y = -0{,}25x$

59 Escribe las fórmulas de las funciones lineales cuyas razones de proporcionalidad sean las siguientes.

a) 2 b) −3 c) $\frac{1}{5}$ d) $-\frac{1}{3}$

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☒ Situación

Descripción: Variable didáctica en los ejercicios. Se utilizan valores más complicados de los que suelen estar acostumbrados para las magnitudes.

Ejemplos:

Figura 3.29. (SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 170)

22 Un coche gasta 68,7 litros de gasolina en un viaje entre dos ciudades que se encuentran a una distancia de 748 kilómetros y 400 metros.

a) ¿Cuánto gastará si recorre 1 063 kilómetros?

b) ¿Cuánto gastará si hace un viaje de 389 kilómetros?

c) ¿Cuántos kilómetros recorrerá con 53,6 litros?

3.3.- Ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones para 2º ESO

Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Cálculo de razones y proporciones de manera descontextualizada. Uso de la propiedad fundamental, así como el cálculo de la cuarta proporcional, tercera proporcional y de la media proporcional.

Ejemplos:

Figura 3.30.- a) EDEBÉ, 2008, 99; b) EDEBÉ, 2008, 101; c) EDEBÉ, 2008, 101; d) Cuadernos SM, 2010, 2; e) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 123.

a)

Escribe todas las proporciones que se deduzcan de la igualdad $8 \cdot 3 = 6 \cdot 4$ e indica en cada caso cuáles son los extremos y cuáles son los medios.

Determina si las expresiones siguientes son proporciones. De las que lo sean, escribe tres que se deduzcan de éstas.

a) $\frac{1}{2} = \frac{50}{100}$ b) $\frac{17}{8} = \frac{23}{15}$

Pueden escribirse hasta ocho proporciones diferentes con la misma igualdad de productos.

— Escribe todas las proporciones que se deducen de esta igualdad.

$$e \cdot f = g \cdot h$$

b)

Completa la tabla siguiente.

Proporción	Término que falta	Resultado
$\frac{8}{80} = \frac{6}{x}$	Cuarto proporcional	$x = 60$
$\frac{9}{27} = \frac{x}{9}$		
$\frac{5}{125} = \frac{125}{x}$		
$\frac{3}{x} = \frac{x}{48}$		
$\frac{33}{15} = \frac{11}{x}$		

c)

6 Halla el término que falta en estas proporciones.

a) $\frac{3}{x} = \frac{27}{72}$ c) $\frac{64}{3} = \frac{x}{9}$

b) $\frac{7}{6} = \frac{98}{x}$ d) $\frac{x}{6} = \frac{80}{4}$

7 Calcula:

a) El cuarto proporcional de 9, 3 y 12.

b) El tercero proporcional de 8 y 4, si 4 es el término que se repite.

c) El medio proporcional de 4 y 9.

d) El cuarto proporcional de 6, 8 y 3.

d)

2 Calcula el valor de las letras en las siguientes razones.

a) $\frac{x}{13} = 2$ $x = \square$

b) $\frac{4}{5} = k$ $k = \square$

c) $\frac{24}{y} = 0{,}6$ $y = \square$

d) $\frac{36}{z} = 2{,}4$ $z = \square$

e)

1 Halla el valor de x para que 3, x, 27 y 18 formen una proporción.

2 Comprueba si los siguientes números forman una proporción.

a) 21, 30, 140 y 200. b) 16, 25, 14 y 21.

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☒ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Cálculo de razones y proporciones de manera contextualizada. Uso de la propiedad fundamental.

Ejemplos:

Figura 3.31.- a) EDEBÉ, 2008, 98; b) Cuadernos SM, 2010, 2.

a)

1 En una pecera de 60 l de capacidad, José ha vertido 40 l de agua destilada y 20 l de agua del grifo. Encuentra las razones entre:

a) Los litros de agua destilada y la capacidad de la pecera.

b) Los litros de agua del grifo y la capacidad de la pecera.

c) Los litros de agua del grifo y los de agua destilada.

— Efectúa los cocientes y comprueba si algún par de las razones anteriores forma una proporción.

b)

3 Ahmed y tres amigos han recogido 145 kilogramos de papel para reciclar. Calcula la razón entre los kilogramos de papel recogido y los chicos que lo han hecho. Expresa la razón en forma decimal.

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Determinación y creación de ejemplos de magnitudes directamente proporcionales.

Ejemplos:

Figura 3.32.- a) EDEBÉ, 2008, 102-103

Determina si estos pares de magnitudes son dependientes y, en caso afirmativo, si son directamente proporcionales.

a) El área de un círculo y su radio.

b) La masa de un saco de patatas y su precio.

c) El precio de una silla y el número de sillas compradas.

d) El tiempo que ha trabajado un carpintero y el número de sillas que ha montado.

e) La velocidad de un vehículo y el tiempo que tarda en recorrer una distancia.

f) El peso de un recién nacido y su edad.

g) La edad de una persona y su sueldo.

h) La superficie de un objeto y su temperatura.

i) El salario que cobra una persona y el número de hijos que tiene.

13 Pon tres ejemplos de pares de magnitudes directamente proporcionales y calcula en cada caso la constante de proporcionalidad.

— Representa gráficamente uno de los ejemplos.

Determinación en casos de la vida cotidiana si existe relación de proporcionalidad y contraejemplos en los que no existe dicha relación de proporcionalidad. Creación de ejemplos de proporcionalidad directa y representación de la función asociada a dichos casos. Estudio de la noción de proporcionalidad directa.

Sabiendo que el voltaje y la intensidad de un circuito eléctrico son magnitudes directamente proporcionales, indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Al multiplicar el voltaje por 2, la intensidad también se duplica.

b) Al aumentar la intensidad, necesariamente debe disminuir el voltaje.

Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Representación y determinación de funciones de proporcionalidad directa e inversa.

Ejemplos:

Figura 3.33.- a) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 170; b) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 171

a)

Funciones lineales. Funciones afines

27 Indica cuáles de las siguientes funciones son lineales y cuáles son afines.

a) $y = -6x + 2$ c) $y = \frac{2}{3}x$

b) $y = 7x$ d) $y = \frac{5}{4}x - 3$

b)

Funciones de proporcionalidad inversa

42 Indica cuáles de las siguientes funciones son de proporcionalidad inversa.

a) $y = \frac{3}{2}x$ c) $y = -x + 3$

b) $y = \frac{-6}{x}$ d) $y = \frac{10}{x}$

Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Magnitudes directa e inversamente proporcionales en formato de tabla.

Ejemplos:

Figura 3.34.- a) Cuadernos SM, 2010, 4; b) Cuadernos SM, 2010, 14.

a)

12 Completa la tabla para que represente valores de magnitudes directamente proporcionales, de constante de proporcionalidad $\frac{m}{n} = 3{,}5$.

m		14		105
n	2		12	

b)

51 Completa las siguientes tablas para que representen valores de magnitudes inversamente proporcionales. Escribe la constante de proporcionalidad en cada caso.

a)

x	2	3		6
y		24	18	

$x \cdot y =$ ....

b)

u		2	3	6
v	12		4	

$u \cdot v =$ ....

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☒ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Repartos en magnitudes directa e inversamente proporcionales.

Ejemplos:

Figura 3.35.- a) EDEBÉ, 2008, 105; b) EDEBÉ, 2008, 107.

a)

17 Dos socios crearon un negocio aportando 6 000 € el primer socio y 3 000 € el segundo. En un año han obtenido unos beneficios de 1 800 €. ¿Cuál te parece el modo más justo de repartirse los beneficios?

18 Tres hermanos deciden unir sus ahorros (15 000 €, 7 500 € y 18 000 €) para abrir una cuenta en el banco, ya que de este modo el interés que recibirán será más alto.

Un año después cobran 3 213 € en concepto de interés. ¿Cómo deben repartirse este dinero? ¿Cuánto dinero tendrá cada hermano al finalizar el año?

b)

22 Un fondo común de ayuda a la Unión Europea, que asciende a 95 millones de euros, debe repartirse entre tres regiones de forma inversamente proporcional a la renta per cápita anual de cada región, que es de 0,01, 0,02 y 0,025 millones de euros.

¿Cuánto dinero debe recibir cada región?

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Uso del procedimiento regla de tres simple directa e inversa. A menudo, a pesar de ser una técnica no descrita en el currículo oficial, es la más usada para la resolución de este tipo de problemas, olvidándose de otras como el método de reducción a la unidad. Por ello, en muchas ocasiones los libros de texto utilizan la técnica de manera implícita, sin nombrarla.

Ejemplos:

Figura 3.36.- a) Cuadernos SM, 2010, 10; b) Cuadernos SM, 2010, 15.

a)

35 ***Por 3 kilogramos de fruta hemos pagado 7,80 euros. ¿Cuánto habríamos pagado por 11 kilogramos?***

1.° Construimos un esquema con los datos del problema:

3 kg ——— 7,80 €
11 kg ——— x

2.° Escribimos la proporción: $\frac{3}{7{,}80} = \frac{11}{x}$

3.° Despejamos la incógnita: $x = \frac{11 \cdot 7{,}80}{3} = 28{,}60$

Habríamos pagado 28,60 €.

b)

53 ***Un tren que va a 120 kilómetros por hora tarda 8 horas en realizar un trayecto. ¿Qué velocidad debe llevar si quiere recorrer el trayecto en 6 horas?***

1.° Construimos un esquema con los datos del problema.

8 h ——— 120 km/h
6 h ——— x

2° Hallamos la constante de proporcionalidad inversa: $6 \cdot x = 8 \cdot 120 = 960$

3° Despejamos la incógnita x: $x = \frac{960}{6} = 160$

El tren debería ir a 160 km/h.

Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Porcentajes. Uso de los porcentajes, transformaciones de fracción a porcentaje, a decimal,… Cálculo de porcentajes sabiendo el porcentaje y el total, sabiendo el porcentaje y la parte, sabiendo la parte y el total. Aumentos y disminuciones porcentuales, también de manera consecutiva.

Ejemplos:

Figura 3.37.- a) EDEBÉ, 2008, 108; b) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 127.

a)

23 Completa:

a) 40 % de .... = 2 320 c) 30 % de .... = 150

b) 35 % de .... = 25 963 d) 55 % de .... = 6 985

24 Transforma las siguientes fracciones en porcentajes.

a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{11}{32}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{15}{25}$

25 Completa:

a) 40 % de 1 250 = ... b) .... % de 4 500 = 3 600

b)

14 Disminuye 230 en un 25 %.

15 Incrementa 230 en un 25 %.

16 Aplícale a 850 una disminución de un 35%, y al resultado obtenido, un aumento de un 35%. ¿Qué esperas obtener? Razona el resultado.

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☒ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Porcentajes. Aumentos y disminuciones porcentuales. Interés Simple.

Ejemplos:

Figura 3.38.- a) EDEBÉ, 2008, 109; b) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 128; c) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 129; d) EDEBÉ, 2008, 111.

a)

26 En un bar han aumentado el precio de todos los bocadillos un 5 %. Si hemos pagado 2,10 € por un bocadillo, ¿cuál era su precio antes del aumento?

27 Julia aprovecha las primeras rebajas para comprarse un vestido que antes de las rebajas costaba 52 €. Ahora le hacen un descuento del 10 %. En las segundas rebajas, el precio del vestido baja un 25 % respecto al de las primeras. ¿Cuánto hubiera pagado en las segundas rebajas?

— ¿Cuál es el descuento total en las segundas rebajas respecto al precio inicial?

28 En una librería preparan una tabla para saber el precio sin IVA y con IVA de un determinado número de paquetes de folios. Ayúdales a completarla si el IVA es del 16 %.

Número de paquetes	Precio sin IVA (€)	Precio con IVA (€)
1		
2		
3		
4		
5		17,40

b)

17 Pedro deposita en un banco 20 000 euros al 6,5 % anual. ¿Cuánto retirará al cabo de 3 años?

18 ¿Qué interés producirá un capital de 600 euros al 4,5 % de interés anual durante 2,5 años?

c)

19 ¿Qué interés producirán 6 000 euros colocados al 6,5 % a interés simple durante 18 meses?

20 ¿A qué tanto por ciento se han depositado en un banco 1 500 euros, si en 38 días produjeron unos intereses de 19 euros?

d)

35 Por la compra de un ordenador personal se han de pagar 80 € cada mes durante 18 meses. Al cabo de un año, el comprador decide pagar los 6 meses que le quedan de una sola vez. ¿Cuánto tendrá que pagar si le hacen un descuento del 10 % anual?

36 Hemos de abonar un recibo de 450 € dentro de 30 días. Si lo pagamos ahora, nos descuentan el 12 % de interés anual. ¿Cuánto nos ahorramos por pagarlo antes? ¿Cuánto tendremos que pagar?

3.4.- Ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones para 3º ESO

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☒ Situación

Descripción: Las primeras actividades del libro de texto de 3º ESO responden a actividades de repaso de cursos anteriores. Entre ellas podemos ver, trabajo con proporciones de manera algebraica, comprobación de si parejas de magnitudes poseen relación de proporcionalidad directa, repartos descontextualizados y repartos contextualizados, observándose por último también cálculos de porcentajes.

Ejemplos:

Figura 3.39.- a) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 43-45.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 Halla el valor de x para que se cumplan las siguientes proporciones.

a) $\frac{12}{3} = \frac{4}{x}$ b) $\frac{9}{60} = \frac{x}{40}$ c) $\frac{15}{x} = \frac{3}{36}$

2 Luis y Carlos cambian divisas. Luis cambia 5 500 soles del Perú y le dan 1 270 euros. A Carlos le dan 1 062 euros.

a) ¿Cuántos soles ha cambiado Carlos?

b) ¿Cuál es el cambio euro-sol?

3 Indica si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales.

a) Millones de euros que se dedican a combatir el hambre en el mundo y número de personas fallecidas a causa del hambre.

b) Velocidad de un coche y tiempo que tarda en recorrer una distancia determinada.

c) Kilogramos de pintura y superficie pintada.

Razona la respuesta.

EJERCICIOS PROPUESTOS

4 Reparte 450 de forma directamente proporcional a 25, 50 y 75.

5 Reparte 10 650 en proporción directa a 3, 5 y 7.

6 Un padre quiere repartir 140 sellos entre sus dos hijos de forma directamente proporcional a sus edades, que son 13 y 15 años.

¿Cuántos sellos recibirá cada uno?

EJERCICIOS PROPUESTOS

7 Una máquina, A, fabrica 280 tornillos y salen 14 defectuosos. Otra máquina, B, fabrica 275 tornillos y salen 11 defectuosos.

a) ¿Cuál es el porcentaje de tornillos defectuosos fabricados por cada máquina?

b) ¿Cuál de las dos máquinas trabaja mejor?

8 Un análisis realizado en una granja a 7 200 animales ha permitido detectar un 24 % de animales enfermos.

Se emplea como tratamiento una dosis de vitamina A en 2 de cada 3 animales.

¿Cuántas dosis de vitamina A se necesitan?

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Incrementos y disminuciones de manera generalizada mediante fórmulas. Porcentajes encadenados. Aplicación mediante ejercicios, problemas y cuestiones (solo mostramos las cuestiones ya que los ejercicios y problemas son similares a los de cursos anteriores).

Ejemplos:

Figura 3.40.- a) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 46-47

Disminuciones e incrementos

Ejemplo. *En un bosque hay 450 robles. A causa de un incendio pierde un 10 % de su población. ¿Cuántos robles componen el bosque tras el incendio?*

Perder un 10% quiere decir que de cada 100 robles se pierden 10.

Por tanto, de 450 robles perderá: $\frac{450 \cdot 10}{100} = 45$

Y el número de robles tras el incendio será: $450 - 45 = 405$

De otro modo, el número final de robles es:

$$450\left(1 - \frac{10}{100}\right) = 450\ (1 - 0{,}10) = 450 \cdot 0{,}90 = 405$$

Es decir, la cantidad inicial, 450, por el tanto por uno que sobrevive, 0,90.

Si a c se le aplica una **disminución** del r%, el resultado final será:

$$c \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)$$

Ejemplo. *El Ayuntamiento de la ciudad decide hacer una repoblación del bosque aumentando en un 20 % los 405 robles que lo componen después del incendio. ¿Cuántos robles componen el bosque tras la repoblación?*

En este caso, por cada 100 robles se añaden 20.

Por tanto, los 405 robles aumentarán en: $405 \cdot \frac{20}{100} = 81$

Entonces, a 405 robles tendremos que añadirle 81 y el número total será: $405 + 81 = 486$

De otro modo, el número final de robles es:

$$405\left(1 + \frac{20}{100}\right) = 405\ (1 + 0{,}20) = 405 \cdot 1{,}20 = 486$$

Es decir, la cantidad inicial, 405, por el tanto por uno que aumenta, 1,20.

Si a c se le aplica un **incremento** del r%, el resultado final será:

$$c \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

11 La cantidad 12 500 se incrementa primero en un 12 % y el resultado se vuelve a incrementar en otro 4 %. ¿Cuál es la cantidad final resultante?

13 ¿Es lo mismo rebajar primero un artículo un 3 % y luego encarecerlo un 4 % que encarecerlo primero un 4 % y luego rebajarlo un 3 %?

Actividad tipo: [X] Ejercicio [ ] Problema [ ] Cuestión [ ] Situación

Descripción: Estudio de magnitudes directas e inversas mediante tablas. Determinación del tipo de relación de proporcionalidad, si la hay, que existe entre magnitudes.

Ejemplos:

Figura 3.41.- a) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 54; b) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 55

a)

29 La tabla corresponde a dos magnitudes directamente proporcionales *M* y *M'*. Halla la constante de proporcionalidad y completa la tabla.

M	4	12	....	2	....	....
M'	5	....	25	....	1	100

44 Comprueba si la tabla representa cantidades de dos magnitudes inversamente proporcionales. En caso afirmativo, halla la constante de proporcionalidad y completa la tabla.

M	2	4	8	100
M'	5	2,5	1,25	....

b)

57 De las siguientes tablas determina cuál o cuáles representan algún tipo de proporcionalidad (directa o inversa). Justifica tu respuesta.

a)

x	5	10	15	20	25
y	1	2	3	4	5

b)

x	2	3	4	3	2
y	1	2	3	4	5

c)

x	1	4	5	10	20
y	20	5	4	2	1

d)

x	18	15	13	10	9
y	20	15	14	2	1

Actividad tipo: [X] Ejercicio [X] Problema [ ] Cuestión [ ] Situación

Descripción: Repartos en magnitudes inversamente proporcionales de forma descontextualizada y de forma contextualizada. 19-21; Ejercicios, 22 y 23; Problemas.

Ejemplos:

Figura 3.42.- a) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 49

19 Reparte 93 en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 5.

20 Reparte 168 de modo inversamente proporcional a 3, 5 y 6.

21 Al repartir 60 de forma inversamente proporcional a los números 2 y *x*, se sabe que la parte correspondiente a 2 es 36. Halla *x*.

22 Se reparten 60 euros entre el primer y segundo clasificado de una carrera, de manera inversamente proporcional al puesto alcanzado.
¿Cuántos euros recibirá cada uno?

23 Para construir un puente de 1 200 metros se dispone de 300 vigas, que se colocarían cada 40 metros. Después de un estudio de carga, se decide reforzar la obra y utilizar 100 vigas más.
¿A qué distancia se deben colocar las vigas?

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☒ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Cálculo de problemas de proporcionalidad compuesta. En muchas situaciones de la vida cotidiana no solamente entra en juego la proporcionalidad directa o inversa de manera aislada, sino que éstas llegan a combinarse. Por ello, también se ve la necesidad de estudiar problemas de proporcionalidad compuesta.

Ejemplos:

Figura 3.43.- a) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 57

Proporcionalidad compuesta

90 Transportar 720 cajas de libros a 240 kilómetros cuesta 4 320 euros.

¿Cuántas cajas iguales se han transportado a 300 kilómetros, si hemos pagado 6 187,50 euros?

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación

Descripción: En el tema de funciones se ve la necesidad de establecer los diferentes marcos en los que se puede presentar una función. Por ello, se establece el marco tabular, el gráfico y el algebraico como los tres marcos para describir una función. Entre ellas, se encuentra la función de proporcionalidad directa.

Ejemplos:

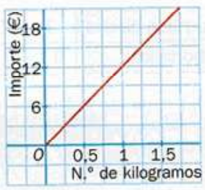
Figura 3.44.- a) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 208

Ejemplo. *Una tienda de café vende su especialidad a 12 euros el kilogramo. Expresa la relación entre el número de kilogramos y el importe mediante una tabla, una gráfica y una fórmula.*

Tabla

Número de kilogramos	Importe (€)
0,5	6
0,8	9,60
1	12
1,5	18

Gráfica



Fórmula

Si x es el número de kilogramos e y el importe a pagar en euros, se tiene:

$y = 12x$

4 En algunos países se utilizan las pulgadas para expresar longitudes.

Para pasar de centímetros a pulgadas se multiplica por 2 y se divide por 5.

a) ¿Es una función la relación entre los centímetros y las pulgadas?

b) Forma una tabla, representa la gráfica y expresa la fórmula.

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Las funciones que se representan gráficamente como rectas pueden ser del tipo lineal (proporcionales directas) y del tipo afín (sin proporcionalidad directa). Aunque en el libro de texto engloba las funciones lineales como las de los dos tipos, divide en la fórmula algebraica la parte proporcional de la parte fija, relativa a la función afín.

Ejemplos:

Figura 3.45.- a) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 208

4. APLICACIONES DE LA FUNCIÓN LINEAL

Ejemplo. *Para captar clientes, un cibercafé anuncia en su escaparate esta promoción.*

"1,20 euros cada hora o fracción, más 50 céntimos por conexión"

¿Cuánto tendrá que pagar un cliente que está conectado un cuarto de hora? ¿Y si está conectado durante dos horas?

Si t es el tiempo, en horas, que está conectado, el precio que pagará el cliente vendrá dado por la siguiente expresión:

$$y = 1{,}20t + 0{,}50$$

Así pues:

Si está conectado un cuarto de hora pagará:

$$y = 1{,}20 \cdot \frac{1}{4} + 0{,}50 = 0{,}80 \text{ €}$$

Si está conectado dos horas pagará:

$$y = 1{,}20 \cdot 2 + 0{,}50 = 2{,}90 \text{ €}$$

Este es un ejemplo de un tipo de función lineal muy habitual en la vida diaria, que consta de una **parte proporcional** más una **parte fija**.

Las funciones de la forma:

y = [parte proporcional] + [parte fija]

son funciones lineales $y = mx + n$, donde mx es la parte proporcional y n es la parte fija.

3.5.- Ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones para 4º ESO

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación

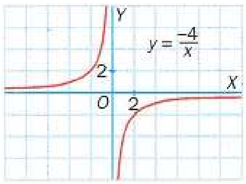
Descripción: Las funciones hiperbólicas en situaciones pueden ser representadas mediante el uso de funciones de proporcionalidad inversa del tipo y=k/x.

Ejemplos:

Figura 3.46.- a) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 208

EJERCICIO RESUELTO

1. Representa la función $y = \dfrac{x-6}{x-2}$.

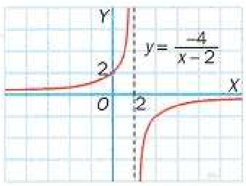


Descomponemos la función de esta forma.

$$y = \frac{x-6}{x-2} = \frac{x-2-4}{x-2} = $$
$$= 1 + \frac{-4}{x-2}$$

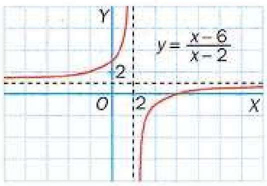
Podemos obtener su gráfica a partir de la correspondiente a la función $y = \dfrac{-4}{x}$.

x	y
...	...
−4	1
−1	4
0	No definido
1	−4
4	−1
...	...



Si trasladamos esta gráfica horizontalmente hacia la derecha dos unidades, conseguimos la de la función $y = \dfrac{-4}{x-2}$.

Y si desplazamos esta verticalmente hacia arriba una unidad, obtenemos la gráfica buscada, que se ha dibujado en el margen.



Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Cuestiones relacionadas con funciones de proporcionalidad inversa. Dominio, restricciones de cuándo es función de proporcionalidad inversa, creación de ejemplos…

Ejemplos:

Figura 3.47.- SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 222-223

Funciones de proporcionalidad inversa y racionales

31 Identifica entre las siguientes funciones las que son de proporcionalidad inversa.

a) $y = \dfrac{-3x}{2}$ b) $y = \dfrac{4x}{x+1}$ c) $y = \dfrac{-5}{x}$ d) $y = \dfrac{7}{2x}$

32 Escribe la fórmula de dos funciones de proporcionalidad inversa, una creciente y otra decreciente.

53 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y explica por qué.

a) Todas las funciones racionales tienen asíntotas verticales.

b) El recorrido de la función $y = e^{-x}$ es $\mathbf{R}^-$.

c) El dominio de una función de proporcionalidad inversa nunca es $\mathbf{R}$.

d) La función $y = \log_{-2} x$ decrece en todo su dominio.

Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Representación de funciones de proporcionalidad inversa.

Ejemplos:

Figura 3.48.- a) SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 226

4 Representa en los mismos ejes las siguientes funciones.

a) $y = \frac{10}{x}$ b) $y = -\frac{10}{x}$ c) $y = \frac{4}{x}$

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Cuestiones relacionadas con funciones polinómicas que por tanto están relacionadas con las funciones de proporcionalidad directa. Ordenada en el origen, crecimiento y decrecimiento, tipo de función (afín o lineal),…

Ejemplos:

Figura 3.49.- SM – PROYECTO ESFERA, 2008, 223-224

50 La fórmula de las funciones lineales es del tipo $y = mx + n$. Completa en tu cuaderno el cuadro siguiente marcando una cruz donde corresponda.

	$m > 0$ $n = 0$	$m > 0$ $n \neq 0$	$m < 0$ $n = 0$	$m < 0$ $n \neq 0$
Creciente				
Decreciente				
Pasa por el origen				
No pasa por el origen				

55 En algunos países, la temperatura se mide en grados Fahrenheit en lugar de en grados Celsius. La relación entre estas dos escalas viene determinada por la fórmula $y = 1{,}8x + 32$, siendo x e y las temperaturas medidas en grados Celsius y Fahrenheit, respectivamente.

a) ¿Qué tipo de función es la que relaciona las dos escalas de temperatura?

b) ¿Cuál es su pendiente? ¿Es una función creciente o decreciente?

c) ¿Cuál es su ordenada en el origen? Explica qué significa su valor en este caso.

Capítulo 4
Coherencia de los libros de texto en relación al currículo

En el presente capítulo se compara la visión dada a la noción de proporcionalidad directa e inversa en relación al currículo vigente y a libros de texto de referencia en los centros educativos. Además se realiza un estudio longitudinal en el tiempo de dos libros de texto escolares fueron utilizados durante los últimos 40 años a fin de observar similitudes y diferencia respecto a los actuales. El primero de ellos, "*Compendio de Matemáticas*" (Marcos, Constantino; Martínez, Jacinto; Editorial SM, 4º curso), se eligió debido a que aborda el tema desde la cercanía a la educación secundaria del momento, mientras que el segundo, cuyo título es "Programa de especialización de profesorado de EGB. Matemáticas II. Unidad 3" (UNED, Madrid: Autor, 1976) fue escogido ya que muestra el tema desde totalmente diferente a como se trata el tema en la actualidad, debido a centrarse principalmente en el profesorado.

4.1.- Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

Los libros de texto analizados para la etapa de la ESO realizan un tratamiento similar de los objetos matemáticos que se presentan, no siendo muy diferentes de un curso al siguiente. Todos ellos, se presentan de nuevo en cada año y son limitados los conceptos nuevos que se introducen en cada curso, realizando así el currículo en especial que marca la legislación.

Con todo ello, en la Tabla 4.1 (a, b y c) se muestra cómo se van presentando los contenidos correspondientes a la noción de proporcionalidad directa e inversa en la etapa de la ESO, tanto en el currículo oficial como en los libros de texto. Para ello se extraen del Boletín Oficial del Estado los descriptores referentes al tema y se expone el índice que realiza por ejemplo la editorial SM para dicha etapa. Sin embargo, como veremos más adelante, si nos fijamos sobre qué contenido utilizan diferentes editoriales podemos observar que existen diferencias más que significativas entre ellas.

Tabla 4.1.a.- *Correspondencia entre el currículo oficial y los libros de texto.*

CORRESPONDENCIA ENTRE LAS NOCIONES EN LOS LIBROS DE TEXTO Y EN EL CURRÍCULO OFICIAL		
CURSO	**PROPORCIONALIDAD ARITMÉTICA**	
	CURRÍCULO OFICIAL	**ÍNDICE (SM – PROYECTO ESFERA)**
1º ESO	*Bloque 2. Números.* - **PROPORCIONALIDAD DIRECTA** • *Razón y proporción.* • *Porcentajes.* *Bloque 5. Funciones y gráficas* - **FUNCIONES** • *Proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores.*	*Bloque 3. Medidas* - **MAGNITUDES PROPORCIONALES** • *Razón y proporción.* • *Regla de tres y reducción a la unidad.* • *Porcentajes.* *Bloque 5. Funciones* - **FUNCIONES** • *Funciones de proporcionalidad directa.*

Tabla 4.1.b.- *Correspondencia entre el currículo oficial y los libros de texto. (cont.)*

<table>
<tr><th colspan="3">CORRESPONDENCIA ENTRE LAS NOCIONES EN LOS LIBROS DE TEXTO Y EN EL CURRÍCULO OFICIAL</th></tr>
<tr><th rowspan="2">CURSO</th><th colspan="2">PROPORCIONALIDAD ARITMÉTICA</th></tr>
<tr><th>CURRÍCULO OFICIAL</th><th>ÍNDICE (SM – PROYECTO ESFERA)</th></tr>
<tr><td>2º ESO</td><td>Bloque 2. Números.
- PROPORCIONALIDAD
• Proporcionalidad directa e inversa. Análisis de tablas. Razón de proporcionalidad.
• Aumentos y disminuciones porcentuales.

Bloque 5. Funciones y gráficas
- FUNCIONES
• Magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica.</td><td>Bloque 3. Medidas
- MAGNITUDES PROPORCIONALES
• Repartos proporcionales.
• Porcentajes. Variaciones porcentuales.
• Interés Simple.

Bloque 5. Funciones
- FUNCIONES
• Funciones de proporcionalidad inversa.</td></tr>
<tr><td>3º ESO</td><td>Bloque 5. Funciones y gráficas.
- FUNCIONES
• Modelos lineales (tabla, representación gráfica y expresión algebraica).</td><td>Bloque 3. Medidas
- MAGNITUDES PROPORCIONALES
• Repartos proporcionales directos e inversos.
• Porcentajes encadenados.
• Proporcionalidad compuesta.

Bloque 5. Funciones
- FUNCIONES
• Representación de funciones lineales.</td></tr>
</table>

Tabla 4.1.c.- *Correspondencia entre el currículo oficial y los libros de texto. (cont.)*

CORRESPONDENCIA ENTRE LAS NOCIONES EN LOS LIBROS DE TEXTO Y EN EL CURRÍCULO OFICIAL		
CURSO	**PROPORCIONALIDAD ARITMÉTICA**	
	CURRÍCULO OFICIAL	**ÍNDICE (SM – PROYECTO ESFERA)**
4º ESO - A	*Bloque 2. Números.* - **PROPORCIONALIDAD** • *Proporcionalidad directa e inversa.* • *Porcentajes. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes sucesivos.* • *Interés simple y compuesto.*	*Bloque 3. Medidas* - **PROPORCIONALIDAD** • *Magnitudes proporcionales.* • *Repartos proporcionales.* • *Porcentajes y proporcionalidad.* • *Interés simple y compuesto.* *Bloque 5. Funciones* - **FUNCIONES ELEMENTALES** • *Funciones de proporcionalidad inversa.*
4º ESO – B	*Bloque 5. Funciones* - **FUNCIONES ELEMENTALES** • *Modelos funcionales: Proporcionalidad inversa.*	---

Realizando además una comparación entre los textos de referencia utilizados durante los últimos 40 años en el sistema educativo y los actuales y el currículo vigente, se detectan ciertas presencias y ausencias, entendiendo como presencia un tratamiento similar de las nociones matemáticas y como ausencias un trato diferenciado o no realizado.

Se observa que el libro *"Compendio de Matemáticas" (Marcos, Martínez)*, trata el tema de proporcionalidad directa de una manera similar a la actual. No obstante introduce para el curso en el que se trata más nociones y propiedades que en la mayoría de los textos de la actualidad (cuarta proporcional, media proporcional, tercera proporcional, usa más propiedades de las proporciones,…). Además utiliza para una misma noción distintas definiciones aunque al final suela concluir con la que es actualmente habitual. Esto ocurre por ejemplo en la definición de magnitudes proporcionales inversas, en la que propone un estudio a base de razones inversas, pero que concluye con la definición habitual hoy en día. (Figura 4.1.). No obstante, este libro presenta técnicas como la regla de tres simple, que actualmente no aparece en el currículo aunque sí que está presente en la mayoría de los libros de texto, mientras que obvia el método de reducción a la unidad que sí que está en la actualidad. El texto, que pertenecería al actual 2º ESO, introduce la proporcionalidad compuesta, noción que en los libros de texto de hoy en día se presenta en 3º ESO, a pesar de que no marca de forma explícita en el currículo oficial. Por otro lado si nos fijamos en el texto *"Programa de especialización de profesorado de EGB. Matemáticas II. Unidad 3"* (UNED, 1976), se presenta la proporcionalidad de una manera totalmente distinta a la que se acostumbra hoy en día. Para ser más concreto, el texto expone el caso de la proporcionalidad directa e inversa compuesta mediante aplicaciones multilineales. Al estar relacionadas varias magnitudes, se parte de un análisis lineal en el que se varía una única magnitud y se deja constantes todas las demás. A raíz de ello establece relaciones de los distintos modelos lineales que se forman al variar una única magnitud y concluye, tanto para la proporcionalidad directa compuesta como para la inversa, con varias formulas basadas en espacios vectoriales. Como ejemplo se puede observar la Figura 4.2.

a)

97. **Magnitudes inversamente proporcionales.**—I. *Dos magnitudes, que dependen una de otra, son inversamente proporcionales, si la razón de dos valores cualesquiera de la primera, es igual a la razón inversa de los valores correspondientes de la segunda.*

b)

Es decir: II. *Dos magnitudes son inversamente proporcionales, si el producto de dos valores correspondientes es constante.*

c)

Dos magnitudes, *a* y *b*, son **inversamente proporcionales** cuando el producto de las cantidades correspondientes es constante, *k*. Este producto se llama **constante de proporcionalidad inversa**.

$$k = a \cdot b$$

Figura 4.1.- *Definiciones de magnitudes inversamente proporcionales: a) Primera definición en "Compendio de Matemáticas", b) Definición final en "Compendio de Matemáticas", c) Definición actual "Cuadernos de matemáticas – SM".*

3.6.1. *Proporcionalidad compuesta inversa.*

Las aplicaciones multilineales han servido, inmediatamente, para resolver cuestiones de proporcionalidad compuesta. El fundamento de la resolución ha estado en la igualdad $a \otimes b = a \times b \times (1 \otimes 1)$, por escribir sólo aplicaciones bilineales.

Puede pensarse en aplicaciones

$$V_1 \times V_2 \longrightarrow W$$

$$(a, b) \longmapsto a \otimes b$$

tales que $1 \otimes 1 = a \times b \times (a \otimes b)$, lo que, desde cierto punto de vista, es una igualdad de tipo "inverso" a la anterior pero que permite conocer la imagen del par (a, b) mediante

$$a \otimes b = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} \times (1 \otimes 1)$$

Figura 4.2.- *Proporcionalidad compuesta inversa mediante aplicaciones multilineales. ("Programa de especialización de profesorado de EGB. Matemáticas II. Unidad 3", UNED, 1976).*

4.2.- Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo.

Los libros de texto analizados para este estudio pertenecen a las editoriales SM la mayoría de ellos, y para 6º de Primaria y 2ª ESO también se ha tenido acceso a libros de la editorial EDEBÉ. En relación al currículo oficial, decir que todos ellos incluyen los contenidos que marca la legislación. No obstante, comentar que muchos de ellos van más allá e incluyen contenidos adicionales a los que estrictamente están obligados. Tal y como se estudia en la asignatura "Procesos y Contextos Educativos" de este master, hay que remarcar que estos contenidos que marca el currículo son unos contenidos mínimos que se deben ofertar en todos los centros educativos (55% de la programación para comunidades con idioma co-oficial y 65% de la programación para comunidades sin idioma co-oficial). Por ello, las editoriales tienen la libertad de añadir los contenidos que consideren oportunos siempre que los respeten.

Respecto a editoriales, se observa como por ejemplo la editorial SM presenta de manera aislada (atomización) nociones que en su idea original están relacionadas, como proporcionalidad y funciones. Mientras, la editorial EDEBÉ presenta un contenido más enlazado (conexiones matemáticas) y por ejemplo en los temas propios de proporcionalidad numérica ya propone representaciones gráficas y no se queda únicamente en los formatos de tablas como hace el libro de la editorial SM.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio sobre la proporcionalidad en 2º ESO

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se realiza el análisis a un proceso de estudio sobre la proporcionalidad aritmética en relación a la experiencia docente realizada en un Instituto de Educación Secundaria con alumnos de 2º ESO durante el periodo de seis semanas de prácticas pertenecientes al Máster.

En ella, se hace un análisis de la unidad didáctica utilizada para impartir la docencia, distinguiendo los objetos matemáticos involucrados en el tema y registrando las dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la noción por los alumnos que se enfrentan a ella.

Por último se expone la experimentación realizada, mediante el análisis del proceso de estudio y de los resultados obtenidos en un cuestionario realizado sobre el tema. Se termina la sección con la síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas sobre la experiencia.

Capítulo 5
Proporcionalidad aritmética en el libro de texto de referencia

Durante este apartado se va a analizar el bloque I (secciones 1-7), titulado *Proporcionalidad aritmética*, correspondiente al cuaderno número 4 de la editorial SM para 2º ESO, *Proporcionalidad, Funciones y Estadística*. Este fue el libro de referencia usado en el colegio durante el periodo del Practicum II, sin embargo, para profundizar sobre algunos puntos del temario se utilizó el libro de la editorial Edebé correspondiente también al curso de 2º ESO.

Para el análisis de la lección del libro de texto se utilizará como modelo de referencia el artículo titulado *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta* (Godino, J.D., Font, V., y Wilhelmi M.R., 2006).

5.1.- Objetos matemáticos involucrados

En la Tabla 5.1 se disponen los aspectos matemáticos involucrados en el libro de texto en relación al lenguaje (Tabla 5.1.a.), situaciones (Tabla 5.1.b.), conceptos (Tabla 5.1.c.), procedimientos (Tabla 5.1.d.), propiedades (Tabla 5.1.e.) y argumentos utilizados (Tabla 5.1.f.). Para la realización de esta tabla se ha cogido como modelo la correspondiente de la página 139 del artículo de referencia (Godino, J.D., et al, 2006).

Tabla 5.1.a.- *Configuración de la proporcionalidad aritmética en el libro de texto. Lenguaje.*

LENGUAJE		
VERBAL	**TABLA**	**SIMBÓLICO**
Razón, proporción, constante de proporcionalidad, números, cociente, extremos, medios, decimal, propiedad fundamental, incógnita, producto, magnitudes directamente proporcionales, magnitudes inversamente proporcionales, constante, constante de proporcionalidad, tabla, "si_____, ¿cuánto_____?", porcentaje, tanto por ciento, razón equivalente, número decimal equivalente, cantidad, aumento, disminución, suma, resta, regla de tres simple directa, método, repartos, regla de tres simple inversa, cantidad de cada 100 unidades, más o menos, interés simple, beneficio, tasa de interés, años,...	Representación de dos magnitudes, pares de valores para dos magnitudes, para ver qué tipo proporcionalidad tienen, si la hay. Representación de dos magnitudes, para calcular valores faltantes en función del tipo de proporcionalidad en que se relaciones las magnitudes. Formato de tabla de la regla de tres. Tablas para el cáculo de repartos directos e inversos.	$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}=1.5$; $+$;3 y4 ; $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; a yd; b yc; x ; y; z ; $\frac{12}{17}=\frac{48}{x}$; $\frac{m}{n}=3.5$; %; 8% de 340 ; $340\bullet\frac{8}{100}$; $340\bullet 0.08$; $1500\bullet\frac{x}{100}$; $k=\frac{a}{b}$; $k=a\bullet b$; $\begin{matrix} 3 & \text{———} & 7.80 \\ 11 & \text{———} & x \end{matrix}$ $\frac{3}{7.80}=\frac{11}{x}$; $\begin{matrix} 8 & \text{———} & 120 \\ 6 & \text{———} & x \end{matrix}$ $6x=8\bullet 120$; $k=\frac{T}{x+y+z}$; $k=\frac{T}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$; $x'=xk$; $x'=\frac{1}{x}k$; $x'+y'+z'=T$; $I=C\bullet i\bullet n$; ...

Tabla 5.1.b.- *Configuración de la proporcionalidad aritmética en el libro de texto. Situaciones. (cont.)*

SITUACIONES
- Problemas descontextualizados en los que se debe hallar el valor faltante en proporciones, calcular porcentajes sabiendo el tanto por ciento a aplicar y el total, sabiendo el tanto por ciento y la parte resultante y sabiendo el total y la parte resultante, calcular el porcentaje aplicado. Problemas de aumentos y disminuciones, de cálculo de tablas proporcionales directas e inversas y no proporcionales. Cálculo de la constante de proporcionalidad. Cálculo mediante regla de tres simple directa e inversa. - Problemas contextualizados de cálculo de constantes de proporcionalidad, problemas de valor faltante. Se pide aplicar la propiedad fundamental de las proporciones, porcentajes, totales, partes, porcentaje sabiendo la parte y el total, aumentos y disminuciones porcentuales, recuentos, sumas, relaciones entre magnitudes, repartos directos e inversamente proporcionales.

Tabla 5.1.c.- *Configuración de la proporcionalidad aritmética en el libro de texto. Conceptos. (cont.)*

CONCEPTOS	
PREVIOS	EMERGENTES
Suma, resta, multiplicación, división. Fracciones, decimales, unidades, proporcionalidad directa, porcentajes, fracciones equivalentes, magnitudes directamente proporcionales.	Proporcionalidad inversa, magnitudes inversamente proporcionales, repartos directos e inversos, interés simple.

Tabla 5.1.d.- *Configuración de la proporcionalidad aritmética en el libro de texto. Procedimientos. (cont.)*

PROCEDIMIENTOS
- Aplicar algoritmos de magnitudes directa o inversamente porcionales. - Aplicar algoritmos de repartos en magnitudes directas e inversas. - Comprobación de los resultados de un reparto. - Cálculo de porcentajes. - Utilización de la propiedad fundamental en problemas de valor faltante o de comprobación de proporciones. - Utilización de la propiedad aditiva de las proporciones para los repartos.

Tabla 5.1.e.- *Configuración de la proporcionalidad aritmética en el libro de texto. Propiedades. (cont.)*

PROPIEDADES
- En una proporción, el producto de medios es igual al producto de extremos. $ad = bc$ - Al sumar, o restar, los antecedentes (a) y los consecuentes (b) en una proporción, obtenemos una nueva razón que forma proporción con cada una de las razones de la proporción inicial. $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$; $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ - Si en una proporción intercambiamos los extremos, los medios, los medios y los extremo, o bien las dos razones entre sí, obtenemos nuevas proporciones. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$ $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$; $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Tabla 5.1.a.- *Configuración de la proporcionalidad aritmética en el libro de texto. Argumentos. (cont.)*

ARGUMENTOS
- Justificación de las propiedades utilizando elementos genéricos. (Producto Medios = Producto Extremos) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$ - Comprobación de las propiedades en casos particulares. $\frac{17}{8} \overset{?}{=} \frac{25}{15} \Rightarrow 17 \bullet 15 \overset{?}{=} 8 \bullet 25 \Rightarrow$ No es proporción ya que no cumple la propiedad fundamental.

5.2.- Análisis global de la unidad didáctica

La unidad didáctica a analizar se corresponde con el bloque I (*Proporcionalidad Aritmética)* del cuaderno 4 (*Cuadernos de matemáticas, nº 4*) de la editorial SM titulado *Proporcionalidad, Funciones y Estadística*, para el curso 2º ESO. Además se introducirán partes del tema 5 sobre proporcionalidad aritmética de la editorial Edebé, que si bien no el era el libro de texto de referencia para seguir las clases, si que se utilizaba de manera esporádica.

La misión de este análisis consiste en identificar los objetivos y estructuras de los aspectos didácticos, para luego realizar un estudio detallado.

El bloque titulado *Proporcionalidad aritmética* consta de las siguientes seis secciones:

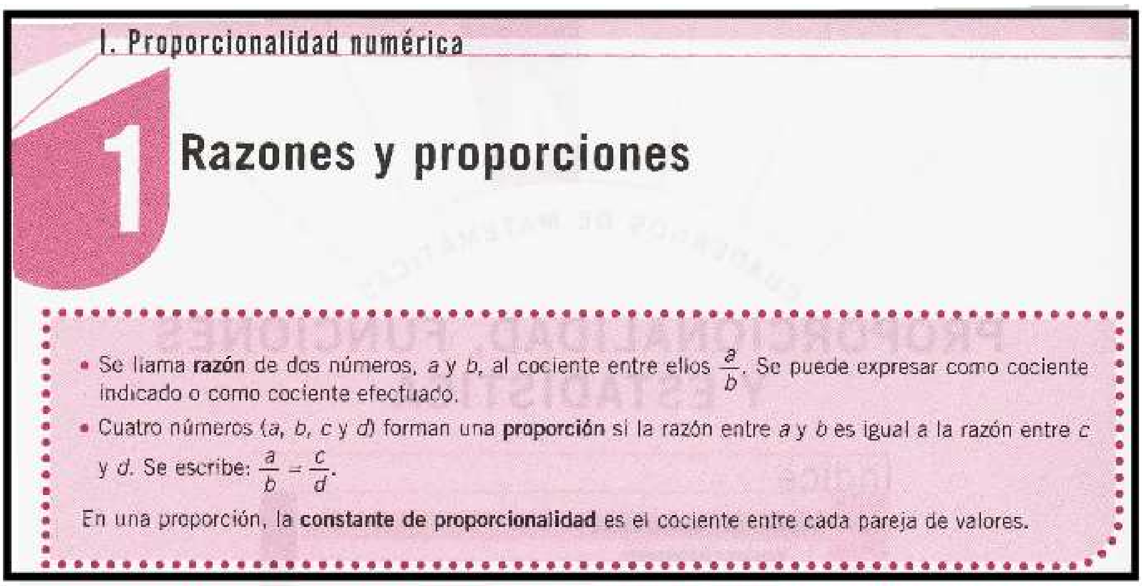
1.- Razones y proporciones.
2.- Magnitudes directamente proporcionales.
3.- Porcentajes.
4.- Regla de tres simple directa.
5.- Repartos directamente proporcionales.
6.- Magnitudes inversamente proporcionales.

Todas estas secciones tienen una estructura similar que describimos a continuación.

a) Primero presenta una definición y/o noción teórica.
b) Sección titulada *Paso a Paso*, en la que se plantea un ejercicio-problema resuelto y se muestran las técnicas para la resolución de los ejercicios-problemas. En ocasiones se muestran recuadros laterales con más definiciones o propiedades.
c) Colección de entre 1 y 4 ejercicios descontextualizados.
d) Problema contextualizado resuelto cuyo objetivo es presentar las técnicas de resolución necesarias para este tipo situaciones.
e) Colección de 3-5 problemas-situaciones contextualizadas para la aplicación de las técnicas aprendidas.
f) En las secciones 3 y 6 (*Porcentajes* y *Magnitudes inversamente proporcionales*), aparece un apartado titulado *Un Paso Más* con problemas contextualizados (4-6 problemas) de nivel más elevado a modo de ampliación.

g) También las secciones 3 y 6 se presenta un apartado llamado *Pisa Fuerte* donde se propone un problema-situación contextualizado a modo de consolidación de conocimientos, donde tienen que aplicar las nociones, propiedades y técnicas aprendidas durante el tema. En estas secciones se propone la resolución de problemas mediante la técnica de descomposición de la situación en partes.

