Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria
y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster
Ámbito Matemáticas

Aplicación de las derivadas por estudiantes de 1º de bachiller (ciencias y tecnología).

Laura López Jiménez

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

Índice

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster (TFM) tiene como objetivo estudiar la aplicación de las derivadas por los estudiantes de primero de bachiller, especialidad ciencias y tecnología, en el horario nocturno.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre la aplicación de las derivadas por los estudiantes que se ha puesto en marcha en un aula de primero de bachiller, especialidad ciencias y tecnología, en el horario nocturno en el marco del Prácticum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido ad hoc, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

Las derivadas y su aplicación en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster analiza cómo se aborda el tratamiento de las derivadas y su aplicación en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y, en Bachillerato.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a las derivadas y su aplicación en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 1º de bachiller, así como en dos cursos anteriores y el único posterior.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo1
Las Derivadas y su aplicación en el currículo vigente

En este primer capítulo se va a analizar el contenido de mínimos que hay en el currículo oficial, para la educación Primaria, Secundaria y Bachillerato, para el tema de derivadas.

Estos contenidos de mínimos aparecen recogidos en los Boletines Oficiales del Estado, encontrándose en B.O.E. número 293 (Real Decreto 1513/2006), en el B.O.E. número 5 (Real Decreto 1631/2006) y en el B.O.E. número 266 (Real Decreto 1467/2007).

Dichos contenidos han sido agrupados en tres grupos: Educación Primaria, Secundaria y Bachiller.

1.1. Contenidos en Educación primaria

Tabla 1

Descriptor	**Primaria**		
	Primer ciclo	***Segundo ciclo***	***Tercer ciclo***
Derivadas	---	---	---
Tasa de variación	---	---	---
Pendiente de una recta	Bloque 3. Geometría. La situación en el espacio, distancias y giros. Uso de vocabulario geométrico para describir itinerarios: líneas abiertas y cerradas: rectas y curvas. Interpretación y descripción verbal de croquis de itinerarios y elaboración de los mismos.	Bloque 3. Geometría. La situación en el espacio, distancias, ángulos y giros. Las líneas como recorrido: rectas y curvas, intersección de rectas y rectas paralelas.	---
Límites	---	---	---
Análisis de funciones y gráficas	---	---	Bloque 3. Geometría. -Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros... - La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.
Uso de tecnologías	Utilizar de forma adecuada los medios tecnológicos tanto en el cálculo como en la búsqueda, tratamiento y representación de informaciones diversas.		

1.2. Contenidos en ESO

Tabla 2

Descriptor	**E.S.O.**	
	Primer ciclo	
	1º E.S.O.	***2º E.S.O.***
Derivadas	Bloque 3. Álgebra. -Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas. Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.	Bloque 3. Álgebra. -El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. -Obtención del valor numérico de una expresión algebraicas. -Significado de las ecuaciones y de las soluciones de la ecuación. -Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución. -Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas.
Tasa de variación	---	---
Pendiente de una recta	---	---
Límites	---	---
Análisis de funciones y gráficas	Bloque 5. Funciones y gráficas. -Coordenadas cartesianas. Representación de puntos en un sistema de ejes coordenados. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas. - Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla o representadas en una gráfica. - Detección de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación.	Bloque 5. Funciones y gráficas. -Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica. - Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. - Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla. - Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.
Uso de tecnologías	Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.	

Tabla 3a

Descriptor	**E.S.O.**		
	Segundo ciclo		
	3º E.S.O.	***4º E.S.O. – A***	***4º E.S.O.- B***
Derivadas	Bloque 3. Álgebra. -Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico. Transformación de expresiones algebraicas.	---	---
Tasa de variación	---	Bloque 5. Funciones y gráficas. - La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.	Bloque 5. Funciones y gráficas. - La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.
Pendiente de una recta	Bloque 5. Funciones y gráficas. - Utilización de las distintas formas de representar la ecuación de la recta.	---	---
Límites	---	---	---
Análisis de funciones y gráficas	Bloque 5. Funciones y gráficas. - Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. - Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte. - Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.	Bloque 5. Funciones y gráficas. -Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de los resultados.	Bloque 5. Funciones y gráficas. -Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de los resultados.

Tabla 3b

Descriptor	**E.S.O.**		
	Segundo ciclo		
	3º E.S.O.	***4º E.S.O. – A***	***4º E.S.O.- B***
Uso de tecnologías	Bloque 5. Funciones y gráficas. -Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas.	Bloque 5. Funciones y gráficas. -Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Utilización de tecnologías de la información para su análisis.	Bloque 5. Funciones y gráficas. -Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales. Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.
	Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.		

1.3. Contenidos en Bachillerato

Contenidos en Matemáticas de Bachillerato aplicadas a las Ciencias

Tabla 4

Descriptor	**Bachillerato**	
	Ciencias	
	1º	***2º***
Derivadas	Análisis: -Aproximación al concepto de derivada. Extremos relativos en un intervalo.	Análisis: -Interpretación geométrica y física del concepto de derivada en un punto. -Función derivada. Cálculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función. Problemas de optimización.
Tasa de variación	---	---
Pendiente de una recta	Geometría. -Ecuaciones de la recta.	Geometría: -Ecuaciones de la recta.
Límites	Análisis: -Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad.	Análisis -Concepto de límite de una función. Cálculo de límites.

Tabla 5

Descriptor	Bachillerato	
	Ciencias	
	1º	*2º*
Análisis de funciones y gráficas	Análisis: - Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. - Dominio, recorrido y extremos de una función. - Operaciones y composición de funciones. -Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.	Análisis: -Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad.
Uso de tecnologías	Emplear los recursos aportados por las tecnologías actuales para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de fenómenos dinámicos, ahorrar tiempo en los cálculos y servir como herramienta en la resolución de problemas.	

Contenidos en Matemáticas de Bachillerato aplicadas a las Ciencias Sociales

Tabla 6a

Descriptor	Bachillerato	
	Ciencias Sociales	
	1º	*2º*
Derivadas	---	Análisis: -Derivada de una función en un punto. Aproximación al concepto e interpretación geométrica. -Aplicación de las derivadas al estudio de las propiedades locales de funciones habituales y a la resolución de problemas de optimización relacionados con las ciencias sociales y la economía.
Tasa de variación	---	---
Pendiente de una recta	---	---
Límites	---	Análisis: - Aproximación al concepto de límite a partir de la interpretación de la tendencia de una función. Concepto de continuidad. Interpretación de los diferentes tipos de discontinuidad y de las tendencias asintóticas en el tratamiento de la información.

Tabla 6b

Descriptor	**Bachillerato**	
	Ciencias Sociales	
	1º	***2º***
Análisis de funciones y gráficas	Análisis: -Expresión de una función en forma algebraicas, por medio de tablas o de gráficas. Aspectos globales de una función. Utilización de las funciones como herramienta para la resolución de problemas y la interpretación de fenómenos sociales y económicos. - Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera y racionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos. - Tasa de variación. Tendencias.	Análisis: -Estudio y representación gráfica de una función polinómica o racional sencilla a partir de sus propiedades globales.
Uso de tecnologías	Emplear los recursos aportados por las tecnologías actuales para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de fenómenos dinámicos, ahorrar tiempo en los cálculos y servir como herramienta en la resolución de problemas.	

Capítulo 2

Criterios de evaluación de las derivadas y su aplicación en el currículo vigente

En este segundo capítulo se recopilan los criterios de evaluación que existen para el tema de derivadas en los Reales Decretos anteriormente analizados.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

Tabla 7a

Descriptor	**Primaria**		
	Primer ciclo	***Segundo ciclo***	***Tercer ciclo***
Derivadas	---	---	---
Tasa de variación	---	---	---
Pendiente de una recta	Reconocer en el entorno inmediato objetos y espacios con formas rectangulares, triangulares, circulares, cúbicas y esféricas. Este criterio pretende valorar la capacidad de reconocer en el entorno las formas geométricas planas o espaciales más elementales. Es importante valorar la capacidad de recibir y emitir informaciones de modo oral o escrito sobre los espacios familiares, utilizando con propiedad los términos propios del ciclo.	Obtener información puntual y describir una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de una pista…) tomando como referencia objetos familiares y utilizarlas nociones básicas de movimientos geométricos, para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana y para valorar expresiones artísticas. Este criterio pretende evaluar capacidades de orientación y presentación espacial, teniendo en cuenta tanto el lenguaje utilizado como la representación en el plano de objetos y contextos cercanos, valorando la utilización de propiedades geométricas (alineamiento, paralelismo, perpendicularidad…) como elementos de referencia para describir situaciones espaciales. Asimismo, se pretende apreciar la adecuada utilización de los movimientos en el plano tanto para emitir y recibir informaciones sobre situaciones cotidianas, como para identificar y reproducir manifestaciones artísticas que incluyan simetrías y traslaciones.	---
Límites	---	---	---

Tabla 7b

Descriptor	**Primaria**		
	Primer ciclo	***Segundo ciclo***	***Tercer ciclo***
Análisis de funciones y gráficas			6. Interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares. Este criterio pretende evaluar el desarrollo de capacidades espaciales en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y, en ciertos casos, ejes de coordenadas, mediante representaciones de espacios familiares.
Uso de tecnologías	---	---	---

2.2. Criterios de evaluación en ESO

Tabla 8a

Descriptor	**E.S.O.**	
	Primer ciclo	
	1º E.S.O.	***2º E.S.O.***
Derivadas	3. Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números, utilizar letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas. Este criterio pretende comprobar la capacidad para percibir en un conjunto numérico aquello que es común, la secuencia lógica con que se ha construido, un criterio que permita ordenar sus elementos y, cuando sea posible, expresar algebraicamente la regularidad percibida. Se pretende, asimismo, valorar el uso del signo igual como asignador y el manejo de la letra en sus diferentes acepciones. Forma parte de este criterio también la obtención del valor numérico en fórmulas simples de una sola letra.	3. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas. Se pretende comprobar la capacidad de utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas y simbolizar relaciones, así como plantear ecuaciones de primer grado para resolverlas por métodos algebraicos y también por métodos de ensayo y error. Se pretende evaluar, también, la capacidad para poner en práctica estrategias personales como alternativa al álgebra a la hora de plantear y resolver los problemas. Asimismo, se ha de procurar valorar la coherencia de los resultados.

Tabla 8b

Descriptor	**E.S.O.**	
	Primer ciclo	
	1º E.S.O.	***2º E.S.O.***
Tasa de variación	---	---
Pendiente de una recta	---	---
Límites	---	---
Análisis de funciones y de gráficas	6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.	5. Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado. Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, en especial el paso de la gráfica correspondiente a una relación de proporcionalidad a cualquiera de los otros tres: verbal, numérico o algebraico. Se trata de evaluar también la capacidad de analizar una gráfica y relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.
Representación e interpretación gráfica	6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.	5. Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado. Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, en especial el paso de la gráfica correspondiente a una relación de proporcionalidad a cualquiera de los otros tres: verbal, numérico o algebraico. Se trata de evaluar también la capacidad de analizar una gráfica y relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.
Uso de tecnologías	**---**	**---**

Tabla 9a

Descriptor	**E.S.O.**		
	Segundo ciclo		
	3º E.S.O.	***4º E.S.O. – A***	***4º E.S.O.- B***
Derivadas	2. Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos. A través de este criterio, se pretende comprobar la capacidad de extraer la información relevante de un fenómeno para transformarla en una expresión algebraica. En lo referente al tratamiento de pautas numéricas, se valora si se está capacitado para analizar regularidades y obtener expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas.	---	---

Tabla 9b

Descriptor	**E.S.O.**		
	Segundo ciclo		
	3º E.S.O.	***4º E.S.O. – A***	***4º E.S.O.- B***
Tasa de variación	---	2. Aplicar porcentajes y tasas a la resolución de problemas cotidianos y financieros, valorando la oportunidad de utilizar la hoja de cálculo en función de la cantidad y complejidad de los números. Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para aplicar porcentajes, tasas, aumentos y disminuciones porcentuales a problemas vinculados a situaciones financieras habituales y a valorar la capacidad de utilizar las tecnologías de la información para realizar los cálculos, cuando sea preciso.	4. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático, de proporcionalidad inversa, exponencial o logarítmica, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información. Además, a la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de la tasa de variación media a partir de los datos gráficos, numéricos o valores concretos alcanzados por la expresión algebraica.
Pendiente de una recta	---	---	---
Límites	---	---	---

Tabla 9c

Descriptor	**E.S.O.**		
	Segundo ciclo		
	3º E.S.O.	***4º E.S.O. – A***	***4º E.S.O.- B***
Análisis de funciones y de gráficas	5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica. Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.	4. Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales. Se pretende comprobar el desarrollo de estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta. 5. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático o exponencial, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información. 6. Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento. A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de las tasas de variación a partir de los datos gráficos o numéricos.	---
Uso de tecnologías	---	---	---

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

Bachillerato aplicado a las ciencias

Tabla 10a

Descriptor	**Bachillerato**	
	Ciencias	
	1º	***2º***
Derivadas	---	5. Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. En concreto, se pretende comprobar la capacidad de extraer conclusiones detalladas y precisas sobre su comportamiento local o global, traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y encontrar valores que optimicen algún criterio establecido. 6. Aplicar el cálculo de integrales en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables. Este criterio pretende evaluar la capacidad para medir el área de una región plana mediante el cálculo integral, utilizando técnicas de integración inmediata, integración por partes y cambios de variables sencillos.
Tasa de variación		
Pendiente de una recta		
Límites	---	5. Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. En concreto, se pretende comprobar la capacidad de extraer conclusiones detalladas y precisas sobre su comportamiento local o global, traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y encontrar valores que optimicen algún criterio establecido.

Tabla 11b

Descriptor	**Bachillerato**	
	Ciencias	
	1º	***2º***
Análisis de funciones y de gráficas	2. Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. Particularmente, se pretende comprobar la capacidad de traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y extraer conclusiones sobre su comportamiento local o global. 5. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente. Se pretende comprobar con este criterio la capacidad de utilizar adecuadamente la terminología y los conceptos básicos del análisis para estudiar las características generales de las funciones y aplicarlas a la construcción de la gráfica de una función concreta. En especial, la capacidad para identificar regularidades, tendencias y tasas de variación, locales y globales, en el comportamiento de la función, reconocer las características propias de la familia y las particulares de la función, y estimar los cambios gráficos que se producen al modificar una constante en la expresión algebraica.	3. Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto. Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida. Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en álgebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente. 4. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas algebraicamente en forma explícita. Se pretende comprobar con este criterio que los alumnos son capaces de utilizar los conceptos básicos del análisis y que han adquirido el conocimiento de la terminología adecuada y los aplican adecuadamente al estudio de una función concreta.
Uso de tecnologías	---	---

Bachillerato aplicado a las Ciencias Sociales

Tabla 11

Descriptor	**Bachillerato**	
	Ciencias Sociales	
	1º	***2º***
Derivadas		2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, ecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas. Este criterio está dirigido a comprobar la capacidad de utilizar con eficacia el lenguaje algebraico tanto para plantear un problema como para resolverlo, aplicando las técnicas adecuadas. No se trata de valorar la destreza a la hora de resolver de forma mecánica ejercicios de aplicación inmediata, sino de medir la competencia para seleccionar las estrategias y herramientas algebraicas; así como la capacidad de interpretar críticamente el significado de las soluciones obtenidas. 4. Utilizar el cálculo de derivadas como herramienta para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una función y resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico o social. Este criterio no pretende medir la habilidad de los alumnos en complejos cálculos de funciones derivadas, sino valorar su capacidad para utilizar la información que proporciona su cálculo y su destreza a la hora de emplear los recursos a su alcance para determinar relaciones y restricciones en forma algebraica, detectar valores extremos, resolver problemas de optimización y extraer conclusiones de fenómenos relacionados con las ciencias sociales.
Tasa de variación	---	---
Pendiente de una recta	---	---
Límites	---	---

Tabla 12

Descriptor	**Bachillerato**	
	Ciencias Sociales	
	1º	***2º***
Análisis de funciones y de gráficas	2. Transcribir a lenguaje algebraico o gráfico una situación relativa a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas. Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir algebraica o gráficamente una situación y llegar a su resolución haciendo una interpretación contextualizada de los resultados obtenidos, más allá de la resolución mecánica de ejercicios que sólo necesiten la aplicación inmediata de una fórmula, un algoritmo o un procedimiento determinado. 4. Relacionar las gráficas de las familias de funciones con situaciones que se ajusten a ellas; reconocer en los fenómenos económicos y sociales las funciones más frecuentes e interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, gráficas o expresiones algebraicas. Se trata de evaluar la destreza para realizar estudios del comportamiento global de las funciones a las que se refiere el criterio: polinómicas; exponenciales y logarítmicas; valor absoluto; parte entera y racionales sencillas, sin necesidad de profundizar en el estudio de propiedades locales desde un punto de vista analítico. La interpretación, cualitativa y cuantitativa, a la que se refiere el enunciado exige apreciar la importancia de la selección de ejes, unidades, dominio y escalas. 5. Utilizar las tablas y gráficas como instrumento para el estudio de situaciones empíricas relacionadas con fenómenos sociales y analizar funciones que no se ajusten a ninguna fórmula algebraica, propiciando la utilización de métodos numéricos para la obtención de valores no conocidos. Este criterio está relacionado con el manejo de datos numéricos y en general de relaciones no expresadas en forma algebraica. Se dirige a comprobar la capacidad para ajustar a una función conocida los datos extraídos de experimentos concretos y obtener información suplementaria mediante técnicas numéricas.	3. Analizar e interpretar fenómenos habituales en las ciencias sociales susceptibles de ser descritos mediante una función, a partir del estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características. Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir al lenguaje de las funciones determinados aspectos de las ciencias sociales y para extraer, de esta interpretación matemática, información que permita analizar con criterios de objetividad el fenómeno estudiado y posibilitar un análisis crítico a partir del estudio de las propiedades globales y locales de la función.
Uso de tecnologías	---	---

Capítulo 3

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre las derivadas y su aplicación en libros de texto.

En este apartado se ha procedido a analizar los libros de textos de los niveles de ESO 3º y 4º, y de Bachiller 1º y 2º que se emplean en el centro en el que he realizado las prácticas docentes. Se han identificado los problemas, ejercicios y cuestiones tipo, que aparecen en cada uno de ellos.

3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO.

El libro que emplean en el centro en este nivel de 3º ESO, es el de la editorial "Santillana. Proyecto la Casa del Saber".

Esta editorial trata el tema sobre funciones, en el tema número 11-funciones y en el tema número 12-funciones lineales y afines.

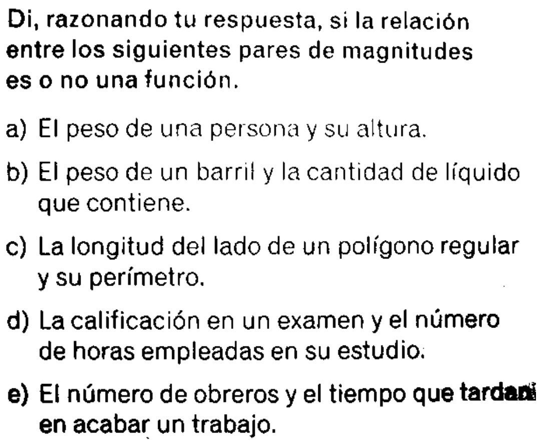
En el tema número 11 se tratan los siguientes aspectos:

- Concepto de función.
- Variable independiente, variable dependiente.
- Formas de definir una función (enunciado, expresión algebraica, tabla de valores, gráfica).
- Características de una función: discontinuidad (gráficas discretas, escalonadas), continuidad, dominio y recorrido, puntos de corte con los ejes, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, periodicidad, simetrías.

Existen distintos ejercicios tipo en este tema, a continuación mostramos los más interesantes:

CURSO 3º ESO. Tema 11.

- Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐Problema ☒Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Sirve para que el alumno aprenda a distinguir entre qué es una función y que no es una función.
- Ejemplo: Ejercicio 1 página 212.



Di, razonando tu respuesta, si la relación entre los siguientes pares de magnitudes es o no una función.

a) El peso de una persona y su altura.

b) El peso de un barril y la cantidad de líquido que contiene.

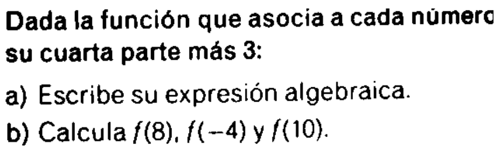
c) La longitud del lado de un polígono regular y su perímetro.

d) La calificación en un examen y el número de horas empleadas en su estudio.

e) El número de obreros y el tiempo que tardan en acabar un trabajo.

Ilustración 1

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Con el que se pretende que el alumno conozca distintas formas de expresar una función y que aprenda a obtener los valores que toman las variables dependientes a partir de valores de variables independientes. Se podría completar solicitando una tabla y una representación gráfica. En este enunciado falta una contextualización del problema.
- Ejemplo: Ejercicio 6 página 213.



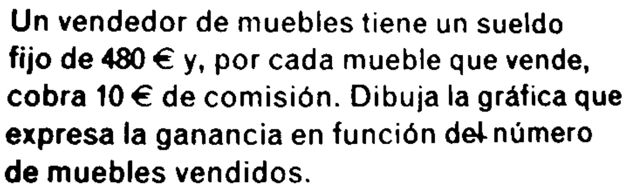
Dada la función que asocia a cada número su cuarta parte más 3:

a) Escribe su expresión algebraica.

b) Calcula $f(8)$, $f(-4)$ y $f(10)$.

Ilustración 2

- Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: En este ejercicio se pide al alumno que dibuje una gráfica que exprese la ganancia en función del número de muebles vendidos, en el enunciado debería estar incluido una petición de razonamiento sobre cómo serían las variables, discretas o escalonadas.
- Ejemplo: Ejercicio12 página 215.

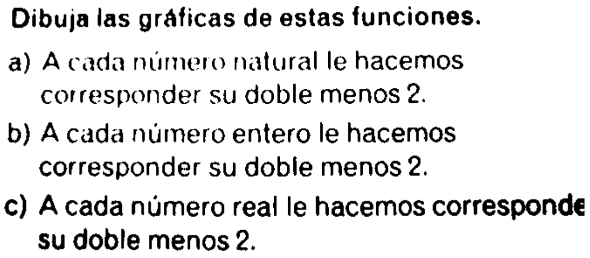


Un vendedor de muebles tiene un sueldo fijo de 480 € y, por cada mueble que vende, cobra 10 € de comisión. Dibuja la gráfica que expresa la ganancia en función del número de muebles vendidos.

Ilustración 3

CURSO 3º ESO. Tema 11.

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Este ejercicio permite que el alumno recuerde cuales son los números naturales, enteros y reales. Falta solicitar razonamiento sobre tipos de gráficas y su continuidad.
- Ejemplo: Ejercicio 16 página 216.



Dibuja las gráficas de estas funciones.

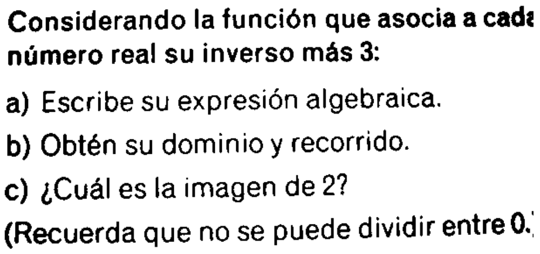
a) A cada número natural le hacemos corresponder su doble menos 2.

b) A cada número entero le hacemos corresponder su doble menos 2.

c) A cada número real le hacemos corresponde su doble menos 2.

Ilustración 4

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Este ejercicio permite repasar lo visto al comienzo de la unidad, por lo que se está produciendo una conexión entre los distintos aspectos vistos durante la misma y a la vez se solicitan nociones nuevas como son el dominio y el recorrido. Se podría completar solicitando su representación gráfica.
- Ejemplo: Ejercicio 20 página 217.



Considerando la función que asocia a cad número real su inverso más 3:

a) Escribe su expresión algebraica.

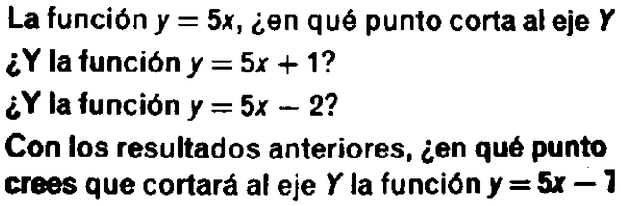
b) Obtén su dominio y recorrido.

c) ¿Cuál es la imagen de 2?

(Recuerda que no se puede dividir entre 0.

Ilustración 5

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Con este ejercicio se pretende varias cosas, una que el alumno practique los puntos de corte de una función con los ejes cartesianos y otra que el alumno se familiarice con el siguiente tema que son las funciones lineales y afines.
- Ejemplo: Ejercicio 26 página 218.



La función $y = 5x$, ¿en qué punto corta al eje Y

¿Y la función $y = 5x + 1$?

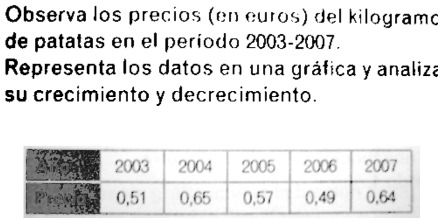
¿Y la función $y = 5x - 2$?

Con los resultados anteriores, ¿en qué punto crees que cortará al eje Y la función $y = 5x - 1$

Ilustración 6

<table>
<tr><th>CURSO 3º ESO. Tema 11.</th></tr>
<tr><td>

- Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: En este ejercicio se facilitan los datos a través de una tabla y se pide al alumno que represente los datos en una gráfica y posteriormente realice un análisis de su crecimiento y decrecimiento. Es un ejercicio contextualizado.
- Ejemplo: Ejercicio 28 página 219.



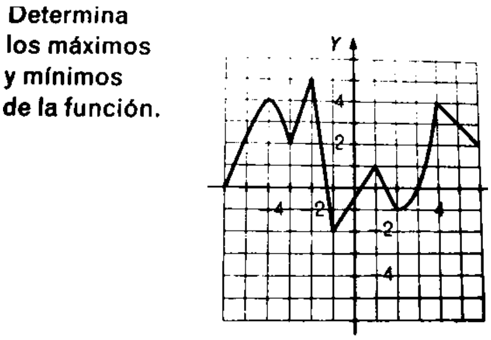
Observa los precios (en euros) del kilogram
de patatas en el periodo 2003-2007.
Representa los datos en una gráfica y analiz
su crecimiento y decrecimiento.

Año	2003	2004	2005	2006	2007
Precio	0,51	0,65	0,57	0,49	0,64

Ilustración 7

</td></tr>
<tr><td>

- Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐Problema ☒Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Con esta representación gráfica, se pretende que el alumno aplique lo que se ha explicado en la teoría, es decir que determine los máximos y los mínimos de la función. Se podría completar solicitando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función
- Ejemplo: Ejercicio 32 página 220.

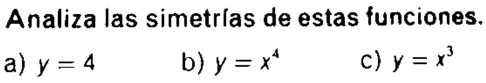


Determina los máximos y mínimos de la función.

Ilustración 8

</td></tr>
<tr><td>

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: En este ejercicio se solicita al alumno que analice las simetrías de las funciones. Se podría completar con la petición de su representación gráfica.
- Ejemplo: Ejercicio 37 página 221.



Analiza las simetrías de estas **funciones.**

a) $y = 4$ b) $y = x^4$ c) $y = x^3$

Ilustración 9

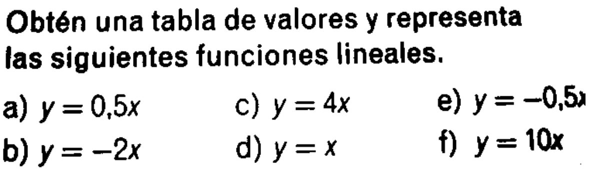
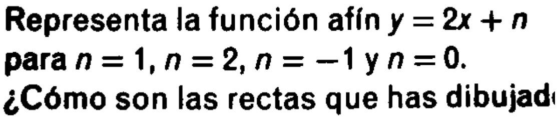
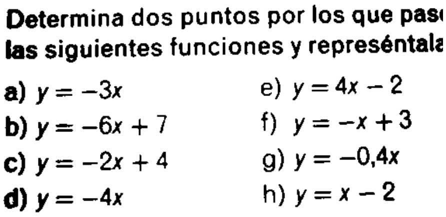
</td></tr>
</table>

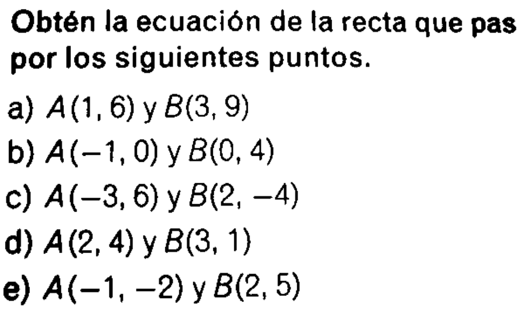
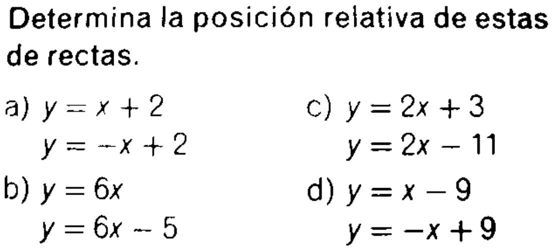
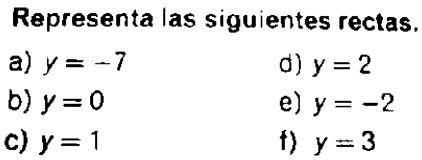
En el tema número 12 se tratan los siguientes aspectos:

- Función lineal.
- Función afín.
- Ecuaciones y gráficas.

- ❖ Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.
- ❖ Rectas secantes y paralelas.

Existen distintos ejercicios tipo en este tema, a continuación mostramos los más interesantes:

CURSO 3º ESO. Tema 12.
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: En este ejercicio se pretenden que representen funciones lineales a partir de una tabla de valores, se podría completar pidiendo que determinen pendiente y crecimiento y decrecimiento. • Ejemplo: Ejercicio 3 página 230.  **Obtén una tabla de valores y representa las siguientes funciones lineales.** **a)** $y = 0{,}5x$ c) $y = 4x$ **e)** $y = -0{,}5$ **b)** $y = -2x$ d) $y = x$ **f)** $y = 10x$ Ilustración 10
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: Este ejercicio pretende enlazar con el punto de rectas secantes y paralelas. Podría completarse son la solicitud de determinar pendiente y ordenada en el origen. • Ejemplo: Ejercicio 6 página 231.  **Representa la función afín $y = 2x + n$ para $n = 1$, $n = 2$, $n = -1$ y $n = 0$. ¿Cómo son las rectas que has dibujad** Ilustración 11
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: Con este ejercicio se podría aprovechar para solicitar los puntos de corte con los ejes y de esta forma hacer referencia al tema anterior. • Ejemplo: Ejercicio 9 página 232.  **Determina dos puntos por los que pas las siguientes funciones y represéntal** **a)** $y = -3x$ e) $y = 4x - 2$ **b)** $y = -6x + 7$ f) $y = -x + 3$ **c)** $y = -2x + 4$ g) $y = -0{,}4x$ **d)** $y = -4x$ h) $y = x - 2$ Ilustración 12

CURSO 3º ESO. Tema 12.
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: Con este ejercicio se pretende que el alumno ensaye lo visto en la teoría que es la obtención de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. • Ejemplo: Ejercicio 12 página 233.  **Obtén la ecuación de la recta que pas por los siguientes puntos.** **a)** $A(1, 6)$ y $B(3, 9)$ **b)** $A(-1, 0)$ y $B(0, 4)$ **c)** $A(-3, 6)$ y $B(2, -4)$ **d)** $A(2, 4)$ y $B(3, 1)$ **e)** $A(-1, -2)$ y $B(2, 5)$ Ilustración 13
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: En este ejercicio se solicita la posición relativa de las rectas, podría completarse con la obtención del punto de corte de las mismas cuando este exista. • Ejemplo: Ejercicio 16 página 234.  Determina la posición relativa de estas de rectas. a) $y = x + 2$ $y = -x + 2$ b) $y = 6x$ $y = 6x - 5$ c) $y = 2x + 3$ $y = 2x - 11$ d) $y = x - 9$ $y = -x + 9$ Ilustración 14
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: Con este ejercicio el alumno puede practicar la representación de distintas rectas paralelas al eje de abscisas, se podría completar añadiendo rectas paralelas al eje x y solicitando su punto de corte. • Ejemplo: Ejercicio 20 página 235.  **Representa las siguientes rectas.** a) $y = -7$ b) $y = 0$ c) $y = 1$ d) $y = 2$ e) $y = -2$ f) $y = 3$ Ilustración 15

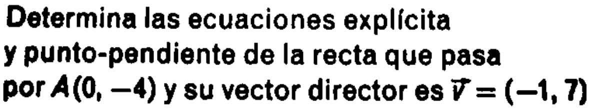
3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO.

Los libros que emplean en el centro en este nivel de 4º ESO son, para la opción A, "Opción A Matemáticas 4º ESO, editorial Santillana. Proyecto la Casa del Saber" y para la opción B, "Opción B Matemáticas 4º ESO, editorial Santillana. Proyecto la Casa del Saber".

Esta editorial en la opción de 4º A trata la ecuación punto-pendiente y explícita, en el tema número 9 "vectores y rectas" y las funciones en el tema número 10 "funciones", y en la opción de 4ºB en los temas 8 "vectores y rectas" y 9 "funciones". Siendo el contenido de ambas opciones el mismo.

CURSO 4º ESO. Tema 9 (opción A) Tema 8 (opción B)

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se pide al alumno que determine las ecuaciones, explícita y punto pendiente de la recta que pasa por un punto y conocido su vector director. Se podría completar con una petición al alumno para que especifique una vez halladas las ecuaciones qué es la pendiente y qué es la ordenada en el origen
- Ejemplo: Ejercicio 25 página 165.



Determina las ecuaciones explícita y punto-pendiente de la recta que pasa por $A(0, -4)$ y su vector director es $\vec{v} = (-1, 7)$

Ilustración 16

.

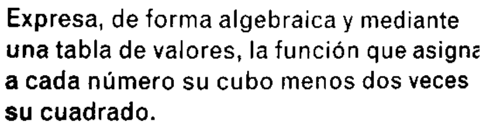
En el tema número 10, se ven de nuevo los conceptos de 3º

- Concepto de función.
- Tablas y gráficas.
- Dominio y recorrido de una función.
- Funciones definidas a trozos.
- Propiedades de las funciones, (puntos de corte con los ejes, continuidad, crecimiento y decrecimiento, simetrías y periodicidad.

Existen distintos ejercicios tipo en este tema, a continuación mostramos los más interesantes:

CURSO 4º ESO. Tema 10 (opción A) Tema 9 (opción B)

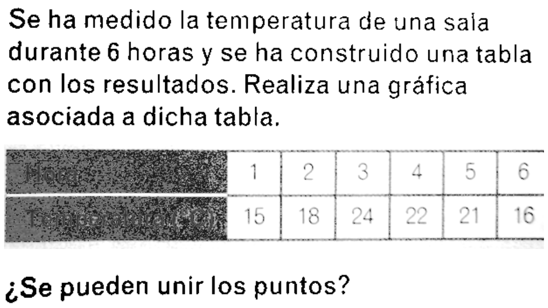
- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Este ejercicio sirve para que el alumno comprenda las distintas formas que puede tener una función.
- Ejemplo: Ejercicio 1 página 176.



Expresa, de forma algebraica y mediante una tabla de valores, la función que asigna a cada número su cubo menos dos veces su cuadrado.

Ilustración 17

- Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: En este ejercicio se solicita una representación gráfica de unos datos que vienen recogidos en una tabla de un ejercicio.
- Ejemplo: Ejercicio 4 página 177.



Se ha medido la temperatura de una sala durante 6 horas y se ha construido una tabla con los resultados. Realiza una gráfica asociada a dicha tabla.

Hora	1	2	3	4	5	6
Temperatura (°C)	15	18	24	22	21	16

¿Se pueden unir los puntos?

Ilustración 18

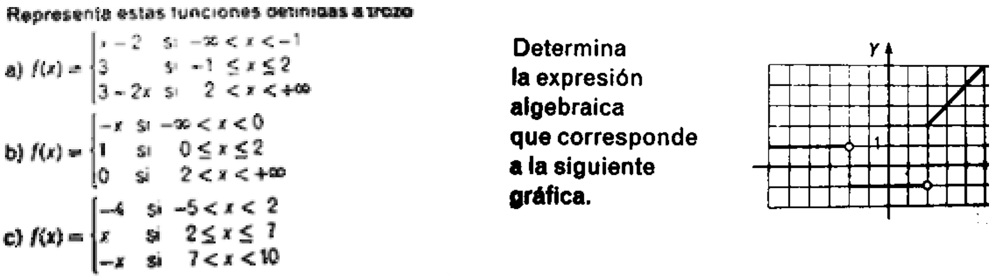
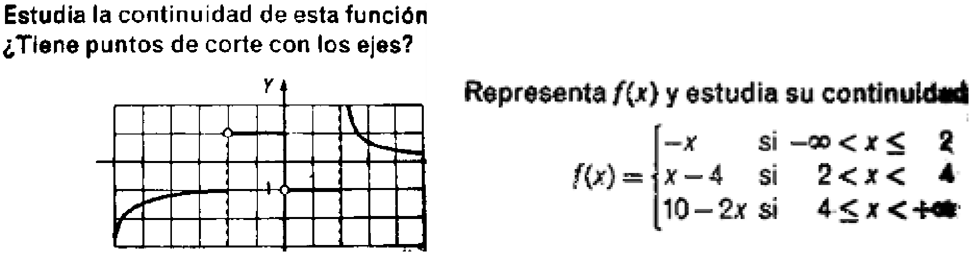
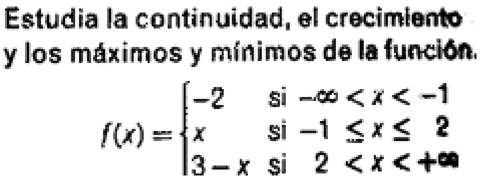
- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Aquí se muestra un ejemplo de lo que se realiza durante este capítulo, primero se solicita en el primer ejercicio que a partir de una gráfica se determine su dominio y recorrido y en el segundo se pide calcular a partir de la expresión algebraica de la función el dominio y recorrido de la misma.
- Ejemplo: Ejercicio 7 y 8 página 178.

A partir de la gráfica de esta función, determina su dominio y su recorrido.

Halla el dominio y el recorrido de esta función.

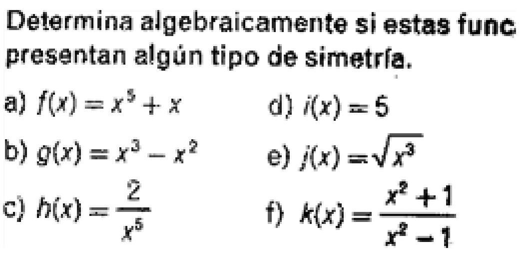
$$f(x) = \frac{5}{x-1}$$

Ilustración 19

CURSO 4º ESO. Tema 10 (opción A) Tema 9 (opción B)
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: De nuevo se repite la misma mecánica, primero se pide representar funciones definidas a trozos y luego se solicita obtener la expresión algebraica de una gráfica de una función definida a trozos • Ejemplo: Ejercicio 10 y 11 página 179.  Represenia estas funciones definidas a trozo a) $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } -\infty < x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ 3-2x & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\infty < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } -5 < x < 2 \\ x & \text{si } 2 \le x \le 7 \\ -x & \text{si } 7 < x < 10 \end{cases}$ Determina la expresión algebraica que corresponde a la siguiente gráfica.   Ilustración 20
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: De nuevo dan una representación gráfica para estudiar la continuidad y luego de una expresión algebraica solicitan lo mismo • Ejemplo: Ejercicio 13 y 14 página 180  Estudia la continuidad de esta función ¿Tiene puntos de corte con los ejes?   Ilustración 21 Representa $f(x)$ y estudia su continuidad $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\infty < x \le 2 \\ x-4 & \text{si } 2 < x < 4 \\ 10-2x & \text{si } 4 \le x < +\infty \end{cases}$
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: En este ejercicio han añadido una noción anterior como es la continuidad, con el crecimiento y máximos y mínimos de la función. Se podría haber completado con la petición de los puntos de corte con los ejes. • Ejemplo: Ejercicio 17 página 181.  Estudia la continuidad, el crecimiento y los máximos y mínimos de la función. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -\infty < x < -1 \\ x & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ 3-x & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$ Ilustración 22

CURSO 4º ESO. Tema 10 (opción A) Tema 9 (opción B)

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: En este ejercicio se pide la comprobación algebraica de la existencia de algún tipo de simetría.
- Ejemplo: Ejercicio 20 página 183.



Determina algebraicamente si estas func presentan algún tipo de simetría.

a) $f(x) = x^5 + x$

b) $g(x) = x^3 - x^2$

c) $h(x) = \frac{2}{x^5}$

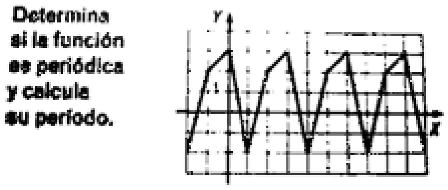
d) $i(x) = 5$

e) $j(x) = \sqrt{x^3}$

f) $k(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

Ilustración 23

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: En este ejercicio se pide al alumno que determine si la función representada gráficamente es periódica y en caso afirmativo que calcule el período.
- Ejemplo: Ejercicio 22 página 183.



Determina si la función es periódica y calcule su período.

Ilustración 24

3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachiller

Ciencias

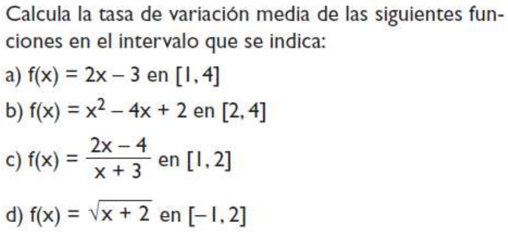
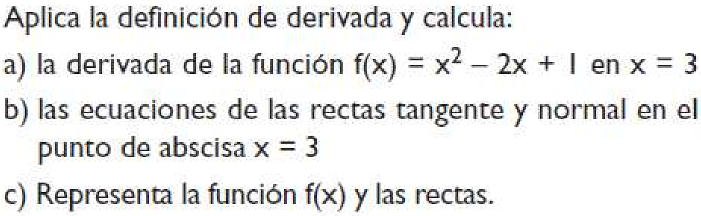
El libro de texto analizado es el que se emplea en el centro en este nivel es: “Bachillerato. Matemáticas 1. Ciencias y Tecnología” de la Editorial Bruño. El tema de “las derivadas” está desarrollado en la unidad 10, páginas 248-271 y el tema aplicación de las derivadas está desarrollado en la unidad 11, páginas 270-293.

En el tema 10 de “las derivadas” se ven los siguientes aspectos:

- **Tasa de variación media.**
- **Derivada de la función en un punto.**
- **Interpretación geométrica de la derivada.**
- Continuidad**.**
- **Derivabilidad.**
- **Función derivada.**

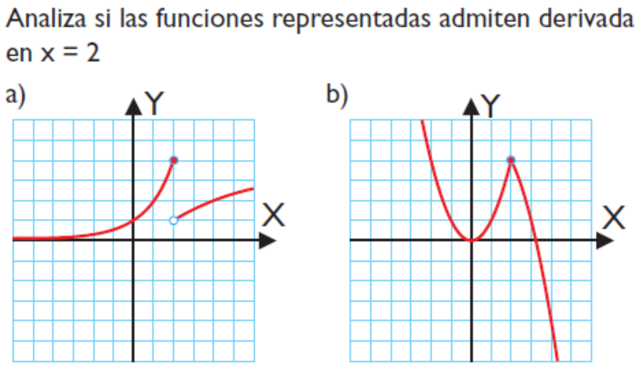
- **Tabla de derivadas.**
- **Regla de la cadena.**
- **Aplicación de las reglas de derivación.**
- **Derivadas sucesivas.**
- **Máximos y mínimos relativos y** monotonía.
- **Conceptos de, puntos de inflexión, curvatura y puntos críticos o singulares.**

Los ejercicios tipo de este tema se pueden agrupar de la siguiente manera:

CURSO 1º Bachiller especialidad Ciencias y Tecnología. Tema 10.
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: En él se solicita al alumno el cálculo de la tasa de variación media de distintas funciones en cada intervalo dado. • Ejemplo: Ejercicio 1 de la página 251.  Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica: a) $f(x) = 2x - 3$ en $[1, 4]$ b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en $[2, 4]$ c) $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 3}$ en $[1, 2]$ d) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ en $[-1, 2]$ **Ilustración 25**
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: En él se pide aplicar de la definición de derivada para el cálculo de la derivada de la función en un determinado punto, y obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal en ese mismo punto, representar la función y de las rectas • Ejemplo: Ejercicio 4 de la página 251.  Aplica la definición de derivada y calcula: a) la derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en $x = 3$ b) las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 3$ c) Representa la función f(x) y las rectas. **Ilustración 26**

CURSO 1º Bachiller especialidad Ciencias y Tecnología. Tema 10.

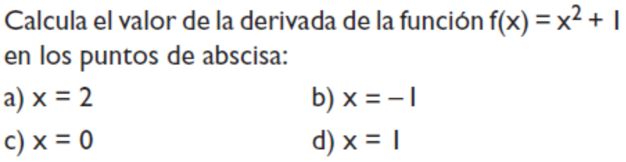
- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: En este ejercicio que se solicita un análisis de la derivabilidad en un determinado punto de las funciones representadas.
- Ejemplo: Ejercicio 6 de la página 253.



Analiza si las funciones representadas admiten derivada en $x = 2$

Ilustración 27

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se pide calcular el valor de la derivada de la función en determinados puntos. Este ejercicio se podría completar solicitando primero la función derivada, su representación junto con la función primera y pidiendo que se compruebe los valores que toman las abscisas dadas.
- Ejemplo: Ejercicio 8 de la página 253.



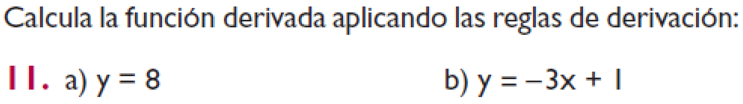
Calcula el valor de la derivada de la función $f(x) = x^2 + 1$ en los puntos de abscisa:

a) $x = 2$ b) $x = -1$

c) $x = 0$ d) $x = 1$

Ilustración 28

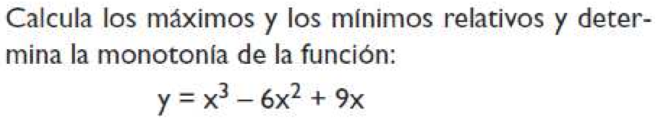
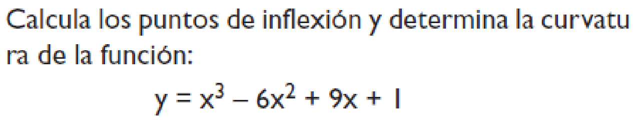
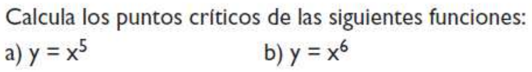
- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se pide cálculo de la función derivada aplicando las reglas de derivación a distintas funciones.
- Ejemplo: Ejercicio 11 de la página 255.



Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

11. a) $y = 8$ b) $y = -3x + 1$

Ilustración 29

CURSO 1º Bachiller especialidad Ciencias y Tecnología. Tema 10.
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: Se pide calcular los máximos y mínimos relativos y determinar la monotonía de distintos tipos de funciones. • Ejemplo: Ejercicio 23 de la página 257.  Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ Ilustración 30
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: Se solicita calcular los puntos de inflexión y determinación de la curvatura de distintos tipos de funciones. • Ejemplo: Ejercicio 31 de la página 259.  Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ Ilustración 31
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: Se pide calcular los puntos críticos de distintas funciones. • Ejemplo: Ejercicio 38 de la página 259.  Calcula los puntos críticos de las siguientes funciones: a) $y = x^5$ b) $y = x^6$ Ilustración 32

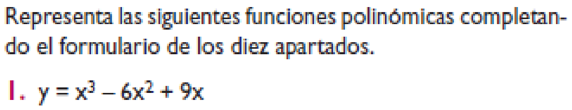
En el tema 11 de “aplicaciones de las derivadas” se ven los siguientes aspectos:

- Representación de funciones polinómicas.
- Representación de funciones racionales.
- **Problemas con condiciones.**
- **Aplicaciones de las derivadas a otras áreas.**
- **Problemas de optimización.**

Los ejercicios tipo se pueden agrupar de la siguiente manera:

CURSO 1º Bachiller especialidad Ciencias y Tecnología. Tema 11.

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se pide representación de una función siguiendo el formulario que se explica en el apartado de teoría.
- Ejemplo: Ejercicio 1 de la página 273.

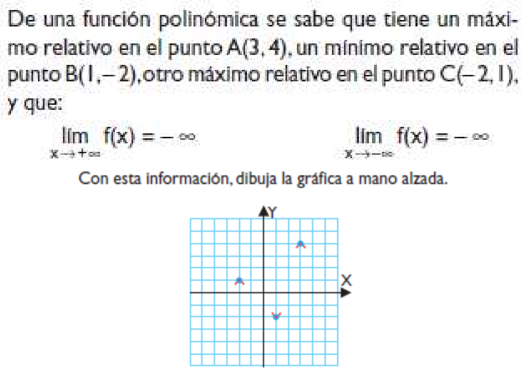


Representa las siguientes funciones polinómicas completando el formulario de los diez apartados.

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

Ilustración 33

- Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se solicita representación de una función polinómica conocidos varios datos como por ejemplo, las coordenadas del máximo relativo y mínimo relativo, y el comportamiento de la función cuando x tiende a +/- infinito.
- Ejemplo: Ejercicio 5 de la página 273.



De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto A(3, 4), un mínimo relativo en el punto B(1, – 2), otro máximo relativo en el punto C(– 2, 1), y que:

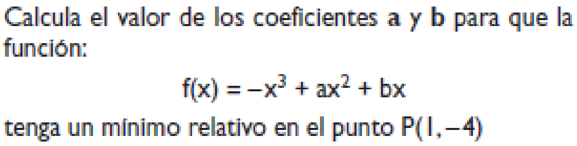
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.

Ilustración 34

CURSO 1º Bachiller especialidad Ciencias y Tecnología. Tema 11.

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se pide el cálculo de los coeficientes que definen una función de tal forma que tenga un punto crítico (mínimo, máximo o punto de inflexión) en tal punto
- Ejemplo: Ejercicio 10 de la página 277.



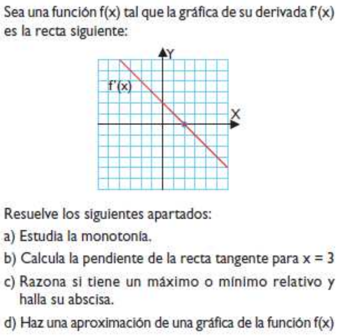
Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función:

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$$

tenga un mínimo relativo en el punto P(1, −4)

Ilustración 35

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: En el que se pide conocida la gráfica de la función derivada de una función, realización del estudio de la monotonía, cálculo de la pendiente de la recta tangente para una determinada abscisa, razonamiento de si tiene un máximo o mínimo relativo y cálculo de su abscisa, y realización de una aproximación gráfica de la función.
- Ejemplo: Ejercicio 11 de la página 277.



Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la recta siguiente:

Resuelve los siguientes apartados:

a) Estudia la monotonía.

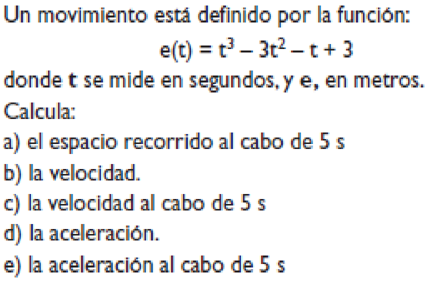
b) Calcula la pendiente de la recta tangente para $x = 3$

c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.

d) Haz una aproximación de una gráfica de la función f(x)

Ilustración 36

- Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se pide al alumno cálculo de la variación de una magnitud (variable dependiente) respecto a otra (variable independiente) así cómo realizar derivadas sucesiva. Se podría completar con la representación de la función, así como con el cálculo de los puntos críticos y su análisis e interpretación.
- Ejemplo: Ejercicio 14 de la página 279.



Un movimiento está definido por la función:

$$e(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3$$

donde t se mide en segundos, y e, en metros.

Calcula:

a) el espacio recorrido al cabo de 5 s

b) la velocidad.

c) la velocidad al cabo de 5 s

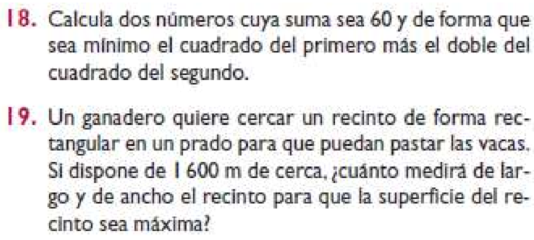
d) la aceleración.

e) la aceleración al cabo de 5 s

Ilustración 37

CURSO 1º Bachiller especialidad Ciencias y Tecnología. Tema 11.

- Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Estos dos ejercicios son problemas de optimización. El ejercicio 18 se corresponde a una relación entre números y el 19 es un problema geométrico. Para ambos hay que seguir el procedimiento de actuación descrito en la teoría.
- Ejemplo: Ejercicio 18 y 19 de la pátina 281.



18. Calcula dos números cuya suma sea 60 y de forma que sea mínimo el cuadrado del primero más el doble del cuadrado del segundo.

19. Un ganadero quiere cercar un recinto de forma rectangular en un prado para que puedan pastar las vacas. Si dispone de 1 600 m de cerca, ¿cuánto medirá de largo y de ancho el recinto para que la superficie del recinto sea máxima?

Ilustración 38

Ciencias Sociales

El libro de texto analizado es el que se emplea en el centro en este nivel es: “Bachillerato. Matemáticas 1. Ciencias de la naturaleza y de la salud-tecnología” de la Editorial Axis. El tema de “Iniciación al cálculo de derivadas. Aplicaciones” está desarrollado en la unidad 7, páginas 175-199.

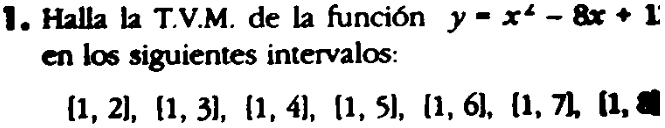
En el tema 7 se ven los siguientes aspectos (resaltado en **negrita** aspectos nuevos respecto a curso anterior):

- Crecimiento de una función en un intervalo.
- Crecimiento de una función en un punto. **Derivada.**
- **Función derivada de otra.**
- **Reglas para obtener las derivadas de algunas funciones.**
- **Utilidad de la función derivada.**
- **Representación de funciones polinómicas.**
- **Representación de funciones racionales.**

En este tema de “las derivadas” los ejercicios tipo se pueden agrupar de la siguiente manera:

CURSO 1º Bachiller especialidad Ciencias Sociales. Tema 7.

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: En él se solicita al alumno el cálculo de la tasa de variación media en distintos intervalos
- Ejemplo: Ejercicio 1 de la página 176

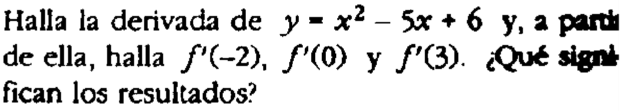


1. Halla la T.V.M. de la función $y = x^4 - 8x + 1$
en los siguientes intervalos:

[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [1, 7], [1,

Ilustración 39

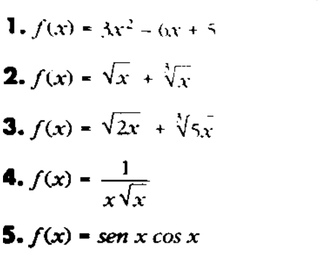
- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: En este ejercicio se solicita al alumno que calcule la función derivada y particularice para una serie de puntos. Además se le pide interpretación de los resultados
- Ejemplo: Ejercicio 2 de la página 180



Halla la derivada de $y = x^2 - 5x + 6$ y, a parti
de ella, halla $f'(-2)$, $f'(0)$ y $f'(3)$. ¿Qué signi
fican los resultados?

Ilustración 40

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: En este ejercicio se solicita al alumno que aplique las reglas de derivación
- Ejemplo: Ejercicios 1 al 5 de la página 181



Halla la función derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

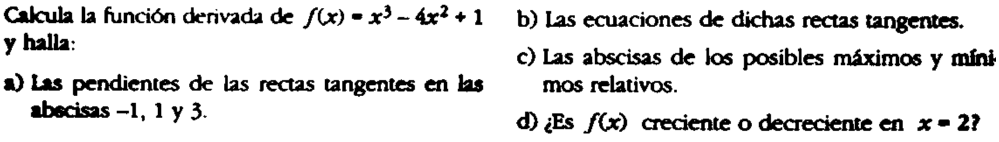
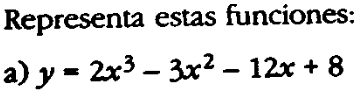
2. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

3. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

5. $f(x) = sen\ x \cos x$

Ilustración 41

CURSO 1º Bachiller especialidad Ciencias Sociales
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: En estos ejercicios se pide al alumno que calcule las ecuaciones de las rectas tangentes, sus pendientes, en determinados puntos y que estudie su crecimiento y decrecimiento así como las abscisas de los posibles máximos y mínimos. • Ejemplo: Ejercicio 1 de la página 183  **Calcula la función derivada de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ y halla:** **a) Las pendientes de las rectas tangentes en las abscisas −1, 1 y 3.** **b) Las ecuaciones de dichas rectas tangentes.** **c) Las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos.** **d) ¿Es $f(x)$ creciente o decreciente en $x = 2$?** Ilustración 42
• Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación • Descripción: En este ejercicio se solicita la representación de funciones. • Ejemplo: Ejercicio 1 de la página 186  **Representa estas funciones:** **a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$** Ilustración 43

3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º Bachiller

Ciencias

El libro de texto analizado es el que se emplea en el centro en este nivel es: “Bachillerato. Matemáticas 2. Ciencias de la naturaleza y de la salud-tecnología” de la Editorial Axis. El tema de “las derivadas” está desarrollado en la unidad 10, páginas 205-231 y el tema aplicación de las derivadas está desarrollado en la unidad 11, páginas 233-259.
En el tema 10 de “derivadas” se ven los siguientes aspectos (resaltado en **negrita** aspectos nuevos respecto a curso anterior):

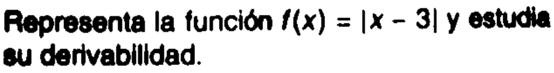
- Tasa de variación media.
- Derivada de la función en un punto.
- Función derivada.
- Interpretación geométrica de la derivada.
- **Derivadas laterales.**
- Continuidad.
- Derivabilidad.
- **Función diferencial en un punto.**

- ❖ Reglas de derivación.
- ❖ Derivadas sucesivas.
- ❖ Uso de los logaritmos en la derivación.
- ❖ **Derivadas de funciones implícitas.**
- ❖ **Estudio de la derivabilidad**.
- ❖ **Demostración de las reglas de derivación.**
- ❖ **“Teoremas fundamentales del cálculo diferencial”: teorema de Fermat, teorema de Rolle, teorema de Lagrange o del valor medio, regla de L´Hopital.**

En este tema de “las derivadas” los ejercicios tipo se pueden agrupar de la siguiente manera:

CURSO 2º Bachiller especialidad Ciencias y Tecnología. Tema 10

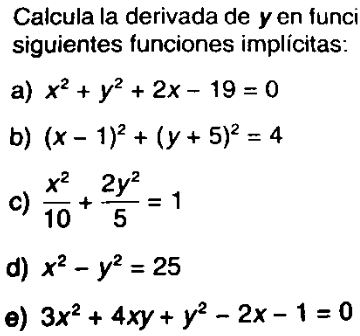
- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: En el que se solicita al alumno que realice la representación de una función y haba el estudio de su derivabilidad.
- Ejemplo: Ejercicio 4 de la página 210.



Representa la función $f(x) = |x - 3|$ y estudia su derivabilidad.

Ilustración 44

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se pide al alumno que calcule las derivadas de las funciones dadas, aplicando las reglas de derivación
- Ejemplo: Ejercicio 1 de la página 218.



Calcula la derivada de y en función de x de las siguientes funciones implícitas:

a) $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$

b) $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 4$

c) $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$

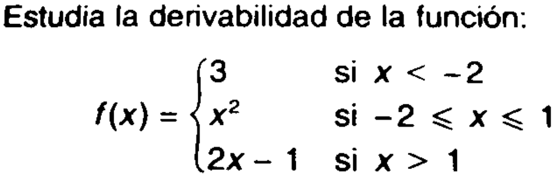
d) $x^2 - y^2 = 25$

e) $3x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 1 = 0$

Ilustración 45

CURSO 2º Bachiller especialidad Ciencias y Tecnología. Tema 10

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se solicita al alumno el estudio de la derivabilidad de una determinada función.
- Ejemplo: Ejercicio 6 de la página 218.

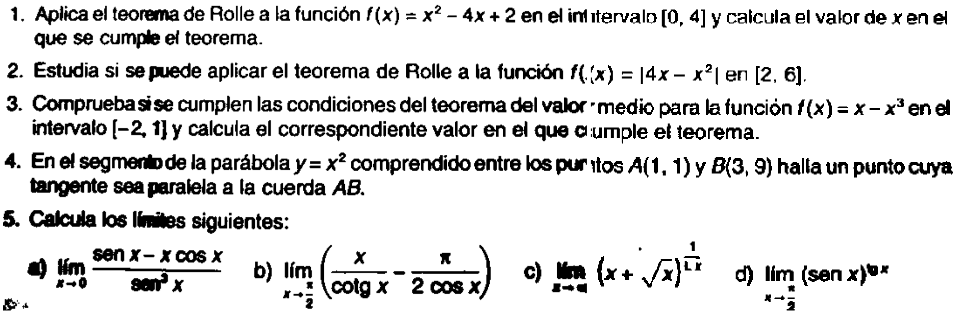


Estudia la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ilustración 46

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Son aplicación directa de la teoría vista dentro del apartado teoremas fundamentales del cálculo diferencial.
- Ejemplo: Ejercicios del 1 al 5 de la página 224.



1. Aplica el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en el intervalo [0, 4] y calcula el valor de x en el que se cumple el teorema.
2. Estudia si se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = |4x - x^2|$ en [2, 6].
3. Comprueba si se cumplen las condiciones del teorema del valor medio para la función $f(x) = x - x^3$ en el intervalo [−2, 1] y calcula el correspondiente valor en el que cumple el teorema.
4. En el segmento de la parábola $y = x^2$ comprendido entre los puntos $A(1, 1)$ y $B(3, 9)$ halla un punto cuya tangente sea paralela a la cuerda AB.
5. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x - x \cos x}{\text{sen}^3 x}$ b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{\text{cotg } x} - \dfrac{\pi}{2 \cos x} \right)$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x + \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{\text{L} x}}$ d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\text{sen } x)^{\text{tg } x}$

Ilustración 47

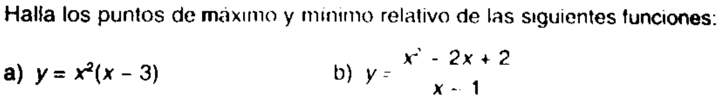
En el tema 11 de “aplicaciones de las derivadas” se ven los siguientes aspectos:

- Monotonía, máximos y mínimos.
- Curvatura y puntos de inflexión.
- Puntos críticos o singulares.
- Dominio y continuidad.
- Periodicidad.
- Simetrías.
- Asíntotas.
- Corte con los ejes y regiones.
- Gráfica.
- Recorrido e imagen.
- Aplicaciones geométricas.
- **Aplicaciones del teorema de Bolzano o de las raíces.**
- **Aplicaciones del teorema de Weierstrass.**
- Problemas de máximos y de mínimos.
- Cálculo de funciones con condiciones.
- Aplicaciones de otras áreas.

En el tema de “aplicaciones de las derivadas” los ejercicios tipo se pueden agrupar de la siguiente manera:

CURSO 2º Bachiller especialidad Ciencias y Tecnología. Tema 11.

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se solicita al alumno hallar los puntos de máximo y mínimo relativo. Se podría completar pidiendo que determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión
- Ejemplo: Ejercicio 1 de la página 240.

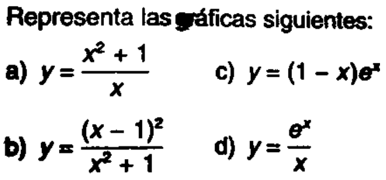


Halla los puntos de máximo y mínimo relativo de las siguientes funciones:

a) $y = x^2(x - 3)$ b) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

Ilustración 48

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se pide al alumno que represente distintas gráficas.
- Ejemplo: Ejercicio 1 de la página 248.



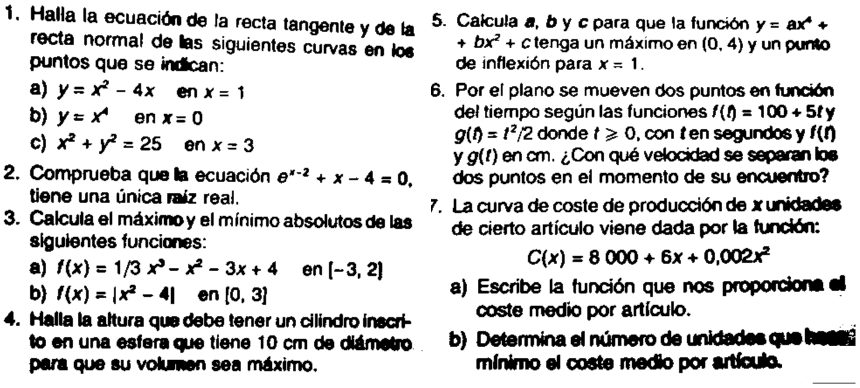
Representa las gráficas siguientes:

a) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ c) $y = (1 - x)e^x$

b) $y = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$ d) $y = \frac{e^x}{x}$

Ilustración 49

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Son distintos ejercicios en los que se piden otras aplicaciones de las derivadas, entre ellas la aplicación de los teoremas de Bolzano y Weierstrass.
- Ejemplo: Ejercicios 1 a 7 de la página 252.



1. Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal de las siguientes curvas en los puntos que se indican:
   - a) $y = x^2 - 4x$ en $x = 1$
   - b) $y = x^4$ en $x = 0$
   - c) $x^2 + y^2 = 25$ en $x = 3$
2. Comprueba que la ecuación $e^{x-2} + x - 4 = 0$, tiene una única raíz real.
3. Calcula el máximo y el mínimo absolutos de las siguientes funciones:
   - a) $f(x) = 1/3\ x^3 - x^2 - 3x + 4$ en $[-3, 2]$
   - b) $f(x) = |x^2 - 4|$ en $[0, 3]$
4. Halla la altura que debe tener un cilindro inscrito en una esfera que tiene 10 cm de diámetro para que su volumen sea máximo.
5. Calcula **a**, **b** y **c** para que la función $y = ax^4 + bx^2 + c$ tenga un máximo en (0, 4) y un punto de inflexión para $x = 1$.
6. Por el plano se mueven dos puntos en función del tiempo según las funciones $f(t) = 100 + 5t$ y $g(t) = t^2/2$ donde $t \geqslant 0$, con t en segundos y $f(t)$ y $g(t)$ en cm. ¿Con qué velocidad se separan los dos puntos en el momento de su encuentro?
7. La curva de coste de producción de x unidades de cierto artículo viene dada por la función:

   $$C(x) = 8\,000 + 6x + 0{,}002x^2$$

   - a) Escribe la función que nos proporciona el coste medio por artículo.
   - b) Determina el número de unidades que hacen mínimo el coste medio por artículo.

Ilustración 50

Ciencias Sociales

El libro de texto analizado es el que se emplea en el centro en este nivel es: “Bachillerato. Matemáticas 2. Matemáticas aplicadas a las Ciencias sociales” de la Editorial Anaya. El tema de “Derivadas. Técnicas de derivación” está desarrollado en la unidad 6, páginas 150-165 y el tema de “Aplicación de las derivadas” está desarrollado en la unidad 7, páginas 166-183.

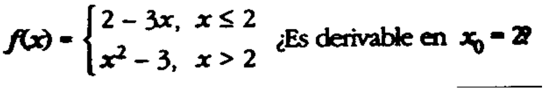
En el tema 6 de “Derivadas. Técnicas de derivación” se ven los siguientes aspectos (resaltado en **negrita** aspectos nuevos respecto a curso anterior):

- Derivada de una función en un punto
- Función derivada.
- Reglas de derivación.
- **Estudio de derivabilidad de una función definida a trozos**

En el tema 6 los ejercicios tipo se pueden agrupar de la siguiente manera:

CURSO 2º Bachiller especialidad Ciencias Sociales. Tema 6.

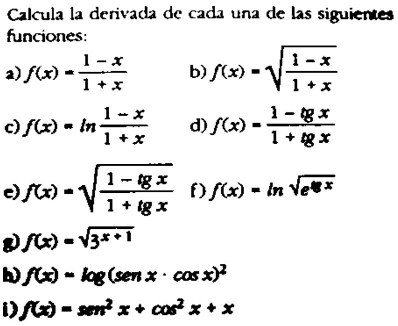
- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se solicita al alumno que estudie la derivabilidad.
- Ejemplo: Ejercicio 1 página 153.



$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, & x \le 2 \\ x^2 - 3, & x > 2 \end{cases}$$ ¿Es derivable en $x_0 = 2$?

Ilustración 51

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se pide cálculo de la derivada funciones concretas.
- Ejemplo: Ejercicio 1, página 157.



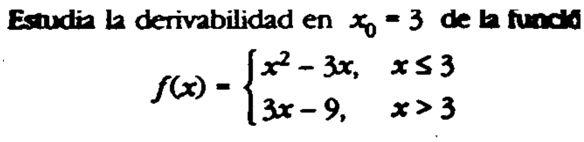
Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$
b) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
c) $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$
d) $f(x) = \frac{1-tg\,x}{1+tg\,x}$
e) $f(x) = \sqrt{\frac{1-tg\,x}{1+tg\,x}}$
f) $f(x) = \ln\sqrt{e^{tg\,x}}$
g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$
h) $f(x) = \log(sen\,x \cdot cos\,x)^2$
i) $f(x) = sen^2\,x + cos^2\,x + x$

Ilustración 52

CURSO 2º Bachiller especialidad Ciencias Sociales. Tema 6.

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se pide estudio de la derivabilidad de una función definida a trozos
- Ejemplo: Ejercicio 1, página 158.



Estudia la derivabilidad en $x_0 = 3$ de la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \leq 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$$

Ilustración 53

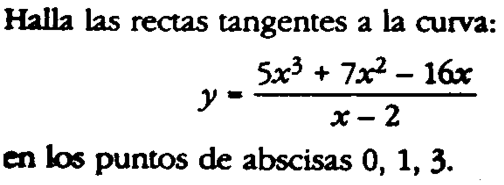
En el tema 7 de "Aplicaciones de las derivadas" se ven los siguientes aspectos (resaltado en **negrita** aspectos nuevos respecto a curso anterior):

- Recta tangente a una curva en uno de sus puntos.
- **Información extraída de la primera derivada.**
- **Información extraída de la segunda derivada.**
- **Optimización de funciones.**

En el tema 6 los ejercicios tipo se pueden agrupar de la siguiente manera:

CURSO 2º Bachiller especialidad Ciencias Sociales. Tema 6.

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se pide cálculo de la recta tangente a una curva en varios puntos.
- Ejemplo: Ejercicio 1 página 169.



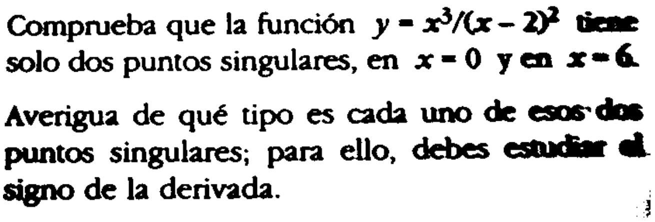
Halla las rectas tangentes a la curva:

$$y = \frac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$$

en los puntos de abscisas 0, 1, 3.

Ilustración 54

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Se pide identificar tipo de puntos singulares.
- Ejemplo: Ejercicio 2 página 171.



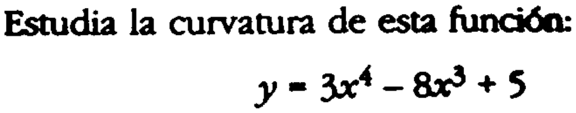
Comprueba que la función $y = x^3/(x-2)^2$ tiene solo dos puntos singulares, en $x = 0$ y en $x = 6$.

Averigua de qué tipo es cada uno de esos dos puntos singulares; para ello, debes estudiar el signo de la derivada.

Ilustración 55

CURSO 2º Bachiller especialidad Ciencias Sociales. Tema 6.

- Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Estudia curvatura de una función dada.
- Ejemplo: Ejercicio 1 página 172.

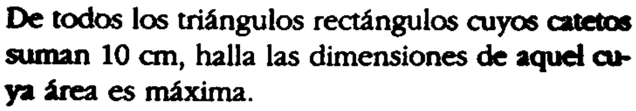


Estudia la curvatura de esta función:

$$y = 3x^4 - 8x^3 + 5$$

Ilustración 56

- Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐ Situación
- Descripción: Ejemplo de ejercicio de optimización
- Ejemplo: Ejercicio 1 página 175.



De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.

Ilustración 57

Capítulo 4

Resultados.

A partir de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores sobre el contenido, los criterios de evaluación establecidos en el currículo oficial y el contenido de los libros de texto, en este capítulo se va a analizar la coherencia entre estos y aquellos. Asimismo se van a analizar las ausencias y presencias detectadas en ambos.

Para este apartado se ha empleado como libro de matemáticas de referencia: *Cálculo.* De *James Stewart,* del Grupo Editorial Iberoamérica, S.A de C.V. Se eligió este libro con la aprobación del director de este proyecto, Juan Carlos Ballabriga.

Para los análisis de libros de texto escolares se han utilizado los mencionados en los apartados anteriores y referenciados en el anexo.

4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto.

Los libros empleados en el centro para cada nivel son los siguientes:

- 3º y 4º ESO (dos opciones), Editorial - Santillana.
- 1º Bachiller (ciencias), Editorial - Bruño.
- 2º Bachiller (ciencias), Editorial – Axis.
- 1º y 2º Bachiller (ciencias sociales), Editorial-Anaya.

Por lo que no ha sido posible realizar una comparación de contenidos dentro de la misma editorial pero sí una comparación en cuanto a presentación y contenidos entre ellas aunque se tratase de distintos cursos.

A continuación realizo una comparación por curso con el contenido del currículo que marca la ley que aparece descrito a través de descriptores en el capítulo 1 de este trabajo fin de máster y el contenido de los libros de los distintos niveles, relacionando los contenidos con las ilustraciones del capítulo 3.

3º ESO.

Bloque 3, *“traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico…”.* Como ejemplo ver ilustración nº2 del punto 3.1.

Bloque 5, *“análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos cotidianos”.* Como ejemplo ver ilustración nº3 del punto 3.1

Bloque 5, *“análisis de una situación a partir de una gráfica”.* Como ejemplo ver ilustración nº7 del punto 3.1

Bloque 5, *“utilización de las distintas formas de representar la ecuación de la recta”,* Como ejemplo ver ilustración nº13 del punto 3.1, aunque sólo se ve un tipo de ecuación que es la de la recta que pasa por dos puntos.

Bloque 5, *“formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica”*. No he encontrado ejemplos para este contenido.

Uso de TICs, no queda contemplado en este libro.

4º ESO opciones A y B

Es en este curso donde se cumple el contenido del bloque 5 que quedaba pendiente de 3º, el del empleo de las distintas formas de representar la ecuación de una recta. Como ejemplo ver la ilustración nº 16 del punto 3.2.

Bloque 5, *“tasa de variación media…”*. No he encontrado ejemplos en este libro, de hecho no hay una introducción teórica como señalaba en el apartado anterior.

Bloque 5; *“análisis de distintas formas de crecimiento, en tablas, gráficas y enunciados verbales”*, a pesar de estar contemplado la representación de la función bajo distintas formas como muestra la ilustración nº17, no he encontrado ejercicios que contemplen exactamente este contenido.

Bloque 5, *“interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado…”*, un ejercicio tipo podría ser el que aparece recogido en la ilustración nº 18, pero vemos que en ese ejercicio no piden su interpretación, se solicita únicamente la realización de la gráfica.

Uso de TICs, no queda contemplado en este libro

1º Bachillerato Ciencias

Aproximación al concepto de derivada. Como ejemplo los ejercicios relacionados con la tasa de variación, ilustración nº 25 del punto 3.3.

Extremos relativos. Como ejemplo los ejercicios en los que se solicita el cálculo de los máximos y mínimos relativos, ilustración nº 30.

Ecuaciones de la recta. Como ejemplo los ejercicios en los que se piden las ecuaciones de las rectas tangente y normal, ilustración nº 26

Dominio, recorrido y extremos de una función. Como ejemplo, los ejercicios de representación de funciones, que contemplan su realización siguiendo los pasos de un formulario que incluye estos tres puntos, ilustración nº 33.

TICs, en este libro si está contemplado el uso de programas informáticos como son el Windows Derive o el Wiris.

Interpretación y análisis de funciones sencillas expresadas de forma analítica o gráfica que describan situaciones reales. Sobre este punto sin embargo no he encontrado ejemplos en el libro, como ya apuntaba en el apartado anterior, la mayor parte de los ejercicios presentes en este libro son de carácter descontextualizado.

En el libro se añaden más puntos respecto a lo exigido por el currículo vigente en este curso y que corresponden al curso siguiente como son la función derivada, el cálculo de derivadas, la derivada de la suma, producto y cociente de funciones, la función compuesta, la aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función, problemas con condiciones, aplicaciones de derivadas a otras áreas.

1º Bachillerato Ciencias Sociales

Tasa de variación, se realiza la introducción de este punto contemplado en el currículo vigente.
En cambio añaden respecto al currículo vigente, la función derivada, reglas de derivación y la representación de funciones polinómicas y racionales.
Uso de TICs, no queda contemplado en este libro.

2º Bachillerato

Ciencias
Aproximación al concepto de derivada. Como ejemplo ejercicios relacionados con la tasa de variación media.
Función derivada. Como ejemplo el ejercicio de la ilustración 45.
Cálculo de derivadas. Como ejemplo el ejercicio de la ilustración 45.
Derivada de la suma, producto y cociente de funciones, función compuesta. Como ejemplo el ejercicio de la ilustración 45.
Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función. Como ejemplo el ejercicio de la ilustración 49.
Problemas de optimización. Existen ejercicios similares a los del libro del curso anterior.
Ecuaciones de la recta. Existen ejercicios similares a los del libro del curso anterior.
TICs, en el libro de ciencias si está contemplado el uso de programas informáticos como son el Windows Derive o el Wiris.

En el libro de ciencias se añade respecto al currículo oficial el concepto de derivabilidad y su estudio para una función dada, el estudio y aplicación de distintos teoremas.

Ciencias Sociales
Los puntos a tratar según el currículo coinciden con los de ciencias. Una vez analizado el libro que se emplea en el centro, observamos que entre los dos temas (6 y 7) se cumple fielmente lo contemplado en la ley, con la salvedad de las TICs, cuyo uso no está incluido dentro del temario.

Destacar que no he apreciado muchas diferencias en cuanto a contenido entre los cursos 3º y 4º, es decir se trabaja con las mismas nociones con un grado mayor de dificultad en el curso superior, aunque algunos ejercicios eran muy similares, en cambio he observado un ascenso en espiral en 1º y 2º en cuanto a contenido.

Así se concluye que las nociones de función y sus distintas expresiones, de dominio, recorrido, funciones definidas a trozos y las propiedades de las funciones son introducidas en 3º de la ESO, y en 4º son afianzadas. Mientras que a partir de 1º de bachiller en las dos opciones, tanto de ciencias y como de ciencias sociales, se introducen nuevos conceptos como son la tasa de variación media, la derivada de una función, su interpretación geométrica, tablas y reglas de derivadas, su aplicación tanto para la obtención de los puntos críticos que antes eran obtenidos directamente de la observación de la representación gráfica de la función y en este curso se emplean las nuevas nociones como herramientas para su obtención analítica. En 2º de bachiller en ambas opciones se trabajan sobre las mismas nociones vistas en el curso anterior pero en la opción de ciencias se introducen nuevas, como son las derivadas laterales, la función diferencial, derivadas de funciones implícitas, el estudio de la derivabilidad, y aparecen por primera vez teoremas y demostraciones.

Esto se puede ver claramente, en los descriptores de los temas, que se presentan en los índices de los libros:

Tabla 13

3º E.S.O.
Funciones
Concepto de función
Formas de expresar un función
Características de una función
Funciones lineales y afines
Función lineal
Función afín
Ecuaciones y gráficas
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos
Rectas secantes y paralelas
Aplicaciones
Estudio conjunto de dos funciones

Tabla 14

4º E.S.O. opciones A y B
Vectores y rectas
Vectores
Operaciones con vectores
Ecuación vectorial de la recta
Ecuaciones paramétricas
Ecuación continua
Ecuaciones punto-pendiente y explícita
Ecuación general
Posiciones relativas de dos rectas en el plano
Funciones
Concepto de función
Tablas y gráficas
Dominio y recorrido de una función
Funciones definidas a trozos
Propiedades de las funciones

Tabla 15

1º Bachiller (Ciencias)
Cálculo de derivadas
La derivada
La función derivada
Reglas de derivación
Máximos, mínimos relativos y monotonía
Puntos de inflexión y curvatura
Aplicaciones de las derivadas
Representación de funciones polinómicas
Representación de funciones racionales
Problemas con condiciones
Aplicaciones de las derivadas a otras áreas
Problemas de optimización

Tabla 16

1º Bachiller (Ciencias Sociales))
Iniciación al cálculo de derivadas
Crecimiento de una función en un intervalo
Crecimiento de una función en un punto. Derivada
Función derivada de otra
Reglas para obtener las derivadas de algunas funciones
Utilidad de la función derivada
Representación de funciones polinómicas
Representación de funciones racionales

Tabla 17a

2º Bachiller (Ciencias)
Derivadas
La derivada
Tasa de variación media
Derivada de una función en un punto
Función derivada
Interpretación geométrica de la derivada
Derivadas laterales
Continuidad y derivabilidad
Función diferencial en un punto
Cálculo de derivadas
Reglas de derivación
Derivadas sucesivas
Uso de los logaritmos en la derivación
Derivadas de funciones implícitas
Estudio de la derivabilidad
Demostraciones de las reglas de derivación
Teoremas fundamentales del cálculo diferencial
Teorema de Fermat
Teorema de Rolle
Teorema de Lagrange o del valor medio
Regla de L´Hopital
Aplicaciones de las derivadas
Variación y extremos de las funciones
Monotonía, máximos y mínimos

Tabla 17b

2º Bachiller (Ciencias)
Curvatura y puntos de inflexión
Puntos críticos o singulares
Procedimiento para analizar una función
Dominio y continuidad
Periodicidad
Simetrías
Asíntotas
Cortes con los ejes y regiones
Máximos, mínimos relativos y monotonía
Puntos de inflexión y curvatura
Gráfica
Recorrido e imagen
Otras aplicaciones
Aplicaciones geométricas
Aplicaciones del teorema de Bolzano
Aplicaciones del teorema de Weierstrass
Problemas de máximos y de mínimos
Cálculo de funciones con condiciones
Aplicaciones a otras áreas

Tabla 188

2º Bachiller (Ciencias Sociales))
Derivadas. Técnicas de derivación
Derivada de una función en un punto
Función derivada
Reglas de derivación
Estudio de la derivabilidad de una función definida a trozos
Aplicaciones de las derivadas
Recta tangente a una curva en uno de sus puntos
Información extraída de la primera derivada
Información extraída de la segunda derivada
Optimización de funciones

Al realizar el análisis de los libros de los centros frente al libro de referencia se han observado algunas similitudes y algunas diferencias. De nuevo en el libro de referencia nos encontramos el contenido de derivadas y aplicación de derivadas en dos temas o unidades, capítulo 2 “Derivadas” y capítulo 3 “Teorema del Valor Medio y Trazo de Curvas”. Si bien la noción de derivada como razón de cambio es introducida en el Capítulo 1, “Límites y Razones de Cambio”

A continuación para ayudar a hacer una idea del contenido del libro de referencia, en el siguiente cuadro aparece el listado de los descriptores del índice del libro:

Tabla 19

Libro de referencia: Cálculo. James Stewart
Derivadas
Derivadas
Fórmulas de Derivación
Razones de Cambio en las Ciencias Naturales y Sociales
Derivadas de Funciones Trigonométricas
Regla de la cadena
Diferenciación (o derivación) implícita
Derivadas de Orden Superior
Razones de Cambio Relacionadas
Diferenciales y Aproximaciones Lineales
Método de Newton
Teorema del Valor Medio y Trazo de Curvas
Valores Máximo y Mínimo
Teorema del Valor Medio
Funciones Monótonas y Criterio de la Primera Derivada
Concavidad y Puntos de Inflexión
Límites al Infinito; Asíntotas Horizontales
Límites Infinitos; Asíntotas Verticales
Trazo de Curvas
Problemas de Aplicación Máximos y Mínimos
Aplicaciones a la Economía
Antiderivadas

La principal similitud entre el libro de referencia y los libros del centro es de que todos siguen la misma estructura a la hora de introducir las nociones en el alumno, teoría y a continuación aplicación práctica de la teoría, basando el aprendizaje en la realización de ejercicios y problemas.

Los puntos tratados son prácticamente los mismos que en 2º de bachiller, por lo que continuamos con el aprendizaje en espiral. Tanto en los libros de bachiller como en el de referencia se realiza una interpretación geométrica de la derivada y como tasa de variación aunque en el de referencia se emplea el término razón de cambio. También dentro del apartado "trazo de curvas" en el libro de referencia se vuelve a destacar las ventajas de la aplicación de todas las nociones vistas con respecto al método de marcar puntos, y se ven aplicaciones prácticas en distintas áreas como son las Ciencias Naturales y Sociales y en Economía.

Las principales diferencias encontradas entre el libro universitario de referencia y los libros de texto usados en el centro, son como era de esperar la profundidad con que son presentados todos los puntos en el libro de referencia y la mayor cantidad de ejercicios y problemas.

La noción de continuidad en los libros escolares se describe de una manera muy gráfica, llegando a usarse como definición en secundaria: "*La gráfica que se puede trazar sin levantar el lápiz del papel*" mientras que en bachiller y en el texto de referencia se apoya en la noción de limite. Esto es aplicable también al cálculo de las asíntotas, si en bachiller se estudian como la posición de la función respecto a determinadas rectas en el libro de referencia se aproximan más a la noción de continuidad en el caso de verticales y oblicuas y en el caso de las asíntotas horizontales a la noción de límites al infinito.

También existen diferencias en cómo son vistos la monotonía, los máximos y mínimos, la curvatura y los puntos de inflexión. En secundaria son definidos de una manera visual, como los puntos donde la gráfica de la función pasa de ser creciente a decreciente y viceversa, sin diferenciar si son relativos o absolutos ni aclarar que debe de ocurrir en un intervalo concreto. En cambio en bachiller sólo se habla de máximos y mínimos relativos en un punto y aquí ya se incide en que debe de ocurrir en un entorno del punto. Además aparte de explicarlos como puntos en los que su imagen es mayor o menor que el resto de puntos de su entorno, en este nivel se relacionan con el cambio de signo de las pendientes en los puntos que pertenecen al entorno del punto objeto de estudio. En el texto de referencia además se introducen los máximos y mínimos absolutos.

Como conclusión de lo observado, en secundaria se da una visión más intuitiva de los temas analizados y en bachiller se profundiza en las nociones introducidas en los cursos previos. Llama la atención que la representación gráfica de la función sea uno de los objetivos finales en el tema de la aplicación de derivadas y no sea visto como un apoyo para la compresión del comportamiento de una función. También es de resaltar la importancia que se le da al estudio y representación de funciones dentro del este mismo tema respecto a otros puntos como son los problemas de tasa media, optimización y condiciones, muy útiles en otras disciplinas.

4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo.

Después de analizar los libros de texto empleados en el centro para los cursos 3º y 4º de la ESO, y 1º y 2º de bachillerato, y compararlos con el currículo vigente, se puede concluir que estos incluyen en general todos los bloques vistos salvo excepciones, como ocurre con el libro para 4º curso. Según el currículo es en este curso donde se debería introducir la idea de tasa de variación media y según se puede observar en el índice del libro de 4º de la ESO, tanto en el de la opción A como en el de la opción B, esta introducción no existía dentro de ninguno de sus capítulos (ver Anexo E)

Tampoco se ven en general ni en los libros de 3º y 4º, una contextualización de los ejercicios de funciones, para que gracias a estos enunciados se facilite al alumno la interpretación de algún fenómeno a través de la representación gráfica de funciones.

El departamento de matemáticas de cada centro deberá completar el programa con lo que no esté incluido en los libros de texto con la finalidad de cumplir con los mínimos exigidos por la ley.

Parte II:
Análisis de un proceso de estudio sobre las derivadas y su aplicación en 1º de bachiller

Esta segunda parte está basada en el tema impartido durante el periodo de prácticas realizado en el Centro Asignado con alumnos de 1º de bachiller.

En la cual, se hace un análisis didáctico de la resolución por parte de los alumnos de problemas de derivadas y aplicación de derivadas. Para ello, se divide esta parte en cuatro capítulos. En el primer capítulo se hace un análisis de cómo trata el libro los temas de derivadas y aplicación de derivadas. En el segundo capítulo, se hace mención a los problemas y errores que pueden encontrar los alumnos con este tema. En el tercer capítulo, se analiza el proceso de aprendizaje y en el cuarto capítulo se analiza la experimentación con los resultados esperados.

Capítulo 5
Las derivadas y la aplicación de derivadas en el libro de texto de referencia

En este capítulo se va a analizar los temas 10 y 11 del libro de 1º de bachillerato. Editorial Bruño. Matemáticas 1. Ciencias y Tecnología. Este fue el libro de texto de referencia durante el periodo de prácticas en el Centro.

Para la realización de este capítulo, se usara como texto de referencia el artículo de *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta*, de Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (2006).

5.1. Objetos matemáticos involucrados

Para realizar el análisis de los objetos matemáticos involucrados seguiremos el artículo de referencia, en concreto el cuadro de la página 139.

Tabla 20

Lenguaje
Verbal - Función, variable, variable independiente, variable dependiente, función polinómica, función racional, representación, gráfica, ejes, ejes cartesianos, abscisas, ordenadas, coordenadas, función de una variable, función de dos variables, función derivada, valor de una función en un punto, recta tangente, recta normal, números reales, números complejos, recta real, dominio de definición, tramos, simetría, par, impar, signo de la función, cortes con los ejes, asíntotas, verticales, horizontales, oblicuas, límite de la función en el entorno de un punto, tendencia, asíntotas, límite, entorno, monotonía, creciente, decreciente, punto crítico, máximo, mínimo, curvatura, punto de inflexión, interpretación resultados, abscisa que minimiza o maximiza, optimización, condiciones, comprobación,
Gráfico - Representaciones de las funciones en ejes cartesianos, recta tangente y recta normal, crecimiento, curvatura, figuras geométricas para resolución problemas de optimización.
Simbólico - $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, “$(,)$”, ”$[,]$”, ” $\rightarrow$ ”, “ $\cup$ ”, ” $\pm\infty$”, “$\nexists$”, $\boldsymbol{f(x,y)}, \boldsymbol{f(x)}, \boldsymbol{f'(x)}, \boldsymbol{f'(a)}, \boldsymbol{f''(x)}, \boldsymbol{f''(a)}, \boldsymbol{f'''(x)}, \boldsymbol{f'''(a)}, \boldsymbol{\text{lím}}$, $\boldsymbol{y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)}, \boldsymbol{y - y_0 = f'(a)(x - x_0)}$,

Tabla 21

Situaciones
Problemas descontextualizados en los que se pide representar determinadas funciones.
Problemas descontextualizados en los que se pide representar una función polinómica conociendo las coordenadas de sus puntos críticos y el comportamiento de la función cuando variable x tiende a +/- infinito.
Problemas descontextualizados en los que se pide calcular valor de coeficientes de la función, de tal forma que la función tenga un punto crítico en una determinada coordenada.
Problemas contextualizados en los que se da una determinada condición que cumplen dos variables, y se pide construir una función de unas determinadas características y que depende de esas dos variables, que debe ser maximizada o minimizada.

Tabla 22

Conceptos
Previos - Función, coordenadas, coordenadas cartesianas, dominio, simetría (noción), puntos de cortes con los ejes máximos, mínimos, monotonía, crecimiento, decrecimiento, punto de inflexión, curvatura, pendiente, asíntotas verticales, horizontales, oblicuas y comportamiento de la función respecto a las mismas, resolución de sistemas, y conocimientos en perímetros, áreas y volúmenes.
Emergentes - Estudio analítico de la simetría, optimización, condiciones, función de dos variables.

Tabla 23

Procedimientos
Analizar las características de una gráfica.
Representar gráficamente una función, elaborando un esquema de actuación.
Resolución de problemas con condiciones, elaborando un esquema de actuación.
Resolución de problemas de optimización, elaborando un esquema de actuación.
Descontextualización del enunciado del problema.

Tabla 24a

Propiedades
La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto: Recta tangente: $\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$ Recta normal: $\boldsymbol{y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)}$
Operaciones: $\boldsymbol{y=ku \;\rightarrow y'=ku'}$ $\boldsymbol{y=u+v-w \;\rightarrow y'=u'+v'-w'}$ $\boldsymbol{y=uv \;\rightarrow y'=u'v+uv'}$ $\boldsymbol{y=\frac{u}{v} \;\rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}$
Regla de la cadena: permite calcular la derivada de la función compuesta, es decir, la derivada de una función que a su vez es función de otra función: $\boldsymbol{(f\circ u)'(x)=u'(x)f'(u(x))}$
Un máximo relativo de una función es un punto en el que la función es mayor que en los puntos que están muy cercanos, es decir, una función f(x) tiene un máximo relativo en x=a, si existe un entorno del punto a, en el que se cumple que $\boldsymbol{f(a)\geq f(x)}$ para todo $\boldsymbol{x\neq a}$ del entorno, y cumple que $\boldsymbol{f'(a)=0}$ y $\boldsymbol{f''(a)}<0$

Tabla 25

Propiedades
Un mínimo relativo de una función es un punto en el que la función es menor que en los puntos que están muy cercanos, es decir, una función f(x) tiene un mínimo relativo en x=a, si existe un entorno del punto a, en el que se cumple que $\boldsymbol{f(a) \leq f(x)}$ para todo $\boldsymbol{x \neq a}$ del entorno, y cumple que $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ y $\boldsymbol{f''(a)} > 0$
Una función es creciente en un intervalo dado cuando para toda x perteneciente al intervalo se cumple $\boldsymbol{\ddot{f}(x)} > 0$, y decreciente cuando $\boldsymbol{\ddot{f}(x)} < 0$
Una función tiene un punto de inflexión cuando se produce un cambio de curvatura, si este punto es $\boldsymbol{x = a}$ cumple, $\boldsymbol{f''(a) = 0}$ y $\boldsymbol{f'''(a) \neq 0}$

Tabla 26

Argumentos
Representación gráfica de las funciones.
Comprobación de las propiedades en casos particulares.
Justificación de las propiedades, utilizando elementos genéricos.

5.2. Análisis global de la unidad didáctica.

Las unidades didácticas a analizar son: tema 10, “Cálculo de derivadas” y tema 11, “Aplicaciones de las derivadas” del libro empleado durante el Prácticum II. Ambos temas se adjuntan escaneados en el Anexo A, al final de la memoria.

Si realizamos el análisis de los dos temas conjuntamente, se observa que existe la siguiente estructura:

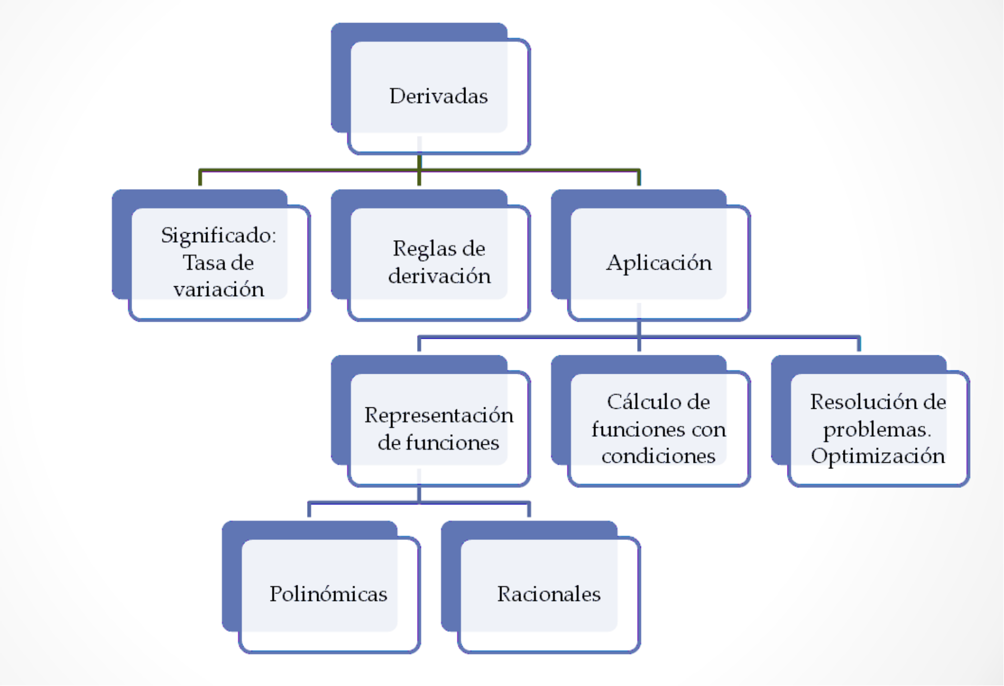


Ilustración 58

El tema 10 se estructura de la siguiente manera:

- Cálculo de derivadas
    - ❖ La derivada
    - ❖ La función derivada
    - ❖ Reglas de derivación
    - ❖ Máximos, mínimos relativos y monotonía
    - ❖ Puntos de inflexión y curvatura

Todas las unidades didácticas comienzan por una página en la que siempre nos muestran una imagen.

La página siguiente consta de dos partes. La primera se trata de la introducción que permite al alumno situarse. La segunda parte, que se titula “organiza tus ideas”, es una organización de las nociones adelantadas en la introducción. Después cada apartado principal comienza con un apartado titulado “Piensa y calcula”, que consiste en un ejercicio para que el alumno piense antes de ver la teoría. Estos ejercicios permiten al alumno plantearse dudas que van a ser enseguida resueltas.

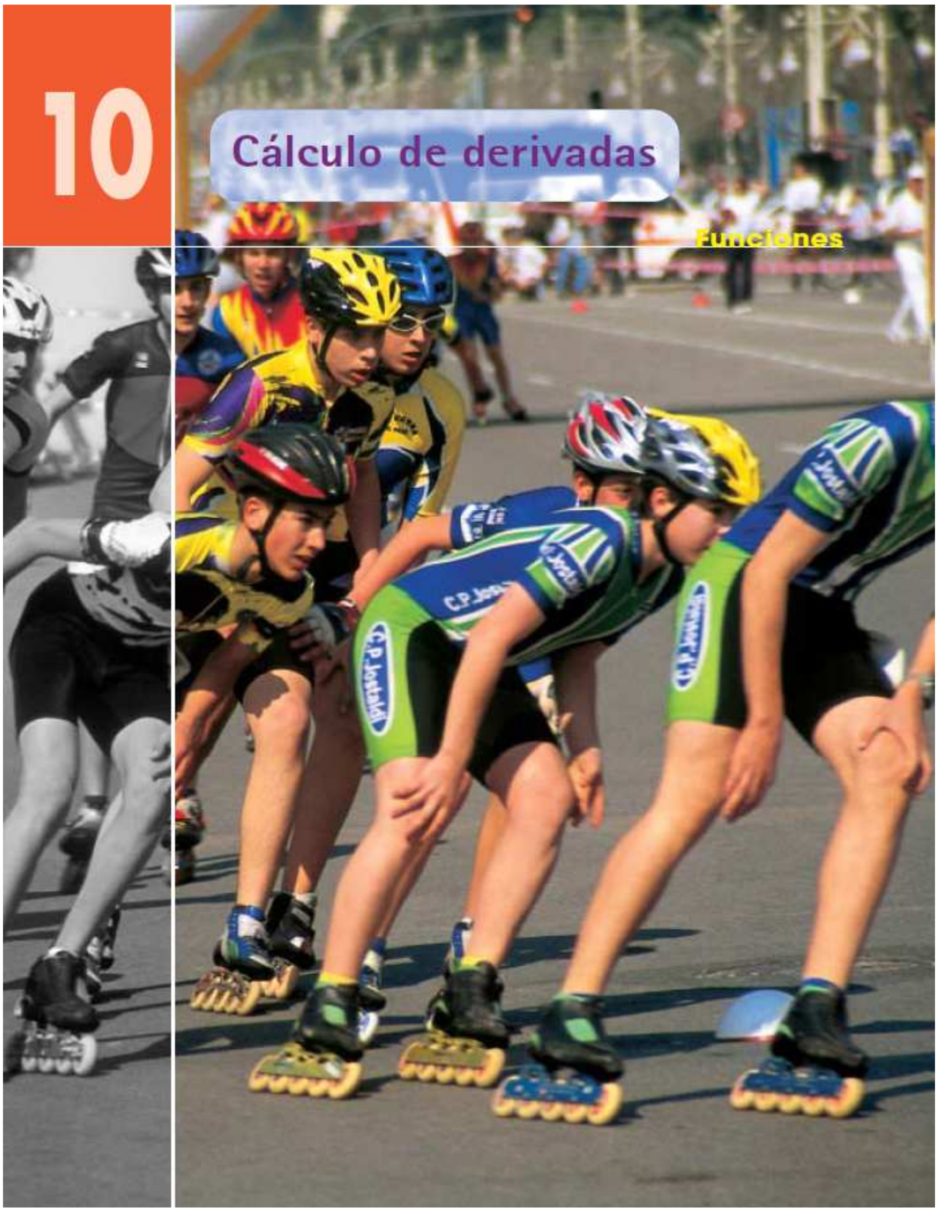


Ilustración 59

La página siguiente consta de dos partes. La primera se trata de la introducción que permite al alumno situarse. La segunda parte, que se titula “organiza tus ideas”, es una organización de las nociones adelantadas en la introducción.

Introducción

En muchas ocasiones se realizan cálculos de valores medios; por ejemplo, la velocidad media ha sido de 120 km/h, el consumo medio de agua ha sido de 50 litros/día, etc. Los cálculos de valores medios son importantes, pero en algunos problemas es mucho más importante el valor instantáneo de una magnitud; por ejemplo, la velocidad que un patinador lleva en un determinado instante durante una competición. Para resolver este problema es necesario el concepto de variación instantánea de una magnitud en función de otra, que es el concepto de derivada. Además de la velocidad, la derivada tiene una interpretación geométrica que se basa en la misma idea: el cálculo de una recta tangente a una curva en un punto.

En este tema se define el concepto de derivada de una función en un punto a partir de la tasa de variación media en un intervalo y se estudia su interpretación geométrica. A continuación, se analiza la relación entre continuidad y derivabilidad y se calcula la función derivada.

El estudio de las reglas de derivación permite automatizar el cálculo de derivadas de una forma sencilla. Dichas reglas se dan clasificadas para los distintos tipos de funciones.

El concepto de derivada se aplica en la resolución de problemas para calcular velocidades, determinar rectas tangentes a una curva en un punto y realizar el estudio analítico de una función; en concreto, la determinación de máximos y mínimos relativos, monotonía, puntos de inflexión y curvatura.

Organiza tus ideas

La derivada

es la
tasa de variación instantánea
que mide
la velocidad de crecimiento de una función

se calcula con
reglas de derivación

se utiliza para
resolver problemas sobre:
- velocidades
- rectas tangentes
- máximo y mínimo relativos
- monotonía
- puntos de inflexión
- curvatura
- puntos críticos o singulares

249

Ilustración 60

Cada una de las secciones del tema sigue la misma estructura:

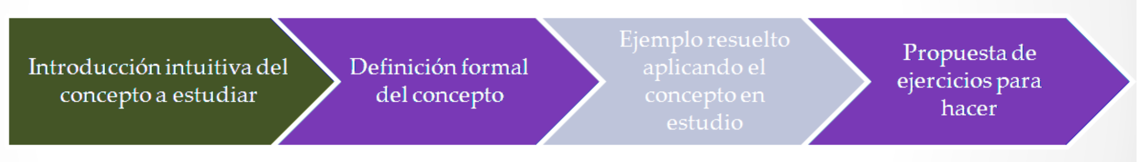
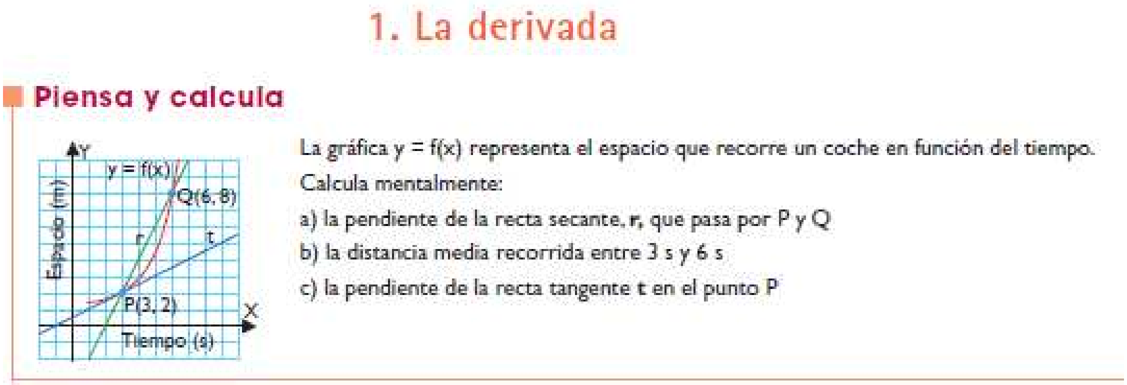


Ilustración 61

Es decir cada nuevo apartado comienza con un apartado titulado “Piensa y calcula”, que consiste en un ejercicio para que el alumno se enfrente a él antes de ver la teoría. Estos ejercicios permiten al alumno plantearse dudas que van a ser enseguida resueltas.