A continuación se realizará un análisis más detallado de la estructura del libro de texto y de sus aspectos didácticos. El bloque I consta de 16 páginas entre las que se engloban las seis secciones. Todos los bloques didácticos de los cuadernos de matemáticas de la editorial SM para 2º ESO, comienza directamente con la primera sección de la unidad. En este caso, se comienza con la noción de razón y proporción, y tal como hemos dicho anteriormente, se presentan sus definiciones en la parte superior mediante un cuadro rosa (Figura 5.1).


I. Proporcionalidad numérica

1 Razones y proporciones

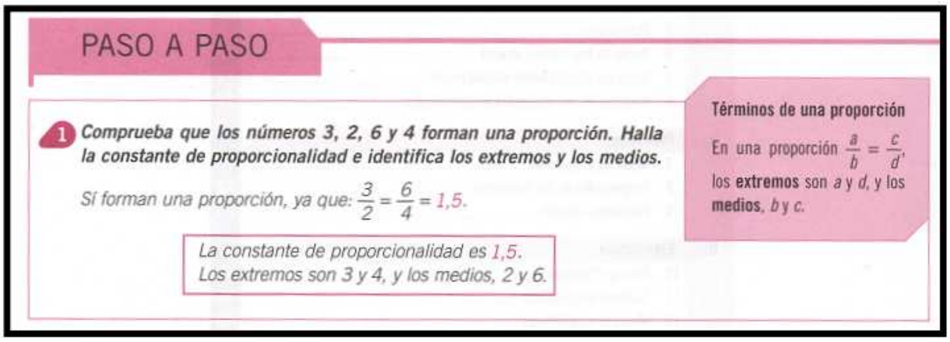
- Se llama **razón** de dos números, a y b, al cociente entre ellos $\frac{a}{b}$. Se puede expresar como cociente indicado o como cociente efectuado.
- Cuatro números (a, b, c y d) forman una **proporción** si la razón entre a y b es igual a la razón entre c y d. Se escribe: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

En una proporción, la **constante de proporcionalidad** es el cociente entre cada pareja de valores.

Figura 5.1.- *Presentación de la sección 1 mediante las definiciones de razón, proporción y constante de proporcionalidad.*

Todas las secciones tienen un número de páginas de entre 2 y 4 (cuatro si son secciones recopilatorias de lo aprendido hasta el momento) y siempre comienzan en la página izquierda del cuadernillo.

Las secciones comienzan con estos recuadros rosas con el objetivo que recuerden las nociones, si ya las han aprendido en cursos anteriores, o que las integren en sus conocimientos, si es una noción emergente en sus estudios. El texto enlaza estás definiciones con la sección *Paso a Paso* en la que se plantean problemas introductorios, contextualizados o no, y se exponen las técnicas de resolución necesarias. Además se suelen presentar más definiciones o propiedades necesarias en recuadros en la parte lateral derecha del ejercicio-problema. En la Figura 5.2 podemos ver el ejemplo planteado para la sección 1, donde se trabaja con los términos de una proporción. Se observa también como define los diferentes términos de una proporción en el recuadro lateral derecho.



PASO A PASO

1 ***Comprueba que los números 3, 2, 6 y 4 forman una proporción. Halla la constante de proporcionalidad e identifica los extremos y los medios.***

Sí forman una proporción, ya que: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = 1,5$.

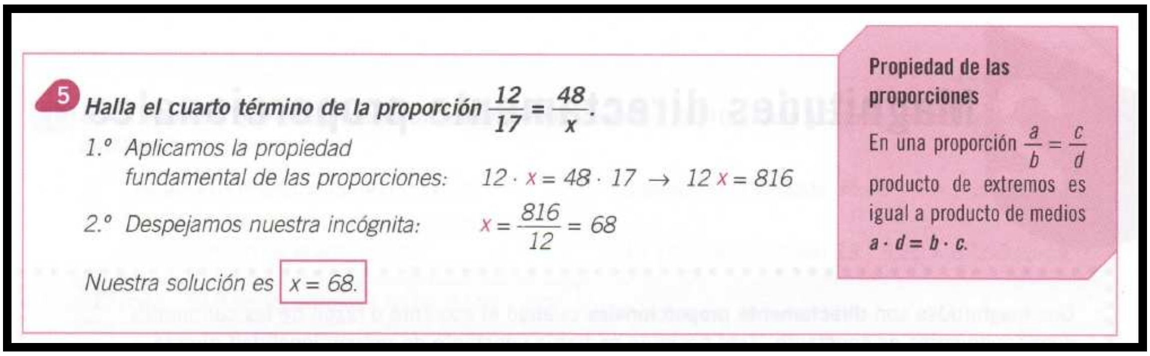
La constante de proporcionalidad es 1,5.
Los extremos son 3 y 4, y los medios, 2 y 6.

Términos de una proporción

En una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, los **extremos** son a y d, y los **medios**, b y c.

Figura 5.2.- *Ejemplo introductorio y términos de una proporción.*

Tras este apartado de ejemplo introductorio se proponen una serie de ejercicios-problemas, para ya en la siguiente página presentarse un ejercicio resuelto mientras se presenta una nueva propiedad de las proporciones (Figura 5.3).



5 ***Halla el cuarto término de la proporción*** $\frac{12}{17} = \frac{48}{x}$.

1.º Aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones: $12 \cdot x = 48 \cdot 17 \rightarrow 12x = 816$

2.º Despejamos nuestra incógnita: $x = \frac{816}{12} = 68$

Nuestra solución es $\boxed{x = 68.}$

Propiedad de las proporciones

En una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ producto de extremos es igual a producto de medios $a \cdot d = b \cdot c$.

Figura 5.3.- *Presentación de la propiedad fundamental de las proporciones mediante un ejemplo resuelto.*

Para terminar la sección 1, se proponen una serie de problemas, primero descontextualizados y más tarde contextualizados donde tienen que aplicar la propiedad fundamental de las proporciones y lo anteriormente aprendido en la página inicial.

La siguiente sección (página 4), sigue el mismo esquema que la anterior, y se presenta inicialmente la definición sobre dos magnitudes directamente proporcionales. A continuación se plantea un ejemplo introductorio sobre este tipo de noción, en el cual se presenta la técnica para la comprobación de si dos magnitudes son directamente proporcionales o no. Posteriormente se proponen dos ejercicios descontextualizados. El primero de ellos consiste en comprobar si existe una relación de proporcionalidad directa entre dos magnitudes genéricas ("x" e "y", "u" y "v"). El segundo consiste en rellenar una tabla con huecos en el que nos dice que sí que existe relación de proporcionalidad directa y la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes genéricas llamadas "m" y "n" (Figura 5.4).

11 Para cada una de las siguientes tablas, estudia si representan valores de magnitudes directamente proporcionales, y cuando sea así, indica cuál es la constante de proporcionalidad.

a)

x	4	6	8	14
y	2	3	4	7

b)

u	6	12	13	14
v	1	2	3	4

12 Completa la tabla para que represente valores de magnitudes directamente proporcionales, de constante de proporcionalidad $\frac{m}{n} = 3,5$.

m		14		105
n	2		12	

Figura 5.4.- *Ejercicios descontextualizados de aplicación sobre magnitudes directamente proporcionales.*

En la página siguiente, se presenta un ejemplo resuelto contextualizado en el que utiliza de forma implícita, ya que no la nombra, la técnica de reducción a la unidad para el cálculo de valores en magnitudes directamente proporcionales. A continuación, se proponen una colección de 5 problemas contextualizados para la aplicación del método de reducción a la unidad, aunque tal y como hemos comentado, no lo propone de forma explícita. En cualquier caso, si el objetivo de estos problemas era utilizar el método de reducción a la unidad, desde mi punto de vista, tras lo visto en la sección 1 (razones y proporciones) el alumnado se decantará más por solucionar las situaciones mediante proporciones que mediante el método de reducción a la unidad.

La siguiente página corresponde al comienzo de la sección 3, Porcentajes, donde se sigue la misma estructura que las anteriores. Definición con ejemplo introductorio de porcentajes y colección de ejercicios sobre porcentajes (calcular porcentaje de una cantidad, calcular el porcentaje sabiendo el resultado del porcentaje y la cantidad a la que se aplicaba el porcentaje, y calcular la cantidad total a la que se aplicaba el porcentaje sabiendo el porcentaje aplicado y la cantidad resultante tras la aplicación del porcentaje). En la siguiente página se presenta un ejemplo sobre aumentos y disminuciones porcentuales y a continuación se proponen una serie de problemas de aplicación. A diferencia que en otras secciones, esta sección consta de dos apartados llamados *Un Paso Más* y *Pisa Fuerte*. El primero de ellos propone problemas de ampliación contextualizados sobre porcentajes, y el segundo consiste en un ejercicio resumen de las tres secciones anteriores mediante la técnica de descomposición del problema objetivo en partes para simplificar el método de resolución. El problema consiste en realizar un recuento sobre las puntuaciones de varios jugadores de baloncesto para luego calcular los porcentajes de acierto asociados a ese recuento de canastas e intentos. Se propone el problema mediante la descomposición del problema en diferentes partes, en las cuales se deben rellenar varias tablas que ya son presentadas en el problema, para luego realizar varios cálculos y responder a varias preguntas de conclusión sobre la situación. Además el problema-situación se contextualiza con una imagen relacionada con el tema, un jugador de baloncesto (Figura 5.5).

PISA FUERTE

34 **El entrenador de un equipo de baloncesto observa las anotaciones que ha tomado sobre la actuación de los cinco jugadores titulares. Esto es lo que ha anotado:**

	1 punto		2 puntos		3 puntos	
Jugador	**Intentos**	**Canastas**	**Intentos**	**Canastas**	**Intentos**	**Canastas**
J. C. Calderín	6	4	4	3	5	3
S. Peravicic	5	3	7	6	5	4
Pablo Gasoil	4	2	6	5	3	1
Shaq O' Meal	7	5	7	5	1	0

¿Qué porcentaje de los puntos totales han sido canastas de 3 puntos de Pablo Gasoil? ¿Qué jugador ha estado más acertado desde la línea de tiros libres (un punto)?

1.º *Lee detenidamente el problema y organiza los datos.*

– Para contestar a las preguntas, completa los siguientes cuadros.

	1 punto			2 puntos			3 puntos			Total
Jugador	**Int.**	**Can.**	**Puntos**	**Int.**	**Can.**	**Puntos**	**Int.**	**Can.**	**Puntos**	**Puntos**
J. C. Calderín	6	4		4	3		5	3		
S. Peravicic	5	3		7	6		5	4		
Pablo Gasoil	4	2		6	5		3	1		
Shaq O' Meal	7	5		7	5		1	0		

	1 punto		
Jugador	**Int.**	**Can.**	**% acierto**
J. C. Calderín			
S. Peravicic			
Pablo Gasoil			
Shaq O' Meal			

2.º *Haz cálculos y da la solución.*

– ¿Cuántos puntos en total han conseguido en el partido todos los jugadores? ¿Cuántos puntos por canastas de tres puntos ha conseguido Pablo Gasoil?

– ¿Qué jugador ha estado más acertado desde la línea de tiros libres?

Figura 5.5.- *Problema en la sección de Porcentajes dentro del apartado Pisa Fuerte.*

La siguiente sección, titulada *Regla de tres simple directa*, se estructura de una manera similar a las anteriores. Primero expone qué es una regla de tres directa para completar la idea con un ejemplo resuelto en el apartado *Paso a Paso* (Figura 5.6). A continuación, se proponen una serie de problemas contextualizados para la aplicación de esta técnica. Entre ellos, a destacar positivamente el problema 43. En el problema se introduce la imagen de unos obreros, siendo éstos de ambos sexos. Con esta actividad se consigue un trato no sexista debido a que se introduce a la mujer en oficios tradicionalmente destinados a hombres. (Figura 5.7).

La **regla de tres directa** es otro método para resolver problemas en los que se relacionan dos magnitudes directamente proporcionales.

PASO A PASO

35 Por 3 kilogramos de fruta hemos pagado 7,80 euros. ¿Cuánto habríamos pagado por 11 kilogramos?

1.º Construimos un esquema con los datos del problema: 3 kg ——— 7,80 €; 11 kg ——— x

2.º Escribimos la proporción: $\frac{3}{7{,}80} = \frac{11}{x}$

3.º Despejamos la incógnita: $x = \frac{11 \cdot 7{,}80}{3} = 28{,}60$

Habríamos pagado 28,60 €.

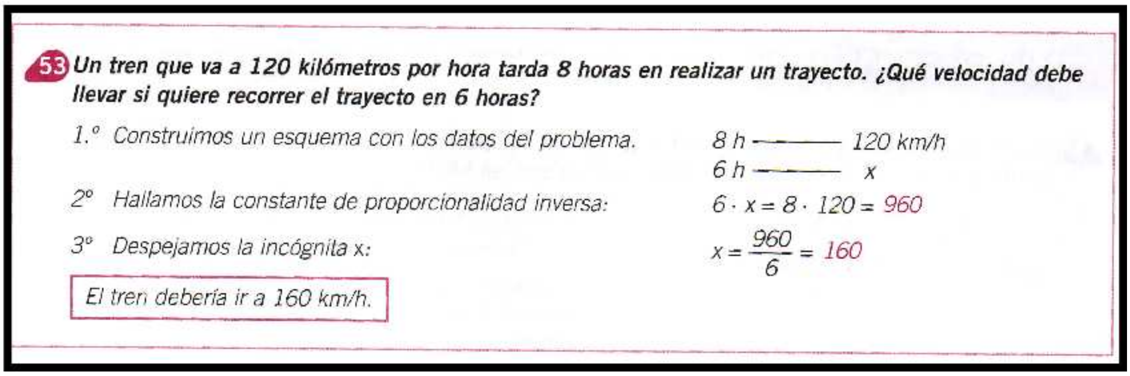
Figura 5.6.- *Regla de tres simple y problema introductorio resuelto.*

43 Una empresa de instalación de paneles solares con una plantilla de 8 trabajadores es capaz de instalar 24 paneles solares diarios. En los siete próximos días debe montar 210 placas solares. ¿Cuántos nuevos trabajadores ha de contratar?

Figura 5.7.- *Problema 43 en la sección "Regla de tres simple directa". Ausencia de sexismo.*

La sección 5, *Repartos directamente proporcionales*, se presenta con las fórmulas para la realización de este tipo de problemas, y se exponen los pasos a realizar. A continuación se propone un ejercicio contextualizado resuelto, donde se puede observar la técnica de resolución de estas situaciones. Para terminar la sección, se proponen dos ejercicios descontextualizados y cuatro con contexto.

La última sección del bloque I se titula *Magnitudes inversamente proporcionales*. Sigue la misma estructura de las anteriores; definición de cuando dos magnitudes son inversamente proporcionales, problema introductorio resuelto mediante el formato de tablas y varios ejercicios descontextualizados de entrenamiento y consolidación. A mitad de la sección se propone un problema resuelto mediante la técnica de la *regla de tres simple inversa*, aunque no la nombra explícitamente (Figura 5.8), para a continuación proponer varios problemas de aplicación de esta técnica. A diferencia de casi la mayoría de las secciones, ésta posee un apartado titulado *Un Paso Más*, donde se proponen cinco problemas-situaciones de mayor complejidad a modo de ampliación. Por último, para cerrar la sección y el bloque didáctico sobre proporcionalidad aritmética se propone una situación, en el apartado *Pisa Fuerte*, en la que tienen que aplicar lo anteriormente aprendido. El problema se realiza mediante su descomposición en diferentes partes con el objetivo de conseguir una resolución más eficaz del mismo.



53 ***Un tren que va a 120 kilómetros por hora tarda 8 horas en realizar un trayecto. ¿Qué velocidad debe llevar si quiere recorrer el trayecto en 6 horas?***

1.º Construimos un esquema con los datos del problema. $8\ h \text{ --- } 120\ km/h$; $6\ h \text{ --- } x$

2º Hallamos la constante de proporcionalidad inversa: $6 \cdot x = 8 \cdot 120 = 960$

3º Despejamos la incógnita x: $x = \frac{960}{6} = 160$

El tren debería ir a 160 km/h.

Figura 5.8.- *Aplicación de la"Regla de tres simple inversa" en magnitudes inversamente proporcionales.*

Como se comentó al principio de este apartado, además del libro de texto analizado anteriormente, para varias partes del tema se utilizó el libro de la editorial Edebé correspondiente a 2º ESO. Este libro fue utilizado para las enseñanzas de los repartos inversamente proporcionales y para la aplicación de la proporcionalidad en el cálculo del interés simple, ya que éstas no aparecían en el cuaderno de matemáticas de la editorial SM.

Todas las unidades didácticas en el libro de la editorial Edebé se presentan de manera similar. En primer lugar, en la portada del tema, se muestra una imagen asociada a un ejemplo práctico en el que se tiene que utilizar la proporcionalidad directa. En la Figura 5.9 podemos observar en la imagen a unos ciclistas, y en la parte inferior como se utiliza la noción de razón de proporcionalidad para explicar la relación de transmisión entre los platos y piñones de una bicicleta, y por tanto introducir la idea de lo que se avanza con cada pedalada. Por último, en el texto inferior, se proponen varias preguntas de investigación, con el objetivo de introducir al alumnado en la búsqueda activa de la información en Internet. En la página siguiente, se muestran inicialmente, en la parte izquierda, las competencias que se adquieren con el estudio de este tema, y en la parte derecha el contenido del tema (Figura 5.10). En la parte inferior de esta misma página se establece una sección titulada *Preparación de la unidad*, en la que se recuerdan varios elementos necesarios para el tema y se proponen diferentes actividades. (Figura 5.11). Cabe destacar que en esta sección de recuerda, se muestran nociones y propiedades que van a ser enseñadas de nuevo en el texto, por que ya no se trata de conocimientos emergentes si no de previos.

Las siguientes páginas del tema corresponden a las nociones tratadas con el libro de texto de la editorial SM, por lo que no las expondremos en esta sección. Por ello, haremos un salto hasta la página que trata los repartos en magnitudes inversamente proporcionales.


5

El desarrollo del cambio de marchas de una bicicleta es la razón de transmisión y corresponde a la distancia recorrida por cada pedalada que damos en nuestra bicicleta. Esta distancia varía según el número de dientes engranados tanto en el plato como en el piñón.

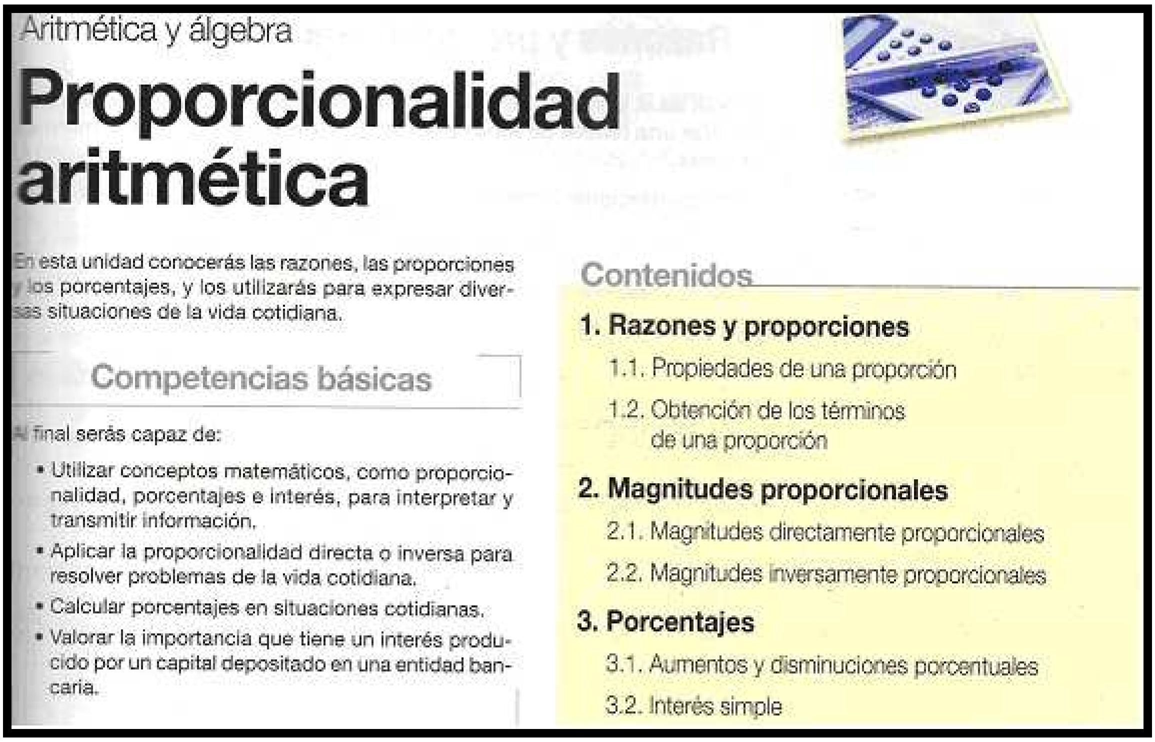
Por ejemplo, con un plato de 43 dientes y un piñón de 18 dientes, la razón de transmisión es $\frac{43}{18} = 2,38$; es decir, por cada vuelta de pedal que completa una vuelta en el plato, el piñón o la rueda trasera dan 2,38 vueltas.

Busca información en Internet sobre los desarrollos más habituales y averigua:

— ¿Cuál crees que es el desarrollo más adecuado para una subida?

— ¿Qué razón de transmisión utilizarías en una bajada fuerte?

Figura 5.9.- *Presentación del tema de proporcionalidad aritmética.*



Aritmética y álgebra

Proporcionalidad aritmética

En esta unidad conocerás las razones, las proporciones y los porcentajes, y los utilizarás para expresar diversas situaciones de la vida cotidiana.

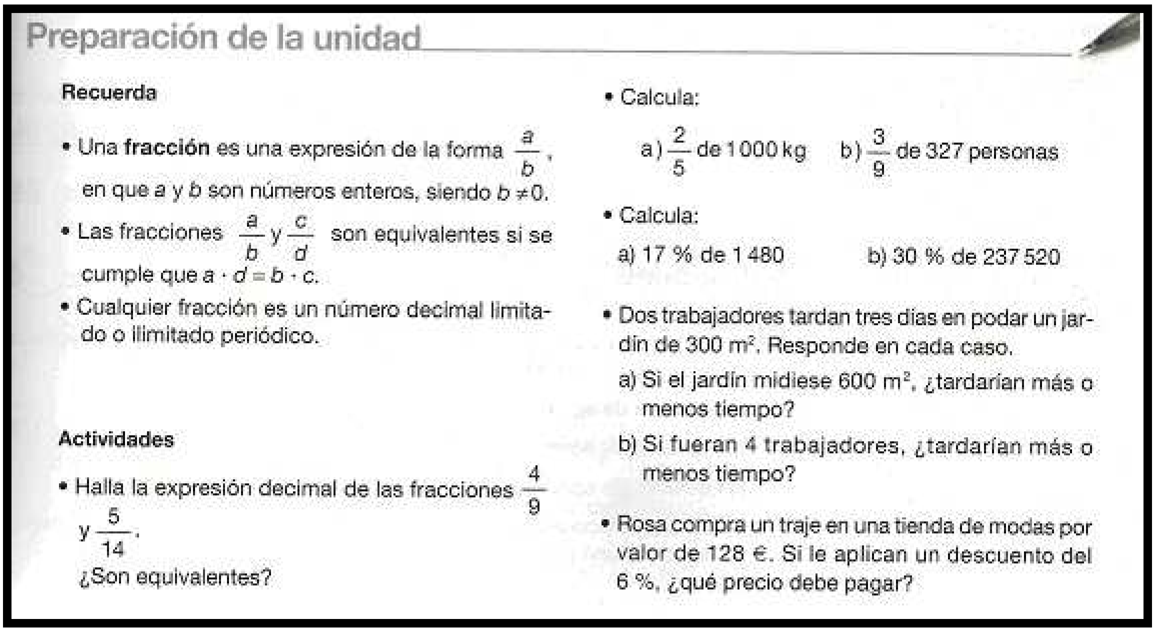
Competencias básicas

Al final serás capaz de:

- Utilizar conceptos matemáticos, como proporcionalidad, porcentajes e interés, para interpretar y transmitir información.
- Aplicar la proporcionalidad directa o inversa para resolver problemas de la vida cotidiana.
- Calcular porcentajes en situaciones cotidianas.
- Valorar la importancia que tiene un interés producido por un capital depositado en una entidad bancaria.