1. La derivada

Piensa y calcula

La gráfica y = f(x) representa el espacio que recorre un coche en función del tiempo.

Calcula mentalmente:

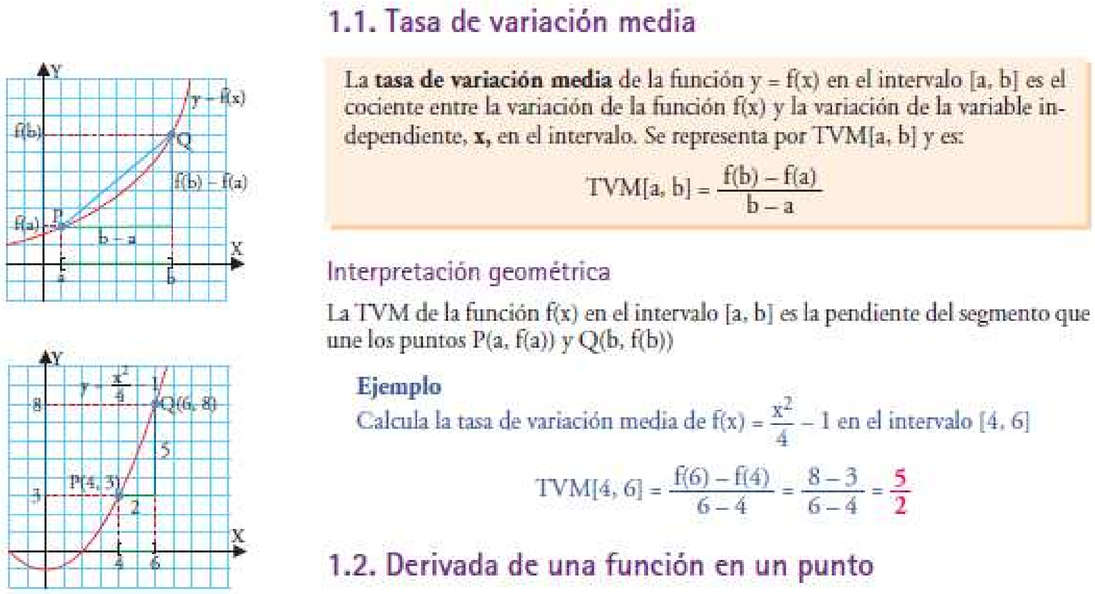
a) la pendiente de la recta secante, **r**, que pasa por P y Q

b) la distancia media recorrida entre 3 s y 6 s

c) la pendiente de la recta tangente **t** en el punto P

Ilustración 62

En esa misma página y en la siguiente se desarrolla la teoría que en este caso sería la correspondiente a la derivada. Comprende las nociones de tasa de variación media, derivada de una función en un punto y la interpretación geométrica de la derivada. Las definiciones vienen recuadradas y resaltadas y vienen acompañadas de un ejemplo. A la izquierda se aprovechan los márgenes para dar un apoyo gráfico a lo que se está explicando.



1.1. Tasa de variación media

La **tasa de variación media** de la función y = f(x) en el intervalo [a, b] es el cociente entre la variación de la función f(x) y la variación de la variable independiente, **x,** en el intervalo. Se representa por TVM[a, b] y es:

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación geométrica

La TVM de la función f(x) en el intervalo [a, b] es la pendiente del segmento que une los puntos P(a, f(a)) y Q(b, f(b))

Ejemplo

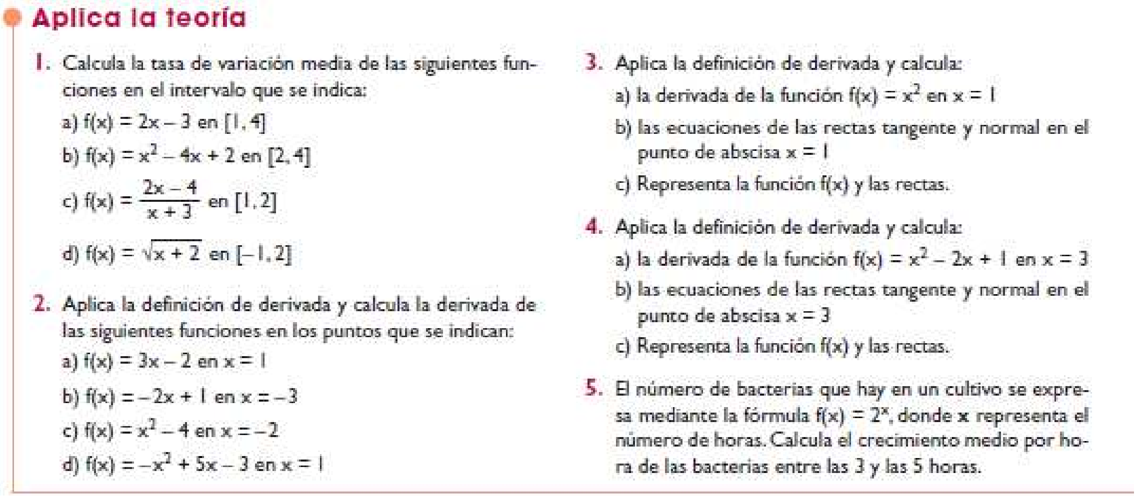
Calcula la tasa de variación media de $f(x) = \frac{x^2}{4} - 1$ en el intervalo [4, 6]

$$TVM[4, 6] = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{8 - 3}{6 - 4} = \frac{5}{2}$$

1.2. Derivada de una función en un punto

Ilustración 63

Al final de cada apartado aparece una tanda de ejercicios relacionados con la teoría anterior y titulada “aplica la teoría”.

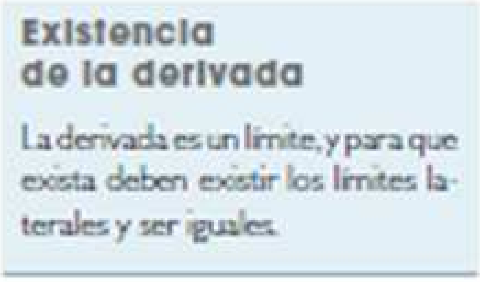


Aplica la teoría

1. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:
   - a) $f(x) = 2x - 3$ en $[1, 4]$
   - b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en $[2, 4]$
   - c) $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 3}$ en $[1, 2]$
   - d) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ en $[-1, 2]$
2. Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:
   - a) $f(x) = 3x - 2$ en $x = 1$
   - b) $f(x) = -2x + 1$ en $x = -3$
   - c) $f(x) = x^2 - 4$ en $x = -2$
   - d) $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en $x = 1$
3. Aplica la definición de derivada y calcula:
   - a) la derivada de la función $f(x) = x^2$ en $x = 1$
   - b) las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 1$
   - c) Representa la función $f(x)$ y las rectas.
4. Aplica la definición de derivada y calcula:
   - a) la derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en $x = 3$
   - b) las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 3$
   - c) Representa la función $f(x)$ y las rectas.
5. El número de bacterias que hay en un cultivo se expresa mediante la fórmula $f(x) = 2^x$, donde x representa el número de horas. Calcula el crecimiento medio por hora de las bacterias entre las 3 y las 5 horas.

Ilustración 64

El siguiente apartado “La función derivada” se desarrolla también en dos páginas, y sigue la misma estructura. Aquí se introducen la “Continuidad y derivabilidad” y “La función derivada”. Los márgenes son aprovechados para, mediante la representación de gráficas, ayudar a la compresión de lo explicado, y también para resaltar ideas importantes a través de cuadros en azul, como en el caso de la ilustración 65, que es una aclaración sobre la existencia de la derivada.

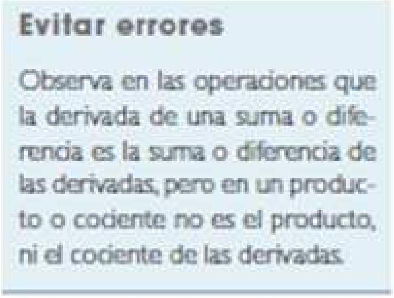


Existencia de la derivada

La derivada es un límite, y para que exista deben existir los límites laterales y ser iguales.

Ilustración 65

El tercer apartado, “Reglas de derivación” que contiene “Tablas de derivadas”, “Regla de la cadena”, “Aplicación de las reglas de derivación” y “Derivadas sucesivas”, sigue la misma estructura anteriormente explicada y acaba con un gran número de ejercicios propuestos para que el alumno practique con todo tipo de funciones. En esta ocasión de nuevo se añaden anotaciones en los márgenes con ideas importantes e incluso indicaciones de errores habituales.

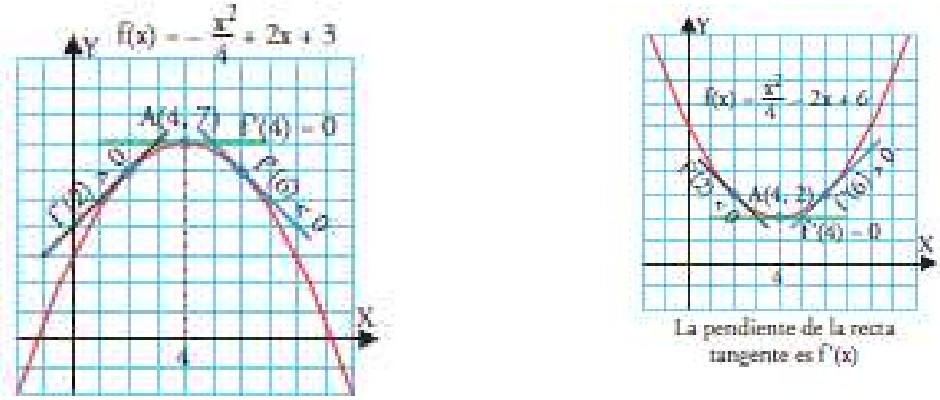


Evitar errores

Observa en las operaciones que la derivada de una suma o diferencia es la suma o diferencia de las derivadas, pero en un producto o cociente no es el producto, ni el cociente de las derivadas.

Ilustración 66

El cuarto apartado, “Máximos, mínimos relativos y monotonía” ocupa otras dos hojas, como ya se comentó, explican los máximos y mínimos relativos en un punto apoyándose en gráficas en los márgenes izquierdos. Dan la definición basada en la idea de entorno del punto para posteriormente dar un procedimiento para poder calcularlos. Con la monotonía hacen igual, dan una definición y posteriormente indican un procedimiento para poder estudiarla para una función en concreto. Este apartado termina de nuevo con ejercicios para que apliquen la teoría.



La pendiente de la recta tangente es f'(x)

Ilustración 67

El siguiente y último apartado de esta unidad es el de “puntos de inflexión y curvatura”, en el que se sigue el mismo esquema, definición de punto de inflexión, procedimiento para calcularlos y lo mismo con la curvatura. También en esta ocasión emplean de apoyo las gráficas de la izquierda. Se completa este apartado con el estudio de puntos críticos o singulares cuando la segunda derivada no es ni positiva, ni negativa, sino cero. En esta ocasión se hace igual, se realiza definición, se da un procedimiento y a continuación unos ejercicios para que practiquen.

La siguiente sección se titula “Profundización: demostraciones”, en esta sección se realizan demostraciones de la derivada de la suma de dos funciones, la derivada del productos de dos funciones, la derivada de un cociente, la derivada de la función exponencial y la derivada de la función seno.

A continuación comienza otra sección que se titula “Ejercicios y problemas” en la que aparecen ejercicios similares a los vistos durante el desarrollo del tema, catalogados en los mismos apartados: la derivada, la función derivada, reglas de derivación, máximos, mínimos relativos y monotonía y puntos de inflexión y curvatura. Después dentro de esta misma sección, aparece otro apartado titulado “para ampliar” en donde aparecen ejercicios similares pero esta vez sin catalogar, aunque siguiendo el mismo orden cronológico que durante el desarrollo del tema. Finalmente esta sección acaba con el apartado de “problemas” en el que vuelven a aparecer enunciados sin catalogar pero siguiendo el mismo orden cronológico y de dificultad similar.

Finalmente el tema termina con ejercicios para resolver con los programas informáticos Wiris para Linux/Windows o Derive de Windows.

Comentar que la mayor parte de los ejercicios presentados en este tema son ejercicios o problemas descontextualizados.

El tema 11 se estructura de la siguiente manera:

- Aplicaciones de las derivadas
    - Representación de funciones polinómicas
    - Representación de funciones racionales
    - Problemas con condiciones
    - Aplicaciones de las derivadas a otras áreas
    - Problemas de optimización

La metodología es la misma, es decir portada, contraportada con introducción del tema y organización de las ideas, apartados desarrollados en varias páginas y terminados con ejercicios de aplicación sobre la teoría explica, y termina de la misma forma que el anterior capítulo es decir con una sección de ejercicios y problemas, donde en la primera parte vienen catalogados por apartados, en la segunda parte aparece una colección de problemas de similar dificultad pero sin catalogar y por último aparecen los problemas a resolver con los dos programas informáticos Wiris y Derive. Comentar que cada apartado comienza con un “piensa y calcula” que en general ayuda al estudiante a situarse en el tema y a tener preguntas, y todos los apartados aparecen soportados con gráficas en los márgenes situados a la izquierda. Durante la planificación de las sesiones se acordó con la tutora no explicar el apartado cuarto de “aplicaciones de las derivadas a otras áreas” por no considerarlo adecuado a las características del grupo. Resaltar que en este tema, el único apartado donde el libro contextualiza todos los problemas y ejercicios es en el último “problemas de optimización”. Añadir que precisamente en este último se hace un recordatorio sobre el cálculo de perímetros, longitudes y áreas en el plano, así como de áreas y volúmenes en el espacio, necesario para poder resolver los problemas y ejercicios de esta sección.

5.3. Otros aspectos relevantes.

La unidad didáctica 10 fue dada íntegramente por mi tutora durante el primer periodo del prácticum II, en el que yo estaba de observadora. Durante este tiempo anoté los errores y dificultades que más se repetían entre los alumnos. Estas anotaciones me sirvieron de base para realizar el "concurso" de repaso de esa unidad 10. Este concurso fue un éxito en cuanto a la motivación con la que acudieron los alumnos, aunque resultó un poco frustrante por la mala puntuación obtenida pero esto sirvió para incidir en la siguiente sesión en los puntos que más les costaba.

La unidad didáctica 11 la impartí íntegramente a lo largo de 7 sesiones. En el anexo B adjunto el material que emplee en clase para su exposición así como los ejercicios del libro que les pedíamos resolver para que pusieran en práctica lo visto en clase. Las gráficas que aparecen y sirven de apoyo para la visualización de los distintos conceptos están realizadas con el programa informático "Geogebra". Comentar en este punto que he observado un mejor seguimiento por parte de los alumnos a las explicaciones realizadas con pizarra y tiza que con las proyecciones.

Capítulo 6
Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica.

En este capítulo se recogerán los errores y dificultades esperados y observados en el alumno a la hora de enfrentarse a estas dos unidades didácticas (derivadas y aplicación de derivadas).

6.1. Dificultades.

Del tema 10, derivadas, la primera dificultad que esperaba es la compresión de la expresión de función derivada y su particularización para un punto en concreto. Durante las clases comprobé que efectivamente la noción presentaba dificultades para ellos pero, en particular me llamó la atención que dada una función concreta, la dificultad de calcular la función derivada fuera que no sabían hallar $f(x+h)$.

La segunda dificultad esperada y comentada durante la asignatura del máster “aprendizaje y enseñanza de las matemáticas”, es la dificultad que tienen los alumnos para operar con números racionales e irracionales. Esto lo pude comprobar ya que les suponía un gran esfuerzo transformar funciones racionales e irracionales en exponenciales con exponentes negativos o racionales y a partir de la “nueva” función aplicar la regla para la derivada de una exponencial.

$y = \frac{1}{u^n} = u^{-n}$ $y' = (-n) \cdot u' \cdot u^{-n-1}$ $y' = (-n) \cdot u' \cdot \frac{1}{u^{n+1}}$	$y = \sqrt[n]{u} = u^{\frac{1}{n}}$ $y' = \frac{1}{n} \cdot u' \cdot u^{\frac{1}{n}-1}$ $y' = \frac{1}{n} \cdot u' \cdot u^{-\frac{n-1}{n}}$

Una tercera dificultad esperada es la aplicación adecuada de las reglas de derivación o las propiedades de las derivadas. Pude comprobar que les costaba menos aplicar la derivada de un cociente de funciones o la de la función racional, en cambio les costaba aplicar la regla de la cadena. Comentar que una vez aprendida una regla tenían tendencia a aplicarla independientemente de que fuese la solución más sencilla, como ejemplo ilustrativo:

$$y = \frac{3(x^2+5)}{4}$$

En funciones de este tipo aplicaban la propiedad del cociente de funciones en lugar de la regla para funciones polinómicas.

En cambio no esperaba que fueran a tener problemas con la ecuación de la recta tangente o normal ni con la ecuación de la recta conocidos dos puntos de esta, tal y cómo pude comprobar en la corrección de uno de los cuestionarios.

Dentro ya del tema 11, en la parte de la representación de funciones, no esperaba que fueran a tener problemas para entender el corte de la función con los ejes así cómo interpretar su signo.

Tampoco esperaba que dentro de esta misma parte, dentro del estudio de la monotonía fueran a tener dificultades a la hora de observar el signo que toma la función derivada dentro del intervalo de interés, para obtener el signo, necesitaban coger un número y operar con la calculadora.

En cambio sí que esperaba que dentro del apartado “cálculo de una función con condiciones” no supieran cómo resolver un sistema formado por dos ecuaciones y dos incógnitas. El origen de esta dificultad estriba en la enseñanza parcelada de las matemáticas. En cambio este tema relaciona distintas herramientas vistas en distintas áreas de las matemáticas.

Dentro de los problemas de optimización esperaba, tal y cómo habíamos comentado durante las clases teóricas, que les supusiese una dificultad trabajar con variables distintas a "x" e "y", y me sorprendió que no tuviesen problemas con las formas de llamar a las incógnitas. En cambio me sorprendió que no entendieran dentro de este mismo tipo de problemas de optimización la expresión “maximizar” o “minimizar”, por ejemplo “encuentra el lado del rectángulo que maximiza el área….”, cuando hasta ese momento dominaban el cálculo de los máximos y mínimos de una función. La explicación a este problema puede ser por la descontextualización de todos los problemas y ejercicios realizados antes de llegar a este apartado.

6.2. Errores y su posible origen.

El principal error encontrado es que no sabían operar con soltura cuando trabajaban con variables genéricas ni cuando tenían que operar con paréntesis y/o con fracciones, es decir no tenían destreza con las propiedades básicas de los números. El origen del error puede ser las circunstancias especiales del grupo de 1º de bachiller, son alumnos repetidores, que han tenido problemas en los cursos previos de matemáticas y no han adquirido esa destreza en el cálculo.

Tenían problemas para comprender que cuando la solución era una raíz de un número negativo, no era una solución válida para nosotros. El posible origen puede estar en el tema 10 porque habían visto durante el curso los números complejos y pensaban que aquí también se podían aceptar como solución, pero en el tema 11 el error viene de no realizar la conexión dentro de los distintos puntos del estudio de la función. Por ejemplo cuando hallaban el dominio y el recorrido lo estaban haciendo dentro de los números reales por lo que las soluciones de los máximos y los mínimos deberían de formar parte del mismo conjunto.

Otro error muy común era que cuando tenían que igualar a 0 una fracción de la siguiente forma:

$$\frac{4}{x^2 + 1}$$

para encontrar sus raíces, igualaban a 0 el denominador. El posible origen es el que se ha comentado en numerosas ocasiones en la asignatura “aprendizaje y enseñanza de las matemáticas”, y es que piensan que siempre tiene que haber una solución, por lo que aquí forzaban a que la hubiera, sin respetar las reglas.

Capítulo 7
El proceso de estudio

En este apartado, de acuerdo con la planificación realizada con mi tutora asignada en el centro, Merche Lleyda, se detallarán las 10 sesiones que impartí. 7 se corresponden al tema de aplicación de las derivadas, 2 a repaso del primer tema, y la última que es un repaso más enfocado a resolver dudas del segundo tema.

7.1. Distribución del tiempo de la clase.

Por tratarse de bachiller nocturno las clases tenían una duración de 45 minutos, mi grupo asignado era el correspondiente a 1º de bachiller, opción ciencias. El material adicional y de repaso empleado se adjunta respectivamente en los anexo B y C. En la siguiente tabla se recoge la distribución del tiempo en las distintas sesiones.

Tabla 27

Nº sesión	Actividad	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
1	Recordatorio de lo visto durante el curso para la representación de funciones (asíntotas). Ejemplo libro página 274.	15´	Compartida	Dialógica
	Empleo de las herramientas adquiridas durante la unidad anterior (nº10) para la búsqueda de las coordenadas exactas de los puntos críticos. Estudio de monotonía y curvatura.	15´	Compartida	Dialógica
	Introducción del tema. Formulario para poder realizar la representación de funciones racionales.	10´	Profesor	Magistral
	Tarea para casa. Breve explicación. Página 284, nº 29.	5´	Profesor	Dialógica

Tabla 28

Nº sesión	Actividad	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
2	Corregimos tarea de casa	20´	Compartida	Dialógica
	Representación de funciones polinómicas (mismo formulario) ejemplo página 272	20´	Compartida	Dialógica
	Planteamiento tarea para casa. Función polinómica, página 273 nº2.	5´	Profesor	Magistral

Tabla 29

Nº sesión	Actividad	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
3	Corregimos tarea de casa	10´	Compartida	Dialógica
	Realización de repaso con "powerpoint" de lo visto hasta ahora	10´	Compartida	Dialógica
	Planteamiento tareas para casa. Función polinómica, página 273 nº4. Función racional, página 275, nº9. (no da tiempo a acabarlos)	15´	Compartida	Dialógica

Tabla 30

Nº sesión	Actividad	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
4	Corregimos tareas de casa de una manera "ligera", sin profundizar mucho, viendo resultados o puntos conflictivos.	15´	Compartida	Dialógica
	Introducción nuevo punto, problemas con condiciones. Se les muestra a través de un ejemplo de la página 276.	15´	Compartida	Dialógica
	Planteamiento de tareas para casa página 277, nº10 y 12 y página 284, nº 30 y 32.	15´	Compartida	Dialógica

Tabla 31

Nº sesión	Actividad	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
5	Recordamos fecha examen, y explicamos "planning" de los temas que quedan.	5´	Profesor	-
	Esquema de los puntos a seguir para resolver este tipo de ejercicios.	10´	Profesor	Magistral
	Corregimos tareas de casa.	15´	Compartida	Dialógica
	Planteamiento de tarea para casa. Función racional página 275, nº 8	15´	Compartida	Dialógica

Tabla 32

Nº sesión	Actividad	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
6	Corregimos la tarea de casa de una manera ligera, viendo dificultades	5´	Compartida	Dialógica
	Introducción problemas de optimización. Primero con un ejemplo, entre todos.	15´	Profesor	Dialógica
	Esquema de los puntos a seguir para resolver este tipo de ejercicios. Reparto de tareas para casa, ver anexo, y página 281, nº 18 y 20, y página 288, nº 79.	10´	Profesor	Dialógica
	Introducción áreas y volúmenes, necesarios para resolver este tipo de ejercicios	10´	Profesor	Dialógica
	Planteamiento tareas para casa.	5´	Profesor	Dialógica

Tabla 33

Nº sesión	Actividad	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
7	Planteamos entre todos problemas de optimización mandados para hacer en casa.	40´	Compartida	Dialógica
	Mandamos estudio de funciones página 275, nº6 y página y página 284, nº 24.	10´	Profesor	Dialógica
	Les explicamos que el repaso de la unidad 10 se va a realizar a través de un concurso. Para poder afrontarlo tienen que repasar la ecuación de una recta y recta tangente y normal a una función en un punto.	5´	Profesor	Dialógica

Tabla 34

Nº sesión	Actividad	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
8	Realización del concurso repaso por equipos.	45´	Compartida entre los alumnos de cada equipo	Dialógica

Tabla 35

Nº sesión	Actividad	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
9	Breve explicación para aclarar preguntas relacionadas con la ecuación de una recta y la ecuación de la recta tangente y normal a una función en un punto.	5´	Profesor	Dialógica
	Dados los malos resultados permitimos revancha. Los alumnos que no vinieron el día del concurso han de realizarlo solos.	15´	Profesor	Dialógica
	Corrección del repaso-concurso.	22´	Profesor	Dialógica
	Les comunicamos que dados los malos resultados, cambiamos el repaso que teníamos planeado de la unidad 11. Si no quieren tener el examen el día 10 tendrán que traer en la siguiente sesión dudas.	2´	Profesor	-

Tabla 36

Nº sesión	Actividad	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
10	Resolución dudas	25´	Profesor	Dialógica
	Corrección tareas sesión 7	20´	Profesor	Dialógica

Tabla 37

Sesión de Evaluación			
Tipo	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
Evaluación	55´	Alumnos	Constructivista

7.2. Actividades adicionales planificadas.

Todas estas actividades fueron previamente planificadas y consensuadas con la tutora asignada en el centro.

Una actividad adicional que se planificó para completar el libro de texto fue el concurso repaso que tuvo lugar durante dos sesiones. Con esta actividad se buscaba que los alumnos se interesasen por las matemáticas a través de una competición así como fomentar el trabajo en equipo. En este repaso se trataban los puntos más importantes de la unidad 10 y además se hacía hincapié en las dificultades y errores que había detectado durante mi etapa como observadora. Esta actividad adicional se puede encontrar en el Anexo C de esta memoria.

La segunda actividad adicional fue el empleo de gráficas realizadas con el programa Geogebra para la presentación del tema. De esta forma los alumnos tenían que realizar un ejercicio inverso, es decir a partir de una gráfica de una función decir cuáles eran las asíntotas, cuales los puntos de corte, determinar los intervalos de crecimiento, etc. Estas gráficas pueden observarse en el Anexo B. En este punto añadir que me hubiera gustado poder desarrollar alguna actividad con el Geogebra en la sala de ordenadores, pero no encajaba esta posibilidad dentro de la programación.

La tercera actividad adicional fue la búsqueda de ejercicios y problemas de optimización en otras fuentes distintas a las del libro. Estos enunciados se pueden encontrar en el Anexo B.

7.3. La tarea: actividad autónoma del alumno prevista.

A continuación se adjunta tabla en la que se realiza una estimación del tiempo a invertir por cada alumno después de cada sesión.

Tabla 38

Sesión	Tipo	Tiempo Estimado	Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje
Sesión 1	Estudio personal	20 minutos	Refuerzo
	Ejercicio	30 minutos	Aplicación
Sesión 2	Estudio personal	20 minutos	Refuerzo
	Ejercicio	30 minutos	Aplicación
Sesión 3	Ejercicios	60 minutos	Refuerzo
Sesión 4	Estudio personal	10 minutos	Refuerzo
	Ejercicios	40 minutos	Aplicación
Sesión 5	Repaso de ejercicios de clase	30 minutos	Refuerzo
Sesión 6	Estudio personal	10 minutos	Refuerzo
	Ejercicios	60 minutos	Aplicación
Sesión 7	Repaso de ejercicios de clase	60 minutos	Refuerzo
Sesión 8	Estudio personal	60 minutos	Refuerzo

Capítulo 8

Experimentación.

En este capítulo, vamos a analizar la experimentación que se nos permitió realizar con los alumnos a los que les impartimos clase.

Por un lado realizamos un concurso con preguntas sobre la primera unidad y por otro lado realizamos un examen sobre las dos unidades impartidas. Ambas actividades fueron supervisadas por la tutora asignada en el centro.

Para ello definiremos la muestra y analizaremos el diseño de los dos experimentos que se nos permitió realizar. Tras esto comentaremos tanto el cuestionario del concurso como el examen. Posteriormente analizaremos los comportamientos esperados. Posteriormente veremos los resultados reales obtenidos para finalmente discutir sobre si los resultados obtenidos, coinciden con los esperados.

8.1. Método

La evolución de una teoría en didáctica de las matemáticas puede determinarse por el contraste entre un análisis *a priori* y un análisis *a posteriori*. La teoría busca validar las hipótesis que formula (*a priori*). Los hechos observados permiten (*a posteriori*) validar o refutar, total o parcialmente, las hipótesis enunciadas.

La *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) permite abordar el contraste experimental necesario, que permita determinar condiciones de *reproducibilidad* de situaciones didácticas. Aquí, las *variables didácticas* actúan de “contraste o reactivo” que permiten de manera controlada provocar en los sujetos modificaciones en sus estrategias de acción para adaptarlas al medio.

El estudio de la adecuación de las variables didácticas para determinar cambios en las estrategias de acción representa un instrumento de validación interna de las conclusiones que puedan extraerse de una observación concreta. En estas condiciones, se puede definir una situación *reproducible*; es decir, en condiciones similares, con un control del medio, la construcción del conocimiento pretendido será la misma.

La cuestión de la reproducibilidad de las situaciones incide sobre la fiabilidad de las observaciones y, sobre todo, sobre su validez. La fiabilidad presupone una estabilidad en el funcionamiento del sistema didáctico; el contraste repetido entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* permite hacer evolucionar las condiciones del medio (incluidas las intervenciones del profesor) que garanticen la construcción del saber pretendido, de tal manera que la situación devenga reproducible. Es entonces cuando su *validez* puede ser aceptada, puesto que la situación es exitosa y aplicable de manera estable.

En este trabajo, la parte I “las derivadas y su aplicación en el currículo vigente y en los libros de texto” constituye el estudio previo de la dimensión de enseñanza, desde una perspectiva eminentemente institucional; a saber:

1. El contenido matemático en el currículo vigente, incluidas las orientaciones y criterios de evaluación.
2. El desarrollo de estas directrices oficiales en los libros de texto escolares.

Este estudio precede al análisis *a priori* realizado en los capítulos 5, 6 y 7, donde se abordan las dimensiones:

- *Epistemológica*: las matemáticas presentes en la unidad didáctica objeto de estudio.
- *Cognitiva*: dificultades y errores de los estudiantes en el aprendizaje de la unidad didáctica.
- *De enseñanza*: descripción del proceso de estudio implementado.

En el capítulo 8, este análisis *a priori* es contrastado con los resultados de la experimentación, permitiendo una valoración de los mismos basada en las “expectativas previas” (*discusión de los resultados*), que supone la fase última del método de la ingeniería didáctica.

8.2. Muestra y diseño de la experimentación.

Quisiera destacar las circunstancias especiales de los alumnos que a mi modo de entender afectan al nivel de seguimiento de la asignatura. Se trata de alumnos en su mayoría repetidores, y algunos de ellos están trabajando. Sólo hay una clase de 1º de bachiller y tiene una asistencia regular de unas 8 personas aproximadamente, por lo que el tamaño de la muestra, que es de 6 alumnos en el caso del concurso y de 8 alumnos en el caso del examen, no se puede considerar representativa. Es un grupo heterogéneo, perteneciente en su mayoría a un estrato de clase media, muchos de ellos son mayores de edad, algunos están trabajando por las mañanas o los fines de semana, hay una minoría alumnos extranjeros de nacimiento pero han asimilado correctamente la lengua castellana. No hay problemas de comportamiento ni de seguimiento de la asignatura en el aula, aunque sí hay problemas de responsabilidad, en cuanto a que se recomienda la realización de tareas en casa (ver apartado 7.3) y muy pocos son los alumnos que reconocen haberlas hecho.

El objetivo principal de este estudio es observar la aplicación de las derivadas por los estudiantes.

8.3. El cuestionario.

Ambas pruebas estuvieron condicionadas por el calendario y por el transcurso normal de la clase y fueron consensuadas con la tutora asignada en el centro.

El cuestionario del concurso, estaba enfocado para ayudar al estudiante a observar sus principales errores y afrontar las dificultades más comunes. Constaba de 10 preguntas y todas ellas eran del tema 10 y no formaba parte de la nota final. Se agrupó a los 6 alumnos en dos equipos, teniendo especial cuidado en formar equipos de niveles similares. El cuestionario se adjunta en el anexo C.

El examen era de los dos temas, 10 y 11, constaba de 4 apartados y formaba parte de la nota final. El examen se adjunta en el anexo D.

8.4. Cuestiones y comportamientos esperados.

En esta sección se analizarán las cuestiones planteadas tanto en el concurso como en el examen final y los comportamientos esperados, partiendo de la base de que algunos alumnos cometerán los errores y las dificultades comentadas en el capítulo 6 de esta memoria.

Antes de comenzar con ellas, señalar dos comportamientos genéricos esperados, que a mi modo de ver eran esenciales para la buena marcha del cuestionario-concurso, como son:

- Motivación por parte de los alumnos a la hora de realizar el concurso.
- Realización de la actividad previa recomendada, repaso de ecuaciones de recta genérica y recta tangente y normal en un punto a una función.

Las cuestiones que se les plantea y sus comportamientos esperados son las siguientes:

Concurso

La primera cuestión que se les plantea a los alumnos es que interpreten la expresión que permite obtener la función derivada de una función. El objetivo de esta pregunta era que se fijasen en la escritura matemática de la misma y que entendiesen su significado matemático y geométrico. El comportamiento esperado después de las explicaciones dadas en clase era que al menos el significado matemático si lo supieran explicar. La variable que pretendería estudiar aquí sería: *V01-manejo de la expresión algebraica de la función derivada.*

Con la segunda cuestión se les pide que calculen sólo un término de la anterior definición para una función dada, ya que como hemos explicado en el capítulo 6, tenían problemas con las operaciones algebraicas. Tras las explicaciones realizadas en clase esperábamos que esta pregunta no supusiera un problema. La variable que pretendería estudiar aquí sería la misma que en el punto anterior: *V01-manejo de la expresión algebraica de la función derivada*

En la tercera pregunta se les solicita escribir la expresión de la derivada en un punto, dado que en la primera pregunta les facilitábamos la expresión de la función derivada, esperábamos que no les costara particularizarla para un punto cualquiera, por ejemplo $x = a$. La variable que pretendería estudiar aquí sería la misma que en el punto anterior: *V01-manejo de la expresión algebraica de la función derivada*

La cuarta pregunta pide describir lo que está ocurriendo en una gráfica realizada con el programa informático "Geogebra" en la que se representa una función parabólica y tres rectas dos secantes y una tangente. El objetivo de esta pregunta era que practicasen con la obtención de las ecuaciones de la recta dados dos puntos y que observasen la relación entre las pendientes de las rectas secantes y la de la recta tangente. Para ello se les recordó el día de antes del concurso que tenían que repasar esta parte en casa. El comportamiento esperado era que fueran capaces de sacar las ecuaciones de las tres rectas y que fueran capaces de entender el significado geométrico de la función derivada. Las variables que pretendería estudiar aquí serían: *V02-manejo de las ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos y V03-manejo de la ecuación de la recta tangente a una función en un punto*

Con la quinta cuestión, en la que se solicita identificar las rectas tangente y normal en un punto dado de una función conocida, se busca que practiquen con la obtención de las ecuaciones de ambas rectas. El comportamiento esperado era que fueran capaces de obtener ambas. Las variables que pretendería estudiar aquí serían: *V03-manejo de la ecuación de la recta tangente a una función en un punto y V04-manejo de la ecuación de la recta normal a una función en un punto.*

En la sexta cuestión se les pide que transformen dos funciones genéricas, una racional y la otra irracional, en exponenciales y que calculen su derivada como la derivada de una función exponencial, ya que durante las clases se había observado que les costaba trabajar de esta forma. El comportamiento esperado es que les costase ya que sí que se les había explicado con funciones concretas pero no lo dominaban y el salto a funciones genéricas podía presentarles dificultad. Las variables que pretendería estudiar aquí serían: *V05-manejo de las funciones exponenciales (exponentes negativos y racionales) y V06-la aplicación de la regla de derivación correspondiente.*

La séptima pregunta persigue que se den cuenta del significado de la letra "u" que aparece en las tablas de derivadas del libro, para que se den cuenta qué tipo de funciones se les puede pedir que deriven en el examen. El comportamiento esperado es que fueran capaces de poner la mayor parte de los ejemplos. La variable que pretendería estudiar aquí sería: *V07-interpretación algebraica.*

En la octava cuestión se les pide en el apartado a) derivar dos tipos de funciones con las que se ha observado que tienen problemas, la primera es una polinómica que siempre confunden con un cociente de funciones y la segunda, es un producto de funciones y en una de ellas tienen que aplicar la regla de la cadena. En el segundo apartado se pretende que operen con paréntesis y fracciones, ya que durante mi etapa como observadora aprecie errores con este tipo de ejercicios. El comportamiento esperado es que los dos grupos fueran capaces de realizar correctamente las operaciones ya que en la formación de los grupos se puso especial cuidado en que estuviesen integrados por persona con distintas habilidades. Las variables que pretendería estudiar aquí serían *V06-la aplicación de la regla de derivación correspondiente y V08-facilidad para la realización de operaciones numéricas.*

Con la novena pregunta se pretendía que conectaran con la parte de monotonía y máximos y mínimos, del tema 11 y vieran la relación con la exigencia de que la derivada en un punto que es máximo o mínimo sea igual a 0. También se buscaba que el alumno se familiarizara con la expresión “maximizar”. El comportamiento esperado es que fueran capaces de ver los signos de las pendientes de las rectas y calcular la ecuación de la recta tangente. La variable que pretendería estudiar aquí sería: *V03-manejo de la ecuación de la recta tangente a una función en un punto.*

En la decima y última cuestión se les pide que establezcan una correspondencia entre los distintos métodos vistos en clase y su objetivo. El comportamiento esperado es que sean capaces de establecer esa correspondencia. La variable que pretendería estudiar aquí sería: *V09-compresión o identificación metodología o procesos*

Examen

La primera cuestión que se les plantea a los alumnos es que apliquen la definición de derivada para calcular la función derivada de una función concreta y que la particularicen para un punto dado. A continuación se les solicita las ecuaciones de las rectas tangente y normal. El comportamiento esperado tras las explicaciones dadas en clase y la corrección del cuestionario es que la mayoría de ellos fueran capaces de contestar correctamente a esta primera pregunta. Las variables aquí serían: *V01-manejo de la expresión algebraica de la función derivada y V03-manejo de la ecuación de la recta tangente a una función en un punto y V04-manejo de la ecuación de la recta normal a una función en un punto.*

En la segunda pregunta se les pide que apliquen las reglas de derivación para la función exponencial a 4 funciones, racionales e irracionales. El comportamiento esperado tras las explicaciones dadas en clase y la corrección del cuestionario es que la mayoría de ellos fueran capaces de contestar correctamente a esta segunda cuestión. En este caso las variables serían: *V05-manejo de las funciones exponenciales (exponentes negativos y racionales) y V06-aplicación de la regla de derivación correspondientes.*

En la tercera cuestión se les solicita que apliquen reglas de derivación y que simplifiquen cuando sea necesario. El comportamiento esperado es que sean capaces de contestar correctamente a la aplicación de las reglas de derivación de la mayoría de apartados y que tuviesen problemas a la hora de simplificar, por ello se desglosaba la puntuación de cada uno de los apartados teniendo en cuenta ambas cosas. Las variables en esta ocasión serían: *V06-aplicación de la regla de derivación correspondientes y V08-facilidad para la realización de operaciones matemáticas.*

En la cuarta pregunta se les solicita la representación gráfica de una función concreta. El comportamiento esperado es que tengan problemas con las asíntotas, a pesar de haber corregido un ejercicio similar el día de repaso del último tema, pero que no tuvieran problemas para el resto de apartados, también esperábamos que hubiese correspondencia entre los resultados analíticos y su representación gráfica.*V10-coherencia entre resultados analíticos y representación gráfica de funciones.*

En la quinta cuestión se les plantea un problema de optimización El comportamiento esperado es que les costase entender el enunciado y plantear el problema, para ello habíamos acordado que durante el examen les íbamos a decir si estaba bien planteado o no lo estaba. Pero que no iban a tener problema en su resolución. *V11-compresión lectora y planteamiento problemas*.

8.5. Resultados.

Tal y cómo comentaba al comienzo de este capítulo el tamaño de la muestra que pude observar hace que los resultados obtenidos no sean representativos, por lo que voy a realizar una enumeración de las variables apuntadas en el apartado 8.4 y explicar en general los resultados obtenidos y también indicaré los resultados observados durante la explicación de la materia.

- *V01-manejo de la expresión algebraica de la función derivada.*
  De los 8 alumnos sólo tres aplicaron en el examen correctamente la definición.
- *V02-manejo de las ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos.*
  Durante la ejecución del concurso ningún equipo manejó correctamente las ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos. Tras el repaso específico que se realizó tras su corrección los dos equipos fueron capaces de obtener correctamente las ecuaciones de las rectas solicitadas.
- *V03-manejo de la ecuación de la recta tangente a una función en un punto.*
  Durante el concurso ningún equipo manejó correctamente la ecuación de la recta tangente a la función dada en el punto solicitado. Tras el repaso específico sólo un equipo resolvió correctamente el ejercicio. En el examen miembros de los dos equipos resolvieron correctamente el ejercicio en el que había que aplicar este conocimiento.
- *V04-manejo de la ecuación de la recta normal a una función en un punto.*
  Durante el concurso ningún equipo manejó correctamente la ecuación de la recta tangente a la función dada en el punto solicitado. Tras el repaso específico sólo un equipo resolvió correctamente el ejercicio. En el examen miembros de los dos equipos resolvieron correctamente el ejercicio en el que había que aplicar este conocimiento.
- *V05-manejo de las funciones exponenciales (exponentes negativos y racionales)*
  Durante el concurso aunque ambos equipos fueron capaces de transformar las funciones racionales e irracionales en exponenciales con

exponentes negativos o racionales, ninguno supo aplicar correctamente la regla de derivación correspondiente. En el examen sólo un alumno hizo correctamente dos apartados del ejercicio en el que se solicitaba aplicación de estos conocimientos.

- *V06-la aplicación de la regla de derivación correspondiente.*

  Sólo un par de alumnos supieron aplicar correctamente las reglas del cociente de funciones y de funciones irracionales.
- *V07-interpretación algebraica.*

  Durante el concurso sólo un equipo supo resolver correctamente el ejercicio en el que se solicitaba este tipo de conocimiento.
- *V08-facilidad para la realización de operaciones numéricas.*

  Durante el concurso sólo uno de los dos grupos sabe operar correctamente.
- *V09-compresión o identificación metodología o procesos.*

  Ambos grupos saben identificar correctamente los procesos descritos en el concurso en la última pregunta.
- *V10-coherencia entre resultados analíticos y representación gráfica de funciones.*

  En el examen sólo un alumno realiza correctamente todos los pasos contemplados en el formulario dado en clase necesarios para la obtención de la representación gráfica de la función. Otros 3 siguen los pasos pero no los aplican correctamente, no existiendo coherencia entre lo obtenido y lo representado.
- *V11-compresión lectora y planteamiento problemas*.

  En el examen sólo un alumno plantea correctamente el problema. La mayor parte de ellos no lo llegan ni a intentar.

En cuanto a la impartición de las clases observé:

- Que los alumnos no tomaban apuntes durante la exposición proyectada. Están acostumbrados a la técnica del dictado.
- Falta de implicación por parte de los alumnos. En varias sesiones se mandaron tareas para casa pero muy pocos eran los que las realizaban.
- Buena predisposición para hacer el concurso.

8.6. Discusión de los resultados.

Una vez resumidos en el apartado anterior los resultados obtenidos y comparados estos con los resultados esperados, podemos concluir que existe una gran diferencia entre ambos.

En cuanto a la actividad del concurso-repaso, por un lado se cumplió mi expectativa de alta motivación e implicación por parte de ellos, pero por otro los resultados demuestran que no hubo un estudio previo en casa, a pesar de que se advirtió que era necesario. Esto lo constata el hecho de que una vez se les recuerda la ecuación de la recta dados dos puntos y la ecuación de la recta tangente y normal a la función en un punto y se les da una segunda oportunidad para volver a realizar los tres ejercicios relacionados con estos objetos, se obtiene una mejor puntuación final. Este mal resultado inicial se podía haber evitado con algún tipo de bonificación en la nota del examen final.

Los malos resultados tanto en el concurso como en el examen de:

V05 y V06 responde a que a los alumnos les cuesta trabajar con exponentes racionales y negativos y a la dificultad que tienen para aplicar las reglas de derivación.

V08, responde a la dificultad que tienen los alumnos para realizar operaciones numéricas.

V10, en la resolución de la cuarta pregunta del examen, representación gráfica de la función, lo que más me llamó la atención, fue la incoherencia que había en los exámenes entre los resultados analíticos y la representación gráfica.

V11, esta variable corresponde a la quinta pregunta del examen. La explicación a la falta de respuestas a esta pregunta es que muchos alumnos venían presuponiendo que no iban a ser capaces de resolverlo, ya que durante su impartición en clase fueron numerosas las quejas en cuanto a la dificultad de este tipo de problemas.

En cuanto a la impartición de las clases concluyo que se pueden emplear las proyecciones para hacer resúmenes de una forma más rápida que empleando la pizarra pero que si esta técnica se emplea para impartir clases habría que completarla con la entrega de la teoría en papel, para facilitarles el estudio en casa los puntos vistos en clase. En cuanto a la falta de responsabilidad por parte del alumno, esta puede tener múltiples causas, desmotivación hacia la asignatura, esto puede venir por la falta de contextualización de los ejercicios vistos en clase por lo que es más difícil encontrar por ellos mismos la utilidad de los nociones vistas durante la unidad didáctica, otra explicación es que no obtienen “recompensa” directa, es decir, ni con la realización de la tarea para casa ni con el concurso obtienen bonificación para el examen por lo que al final la realización o no de los mismos es una decisión personal de cada alumno.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas.

Síntesis

Con este trabajo fin de máster se ha pretendido hacer un análisis del tema derivadas y aplicación de las derivadas en 1º de Bachiller, desde el punto de vista del alumno.

Para ello se ha realizado en la primera parte, para únicamente estas dos unidades didácticas, un análisis del currículo vigente así como un estudio acerca de cómo los libros de textos empleados en el centro en los cursos 3º, 4º de la ESO y 1º y 2º de bachiller, cumplen con la legislación actual.

En la segunda parte de este trabajo, se ha analizado el caso concreto de 1º de Bachiller, opción Ciencias, y cómo afrontan los alumnos los problemas que se encuentran en estos dos temas. Analizando dos pruebas que los alumnos realizaron y extrayendo las conclusiones que nos fue posible tanto de ellas como de las clases impartidas.

Conclusiones

Como primera conclusión es la predisposición que alcanzan los alumnos ante la novedad, como ha sido el caso de la realización del concurso-repaso. A pesar de los malos resultados obtenidos, creo que es algo que podría funcionar con algunas mejoras, como por ejemplo que la puntuación obtenida cuente para la nota del examen final, o realizar varios concursos durante el curso con los mismos equipos para normalizarlo en cierta forma.

La segunda conclusión es la necesidad de detectar desde el inicio los errores más frecuentes y comunes como eran en este caso los problemas que tenían para realizar operaciones numéricas, ya que para afrontar correctamente este tema es necesario que el alumno tenga cierta soltura a la hora de realizar simplificaciones.

Como tercera conclusión apuntar que estas unidades dejan de manifiesto el problema que hay con a la atomización de contenidos, ya que es un tema que se nutre de otras áreas de las matemáticas como son la geometría, el análisis, la teoría de números o el álgebra. Y durante mi observación e impartición de las clases pude constatar que les es difícil relacionar o asociar conceptos.

La cuarta conclusión es la observación de una dejación por parte del alumno a la hora de hacer actividades o tareas en casa. Considero que la principal causa como ya apuntaba en apartados anteriores es que en este centro al menos, en bachiller sólo puntúa la nota de los exámenes y no las actividades extra que se les manda a los alumnos. Es un salto que se da respecto a ESO, para el que no parece que estén todos los alumnos preparados, por lo que sería un aspecto a revisar.

Como última conclusión y en referencia a la primera parte de este trabajo, destacar la importante labor de análisis que ha de realizar el profesor ante el contenido de los libros elegidos en su centro.

Cuestiones abiertas

La principal cuestión es cómo se puede conseguir que el alumno se haga responsable de sus tareas, y cómo se puede conseguir que realice un estudio continuo de la asignatura. Quizá una forma sea aumentando su motivación y esto puede conseguirse a través de ejemplos de situaciones reales.

La segunda cuestión es cómo hacer que superen los errores que tienen de base, como son la operación numérica o las nociones algebraicas, para poder afrontar con éxito estas dos unidades.

La tercera cuestión es la conveniencia o no de atomizar los contenidos matemáticos ya que la consecuencia de la atomización es que el alumno pierda la relación que existe entre las distintas áreas.

La última cuestión es la adecuación del uso o no de proyecciones en clase a alumnos que están acostumbrados al uso de la pizarra tradicional o a la técnica del dictado, ya que durante la impartición de las clases observé que seguían mejor cuando escribía en la pizarra que cuando empleaba la presentación realizada en “powerpoint”.

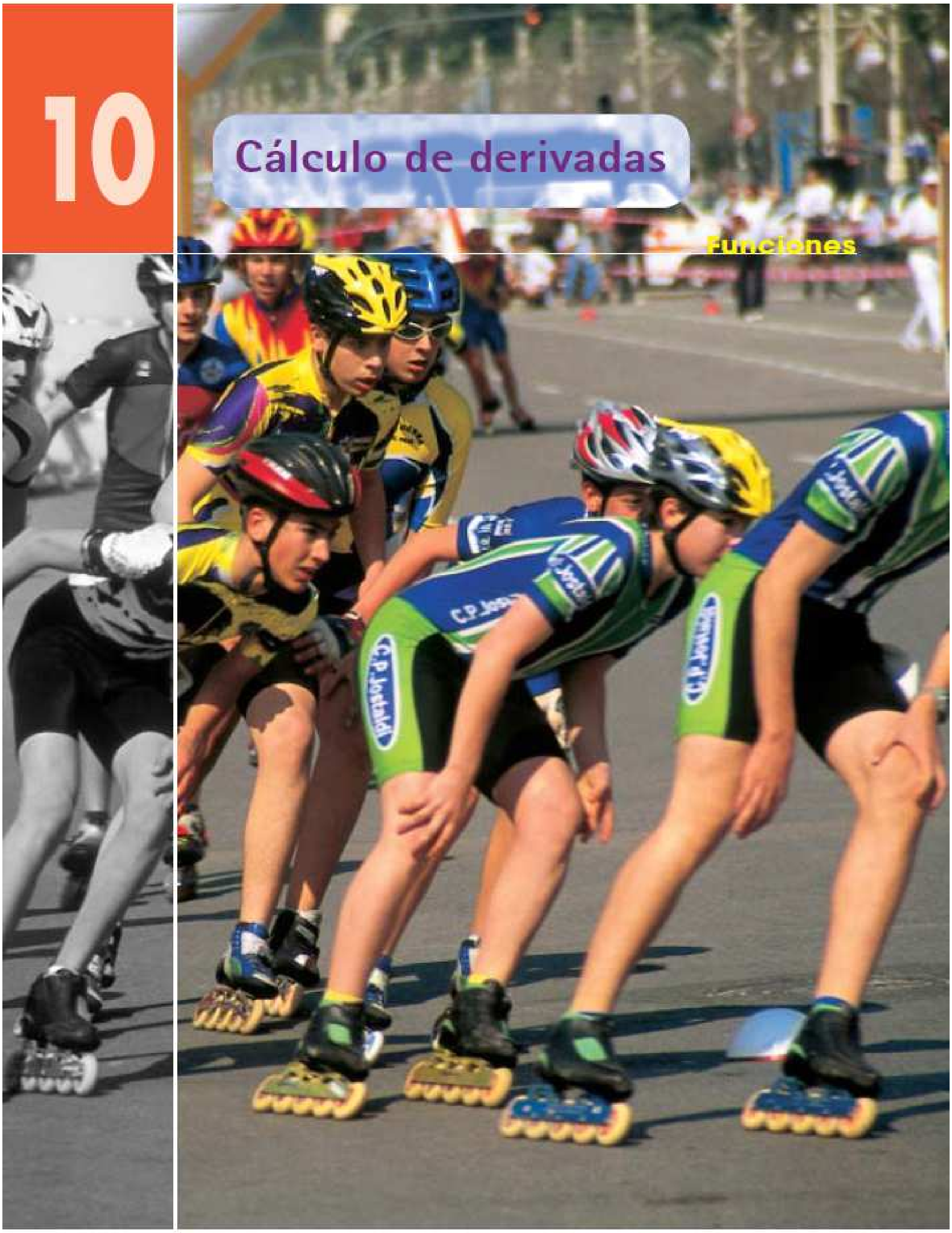
Referencias

- Enrique Juan Redal (2008) *Matemáticas 3º ESO*. Editorial Santillana. Proyecto Casa del Saber.
- Enrique Juan Redal (2008) Opción A y B *Matemáticas 4º ESO*. Editorial Santillana. Proyecto Casa del Saber.
- J.Colera, M.J. Oliveira, R García, E.Santaella. (2009). *1º y 2º Bachiller. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales*. Editorial Anaya.
- José María Arias Cabezas, Ildefonso Maza Sáez (2011). *Matemáticas 1* Ciencias y Tecnología. Editorial Bruño.
- J.M. Arias, I. Maza, J. Mercadé (2003). *Matemáticas 2* Ciencias de la naturaleza y de la salud-tecnología.Editorial Axis.
- MacMaster University. (1994). *Cálculo.* James Stewart. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A de C.V.
- MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre. BOE 293, de 8 diciembre, 43053–43102.
- MEC (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre. BOE 5, de 5 enero, 677–773.
- MEC (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre. BOE 266, de 6 noviembre, 45381– 45477.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (2006). *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (Especial), 133–156.
- Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 282–307.
- http://www.vitutor.com/fun/5/b_a.html

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto.
B. Material didáctico. Adicional
C. Material didáctico. Repaso.
D. Prueba corta.
E. Índices de 4º ESO

A. Unidad didáctica del libro de texto

Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas


Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas

Introducción

En muchas ocasiones se realizan cálculos de valores medios; por ejemplo, la velocidad media ha sido de 120 km/h, el consumo medio de agua ha sido de 50 litros/día, etc. Los cálculos de valores medios son importantes, pero en algunos problemas es mucho más importante el valor instantáneo de una magnitud; por ejemplo, la velocidad que un patinador lleva en un determinado instante durante una competición. Para resolver este problema es necesario el concepto de variación instantánea de una magnitud en función de otra, que es el concepto de derivada. Además de la velocidad, la derivada tiene una interpretación geométrica que se basa en la misma idea: el cálculo de una recta tangente a una curva en un punto.