Contenidos

Figura 5.10.- *Competencias básicas y contenidos sobre proporcionalidad.*



Preparación de la unidad

Recuerda

- Una **fracción** es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, en que a y b son números enteros, siendo $b \neq 0$.
- Las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si se cumple que $a \cdot d = b \cdot c$.
- Cualquier fracción es un número decimal limitado o ilimitado periódico.

Actividades

- Halla la expresión decimal de las fracciones $\frac{4}{9}$ y $\frac{5}{14}$. ¿Son equivalentes?
- Calcula:
  a) $\frac{2}{5}$ de 1 000 kg b) $\frac{3}{9}$ de 327 personas
- Calcula:
  a) 17 % de 1 480 b) 30 % de 237 520
- Dos trabajadores tardan tres días en podar un jardín de 300 m². Responde en cada caso.
  a) Si el jardín midiese 600 m², ¿tardarían más o menos tiempo?
  b) Si fueran 4 trabajadores, ¿tardarían más o menos tiempo?
- Rosa compra un traje en una tienda de modas por valor de 128 €. Si le aplican un descuento del 6 %, ¿qué precio debe pagar?

Figura 5.11.- *Sección de preparación de la unidad.*

La sección dedicada a magnitudes inversamente proporcionales no fue impartida íntegramente desde este libro de texto. Únicamente de aquí se utilizó la parte destinada a la explicación de los repartos inversamente proporcionales. El libro de texto presenta esta idea mediante el ejemplo mostrado en la Figura 5.12. El problema que se propone consiste en realizar un reparto del dinero de un premio en función del tiempo empleado en una carrera por los tres primeros clasificados. Propone un método consistente en realizar una tabla para luego aplicar la fórmula para los repartos. El ejemplo no consiste únicamente en el cálculo del reparto, si no que también introduce como variable didáctica los tiempos empleados en la carrera automovilística. Al proponer esos tiempos y no otros, el alumnado debe hacer también un trabajo más tedioso de cálculo y por tanto forzarse a trabajar con elementos a priori más complicados a los que suele estar acostumbrado en la mayoría de los problemas-ejercicios.

Repartos inversamente proporcionales

En ocasiones, queremos repartir una cantidad de forma inversamente proporcional a otras cantidades. Observa el siguiente ejemplo.

ejemplo **8**

En una carrera automovilística, el primer clasificado ha tardado 1 hora, el segundo 5 minutos más que el primero y el tercero 1 minuto más que el segundo. Si el premio es de 972 €, ¿cómo debe repartirse este dinero entre los tres clasificados?

— Llamamos x, y, z a la cantidad de dinero que corresponde a cada clasificado.

Cantidad	Posición
x	1
y	2
z	3

— Los tiempos de los clasificados son: 60 minutos el primero, 65 minutos el segundo y 66 minutos el tercero.

— Como la cantidad que han de recibir será inversamente proporcional a la posición; es decir, directamente proporcional a la inversa de ésta, tendremos:

$$\frac{x}{\frac{1}{60}} = \frac{y}{\frac{1}{65}} = \frac{z}{\frac{1}{66}} =$$

$$= \frac{x+y+z}{\frac{1}{60}+\frac{1}{65}+\frac{1}{66}} = \frac{972}{\frac{27}{572}} = 20\,592$$

— Y, por lo tanto:

$$x = \frac{1}{60} \cdot 20\,592 = 343{,}2 \quad y = \frac{1}{65} \cdot 20\,592 = 316{,}8$$

$$z = \frac{1}{66} \cdot 20\,592 = 312$$

El primer clasificado debe recibir 343,2 €; el segundo clasificado, 316,8 € y el tercer clasificado, 312 €.

Figura 5.12.- *Ejemplo introductorio sobre la idea de repartos inversamente proporcionales.*

Por último, al final de este apartado propone actividades tanto de cálculo de valores faltantes en magnitudes inversamente proporcionales como de repartos inversamente proporcionales (Figura 5.13).

Actividades

20 Juana tarda 3 h en finalizar un recorrido a una velocidad constante de 60 km/h. ¿A qué velocidad debería ir para hacer el mismo recorrido en 2 horas y cuarto?

21 Tres grifos iguales llenan un depósito en 8 h. ¿Cuánto tiempo necesitarán 4 grifos del mismo tipo para llenar ese depósito?

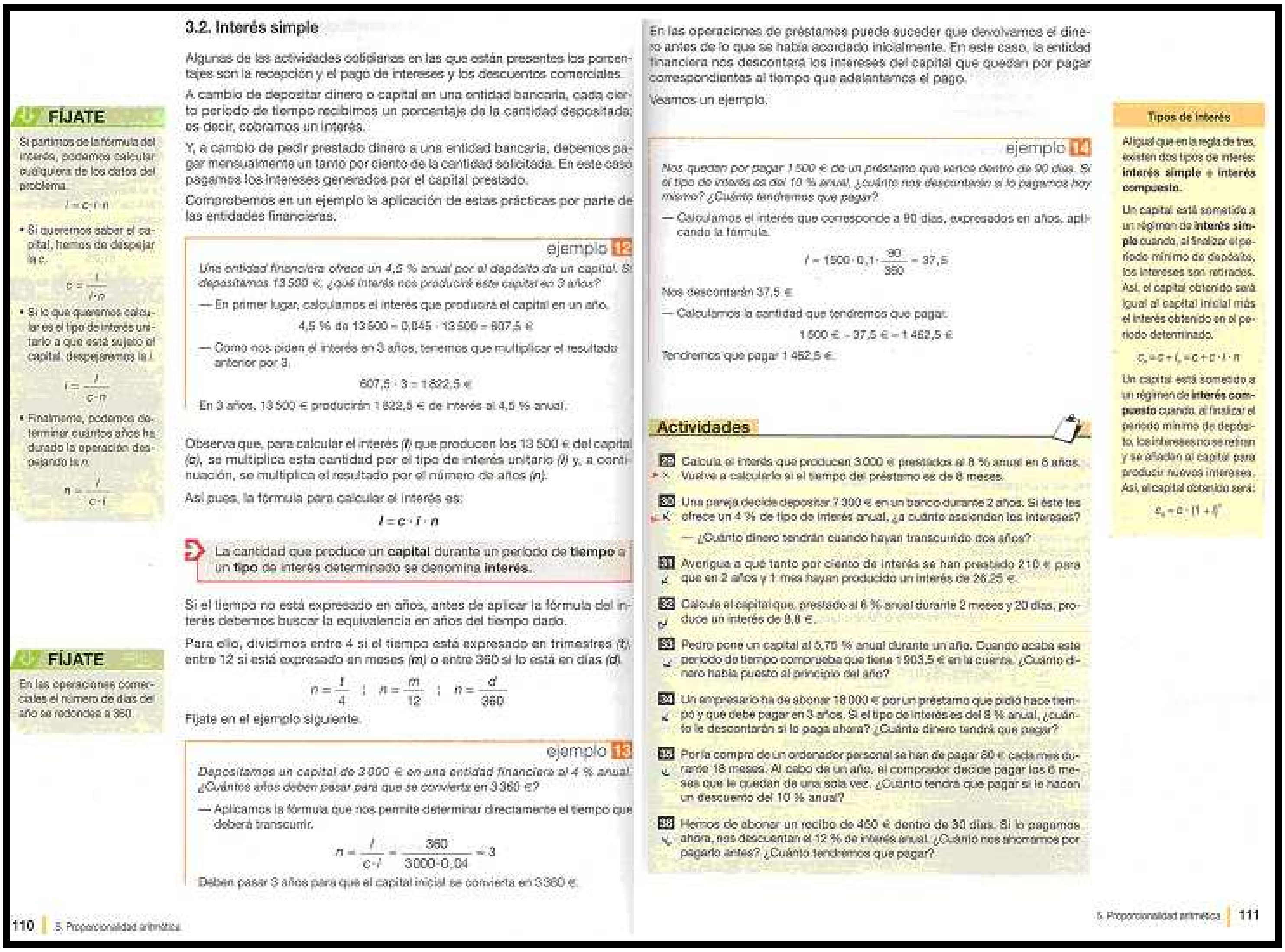
22 Un fondo común de ayuda a la Unión Europea, que asciende a 95 millones de euros, debe repartirse entre tres regiones de forma inversamente proporcional a la renta per cápita anual de cada región, que es de 0,01, 0,02 y 0,025 millones de euros.

¿Cuánto dinero debe recibir cada región?

Figura 5.13.- *Actividades correspondientes a magnitudes inversamente proporcionales y repartos.*

La siguiente sección utilizada de este libro fue la que trata el interés simple. El libro presenta la idea como una aplicación particular de los porcentajes y que es usada en la vida cotidiana por parte de la economía. En primer lugar presenta el sistema que tiene los bancos si nos prestan dinero o si les depositamos nosotros dinero. A continuación, presenta un ejemplo introductorio del tema, para luego establecer la fórmula genérica del cálculo de intereses simples.

Seguidamente muestra varios ejemplos resueltos en los que tienen en cuenta si el dinero es prestado, si es depositado,… para terminar con varias actividades relacionadas. En las partes laterales de las páginas, el libro introduce recuadros titulados *Fíjate*, en los cuales trata de una manera más fina el aparataje matemático utilizado para estos casos y las características del sistema comercial. Por último, en la parte lateral derecha, presenta los diferentes tipos de interés que existen a modo de diferenciación con el estudiado (Figura 5.14).



3.2. Interés simple

Algunas de las actividades cotidianas en las que están presentes los porcentajes son la recepción y el pago de intereses y los descuentos comerciales.

A cambio de depositar dinero o capital en una entidad bancaria, cada cierto periodo de tiempo recibimos un porcentaje de la cantidad depositada; es decir, cobramos un interés.

Y, a cambio de pedir prestado dinero a una entidad bancaria, debemos pagar mensualmente un tanto por ciento de la cantidad solicitada. En este caso pagamos los intereses generados por el capital prestado.

Comprobemos en un ejemplo la aplicación de estas prácticas por parte de las entidades financieras.

FÍJATE

Si partimos de la fórmula del interés, podemos calcular cualquiera de los datos del problema.

$$I = c \cdot i \cdot n$$

- Si queremos saber el capital, hemos de despejar la *c*.

$$c = \frac{I}{i \cdot n}$$

- Si lo que queremos calcular es el tipo de interés unitario a que está sujeto el capital, despejaremos la *i*.

$$i = \frac{I}{c \cdot n}$$

- Finalmente, podemos determinar cuántos años ha durado la operación despejando la *n*.

$$n = \frac{I}{c \cdot i}$$

ejemplo 12

Una entidad financiera ofrece un 4,5 % anual por el depósito de un capital. Si depositamos 13 500 €, ¿qué interés nos producirá este capital en 3 años?

— En primer lugar, calculamos el interés que producirá el capital en un año.

4,5 % de 13 500 = 0,045 · 13 500 = 607,5 €

— Como nos piden el interés en 3 años, tenemos que multiplicar el resultado anterior por 3.

607,5 · 3 = 1 822,5 €

En 3 años, 13 500 € producirán 1 822,5 € de interés al 4,5 % anual.

Observa que, para calcular el interés (*I*) que producen los 13 500 € del capital (*c*), se multiplica esta cantidad por el tipo de interés unitario (*i*) y, a continuación, se multiplica el resultado por el número de años (*n*).

Así pues, la fórmula para calcular el interés es:

$$I = c \cdot i \cdot n$$

La cantidad que produce un **capital** durante un periodo de **tiempo** a un **tipo** de interés determinado se denomina **interés**.

Si el tiempo no está expresado en años, antes de aplicar la fórmula del interés debemos buscar la equivalencia en años del tiempo dado.

Para ello, dividimos entre 4 si el tiempo está expresado en trimestres (*t*), entre 12 si está expresado en meses (*m*) o entre 360 si lo está en días (*d*).

$$n = \frac{t}{4} \quad ; \quad n = \frac{m}{12} \quad ; \quad n = \frac{d}{360}$$

Fíjate en el ejemplo siguiente.

FÍJATE

En las operaciones comerciales el número de días del año se redondea a 360.

ejemplo 13

Depositamos un capital de 3 000 € en una entidad financiera al 4 % anual. ¿Cuántos años deben pasar para que se convierta en 3 360 €?

— Aplicamos la fórmula que nos permite determinar directamente el tiempo que deberá transcurrir.

$$n = \frac{I}{c \cdot i} = \frac{360}{3000 \cdot 0{,}04} = 3$$

Deben pasar 3 años para que el capital inicial se convierta en 3 360 €.

110 | 5. Proporcionalidad aritmética

En las operaciones de préstamos puede suceder que devolvamos el dinero antes de lo que se había acordado inicialmente. En este caso, la entidad financiera nos descontará los intereses del capital que quedan por pagar correspondientes al tiempo que adelantamos el pago.

Veamos un ejemplo.

ejemplo 14

Nos quedan por pagar 1 500 € de un préstamo que vence dentro de 90 días. Si el tipo de interés es del 10 % anual, ¿cuánto nos descontarán si lo pagamos hoy mismo? ¿Cuánto tendremos que pagar?

— Calculamos el interés que corresponde a 90 días, expresados en años, aplicando la fórmula.

$$I = 1500 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{90}{360} = 37{,}5$$

Nos descontarán 37,5 €.

— Calculamos la cantidad que tendremos que pagar.

1 500 € − 37,5 € = 1 462,5 €

Tendremos que pagar 1 462,5 €.

Actividades

29 Calcula el interés que producen 3 000 € prestados al 8 % anual en 6 años. Vuelve a calcularlo si el tiempo del préstamo es de 8 meses.

30 Una pareja decide depositar 7 300 € en un banco durante 2 años. Si éste les ofrece un 4 % de tipo de interés anual, ¿a cuánto ascienden los intereses?

— ¿Cuánto dinero tendrán cuando hayan transcurrido dos años?

31 Averigua a qué tanto por ciento de interés se han prestado 210 € para que en 2 años y 1 mes hayan producido un interés de 26,25 €.

32 Calcula el capital que, prestado al 6 % anual durante 2 meses y 20 días, produce un interés de 8,8 €.

33 Pedro pone un capital al 5,75 % anual durante un año. Cuando acaba este periodo de tiempo comprueba que tiene 1 903,5 € en la cuenta. ¿Cuánto dinero había puesto al principio del año?

34 Un empresario ha de abonar 18 000 € por un préstamo que pidió hace tiempo y que debe pagar en 3 años. Si el tipo de interés es del 8 % anual, ¿cuánto le descontarán si lo paga ahora? ¿Cuánto dinero tendrá que pagar?

35 Por la compra de un ordenador personal se han de pagar 80 € cada mes durante 18 meses. Al cabo de un año, el comprador decide pagar los 6 meses que le quedan de una sola vez. ¿Cuánto tendrá que pagar si le hacen un descuento del 10 % anual?

36 Hemos de abonar un recibo de 450 € dentro de 30 días. Si lo pagamos ahora, nos descuentan el 12 % de interés anual. ¿Cuánto nos ahorramos por pagarlo antes? ¿Cuánto tendremos que pagar?

Tipos de interés

Al igual que en la regla de tres, existen dos tipos de interés: **interés simple** e **interés compuesto**.

Un capital está sometido a un régimen de **interés simple** cuando, al finalizar el periodo mínimo de depósito, los intereses son retirados. Así, el capital obtenido será igual al capital inicial más el interés obtenido en el periodo determinado.

$$c_n = c + I_n = c + c \cdot i \cdot n$$

Un capital está sometido a un régimen de **interés compuesto** cuando, al finalizar el periodo mínimo de depósito, los intereses no se retiran y se añaden al capital para producir nuevos intereses. Así, el capital obtenido será:

$$c_n = c \cdot (1 + i)^n$$

5. Proporcionalidad aritmética | 111

Figura 5.14.- *Páginas correspondientes a la enseñanza del interés simple.*

A continuación el libro propone una página que trata estrategias de resolución de problemas con varias actividades en relación a ello, una página final de teoría con un resumen de lo estudiado en el tema y seis páginas destinadas a los ejercicios y problemas. Por último, propone situaciones en las que tienes que demostrar tu ingenio mediante diferentes problemas curiosos, una sección de evaluación de los contenidos mediante ejercicios y problemas, y cierra con un apartado de historia matemática.

5.3.- Otros aspectos relevantes

Durante el periodo de impartición de las clases, se preparó un esquema vacío que tenían que completar al final de cada sesión. El objetivo de este resumen consistía en que al final de cada clase, de manera común, se rellenase el esquema con lo visto ese día para así consolidar las diferentes ideas y poder revisarlas de una manera más ordenada a la hora de su estudio autónomo. El esquema que se utilizó para esta tarea es el que se puede ver en la Figura 5.15. Aclarar que el esquema que se les proporcionaba a ello estaba sin rellenar y que aproximadamente debería haber quedado como el que se presenta.

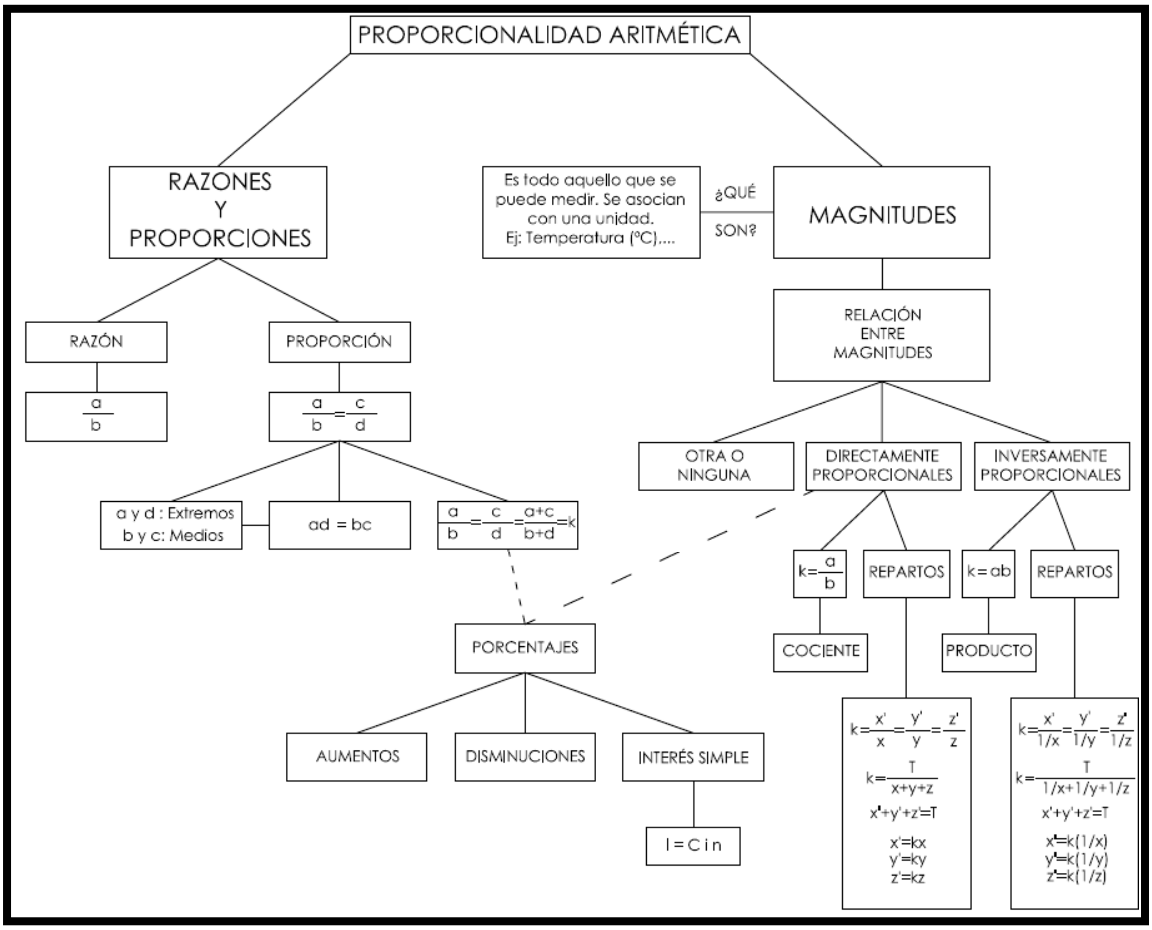


Figura 5.15.- *Esquema resumen del tema de proporcionalidad aritmética.*

Capítulo 6

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En la presente sección se van a detallar las dificultades y errores que se prevé esperables por parte del alumnado a la hora de enfrentarse al tema de proporcionalidad aritmética. Posteriormente se realizará un estudio sobre el posible origen de estas dificultades y errores.

6.1.- Dificultades

Las dificultades que se espera que encuentren los alumnos y alumnas en relación a la noción de proporcionalidad directa son las siguientes:

a) Establecer los términos de una proporción, es decir, concretar cuáles son los extremos y cuáles son los medios en una proporción.

b) Aplicar la propiedad fundamental de las proporciones si la proporción está dada en forma de igualdad y alguno de los denominadores es 1.

c) Si dos magnitudes están dadas en forma de tablas, determinar si éstas tienen relación proporcional directa, inversa, o no tienen relación de proporcionalidad. En relación con esta dificultad, el cálculo de la constante de proporcionalidad puede ser complicado para algunos.

d) En el cálculo de porcentajes, si el ejercicio consiste en calcular que porcentaje se aplica a una cantidad dada para obtener otra cantidad también dada, no encontrar relación entre si este porcentaje tiene que ser mayor o menor que el 100%. La misma dificultad debe ser observaba cuando se proporcionen como datos el porcentaje y la cantidad resultante del porcentaje. No interpretar si la cantidad que deben calcular tiene que ser mayor o menor que la dada en función del porcentaje aplicado.

e) Establecer cuando dos magnitudes están en relación de proporcionalidad directa o inversa.

f) Paso de factores dividiendo (multiplicando) al otro lado de la igualdad.

g) Comprobación de si el reparto, directo o inverso, suma la cantidad total y si tiene relación con la magnitud que marca el reparto.

h) En problemas de intereses, transformación de la tasa de interés o del tiempo de depósito a la misma unidad, si están dados en diferente. Por ejemplo, si la tasa de interés se refiere a un porcentaje anual y el tiempo por el que se deposita el dinero está en meses.

i) En aumentos y disminuciones porcentuales encadenados, no establecer claramente si la cantidad que debe salir debe de ser mayor o menor que la inicial. Por ejemplo, si se realiza un tanto por ciento de aumento y luego al resultado se le aplicaba una disminución con ese mismo porcentaje, la gran mayoría de los alumnos se espera que piensen que tiene que salir la misma cantidad que la inicial.

6.2.- Errores y su posible origen

Los errores que son previsibles que comentan los alumnos en relación a la noción de proporcionalidad directa pueden ser los siguientes:

a) Aplicar el cálculo de la constante de proporcionalidad directa a magnitudes proporcionalmente inversas y viceversa. Un posible origen podría ser que no relacionan correctamente las magnitudes implicadas.

b) Realizar un reparto directo a uno inverso y viceversa. Al igual que el anterior error, podría entenderse a no relacionar de manera correcta dos magnitudes.

c) Establecer relaciones de proporcionalidad en modelos no lineales. Un posible origen podría ser la indicación "cuanto más, más" y "cuanto menos, menos" para proporcionalidad directa y "cuanto más, menos" y "cuanto menos, más" para proporcionalidad inversa. Al fijarse únicamente en este teorema en acto para ellos, se espera que den valores y si se cumple la condición establecer erróneamente un tipo de proporcionalidad.

d) Pensar que debe salir la misma cantidad que la inicial si realizamos un aumento porcentual a dicha cantidad y luego al resultado la aplicamos una disminución porcentual con el mismo valor de porcentaje que el aumento. La posible explicación se basa que creen que es un modelo adivito en vez de un modelo lineal, por lo que creen que si suman una cantidad para luego restar esa misma cantidad, debe salir lo inicial.

e) Pensar que el coeficiente del denominador que hay en una razón que tiene denominador 1 y que por tanto no se explicita es 0. Su posible origen podría pensar que el cero sigue siendo el elemento neutro para la división, en vez del 1, y que por tanto no debe afectar.

Capítulo 7
El proceso de estudio

En esta sección se va a proceder a detallar los contenidos mostrados durante las nueve clases programadas para el tema de proporcionalidad aritmética, más la sesión última de evaluación.

7.1.- Distribución del tiempo de la clase

En primer lugar hay que decir que las sesiones en del centro están programadas para tener una duración de 55 minutos. Por ello, en la Tabla 7.1. (a, b, c, d, e, f, g, h, i y j) se detalla aproximadamente el aprovechamiento de cada una de las nueves sesiones de contenidos más la sesión de examen realizada el último día.