En este tema se define el concepto de derivada de una función en un punto a partir de la tasa de variación media en un intervalo y se estudia su interpretación geométrica. A continuación, se analiza la relación entre continuidad y derivabilidad y se calcula la función derivada.

El estudio de las reglas de derivación permite automatizar el cálculo de derivadas de una forma sencilla. Dichas reglas se dan clasificadas para los distintos tipos de funciones.

El concepto de derivada se aplica en la resolución de problemas para calcular velocidades, determinar rectas tangentes a una curva en un punto y realizar el estudio analítico de una función; en concreto, la determinación de máximos y mínimos relativos, monotonía, puntos de inflexión y curvatura.

Organiza tus ideas

La derivada

es la

tasa de variación instantánea

que mide

la velocidad de crecimiento de una función

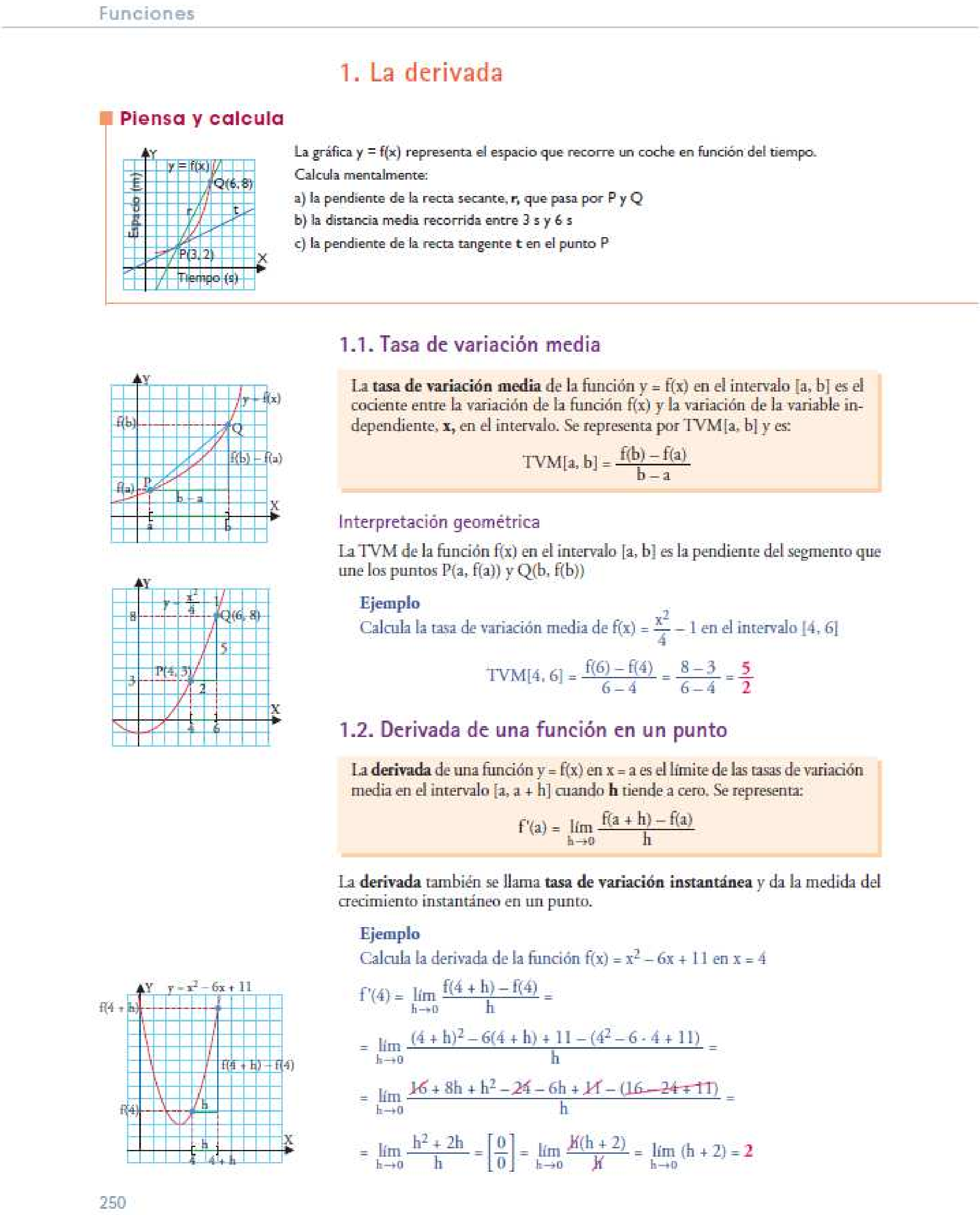
se calcula con

reglas de derivación

se utiliza para

resolver problemas sobre:
- velocidades
- rectas tangentes
- máximo y mínimo relativos
- monotonía
- puntos de inflexión
- curvatura
- puntos críticos o singulares

249



1. La derivada

Piensa y calcula

La gráfica y = f(x) representa el espacio que recorre un coche en función del tiempo.

Calcula mentalmente:

a) la pendiente de la recta secante, **r**, que pasa por P y Q

b) la distancia media recorrida entre 3 s y 6 s

c) la pendiente de la recta tangente **t** en el punto P

1.1. Tasa de variación media

La **tasa de variación media** de la función y = f(x) en el intervalo [a, b] es el cociente entre la variación de la función f(x) y la variación de la variable independiente, **x,** en el intervalo. Se representa por TVM[a, b] y es:

$$\text{TVM}[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación geométrica

La TVM de la función f(x) en el intervalo [a, b] es la pendiente del segmento que une los puntos P(a, f(a)) y Q(b, f(b))

Ejemplo

Calcula la tasa de variación media de $f(x) = \frac{x^2}{4} - 1$ en el intervalo [4, 6]

$$\text{TVM}[4, 6] = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{8 - 3}{6 - 4} = \frac{5}{2}$$

1.2. Derivada de una función en un punto

La **derivada** de una función y = f(x) en x = a es el límite de las tasas de variación media en el intervalo [a, a + h] cuando **h** tiende a cero. Se representa:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

La **derivada** también se llama **tasa de variación instantánea** y da la medida del crecimiento instantáneo en un punto.

Ejemplo

Calcula la derivada de la función f(x) = x² – 6x + 11 en x = 4

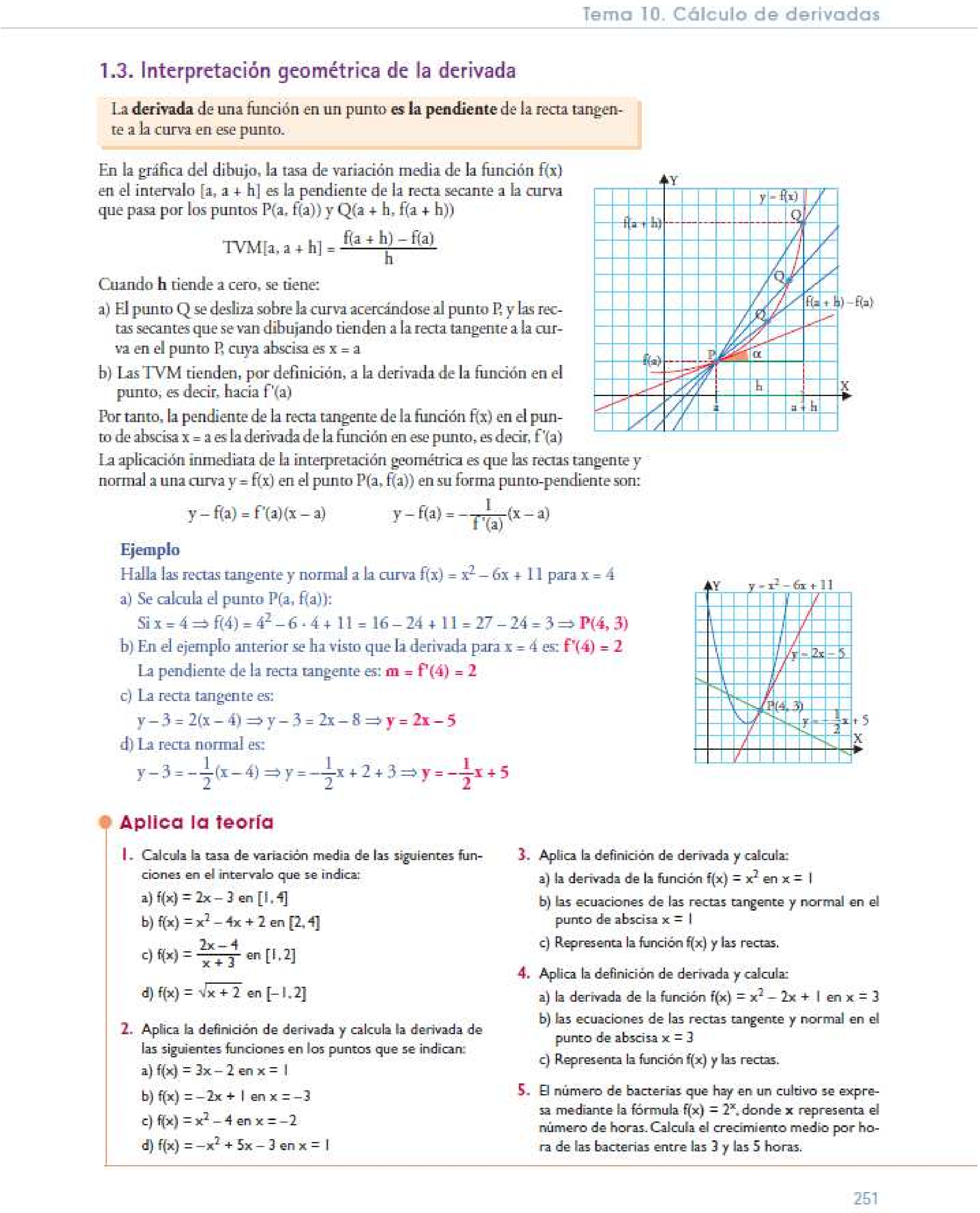
$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4 + h)^2 - 6(4 + h) + 11 - (4^2 - 6 \cdot 4 + 11)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{16} + 8h + h^2 - \cancel{24} - 6h + \cancel{11} - \cancel{(16 - 24 + 11)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h + 2)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (h + 2) = 2$$

Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas



Tema 10. Cálculo de derivadas

1.3. Interpretación geométrica de la derivada

La **derivada** de una función en un punto **es la pendiente** de la recta tangente a la curva en ese punto.

En la gráfica del dibujo, la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [a, a + h] es la pendiente de la recta secante a la curva que pasa por los puntos P(a, f(a)) y Q(a + h, f(a + h))

$$TVM[a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Cuando **h** tiende a cero, se tiene:

a) El punto Q se desliza sobre la curva acercándose al punto P, y las rectas secantes que se van dibujando tienden a la recta tangente a la curva en el punto P, cuya abscisa es x = a

b) Las TVM tienden, por definición, a la derivada de la función en el punto, es decir, hacia f '(a)

Por tanto, la pendiente de la recta tangente de la función f(x) en el punto de abscisa x = a es la derivada de la función en ese punto, es decir, f '(a)

La aplicación inmediata de la interpretación geométrica es que las rectas tangente y normal a una curva y = f(x) en el punto P(a, f(a)) en su forma punto-pendiente son:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \qquad y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Ejemplo

Halla las rectas tangente y normal a la curva $f(x) = x^2 - 6x + 11$ para x = 4

a) Se calcula el punto P(a, f(a)):

$\text{Si } x = 4 \Rightarrow f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 11 = 16 - 24 + 11 = 27 - 24 = 3 \Rightarrow \mathbf{P(4, 3)}$

b) En el ejemplo anterior se ha visto que la derivada para x = 4 es: **f'(4) = 2**

La pendiente de la recta tangente es: **m = f'(4) = 2**

c) La recta tangente es:

$y - 3 = 2(x - 4) \Rightarrow y - 3 = 2x - 8 \Rightarrow \mathbf{y = 2x - 5}$

d) La recta normal es:

$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2 + 3 \Rightarrow \mathbf{y = -\frac{1}{2}x + 5}$

Aplica la teoría

1. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = 2x - 3$ en [1, 4]

b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en [2, 4]

c) $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 3}$ en [1, 2]

d) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ en [–1, 2]

2. Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 3x - 2$ en x = 1

b) $f(x) = -2x + 1$ en x = –3

c) $f(x) = x^2 - 4$ en x = –2

d) $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en x = 1

3. Aplica la definición de derivada y calcula:

a) la derivada de la función $f(x) = x^2$ en x = 1

b) las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa x = 1

c) Representa la función f(x) y las rectas.

4. Aplica la definición de derivada y calcula:

a) la derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en x = 3

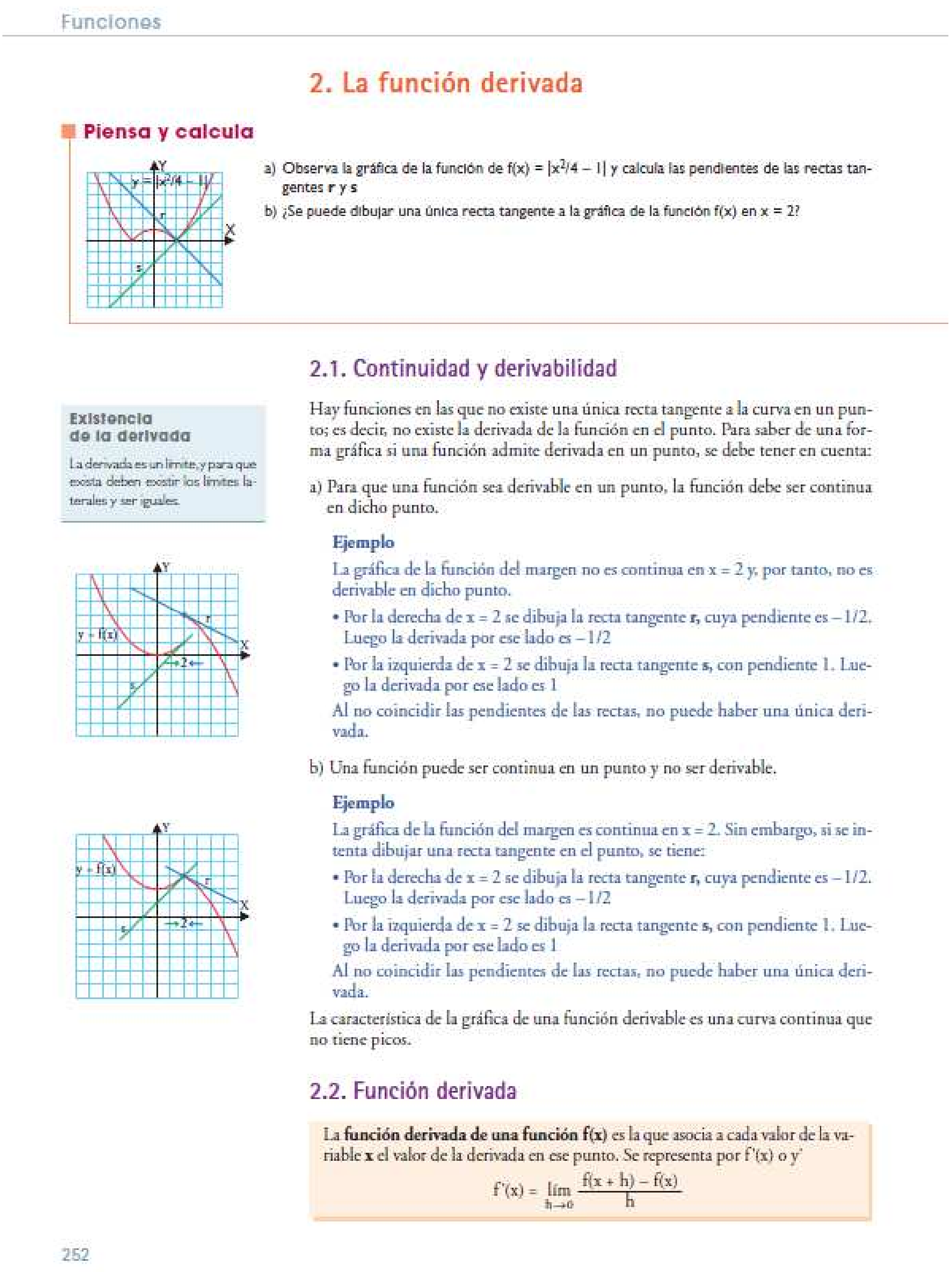
b) las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa x = 3

c) Representa la función f(x) y las rectas.

5. El número de bacterias que hay en un cultivo se expresa mediante la fórmula $f(x) = 2^x$, donde **x** representa el número de horas. Calcula el crecimiento medio por hora de las bacterias entre las 3 y las 5 horas.

251

Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas



2. La función derivada

Piensa y calcula

a) Observa la gráfica de la función de $f(x) = |x^2/4 - 1|$ y calcula las pendientes de las rectas tangentes **r** y **s**

b) ¿Se puede dibujar una única recta tangente a la gráfica de la función f(x) en $x = 2$?

2.1. Continuidad y derivabilidad

Existencia de la derivada

La derivada es un límite, y para que exista deben existir los límites laterales y ser iguales.

Hay funciones en las que no existe una única recta tangente a la curva en un punto; es decir, no existe la derivada de la función en el punto. Para saber de una forma gráfica si una función admite derivada en un punto, se debe tener en cuenta:

a) Para que una función sea derivable en un punto, la función debe ser continua en dicho punto.

Ejemplo

La gráfica de la función del margen no es continua en $x = 2$ y, por tanto, no es derivable en dicho punto.

- Por la derecha de $x = 2$ se dibuja la recta tangente **r**, cuya pendiente es –1/2. Luego la derivada por ese lado es –1/2
- Por la izquierda de $x = 2$ se dibuja la recta tangente **s**, con pendiente 1. Luego la derivada por ese lado es 1

Al no coincidir las pendientes de las rectas, no puede haber una única derivada.

b) Una función puede ser continua en un punto y no ser derivable.

Ejemplo

La gráfica de la función del margen es continua en $x = 2$. Sin embargo, si se intenta dibujar una recta tangente en el punto, se tiene:

- Por la derecha de $x = 2$ se dibuja la recta tangente **r**, cuya pendiente es –1/2. Luego la derivada por ese lado es –1/2
- Por la izquierda de $x = 2$ se dibuja la recta tangente **s**, con pendiente 1. Luego la derivada por ese lado es 1

Al no coincidir las pendientes de las rectas, no puede haber una única derivada.

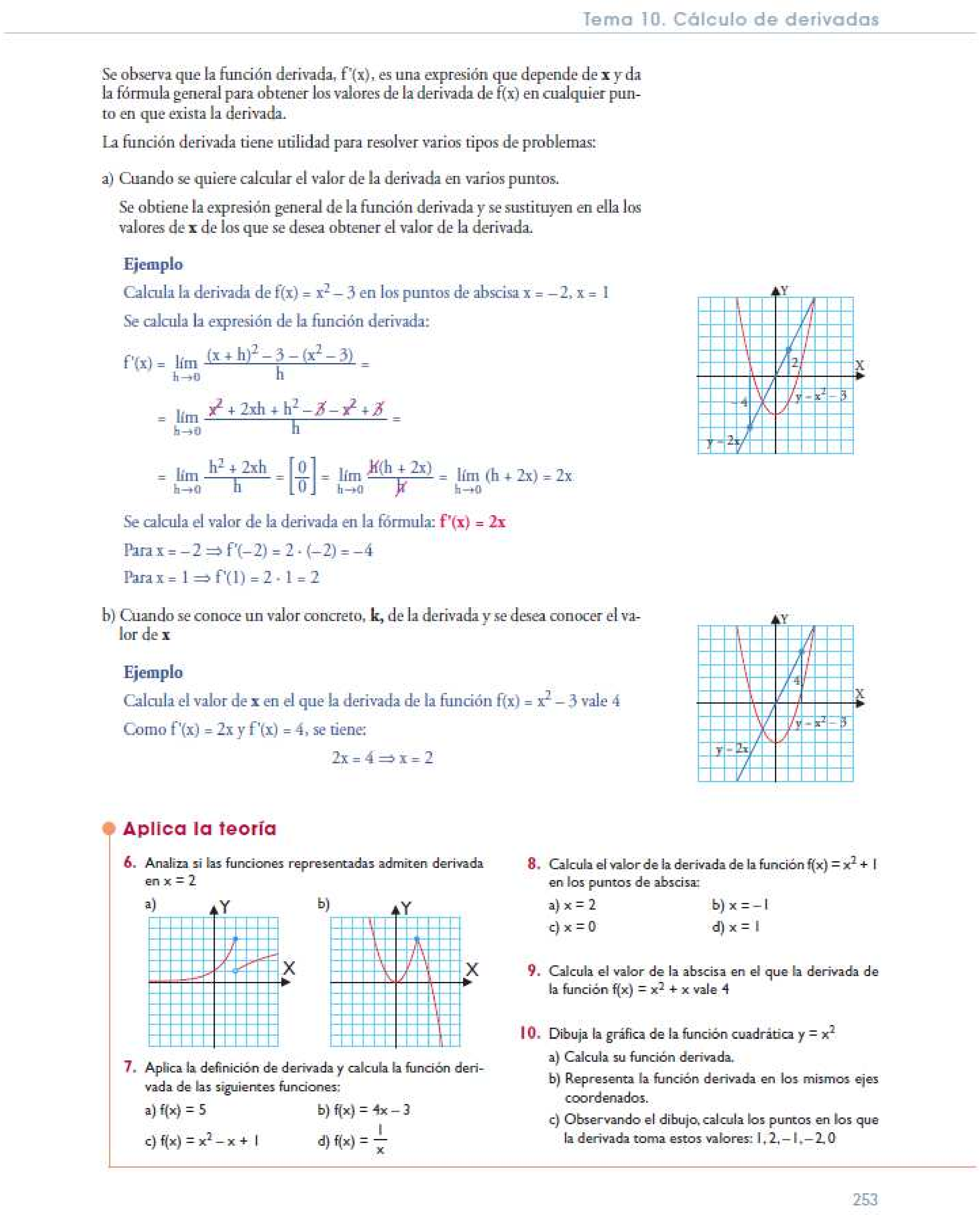
La característica de la gráfica de una función derivable es una curva continua que no tiene picos.

2.2. Función derivada

La **función derivada de una función f(x)** es la que asocia a cada valor de la variable **x** el valor de la derivada en ese punto. Se representa por f'(x) o y'

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas



Tema 10. Cálculo de derivadas

Se observa que la función derivada, f '(x), es una expresión que depende de **x** y da la fórmula general para obtener los valores de la derivada de f(x) en cualquier punto en que exista la derivada.

La función derivada tiene utilidad para resolver varios tipos de problemas:

a) Cuando se quiere calcular el valor de la derivada en varios puntos.

Se obtiene la expresión general de la función derivada y se sustituyen en ella los valores de **x** de los que se desea obtener el valor de la derivada.

Ejemplo

Calcula la derivada de $f(x) = x^2 - 3$ en los puntos de abscisa $x = -2$, $x = 1$

Se calcula la expresión de la función derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 3 - (x^2 - 3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{3} - \cancel{x^2} + \cancel{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h + 2x)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (h + 2x) = 2x$$

Se calcula el valor de la derivada en la fórmula: **$f'(x) = 2x$**

Para $x = -2 \Rightarrow f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$

Para $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

b) Cuando se conoce un valor concreto, **k,** de la derivada y se desea conocer el valor de **x**

Ejemplo

Calcula el valor de **x** en el que la derivada de la función $f(x) = x^2 - 3$ vale 4

Como $f'(x) = 2x$ y $f'(x) = 4$, se tiene:

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Aplica la teoría

6. Analiza si las funciones representadas admiten derivada en $x = 2$

a)

b)

7. Aplica la definición de derivada y calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5$
b) $f(x) = 4x - 3$
c) $f(x) = x^2 - x + 1$
d) $f(x) = \frac{1}{x}$

8. Calcula el valor de la derivada de la función $f(x) = x^2 + 1$ en los puntos de abscisa:

a) $x = 2$
b) $x = -1$
c) $x = 0$
d) $x = 1$

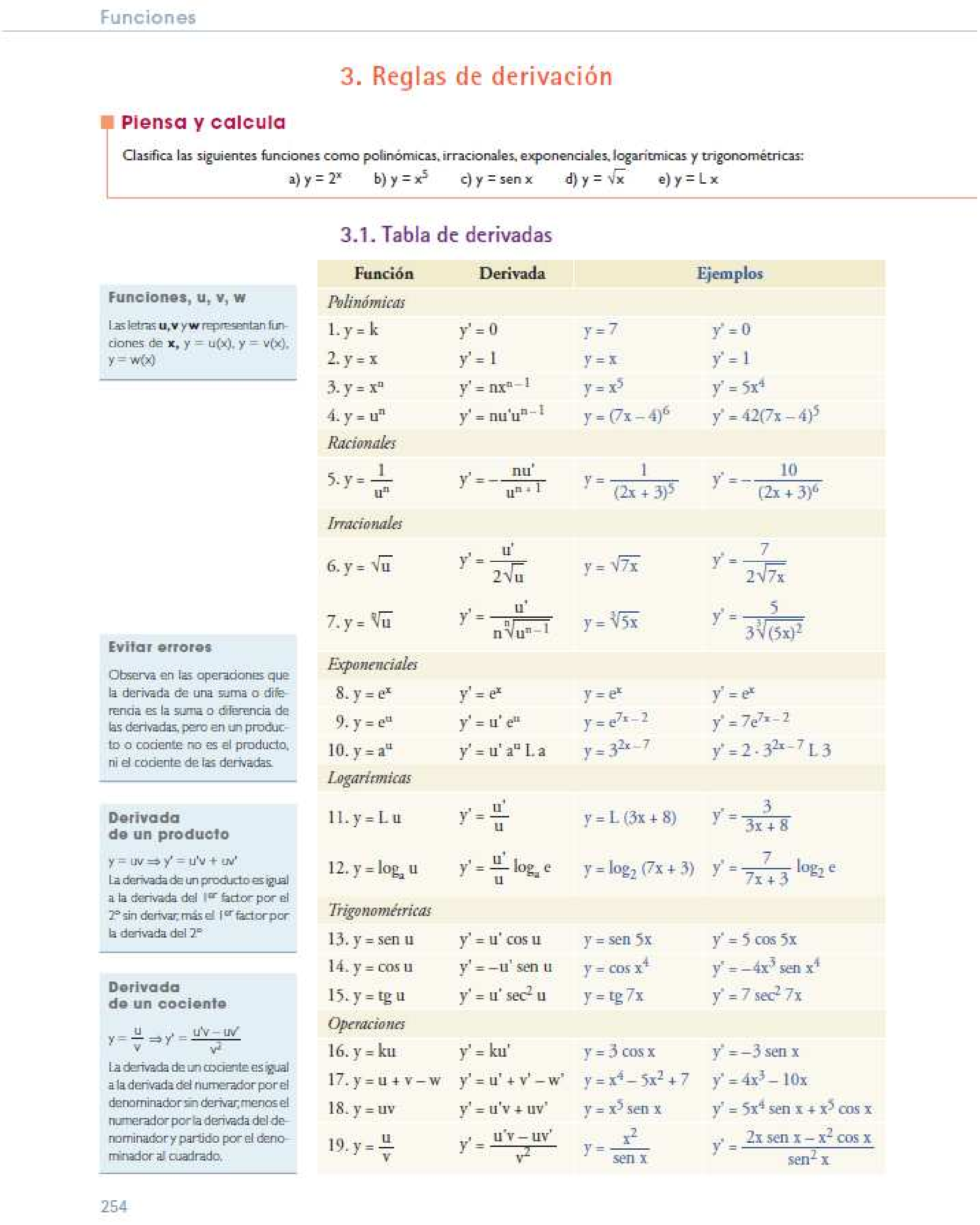
9. Calcula el valor de la abscisa en el que la derivada de la función $f(x) = x^2 + x$ vale 4

10. Dibuja la gráfica de la función cuadrática $y = x^2$

a) Calcula su función derivada.
b) Representa la función derivada en los mismos ejes coordenados.
c) Observando el dibujo, calcula los puntos en los que la derivada toma estos valores: 1, 2, −1, −2, 0

253

Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas



Funciones

3. Reglas de derivación

Piensa y calcula

Clasifica las siguientes funciones como polinómicas, irracionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas:

a) $y = 2^x$ b) $y = x^5$ c) $y = \text{sen } x$ d) $y = \sqrt{x}$ e) $y = \text{L } x$

3.1. Tabla de derivadas

Función	Derivada	Ejemplos	
Polinómicas			
1. $y = k$	$y' = 0$	$y = 7$	$y' = 0$
2. $y = x$	$y' = 1$	$y = x$	$y' = 1$
3. $y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = x^5$	$y' = 5x^4$
4. $y = u^n$	$y' = nu'u^{n-1}$	$y = (7x-4)^6$	$y' = 42(7x-4)^5$
Racionales			
5. $y = \frac{1}{u^n}$	$y' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$	$y = \frac{1}{(2x+3)^5}$	$y' = -\frac{10}{(2x+3)^6}$
Irracionales			
6. $y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{7x}$	$y' = \frac{7}{2\sqrt{7x}}$
7. $y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \sqrt[3]{5x}$	$y' = \frac{5}{3\sqrt[3]{(5x)^2}}$
Exponenciales			
8. $y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^x$	$y' = e^x$
9. $y = e^u$	$y' = u' e^u$	$y = e^{7x-2}$	$y' = 7e^{7x-2}$
10. $y = a^u$	$y' = u' a^u \text{ L } a$	$y = 3^{2x-7}$	$y' = 2 \cdot 3^{2x-7} \text{ L } 3$
Logarítmicas			
11. $y = \text{L } u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = \text{L } (3x+8)$	$y' = \frac{3}{3x+8}$
12. $y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$	$y = \log_2 (7x+3)$	$y' = \frac{7}{7x+3} \log_2 e$
Trigonométricas			
13. $y = \text{sen } u$	$y' = u' \cos u$	$y = \text{sen } 5x$	$y' = 5 \cos 5x$
14. $y = \cos u$	$y' = -u' \text{ sen } u$	$y = \cos x^4$	$y' = -4x^3 \text{ sen } x^4$
15. $y = \text{tg } u$	$y' = u' \sec^2 u$	$y = \text{tg } 7x$	$y' = 7 \sec^2 7x$
Operaciones			
16. $y = ku$	$y' = ku'$	$y = 3 \cos x$	$y' = -3 \text{ sen } x$
17. $y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$	$y = x^4 - 5x^2 + 7$	$y' = 4x^3 - 10x$
18. $y = uv$	$y' = u'v + uv'$	$y = x^5 \text{ sen } x$	$y' = 5x^4 \text{ sen } x + x^5 \cos x$
19. $y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$y = \frac{x^2}{\text{sen } x}$	$y' = \frac{2x \text{ sen } x - x^2 \cos x}{\text{sen}^2 x}$

Funciones, u, v, w

Las letras **u, v** y **w** representan funciones de **x**, $y = u(x)$, $y = v(x)$, $y = w(x)$

Evitar errores

Observa en las operaciones que la derivada de una suma o diferencia es la suma o diferencia de las derivadas, pero en un producto o cociente no es el producto, ni el cociente de las derivadas.

Derivada de un producto

$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$

La derivada de un producto es igual a la derivada del 1^er^ factor por el 2º sin derivar, más el 1^er^ factor por la derivada del 2º

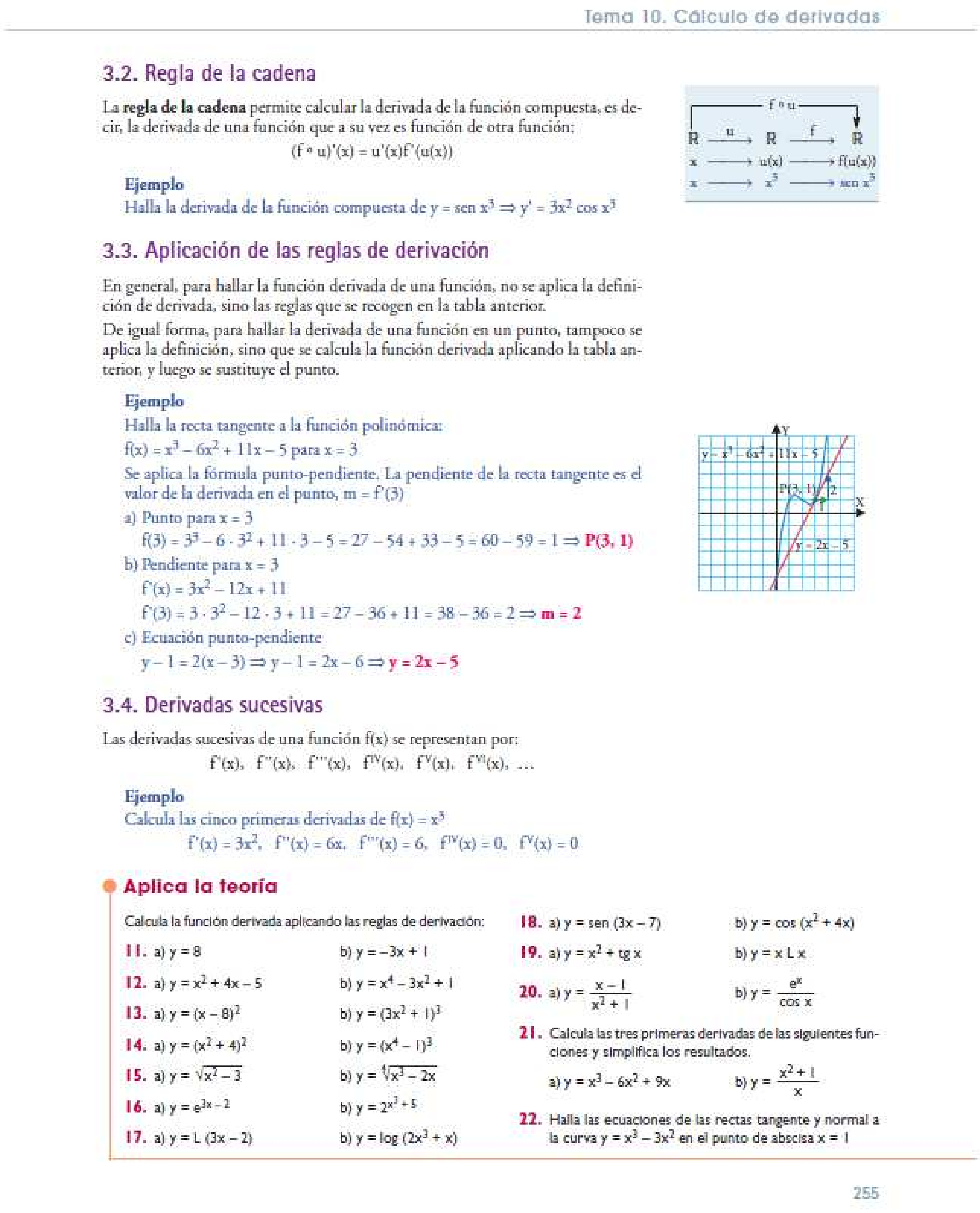
Derivada de un cociente

$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

La derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el numerador por la derivada del denominador y partido por el denominador al cuadrado.

254

Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas



3.2. Regla de la cadena

La **regla de la cadena** permite calcular la derivada de la función compuesta, es decir, la derivada de una función que a su vez es función de otra función:

$$(f \circ u)'(x) = u'(x)f'(u(x))$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "f \circ u"] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r] & u(x) \arrow[r] & f(u(x)) \\ x \arrow[r] & x^3 \arrow[r] & \text{sen } x^3 \end{tikzcd}$$

Ejemplo

Halla la derivada de la función compuesta de $y = \text{sen } x^3 \Rightarrow y' = 3x^2 \cos x^3$

3.3. Aplicación de las reglas de derivación

En general, para hallar la función derivada de una función, no se aplica la definición de derivada, sino las reglas que se recogen en la tabla anterior.

De igual forma, para hallar la derivada de una función en un punto, tampoco se aplica la definición, sino que se calcula la función derivada aplicando la tabla anterior, y luego se sustituye el punto.

Ejemplo

Halla la recta tangente a la función polinómica:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$ para $x = 3$

Se aplica la fórmula punto-pendiente. La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en el punto, $m = f'(3)$

a) Punto para x = 3

$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 5 = 27 - 54 + 33 - 5 = 60 - 59 = 1 \Rightarrow \mathbf{P(3, 1)}$

b) Pendiente para x = 3

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$

$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 11 = 27 - 36 + 11 = 38 - 36 = 2 \Rightarrow \mathbf{m = 2}$

c) Ecuación punto-pendiente

$y - 1 = 2(x - 3) \Rightarrow y - 1 = 2x - 6 \Rightarrow \mathbf{y = 2x - 5}$

3.4. Derivadas sucesivas

Las derivadas sucesivas de una función f(x) se representan por:

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{IV}(x),\ f^{V}(x),\ f^{VI}(x),\ \ldots$$

Ejemplo

Calcula las cinco primeras derivadas de $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x,\ f'''(x) = 6,\ f^{IV}(x) = 0,\ f^{V}(x) = 0$$

Aplica la teoría

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

11. a) $y = 8$ b) $y = -3x + 1$

12. a) $y = x^2 + 4x - 5$ b) $y = x^4 - 3x^2 + 1$

13. a) $y = (x - 8)^2$ b) $y = (3x^2 + 1)^3$

14. a) $y = (x^2 + 4)^2$ b) $y = (x^4 - 1)^3$

15. a) $y = \sqrt{x^2 - 3}$ b) $y = \sqrt[4]{x^3 - 2x}$

16. a) $y = e^{3x - 2}$ b) $y = 2^{x^3 + 5}$

17. a) $y = L\,(3x - 2)$ b) $y = \log\,(2x^3 + x)$

18. a) $y = \text{sen}\,(3x - 7)$ b) $y = \cos\,(x^2 + 4x)$

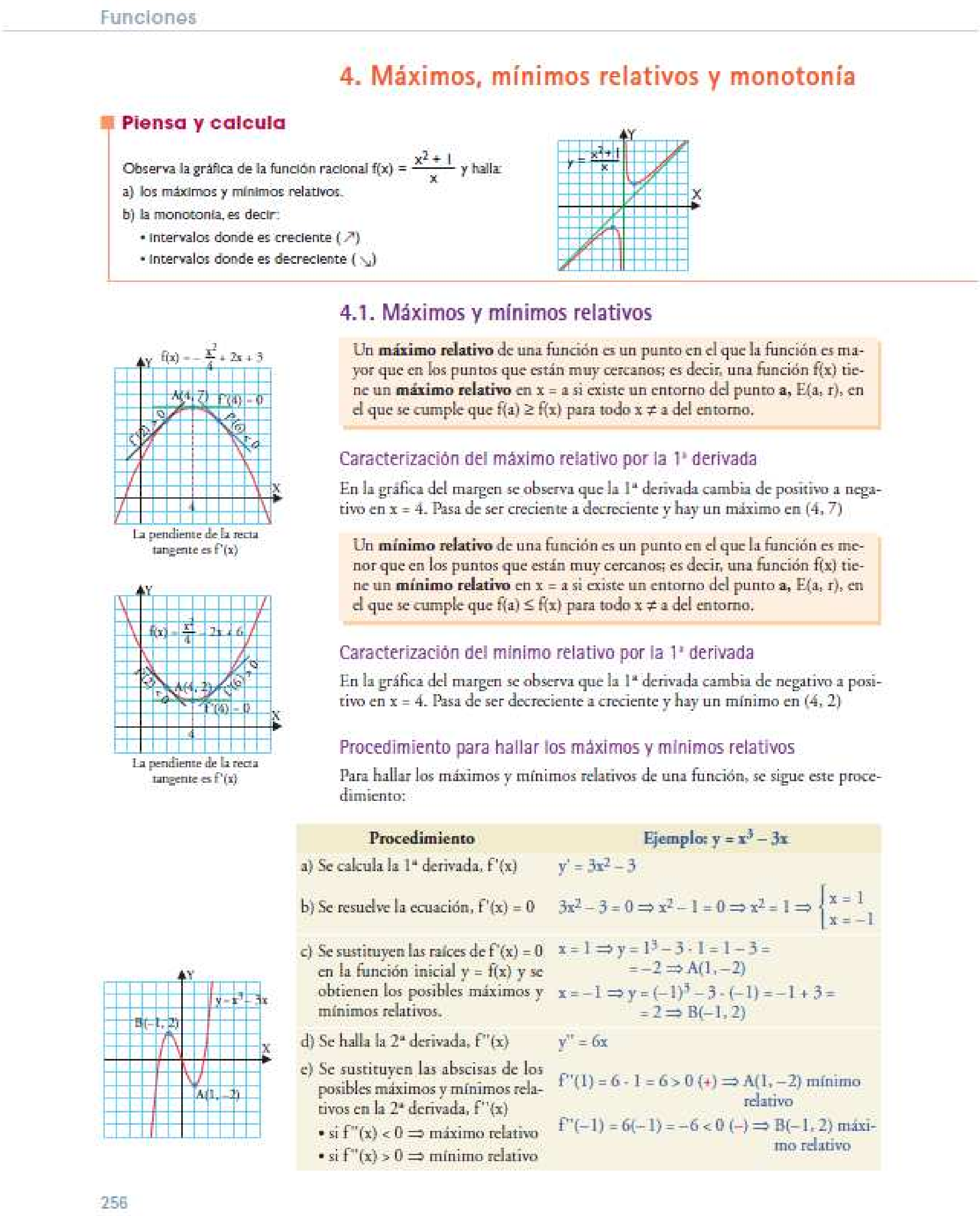
19. a) $y = x^2 + \text{tg}\,x$ b) $y = x\,L\,x$

20. a) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$ b) $y = \dfrac{e^x}{\cos x}$

21. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ b) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

22. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^3 - 3x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$



4. Máximos, mínimos relativos y monotonía

Piensa y calcula

Observa la gráfica de la función racional $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ y halla:

a) los máximos y mínimos relativos.

b) la monotonía, es decir:

- intervalos donde es creciente (↗)
- intervalos donde es decreciente (↘)

4.1. Máximos y mínimos relativos

La pendiente de la recta tangente es f'(x)

Un **máximo relativo** de una función es un punto en el que la función es mayor que en los puntos que están muy cercanos; es decir, una función f(x) tiene un **máximo relativo** en x = a si existe un entorno del punto **a,** E(a, r), en el que se cumple que f(a) ≥ f(x) para todo x ≠ a del entorno.

Caracterización del máximo relativo por la 1ª derivada

En la gráfica del margen se observa que la 1ª derivada cambia de positivo a negativo en x = 4. Pasa de ser creciente a decreciente y hay un máximo en (4, 7)

La pendiente de la recta tangente es f'(x)

Un **mínimo relativo** de una función es un punto en el que la función es menor que en los puntos que están muy cercanos; es decir, una función f(x) tiene un **mínimo relativo** en x = a si existe un entorno del punto **a,** E(a, r), en el que se cumple que f(a) ≤ f(x) para todo x ≠ a del entorno.

Caracterización del mínimo relativo por la 1ª derivada

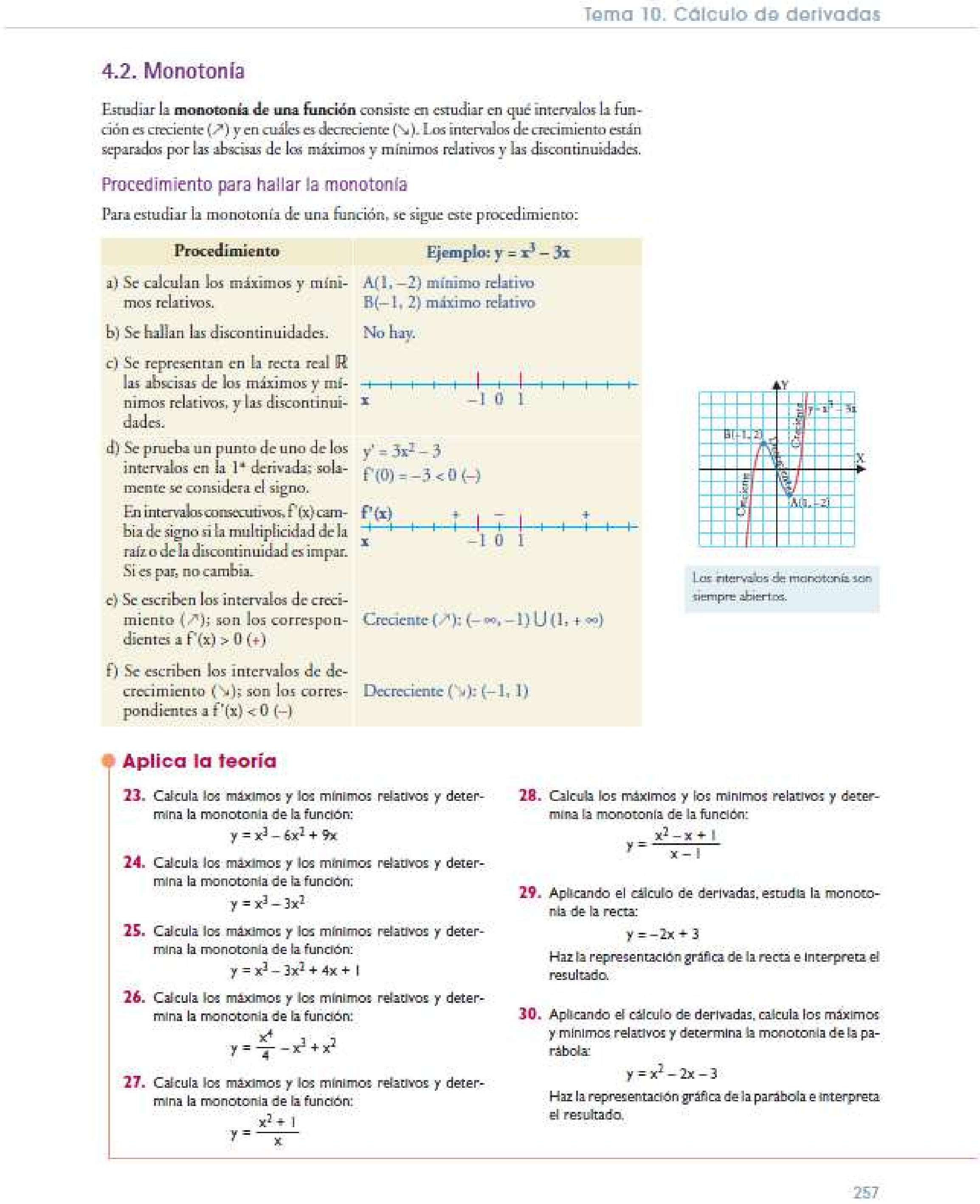
En la gráfica del margen se observa que la 1ª derivada cambia de negativo a positivo en x = 4. Pasa de ser decreciente a creciente y hay un mínimo en (4, 2)

Procedimiento para hallar los máximos y mínimos relativos

Para hallar los máximos y mínimos relativos de una función, se sigue este procedimiento:

Procedimiento	Ejemplo: $y = x^3 - 3x$
a) Se calcula la 1ª derivada, f'(x)	$y' = 3x^2 - 3$
b) Se resuelve la ecuación, f'(x) = 0	$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$
c) Se sustituyen las raíces de f'(x) = 0 en la función inicial y = f(x) y se obtienen los posibles máximos y mínimos relativos.	$x = 1 \Rightarrow y = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2 \Rightarrow A(1, -2)$ $x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow B(-1, 2)$
d) Se halla la 2ª derivada, f''(x)	$y'' = 6x$
e) Se sustituyen las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos en la 2ª derivada, f''(x) • si f''(x) < 0 ⇒ máximo relativo • si f''(x) > 0 ⇒ mínimo relativo	$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0\ (+) \Rightarrow A(1, -2)$ mínimo relativo $f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow B(-1, 2)$ máximo relativo

Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas



Tema 10. Cálculo de derivadas

4.2. Monotonía

Estudiar la **monotonía de una función** consiste en estudiar en qué intervalos la función es creciente (↗) y en cuáles es decreciente (↘). Los intervalos de crecimiento están separados por las abscisas de los máximos y mínimos relativos y las discontinuidades.

Procedimiento para hallar la monotonía

Para estudiar la monotonía de una función, se sigue este procedimiento:

Procedimiento	Ejemplo: $y = x^3 - 3x$
a) Se calculan los máximos y mínimos relativos.	A(1, –2) mínimo relativo B(–1, 2) máximo relativo
b) Se hallan las discontinuidades.	No hay.
c) Se representan en la recta real ℝ las abscisas de los máximos y mínimos relativos, y las discontinuidades.	x –1 0 1
d) Se prueba un punto de uno de los intervalos en la 1ª derivada; solamente se considera el signo. En intervalos consecutivos, f '(x) cambia de signo si la multiplicidad de la raíz o de la discontinuidad es impar. Si es par, no cambia.	$y' = 3x^2 - 3$ $f'(0) = -3 < 0$ (–) f '(x) + – + x –1 0 1
e) Se escriben los intervalos de crecimiento (↗); son los correspondientes a f '(x) > 0 (+)	Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
f) Se escriben los intervalos de decrecimiento (↘); son los correspondientes a f '(x) < 0 (–)	Decreciente (↘): $(-1, 1)$

Los intervalos de monotonía son siempre abiertos.

Aplica la teoría

23. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

24. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 3x^2$$

25. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$$

26. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

27. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

28. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

29. Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta:

$$y = -2x + 3$$

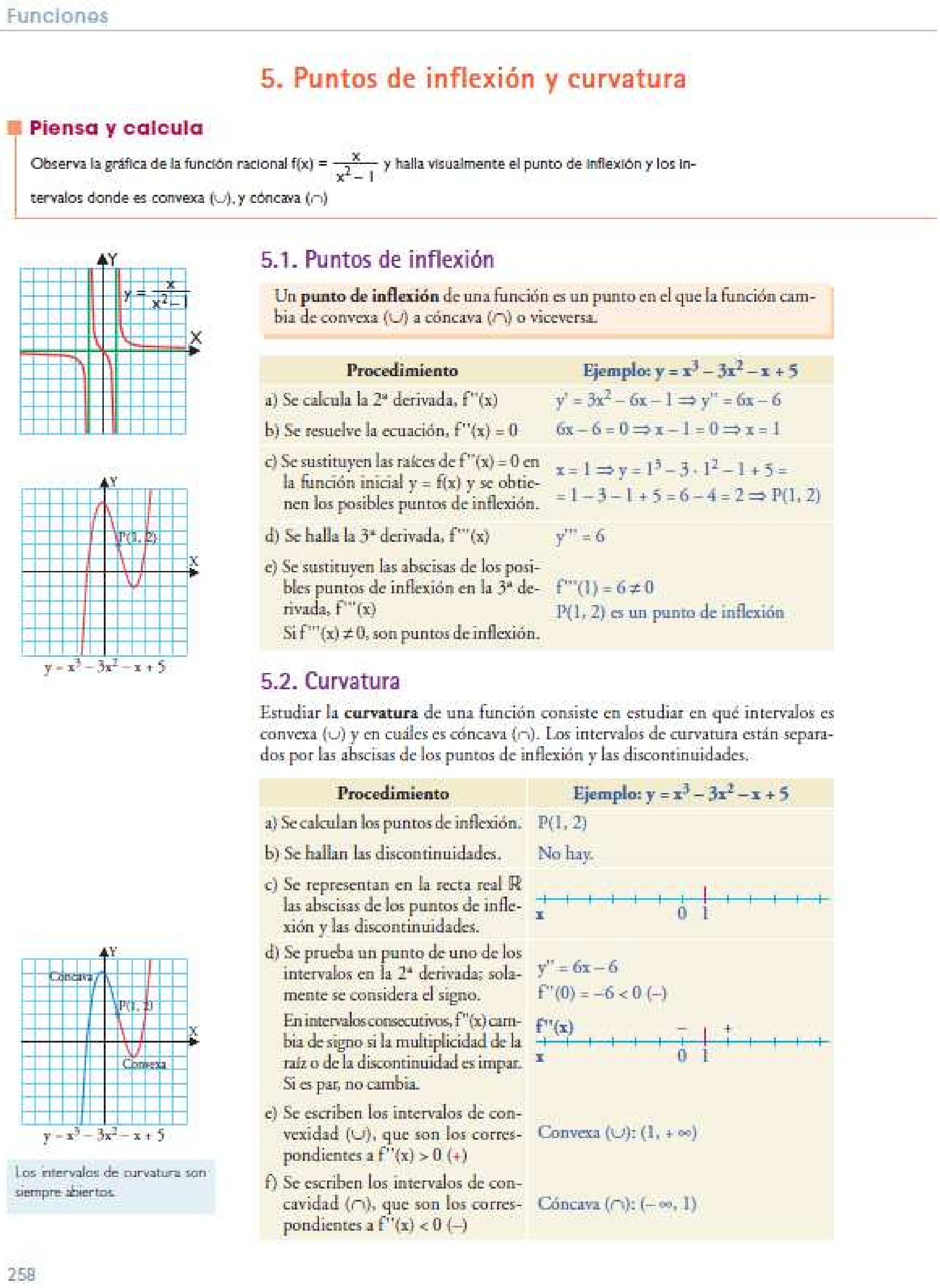
Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

30. Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

257



5. Puntos de inflexión y curvatura

Piensa y calcula

Observa la gráfica de la función racional $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ y halla visualmente el punto de inflexión y los intervalos donde es convexa (∪), y cóncava (∩)

5.1. Puntos de inflexión

Un **punto de inflexión** de una función es un punto en el que la función cambia de convexa (∪) a cóncava (∩) o viceversa.