Tabla 7.1.a.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 1.*

SESIÓN 1 - MIÉRCOLES 18 DE ABRIL DE 2012			
TIPO	**TIEMPO**	**RESPONSABLE**	**TIPO DE DOCENCIA**
Explicación forma evaluar	5 minutos	Profesor	Magistral
Explicación contenidos tema y objetivos	5 minutos	Profesor	Magistral
Teoría: Noción de Razón y Proporción	25 minutos	Compartida	Dialógica
Ejercicios: Páginas 2 y 3 (Cuadernillo)	15 minutos	Alumno	Constructivista
Teoría: Resumen en esquema del tema	5 minutos	Compartida	Dialógica

Tabla 7.1.b.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 2. (cont.)*

SESIÓN 2 - VIERNES 20 DE ABRIL DE 2012			
TIPO	**TIEMPO**	**RESPONSABLE**	**TIPO DE DOCENCIA**
Corrección Tarea	15 minutos	Compartida	Dialógica
Teoría: Magnitudes. Magnitudes dependientes. Magnitudes directa e inversamente proporcionales.	20 minutos	Profesor	Magistral
Ejercicios: Páginas 4, 5, 14 y 15 (Cuadernillo)	10 minutos	Alumno	Constructivista
Control 1: Ejercicio relación de magnitudes de forma directa, inversa o sin relación. Ejercicio cálculo de tablas entre magnitudes.	10 minutos	Alumno	Constructivista

Tabla 7.1.c.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 3. (cont.)*

SESIÓN 3 - LUNES 23 DE ABRIL DE 2012			
TIPO	**TIEMPO**	**RESPONSABLE**	**TIPO DE DOCENCIA**
Corrección Control 1	10 minutos	Profesor	Dialógica
Corrección Tarea	45 minutos	Alumno	Dialógica

Tabla 7.1.d.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 4. (cont.)*

SESIÓN 4 - MARTES 24 DE ABRIL DE 2012			
TIPO	**TIEMPO**	**RESPONSABLE**	**TIPO DE DOCENCIA**
Corrección Tarea	10 minutos	Compartida	Dialógica
Teoría: Repartos directa e inversamente proporcionales	30 minutos	Profesor	Magistral
Ejercicios: Páginas 12 y 13 (Cuadernillo). Pág 107, nº 20, 21 y 22 (Libro de texto)	10 minutos	Alumno	Constructivista
Teoría: Resumen en esquema del tema	5 minutos	Compartida	Dialógica

Tabla 7.1.e.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 5. (cont.)*

SESIÓN 5 - MIÉRCOLES 25 DE ABRIL DE 2012			
TIPO	**TIEMPO**	**RESPONSABLE**	**TIPO DE DOCENCIA**
Explicación repartos directos en inversos*	20 minutos	Compartida	Dialógica
Control 2: Problema reparto directamente proporcional contextualizado. Ejercicio reparto inversamente proporcional descontextualizado.	15 minutos	Alumno	Constructivista
Teoría: Porcentajes. Aumentos y disminuciones.	20 minutos	Profesor	Magistral

**: Debido a dudas de los estudiantes tras trabajo autónomo en casa.*

Tabla 7.1.f.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 6 (cont.)*

SESIÓN 6 - VIERNES 27 DE ABRIL DE 2012			
TIPO	**TIEMPO**	**RESPONSABLE**	**TIPO DE DOCENCIA**
Teoría: Interés Simple	15 minutos	Profesor	Magistral
Ejercicios: Páginas 6 y 7 (Cuadernillo). Página 110, nº 12 y 13 y página 111, nº 14 (Libro de texto).	20 minutos	Alumno	Constructivista
Corrección Tarea	20 minutos	Compartida	Dialógica

Tabla 7.1.g.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 7. (cont.)*

SESIÓN 7 - MIÉRCOLES 02 DE MAYO DE 2012			
TIPO	**TIEMPO**	**RESPONSABLE**	**TIPO DE DOCENCIA**
Explicación interés simple*	10 minutos	Compartida	Dialógica
Corrección Tarea	35 minutos	Compartida	Dialógica
Control 3: Problema porcentajes (aumento y dismunición consecutiva). Problema interés simple.	10 minutos	Alumno	Constructivista

**: Debido a dudas de los estudiantes tras trabajo autónomo en casa.*

Tabla 7.1.h.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 8. (cont.)*

SESIÓN 8 - VIERNES 04 DE MAYO DE 2012			
TIPO	**TIEMPO**	**RESPONSABLE**	**TIPO DE DOCENCIA**
Corrección Control 2 y Control 3	15 minutos	Profesor	Dialógica
Tarea diseño examen y corrección compañero	40 minutos	Alumno	Constructivista

Tabla 7.1.i.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 9. (cont.)*

SESIÓN 9 - LUNES 07 DE MAYO DE 2012			
TIPO	**TIEMPO**	**RESPONSABLE**	**TIPO DE DOCENCIA**
Corrección Tarea	30 minutos	Compartida	Dialógica
Dudas sobre el examen.	25 minutos	Alumno	Dialógica

Tabla 7.1.j.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 10. (cont.)*

SESIÓN 10 - MARTES 08 DE MAYO DE 2012 - SESIÓN DE EVALUACIÓN			
TIPO	**TIEMPO**	**RESPONSABLE**	**TIPO DE DOCENCIA**
Examen	55 minutos	Alumno	Constructivista

7.2.- Actividades adicionales planificadas

Con el objetivo de conocer mejor el proceso de aprendizaje de los alumnos y detectar posibles errores recurrentes, de forma adicional a las actividades del libro de texto, se realizaron tres controles cortos, 10 minutos aproximadamente (cada dos – tres días de clase). A continuación se presentan los enunciados de los tres controles planificados.

CONTROL 1: FECHA: 20 DE ABRIL DE 2012

1.- Indica, entre los siguientes pares de magnitudes, los que son directamente proporcionales con una "D", los que son inversamente proporcionales con una "I" y los que no guardan relación de proporcionalidad con una "N".

a) La edad de una persona y su peso.

b) La cantidad de lluvia caída en un año y el crecimiento de una planta.

c) La cantidad de litros de agua que arroja una fuente y el tiempo transcurrido.

d) El número de hojas que contiene un paquete de folios y su peso.

e) La velocidad de un coche y el tiempo que dura su viaje.

f) La altura de una persona y el número de calzado que usa.

g) El precio del kilo de naranjas y el número de kilos que me dan por 10 euros.

2.- Completa las siguientes tablas e indica, en cada caso, si los pares de valores son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o no guardan relación de proporcionalidad. En los casos posibles indica el valor de k (constante de proporcionalidad).

A	3	5	7	8		12
B	9	15	21		30	

M	3	4	9	15		25
N	2	3	8		20	

K	2	3	4	5		10
L	30	20	15		10	

A y B son: *K = _______*

a) Directamente proporcionales

b) Inversamente proporcionales

c) No tienen relación

M y N son: *K = _______*

a) Directamente proporcionales

b) Inversamente proporcionales

c) No tienen relación

K y L son: *K = _______*

a) Directamente proporcionales

b) Inversamente proporcionales

c) No tienen relación

CONTROL 2: FECHA: 25 DE ABRIL DE 2012

1.- Reparte de forma inversamente proporcional 55, en función de 5, 10 y 15.

2.- Un padre reparte 630 € proporcionalmente a la edad de sus tres hijos. Estos tienen 10, 15 y 20 años. Halla la cantidad que le corresponde a cada uno.

CONTROL 3: FECHA: 02 DE MAYO DE 2012

1.- De un préstamo nos quedan por pagar 3000 €, y vence dentro de 60 días. Si el tipo de interés es del 15% anual, ¿cuánto nos descontarán si lo pagamos hoy mismo? ¿Cuánto tendremos que pagar?

2.- El precio de un CD de música es de 30 €. Durante el año el precio aumenta en un 10%, pero cuando llega el periodo de rebajas, disminuye este precio en un 10%.

a) ¿Cuál es el precio del CD justo antes de empezar las rebajas?

b) ¿Cuál es el precio del CD en las rebajas?

c) ¿Observas algo raro?

Otra actividad que se planteó durante las clases, cuyo fin era motivarles y afianzar los contenidos del tema, consistía en que cada alumno realizase un examen tipo de cuatro preguntas, que luego debía intercambiarse con un compañero. Esta actividad pretendía que los estudiantes fuesen capaces de diseñar ejercicios y problemas tipo sobre el tema de proporcionalidad aritmética. Debido a ello, para poder plantearlos de forma correcta, y lo que es más importante, para ser capaces de detectar errores y conceptos mal adquiridos en la corrección del examen que les proporcionaba otro compañero, los alumnos tendrían la obligación de repasar las nociones presentadas en el tema.

7.3.- La Tarea: actividad autónoma del alumno prevista

La Tabla 7.2. (a, b, c, d, e, f, g, h y i) es una estimación de la actividad autónoma que se prevé que realizará el estudiante tras cada sesión, para reforzar y consolidar las nociones vistas en el tema de proporcionalidad aritmética.

Tabla 7.2.a.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 1.*

TAREA SESIÓN 1 - MIÉRCOLES 18 DE ABRIL DE 2012		
TIPO	TIEMPO	RELACIÓN CON EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE
Ejercicios y problemas	45 minutos	Aplicación
Estudio del tema	15 minutos	Refuerzo

Tabla 7.2.b.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 2. (cont.)*

TAREA SESIÓN 2 - VIERNES 20 DE ABRIL DE 2012		
TIPO	TIEMPO	RELACIÓN CON EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE
Ejercicios y problemas	90 minutos	Aplicación
Estudio del tema	30 minutos	Refuerzo

Tabla 7.2.c.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 3. (cont.)*

TAREA SESIÓN 3 - LUNES 23 DE ABRIL DE 2012		
TIPO	TIEMPO	RELACIÓN CON EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE
Ejercicios y problemas	45 minutos	Aplicación
Estudio del tema	15 minutos	Refuerzo

Tabla 7.2.d.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 4. (cont.)*

TAREA SESIÓN 4 - MARTES 24 DE ABRIL DE 2012		
TIPO	TIEMPO	RELACIÓN CON EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE
Ejercicios y problemas	45 minutos	Aplicación
Estudio del tema	15 minutos	Refuerzo

Tabla 7.2.e.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 5. (cont.)*

TAREA SESIÓN 5 - MIÉRCOLES 25 DE ABRIL DE 2012		
TIPO	**TIEMPO**	**RELACIÓN CON EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE**
Ejercicios y problemas	45 minutos	Aplicación
Situación: Diseño de examen	60 minutos	Refuerzo y Preparación de actividad futura
Estudio del tema	15 minutos	Refuerzo

Tabla 7.2.f.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 6. (cont.)*

TAREA SESIÓN 6 - VIERNES 27 DE ABRIL DE 2012		
TIPO	**TIEMPO**	**RELACIÓN CON EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE**
Ejercicios y problemas	120 minutos	Aplicación
Estudio del tema	30 minutos	Refuerzo

Tabla 7.2.g.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 7. (cont.)*

TAREA SESIÓN 7 - MIÉRCOLES 02 DE MAYO DE 2012		
TIPO	**TIEMPO**	**RELACIÓN CON EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE**
Ejercicios y problemas	45 minutos	Aplicación
Estudio del tema	15 minutos	Refuerzo

Tabla 7.2.h.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 8. (cont.)*

TAREA SESIÓN 8 - VIERNES 04 DE MAYO DE 2012		
TIPO	**TIEMPO**	**RELACIÓN CON EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE**
Ejercicios y problemas	30 minutos	Aplicación
Estudio del tema	30 minutos	Refuerzo

Tabla 7.2.i.- *Distribución del tiempo en clase. Sesión 9. (cont.)*

TAREA SESIÓN 9 - LUNES 07 DE MAYO DE 2012		
TIPO	**TIEMPO**	**RELACIÓN CON EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE**
Estudio del tema	60 minutos	Aplicación
Situación: Preparación examen	30 minutos	Refuerzo y Preparación de actividad futura

Capítulo 8
Experimentación

En las secciones 5, 6 y 7 del presente trabajo se ha analizado la unidad didáctica de un libro de texto que posteriormente se va a impartir durante las sesiones programadas, se han establecido las posibles dificultades y errores previsibles a la hora de estudiar el tema y por último se ha mostrado el proceso de estudio diseñado para las diez sesiones de las que se dispuso durante la realización del Practicum II.

Partiendo de todo ello, en esta sección en primer lugar se describe el método utilizado para analizar la experimentación en el centro. Posteriormente se contextualiza el tipo de alumnado presente en el aula y se analiza la experimentación realizada. Se muestra el cuestionario propuesto para la evaluación del tema de proporcionalidad aritmética para 2º ESO y se realiza una discusión en la que se comparan los comportamientos esperados y los resultados obtenidos en dicha experimentación.

8.1.- Método

La evolución de una teoría en didáctica de las matemáticas puede determinarse por el contraste entre un análisis *a priori* y un análisis *a posteriori*. La teoría busca validar las hipótesis que formula (*a priori*). Los hechos observados permiten (*a posteriori*) validar o refutar, total o parcialmente, las hipótesis enunciadas.

La *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) permite abordar el contraste experimental necesario, que permita determinar condiciones de *reproducibilidad* de situaciones didácticas. Aquí, las *variables didácticas* actúan de "contraste o reactivo" que permiten de manera controlada provocar en los sujetos modificaciones en sus estrategias de acción para adaptarlas al medio.

El estudio de la adecuación de las variables didácticas para determinar cambios en las estrategias de acción representa un instrumento de validación interna de las conclusiones que puedan extraerse de una observación concreta. En estas condiciones, se puede definir una situación *reproducible*; es decir, en condiciones similares, con un control del medio, la construcción del conocimiento pretendido será la misma.

La cuestión de la reproducibilidad de las situaciones incide sobre la fiabilidad de las observaciones y, sobre todo, sobre su validez. La fiabilidad presupone una estabilidad en el funcionamiento del sistema didáctico; el contraste repetido entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* permite hacer evolucionar las condiciones del medio (incluidas las intervenciones del profesor) que garanticen la construcción del saber pretendido, de tal manera que la situación devenga reproducible. Es entonces cuando su *validez* puede ser aceptada, puesto que la situación es exitosa y aplicable de manera estable.

En este trabajo, la parte I "Proporcionalidad aritmética en el currículo vigente y en los libros de texto" constituye el estudio previo de la dimensión de enseñanza, desde una perspectiva eminentemente institucional; a saber:

1. El contenido matemático en el currículo vigente, incluidas las orientaciones y criterios de evaluación.
2. El desarrollo de estas directrices oficiales en los libros de texto escolares.

Este estudio precede al análisis *a priori* realizado en los capítulos 5, 6 y 7, donde se abordan las dimensiones:

– *Epistemológica*: las matemáticas presentes en la unidad didáctica objeto de estudio.
– *Cognitiva*: dificultades y errores de los estudiantes en el aprendizaje de la unidad didáctica.
– *De enseñanza*: descripción del proceso de estudio implementado.

En el capítulo 8, este análisis *a priori* es contrastado con los resultados de la experimentación, permitiendo una valoración de los mismos basada en las "expectativas previas" (*discusión de los resultados*), que supone la fase última del método de la ingeniería didáctica.

8.2.- Muestra y diseño de la experimentación

La muestra está constituida por 23 alumnos de 2º ESO. La clase está formada aproximadamente por un 70% de chicos y un 30% de chicas. Es un grupo homogéneo en relación a su condición sociocultural, perteneciendo la mayoría a una clase media-baja. El alumnado en su mayoría es extranjero con un porcentaje de inmigración aproximado del 70%, siendo el origen predominante el sudamericano. El aula consta de un 30% de repetidores con la edad máxima permitida para la etapa, 16 años, orientados a programas de formación profesional que presenta el centro, por lo que la muestra evaluable corresponde a 17 alumnos. Este hecho dificultaba el normal transcurso de las clases debido al poco interés que presentaban por la asignatura, ya que la consideraban poco interesante y útil para su futuro profesional y académico al estar ya mucho de ellos orientados al aprendizaje de un oficio.

El objetivo de la experimentación consiste en la observación de las principales características en la resolución de problemas de proporcionalidad aritmética. Para ello, tal y como hemos comentado en las secciones anteriores, mayoritariamente se trabajan ejercicios y problemas del cuaderno de matemáticas para 2º ESO de la editorial SM, y como apoyo en varios contenidos del temario se utiliza el libro de la editorial EDEBÉ también correspondiente a 2º ESO. No obstante, para un mejor control son realizados cada dos - tres sesiones aproximadamente, controles de 10 minutos de duración (ver sección 7.2) cuyo objetivo era analizar los procesos de estudio - aprendizaje de los alumnos y detectar y solventar de manera prematura posibles errores y dificultades en la adquisición de las nociones.

8.3.- El cuestionario

El cuestionario para al estudio de la resolución de problemas de proporcionalidad aritmética por estudiantes de 2º ESO, se diseñó bajo las condiciones del departamento de matemáticas y revisado por el tutor del centro. Los criterios para los que fue adaptado el cuestionario consistían principalmente en que debía contener dos preguntas de teoría a base de definiciones y obligatoriamente un mínimo de 4 puntos de problemas. De esta manera, la prueba consensuada que se propuso evaluaba dos definiciones cortas, un test con cuestiones teórico – prácticas, tres ejercicios y tres problemas. A continuación se muestra la versión a la que se enfrentaron los estudiantes de la muestra anteriormente descrita.

Definiciones (1.5 puntos)

1.- Magnitudes inversamente proporcionales **(0.75 puntos)**

2.- Proporción **(0.75 puntos)**

Test (2 puntos)

3.- Indica Verdadero (V) o Falso (F):

☐ 3.1.) $\frac{17}{8} = \frac{23}{15}$ **(0.5 puntos)**

☐ 3.2.) Las magnitudes "x" e "y" corresponden a magnitudes directamente proporcionales. **(0.5 puntos).**

x	1	2	4	5	8	10
y	5	2,5	1,25	1	0,625	0,5

4.- Elige la opción correcta (sólo una respuesta es correcta).

☐ 4.1.) El interés que se produce al depositar 5000 € de capital en el banco durante 4 años al 3,5% anual es: **(0.5 puntos)**

a) 175 € **b) 7000 €** **c) 700 €** **d) Todas son correctas.**

☐ 4.2) El reparto inversamente proporcional de 500 cromos, en función del tiempo empleado en una carrera entre dos alumnas/os de clase es: **(0.5 puntos)**

a) 250 cromos cada uno si llegaron a la vez y ambos tardaron 2 minutos.
b) 250 cromos cada uno si llegaron a la vez y ambos tardaron 3 minutos.
c) 250 cromos cada uno si llegaron a la vez y ambos tardaron 4 minutos.
d) Todas las respuestas anteriores son correctas.

Ejercicios (2.5 puntos)

5.- Calcula el valor de x para que formen proporción: **(0.5 puntos)**

a) 27, 15, x+1, 5

6.- Reparte 420 en proporción directa a 3, 5 y 7. **(1 punto)**

7.- Calcula un aumento porcentual del 15% a 40, y posteriormente disminuye en un 15% el resultado. ¿Qué obtienes? Razona el resultado obtenido. **(1 punto)**

Problemas (4 puntos)

8.- Aldahir va al banco con la intención de depositar 100 euros en una cuenta. En el banco le hacen dos ofertas:

a) Un interés del 8% anual, pero el banco se queda con el 1% del total (capital e intereses) por comisión de mantenimiento.

b) Un interés del 9% anual, pero el banco se queda con 1,6 euros al año por comisión de mantenimiento.

¿Con qué oferta debe quedarse si quiere dejar el dinero en depósito durante 5 años? **(1.5 puntos)**

9.- Heyssen lleva a revelar las fotos de la última excursión de 2ºB a una máquina de revelado digital, donde le cobran 20 céntimos de euro por cada foto.

a) ¿Cuántos euros le costará revelar 12 fotos?

b) Si un día lleva 53 fotos y otro 231, ¿cuánto le cobrarán cada día? ¿y en total? ¿Nos cobrarían lo mismo que si llevásemos las 284 fotos en un mismo día?

c) Si la factura ha sido de 6,20 euros, ¿cuántas fotos llevaba en la cámara?

(1.75 puntos)

10.- Isidro tenía una duda sobre el examen de matemáticas de vuestro amigo Alex y ha llamado a María. Si el establecimiento de llamada es de 15 céntimos y tras hablar 15 minutos le han cobrado 90 céntimos en total, completa la siguiente tabla. **(0.75 puntos)**

Minutos de conversación (min)		10	15		23
Precio final (€)	0,40			1,15	

8.4.- Cuestiones y comportamientos esperados

La presente sección tiene como objetivo establecer los comportamientos esperados por parte de los estudiantes a las cuestiones que se les plantean, asumiendo como lógico el hecho de que algunos alumnos puedan cometer errores y tener dificultades a la hora de afrontar las diferentes actividades del cuestionario. Para realizar este análisis iremos describiendo cada actividad y mostrando nuestras hipótesis de partida.

La primera actividad que se propone (3.1.) justo después del apartado de definiciones consiste en determinar si la igualdad que se propone es verdadera o falsa. Para ello es esperado que utilicen la propiedad fundamental de las proporciones, en la que el producto de medios debe ser igual al producto de extremos y determinar de esa manera si es verdadera o falsa la proporción. Se espera que la gran mayoría del alumnado responda correctamente a esta cuestión ya que es un conocimiento adquirido en cursos anteriores. No obstante, al tratarse de preguntas tipo test, se entiende que parte del alumnado pueda responder de manera aleatoria. Al hilo de esta problemática de evaluación, para solventarla se comunica de forma verbal que la respuesta "V" o "F", en ésta y las demás preguntas tipo test, debe ir acompañada de una justificación en papel, y que si no es así solamente se contará la mitad del valor de la pregunta.

La segunda cuestión (3.2.) consiste en determinar si dos magnitudes presentadas de forma descontextualizada en forma de tabla corresponden a magnitudes directamente proporcionales. El comportamiento esperado para esta cuestión consiste en determinar si el cociente de todos los pares de valores de las magnitudes es constante. Sin embargo también se entiende que puedan utilizar un cálculo entre pares de valores de la misma magnitud del tipo, *"si multiplico por dos, tres,… la primera magnitud, la segunda también debe estar multiplicada por dos, tres,…, respectivamente"*, al referirse en el enunciado de la cuestión a magnitudes directamente proporcionales.

La cuestión 4.1. corresponde el cálculo de un interés simple. El nivel de la pregunta es sencillo por lo que se espera que la mayoría de los estudiantes respondan a esta pregunta de manera satisfactoria, tal y como realizaban en clase. El único comportamiento que se puede esperar ajeno a la respuesta correcta puede deberse al olvido de multiplicar el interés anual obtenido por el número de años, ya que debido a que la primera de las opciones del test corresponde al interés que se produce únicamente en un año, los alumnos rápidamente se decantarían por ella.

La última pregunta del test (4.2.) corresponde a un reparto inversamente proporcional. Probablemente sea una de las cuestiones más complicadas de todo el cuestionario, ya que pueden realizar el ejercicio por la vía puramente de cálculo (excesivamente costosa) o pueden hacerlo mediante un razonamiento teórico de los repartos, que se mostró en clase (respuesta muy rápida), pero que debido al contrato didáctico, en el cual hay que dar una respuesta numérica, no tuvo mucho éxito. Además, este tipo de ejercicios no son a los que están acostumbrados a realizar, por lo que es esperable en la mayoría de los estudiantes que realicen todos los cálculos para responder esta actividad.

Ya en el apartado de ejercicios, la cuestión 5 corresponde a una actividad en la cual primero deben identificar quienes son los medios y quienes los extremos en una proporción dada en forma de lista. La primera cuestión esperable, que ya me advirtió mi tutor del centro y que debía dejar muy clara en el momento del examen, consiste en la confusión entre los dos últimos términos de la proporción. Los dos términos son $x+1$ y 5, pero es esperable que mucho alumnos cojan como término $x+1.5$, es decir, que piensen que la última coma es para expresar los decimales. Otro comportamiento que se puede esperar es que no recuerden la posición de los términos de una proporción cuando están puestos en forma de lista y por tanto que no puedan trasladarlo a la forma de fracción. Debido a ello, sería normal que coloquen los términos en otras posiciones dentro de la proporción. Otra opción que podrían realizar los estudiantes que son capaces determinar correctamente los términos de la proporción (sepan colocarlos luego en forma de fracción o no) es que directamente utilicen la propiedad fundamental de las proporciones (producto de medios es igual a producto de extremos).