Procedimiento	**Ejemplo: $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$**
a) Se calcula la 2ª derivada, f''(x)	$y' = 3x^2 - 6x - 1 \Rightarrow y'' = 6x - 6$
b) Se resuelve la ecuación, f''(x) = 0	$6x - 6 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
c) Se sustituyen las raíces de f''(x) = 0 en la función inicial y = f(x) y se obtienen los posibles puntos de inflexión.	$x = 1 \Rightarrow y = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 5 =$ $= 1 - 3 - 1 + 5 = 6 - 4 = 2 \Rightarrow P(1, 2)$
d) Se halla la 3ª derivada, f'''(x)	$y''' = 6$
e) Se sustituyen las abscisas de los posibles puntos de inflexión en la 3ª derivada, f'''(x) Si f'''(x) ≠ 0, son puntos de inflexión.	$f'''(1) = 6 \neq 0$ P(1, 2) es un punto de inflexión

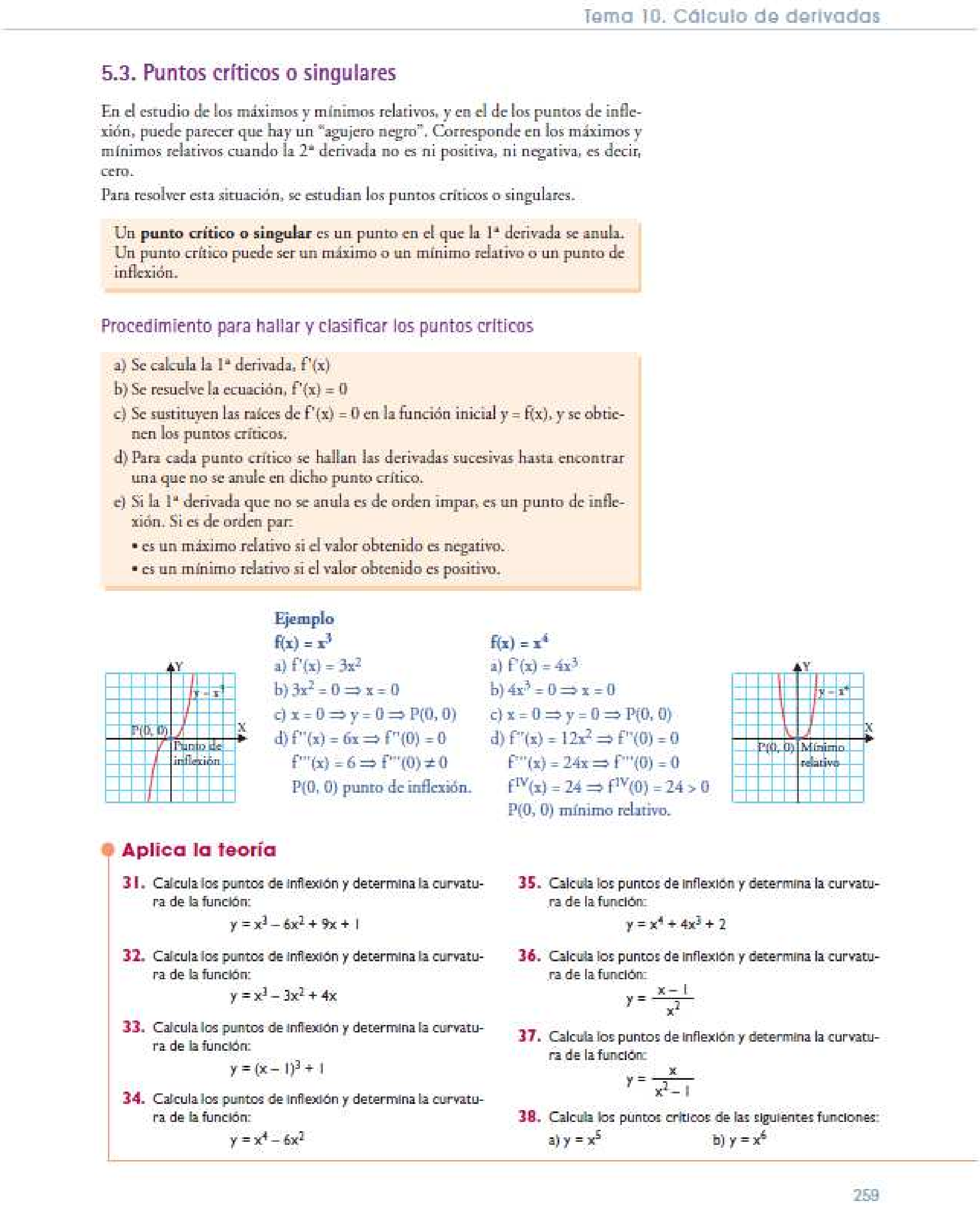
5.2. Curvatura

Estudiar la **curvatura** de una función consiste en estudiar en qué intervalos es convexa (∪) y en cuáles es cóncava (∩). Los intervalos de curvatura están separados por las abscisas de los puntos de inflexión y las discontinuidades.

Procedimiento	**Ejemplo: $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$**
a) Se calculan los puntos de inflexión.	P(1, 2)
b) Se hallan las discontinuidades.	No hay.
c) Se representan en la recta real ℝ las abscisas de los puntos de inflexión y las discontinuidades.	x 0 1
d) Se prueba un punto de uno de los intervalos en la 2ª derivada; solamente se considera el signo. En intervalos consecutivos, f''(x) cambia de signo si la multiplicidad de la raíz o de la discontinuidad es impar. Si es par, no cambia.	$y'' = 6x - 6$ $f''(0) = -6 < 0$ (–) f''(x) – + x 0 1
e) Se escriben los intervalos de convexidad (∪), que son los correspondientes a f''(x) > 0 (+)	Convexa (∪): (1, + ∞)
f) Se escriben los intervalos de concavidad (∩), que son los correspondientes a f''(x) < 0 (–)	Cóncava (∩): (– ∞, 1)

Los intervalos de curvatura son siempre abiertos.

Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas



Tema 10. Cálculo de derivadas

5.3. Puntos críticos o singulares

En el estudio de los máximos y mínimos relativos, y en el de los puntos de inflexión, puede parecer que hay un "agujero negro". Corresponde en los máximos y mínimos relativos cuando la 2ª derivada no es ni positiva, ni negativa, es decir, cero.

Para resolver esta situación, se estudian los puntos críticos o singulares.

Un **punto crítico o singular** es un punto en el que la 1ª derivada se anula. Un punto crítico puede ser un máximo o un mínimo relativo o un punto de inflexión.

Procedimiento para hallar y clasificar los puntos críticos

a) Se calcula la 1ª derivada, $f'(x)$

b) Se resuelve la ecuación, $f'(x) = 0$

c) Se sustituyen las raíces de $f'(x) = 0$ en la función inicial $y = f(x)$, y se obtienen los puntos críticos.

d) Para cada punto crítico se hallan las derivadas sucesivas hasta encontrar una que no se anule en dicho punto crítico.

e) Si la 1ª derivada que no se anula es de orden impar, es un punto de inflexión. Si es de orden par:
- es un máximo relativo si el valor obtenido es negativo.
- es un mínimo relativo si el valor obtenido es positivo.

Ejemplo

$f(x) = x^3$

a) $f'(x) = 3x^2$

b) $3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

c) $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(0, 0)$

d) $f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(0) \neq 0$

P(0, 0) punto de inflexión.

$f(x) = x^4$

a) $f'(x) = 4x^3$

b) $4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

c) $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(0, 0)$

d) $f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = 24 \Rightarrow f^{IV}(0) = 24 > 0$

P(0, 0) mínimo relativo.

Aplica la teoría

31. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

32. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x$$

33. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = (x - 1)^3 + 1$$

34. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^4 - 6x^2$$

35. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^4 + 4x^3 + 2$$

36. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{x - 1}{x^2}$$

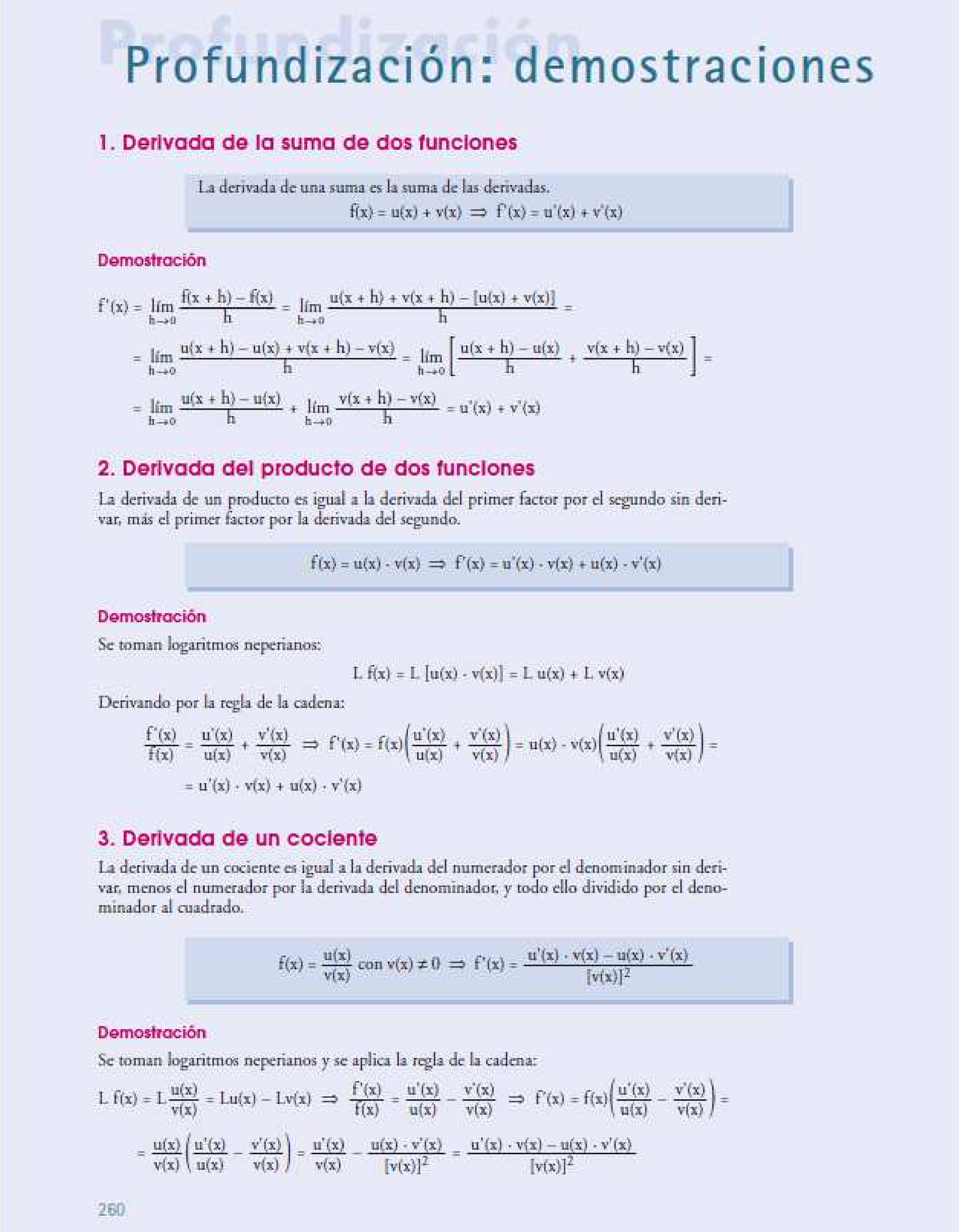
37. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

38. Calcula los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $y = x^5$ b) $y = x^6$

259



Profundización: demostraciones

1. Derivada de la suma de dos funciones

La derivada de una suma es la suma de las derivadas.

$$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Demostración

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)+v(x+h)-[u(x)+v(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)+v(x+h)-v(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} = u'(x) + v'(x)$$

2. Derivada del producto de dos funciones

La derivada de un producto es igual a la derivada del primer factor por el segundo sin derivar, más el primer factor por la derivada del segundo.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Demostración

Se toman logaritmos neperianos:

$$L\, f(x) = L\, [u(x) \cdot v(x)] = L\, u(x) + L\, v(x)$$

Derivando por la regla de la cadena:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x)\left(\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}\right) = u(x) \cdot v(x)\left(\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}\right) =$$

$$= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

3. Derivada de un cociente

La derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el numerador por la derivada del denominador, y todo ello dividido por el denominador al cuadrado.

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ con } v(x) \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Demostración

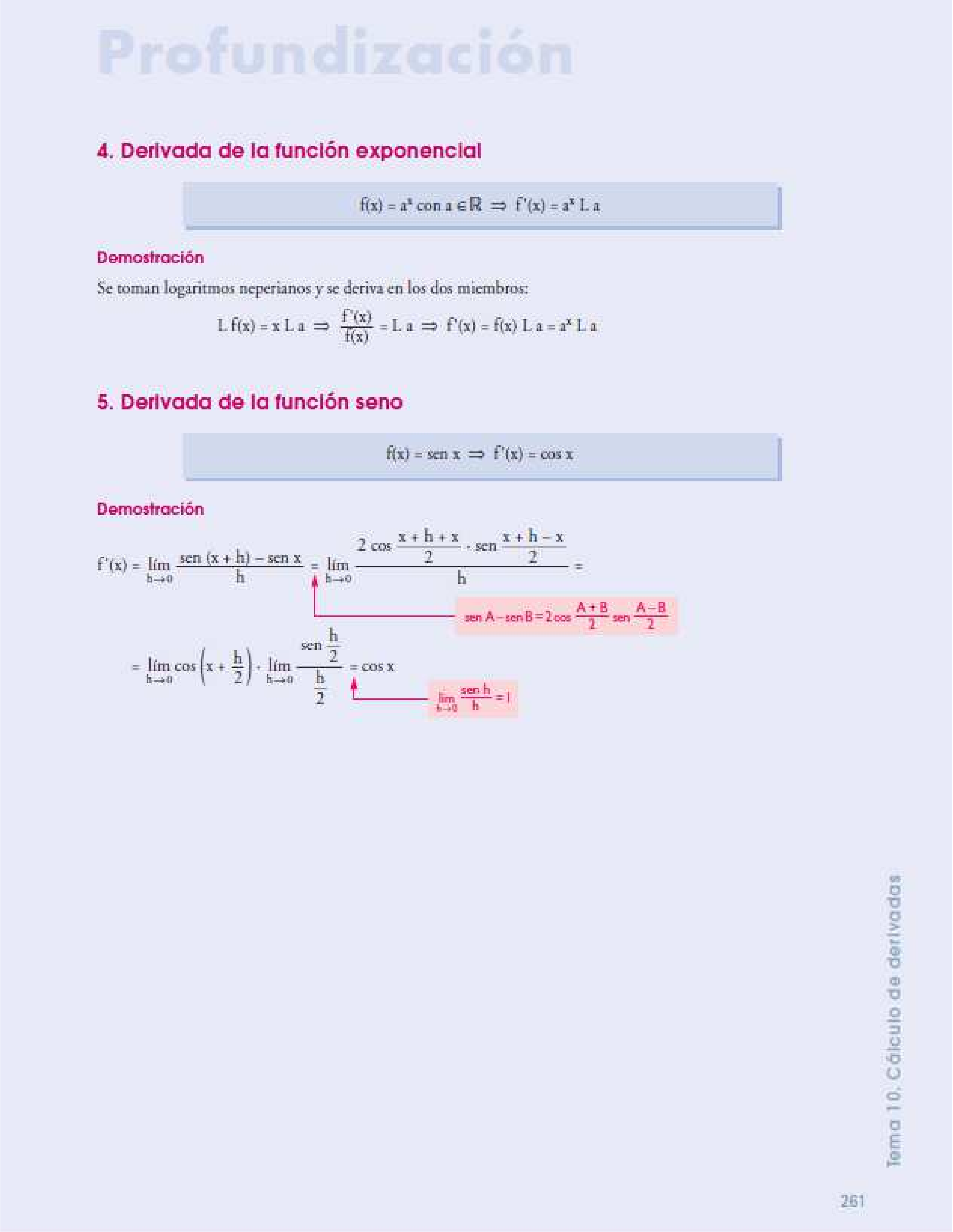
Se toman logaritmos neperianos y se aplica la regla de la cadena:

$$L\, f(x) = L\frac{u(x)}{v(x)} = Lu(x) - Lv(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x)\left(\frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}\right) =$$

$$= \frac{u(x)}{v(x)}\left(\frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}\right) = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

260

Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas



Profundización

4. Derivada de la función exponencial

$$f(x) = a^x \text{ con } a \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = a^x \, L\, a$$

Demostración

Se toman logaritmos neperianos y se deriva en los dos miembros:

$$L\, f(x) = x\, L\, a \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = L\, a \Rightarrow f'(x) = f(x)\, L\, a = a^x\, L\, a$$

5. Derivada de la función seno

$$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

Demostración

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cos \frac{x+h+x}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{x+h-x}{2}}{h} =$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$$

Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas

Ejercicios y problemas

1. La derivada

39. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = -3x + 5$ en $[-1, 2]$
b) $f(x) = x^2 - 6x - 4$ en $[1, 3]$
c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ en $[-1, 3]$
d) $f(x) = \sqrt{x+4}$ en $[-3, 0]$

40. Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 5x - 3$ en $x = -4$
b) $f(x) = -x + 2$ en $x = 3$
c) $f(x) = -x^2 + 5$ en $x = -1$
d) $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$ en $x = 1$

41. Aplica la definición de derivada y calcula:

a) la derivada de la función $f(x) = x^2 + 4x - 1$ en $x = 1$
b) las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 1$
c) Representa la función $f(x)$ y las rectas.

42. El número de llamadas que se reciben en una centralita es:

$$f(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$$

donde **x** se expresa en horas, y $f(x)$, en miles de llamadas. Calcula el número medio de llamadas que se reciben entre las 2 y las 4 horas; y entre las 4 y las 6 horas. ¿Cómo interpretas los resultados?

2. La función derivada

43. Analiza si las funciones representadas admiten derivada en $x = 1$

a) b)

44. Aplicando la definición de derivada, calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ b) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

45. Aplicando la definición de derivada, halla la función derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

Calcula:

a) el valor de la derivada en el punto de abscisa $x = 2$
b) el valor de la abscisa en el que la derivada vale 1/4

3. Reglas de derivación

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

46. a) $y = 3x^2 + x - 7$ b) $y = -x^4 + x^2 - 6x$
47. a) $y = 2x^3 + x^2 - 5$ b) $y = 3x^4 + 5x + 1$
48. a) $y = (x^3 - 1)^2$ b) $y = (x^3 + 1)^4$
49. a) $y = (2x^3 + x^2)^3$ b) $y = (2x^4 - 1)^5$
50. a) $y = \sqrt{3x^2 - 2}$ b) $y = \sqrt{x^3 - x}$
51. a) $y = \sqrt[5]{x^3 - x}$ b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x}$
52. a) $y = e^{2x^3}$ b) $y = e^{7x}$
53. a) $y = 7^{2x+3}$ b) $y = e^{-x^2+2}$
54. a) $y = L\ (5x^3 - 3x)$ b) $y = L\ (x^4 - x^2)$
55. a) $y = \log\ (2x^3 + 5)$ b) $y = \log\ (x^2 + 4x + 1)$
56. a) $y = \text{sen}\ (3x^2 - 4x)$ b) $y = \cos\ (4x^3 + x)$
57. a) $y = \text{sen}\ (x^3 + 2)$ b) $y = \text{tg}\ (x^2 - 1)$
58. a) $y = e^x + \cos x$ b) $y = x\ e^x$
59. a) $y = \dfrac{2x+3}{x^2-2}$ b) $y = \dfrac{L\ x}{\text{sen}\ x}$

60. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = -x^4 + 2x^2$ b) $y = \dfrac{x^3}{6} - 2x$
c) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ d) $y = \dfrac{x^2+4}{2x}$

61. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = -x^3 + 3x$ b) $y = x^4 - 4x^2$
c) $y = \dfrac{6}{x^2+3}$ d) $y = \dfrac{x^2-x-2}{1-x}$

4. Máximos, mínimos relativos y monotonía

62. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 3x$$

Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas

Ejercicios y problemas

63. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^3}{3} - 4x$$

64. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = 2x^3 - 6x + 1$$

65. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = -x^3 + 6x^2 + 15x - 1$$

66. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

67. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

68. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

69. Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta $y = 4x - 5$

Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

70. Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola $y = -2x^2 - 8x - 3$

Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

5. Puntos de inflexión y curvatura

71. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^3 - 3x + 4$$

72. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = -x^3 + 3x^2 + 1$$

73. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = 2x^3 - 3x + 4$$

74. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = 4x^3 - 3x^4$$

75. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$$

76. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

77. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

78. Calcula los puntos críticos de la función:

$$y = x^3$$

79. Calcula los puntos críticos de la función:

$$y = x^4$$

Para ampliar

80. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = -x + 1$ en $[-1, 2]$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ en $[2, 4]$

81. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$ en $[3, 5]$

b) $f(x) = \sqrt{x + 6}$ en $[-2, 3]$

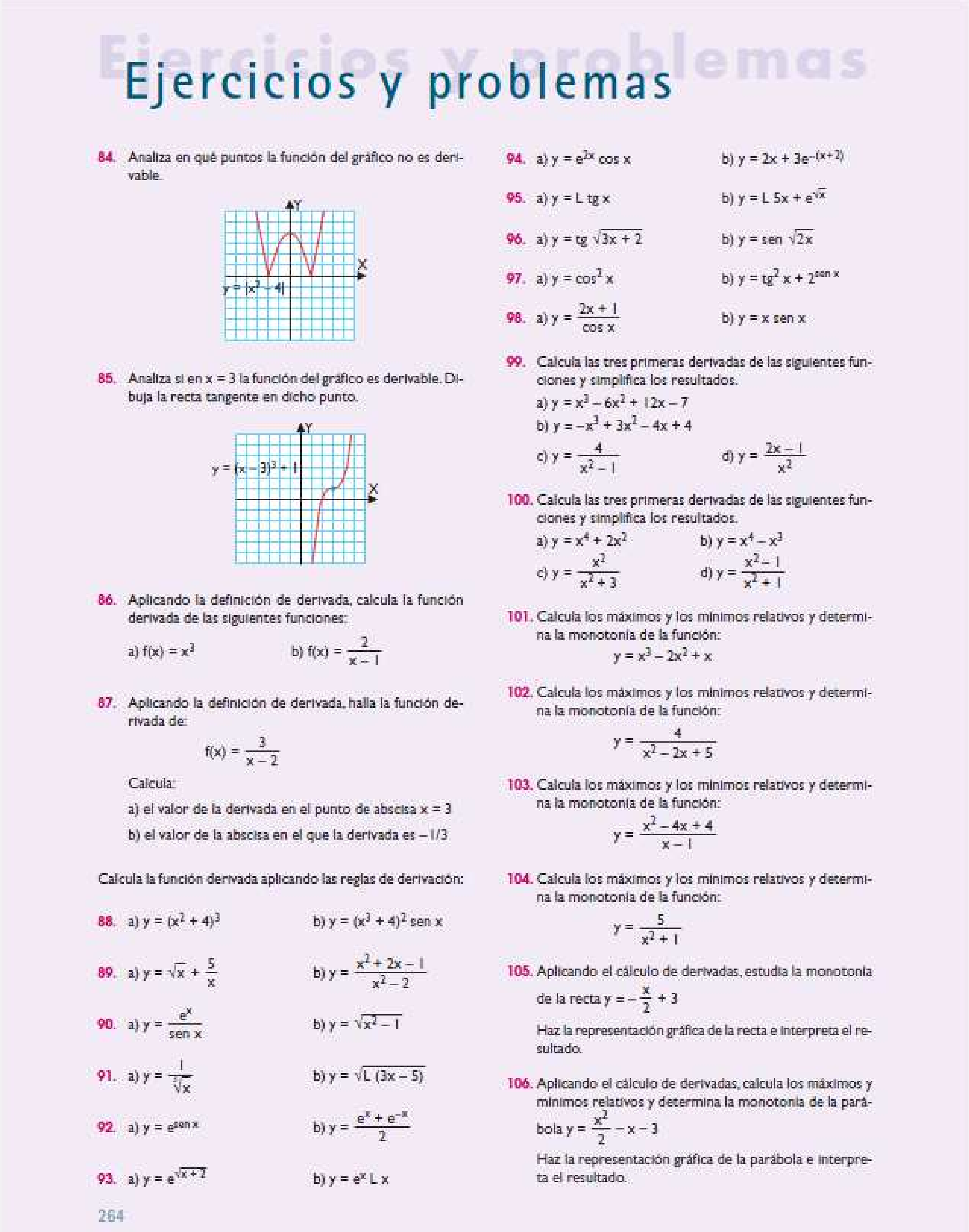
82. Aplica la definición de derivada y calcula:

a) la derivada de la función $f(x) = \frac{3}{x}$ en $x = 1$

b) las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 1$

c) Representa la función $f(x)$ y las rectas.

83. El espacio que recorre una motocicleta viene dado por $f(t) = t^2 + t$, donde t se expresa en segundos, y $f(t)$, en metros. Calcula la velocidad media en las dos primeras horas de movimiento.



Ejercicios y problemas

84. Analiza en qué puntos la función del gráfico no es derivable.

85. Analiza si en $x = 3$ la función del gráfico es derivable. Dibuja la recta tangente en dicho punto.

86. Aplicando la definición de derivada, calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \frac{2}{x - 1}$

87. Aplicando la definición de derivada, halla la función derivada de:

$$f(x) = \frac{3}{x - 2}$$

Calcula:

a) el valor de la derivada en el punto de abscisa $x = 3$

b) el valor de la abscisa en el que la derivada es $-1/3$

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

88. a) $y = (x^2 + 4)^3$ b) $y = (x^3 + 4)^2 \text{ sen } x$

89. a) $y = \sqrt{x} + \frac{5}{x}$ b) $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2}$

90. a) $y = \frac{e^x}{\text{sen } x}$ b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

91. a) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ b) $y = \sqrt{L\,(3x - 5)}$

92. a) $y = e^{\text{sen } x}$ b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

93. a) $y = e^{\sqrt{x + 2}}$ b) $y = e^x \, L\, x$

94. a) $y = e^{2x} \cos x$ b) $y = 2x + 3e^{-(x+2)}$

95. a) $y = L \text{ tg } x$ b) $y = L\, 5x + e^{\sqrt{x}}$

96. a) $y = \text{tg } \sqrt{3x + 2}$ b) $y = \text{sen } \sqrt{2x}$

97. a) $y = \cos^2 x$ b) $y = \text{tg}^2 x + 2^{\text{sen } x}$

98. a) $y = \frac{2x + 1}{\cos x}$ b) $y = x \text{ sen } x$

99. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

b) $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4$

c) $y = \frac{4}{x^2 - 1}$ d) $y = \frac{2x - 1}{x^2}$

100. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = x^4 + 2x^2$ b) $y = x^4 - x^3$

c) $y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$ d) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

101. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 2x^2 + x$$

102. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{4}{x^2 - 2x + 5}$$

103. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$$

104. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{5}{x^2 + 1}$$

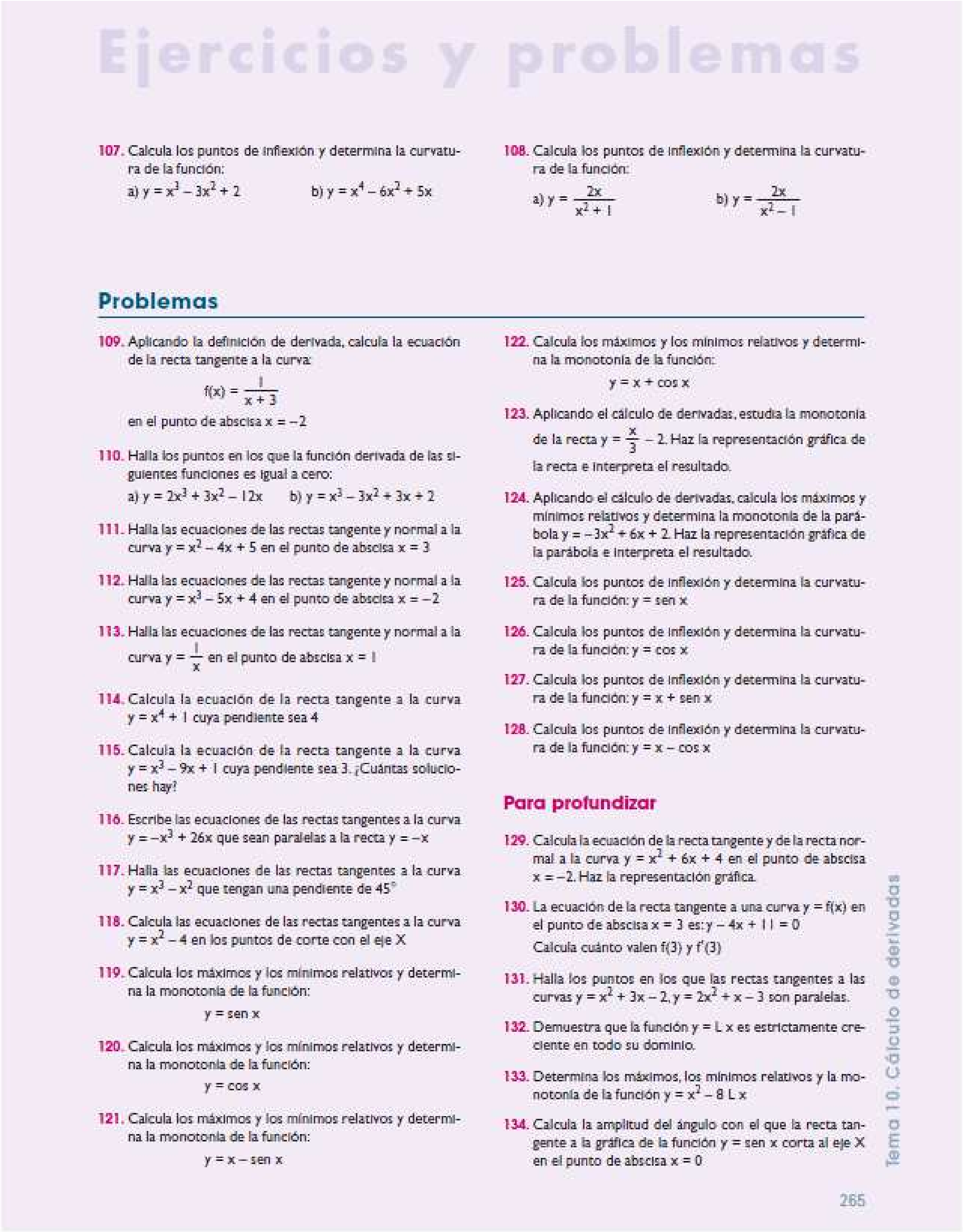
105. Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta $y = -\frac{x}{2} + 3$

Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

106. Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola $y = \frac{x^2}{2} - x - 3$

Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas



Ejercicios y problemas

107. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ b) $y = x^4 - 6x^2 + 5x$

108. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

a) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ b) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$

Problemas

109. Aplicando la definición de derivada, calcula la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$f(x) = \frac{1}{x + 3}$$

en el punto de abscisa $x = -2$

110. Halla los puntos en los que la función derivada de las siguientes funciones es igual a cero:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

111. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 - 4x + 5$ en el punto de abscisa $x = 3$

112. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^3 - 5x + 4$ en el punto de abscisa $x = -2$

113. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$

114. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 + 1$ cuya pendiente sea 4

115. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 9x + 1$ cuya pendiente sea 3. ¿Cuántas soluciones hay?

116. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = -x^3 + 26x$ que sean paralelas a la recta $y = -x$

117. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - x^2$ que tengan una pendiente de 45°

118. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^2 - 4$ en los puntos de corte con el eje X

119. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \text{sen } x$$

120. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \cos x$$

121. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x - \text{sen } x$$

122. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x + \cos x$$

123. Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta $y = \frac{x}{3} - 2$. Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

124. Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola $y = -3x^2 + 6x + 2$. Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

125. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = \text{sen } x$

126. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = \cos x$

127. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = x + \text{sen } x$

128. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = x - \cos x$

Para profundizar

129. Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = x^2 + 6x + 4$ en el punto de abscisa $x = -2$. Haz la representación gráfica.

130. La ecuación de la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$ es: $y - 4x + 11 = 0$

Calcula cuánto valen $f(3)$ y $f'(3)$

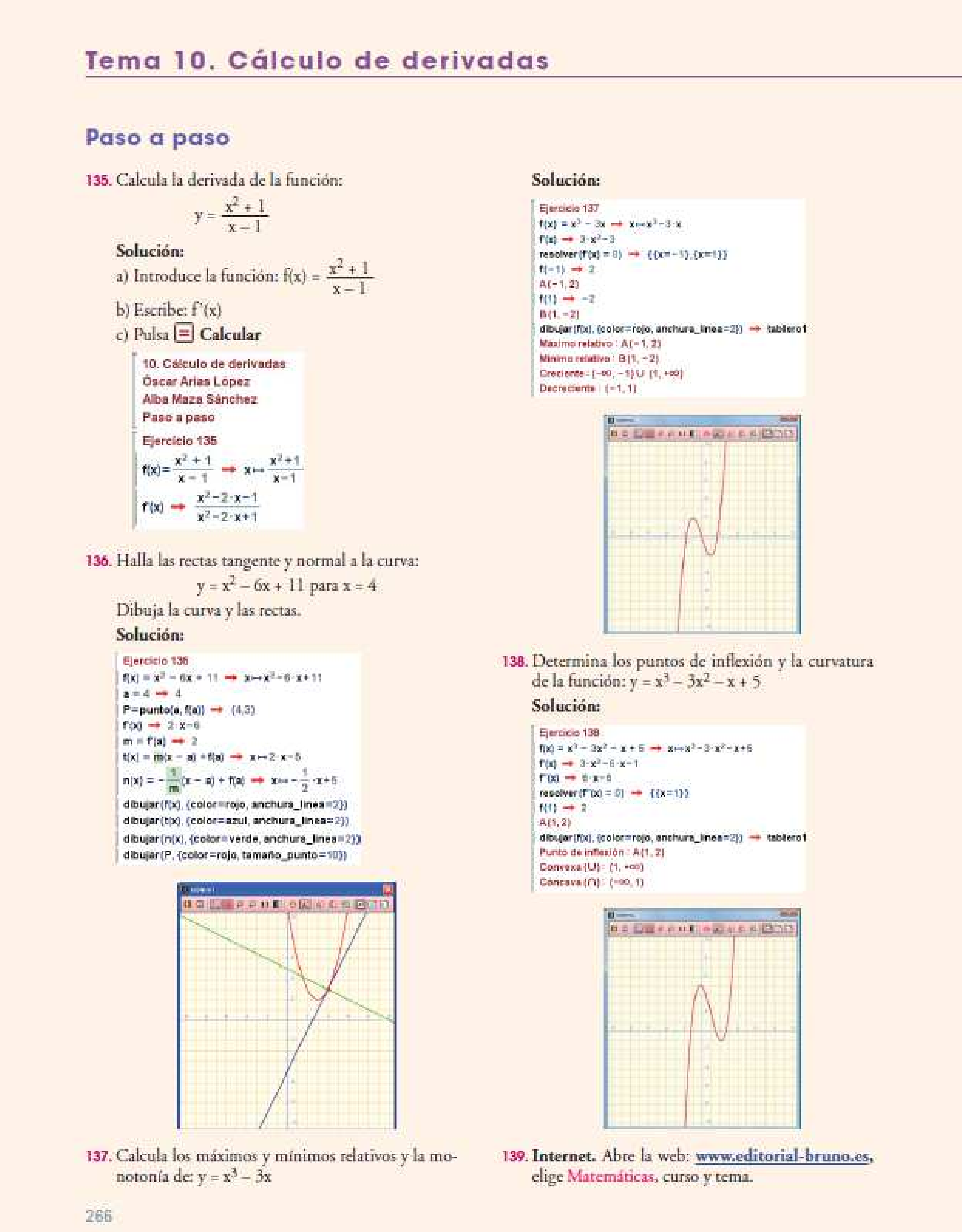
131. Halla los puntos en los que las rectas tangentes a las curvas $y = x^2 + 3x - 2$, $y = 2x^2 + x - 3$ son paralelas.

132. Demuestra que la función $y = L\,x$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

133. Determina los máximos, los mínimos relativos y la monotonía de la función $y = x^2 - 8\,L\,x$

134. Calcula la amplitud del ángulo con el que la recta tangente a la gráfica de la función $y = \text{sen } x$ corta al eje X en el punto de abscisa $x = 0$

Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas



Tema 10. Cálculo de derivadas

Paso a paso

135. Calcula la derivada de la función:

$$y = \frac{x^2+1}{x-1}$$

Solución:

a) Introduce la función: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

b) Escribe: f'(x)

c) Pulsa ⊟ **Calcular**

10. Cálculo de derivadas
Óscar Arias López
Alba Maza Sánchez
Paso a paso

Ejercicio 135
$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} \rightarrow x \mapsto \frac{x^2+1}{x-1}$
$f'(x) \rightarrow \frac{x^2-2\cdot x-1}{x^2-2\cdot x+1}$

136. Halla las rectas tangente y normal a la curva:

$$y = x^2 - 6x + 11 \text{ para } x = 4$$

Dibuja la curva y las rectas.

Solución:

Ejercicio 136
$f(x) = x^2 - 6x + 11 \rightarrow x \mapsto x^2-6\cdot x+11$
$a = 4 \rightarrow 4$
$P=\text{punto}(a, f(a)) \rightarrow (4,3)$
$f'(x) \rightarrow 2\cdot x-6$
$m = f'(a) \rightarrow 2$
$t(x) = m(x - a) + f(a) \rightarrow x \mapsto 2\cdot x-5$
$n(x) = -\frac{1}{m}(x - a) + f(a) \rightarrow x \mapsto -\frac{1}{2}\cdot x+5$
dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_linea=2})
dibujar(t(x), {color=azul, anchura_linea=2})
dibujar(n(x), {color=verde, anchura_linea=2})
dibujar(P, {color=rojo, tamaño_punto=10})

137. Calcula los máximos y mínimos relativos y la monotonía de: $y = x^3 - 3x$

Solución:

Ejercicio 137
$f(x) = x^3 - 3x \rightarrow x \mapsto x^3-3\cdot x$
$f'(x) \rightarrow 3\cdot x^2-3$
resolver(f'(x) = 0) $\rightarrow$ {{x=−1},{x=1}}
$f(-1) \rightarrow 2$
A(−1, 2)
$f(1) \rightarrow -2$
B(1, −2)
dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_linea=2}) → tablero1
Máximo relativo : A(−1, 2)
Mínimo relativo : B(1, −2)
Creciente : (−∞, −1) ∪ (1, +∞)
Decreciente : (−1, 1)

138. Determina los puntos de inflexión y la curvatura de la función: $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$

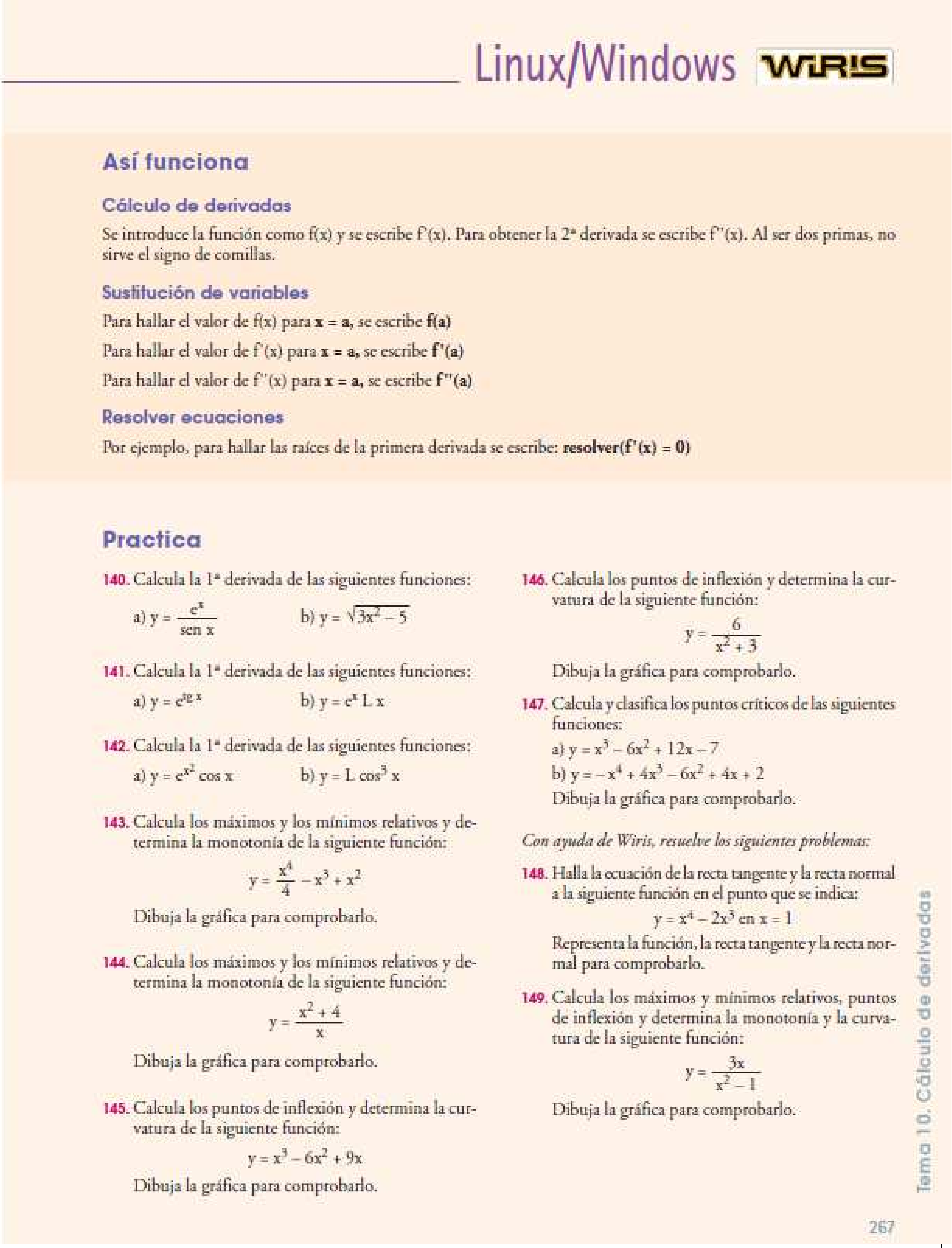
Solución:

Ejercicio 138
$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5 \rightarrow x \mapsto x^3-3\cdot x^2-x+5$
$f'(x) \rightarrow 3\cdot x^2-6\cdot x-1$
$f''(x) \rightarrow 6\cdot x-6$
resolver(f''(x) = 0) $\rightarrow$ {{x=1}}
$f(1) \rightarrow 2$
A(1, 2)
dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_linea=2}) → tablero1
Punto de inflexión : A(1, 2)
Convexa (∪) : (1, +∞)
Cóncava (∩) : (−∞, 1)

139. Internet. Abre la web: **www.editorial-bruno.es**, elige Matemáticas, curso y tema.

266

Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas



Linux/Windows WIRIS

Así funciona

Cálculo de derivadas

Se introduce la función como f(x) y se escribe f'(x). Para obtener la 2ª derivada se escribe f''(x). Al ser dos primas, no sirve el signo de comillas.

Sustitución de variables

Para hallar el valor de f(x) para **x = a,** se escribe **f(a)**

Para hallar el valor de f'(x) para **x = a,** se escribe **f'(a)**

Para hallar el valor de f''(x) para **x = a,** se escribe **f''(a)**

Resolver ecuaciones

Por ejemplo, para hallar las raíces de la primera derivada se escribe: **resolver(f'(x) = 0)**

Practica

140. Calcula la 1ª derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{e^x}{\text{sen } x}$ b) $y = \sqrt{3x^2 - 5}$

141. Calcula la 1ª derivada de las siguientes funciones:

a) $y = e^{\text{tg } x}$ b) $y = e^x \text{ L } x$

142. Calcula la 1ª derivada de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^2} \cos x$ b) $y = \text{L} \cos^3 x$

143. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

144. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = \frac{x^2 + 4}{x}$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

145. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

146. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

147. Calcula y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

b) $y = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 2$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Con ayuda de Wiris, resuelve los siguientes problemas:

148. Halla la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la siguiente función en el punto que se indica:

$$y = x^4 - 2x^3 \text{ en } x = 1$$

Representa la función, la recta tangente y la recta normal para comprobarlo.

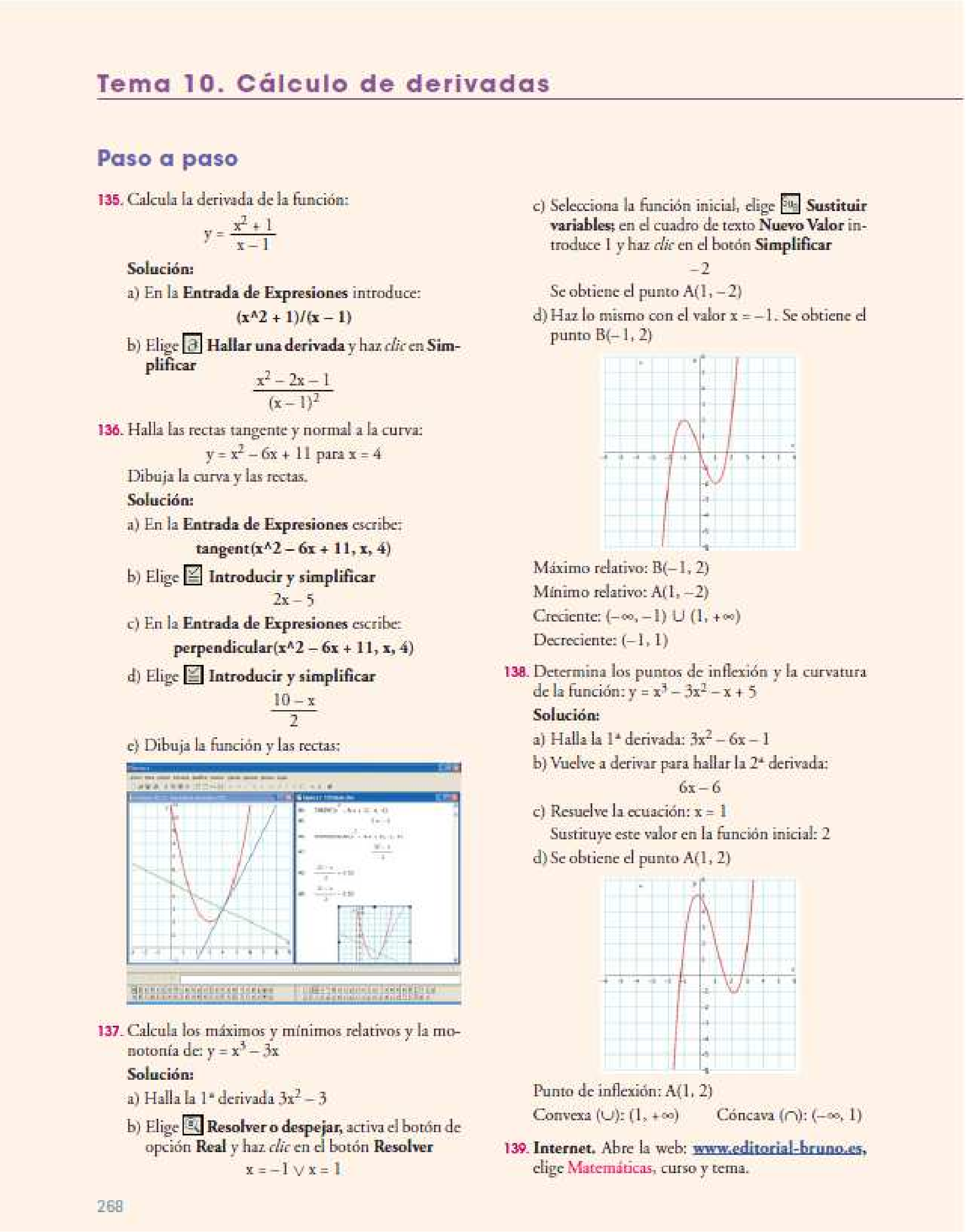
149. Calcula los máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión y determina la monotonía y la curvatura de la siguiente función:

$$y = \frac{3x}{x^2 - 1}$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Tema 10. Cálculo de derivadas

267



Tema 10. Cálculo de derivadas

Paso a paso

135. Calcula la derivada de la función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

Solución:

a) En la **Entrada de Expresiones** introduce:

(x^2 + 1)/(x – 1)

b) Elige **Hallar una derivada** y haz *clic* en **Simplificar**

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$$

136. Halla las rectas tangente y normal a la curva:

$$y = x^2 - 6x + 11 \text{ para } x = 4$$

Dibuja la curva y las rectas.

Solución:

a) En la **Entrada de Expresiones** escribe:

tangent(x^2 – 6x + 11, x, 4)

b) Elige **Introducir y simplificar**

$$2x - 5$$

c) En la **Entrada de Expresiones** escribe:

perpendicular(x^2 – 6x + 11, x, 4)

d) Elige **Introducir y simplificar**

$$\frac{10 - x}{2}$$

e) Dibuja la función y las rectas:

137. Calcula los máximos y mínimos relativos y la monotonía de: $y = x^3 - 3x$

Solución:

a) Halla la 1ª derivada $3x^2 - 3$

b) Elige **Resolver o despejar,** activa el botón de opción **Real** y haz *clic* en el botón **Resolver**

$$x = -1 \vee x = 1$$

c) Selecciona la función inicial, elige **Sustituir variables;** en el cuadro de texto **Nuevo Valor** introduce 1 y haz *clic* en el botón **Simplificar**

$$-2$$

Se obtiene el punto A(1, –2)

d) Haz lo mismo con el valor x = –1. Se obtiene el punto B(–1, 2)

Máximo relativo: B(–1, 2)

Mínimo relativo: A(1, –2)

Creciente: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente: (–1, 1)

138. Determina los puntos de inflexión y la curvatura de la función: $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$

Solución:

a) Halla la 1ª derivada: $3x^2 - 6x - 1$

b) Vuelve a derivar para hallar la 2ª derivada:

$$6x - 6$$

c) Resuelve la ecuación: x = 1

Sustituye este valor en la función inicial: 2

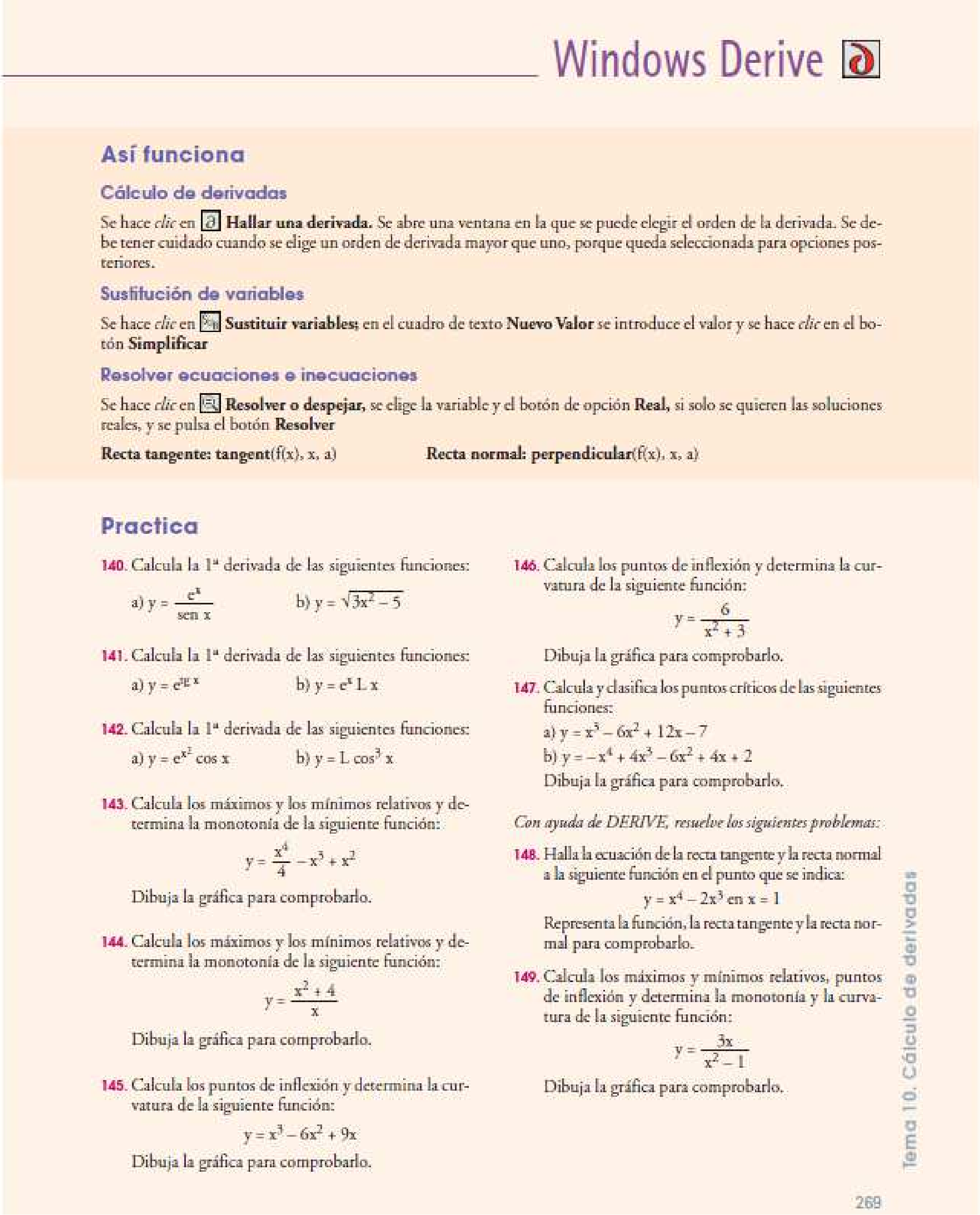
d) Se obtiene el punto A(1, 2)

Punto de inflexión: A(1, 2)

Convexa (∪): $(1, +\infty)$ Cóncava (∩): $(-\infty, 1)$

139. Internet. Abre la web: **www.editorial-bruno.es,** elige Matemáticas, curso y tema.

Unidad didáctica 10. Cálculo de las derivadas



Windows Derive

Así funciona

Cálculo de derivadas

Se hace *clic* en **Hallar una derivada.** Se abre una ventana en la que se puede elegir el orden de la derivada. Se debe tener cuidado cuando se elige un orden de derivada mayor que uno, porque queda seleccionada para opciones posteriores.