El ejercicio 6 de la prueba consiste en realizar un reparto directo. Es esperable que la mayoría de los alumnos de la muestra, lo realice satisfactoriamente. No obstante, el ejercicio se plantea de forma descontextualizada por lo que puede ocurrir que algunos estudiantes no le encuentren sentido y puedan fallar.

La última cuestión del apartado de ejercicios (7.), consiste en realizar un aumento porcentual a una cantidad (que se da descontextualizada), para luego aplicar ese mismo porcentaje pero en forma de disminución al resultado. Como es lógico, las cantidades de partida y final no van a ser las mismas, por lo que se pide al alumnado que razone este resultado. Es esperable que la mayoría de los alumnos responda correctamente a los valores de los cálculos de los porcentajes, pero que no sepan razonar de manera precisa el por qué las cantidades son distintas.

La última sección del cuestionario corresponde a los problemas contextualizados y cercanos a la vida cotidiana que exige la legislación vigente. El problema número 8 consiste en determinar, dentro de dos ofertas que nos realiza un banco, cual es más favorable para nuestros objetivos. Para ello, el alumnado deberá calcular los intereses simples que generarían las dos ofertas y luego descontar la comisión por mantenimiento que se queda el banco. La cuestión se debe a que esta comisión, en la primera oferta corresponde a un porcentaje que se aplica al capital inicial e intereses generados y en la segunda a una cantidad absoluta. Es esperable que los estudiantes calculen bien los intereses generados por ambas ofertas, pero seguramente los alumnos de esta muestra, en la primera oferta únicamente apliquen el porcentaje a estos intereses y no al capital inicial, y en la segunda oferta que se olviden de multiplicar la comisión anual por el número de años. Con todo ello, los estudiantes pueden decantarse erróneamente por una de las dos ofertas, pero debido solamente al cálculo mal hecho.

El problema 9 del examen, corresponde a un problema tipo de proporcionalidad directa. Dado un coste por foto, deben calcular cuanto les cuestan distinto número de fotos y también a partir de la factura, establecer el número de fotos que se han revelado. Por ello, al ser un ejercicio típico, es esperable que la mayoría de la muestra realice correctamente el problema. El apartado a) se espera que se consiga por la totalidad de los estudiantes. El apartado b) también se espera que se realice correctamente pero mediante cálculos en vez de aplicar la teoría. Se espera que los alumnos calculen primero el gasto para 53 fotos, luego para 231 y que lo sumen. Luego, se espera que hagan el cálculo para 284 fotos (53 + 231) y que los comparen. Por ello no es esperable que los alumnos se decidan a concretar que sí debe ser el mismo gasto sin realizar los cálculos correspondientes. El apartado c) se espera que sea en el que más errores se comenta, siendo estos anecdóticos, debido a que no establezcan implícitamente cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

Por último, el problema 10, hay que decir que es el problema más difícil del examen, ya que se sale un poco del tema y de lo que están acostumbrados los estudiantes. Por ello, el valor de la cuestión no es muy elevado, pese a ser un problema importante. El problema consiste en determinar el coste de conversaciones telefónicas en función del tiempo de las mismas. La dificultad radica en que al precio final hay que añadirle un coste por establecimiento de llamada, por lo que ya no corresponde a una función de proporcionalidad directa. Por ello, es esperable que la mayoría, a consecuencia del contrato didáctico, no identifique que no corresponde con la noción de proporcionalidad directa, y que por tanto siga aplicando sus técnicas asociadas. Sin embargo hay que decir, que al ser un problema en el cual la temática es muy cercana a ellos (teléfonos móviles), y que por tanto conocen el sistema de tarificación, es problema pueda ser resuelto satisfactoriamente por algún estudiante de la muestra.

8.5.- Resultados

La presente sección responde a la necesidad de establecer los resultados obtenidos por la muestra en relación al cuestionario planteado sobre el tema de proporcionalidad aritmética. Este apartado se dividirá en dos partes. En primer lugar, se realiza un análisis global de los aciertos y fallos con el fin de determinar que cuestiones fueron más complicadas. La segunda parte, establece ciertos comportamientos en función de los ejercicios y analizará el éxito o fracaso de los mismos. Por último, una tercera sección compara los resultados en actividades comunes entre alumnos de 1º ESO, mediante los resultados del cuestionario planteado por un compañero del Máster, y alumnos de 2º ESO en relación a dicha actividad.

8.5.1.- Análisis global

A continuación, en la Tabla 8.1., se van a presentar los resultados obtenidos en el examen por cada uno de los 23 estudiantes. Recordar que 7 de ellos estaban poco motivados con la asignatura y ya estaban orientados a programas de formación profesional. Debido a ello, prácticamente ninguno se tomó con interés el examen e incluso dos de ellos ni se presentaron a la prueba y por tanto la muestra evaluable a partir de este momento consta de 17 alumnos. Si realizamos el histograma (Figura 8.1.) con las calificaciones obtenidas para intervalos de dos puntos de diferencia se obtiene que la gran mayoría de los alumnos ha obtenido una calificación entre 2 y 4 puntos, siendo pocos los que obtienen un resultado mayor de 6 puntos de nota.

Tabla 8.1.- *Calificaciones obtenidos por los alumnos de la muestra.*

Alumnos	Nota Cuestionario		Alumnos	Nota Cuestionario	
A01	3,30		A13	1,15	
A02	2,75		A14	0,75	*
A03	2,00		A15	1,35	
A04	6,20		A16	0,75	*
A05	1,40		A17	-	*
A06	3,75		A18	5,15	
A07	0,35	*	A19	3,50	
A08	4,50		A20	8,15	
A09	0,00	*	A21	-	*
A10	4,55		A22	0,50	
A11	2,15		A23	4,15	
A12	3,75				

**: Alumnos orientados a programas de formación profesional.*

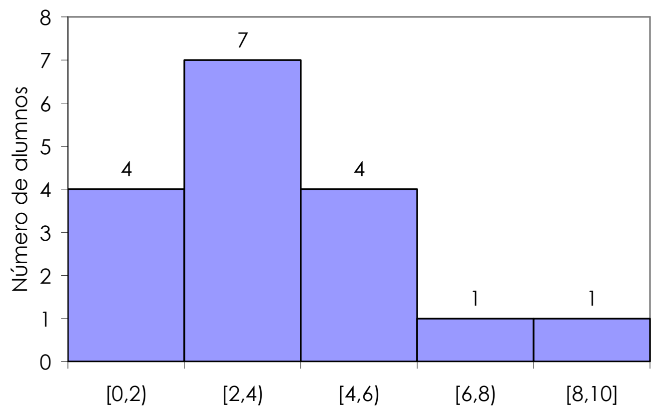


Figura 8.1.- *Histograma de calificaciones de los 17 alumnos evaluables.*

A continuación, el propósito de este apartado es establecer la dificultad de las cuestiones propuestas en el cuestionario. Esta primera clasificación de las cuestiones según la dificultad que poseen proporcionará indicaciones sobre que tipos de aprendizajes son más costosos y observando las relaciones entre ellas podremos establecer los posibles orígenes de estas dificultades. Con todo ello, se definen a continuación las variables binarias (0, 1) $R_{i,j}$, siendo los subíndices i,j cuestiones o apartados de las actividades del cuestionario que se quieren analizar.

R31: Acierto en cuestión 3.1. (Decir que es Falso, con razonamiento).

R32: Acierto en cuestión 3.2. (Decir que es Falso, con razonamiento).

R41: Acierto en cuestión 4.1. (Rodear opción c, con razonamiento).

R42: Acierto en cuestión 4.2. (Rodear opción d, con razonamiento).

R5: Acierto en cuestión 5 (Decir x =8).

R6: Acierto en cuestión 6 (Decir reparto; 84, 140 y 196).

R7a: Acierto en aumento porcentual (Decir resultado 46).

R7b: Acierto en disminución porcentual (Decir resultado 39.1).

R7c: Acierto en el razonamiento (Descripción de por qué salen cantidades distintas).

R8a: Acierto en cuestión 8.a. (Decir el beneficio 138.6 €).

R8b: Acierto en cuestión 8.b. (Decir el beneficio 137.0 €).

R8c: Acierto en cuestión 8.c. (Establecer que la mejor oferta es la "a)").

R9a: Acierto en cuestión 9.a. (Decir 2.40 €).

R9b: Acierto en cuestión 9.b. (Decir 10.60 €, 46.20 €, 56.80 € y Sí costaría lo mismo).

R9c: Acierto en cuestión 9.c. (Decir 31 fotos).

R10a: Acierto en como máximo dos huecos de la tabla.

R10b: Acierto en más de dos huecos de la tabla.

En la Tabla 8.2. se observan las frecuencias absolutas de éxito para los 17 alumnos de la muestra y el porcentaje de éxito para cada variable binaria definida anteriormente.

Tabla 8.2.- *Frecuencia absoluta y porcentaje de éxito a las variables o apartados Ri,j.*

	R31	R32	R41	R42	R5	R6	R7a	R7b	R7c	R8a	R8b	R8c	R9a	R9b	R9c	R10a	R10b
Frecuencia éxito	11	6	4	6	2	9	11	7	2	1	3	2	14	12	6	15	2
Porcentaje éxito	65%	35%	24%	35%	12%	53%	65%	41%	12%	6%	18%	12%	82%	71%	35%	88%	12%

De una manera más visual, la Figura 8.2. muestra el histograma con los porcentajes de éxito de los apartados del cuestionario definidos mediante las variables binarias Ri,j.

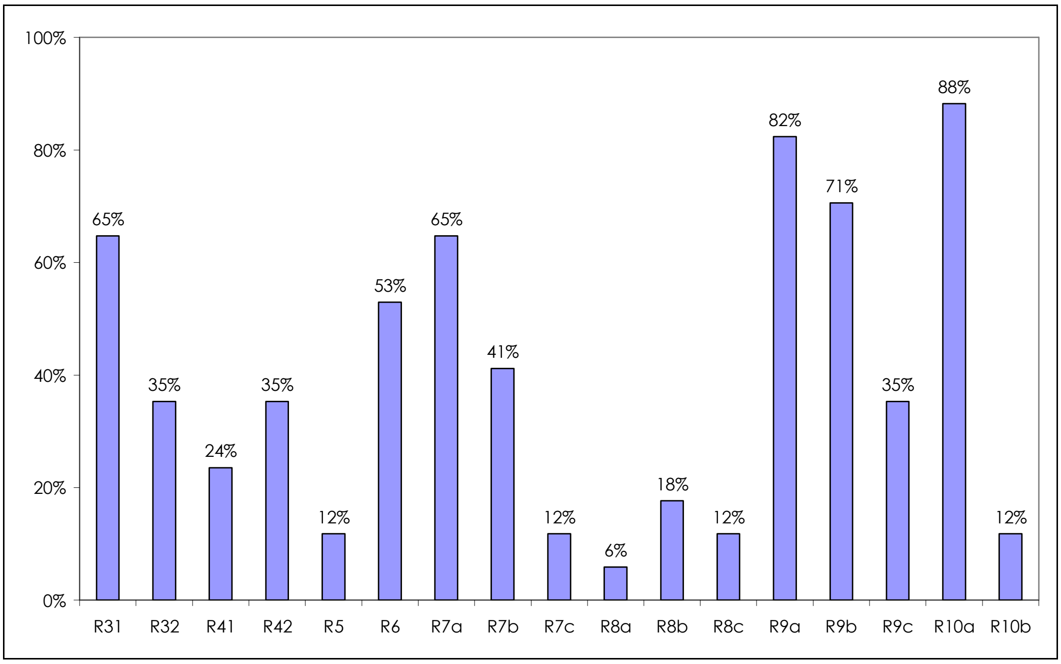


Figura 8.2.- *Histograma de los porcentajes de acierto a los apartados del cuestionario.*

Cuestiones fáciles (porcentajes superiores al 70%)

Se observa como los apartados 9.a. y 9.b. superan el porcentaje límite de 70% para ser considerado como preguntas fáciles. Estos apartados son considerados como ejercicios tipo sobre proporcionalidad directa, por lo que al ser bastante trabajados y no ser un conocimiento nuevo para 2º ESO, el porcentaje de éxito es bastante elevado. Observar que la variable R10a debe tomarse de manera inversa, ya que tal y como está definida, un porcentaje alto responde a una gran dificultad en la cuestión, ya que prácticamente ningún estudiante fue capaz de rellenar más de dos huecos en la tabla.

Cuestiones de mediana dificultad (porcentajes entre 30 y 70%)

Las cuestiones de mediana dificultad responden a las variables R31, R32, R42, R6, R7a, R7b Y R9c. Destacar que para estas cuestiones, existe subgrupos. Los variables R31 y R7a tienen un porcentaje de 65% de éxito, por lo que aunque pertenecen a este grupo, se encuentran muy cercanas a las preguntas fáciles. Este porcentaje elevado puede ser explicado a que son ejercicios tratados en cursos anteriores. Por el contrario, las variables R32, R42, R7b y R9c responden a preguntas en torno al 35% de éxito por lo que están más cercanas a las preguntas con alta dificultad. Estos resultados se pueden explicar debido a que dos de las preguntas son teórico-prácticas (R32, R42), a las que no están acostumbrados, mientras que las otras dos (R7b, R9c) son cuestiones en las que el procedimiento de resolución es ligeramente distinto al que se realiza normalmente. La variable R6 posee un porcentaje de éxito del 53% por lo que se enmarca en las preguntas tipo de mediana dificultad. Este resultado es explicable debido a que fue un ejercicio tipo trabajado en clase.

Cuestiones difíciles (porcentajes inferiores al 30%)

Las variables con mayor dificultad fueron R41, R5, R7c, R8a, R8b, R8c, R10a y R10b. Se observa como la variable R8a solamente tuvo un 6% de éxito. Puede ser entendido a que la mayoría de los estudiantes se olvidó de multiplicar por el número de años y considerar el capital inicial para el cálculo de la comisión. Las demás variables de esta sección tienen una dificultad similar, en torno al 15% (recordar la variable R10a está expuesta de manera inversa). Se explica el porcentaje debido a que son cuestiones que se salen un poco de lo que los alumnos están acostumbrados a realizar.

8.5.2.- <u>Análisis de comportamientos</u>

En esta sección se tratará el cuestionario desde un punto de vista de los comportamientos previsibles. Para ello, se establecen los siguientes comportamientos que se pueden observar.

C01: Utilización de la propiedad fundamental para el tratamiento de las proporciones (principalmente cuestiones 3.1. y 5).

C02: Utilización de la constante de proporcionalidad directa para ver si son magnitudes directamente proporcionales (principalmente cuestión 3.2.).

C03: Utilización de fórmulas expuestas en clase para repartos e intereses simples (principalmente cuestiones 4.1., 6 y 8).

C04: Utilización de la teoría de repartos (principalmente cuestión 4.2.).

C05: Cálculo de aumentos y disminuciones porcentuales de manera directa (principalmente cuestión 7).

C06: Utilización de proporcionalidad en lugar inapropiado (principalmente cuestión 10).

C07: Utilización de la técnica "Regla de tres simple" en problemas de proporcionalidad directa (principalmente cuestión 9).

En la Tabla 8.3. se pueden observar los resultados sobre el comportamiento de los estudiantes de la muestra en función de las variables definidas anteriormente. En la columna nombrada como "SÍ" se establece la frecuencia de uso del comportamiento definido mediante la variable Cij. En la columna "NO", se establece la frecuencia absoluta de los alumnos que utilizaron otra técnica o tuvieron otro comportamiento sobre las cuestiones planteadas. La columna nombrada "Total" muestra el total de alumnos que realizaron las cuestiones planteadas. Las dos últimas columnas muestran el porcentaje de los procedimientos seguidos si consideramos el total de la muestra, 17 alumnos para la cuarta columna, mientras que la última establece el porcentaje si solamente consideramos el número de estudiantes que intentaron solucionar las cuestiones.

Tabla 8.3.- *Resultados sobre los comportamientos.*

	SÍ	NO	Total	Porcentaje del total de la muestra	Porcentaje de los que intentaron la cuestión
C01	6	0	6	35%	100%
C02	3	2	5	18%	60%
C03	7	6	13	41%	54%
C04	2	5	7	12%	29%
C05	1	15	16	6%	6%
C06	4	2	6	24%	67%
C07	2	6	8	12%	25%

La Figura 8.3., muestra los datos de la Tabla 8.3. mediante un histograma. Se observa claramente como toda la muestra utiliza la propiedad fundamental (C01) cuando necesitan trabajar con proporciones en forma de fracción. Seguidamente, en torno al 60%, se encuentran los comportamientos C02, C03 y C06. Los dos primeros tratan sobre el uso de las fórmulas expuestas en clase, mientras que el último pone de manifiesto que el problema 10 se salía de lo tratado en el tema ya que muchos, debido al contrato didáctico han realizado el problema como si existiese proporcionalidad, mientras que solo dos alumnos se han dado cuenta de que no era así. De manera similar, alrededor del 25% están las variables C04 y C07. La variable C04 establece que solo 2 de los 7 alumnos que intentaron la cuestión solucionaron el problema de manera teórica, mientras que el resto propusieron alternativas de cálculo. El comportamiento definido como C07, establece de manera sorprendente que los estudiantes apenas utilizaron la técnica "Regla de tres", al menos de manera explícita, para solucionar el problema. Esto puede ser debido a la cotidianidad del ejercicio, ya que se limitaron a realizar multiplicaciones y divisiones directamente. Por último se encuentra el comportamiento definido mediante la variable C05, que solamente fue usado por el 6% de la muestra. Esta variable consistía en ver como realizaban el cálculo de los aumentos y disminuciones porcentuales. A lo visto de los resultados, los alumnos prefieren primero calcular el porcentaje para luego sumarlo o restarlo según sea aumento o disminución, respectivamente. Solamente 1 alumno de los 16 que intentaron el ejercicio calculó de manera directa el aumento y disminución porcentual (115% y 85%).

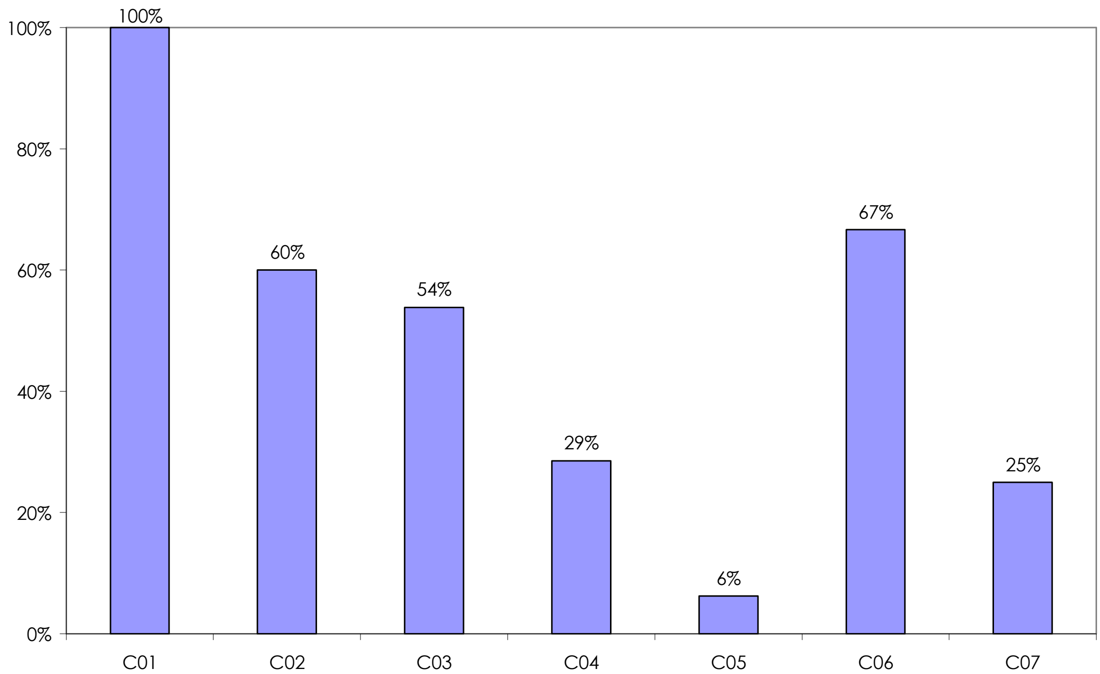


Figura 8.3.- *Histograma con los porcentajes de seguimiento de los comportamientos definidos mediante Cij.*

8.5.3.- Análisis de actividades comunes entre alumnos de 1º ESO adultos y 2º ESO

El objetivo de esta sección es comparar las similitudes y diferencias entre los comportamientos de dos clases de la ESO debido al diseño común de algunas actividades del cuestionario entre varios compañeros del Máster. Las clases involucradas son las de 1º ESO adultos, impartida por un compañero, y la clase de 2º ESO en la cual se realiza la experimentación. Si nos referimos al cuestionario presentado en la sección 8.3., las actividades que se proponen de manera común son la actividad 4.1., 6, 9 y 10. La actividad 4.1. y 6, tienen como objetivo ver el efecto del marco de presentación de los ejercicios o problema. El ejercicio 4.1., en el examen planteado en este trabajo fin de master se presenta en forma tipo test, mientras que en el examen diseñado para los alumnos de 1º ESO adultos, se presenta como problemas sin opciones. El ejercicio 6, en este cuestionario se presenta de manera descontextualizada, mientras que para alumnos de 1º ESO se presenta de manera contextualizada. Las otras dos actividades, 9 y 10, se presentan de similar manera y tienen como objetivo ver el efecto del nivel educativo en su resolución.

En la Tabla 8.4. se observan las calificaciones medias para las cuatro actividades tanto para los alumnos de 1° ESO adultos, como para los alumnos de 2° ESO.

Tabla 8.4.- *Comparación de las actividades comunes entre alumnos de 1° ESO adultos y 2° ESO.*

	1° ESO ADULTOS	2° ESO
Actividad 4.1	7,32	2,53
Actividad 6	5,42	5,29
Actividad 9	4,58	5,05
Actividad 10	3,04	1,53

De manera más visual, podemos observar estos mismos datos en la siguiente Figura 8.4.

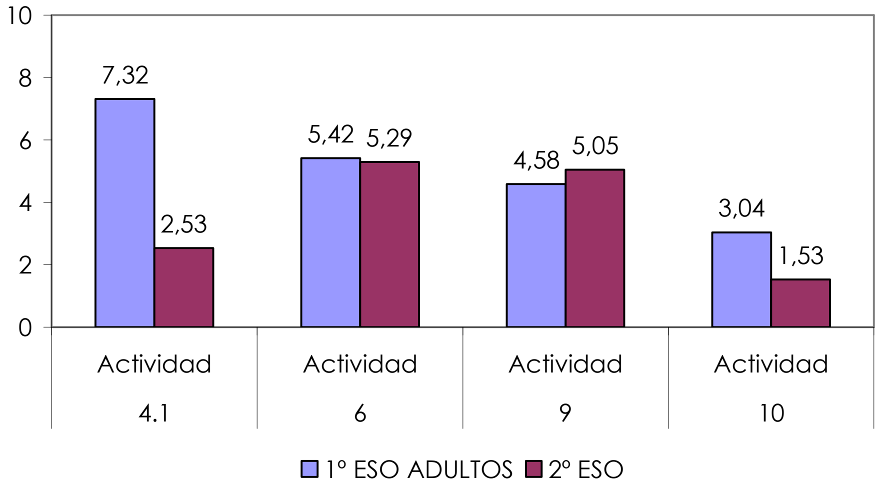


Figura 8.4.- *Histograma de calificaciones medias de las actividades comunes entre alumnos de 1° ESO adultos y 2° ESO.*

A propósito de los resultados se observan como apenas existen diferencias significativas entre la resolución de las actividades 6 y 9. Este resultado puede ser debido a que son ejercicios tipo en el estudio de la noción de proporcionalidad. Por otro lado, en la actividad 10 sí que existen diferencias significativas entre los resultados. La actividad 10 hay que recordar que es propuesta como la actividad más complicada del examen y que por ello es previsible que pocos alumnos obtengan buen resultado, ya que la noción necesaria para su resolución no es estrictamente una proporcionalidad directa. Por último, la actividad 4.1., es en la que mayor diferencia se obtiene, ya que la clase de 1° ESO adulto obtiene una nota casi tres veces superior a la de 2° ESO. Este hecho puede ser debido en primer lugar a que en un caso está presentado como un test, por lo que el resultado es "bien - mal", "10 - 0", mientras que en el otro está presentado como un ejercicio al uso, por lo que se puede evaluar con notas intermedias. Otro factor puede ser debido a que en el test la primera opción justo es la correspondiente a los intereses generados en un año, por lo que los alumnos, en el ímpetu de ver su solución igual a una de las opciones del test se ven lanzados a marcar esta opción, olvidándose de multiplicar por cuatro años, tal y como dice el enunciado.

8.6.- Discusión de los resultados

En primer lugar, tal y como se muestra en la Figura 8.1. hay que decir que quizá el cuestionario es algo más complicado de lo inicialmente se esperaba. La Figura 8.1. no muestra una simetría respecto a la media, por lo que no puede considerarse que la variable notas como normal. La campana de notas está ladeada en hacía la izquierda, encontrándose el pico de las calificaciones entre 2 y 4 puntos, con 7 alumnos de los 17 evaluables.

En relación con lo anterior, se puede hilar el grado de dificultad de las preguntas. Se observa como únicamente dos preguntas son respondidas de manera satisfactoria (mayor del 70% de los alumnos la responden bien) por la muestra. Estas preguntas corresponden a los apartados 9a y 9b del cuestionario (recordar la variable R10a está expuesta de manera inversa). Se puede entender este hecho debido a que estas actividades se trabajan mucho en el tema de proporcionalidad directa, y además no es un conocimiento nuevo para el curso de 2º ESO. En el cuestionario se presenta 7 actividades de mediana dificultad (3.1, 3.2, 4.2, 6, 7a, 7b y 9c). Como ya hemos comentado las actividades 3.1 y 7a tienen un porcentaje de 65% de éxito, por lo bien podrían pertenecer al grupo de las preguntas fáciles. Estas cuestiones, sorprendentemente fueron peor respondidas de lo que se esperaba, ya que son ejercicios a los que están muy habituados desde finales de primaria, inicios de secundaria (proporciones y porcentajes). Del resto de cuestiones, la 3.2, 4.2, 7b y 9c, tienen un porcentaje de éxito del 35%, por lo que son consideradas casi difíciles. Esto puede ser debido a que son cuestiones en la que hay que aplicar procedimientos ligeramente distintos a los habituales o son cuestiones teórico-prácticas a las que no están acostumbrados debido al contrato didáctico. La última cuestión de este grupo, la 6, es respondida por la mitad de los alumnos de la muestra, por lo que se considera una pregunta de mediana dificultad al uso. Este ejercicio puede ser explicado porque es un ejercicio mecánico en el que si lo sabes hacer tienes un 10 y si no sabes el procedimiento, tienes un 0. Los actividades con mayor dificultad son la 4.1, 5, 7c, 8a, 8b, 8c, 10a y 10b. La pregunta de mayor dificultad, la 8a consiste en calcular un interés simple a 5 años. El motivo de tal fracaso no considero que sea debido a una dificultad puramente de la noción de proporcionalidad, sino que su motivo es que se olvidaron de calcular los intereses por comisión de mantenimiento en el capital inicial, y solamente lo realizaron en los intereses. Las demás cuestiones tiene un porcentaje de éxito de alrededor de un 15%, debido a que son actividades que se alejan de la tónica habitual de sus ejercicios (recordar la variable R10a está expuesta de manera inversa). Destacar la actividad 10, en la cual la resolución no se basa en la proporcionalidad directa, sino que se añade un término fijo que deben tener en cuenta. Solamente dos de los alumnos realizaron íntegramente el problema, por lo que se observa como el efecto del contrato didáctico está presente en esta actividad, ya que es un ejercicio que no se trabajó en clase y que era una actividad “prueba” y extraordinaria.

En relación a los comportamientos destacar como la totalidad de los alumnos utilizan la propiedad fundamental de las proporciones (C01) para tratarlas, en vez de otras técnicas como la división de las fracciones buscando su expresión decimal. En torno al 60% de la muestra utilizan las fórmulas expuestas en clase (repartos e intereses, C02 y C03), probablemente de manera automática debido a que ninguno de ellos hace las comprobaciones pertinentes para ver si el resultado es lógico con el enunciado (no tienen control de la actividad). El comportamiento C06 está muy ligado al ejercicio 10. Se observa como el 60% utiliza la noción de proporcionalidad en lugares en los que no es posible, debido a como se ha comentado al contrato didáctico. En cuanto al comportamiento que describe la variable C04 se puede establecer que pocos alumnos relacionan la teoría con la práctica ya que solo 2 de los 7 alumnos que realizan el ejercicio 4.2. utilizan un razonamiento teórico para solucionarlo. Sorprendentemente, la técnica "Regla de tres" (C07) apenas es utilizada por los alumnos, cuando en clase muchas veces preguntaban si se podía realizar por ella, ya que la habían visto en otros cursos. Este hecho puede ser explicado a la cercanía del ejercicio con su vida cotidiana ya que al verlo tan lógico se limitan a realizar multiplicaciones y divisiones directamente. El comportamiento C05, para acabar, que trata sobre la forma de realizar los incrementos y disminuciones porcentuales solamente tiene éxito en el 6% de la muestra. Es decir, solamente el 6% de los estudiantes utilizan la nueva técnica expuesta en el curso que dice que para calcular un aumento, o disminución, porcentual primero se suma, o resta, a 100% dicho porcentaje y luego se calcula con ese nuevo tanto por ciento el resultado. El resto de los alumnos primero realizan el porcentaje y posteriormente suman o restan a la cantidad inicial, según sea incremento o disminución, respectivamente.

El último bloque de estos resultados trata la comparación de los resultados de los alumnos de 1° ESO adultos y 2° ESO en cuatro actividades planteadas de manera conjunta de los cuestionarios entregados para la evaluación. Se quería ver el efecto del marco de presentación de las actividades (4.1. y 6 de este cuestionario) y se observa como para la actividad 6 no es significativa la forma de redactar los ejercicios, mientras que para la 4.1. en parte sí lo es. En esta cuestión el hecho de que en uno de los cuestionarios sea presentada de forma tipo test realiza un evaluación diferenciada, ya que la nota solo puede ser dicotómica, o 10 ó 0, mientras que si la respuesta es "libre", se puede evaluar el procedimiento y por tanto pueden existir notas intermedias. Respecto a las otras dos actividades (9 y 10 de este cuestionario), se quería ver el efecto del nivel educativo y si existen diferencias entre 1° y 2° ESO. Se observa como la actividad 9, basada solamente en la proporcionalidad directa, es respondida de manera similar en ambos cursos, por lo que no existen diferencias significativas, mientras que la actividad 10, al ser una actividad "prueba" no tuvo mucho éxito en ninguno de los dos cursos, siendo ciertamente mejor el resultado en 1° ESO adultos.

SINTESIS, CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Síntesis

En este trabajo fin de máster se realiza un análisis de la noción de proporcionalidad directa e inversa. Dicha actividad se ve centrada en una experiencia docente relativa al Practicum II de este máster, en la cual se imparte este tema en un aula de 2º ESO.

En primer lugar, se localiza la legislación vigente para tercer ciclo de primaria, secundaria y bachillerato y se realiza un análisis longitudinal de los Reales Decretos, extrayendo de ellos los contenidos mínimos que se deben impartir sobre el tema y sus criterios de evaluación. Posteriormente, se analizan los libros de texto referentes al tema para cinco cursos diferentes (dos anteriores, el de impartición y dos posteriores), entre los que está el utilizado en las prácticas, y se observa la coherencia de éstos con el currículo, viendo sus ausencias y presencias.

En segundo lugar, se estudia el proceso de estudio vivido *in situ* en un aula de 2º ESO en relación a este tema y se observa, centrándonos en el polo estudiante, la forma de afrontar los estudiantes la resolución de los problemas. Por último, se realiza analizan las dificultades y errores que pueden cometer los alumnos y se analiza un cuestionario de evaluación del tema que solucionaron los estudiantes.

Conclusiones

Mediante la realización de este trabajo fin de máster se han ido encontrando tres conclusiones claras:

a) Los libros de texto cumplen con la legislación vigente e incluso introducen más contenidos de los estrictamente necesarios. No obstante, tanto la legislación como los libros de texto (y probablemente los profesores lo hacemos) tratan las nociones de manera muy aislada, imposibilitando las conexiones matemáticas entre los contenidos. En consecuencia, los alumnos pensarán que todo las nociones son distintas e imposibles relacionar, cuando en realidad es todo lo contrario, ya que las matemáticas son un área de conocimiento en la que prácticamente todo está relacionado.

b) Los alumnos de 2º ESO no llegan a comprender en su mayoría la noción de proporcionalidad, en especial la inversa, siendo meras máquinas automatizadas de resolución de problemas. Si bien es cierto, que la edad ya les permite encontrar una cierta lógica de la proporcionalidad con la vida cotidiana, si se les proponen ejercicios teórico-prácticos se ven las carencias de aprendizaje de la noción.

c) Los estudiantes, en 2º ESO todavía no están acostumbrados a tratamientos teóricos de la nociones, viéndose claramente un primer entendimiento de la teoría solamente con los ejemplos resueltos, y un posterior afianzamiento a base de la repetición sistemáticas de ejercicios y problemas.

Cuestiones abiertas

Al terminar este trabajo fin de master quedan algunas cuestiones abiertas sobre el tema de proporcionalidad directa e inversa y sobre la experiencia docente vivida.

a) Plantear un cuestionario a dos cursos distintos que tengan la misma historia de la noción, entendiéndose por la misma historia el mismo profesor o la misma manera de presentar las nociones.

b) Tener acceso a muestras mayores para poder realizar un análisis más completo.

c) Utilización de las tecnologías de la información (TICs) mediante la realización de prácticas en el ordenador para conseguir mayor motivación y consolidación de las nociones.

d) Atomización. Pertinencia o no de un cambio en las estrategias de enseñanza – aprendizaje, en las cuales se relacionen todos los conceptos y no sean tratados de manera aislada.

REFERENCIAS

Anzola González, Máximo; Bujanda Jáuregui, Mª Paz; Mansilla Romo, Serafín; Vizmanos Buelta, José Ramón – *PROYECTO ESFERA – MATEMÁTICAS 1º ESO* - EDICIONES SM, Madrid, 2008
ISBN: 978-84-675-1176-5

Anzola González, Máximo; Bujanda Jáuregui, Mª Paz; Mansilla Romo, Serafín; Vizmanos Buelta, José Ramón – *PROYECTO ESFERA – MATEMÁTICAS 2º ESO* - EDICIONES SM, Madrid, 2008
ISBN: 978-84-675-0809-3

Anzola González, Máximo; Vizmanos Buelta, José Ramón – *PROYECTO ESFERA – MATEMÁTICAS 3º ESO* - EDICIONES SM, Madrid, 2008. ISBN: 978-84-675-1177-2

Anzola González, Máximo; Vizmanos Buelta, José Ramón – *PROYECTO ESFERA – MATEMÁTICAS 4º ESO – OPCIÓN B* - EDICIONES SM, Madrid, 2008. ISBN: 978-84-675-2720-9

Artigue, M. (1989). *Ingénierie didactique*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(3), 282–307.

Grupo EDEBÉ. 2008). *Matemáticas*. 6º de Primaria. Barcelona.

Grupo EDEBÉ. (2008). *Matemáticas*. 2º ESO. Barcelona. ISBN: 978 – 84 – 236 – 7908 - 9

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (2006). *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (Especial), 133–156.

Gutiérrez, S., Valencia, F.J., Municio, J. (2010). *Proporcionalidad, funciones y estadística*. Cuadernos de matemáticas, nº 4, 2º ESO. Editorial SM. Madrid. ISBN: 978 – 84 – 675 – 1542 – 8

Lacasta, E., Wilhelmi, M.R. (2006). *Previsión y comunicación de valores a través del gráfico*. Departamento de Matemáticas, Universidad Pública de Navarra.

Marcos, C., Martínez, J. *Compendio de Matemáticas*. 4º curso. Editorial SM. Madrid

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre. BOE 293, de 8 diciembre, 43053–43102. Educación primaria.

MEC (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre. BOE 5, de 5 enero, 677–773. Educación Secundaria.

MEC (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre. BOE 266, de 6 noviembre, 45381–45477. Bachillerato.

UNED (1976). *Programa de especialización de profesorado de EGB. Matemáticas II. Unidad 3*. Madrid: Autor.

ANEXOS

A.- UNIDAD DIDÁCTICA (EDITORIAL SM)

B.- UNIDAD DIDÁCTICA (GRUPO EDEBÉ)

A.- UNIDAD DIDÁCTICA (EDITORIAL SM)

4

CUADERNOS DE MATEMÁTICAS

PROPORCIONALIDAD, FUNCIONES Y ESTADÍSTICA

Índice

2.º ESO

sm

Autores: Santiago Gutiérrez, Francisco José Valencia, Juana Municio

Proyecto editorial: Equipo de Educación Secundaria de Ediciones SM
Coordinación editorial: Aida Moya
Edición: Raquel Sáiz y Josefina Arévalo
Ilustración: Jurado y Rivas y David Ouro
Diseño: Alfonso Ruano
Maqueta: Preiscam
Dirección editorial: Violeta Calvo

ISBN: 978-84-675-1542-8 / Impreso en España - *Printed in Spain*
Depósito legal: M. 19.860-2010 / Impreso en Lavel, S. A.

I. Proporcionalidad numérica

1 Razones y proporciones

- Se llama **razón** de dos números, a y b, al cociente entre ellos $\frac{a}{b}$. Se puede expresar como cociente indicado o como cociente efectuado.
- Cuatro números (a, b, c y d) forman una **proporción** si la razón entre a y b es igual a la razón entre c y d. Se escribe: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

En una proporción, la **constante de proporcionalidad** es el cociente entre cada pareja de valores.

PASO A PASO

Términos de una proporción

En una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ los **extremos** son a y d, y los **medios**, b y c.

1 ***Comprueba que los números 3, 2, 6 y 4 forman una proporción. Halla la constante de proporcionalidad e identifica los extremos y los medios.***

Sí forman una proporción, ya que: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = 1{,}5$.

La constante de proporcionalidad es 1,5.
Los extremos son 3 y 4, y los medios, 2 y 6.

2 Calcula el valor de las letras en las siguientes razones.

a) $\frac{x}{13} = 2$ $x = \square$

b) $\frac{4}{5} = k$ $k = \square$

c) $\frac{24}{y} = 0{,}6$ $y = \square$

d) $\frac{36}{z} = 2{,}4$ $z = \square$

3 Ahmed y tres amigos han recogido 145 kilogramos de papel para reciclar. Calcula la razón entre los kilogramos de papel recogido y los chicos que lo han hecho. Expresa la razón en forma decimal.

4 El gasto en medicinas en El Solar ha sido de 18 750 euros entre los 150 habitantes del pueblo. Calcula la razón entre el dinero gastado y los habitantes del pueblo, exprésala en forma decimal.

2

Propiedad de las proporciones

En una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ producto de extremos es igual a producto de medios $a \cdot d = b \cdot c$.

5 ***Halla el cuarto término de la proporción $\frac{12}{17} = \frac{48}{x}$.***

1.º Aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones: $12 \cdot x = 48 \cdot 17 \rightarrow 12x = 816$

2.º Despejamos nuestra incógnita: $x = \frac{816}{12} = 68$

Nuestra solución es $\boxed{x = 68.}$

6 Calcula los valores de las letras en las siguientes proporciones aplicando la propiedad fundamental.

a) $\frac{45}{42} = \frac{x}{28}$

b) $\frac{72}{60} = \frac{18}{y}$

7 En Los Jaramillos, por cada 2 árboles que mueren o enferman se plantan 3 árboles distintos. Este año han enfermado 18 árboles. Calcula los árboles que se van a plantar este año si se mantiene la proporción.

8 En un partido de baloncesto, Alicia ha encestado 3 de cada 5 tiros triples que ha marcado su equipo. El equipo de Alicia ha anotado 30 puntos en triples. Calcula los puntos que ha anotado Alicia con sus tiros triples si se mantiene la proporción.

9 Para preparar un medicamento contra la gripe se mezclan dos componentes diferentes: *A* y *B*. Por cada 3 partes del componente *A* se ponen 8 partes del componente *B*. Calcula cuántos miligramos del componente *A* hay que añadir si se ponen 12 miligramos del componente *B* y se mantiene la proporción.

I. Proporcionalidad numérica

2 Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando el cociente o razón de las cantidades correspondientes es constante. Este cociente se llama **constante de proporcionalidad directa.**

PASO A PASO

10 ***La siguiente tabla proporciona el coste en euros de las fresas según el número de kilogramos. Comprueba que las magnitudes que aparecen en ella son directamente proporcionales e indica cuál es la constante de proporcionalidad directa.***

Coste (euros)	6	9	12	15	18
Número de kg	2	3	4	5	6

Si dividimos las cantidades correspondientes: $\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{3} = \frac{15}{5} = \frac{18}{6} = 3$*, el cociente es siempre 3, que es la constante de proporcionalidad directa.*

El coste es directamente proporcional al número de kilogramos, y la constante de proporcionalidad es 3.

11 Para cada una de las siguientes tablas, estudia si representan valores de magnitudes directamente proporcionales, y cuando sea así, indica cuál es la constante de proporcionalidad.

a)

x	4	6	8	14
y	2	3	4	7

b)

u	6	12	13	14
v	1	2	3	4

12 Completa la tabla para que represente valores de magnitudes directamente proporcionales, de constante de proporcionalidad $\frac{m}{n} = 3,5$.

m		14		105
n	2		12	

4

13 ***Las 7 entradas que compré para un concierto me costaron 36,40 euros. ¿Cuánto me costarán 13 entradas?***

1.º Calculamos el precio de una entrada. — *1 entrada ha costado 36,40 : 7 = 5,20 euros.*

2.º Multiplicamos el precio de una entrada por el número de entradas total. — *13 entradas costarán 13 · 5,20 = 67,60 euros.*

El precio total de las entradas es de 67,60 euros.

14 Pablo ha estudiado 22 horas durante 5 días. Si sigue así, ¿cuántas horas de estudio habrá hecho al cabo de 30 días?

15 Dos pintores han tardado 4 días en pintar 220 metros cuadrados de un piso. ¿Cuántos días tardarán en pintar 715 metros cuadrados?

16 Un trabajador recibió 180 euros por 6 días de trabajo. ¿Cuánto recibirá por 21 días de trabajo?

17 En la elaboración de un pastel para 4 personas se emplean 240 gramos de azúcar. ¿Cuántos gramos de azúcar serán necesarios en la fabricación de un pastel para 7 personas?

18 En una etapa contrarreloj, un ciclista tarda 30 minutos en recorrer los primeros 25 kilómetros. Si sigue a esta misma velocidad, ¿cuánto tardará en recorrer los 15 kilómetros siguientes?

3 Porcentajes

Un **porcentaje** es una cantidad de cada 100 unidades de una magnitud. Se expresa escribiendo la cantidad seguida del símbolo %.

Para **calcular el porcentaje** de una cantidad, se multiplica esta por el número decimal equivalente al porcentaje.

Ejemplo: El 8 % de 340 es: $340 \cdot \frac{8}{100} = 340 \cdot 0{,}08 = 27{,}2$

Tanto por ciento	Razón equivalente	Número decimal equivalente
8 %	$\frac{8}{100}$	0,08

PASO A PASO

19 ***Al aplicar un determinado porcentaje a 1 500 se obtiene 630. ¿Qué porcentaje se ha aplicado?***

$1\,500 \cdot \frac{x}{100} = 630;\ x = 630 \cdot \frac{100}{1500} = 42;\ \boxed{x = 42\ \%}$

20 Calcula los siguientes porcentajes.

a) 13 % de 470

b) 16 % de 38

21 El 23 % de una cantidad da 144,67. ¿De qué cantidad se trata?

22 Al aplicar un determinado porcentaje a 2 000 se obtiene 500. ¿De qué porcentaje se trata?

23 Luisa pasa el 25 % de un día en el instituto. Calcula las horas que pasa dentro y fuera del centro.

24 ***Halla la cantidad que resulta si a 365 euros le aplicamos:***

a) Un aumento del 18 %.

b) Una disminución del 14 %.

1.º Calculamos el porcentaje de la cantidad dada inicialmente.

2.º Sumamos o restamos el porcentaje a la cantidad inicial.

a) 18 % de 365 = 0,18 · 365 = 65,70; 365 + 65,70 = $\boxed{430{,}70 \text{ euros}}$

b) 14 % de 365 = 0,14 · 365 = 51,10; 365 − 51,10 = $\boxed{313{,}90 \text{ euros}}$

Un **aumento** o una **disminución porcentual** consiste en añadir o disminuir, respectivamente, a una cantidad un cierto porcentaje de ella.

25 Calcula la cantidad final si a 875 euros le aplicamos las siguientes variaciones porcentuales.

a) Un aumento porcentual del 24 %.

b) Una disminución porcentual del 32 %.

26 Al efectuar la compra de un jersey nos han hecho un descuento del 15 %. Si el precio que marcaba el jersey era de 30 euros, ¿cuánto hemos pagado finalmente?

27 La cantidad de 500 euros, aumentada en un determinado porcentaje, da 580 euros. ¿En qué porcentaje se aumentó dicha cantidad?

28 Después de las lluvias, la capacidad de un embalse es de 517 hectómetros cúbicos. Calcula la cantidad de agua que tenía antes de las lluvias si ha aumentado su capacidad en un 10 %.

UN PASO MÁS

29 Una empresa ha consumido en la elaboración de papel 7 000 kilovatios de energía. Otra empresa que produce papel reciclado consume el 36 % de dicha energía. Calcula la cantidad de energía que consume la empresa que recicla papel, y la cantidad y el porcentaje de energía que ahorra.

30 En la obra de teatro del instituto se han ocupado 250 sillas de las 300 que tiene el salón de actos. Calcula el porcentaje de sillas ocupadas.

31 En Los Zarzales, los vecinos han votado para construir un centro cívico. Han votado a favor 420 vecinos de los 560 que hay en el pueblo. Calcula el porcentaje de vecinos que han votado a favor de la construcción.

32 La recaudación de un partido de fútbol de aficionados se va a dedicar a ayuda humanitaria para campamentos en África. El 35 % se destina a crear pozos de agua potable. Si se dedican 21 000 euros a crear pozos, calcula la recaudación total del partido.

33 En el pueblo de Adela, la población ha disminuido en los últimos 5 años un 30 %. Ahora hay allí 490 habitantes. Calcula cuántos había hace 5 años.

PISA FUERTE

34 **El entrenador de un equipo de baloncesto observa las anotaciones que ha tomado sobre la actuación de los cinco jugadores titulares. Esto es lo que ha anotado:**

	1 punto		2 puntos		3 puntos	
Jugador	**Intentos**	**Canastas**	**Intentos**	**Canastas**	**Intentos**	**Canastas**
J. C. Calderín	6	4	4	3	5	3
S. Peravicic	5	3	7	6	5	4
Pablo Gasoil	4	2	6	5	3	1
Shaq O' Meal	7	5	7	5	1	0

¿Qué porcentaje de los puntos totales han sido canastas de 3 puntos de Pablo Gasoil? ¿Qué jugador ha estado más acertado desde la línea de tiros libres (un punto)?

1.º *Lee detenidamente el problema y organiza los datos.*

– Para contestar a las preguntas, completa los siguientes cuadros.

	1 punto			2 puntos			3 puntos			Total
Jugador	**Int.**	**Can.**	**Puntos**	**Int.**	**Can.**	**Puntos**	**Int.**	**Can.**	**Puntos**	**Puntos**
J. C. Calderín	6	4		4	3		5	3		
S. Peravicic	5	3		7	6		5	4		
Pablo Gasoil	4	2		6	5		3	1		
Shaq O' Meal	7	5		7	5		1	0		

	1 punto		
Jugador	**Int.**	**Can.**	**% acierto**
J. C. Calderín			
S. Peravicic			
Pablo Gasoil			
Shaq O' Meal			

2.º *Haz cálculos y da la solución.*

– ¿Cuántos puntos en total han conseguido en el partido todos los jugadores? ¿Cuántos puntos por canastas de tres puntos ha conseguido Pablo Gasoil?