Sustitución de variables

Se hace *clic* en **Sustituir variables;** en el cuadro de texto **Nuevo Valor** se introduce el valor y se hace *clic* en el botón **Simplificar**

Resolver ecuaciones e inecuaciones

Se hace *clic* en **Resolver o despejar,** se elige la variable y el botón de opción **Real,** si solo se quieren las soluciones reales, y se pulsa el botón **Resolver**

Recta tangente: tangent(f(x), x, a) **Recta normal: perpendicular**(f(x), x, a)

Practica

140. Calcula la 1ª derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{e^x}{\text{sen } x}$ b) $y = \sqrt{3x^2 - 5}$

141. Calcula la 1ª derivada de las siguientes funciones:

a) $y = e^{\text{tg } x}$ b) $y = e^x \text{ L } x$

142. Calcula la 1ª derivada de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^2} \cos x$ b) $y = \text{L} \cos^3 x$

143. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

144. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = \frac{x^2 + 4}{x}$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

145. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

146. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

147. Calcula y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

b) $y = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 2$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Con ayuda de DERIVE, resuelve los siguientes problemas:

148. Halla la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la siguiente función en el punto que se indica:

$$y = x^4 - 2x^3 \text{ en } x = 1$$

Representa la función, la recta tangente y la recta normal para comprobarlo.

149. Calcula los máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión y determina la monotonía y la curvatura de la siguiente función:

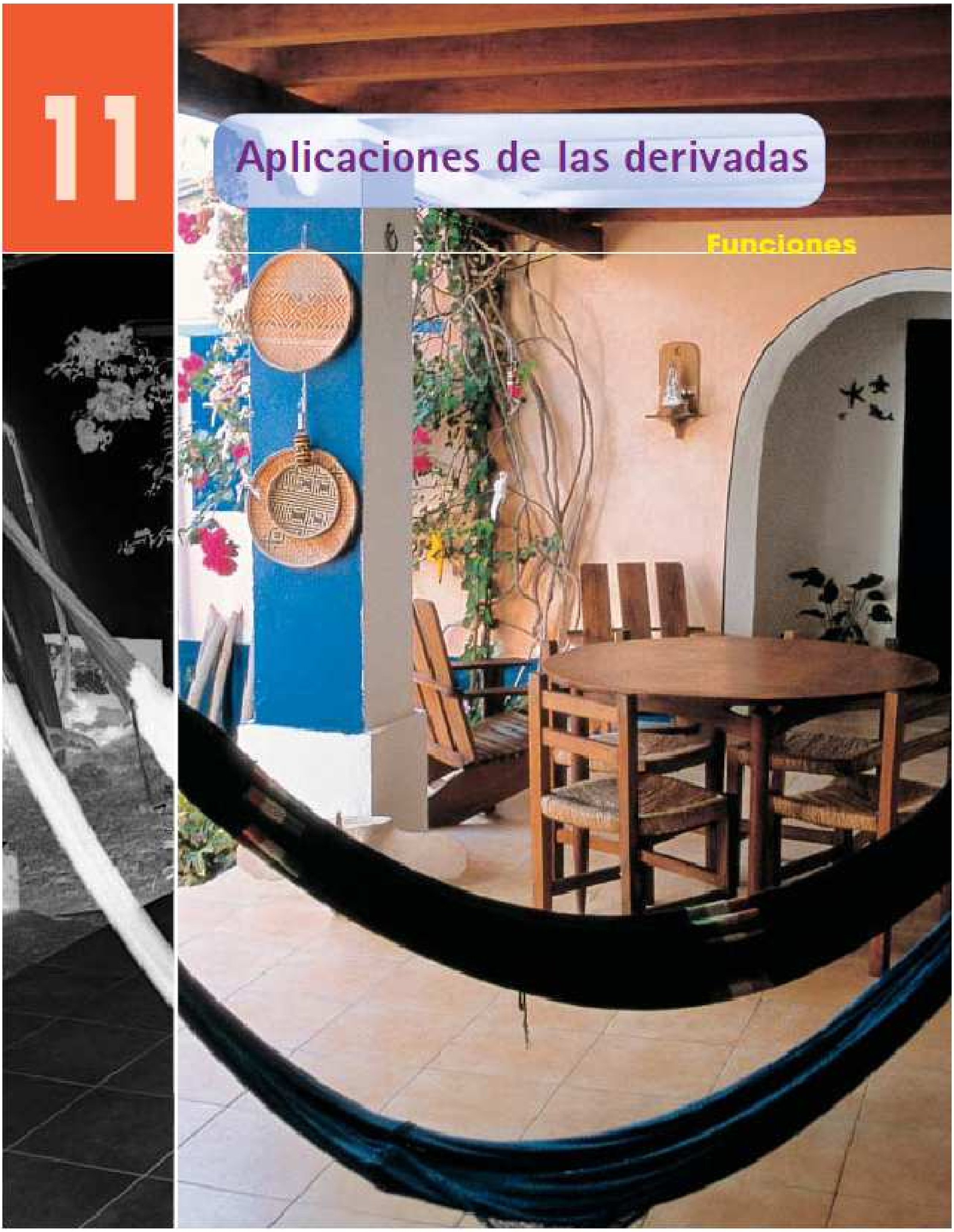
$$y = \frac{3x}{x^2 - 1}$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Tema 10. Cálculo de derivadas

269

Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas



Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas

Introducción

La primera aplicación de las derivadas que se estudia es la representación de funciones. Con las derivadas se calculan los máximos y mínimos relativos, la monotonía, los puntos de inflexión y la curvatura.

La segunda aplicación es la resolución de problemas en los que hay que hallar la fórmula de una función de la que se conocen, por ejemplo, puntos por los que pasa, puntos en los que tiene máximos o mínimos relativos o puntos de inflexión.

Las derivadas se aplican también a la resolución de problemas de otras áreas, como son la Física, la Ingeniería (en general la Tecnología), la Economía, la Medicina, etc.

Una aplicación especial del cálculo de derivadas es la resolución de problemas de optimización. Por ejemplo, hallar la cantidad de valla mínima que se necesita para cercar una superficie determinada, o hallar la distancia máxima que puede haber entre dos puntos sobre los que se sujeta una hamaca para que ésta esté a una altura mínima determinada.

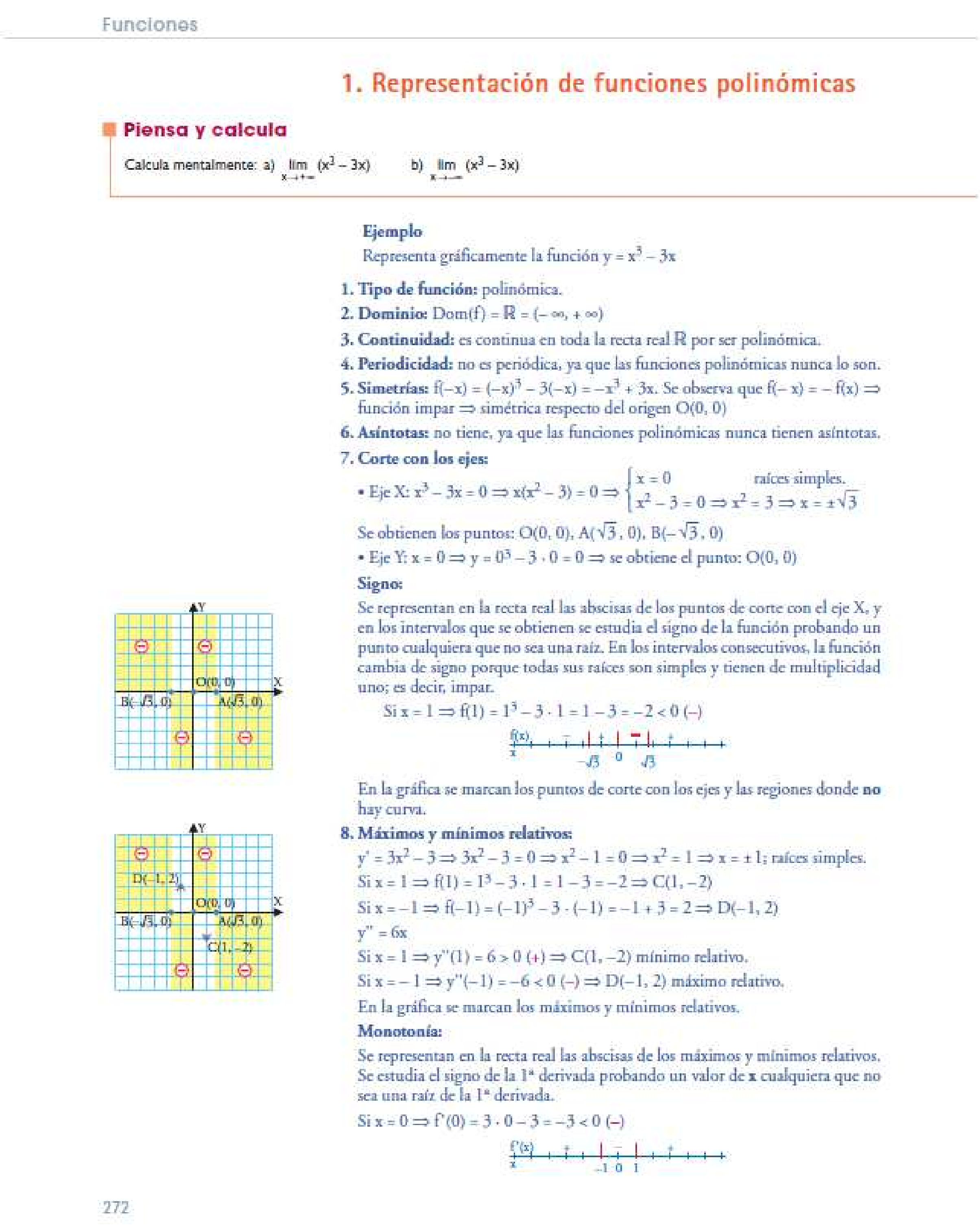
Organiza tus ideas

Derivadas

se utilizan para

- representar funciones
  - pueden ser
    - polinómicas
    - racionales
- hallar funciones con condiciones
  - y
    - a partir de la gráfica de las derivadas, conocer características de la función
- resolver problemas
  - de otras áreas
    - Física
    - Ingeniería
    - Economía
    - Medicina
    - etc.
  - y de
    - optimización

271



1. Representación de funciones polinómicas

Piensa y calcula

Calcula mentalmente: a) $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x)$ b) $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x)$

Ejemplo

Representa gráficamente la función $y = x^3 - 3x$

1. **Tipo de función:** polinómica.
2. **Dominio:** $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. **Continuidad:** es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$ por ser polinómica.
4. **Periodicidad:** no es periódica, ya que las funciones polinómicas nunca lo son.
5. **Simetrías:** $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x$. Se observa que $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ función impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. **Asíntotas:** no tiene, ya que las funciones polinómicas nunca tienen asíntotas.
7. **Corte con los ejes:**

- Eje X: $x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{raíces simples.} \\ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} & \end{cases}$

Se obtienen los puntos: O(0, 0), A($\sqrt{3}$, 0), B($-\sqrt{3}$, 0)

- Eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ se obtiene el punto: O(0, 0)

Signo:

Se representan en la recta real las abscisas de los puntos de corte con el eje X, y en los intervalos que se obtienen se estudia el signo de la función probando un punto cualquiera que no sea una raíz. En los intervalos consecutivos, la función cambia de signo porque todas sus raíces son simples y tienen de multiplicidad uno; es decir, impar.

Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2 < 0$ (–)

En la gráfica se marcan los puntos de corte con los ejes y las regiones donde **no** hay curva.

8. **Máximos y mínimos relativos:**

$y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$; raíces simples.

Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2 \Rightarrow C(1, -2)$

Si $x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow D(-1, 2)$

$y'' = 6x$

Si $x = 1 \Rightarrow y''(1) = 6 > 0$ (+) $\Rightarrow C(1, -2)$ mínimo relativo.

Si $x = -1 \Rightarrow y''(-1) = -6 < 0$ (–) $\Rightarrow D(-1, 2)$ máximo relativo.

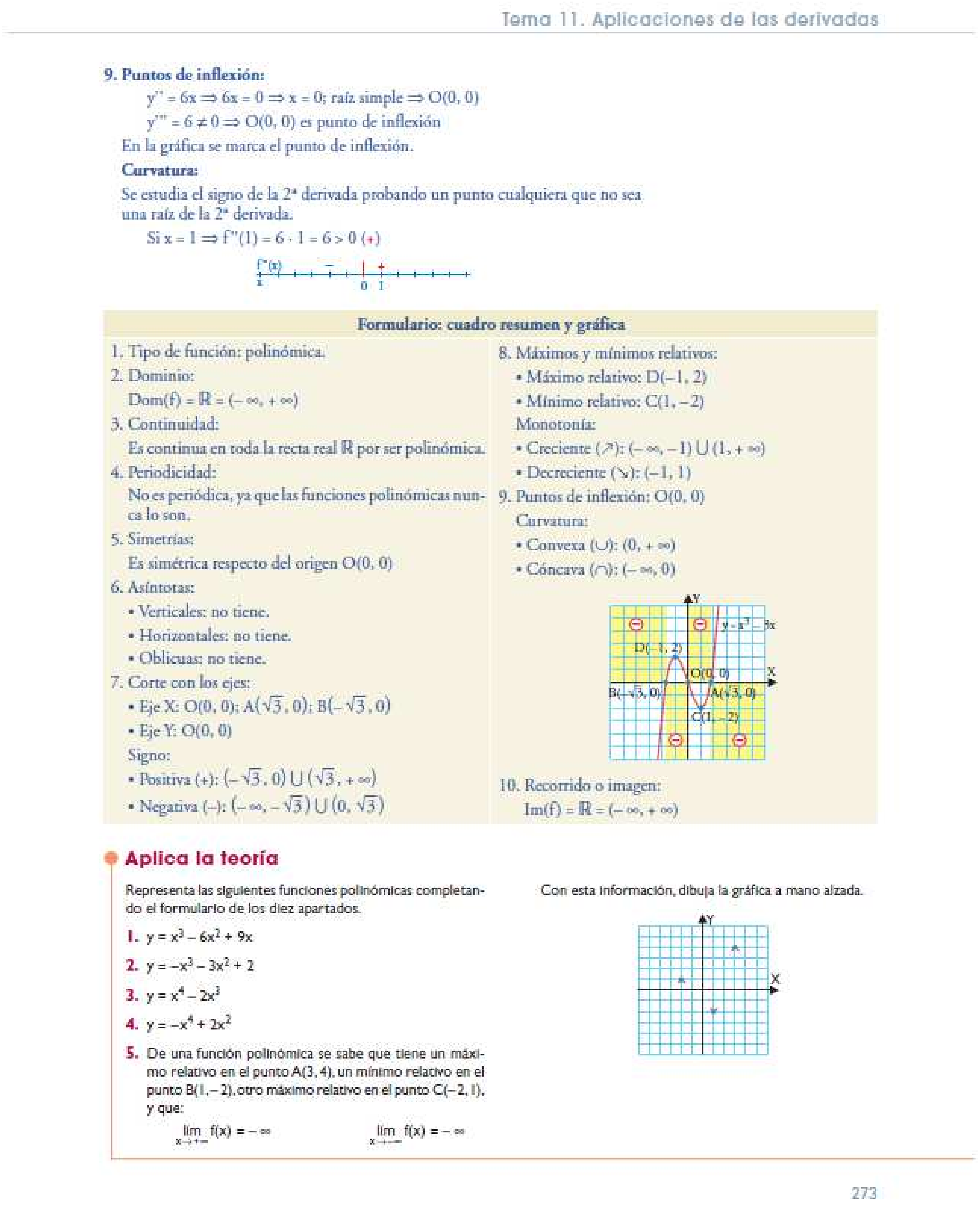
En la gráfica se marcan los máximos y mínimos relativos.

Monotonía:

Se representan en la recta real las abscisas de los máximos y mínimos relativos. Se estudia el signo de la 1ª derivada probando un valor de **x** cualquiera que no sea una raíz de la 1ª derivada.

Si $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$ (–)

Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas



9. Puntos de inflexión:

$y'' = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$; raíz simple $\Rightarrow O(0, 0)$

$y''' = 6 \neq 0 \Rightarrow O(0, 0)$ es punto de inflexión

En la gráfica se marca el punto de inflexión.

Curvatura:

Se estudia el signo de la 2ª derivada probando un punto cualquiera que no sea una raíz de la 2ª derivada.

Si $x = 1 \Rightarrow f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$ (+)

Formulario: cuadro resumen y gráfica

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio:
   $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad:
   Es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$ por ser polinómica.
4. Periodicidad:
   No es periódica, ya que las funciones polinómicas nunca lo son.
5. Simetrías:
   Es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$; $A(\sqrt{3}, 0)$; $B(-\sqrt{3}, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $D(-1, 2)$
   - Mínimo relativo: $C(1, -2)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-1, 1)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$
   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$

10. Recorrido o imagen:
    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Aplica la teoría

Representa las siguientes funciones polinómicas completando el formulario de los diez apartados.

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

2. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$

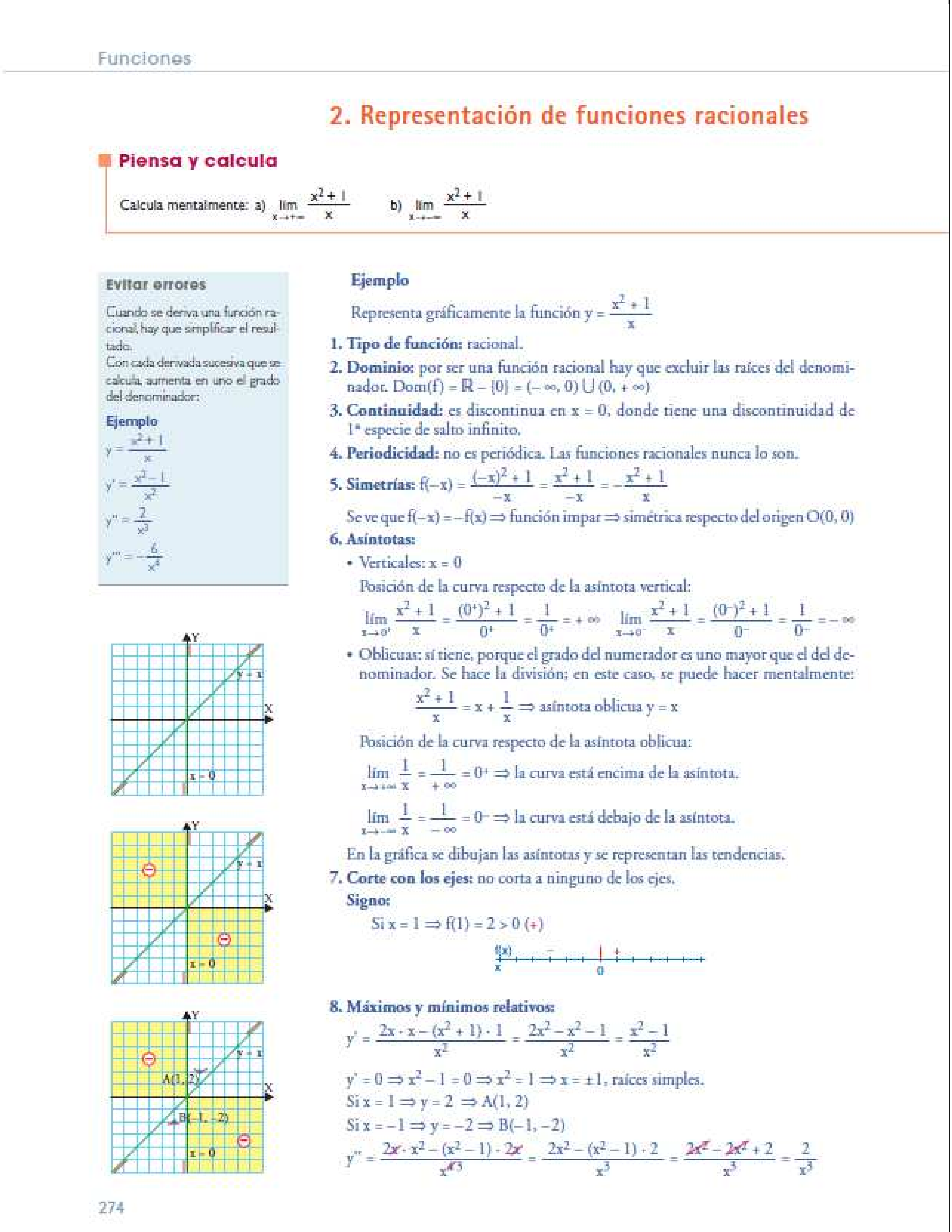
3. $y = x^4 - 2x^3$

4. $y = -x^4 + 2x^2$

5. De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto A(3, 4), un mínimo relativo en el punto B(1, – 2), otro máximo relativo en el punto C(– 2, 1), y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.



2. Representación de funciones racionales

Piensa y calcula

Calcula mentalmente: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x}$

Evitar errores

Cuando se deriva una función racional, hay que simplificar el resultado.

Con cada derivada sucesiva que se calcula, aumenta en uno el grado del denominador:

Ejemplo

$y = \frac{x^2+1}{x}$

$y' = \frac{x^2-1}{x^2}$

$y'' = \frac{2}{x^3}$

$y''' = -\frac{6}{x^4}$

Ejemplo

Representa gráficamente la función $y = \frac{x^2+1}{x}$

1. **Tipo de función:** racional.
2. **Dominio:** por ser una función racional hay que excluir las raíces del denominador. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. **Continuidad:** es discontinua en x = 0, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. **Periodicidad:** no es periódica. Las funciones racionales nunca lo son.
5. **Simetrías:** $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = \frac{x^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x}$

   Se ve que $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ función impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. **Asíntotas:**
   - Verticales: x = 0

     Posición de la curva respecto de la asíntota vertical:

     $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \frac{(0^+)^2+1}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \frac{(0^-)^2+1}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
   - Oblicuas: sí tiene, porque el grado del numerador es uno mayor que el del denominador. Se hace la división; en este caso, se puede hacer mentalmente:

     $$\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \text{asíntota oblicua } y = x$$

     Posición de la curva respecto de la asíntota oblicua:

     $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \Rightarrow$ la curva está encima de la asíntota.

     $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0^- \Rightarrow$ la curva está debajo de la asíntota.

   En la gráfica se dibujan las asíntotas y se representan las tendencias.
7. **Corte con los ejes:** no corta a ninguno de los ejes.

   Signo:

   Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 > 0$ (+)
8. **Máximos y mínimos relativos:**

   $y' = \frac{2x \cdot x - (x^2+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

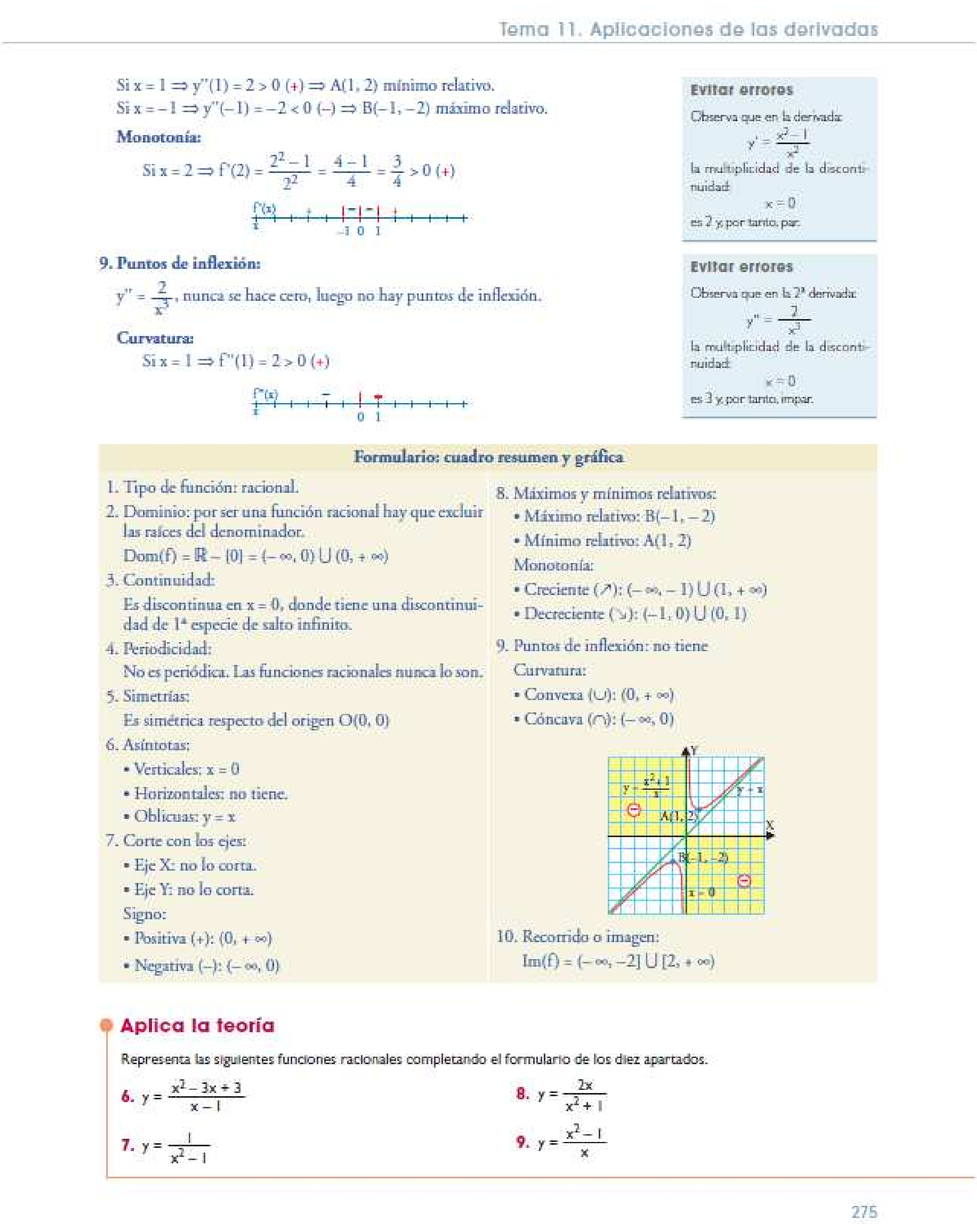
   $y' = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$, raíces simples.

   Si $x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(1, 2)$

   Si $x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow B(-1, -2)$

   $y'' = \frac{\cancel{2x} \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot \cancel{2x}}{x^{\cancel{4}3}} = \frac{2x^2 - (x^2-1) \cdot 2}{x^3} = \frac{\cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} + 2}{x^3} = \frac{2}{x^3}$

Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas



Si x = 1 ⇒ $y''(1) = 2 > 0$ (+) ⇒ A(1, 2) mínimo relativo.
Si x = –1 ⇒ $y''(-1) = -2 < 0$ (–) ⇒ B(–1, –2) máximo relativo.

Monotonía:

$$\text{Si } x = 2 \Rightarrow f'(2) = \frac{2^2 - 1}{2^2} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} > 0\ (+)$$

9. Puntos de inflexión:

$y'' = \frac{2}{x^3}$, nunca se hace cero, luego no hay puntos de inflexión.

Curvatura:

Si x = 1 ⇒ $f''(1) = 2 > 0$ (+)

Evitar errores

Observa que en la derivada:

$$y' = \frac{x^2-1}{x^2}$$

la multiplicidad de la discontinuidad:

$$x = 0$$

es 2 y, por tanto, par.

Evitar errores

Observa que en la 2ª derivada:

$$y'' = \frac{2}{x^3}$$

la multiplicidad de la discontinuidad:

$$x = 0$$

es 3 y, por tanto, impar.

Formulario: cuadro resumen y gráfica

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: por ser una función racional hay que excluir las raíces del denominador.
   Dom(f) = ℝ – {0} = (– ∞, 0) ∪ (0, + ∞)
3. Continuidad:
   Es discontinua en x = 0, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad:
   No es periódica. Las funciones racionales nunca lo son.
5. Simetrías:
   Es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: x = 0
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: y = x
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): (0, + ∞)
   - Negativa (–): (– ∞, 0)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: B(–1, – 2)
   - Mínimo relativo: A(1, 2)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): (– ∞, – 1) ∪ (1, + ∞)
   - Decreciente (↘): (–1, 0) ∪ (0, 1)
9. Puntos de inflexión: no tiene

   Curvatura:
   - Convexa (∪): (0, + ∞)
   - Cóncava (∩): (– ∞, 0)

10. Recorrido o imagen:
    Im(f) = (– ∞, –2] ∪ [2, + ∞)

Aplica la teoría

Representa las siguientes funciones racionales completando el formulario de los diez apartados.

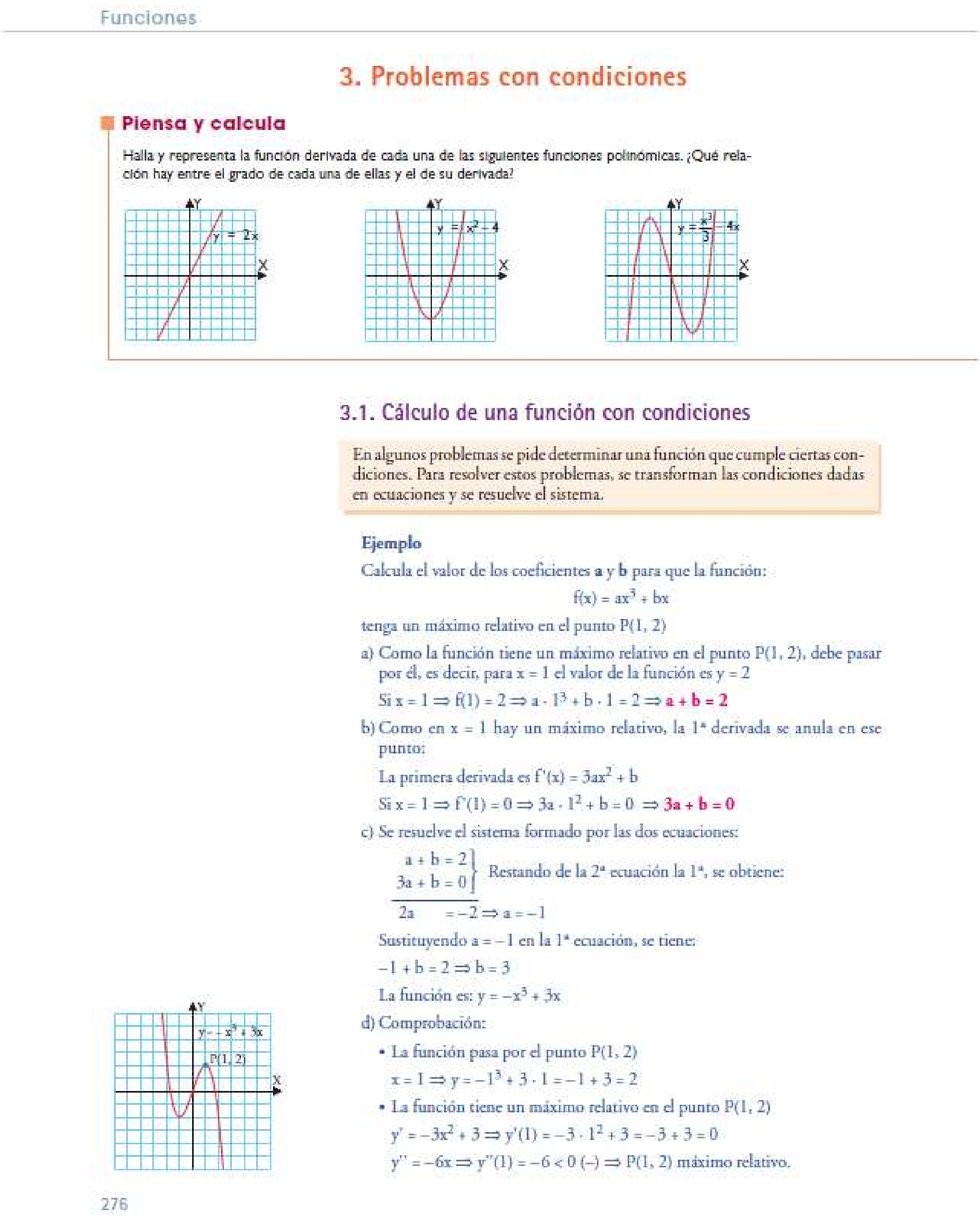
6. $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

7. $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

8. $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

9. $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas



Funciones

3. Problemas con condiciones

Piensa y calcula

Halla y representa la función derivada de cada una de las siguientes funciones polinómicas. ¿Qué relación hay entre el grado de cada una de ellas y el de su derivada?

3.1. Cálculo de una función con condiciones

En algunos problemas se pide determinar una función que cumple ciertas condiciones. Para resolver estos problemas, se transforman las condiciones dadas en ecuaciones y se resuelve el sistema.

Ejemplo

Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función:

$$f(x) = ax^3 + bx$$

tenga un máximo relativo en el punto P(1, 2)

a) Como la función tiene un máximo relativo en el punto P(1, 2), debe pasar por él, es decir, para $x = 1$ el valor de la función es $y = 2$

$\text{Si } x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = 2 \Rightarrow \mathbf{a + b = 2}$

b) Como en $x = 1$ hay un máximo relativo, la 1ª derivada se anula en ese punto:

La primera derivada es $f'(x) = 3ax^2 + b$

$\text{Si } x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + b = 0 \Rightarrow \mathbf{3a + b = 0}$

c) Se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \text{ Restando de la 2ª ecuación la 1ª, se obtiene:}$$
$$\overline{2a \qquad = -2} \Rightarrow a = -1$$

Sustituyendo $a = -1$ en la 1ª ecuación, se tiene:

$-1 + b = 2 \Rightarrow b = 3$

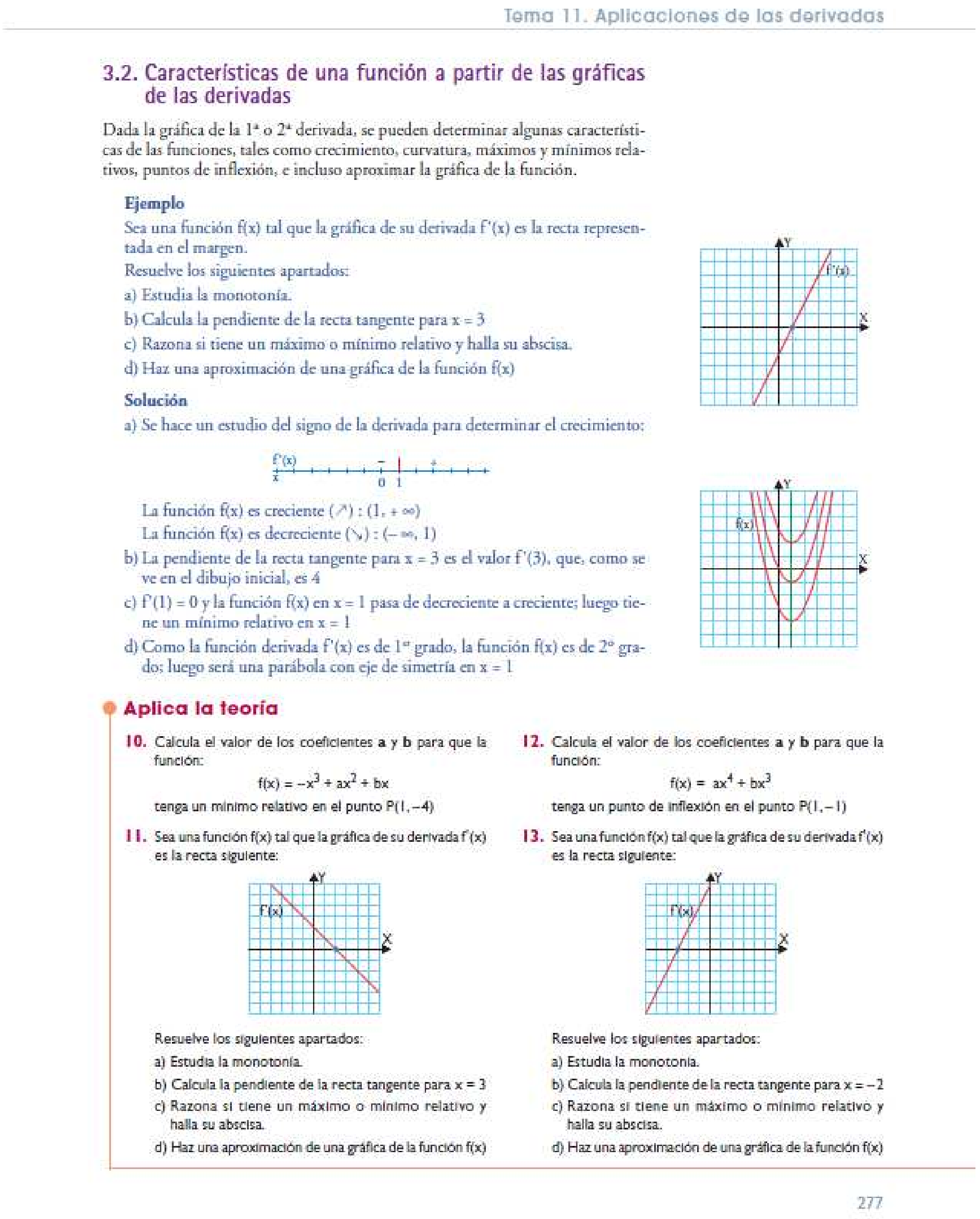
La función es: $y = -x^3 + 3x$

d) Comprobación:

- La función pasa por el punto P(1, 2)
  $x = 1 \Rightarrow y = -1^3 + 3 \cdot 1 = -1 + 3 = 2$
- La función tiene un máximo relativo en el punto P(1, 2)
  $y' = -3x^2 + 3 \Rightarrow y'(1) = -3 \cdot 1^2 + 3 = -3 + 3 = 0$
  $y'' = -6x \Rightarrow y''(1) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow$ P(1, 2) máximo relativo.

276

Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas



3.2. Características de una función a partir de las gráficas de las derivadas

Dada la gráfica de la 1ª o 2ª derivada, se pueden determinar algunas características de las funciones, tales como crecimiento, curvatura, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión, e incluso aproximar la gráfica de la función.

Ejemplo

Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la recta representada en el margen.

Resuelve los siguientes apartados:

a) Estudia la monotonía.

b) Calcula la pendiente de la recta tangente para $x = 3$

c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.

d) Haz una aproximación de una gráfica de la función f(x)

Solución

a) Se hace un estudio del signo de la derivada para determinar el crecimiento:

La función f(x) es creciente (↗) : (1, + ∞)

La función f(x) es decreciente (↘) : (− ∞, 1)

b) La pendiente de la recta tangente para $x = 3$ es el valor f'(3), que, como se ve en el dibujo inicial, es 4

c) $f'(1) = 0$ y la función f(x) en $x = 1$ pasa de decreciente a creciente; luego tiene un mínimo relativo en $x = 1$

d) Como la función derivada f'(x) es de 1er grado, la función f(x) es de 2º grado; luego será una parábola con eje de simetría en $x = 1$

Aplica la teoría

10. Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función:

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$$

tenga un mínimo relativo en el punto P(1, −4)

11. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la recta siguiente:

Resuelve los siguientes apartados:

a) Estudia la monotonía.

b) Calcula la pendiente de la recta tangente para $x = 3$

c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.

d) Haz una aproximación de una gráfica de la función f(x)

12. Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función:

$$f(x) = ax^4 + bx^3$$

tenga un punto de inflexión en el punto P(1, −1)

13. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la recta siguiente:

Resuelve los siguientes apartados:

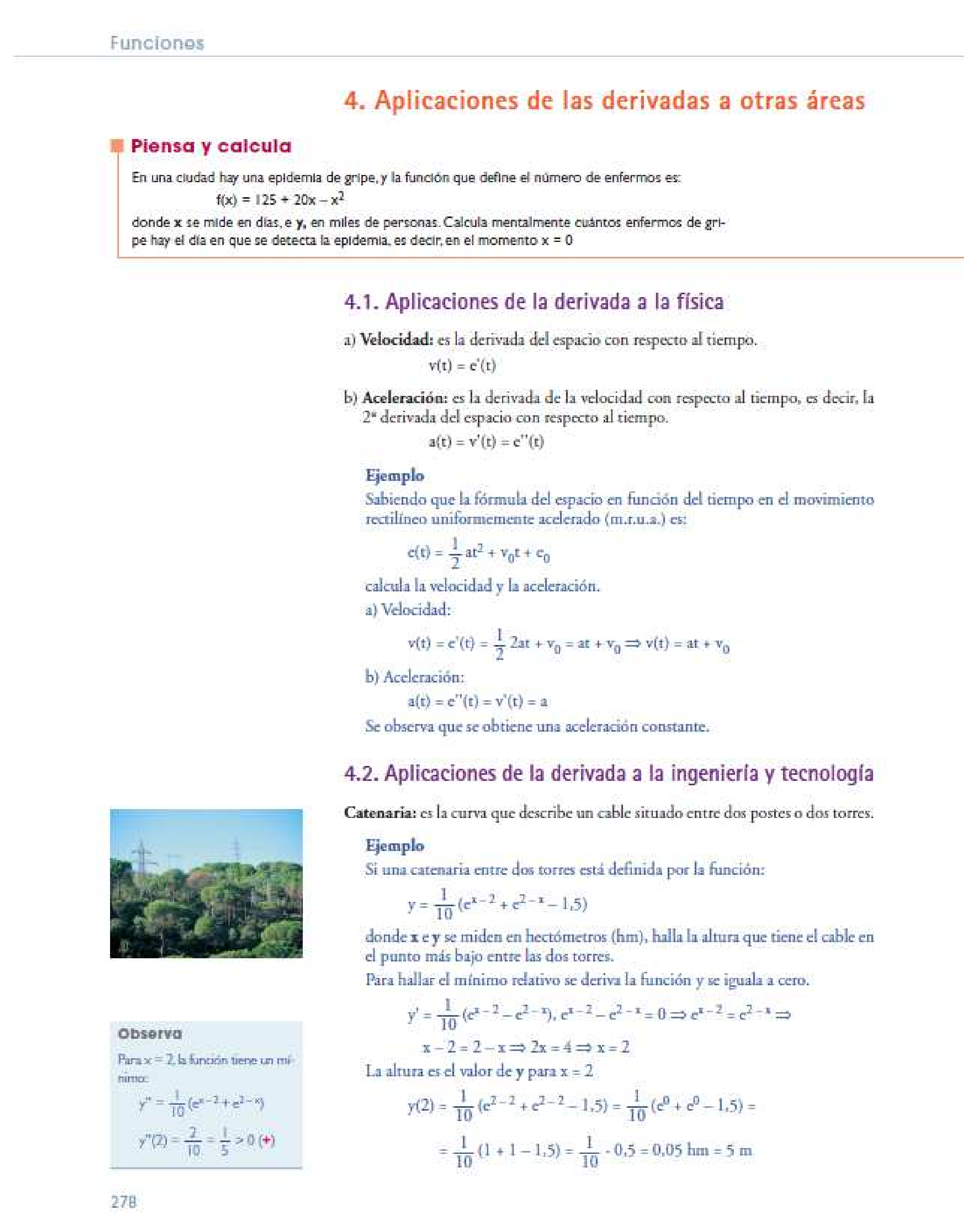
a) Estudia la monotonía.

b) Calcula la pendiente de la recta tangente para $x = -2$

c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.

d) Haz una aproximación de una gráfica de la función f(x)

Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas



Funciones

4. Aplicaciones de las derivadas a otras áreas

Piensa y calcula

En una ciudad hay una epidemia de gripe, y la función que define el número de enfermos es:

$$f(x) = 125 + 20x - x^2$$

donde **x** se mide en días, e **y**, en miles de personas. Calcula mentalmente cuántos enfermos de gripe hay el día en que se detecta la epidemia, es decir, en el momento x = 0

4.1. Aplicaciones de la derivada a la física

a) **Velocidad:** es la derivada del espacio con respecto al tiempo.

$$v(t) = e'(t)$$

b) **Aceleración:** es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, es decir, la 2ª derivada del espacio con respecto al tiempo.

$$a(t) = v'(t) = e''(t)$$

Ejemplo

Sabiendo que la fórmula del espacio en función del tiempo en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.) es:

$$e(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + e_0$$

calcula la velocidad y la aceleración.

a) Velocidad:

$$v(t) = e'(t) = \frac{1}{2}2at + v_0 = at + v_0 \Rightarrow v(t) = at + v_0$$

b) Aceleración:

$$a(t) = e''(t) = v'(t) = a$$

Se observa que se obtiene una aceleración constante.

4.2. Aplicaciones de la derivada a la ingeniería y tecnología

Catenaria: es la curva que describe un cable situado entre dos postes o dos torres.

Ejemplo

Si una catenaria entre dos torres está definida por la función:

$$y = \frac{1}{10}(e^{x-2} + e^{2-x} - 1,5)$$

donde **x** e **y** se miden en hectómetros (hm), halla la altura que tiene el cable en el punto más bajo entre las dos torres.

Para hallar el mínimo relativo se deriva la función y se iguala a cero.

$$y' = \frac{1}{10}(e^{x-2} - e^{2-x}),\ e^{x-2} - e^{2-x} = 0 \Rightarrow e^{x-2} = e^{2-x} \Rightarrow$$

$$x - 2 = 2 - x \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

La altura es el valor de **y** para x = 2

$$y(2) = \frac{1}{10}(e^{2-2} + e^{2-2} - 1,5) = \frac{1}{10}(e^0 + e^0 - 1,5) =$$

$$= \frac{1}{10}(1 + 1 - 1,5) = \frac{1}{10} \cdot 0,5 = 0,05 \text{ hm} = 5 \text{ m}$$

Observa

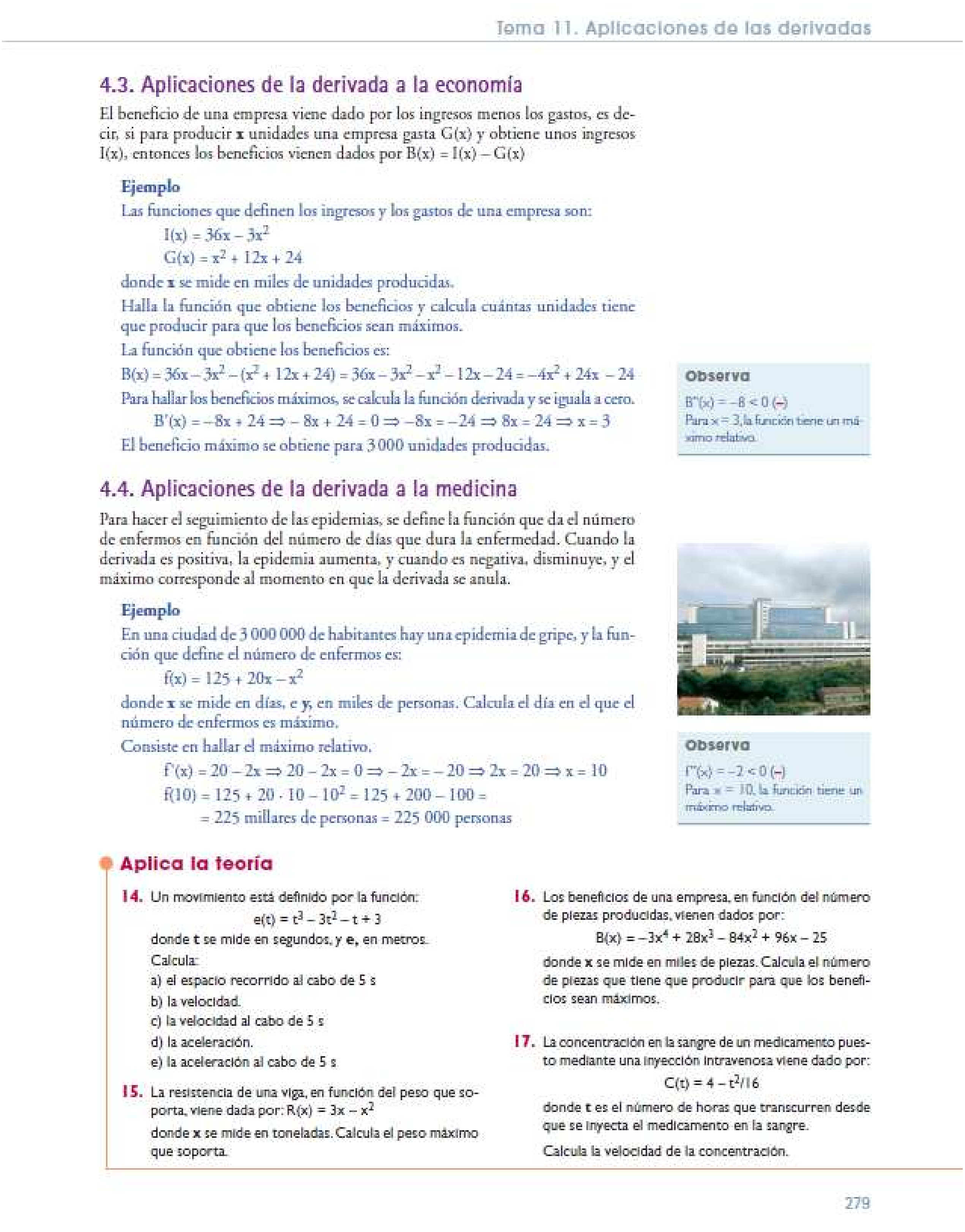
Para x = 2, la función tiene un mínimo:

$$y'' = \frac{1}{10}(e^{x-2} + e^{2-x})$$

$$y''(2) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} > 0\ (+)$$

278

Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas



Tema 11. Aplicaciones de las derivadas

4.3. Aplicaciones de la derivada a la economía

El beneficio de una empresa viene dado por los ingresos menos los gastos, es decir, si para producir **x** unidades una empresa gasta G(x) y obtiene unos ingresos I(x), entonces los beneficios vienen dados por $B(x) = I(x) - G(x)$

Ejemplo

Las funciones que definen los ingresos y los gastos de una empresa son:

$I(x) = 36x - 3x^2$

$G(x) = x^2 + 12x + 24$

donde **x** se mide en miles de unidades producidas.

Halla la función que obtiene los beneficios y calcula cuántas unidades tiene que producir para que los beneficios sean máximos.

La función que obtiene los beneficios es:

$B(x) = 36x - 3x^2 - (x^2 + 12x + 24) = 36x - 3x^2 - x^2 - 12x - 24 = -4x^2 + 24x - 24$

Para hallar los beneficios máximos, se calcula la función derivada y se iguala a cero.

$B'(x) = -8x + 24 \Rightarrow -8x + 24 = 0 \Rightarrow -8x = -24 \Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = 3$

El beneficio máximo se obtiene para 3 000 unidades producidas.

Observa

$B''(x) = -8 < 0$ (–)

Para $x = 3$, la función tiene un máximo relativo.