– ¿Qué jugador ha estado más acertado desde la línea de tiros libres?

4 Regla de tres simple directa

La **regla de tres directa** es otro método para resolver problemas en los que se relacionan dos magnitudes directamente proporcionales.

PASO A PASO

35 ***Por 3 kilogramos de fruta hemos pagado 7,80 euros. ¿Cuánto habríamos pagado por 11 kilogramos?***

1.º Construimos un esquema con los datos del problema:

$$\begin{array}{lcl} 3\ kg & \text{———} & 7{,}80\ € \\ 11\ kg & \text{———} & x \end{array}$$

2.º Escribimos la proporción:

$$\frac{3}{7{,}80} = \frac{11}{x}$$

3.º Despejamos la incógnita:

$$x = \frac{11 \cdot 7{,}80}{3} = 28{,}60$$

Habríamos pagado 28,60 €.

36 La pared de mi cuarto, que mide 3,2 metros, está representada en un plano en 2 centímetros. ¿Por cuántos centímetros está representada la pared del salón, que mide 5,6 metros?

37 Jaime ha comprado 12 libros de una serie de aventuras en una librería de segunda mano por 19,20 euros. ¿Cuánto habría tenido que pagar si hubiera comprado 31 libros?

38 Pepe ha comprado 12 metros de papel para hacer 8 gorros para la fiesta de disfraces del instituto. Calcula cuántos gorros podría hacer si tuviera 21 metros de papel.

39 Para hacer un bizcocho de chocolate hay que poner, por cada 150 gramos de harina, 25 gramos de cacao en polvo. Calcula la cantidad de cacao en polvo que hay que utilizar si se ponen 180 gramos de harina.

40 Por cada 7 000 periódicos que se usan para hacer papel reciclado se evita la tala de 15 árboles de tamaño medio. Calcula cuántos árboles evitaremos cortar si se recogen 126 000 periódicos.

41 Para ahorrar agua, Rocío se ducha en lugar de bañarse y cierra el grifo mientras se enjabona. En 10 días ha ahorrado 1 500 litros de agua. Calcula cuántos litros ahorrará en 25 días.

42 Raquel mide 1,58 metros de altura y su sombra en un determinado momento mide 0,70 metros. Calcula la altura de un árbol que en ese mismo momento proyecta una sombra de 2,10 metros.

43 Una empresa de instalación de paneles solares con una plantilla de 8 trabajadores es capaz de instalar 24 paneles solares diarios. En los siete próximos días debe montar 210 placas solares. ¿Cuántos nuevos trabajadores ha de contratar?

5 Repartos directamente proporcionales

Para **repartir** una cantidad T entre las cantidades x, y, z de forma **proporcional**:

1.° Calculamos la razón de proporcionalidad: $\dfrac{T}{x+y+z} = k$

2.° Las cantidades x', y', z', que corresponden a x, y, z, respectivamente, son:

$$x' = x \cdot k,\ y' = y \cdot k,\ z' = z \cdot k$$

Se cumple que: $x' + y' + z' = T$.

PASO A PASO

44 ***Berta, Álvaro y Carolina han comprado un paquete de 480 folios por 6 euros. Berta ha puesto 3 euros; Álvaro, 2, y Carolina, 1. ¿Cómo deben repartirse los folios, si lo hacen en forma directamente proporcional al dinero que han puesto?***

1.° Hacemos una tabla con las magnitudes directamente proporcionales y llamamos x, y, z a las cantidades que corresponden a cada uno, respectivamente.

	Berta	Álvaro	Carolina
Euros	3	2	1
Folios	x	y	z

2.° Hallamos la constante de proporcionalidad:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = \frac{480}{6} = 80 \text{ folios por euro}$$

3.° Calculamos lo que le corresponde a cada uno:

$x = 80 \cdot 3 = 240$; a Berta le corresponden 240 folios.

$y = 80 \cdot 2 = 160$; a Álvaro le corresponden 160 folios.

$z = 80 \cdot 1 = 80$; a Carolina le corresponden 80 folios.

45 Reparte 3 600 euros de forma directamente proporcional a:

a) 2, 3 y 4

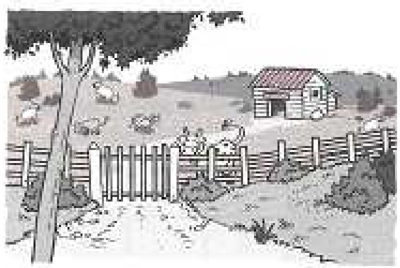
b) 2, 4, 5 y 7

46 Se va a repoblar un monte con 100 000 árboles dividido en tres parcelas de 500, 600 y 900 hectáreas. Calcula cuántos árboles se plantarán en cada parcela si se hace proporcionalmente a la superficie de cada una.

47 Luis, Andrea y Paco han creado una empresa de reciclaje de envases. Luis ha puesto 20 000 euros; Andrea, 30 000, y Paco, 50 000. Este año han obtenido unos beneficios de 400 000 euros. Calcula lo que le corresponde a cada uno si los beneficios se reparten proporcionalmente al dinero invertido.

48 Paula, Rosa y Miguel reparten folletos de propaganda en una campaña de ahorro de agua. Por el trabajo han cobrado 1 200 euros. Paula ha repartido 1 000 folletos; Rosa, 700, y Miguel, 300. Calcula cuánto dinero ha recibido cada uno si se divide de forma directamente proporcional a los folletos que ha repartido cada uno.

49 Don Servando tiene una finca de 168 000 metros cuadrados que ya no trabaja. Ofrece alquilársela a 3 vecinos del pueblo para que pasten las vacas de cada uno. Decide repartir el terreno proporcionalmente al número de animales: Julián posee 33 vacas; Jacinto, 25, y Jacobo, 42. ¿Qué cantidad de terreno le corresponde a cada uno?



I. Proporcionalidad numérica

6 Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes, a y b, son **inversamente proporcionales** cuando el producto de las cantidades correspondientes es constante, k. Este producto se llama **constante de proporcionalidad inversa.**

$$k = a \cdot b$$

PASO A PASO

50 ***La siguiente tabla proporciona el número de horas que se precisan para hacer un trabajo según el número de operarios que lo realizan. Comprueba que son magnitudes inversamente proporcionales. Escribe la constante de proporcionalidad inversa.***

Horas	1	2	3	6
Operarios	18	9	6	3

1.° Multiplicamos las cantidades correspondientes: $1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 = 6 \cdot 3 = 18$

2.° Comprobamos que el producto es siempre 18, que es la constante de proporcionalidad inversa.

El número de horas es inversamente proporcional al número de operarios.

La constante de proporcionalidad inversa es 18.

51 Completa las siguientes tablas para que representen valores de magnitudes inversamente proporcionales. Escribe la constante de proporcionalidad en cada caso.

a)

x	2	3		6
y		24	18	

$x \cdot y =$ ……………

b)

u		2	3	6
v	12		4	

$u \cdot v =$ ……………

52 Completa la tabla para que represente valores de magnitudes inversamente proporcionales, de constante de proporcionalidad 144.

m		36		12
n	2		6	

14

53 Un tren que va a 120 kilómetros por hora tarda 8 horas en realizar un trayecto. ¿Qué velocidad debe llevar si quiere recorrer el trayecto en 6 horas?

1.º Construimos un esquema con los datos del problema.

8 h ——— 120 km/h
6 h ——— x

2º Hallamos la constante de proporcionalidad inversa:

$6 \cdot x = 8 \cdot 120 = 960$

3º Despejamos la incógnita x:

$x = \frac{960}{6} = 160$

El tren debería ir a 160 km/h.

54 Resuelve las siguientes reglas de tres simples inversas.

a) 4 ——— 12
6 ——— x

b) 3 ——— 50
5 ——— x

c) 14 ——— 22
4 ——— x

d) 48 ——— 36
20 ——— x

55 Para hacer el traslado de casa, María compra 180 cajas y empaqueta 12 libros en cada caja. ¿Cuántas cajas necesitaría si pudiera meter 20 libros en cada una?

56 En hacer un tramo de carretera, 18 máquinas han tardado 25 días. ¿Cuántas máquinas serían necesarias para hacer el mismo tramo de carretera en 15 días?

57 Para hacer una excursión, un centro escolar contrata 12 autobuses de 36 plazas cada uno, con lo que cubre todas las plazas. Pero la empresa les dice que también tiene autobuses de 48 plazas, y salen más baratos. ¿Cuántos de estos autobuses serían necesarios?

15

UN PASO MÁS

58 Cinco pintores tardaron 6 días en pintar la casa de mis padres. Si mi casa mide aproximadamente lo mismo y tardaron 3 días, ¿cuántos pintores trabajaron en ella?

59 Julián ha ido al pueblo de su madre a una velocidad de 90 kilómetros por hora y ha tardado 4 horas en llegar. Calcula cuánto tardará en el viaje de vuelta si lleva una velocidad de 60 kilómetros por hora.

60 Juana tarda 45 minutos en llenar el depósito de gasolina del camión cisterna que conduce con un surtidor que echa 30 litros por minuto. Calcula cuánto tardará en llenar un depósito igual con un surtidor que echa 25 litros por minuto.

61 En un campamento con 200 refugiados tienen alimentos para 28 días. Calcula para cuántos días tendrán alimentos si llegan 150 personas más y las raciones siguen iguales.

62 Beatriz y un grupo de amigos han ido a limpiar el monte de basura. Han recogido 1 200 kilogramos entre 45 personas y han tardado 8 horas. Calcula cuánto habrían tardado en recoger la misma cantidad de basura 60 personas.

PISA FUERTE

63 **Los Ramírez son una familia formada por los padres y una hija. Acaban de comprar leche para 10 días y galletas para 15 días. Al llegar a casa se encuentran en la puerta a sus primos Marco y Andrea, que han venido a pasar unos días con ellos. ¿Cuánto les durará ahora su provisión de leche y galletas?**

Al final, los primos Marco y Andrea estuvieron 3 días con los Ramírez. ¿Cuántos días más pudo nuestra familia seguir desayunando leche y galletas sin necesidad de ir a comprar?

1.º *Lee detenidamente el problema y contesta a las siguientes preguntas.*

– Al aumentar el número de personas en la casa, ¿durarán más o menos tiempo sus provisiones?

– ¿Las magnitudes serán directa o inversamente proporcionales?

2.º *Organiza, relaciona los datos y haz cálculos.*

– ¿Para cuántos días tienen reservas de leche?

– ¿Para cuántos días tienen reservas de galletas?

– Y cuando se fueron los primos Marco y Andrea, ¿para cuántos días más quedó leche?

– ¿Y para cuántos días más quedaron galletas?

B.- UNIDAD DIDÁCTICA (GRUPO EDEBÉ)

* ***Nota**: En esta editorial solamente se anexan las páginas utilizadas del libro de texto. No se usó la totalidad del libro. En la sección de actividades, únicamente se realizó el número 50.*

5

El desarrollo del cambio de marchas de una bicicleta es la razón de transmisión y corresponde a la distancia recorrida por cada pedalada que damos en nuestra bicicleta. Esta distancia varía según el número de dientes engranados tanto en el plato como en el piñón.

Por ejemplo, con un plato de 43 dientes y un piñón de 18 dientes, la razón de transmisión es $\frac{43}{18} = 2,38$; es decir, por cada vuelta de pedal que completa una vuelta en el plato, el piñón o la rueda trasera dan 2,38 vueltas.

Busca información en Internet sobre los desarrollos más habituales y averigua:

— ¿Cuál crees que es el desarrollo más adecuado para una subida?

— ¿Qué razón de transmisión utilizarías en una bajada fuerte?

Regla de tres simple inversa

La regla de tres simple inversa es un procedimiento para resolver problemas en los que intervienen dos magnitudes inversamente proporcionales, como puedes ver en el siguiente ejemplo.

ejemplo 7

Un ciclista que circula a una velocidad de 15 km/h tarda 4 h en recorrer un trayecto. ¿Cuánto tiempo tardará en completar el mismo trayecto otro ciclista cuya velocidad es de 20 km /h?

— Tenemos tres datos: 15 km/h , 4 h y 20 km/h.

— Debemos encontrar un cuarto número, que corresponde a las horas que tardará el segundo ciclista en recorrer el trayecto.

— Puesto que el tiempo invertido en recorrer una distancia es inversamente proporcional a la velocidad del ciclista, se cumplirá:

$$\frac{15}{20} = \frac{x}{4}$$

—Así:

$$15 \cdot 4 = 20 \cdot x \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 4}{20} = 3$$

El segundo ciclista tardará 3 h en recorrer el trayecto.

Repartos inversamente proporcionales

En ocasiones, queremos repartir una cantidad de forma inversamente proporcional a otras cantidades. Observa el siguiente ejemplo.

ejemplo 8

En una carrera automovilística, el primer clasificado ha tardado 1 hora, el segundo 5 minutos más que el primero y el tercero 1 minuto más que el segundo. Si el premio es de 972 €, ¿cómo debe repartirse este dinero entre los tres clasificados?

— Llamamos x, y, z a la cantidad de dinero que corresponde a cada clasificado.

Cantidad	Posición
x	1
y	2
z	3

— Los tiempos de los clasificados son: 60 minutos el primero, 65 minutos el segundo y 66 minutos el tercero.

— Como la cantidad que han de recibir será inversamente proporcional a la posición; es decir, directamente proporcional a la inversa de ésta, tendremos:

$$\frac{x}{\frac{1}{60}} = \frac{y}{\frac{1}{65}} = \frac{z}{\frac{1}{66}} =$$

$$= \frac{x+y+z}{\frac{1}{60}+\frac{1}{65}+\frac{1}{66}} = \frac{972}{\frac{27}{572}} = 20\,592$$

— Y, por lo tanto:

$$x = \frac{1}{60} \cdot 20\,592 = 343{,}2 \quad y = \frac{1}{65} \cdot 20\,592 = 316{,}8$$

$$z = \frac{1}{66} \cdot 20\,592 = 312$$

El primer clasificado debe recibir 343,2 €; el segundo clasificado, 316,8 € y el tercer clasificado, 312 €.

Actividades

20 Juana tarda 3 h en finalizar un recorrido a una velocidad constante de 60 km/h. ¿A qué velocidad debería ir para hacer el mismo recorrido en 2 horas y cuarto?

21 Tres grifos iguales llenan un depósito en 8 h. ¿Cuánto tiempo necesitarán 4 grifos del mismo tipo para llenar ese depósito?

22 Un fondo común de ayuda a la Unión Europea, que asciende a 95 millones de euros, debe repartirse entre tres regiones de forma inversamente proporcional a la renta per cápita anual de cada región, que es de 0,01, 0,02 y 0,025 millones de euros.

¿Cuánto dinero debe recibir cada región?

5. Proporcionalidad aritmética 107

3.2. Interés simple

Algunas de las actividades cotidianas en las que están presentes los porcentajes son la recepción y el pago de intereses y los descuentos comerciales.

A cambio de depositar dinero o capital en una entidad bancaria, cada cierto período de tiempo recibimos un porcentaje de la cantidad depositada; es decir, cobramos un interés.

Y, a cambio de pedir prestado dinero a una entidad bancaria, debemos pagar mensualmente un tanto por ciento de la cantidad solicitada. En este caso pagamos los intereses generados por el capital prestado.

Comprobemos en un ejemplo la aplicación de estas prácticas por parte de las entidades financieras.

FÍJATE

Si partimos de la fórmula del interés, podemos calcular cualquiera de los datos del problema.

$$I = c \cdot i \cdot n$$

- Si queremos saber el capital, hemos de despejar la *c*.

$$c = \frac{I}{i \cdot n}$$

- Si lo que queremos calcular es el tipo de interés unitario a que está sujeto el capital, despejaremos la *i*.

$$i = \frac{I}{c \cdot n}$$

- Finalmente, podemos determinar cuántos años ha durado la operación despejando la *n*.

$$n = \frac{I}{c \cdot i}$$

ejemplo 12

Una entidad financiera ofrece un 4,5 % anual por el depósito de un capital. Si depositamos 13 500 €, ¿qué interés nos producirá este capital en 3 años?

— En primer lugar, calculamos el interés que producirá el capital en un año.

$$4{,}5\ \%\ \text{de}\ 13\,500 = 0{,}045 \cdot 13\,500 = 607{,}5\ €$$

— Como nos piden el interés en 3 años, tenemos que multiplicar el resultado anterior por 3.

$$607{,}5 \cdot 3 = 1\,822{,}5\ €$$

En 3 años, 13 500 € producirán 1 822,5 € de interés al 4,5 % anual.

Observa que, para calcular el interés (*I*) que producen los 13 500 € del capital (*c*), se multiplica esta cantidad por el tipo de interés unitario (*i*) y, a continuación, se multiplica el resultado por el número de años (*n*).

Así pues, la fórmula para calcular el interés es:

$$I = c \cdot i \cdot n$$

La cantidad que produce un **capital** durante un periodo de **tiempo** a un **tipo** de interés determinado se denomina **interés.**

Si el tiempo no está expresado en años, antes de aplicar la fórmula del interés debemos buscar la equivalencia en años del tiempo dado.

Para ello, dividimos entre 4 si el tiempo está expresado en trimestres (*t*), entre 12 si está expresado en meses (*m*) o entre 360 si lo está en días (*d*).

$$n = \frac{t}{4} \quad ; \quad n = \frac{m}{12} \quad ; \quad n = \frac{d}{360}$$

Fíjate en el ejemplo siguiente.

FÍJATE

En las operaciones comerciales el número de días del año se redondea a 360.

ejemplo 13

Depositamos un capital de 3 000 € en una entidad financiera al 4 % anual. ¿Cuántos años deben pasar para que se convierta en 3 360 €?

— Aplicamos la fórmula que nos permite determinar directamente el tiempo que deberá transcurrir.

$$n = \frac{I}{c \cdot i} = \frac{360}{3000 \cdot 0{,}04} = 3$$

Deben pasar 3 años para que el capital inicial se convierta en 3 360 €.

110 | 5. Proporcionalidad aritmética

En las operaciones de préstamos puede suceder que devolvamos el dinero antes de lo que se había acordado inicialmente. En este caso, la entidad financiera nos descontará los intereses del capital que quedan por pagar correspondientes al tiempo que adelantamos el pago.

Veamos un ejemplo.

ejemplo 14

Nos quedan por pagar 1 500 € de un préstamo que vence dentro de 90 días. Si el tipo de interés es del 10 % anual, ¿cuánto nos descontarán si lo pagamos hoy mismo? ¿Cuánto tendremos que pagar?

— Calculamos el interés que corresponde a 90 días, expresados en años, aplicando la fórmula.

$$I = 1500 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{90}{360} = 37{,}5$$

Nos descontarán 37,5 €

— Calculamos la cantidad que tendremos que pagar.

$$1\,500 \text{ €} - 37{,}5 \text{ €} = 1\,462{,}5 \text{ €}$$

Tendremos que pagar 1 462,5 €.

Tipos de interés

Al igual que en la regla de tres, existen dos tipos de interés: **interés simple** e **interés compuesto.**

Un capital está sometido a un régimen de **interés simple** cuando, al finalizar el periodo mínimo de depósito, los intereses son retirados. Así, el capital obtenido será igual al capital inicial más el interés obtenido en el periodo determinado.

$$c_n = c + I_n = c + c \cdot i \cdot n$$

Un capital está sometido a un régimen de **interés compuesto** cuando, al finalizar el periodo mínimo de depósito, los intereses no se retiran y se añaden al capital para producir nuevos intereses. Así, el capital obtenido será:

$$c_n = c \cdot (1 + i)^n$$

Actividades

29 Calcula el interés que producen 3 000 € prestados al 8 % anual en 6 años. Vuelve a calcularlo si el tiempo del préstamo es de 8 meses.

30 Una pareja decide depositar 7 300 € en un banco durante 2 años. Si éste les ofrece un 4 % de tipo de interés anual, ¿a cuánto ascienden los intereses?

— ¿Cuánto dinero tendrán cuando hayan transcurrido dos años?

31 Averigua a qué tanto por ciento de interés se han prestado 210 € para que en 2 años y 1 mes hayan producido un interés de 26,25 €.

32 Calcula el capital que, prestado al 6 % anual durante 2 meses y 20 días, produce un interés de 8,8 €.

33 Pedro pone un capital al 5,75 % anual durante un año. Cuando acaba este periodo de tiempo comprueba que tiene 1 903,5 € en la cuenta. ¿Cuánto dinero había puesto al principio del año?

34 Un empresario ha de abonar 18 000 € por un préstamo que pidió hace tiempo y que debe pagar en 3 años. Si el tipo de interés es del 8 % anual, ¿cuánto le descontarán si lo paga ahora? ¿Cuánto dinero tendrá que pagar?

35 Por la compra de un ordenador personal se han de pagar 80 € cada mes durante 18 meses. Al cabo de un año, el comprador decide pagar los 6 meses que le quedan de una sola vez. ¿Cuánto tendrá que pagar si le hacen un descuento del 10 % anual?

36 Hemos de abonar un recibo de 450 € dentro de 30 días. Si lo pagamos ahora, nos descuentan el 12 % de interés anual. ¿Cuánto nos ahorramos por pagarlo antes? ¿Cuánto tendremos que pagar?

5. Proporcionalidad aritmética 111

48 Tres personas, al terminar un trabajo y proporcionalmente a las horas dedicadas, han recibido 1 600 €, 2 400 € y 3 000 €. Si la persona que ha dedicado menos horas ha trabajado 80 horas, ¿cuántas horas han trabajado las otras dos personas?

49 La tabla siguiente muestra la relación entre la velocidad de un coche y el tiempo que tarda en recorrer una determinada distancia.

Velocidad (km/h)	Tiempo empleado (h)
x	6
60	y
90	3
108	z

— Halla los valores de x, y, z.

50 Tres socios han creado una empresa aportando 2 000 €, 3 000 € y 5 000 €, y después de un tiempo se han repartido unos beneficios. Calcula los beneficios que se han repartido si el segundo socio ha recibido 200 € más que el primero.

51 Por dos motores de 4 y 6 caballos de vapor se han pagado 1 014 €. El primero tiene 2 400 h de funcionamiento y el segundo 5 400 h. ¿Cuánto se pagaría por cada uno si el precio se estableciese proporcionalmente al número de caballos de vapor?

— ¿Y si se estableciese en proporción inversa a la de las horas de funcionamiento?

52 Para ir de excursión, un grupo de jubilados contrata un autocar a un precio fijo. En un primer momento se apuntan 42 personas y calculan que cada una tendrá que pagar 6,65 €. Si, finalmente, sólo van 35 personas, ¿cuánto tendrá que pagar cada una?

— ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en este caso y qué significado tiene en el contexto del problema?

53 Un padre deja en herencia a sus tres hijos 24 000 €. En el testamento ha escrito que el dinero se tiene que repartir de manera directamente proporcional a las edades de los hijos. Si tienen 24, 25 y 31 años, ¿qué cantidad corresponde a cada uno de los hijos?

Porcentajes

54 Dos amigos reunieron 10 000 € de capital para iniciar un negocio. Al cabo de un año cada uno de ellos ha recibido unos beneficios equivalentes al 10 % y al 15 % del capital. Halla la cantidad de dinero que aportó cada amigo al iniciar el negocio.

55 ¿Cuál de las dos bombillas tiene el precio más rebajado?

56 *María paga 18,46 € por un libro de texto al que se ha aplicado un 4 % de IVA. Determina el precio del libro sin IVA.*

— Llamamos x al precio sin IVA.

— Como el aumento es del 4 %, 100 € se convertirán en 104 €. Así, planteamos la proporción siguiente:

$$\frac{x}{100} = \frac{18,46}{104} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 18,46}{104} = 17,75$$

El precio sin IVA era de 17,75 €.

57 La madre de Marcos paga 77,04 € en un restaurante. Si el 7 % corresponde al IVA, ¿cuál era el precio del almuerzo sin IVA?

58 Marcos compra un jersey en las rebajas por 41,58 €. Si le han hecho un descuento del 12 %, ¿cuál era el precio original del jersey?

59 Al comprar un objeto se le aplica un 16 % de IVA y pagamos 58 €. ¿Cuánto deberíamos pagar si el IVA sólo fuese del 7 %?

60 En unas elecciones municipales, el partido vencedor obtuvo el 48 % de los votos. Si el número total de votantes fue de 635 000, ¿cuántos votos obtuvo ese partido?

5. Proporcionalidad aritmética 115