4.4. Aplicaciones de la derivada a la medicina

Para hacer el seguimiento de las epidemias, se define la función que da el número de enfermos en función del número de días que dura la enfermedad. Cuando la derivada es positiva, la epidemia aumenta, y cuando es negativa, disminuye, y el máximo corresponde al momento en que la derivada se anula.

Ejemplo

En una ciudad de 3 000 000 de habitantes hay una epidemia de gripe, y la función que define el número de enfermos es:

$f(x) = 125 + 20x - x^2$

donde **x** se mide en días, e **y**, en miles de personas. Calcula el día en el que el número de enfermos es máximo.

Consiste en hallar el máximo relativo.

$f'(x) = 20 - 2x \Rightarrow 20 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -20 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$

$f(10) = 125 + 20 \cdot 10 - 10^2 = 125 + 200 - 100 =$

$= 225$ millares de personas $= 225\ 000$ personas

Observa

$f''(x) = -2 < 0$ (–)

Para $x = 10$, la función tiene un máximo relativo.

Aplica la teoría

14. Un movimiento está definido por la función:

$e(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3$

donde **t** se mide en segundos, y **e**, en metros.

Calcula:

a) el espacio recorrido al cabo de 5 s

b) la velocidad.

c) la velocidad al cabo de 5 s

d) la aceleración.

e) la aceleración al cabo de 5 s

15. La resistencia de una viga, en función del peso que soporta, viene dada por: $R(x) = 3x - x^2$

donde **x** se mide en toneladas. Calcula el peso máximo que soporta.

16. Los beneficios de una empresa, en función del número de piezas producidas, vienen dados por:

$B(x) = -3x^4 + 28x^3 - 84x^2 + 96x - 25$

donde **x** se mide en miles de piezas. Calcula el número de piezas que tiene que producir para que los beneficios sean máximos.

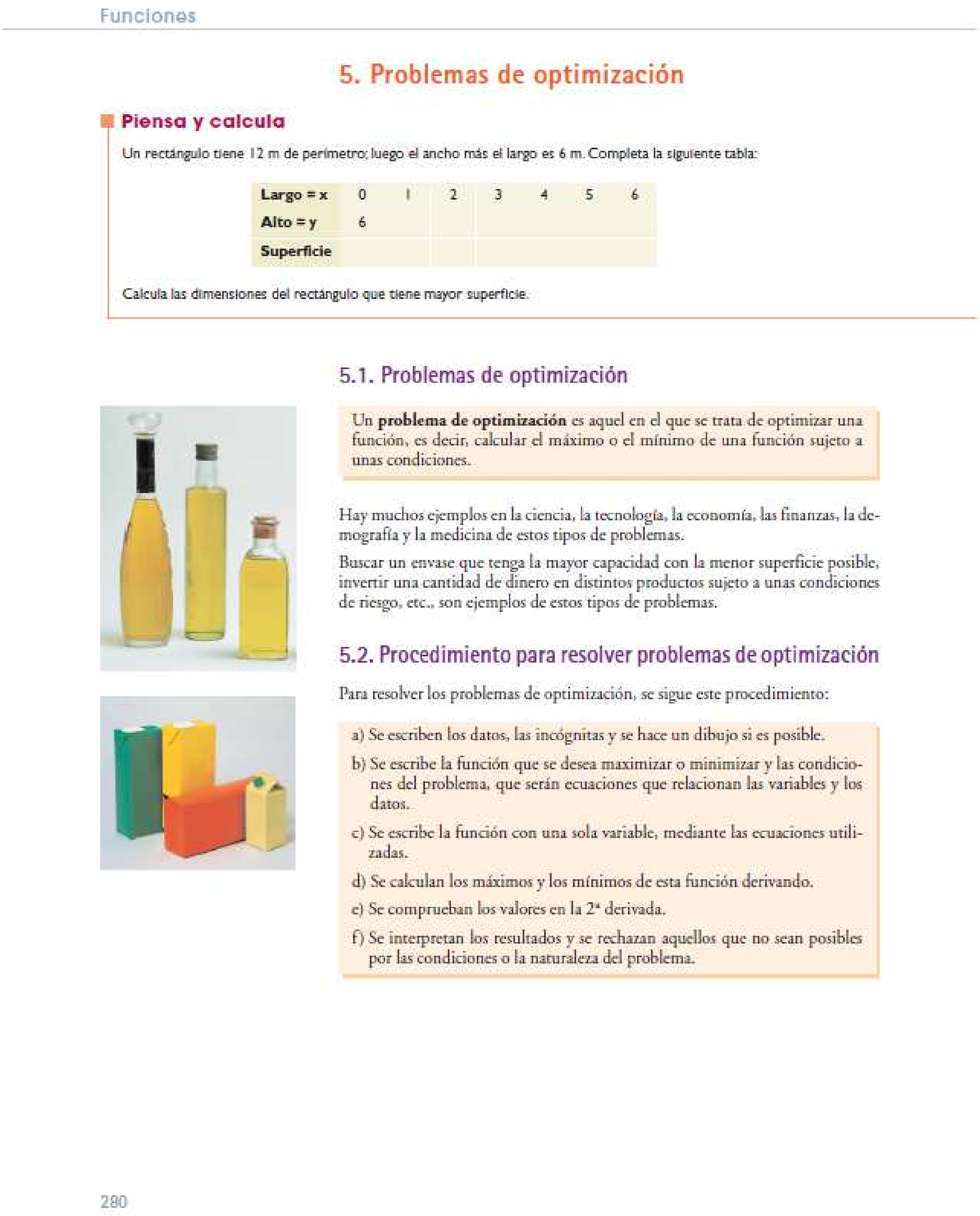
17. La concentración en la sangre de un medicamento puesto mediante una inyección intravenosa viene dado por:

$C(t) = 4 - t^2/16$

donde **t** es el número de horas que transcurren desde que se inyecta el medicamento en la sangre.

Calcula la velocidad de la concentración.

279



5. Problemas de optimización

Piensa y calcula

Un rectángulo tiene 12 m de perímetro; luego el ancho más el largo es 6 m. Completa la siguiente tabla:

Largo = x	0	1	2	3	4	5	6
Alto = y	6						
Superficie							

Calcula las dimensiones del rectángulo que tiene mayor superficie.

5.1. Problemas de optimización

Un **problema de optimización** es aquel en el que se trata de optimizar una función, es decir, calcular el máximo o el mínimo de una función sujeto a unas condiciones.

Hay muchos ejemplos en la ciencia, la tecnología, la economía, las finanzas, la demografía y la medicina de estos tipos de problemas.

Buscar un envase que tenga la mayor capacidad con la menor superficie posible, invertir una cantidad de dinero en distintos productos sujeto a unas condiciones de riesgo, etc., son ejemplos de estos tipos de problemas.

5.2. Procedimiento para resolver problemas de optimización

Para resolver los problemas de optimización, se sigue este procedimiento:

a) Se escriben los datos, las incógnitas y se hace un dibujo si es posible.

b) Se escribe la función que se desea maximizar o minimizar y las condiciones del problema, que serán ecuaciones que relacionan las variables y los datos.

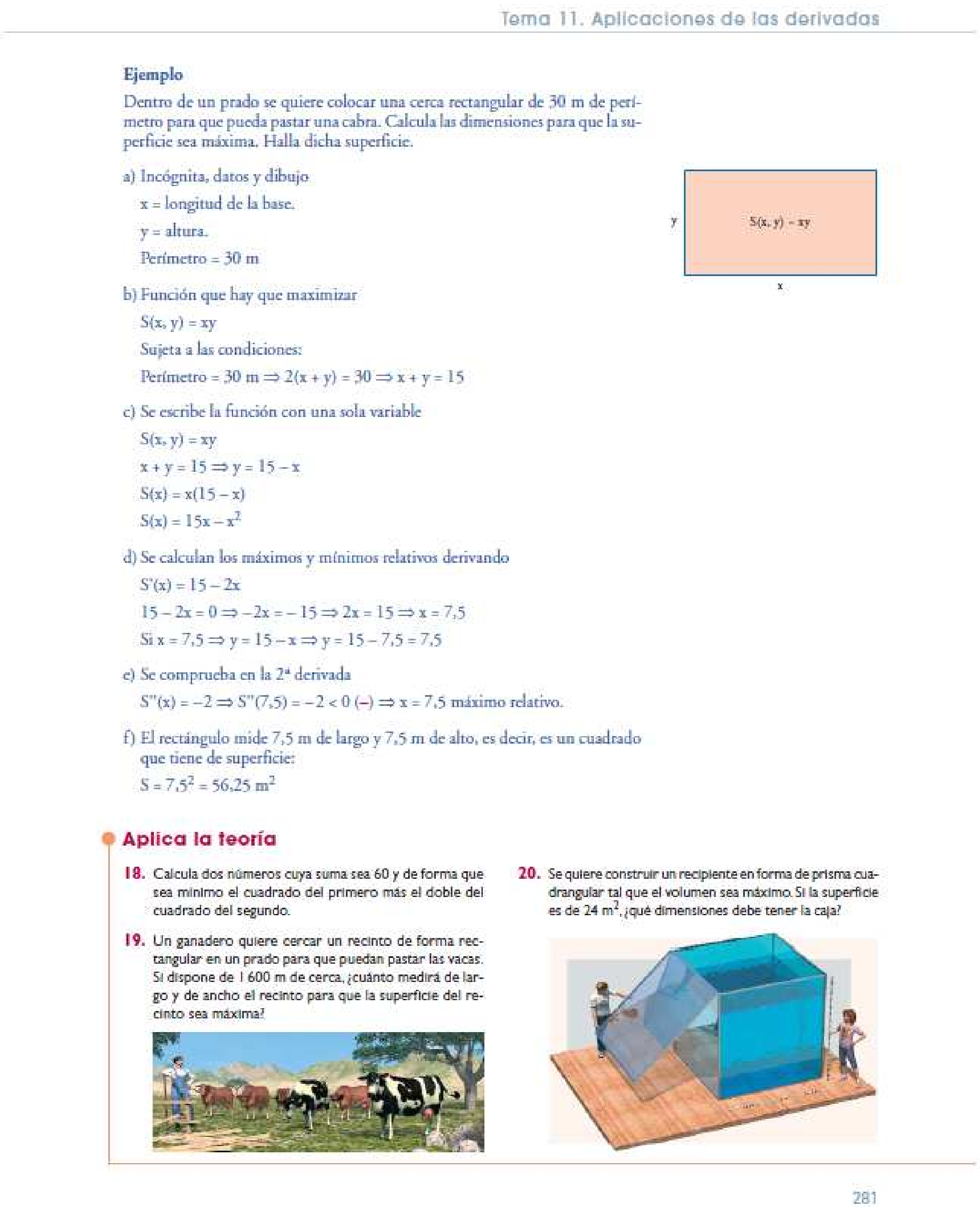
c) Se escribe la función con una sola variable, mediante las ecuaciones utilizadas.

d) Se calculan los máximos y los mínimos de esta función derivando.

e) Se comprueban los valores en la 2ª derivada.

f) Se interpretan los resultados y se rechazan aquellos que no sean posibles por las condiciones o la naturaleza del problema.

Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas



Ejemplo

Dentro de un prado se quiere colocar una cerca rectangular de 30 m de perímetro para que pueda pastar una cabra. Calcula las dimensiones para que la superficie sea máxima. Halla dicha superficie.

a) Incógnita, datos y dibujo

x = longitud de la base.

y = altura.

Perímetro = 30 m

b) Función que hay que maximizar

$S(x, y) = xy$

Sujeta a las condiciones:

Perímetro = 30 m $\Rightarrow 2(x + y) = 30 \Rightarrow x + y = 15$

c) Se escribe la función con una sola variable

$S(x, y) = xy$

$x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$

$S(x) = x(15 - x)$

$S(x) = 15x - x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando

$S'(x) = 15 - 2x$

$15 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -15 \Rightarrow 2x = 15 \Rightarrow x = 7{,}5$

Si $x = 7{,}5 \Rightarrow y = 15 - x \Rightarrow y = 15 - 7{,}5 = 7{,}5$

e) Se comprueba en la 2ª derivada

$S''(x) = -2 \Rightarrow S''(7{,}5) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow x = 7{,}5$ máximo relativo.

f) El rectángulo mide 7,5 m de largo y 7,5 m de alto, es decir, es un cuadrado que tiene de superficie:

$S = 7{,}5^2 = 56{,}25\ m^2$

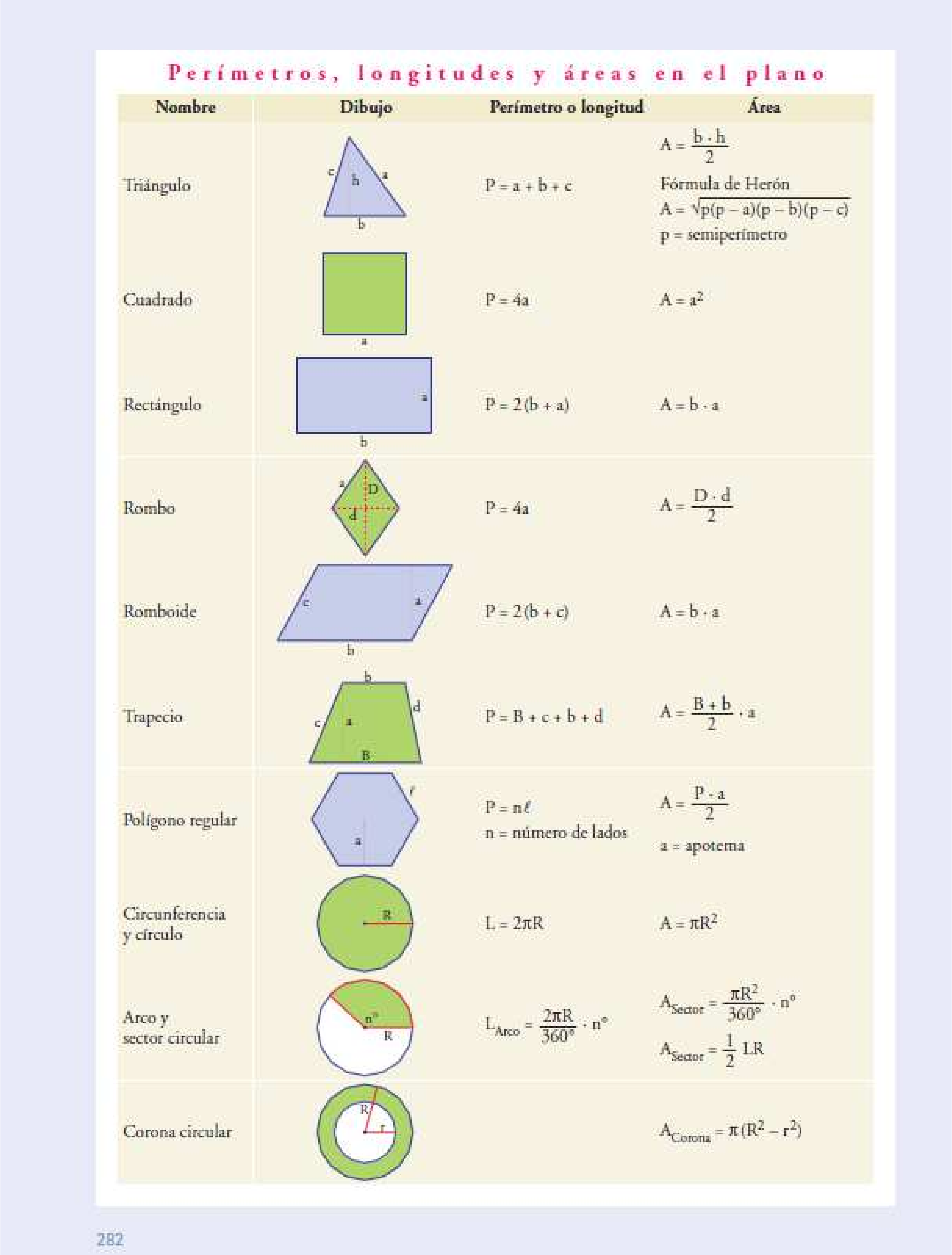
Aplica la teoría

18. Calcula dos números cuya suma sea 60 y de forma que sea mínimo el cuadrado del primero más el doble del cuadrado del segundo.

19. Un ganadero quiere cercar un recinto de forma rectangular en un prado para que puedan pastar las vacas. Si dispone de 1 600 m de cerca, ¿cuánto medirá de largo y de ancho el recinto para que la superficie del recinto sea máxima?

20. Se quiere construir un recipiente en forma de prisma cuadrangular tal que el volumen sea máximo. Si la superficie es de 24 m^2, ¿qué dimensiones debe tener la caja?

Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas

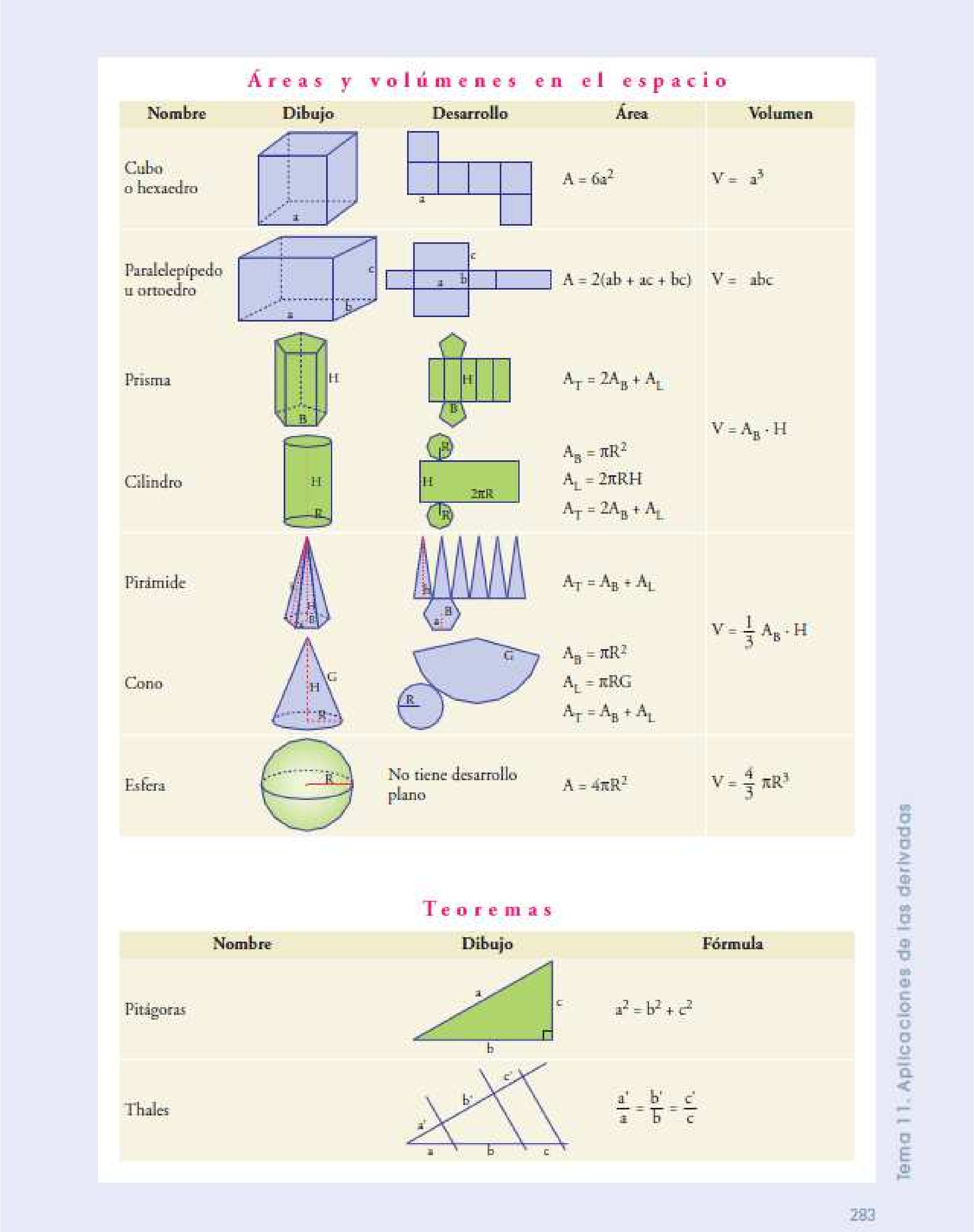


Perímetros, longitudes y áreas en el plano

Nombre	Dibujo	Perímetro o longitud	Área
Triángulo		$P = a + b + c$	$A = \frac{b \cdot h}{2}$ Fórmula de Herón $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ p = semiperímetro
Cuadrado		$P = 4a$	$A = a^2$
Rectángulo		$P = 2(b + a)$	$A = b \cdot a$
Rombo		$P = 4a$	$A = \frac{D \cdot d}{2}$
Romboide		$P = 2(b + c)$	$A = b \cdot a$
Trapecio		$P = B + c + b + d$	$A = \frac{B + b}{2} \cdot a$
Polígono regular		$P = n\ell$ n = número de lados	$A = \frac{P \cdot a}{2}$ a = apotema
Circunferencia y círculo		$L = 2\pi R$	$A = \pi R^2$
Arco y sector circular		$L_{Arco} = \frac{2\pi R}{360°} \cdot n°$	$A_{Sector} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot n°$ $A_{Sector} = \frac{1}{2} LR$
Corona circular			$A_{Corona} = \pi(R^2 - r^2)$

282

Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas



Áreas y volúmenes en el espacio

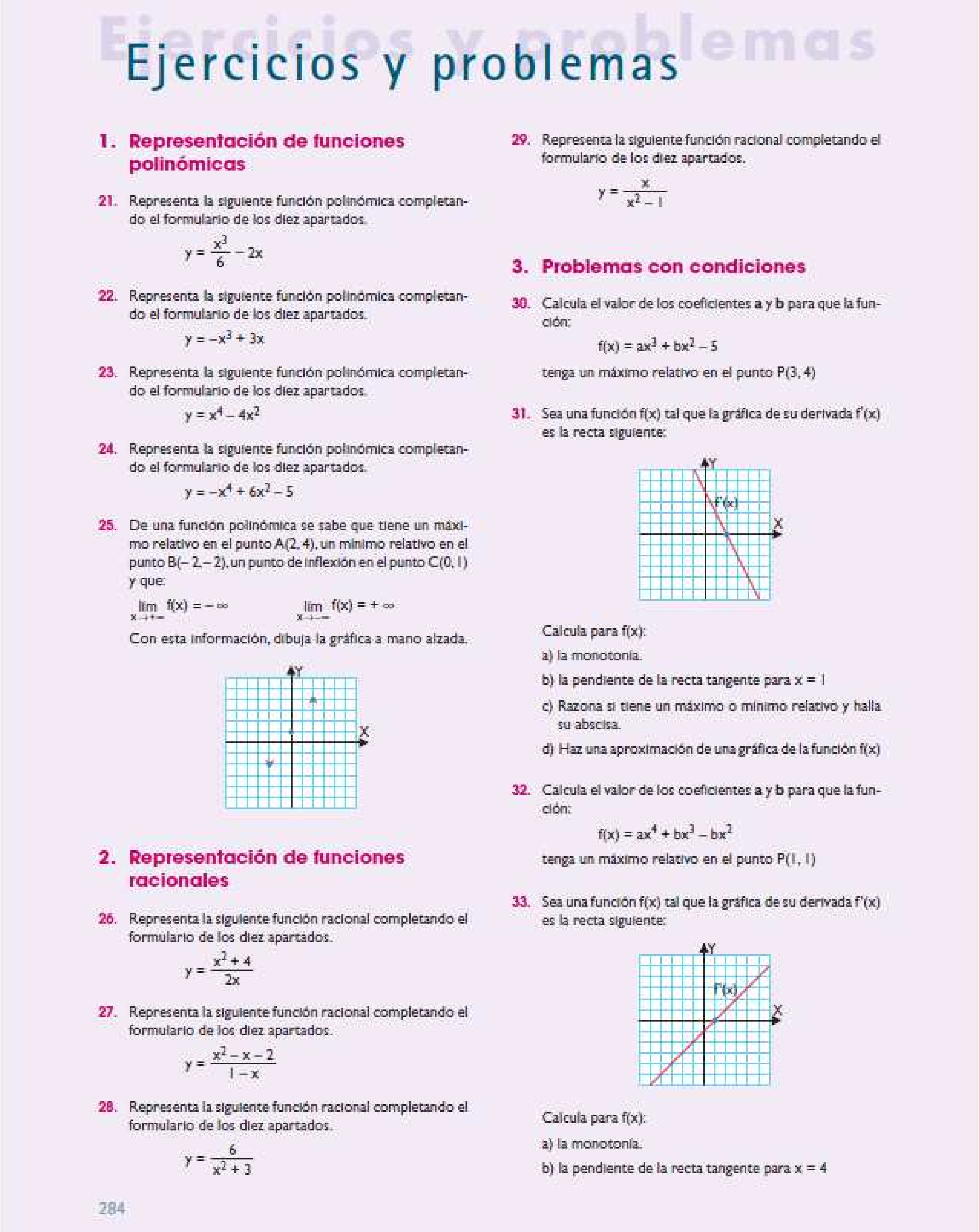
Nombre	Dibujo	Desarrollo	Área	Volumen
Cubo o hexaedro			$A = 6a^2$	$V = a^3$
Paralelepípedo u ortoedro			$A = 2(ab + ac + bc)$	$V = abc$
Prisma			$A_T = 2A_B + A_L$	$V = A_B \cdot H$
Cilindro			$A_B = \pi R^2$ $A_L = 2\pi RH$ $A_T = 2A_B + A_L$	
Pirámide			$A_T = A_B + A_L$	$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$
Cono			$A_B = \pi R^2$ $A_L = \pi RG$ $A_T = A_B + A_L$	
Esfera		No tiene desarrollo plano	$A = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

Teoremas

Nombre	Dibujo	Fórmula
Pitágoras		$a^2 = b^2 + c^2$
Thales		$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

Tema 11. Aplicaciones de las derivadas

283



Ejercicios y problemas

1. Representación de funciones polinómicas

21. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^3}{6} - 2x$$

22. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = -x^3 + 3x$$

23. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^4 - 4x^2$$

24. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = -x^4 + 6x^2 - 5$$

25. De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto A(2, 4), un mínimo relativo en el punto B(– 2, – 2), un punto de inflexión en el punto C(0, 1) y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.

2. Representación de funciones racionales

26. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2 + 4}{2x}$$

27. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{1 - x}$$

28. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

29. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

3. Problemas con condiciones

30. Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 5$$

tenga un máximo relativo en el punto P(3, 4)

31. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la recta siguiente:

Calcula para f(x):

a) la monotonía.

b) la pendiente de la recta tangente para x = 1

c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.

d) Haz una aproximación de una gráfica de la función f(x)

32. Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 - bx^2$$

tenga un máximo relativo en el punto P(1, 1)

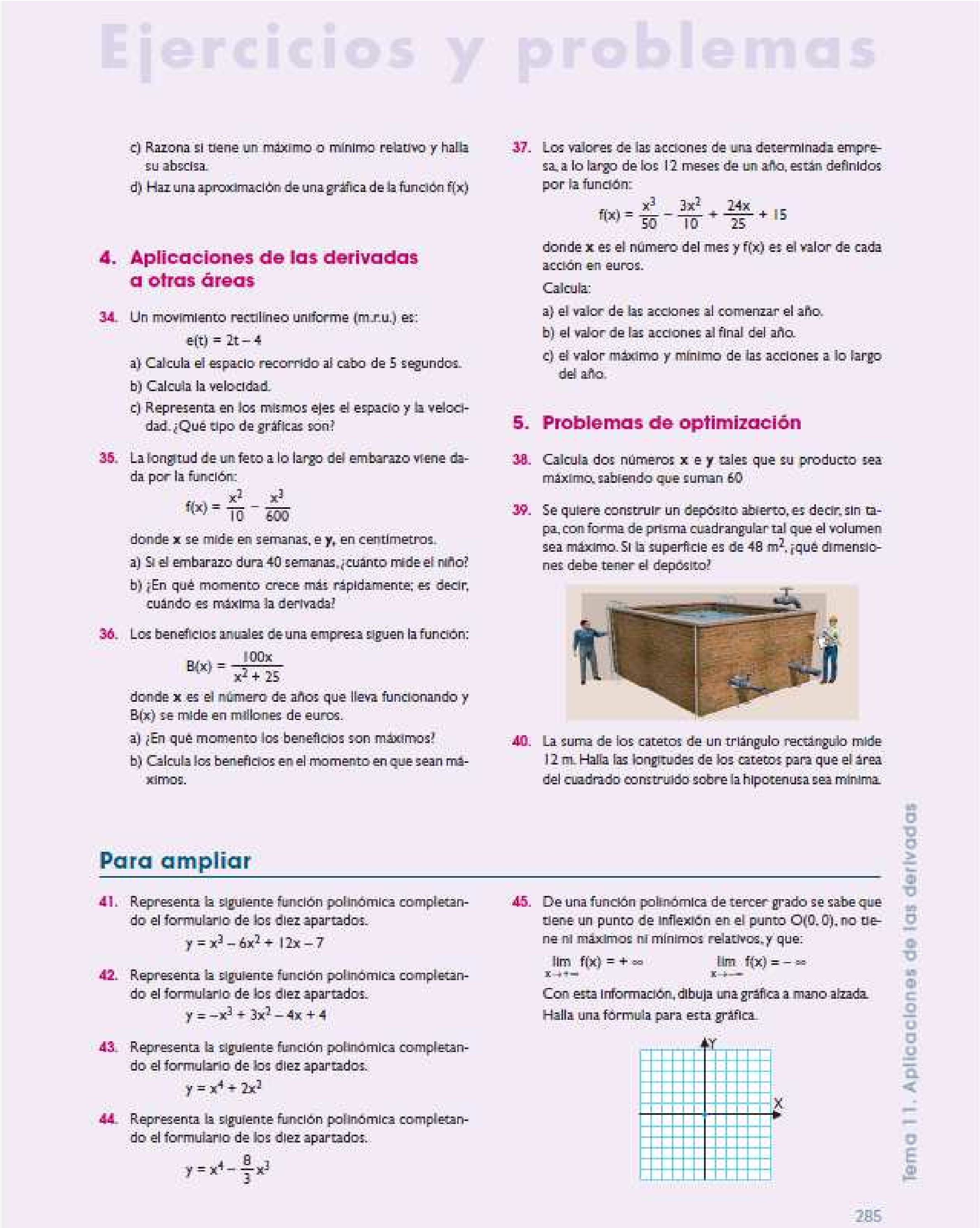
33. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la recta siguiente:

Calcula para f(x):

a) la monotonía.

b) la pendiente de la recta tangente para x = 4

Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas



Ejercicios y problemas

c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.

d) Haz una aproximación de una gráfica de la función f(x)

4. Aplicaciones de las derivadas a otras áreas

34. Un movimiento rectilíneo uniforme (m.r.u.) es:

$$e(t) = 2t - 4$$

a) Calcula el espacio recorrido al cabo de 5 segundos.

b) Calcula la velocidad.

c) Representa en los mismos ejes el espacio y la velocidad. ¿Qué tipo de gráficas son?

35. La longitud de un feto a lo largo del embarazo viene dada por la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{600}$$

donde **x** se mide en semanas, e **y**, en centímetros.

a) Si el embarazo dura 40 semanas, ¿cuánto mide el niño?

b) ¿En qué momento crece más rápidamente; es decir, cuándo es máxima la derivada?

36. Los beneficios anuales de una empresa siguen la función:

$$B(x) = \frac{100x}{x^2 + 25}$$

donde **x** es el número de años que lleva funcionando y B(x) se mide en millones de euros.

a) ¿En qué momento los beneficios son máximos?

b) Calcula los beneficios en el momento en que sean máximos.

37. Los valores de las acciones de una determinada empresa, a lo largo de los 12 meses de un año, están definidos por la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{50} - \frac{3x^2}{10} + \frac{24x}{25} + 15$$

donde **x** es el número del mes y f(x) es el valor de cada acción en euros.

Calcula:

a) el valor de las acciones al comenzar el año.

b) el valor de las acciones al final del año.

c) el valor máximo y mínimo de las acciones a lo largo del año.

5. Problemas de optimización

38. Calcula dos números **x** e **y** tales que su producto sea máximo, sabiendo que suman 60

39. Se quiere construir un depósito abierto, es decir, sin tapa, con forma de prisma cuadrangular tal que el volumen sea máximo. Si la superficie es de 48 m^2, ¿qué dimensiones debe tener el depósito?

40. La suma de los catetos de un triángulo rectángulo mide 12 m. Halla las longitudes de los catetos para que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa sea mínima.

Para ampliar

41. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

42. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4$$

43. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^4 + 2x^2$$

44. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

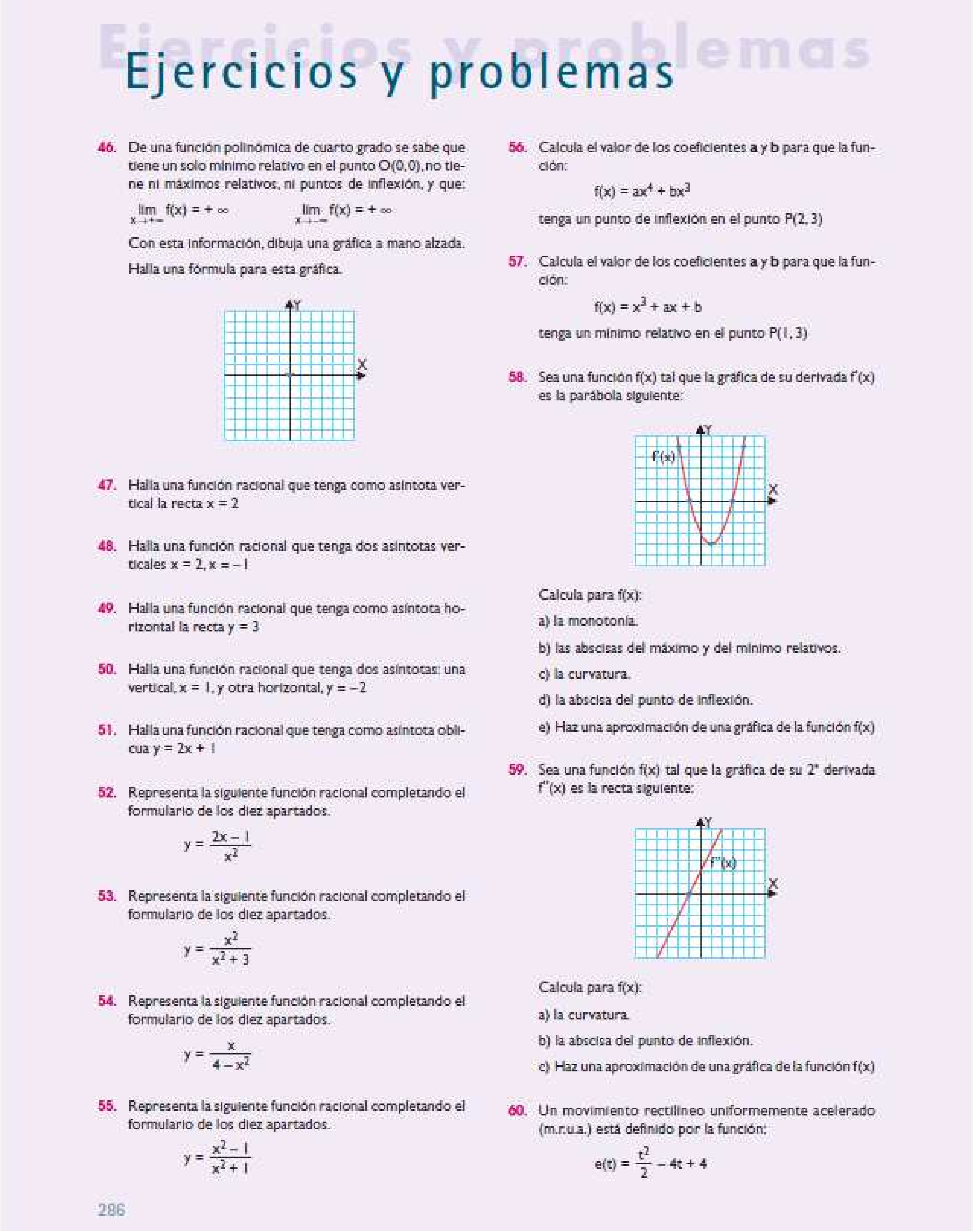
$$y = x^4 - \frac{8}{3}x^3$$

45. De una función polinómica de tercer grado se sabe que tiene un punto de inflexión en el punto O(0, 0), no tiene ni máximos ni mínimos relativos, y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja una gráfica a mano alzada.

Halla una fórmula para esta gráfica.



Ejercicios y problemas

46. De una función polinómica de cuarto grado se sabe que tiene un solo mínimo relativo en el punto O(0, 0), no tiene ni máximos relativos, ni puntos de inflexión, y que:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Con esta información, dibuja una gráfica a mano alzada.

Halla una fórmula para esta gráfica.

47. Halla una función racional que tenga como asíntota vertical la recta x = 2

48. Halla una función racional que tenga dos asíntotas verticales x = 2, x = –1

49. Halla una función racional que tenga como asíntota horizontal la recta y = 3

50. Halla una función racional que tenga dos asíntotas: una vertical, x = 1, y otra horizontal, y = –2

51. Halla una función racional que tenga como asíntota oblicua y = 2x + 1

52. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{2x - 1}{x^2}$$

53. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

54. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x}{4 - x^2}$$

55. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

56. Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función:

$$f(x) = ax^4 + bx^3$$

tenga un punto de inflexión en el punto P(2, 3)

57. Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función:

$$f(x) = x^3 + ax + b$$

tenga un mínimo relativo en el punto P(1, 3)

58. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la parábola siguiente:

Calcula para f(x):

a) la monotonía.

b) las abscisas del máximo y del mínimo relativos.

c) la curvatura.

d) la abscisa del punto de inflexión.

e) Haz una aproximación de una gráfica de la función f(x)

59. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su 2ª derivada f''(x) es la recta siguiente:

Calcula para f(x):

a) la curvatura.

b) la abscisa del punto de inflexión.

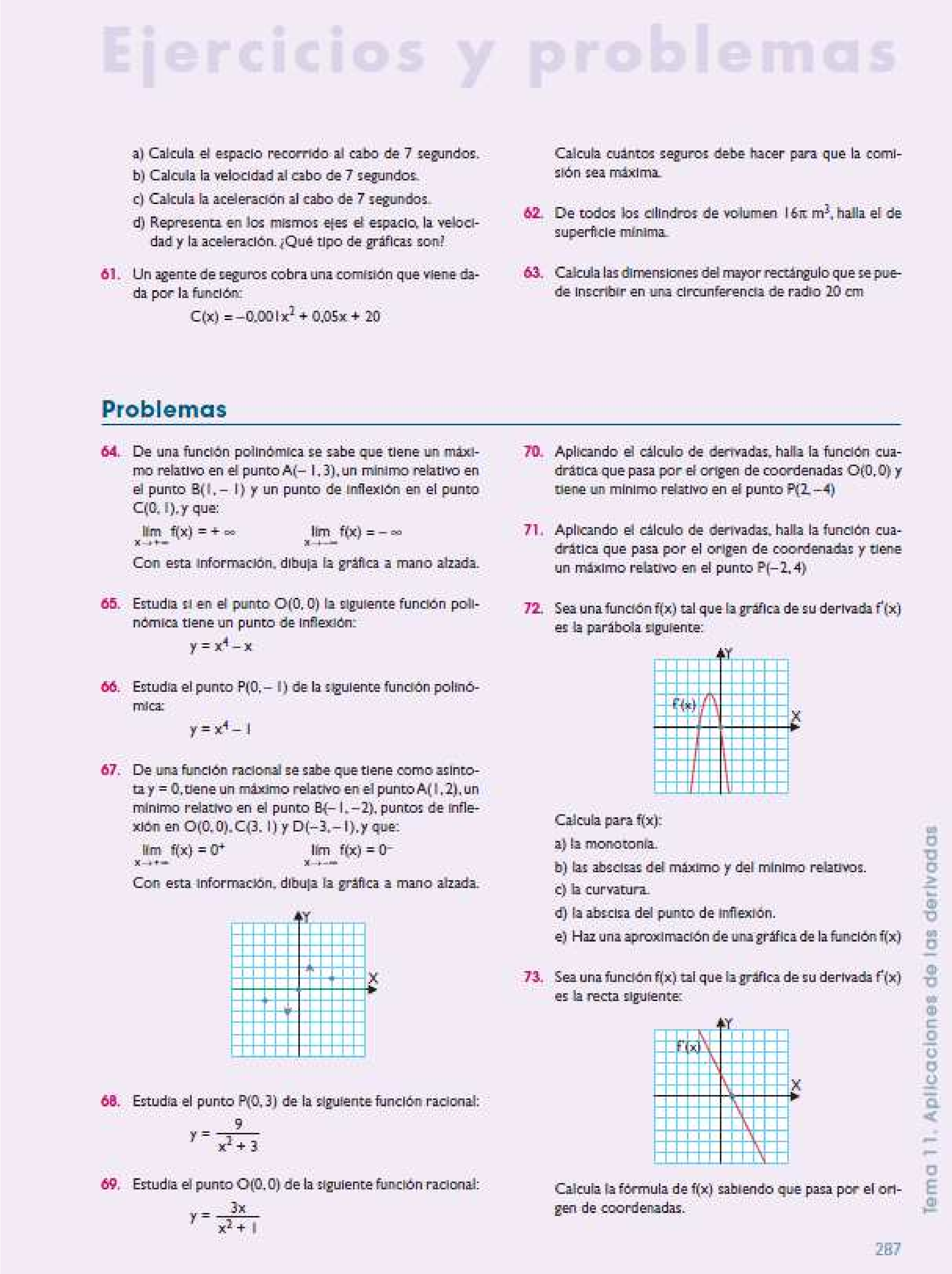
c) Haz una aproximación de una gráfica de la función f(x)

60. Un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.) está definido por la función:

$$e(t) = \frac{t^2}{2} - 4t + 4$$

286

Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas



Ejercicios y problemas

a) Calcula el espacio recorrido al cabo de 7 segundos.
b) Calcula la velocidad al cabo de 7 segundos.
c) Calcula la aceleración al cabo de 7 segundos.
d) Representa en los mismos ejes el espacio, la velocidad y la aceleración. ¿Qué tipo de gráficas son?

61. Un agente de seguros cobra una comisión que viene dada por la función:

$$C(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}05x + 20$$

Calcula cuántos seguros debe hacer para que la comisión sea máxima.

62. De todos los cilindros de volumen 16π m^3, halla el de superficie mínima.

63. Calcula las dimensiones del mayor rectángulo que se puede inscribir en una circunferencia de radio 20 cm

Problemas

64. De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto A(– 1, 3), un mínimo relativo en el punto B(1, – 1) y un punto de inflexión en el punto C(0, 1), y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.

65. Estudia si en el punto O(0, 0) la siguiente función polinómica tiene un punto de inflexión:

$$y = x^4 - x$$

66. Estudia el punto P(0, – 1) de la siguiente función polinómica:

$$y = x^4 - 1$$

67. De una función racional se sabe que tiene como asíntota y = 0, tiene un máximo relativo en el punto A(1, 2), un mínimo relativo en el punto B(– 1, –2), puntos de inflexión en O(0, 0), C(3, 1) y D(–3, –1), y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.

68. Estudia el punto P(0, 3) de la siguiente función racional:

$$y = \frac{9}{x^2 + 3}$$

69. Estudia el punto O(0, 0) de la siguiente función racional:

$$y = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

70. Aplicando el cálculo de derivadas, halla la función cuadrática que pasa por el origen de coordenadas O(0, 0) y tiene un mínimo relativo en el punto P(2, –4)

71. Aplicando el cálculo de derivadas, halla la función cuadrática que pasa por el origen de coordenadas y tiene un máximo relativo en el punto P(– 2, 4)

72. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la parábola siguiente:

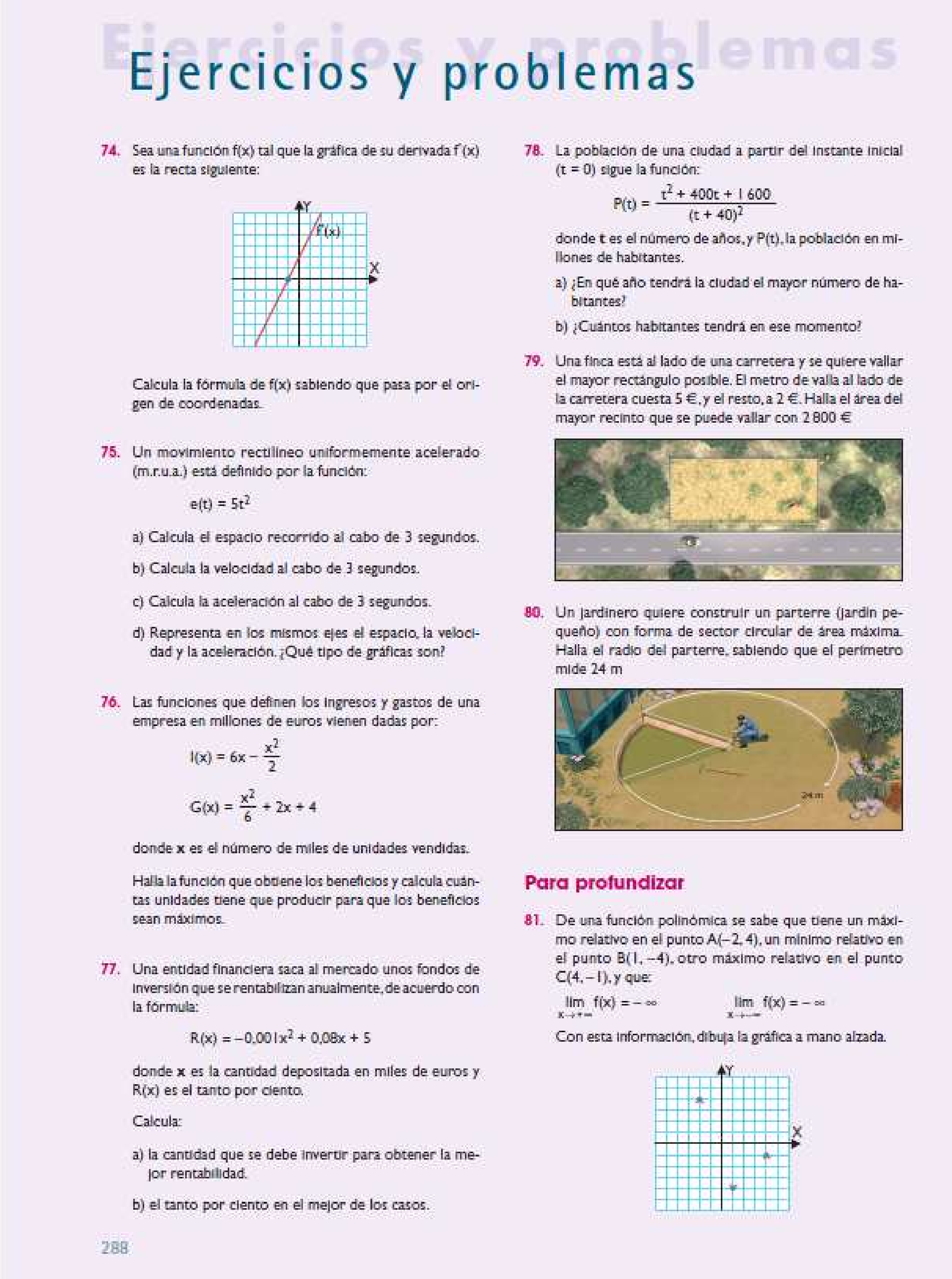
Calcula para f(x):
a) la monotonía.
b) las abscisas del máximo y del mínimo relativos.
c) la curvatura.
d) la abscisa del punto de inflexión.
e) Haz una aproximación de una gráfica de la función f(x)

73. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la recta siguiente:

Calcula la fórmula de f(x) sabiendo que pasa por el origen de coordenadas.

Tema 11. Aplicaciones de las derivadas

287



Ejercicios y problemas

74. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la recta siguiente:

Calcula la fórmula de f(x) sabiendo que pasa por el origen de coordenadas.

75. Un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.) está definido por la función:

$$e(t) = 5t^2$$

a) Calcula el espacio recorrido al cabo de 3 segundos.

b) Calcula la velocidad al cabo de 3 segundos.

c) Calcula la aceleración al cabo de 3 segundos.

d) Representa en los mismos ejes el espacio, la velocidad y la aceleración. ¿Qué tipo de gráficas son?

76. Las funciones que definen los ingresos y gastos de una empresa en millones de euros vienen dadas por:

$$I(x) = 6x - \frac{x^2}{2}$$

$$G(x) = \frac{x^2}{6} + 2x + 4$$

donde **x** es el número de miles de unidades vendidas.

Halla la función que obtiene los beneficios y calcula cuántas unidades tiene que producir para que los beneficios sean máximos.

77. Una entidad financiera saca al mercado unos fondos de inversión que se rentabilizan anualmente, de acuerdo con la fórmula:

$$R(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}08x + 5$$

donde **x** es la cantidad depositada en miles de euros y R(x) es el tanto por ciento.

Calcula:

a) la cantidad que se debe invertir para obtener la mejor rentabilidad.

b) el tanto por ciento en el mejor de los casos.

78. La población de una ciudad a partir del instante inicial (t = 0) sigue la función:

$$P(t) = \frac{t^2 + 400t + 1\,600}{(t + 40)^2}$$

donde **t** es el número de años, y P(t), la población en millones de habitantes.

a) ¿En qué año tendrá la ciudad el mayor número de habitantes?

b) ¿Cuántos habitantes tendrá en ese momento?

79. Una finca está al lado de una carretera y se quiere vallar el mayor rectángulo posible. El metro de valla al lado de la carretera cuesta 5 €, y el resto, a 2 €. Halla el área del mayor recinto que se puede vallar con 2 800 €

80. Un jardinero quiere construir un parterre (jardín pequeño) con forma de sector circular de área máxima. Halla el radio del parterre, sabiendo que el perímetro mide 24 m

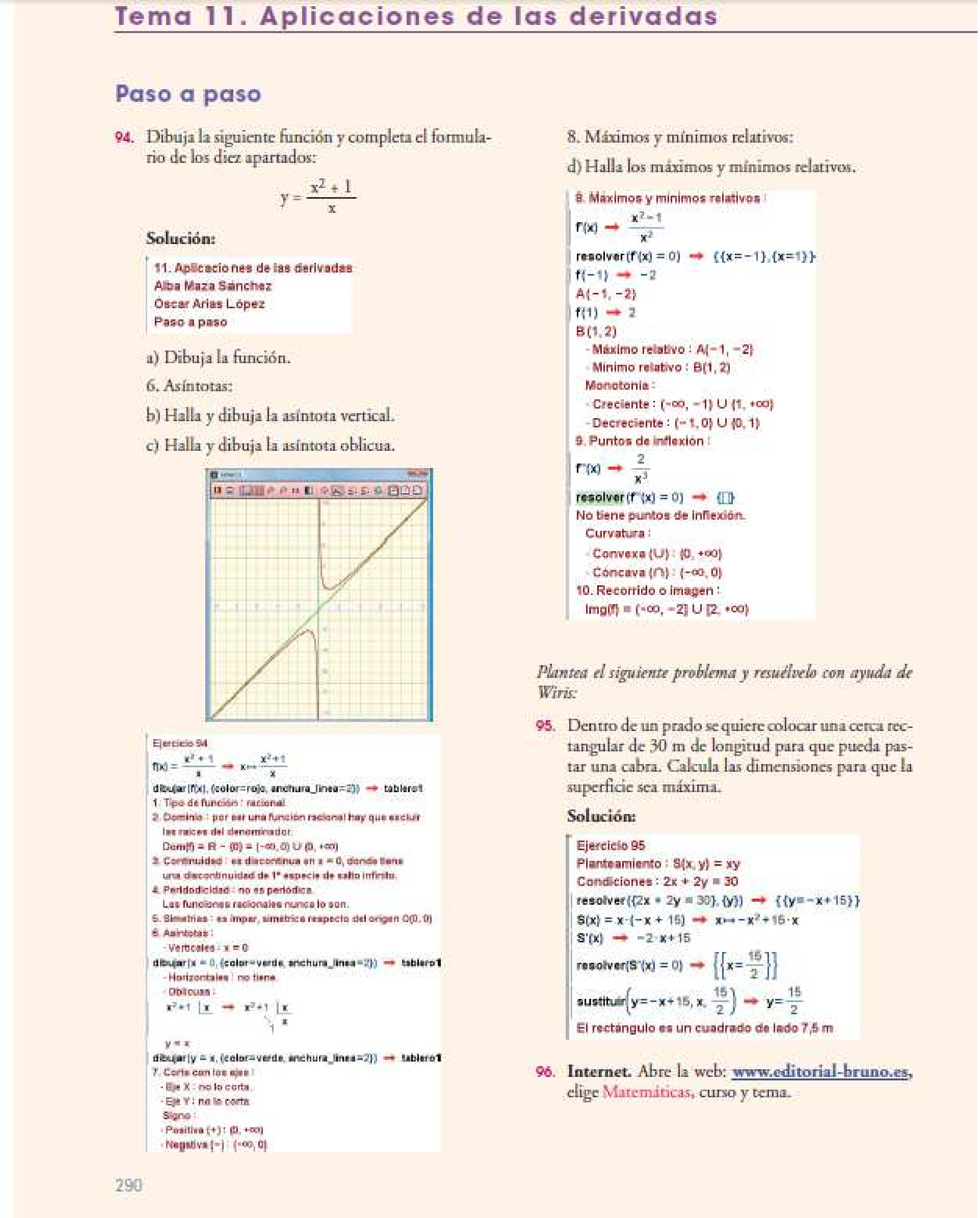
Para profundizar

81. De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto A(–2, 4), un mínimo relativo en el punto B(1, –4), otro máximo relativo en el punto C(4, –1), y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.

Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas



Tema 11. Aplicaciones de las derivadas

Paso a paso

94. Dibuja la siguiente función y completa el formulario de los diez apartados:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Solución:

11. Aplicaciones de las derivadas
Alba Maza Sánchez
Óscar Arias López
Paso a paso

a) Dibuja la función.

6. Asíntotas:

b) Halla y dibuja la asíntota vertical.

c) Halla y dibuja la asíntota oblicua.

Ejercicio 94

$f(x) = \frac{x^2+1}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{x^2+1}{x}$

dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2}) → tablero1

1. Tipo de función : racional.

2. Dominio : por ser una función racional hay que excluir las raíces del denominador.
Dom(f) = ℝ − {0} = (−∞, 0) ∪ (0, +∞)

3. Continuidad : es discontinua en x = 0, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

4. Periodicidad : no es periódica.
Las funciones racionales nunca lo son.

5. Simetrías : es impar, simétrica respecto del origen O(0, 0)

6. Asíntotas :
- Verticales : x = 0

dibujar(x = 0, {color=verde, anchura_línea=2}) → tablero1
- Horizontales : no tiene.
- Oblicuas :

$x^2+1 \,\underline{|\,x} \rightarrow x^2+1 \,\underline{|\,x}$; 1 ; x

y = x

dibujar(y = x, {color=verde, anchura_línea=2}) → tablero1

7. Corte con los ejes :
- Eje X : no lo corta.
- Eje Y : no lo corta.

Signo :
- Positiva (+) : (0, +∞)
- Negativa (−) : (−∞, 0)

8. Máximos y mínimos relativos:

d) Halla los máximos y mínimos relativos.

8. Máximos y mínimos relativos :

$f'(x) \rightarrow \frac{x^2-1}{x^2}$

resolver(f'(x) = 0) → {{x=−1},{x=1}}

f(−1) → −2

A(−1, −2)

f(1) → 2

B(1, 2)
- Máximo relativo : A(−1, −2)
- Mínimo relativo : B(1, 2)

Monotonía :
- Creciente : (−∞, −1) ∪ (1, +∞)
- Decreciente : (−1, 0) ∪ (0, 1)

9. Puntos de inflexión :

$f''(x) \rightarrow \frac{2}{x^3}$

resolver(f''(x) = 0) → {[]}

No tiene puntos de inflexión.

Curvatura :
- Convexa (∪) : (0, +∞)
- Cóncava (∩) : (−∞, 0)

10. Recorrido o imagen :
Img(f) = (−∞, −2] ∪ [2, +∞)

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris:

95. Dentro de un prado se quiere colocar una cerca rectangular de 30 m de longitud para que pueda pastar una cabra. Calcula las dimensiones para que la superficie sea máxima.

Solución:

Ejercicio 95

Planteamiento : S(x, y) = xy

Condiciones : 2x + 2y = 30

resolver({2x + 2y = 30}, {y}) → {{y=−x+15}}

$S(x) = x\cdot(-x + 15) \rightarrow x \mapsto -x^2 + 15\cdot x$

$S'(x) \rightarrow -2\cdot x + 15$

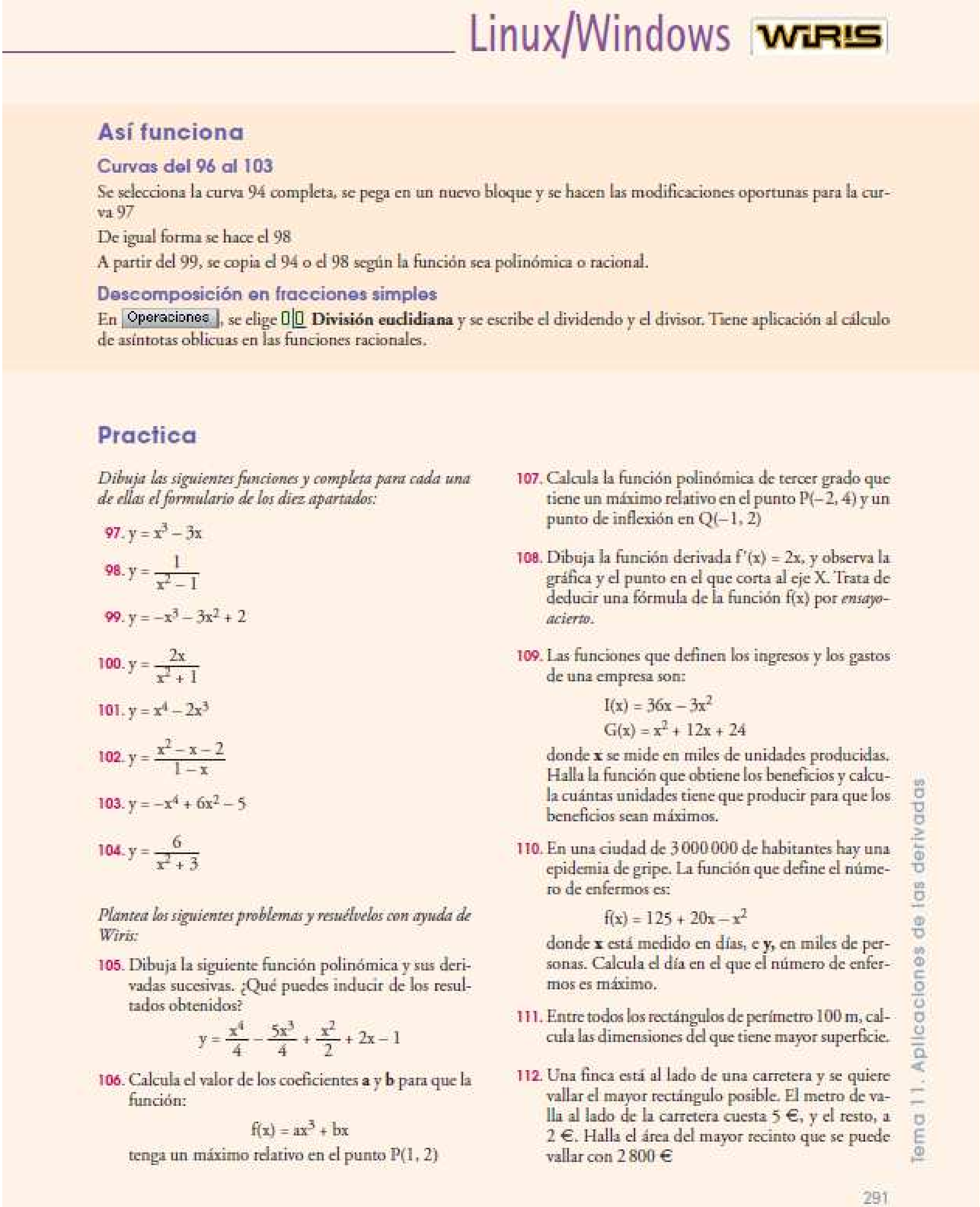
$\text{resolver}(S'(x) = 0) \rightarrow \left\{\left\{x = \frac{15}{2}\right\}\right\}$

$\text{sustituir}\left(y = -x + 15,\ x,\ \frac{15}{2}\right) \rightarrow y = \frac{15}{2}$

El rectángulo es un cuadrado de lado 7,5 m

96. **Internet.** Abre la web: www.editorial-bruno.es, elige Matemáticas, curso y tema.

Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas



Linux/Windows WIRIS

Así funciona

Curvas del 96 al 103

Se selecciona la curva 94 completa, se pega en un nuevo bloque y se hacen las modificaciones oportunas para la curva 97

De igual forma se hace el 98

A partir del 99, se copia el 94 o el 98 según la función sea polinómica o racional.

Descomposición en fracciones simples

En Operaciones, se elige ▯|▯ **División euclidiana** y se escribe el dividendo y el divisor. Tiene aplicación al cálculo de asíntotas oblicuas en las funciones racionales.

Practica

Dibuja las siguientes funciones y completa para cada una de ellas el formulario de los diez apartados:

97. $y = x^3 - 3x$

98. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

99. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$

100. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

101. $y = x^4 - 2x^3$

102. $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{1 - x}$

103. $y = -x^4 + 6x^2 - 5$

104. $y = \dfrac{6}{x^2 + 3}$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

105. Dibuja la siguiente función polinómica y sus derivadas sucesivas. ¿Qué puedes inducir de los resultados obtenidos?

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x - 1$$

106. Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función:

$$f(x) = ax^3 + bx$$

tenga un máximo relativo en el punto P(1, 2)

107. Calcula la función polinómica de tercer grado que tiene un máximo relativo en el punto P(–2, 4) y un punto de inflexión en Q(–1, 2)

108. Dibuja la función derivada $f'(x) = 2x$, y observa la gráfica y el punto en el que corta al eje X. Trata de deducir una fórmula de la función f(x) por *ensayo-acierto.*

109. Las funciones que definen los ingresos y los gastos de una empresa son:

$$I(x) = 36x - 3x^2$$
$$G(x) = x^2 + 12x + 24$$

donde **x** se mide en miles de unidades producidas. Halla la función que obtiene los beneficios y calcula cuántas unidades tiene que producir para que los beneficios sean máximos.

110. En una ciudad de 3 000 000 de habitantes hay una epidemia de gripe. La función que define el número de enfermos es:

$$f(x) = 125 + 20x - x^2$$

donde **x** está medido en días, e **y,** en miles de personas. Calcula el día en el que el número de enfermos es máximo.

111. Entre todos los rectángulos de perímetro 100 m, calcula las dimensiones del que tiene mayor superficie.

112. Una finca está al lado de una carretera y se quiere vallar el mayor rectángulo posible. El metro de valla al lado de la carretera cuesta 5 €, y el resto, a 2 €. Halla el área del mayor recinto que se puede vallar con 2 800 €

Tema 11. Aplicaciones de las derivadas

291

Unidad didáctica 11. Aplicación de las derivadas

Tema 11. Aplicaciones de las derivadas

Paso a paso

94. Dibuja la siguiente función y completa el formulario de los diez apartados:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

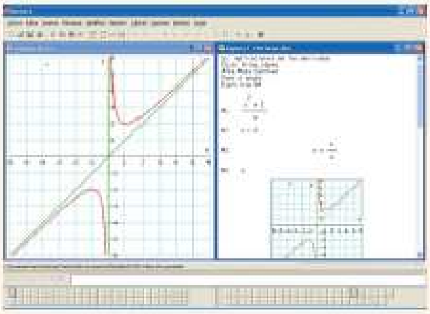
Solución:

a) Dibuja la función.

6. Asíntotas:

b) Halla y dibuja la asíntota vertical.

c) Halla y dibuja la asíntota oblicua.



d) Incrusta la imagen en la ventana **Álgebra**

8. Máximos y mínimos relativos:

e) Halla los máximos y mínimos relativos.

Formulario: cuadro resumen

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: por ser una función racional hay que excluir las raíces del denominador.
   $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica. Las funciones racionales nunca lo son.
5. Simetrías: es impar, simétrica respecto del origen O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $B(-1, -2)$
   - Mínimo relativo: $A(1, 2)$

   Monotonía:
   - Creciente: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Decreciente: $(-1, 0) \cup (0, 1)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$
10. Recorrido o imagen:
   $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de DERIVE:

95. Dentro de un prado se quiere colocar una cerca rectangular de 30 m de longitud para que pueda pastar una cabra. Calcula las dimensiones para que la superficie sea máxima.

Solución:

Planteamiento: $S(x, y) = xy$

Condición: $2x + 2y = 30$

a) En la **Entrada de Expresiones** escribe: **xy**

b) En la **Entrada de Expresiones** escribe:

$$\mathbf{2x + 2y = 30}$$

c) Despeja la letra y con ▤ **Resolver o despejar**

$$y = 15 - x$$

d) Sustituye el valor obtenido en la expresión del área.

$$x(15 - x)$$

e) Calcula los máximos y mínimos relativos derivando y resolviendo.

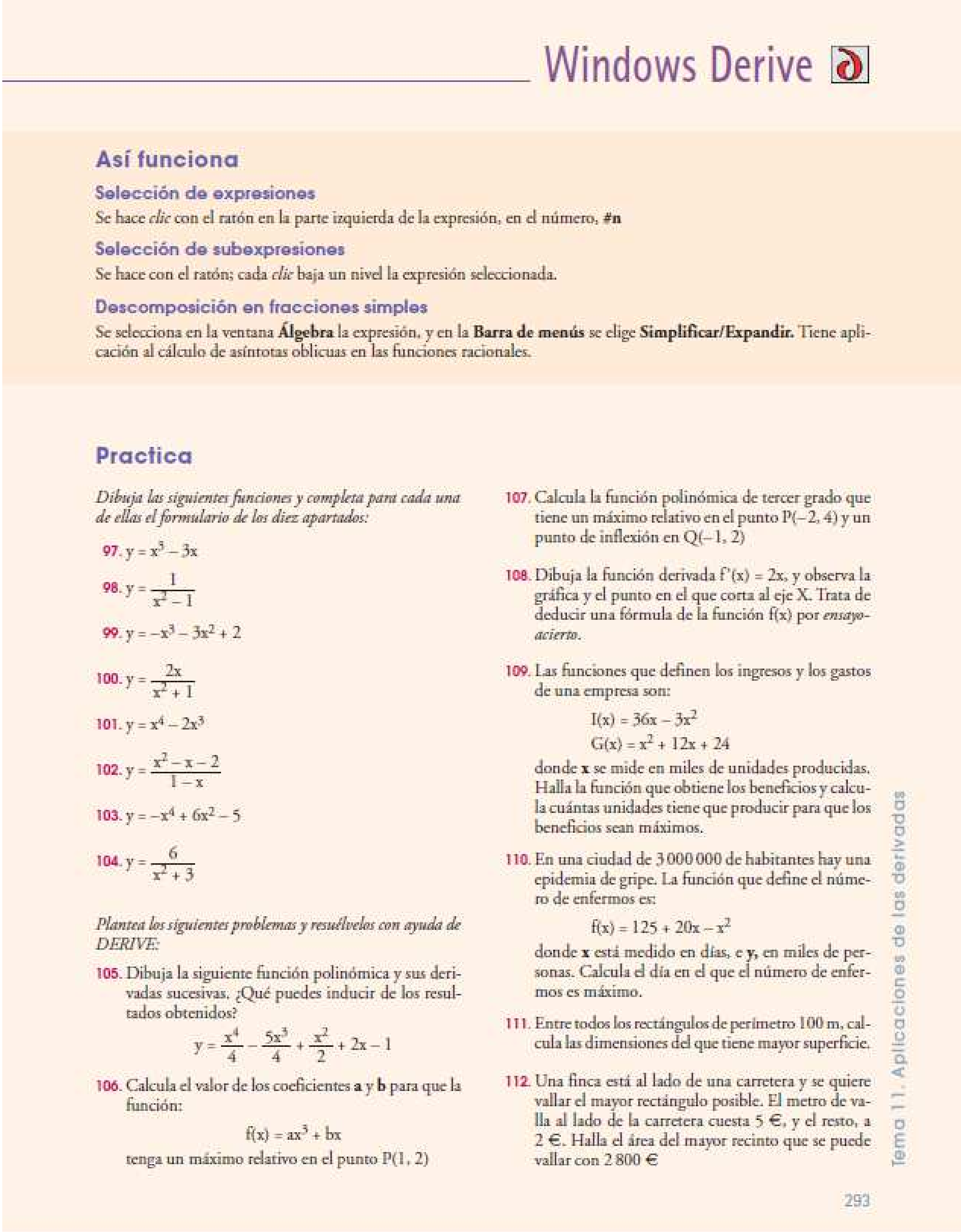
$$15 - 2x$$

$$x = 7{,}5 \text{ cm}; y = 7{,}5 \text{ cm}$$

El rectángulo es un cuadrado:

$$\text{Base} = \text{altura} = 7{,}5 \text{ m}$$

96. **Internet.** Abre la web: **www.editorial-bruno.es**, elige Matemáticas, curso y tema.



Windows Derive

Así funciona

Selección de expresiones

Se hace *clic* con el ratón en la parte izquierda de la expresión, en el número, **#n**

Selección de subexpresiones

Se hace con el ratón; cada *clic* baja un nivel la expresión seleccionada.

Descomposición en fracciones simples

Se selecciona en la ventana **Álgebra** la expresión, y en la **Barra de menús** se elige **Simplificar/Expandir.** Tiene aplicación al cálculo de asíntotas oblicuas en las funciones racionales.

Practica

Dibuja las siguientes funciones y completa para cada una de ellas el formulario de los diez apartados:

97. $y = x^3 - 3x$

98. $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

99. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$

100. $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

101. $y = x^4 - 2x^3$

102. $y = \frac{x^2 - x - 2}{1 - x}$

103. $y = -x^4 + 6x^2 - 5$

104. $y = \frac{6}{x^2 + 3}$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de DERIVE:

105. Dibuja la siguiente función polinómica y sus derivadas sucesivas. ¿Qué puedes inducir de los resultados obtenidos?

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x - 1$$

106. Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función:

$$f(x) = ax^3 + bx$$

tenga un máximo relativo en el punto P(1, 2)

107. Calcula la función polinómica de tercer grado que tiene un máximo relativo en el punto P(–2, 4) y un punto de inflexión en Q(–1, 2)

108. Dibuja la función derivada f'(x) = 2x, y observa la gráfica y el punto en el que corta al eje X. Trata de deducir una fórmula de la función f(x) por *ensayo-acierto*.

109. Las funciones que definen los ingresos y los gastos de una empresa son:

$$I(x) = 36x - 3x^2$$
$$G(x) = x^2 + 12x + 24$$

donde **x** se mide en miles de unidades producidas. Halla la función que obtiene los beneficios y calcula cuántas unidades tiene que producir para que los beneficios sean máximos.

110. En una ciudad de 3 000 000 de habitantes hay una epidemia de gripe. La función que define el número de enfermos es:

$$f(x) = 125 + 20x - x^2$$

donde **x** está medido en días, e **y,** en miles de personas. Calcula el día en el que el número de enfermos es máximo.

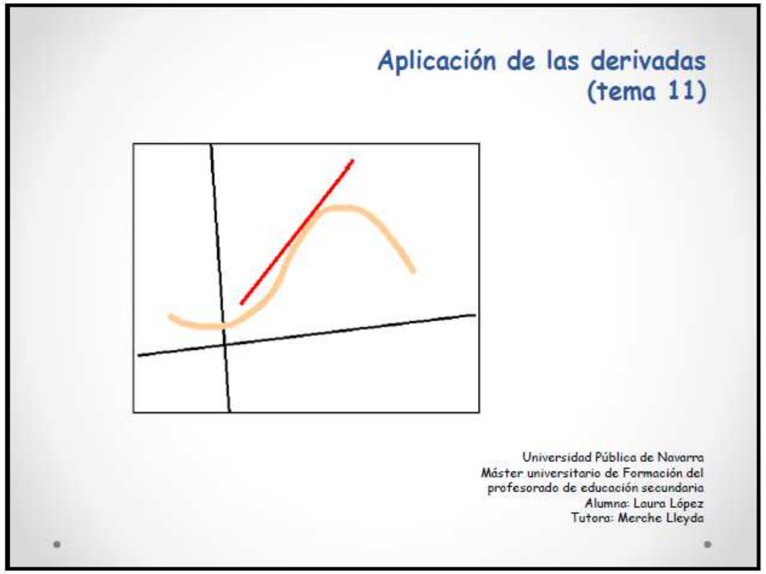
111. Entre todos los rectángulos de perímetro 100 m, calcula las dimensiones del que tiene mayor superficie.

112. Una finca está al lado de una carretera y se quiere vallar el mayor rectángulo posible. El metro de valla al lado de la carretera cuesta 5 €, y el resto, a 2 €. Halla el área del mayor recinto que se puede vallar con 2 800 €

Tema 11. Aplicaciones de las derivadas

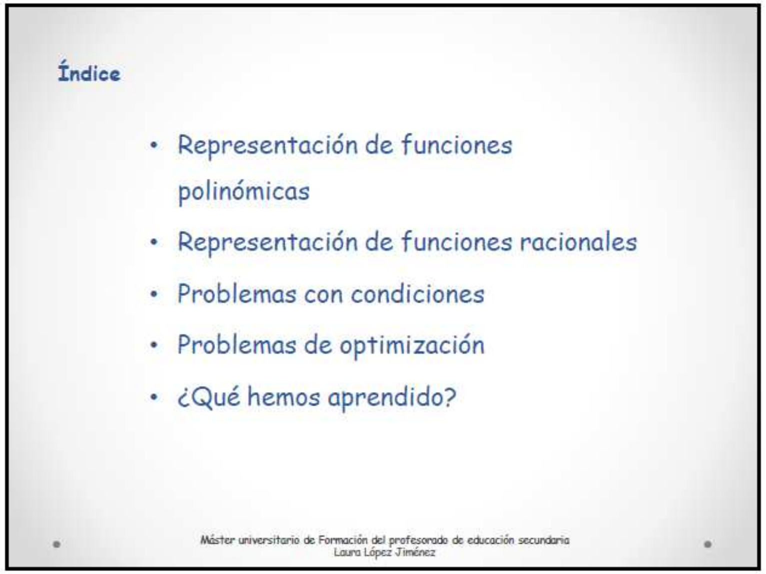
293

B. Material didáctico adicional



Aplicación de las derivadas (tema 11)

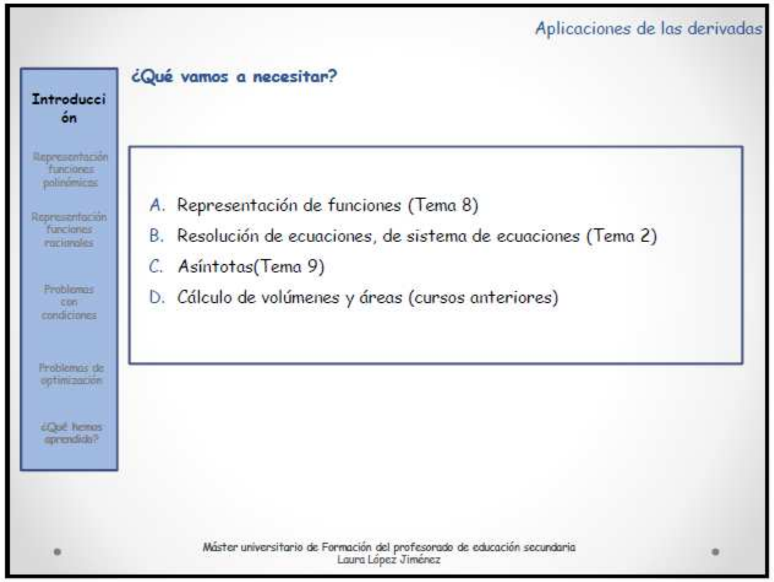
Universidad Pública de Navarra
Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Alumna: Laura López
Tutora: Merche Lleyda



Índice

- Representación de funciones polinómicas
- Representación de funciones racionales
- Problemas con condiciones
- Problemas de optimización
- ¿Qué hemos aprendido?

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas

Representación funciones racionales

Problemas con condiciones

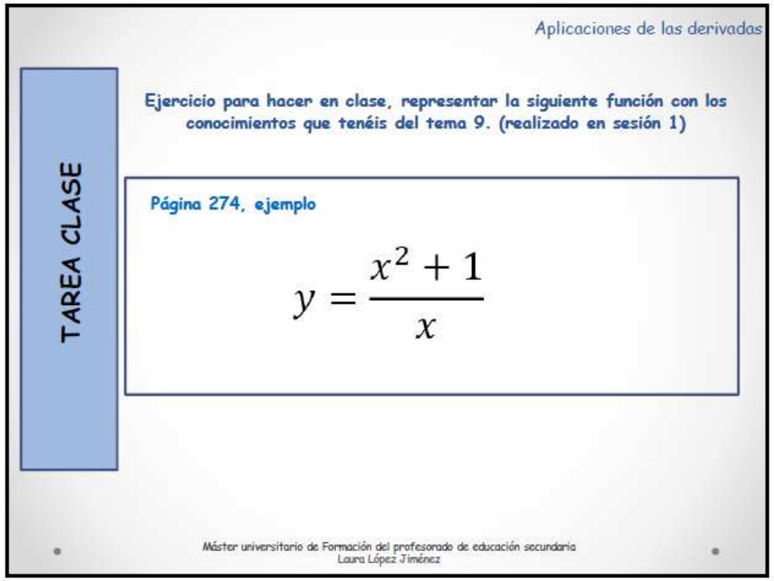
Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

¿Qué vamos a necesitar?

A. Representación de funciones (Tema 8)
B. Resolución de ecuaciones, de sistema de ecuaciones (Tema 2)
C. Asíntotas(Tema 9)
D. Cálculo de volúmenes y áreas (cursos anteriores)

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

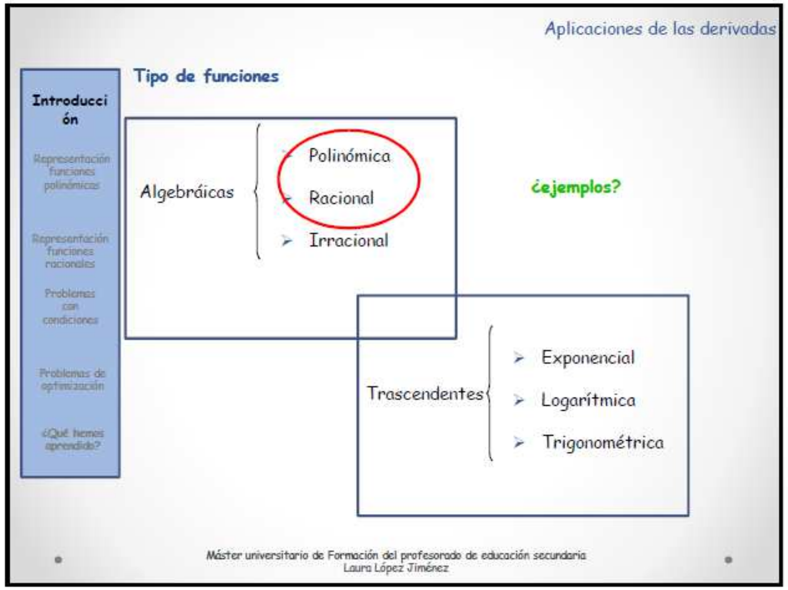
TAREA CLASE

Ejercicio para hacer en clase, representar la siguiente función con los conocimientos que tenéis del tema 9. (realizado en sesión 1)

Página 274, ejemplo

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas

Representación funciones racionales

Problemas con condiciones

Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

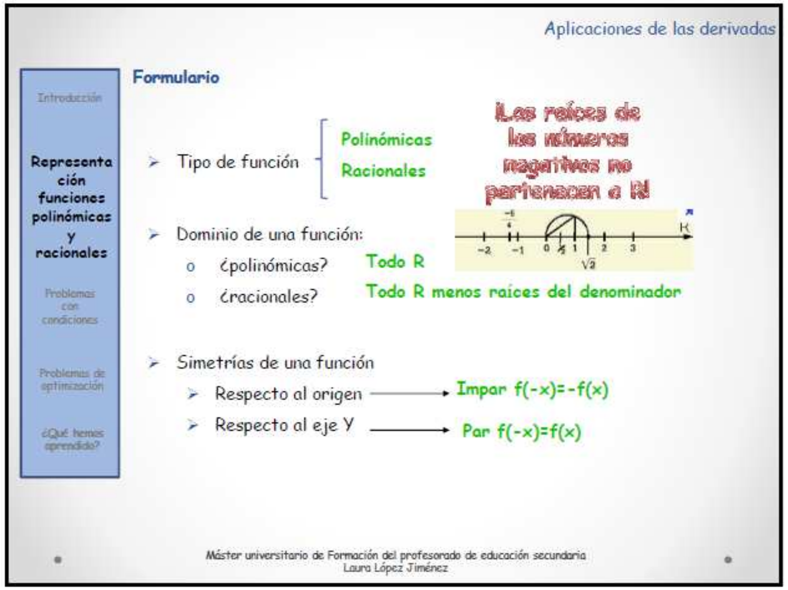
Tipo de funciones

Algebráicas
- Polinómica
- Racional
- Irracional

¿ejemplos?

Trascendentes
- Exponencial
- Logarítmica
- Trigonométrica

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas y racionales

Problemas con condiciones

Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

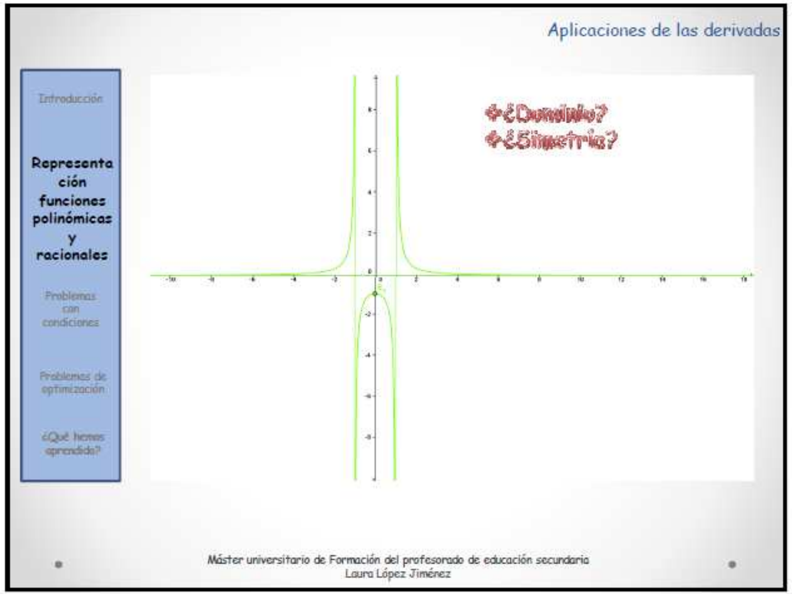
Formulario

- Tipo de función
  - Polinómicas
  - Racionales

¡Las raíces de los números negativos no pertenecen a R!

- Dominio de una función:
  - ¿polinómicas? Todo R
  - ¿racionales? Todo R menos raíces del denominador
- Simetrías de una función
  - Respecto al origen → Impar f(-x)=-f(x)
  - Respecto al eje Y → Par f(-x)=f(x)

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas y racionales

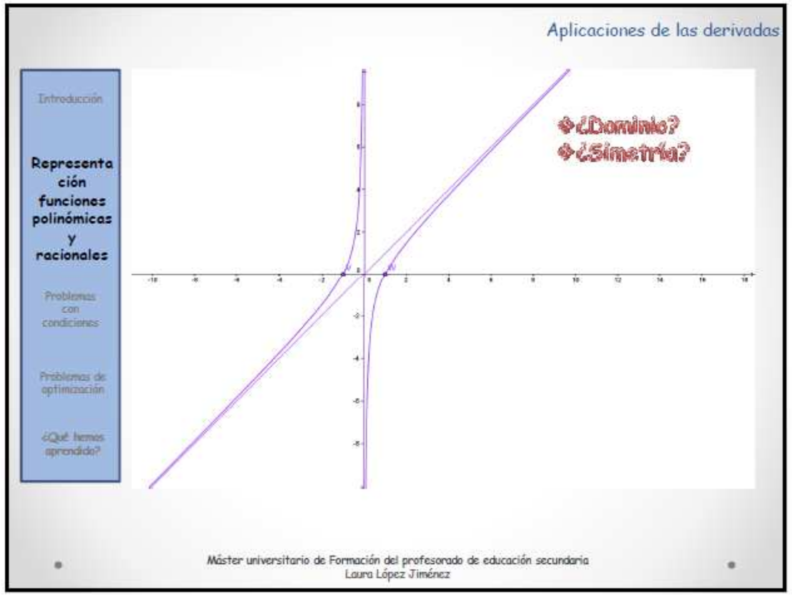
Problemas con condiciones

Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

❖¿Dominio?
❖¿Simetría?

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas y racionales

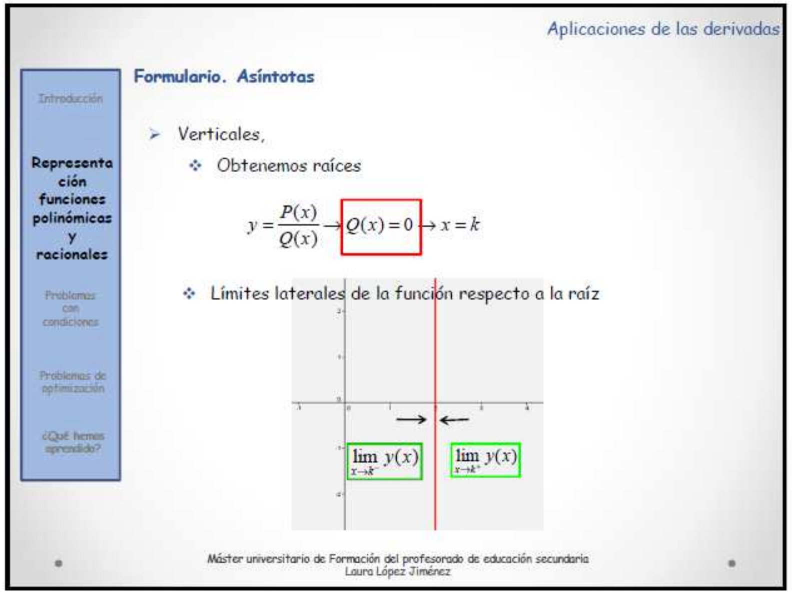
Problemas con condiciones

Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

❖¿Dominio?
❖¿Simetría?

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Formulario. Asíntotas

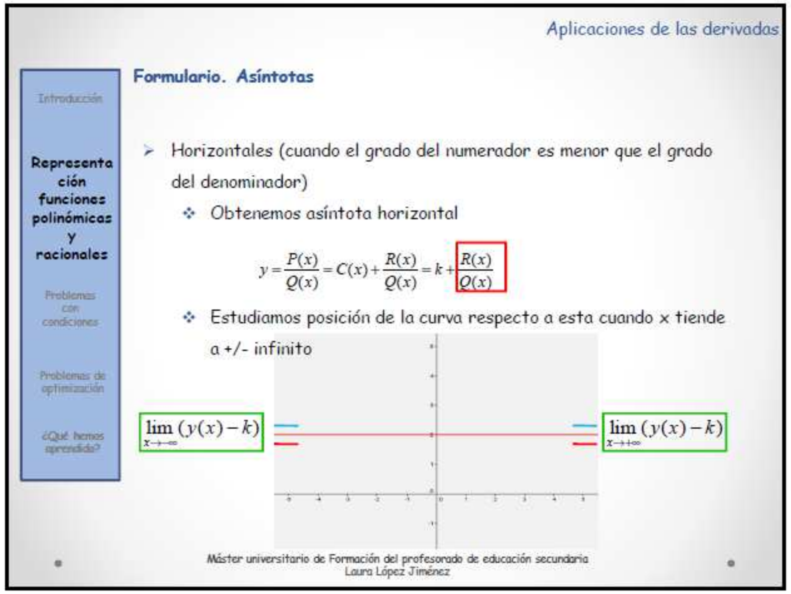
- Verticales,
  - Obtenemos raíces

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}\rightarrow\boxed{Q(x)=0}\rightarrow x=k$$

  - Límites laterales de la función respecto a la raíz

$$\boxed{\lim_{x\to k^-} y(x)}\qquad\boxed{\lim_{x\to k^+} y(x)}$$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Formulario. Asíntotas

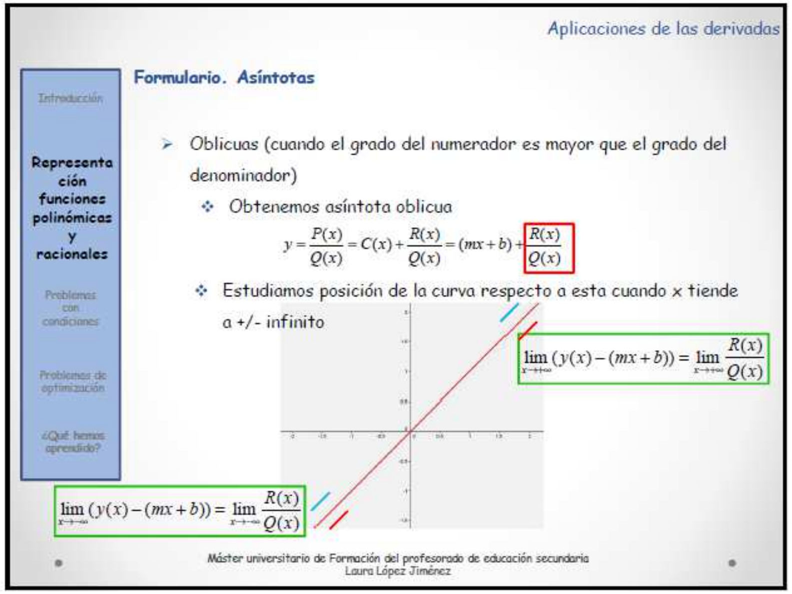
- Horizontales (cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador)
  - Obtenemos asíntota horizontal

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}=k+\boxed{\frac{R(x)}{Q(x)}}$$

  - Estudiamos posición de la curva respecto a esta cuando x tiende a +/- infinito

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}(y(x)-k)}\qquad\boxed{\lim_{x\to+\infty}(y(x)-k)}$$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Formulario. Asíntotas

- Oblicuas (cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador)
  - Obtenemos asíntota oblicua

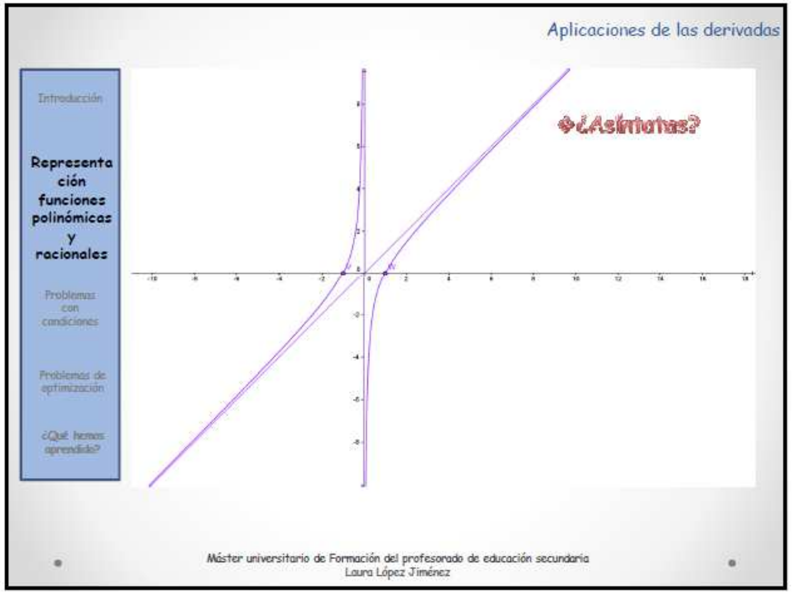
$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}=(mx+b)+\boxed{\frac{R(x)}{Q(x)}}$$

  - Estudiamos posición de la curva respecto a esta cuando x tiende a +/- infinito

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(y(x)-(mx+b))=\lim_{x\to+\infty}\frac{R(x)}{Q(x)}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}(y(x)-(mx+b))=\lim_{x\to-\infty}\frac{R(x)}{Q(x)}}$$

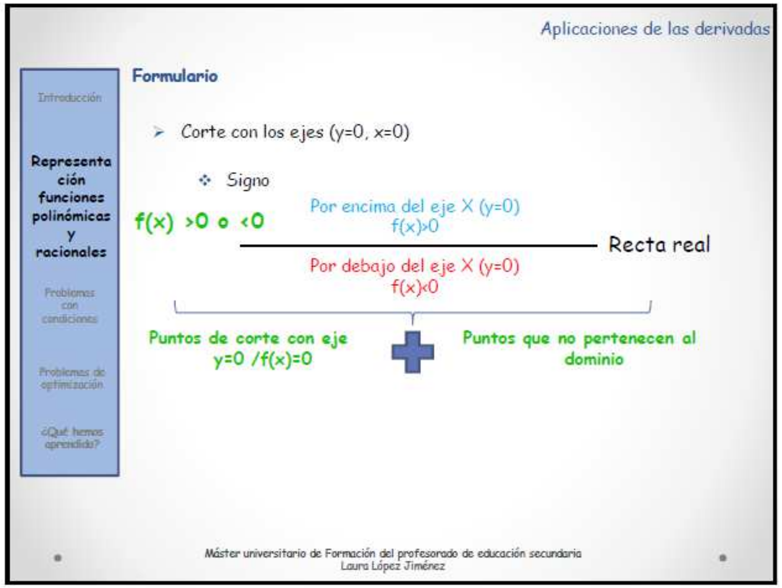
Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

❖¿Asíntotas?

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas y racionales

Problemas con condiciones

Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

Formulario

- Corte con los ejes (y=0, x=0)
  - Signo

f(x) >0 o <0

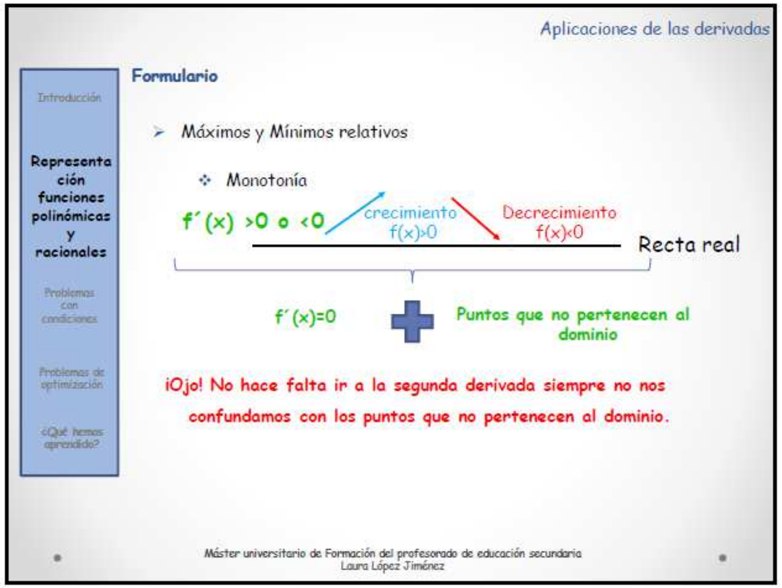
Por encima del eje X (y=0) f(x)>0

Recta real

Por debajo del eje X (y=0) f(x)<0

Puntos de corte con eje y=0 /f(x)=0 + Puntos que no pertenecen al dominio

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas y racionales

Problemas con condiciones

Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

Formulario

- Máximos y Mínimos relativos
  - Monotonía

f´(x) >0 o <0

crecimiento f(x)>0

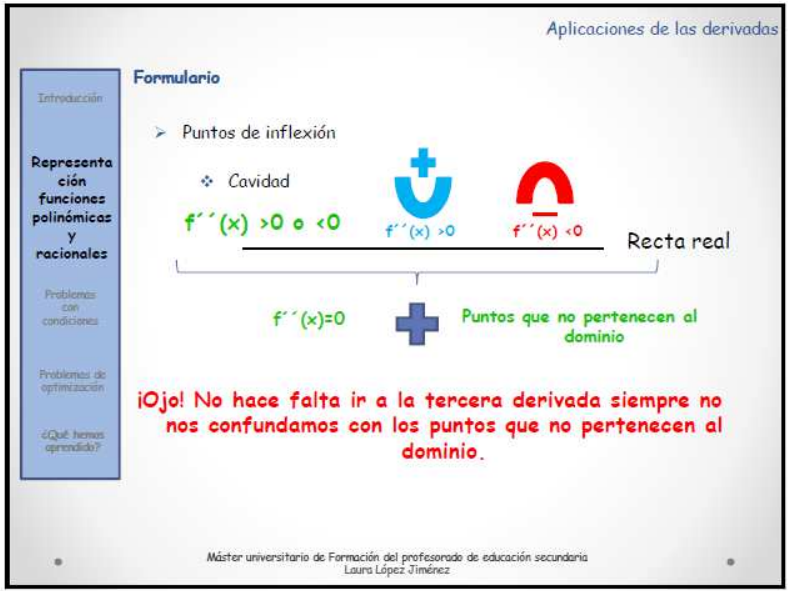
Decrecimiento f(x)<0

Recta real

f´(x)=0 + Puntos que no pertenecen al dominio

¡Ojo! No hace falta ir a la segunda derivada siempre no nos confundamos con los puntos que no pertenecen al dominio.

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas y racionales

Problemas con condiciones

Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

Formulario

- Puntos de inflexión
  - Cavidad

f´´(x) >0 o <0

f´´(x) >0

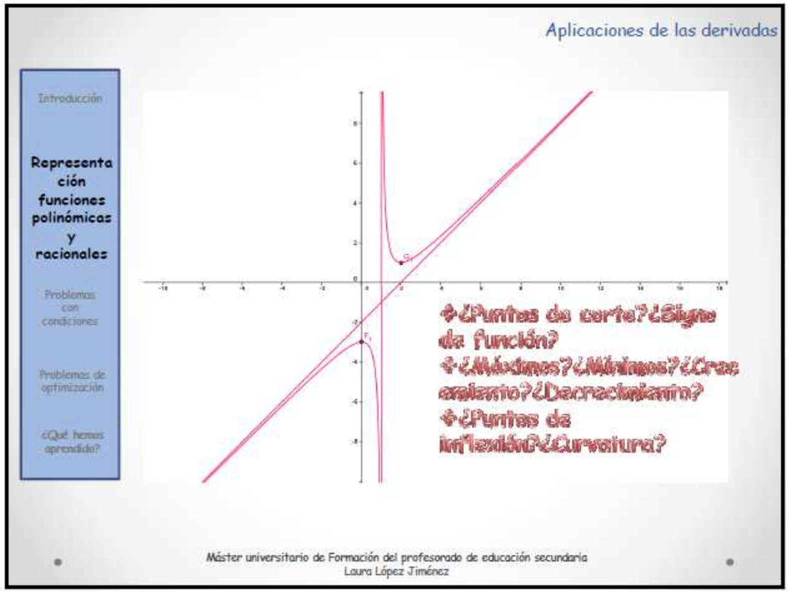
f´´(x) <0

Recta real

f´´(x)=0 + Puntos que no pertenecen al dominio

¡Ojo! No hace falta ir a la tercera derivada siempre no nos confundamos con los puntos que no pertenecen al dominio.

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas y racionales

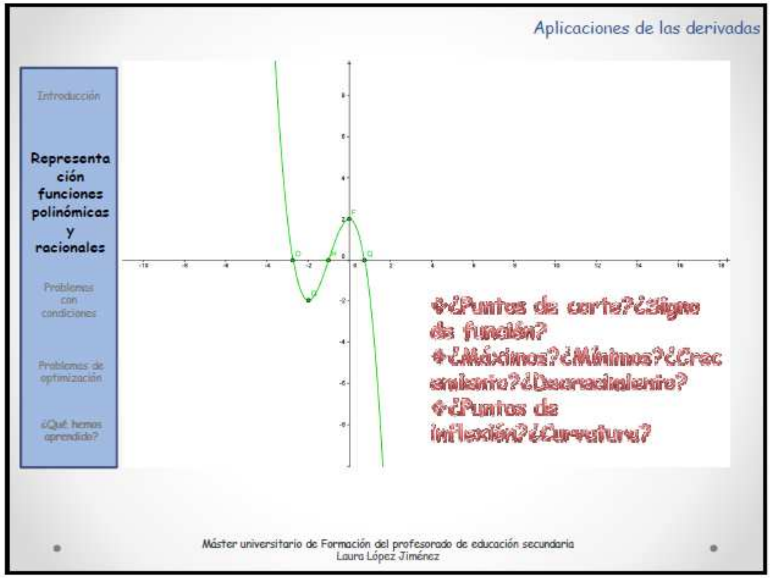
Problemas con condiciones

Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

- ¿Puntos de corte?¿Signo de función?
- ¿Máximos?¿Mínimos?¿Crecimiento?¿Decrecimiento?
- ¿Puntos de inflexión?¿Curvatura?

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas y racionales

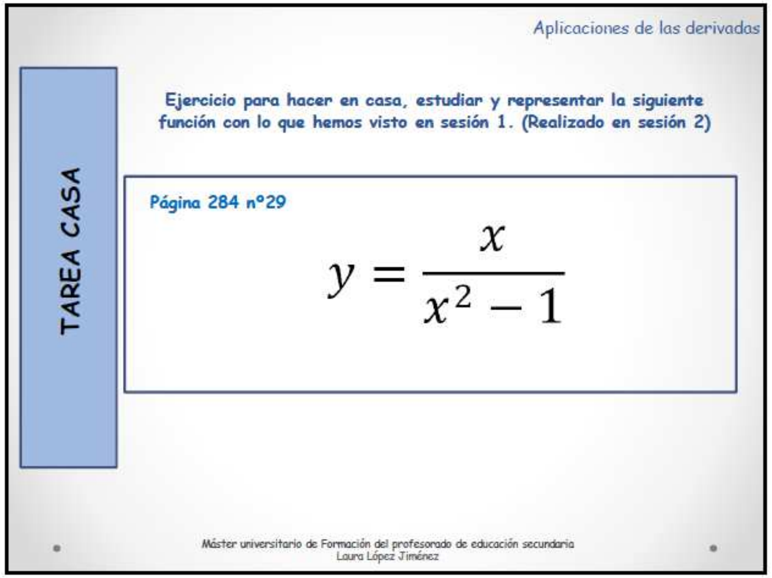
Problemas con condiciones

Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

❖¿Puntos de corte?¿Signo de función?
❖¿Máximos?¿Mínimos?¿Crecimiento?¿Decrecimiento?
❖¿Puntos de inflexión?¿Curvatura?

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

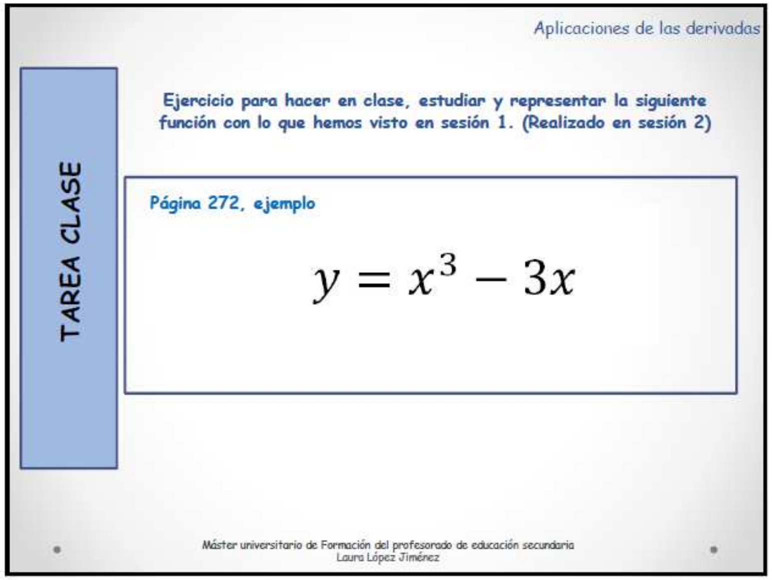
TAREA CASA

Ejercicio para hacer en casa, estudiar y representar la siguiente función con lo que hemos visto en sesión 1. (Realizado en sesión 2)

Página 284 nº29

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

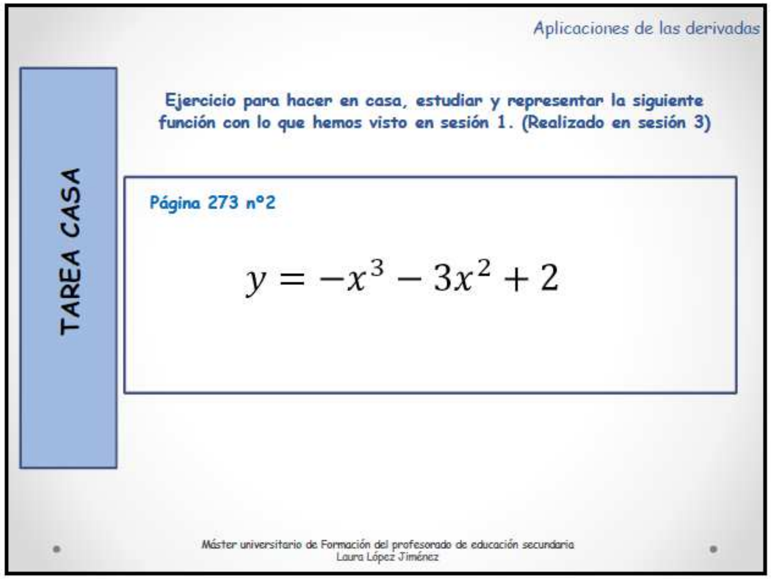
TAREA CLASE

Ejercicio para hacer en clase, estudiar y representar la siguiente función con lo que hemos visto en sesión 1. (Realizado en sesión 2)

Página 272, ejemplo

$$y = x^3 - 3x$$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

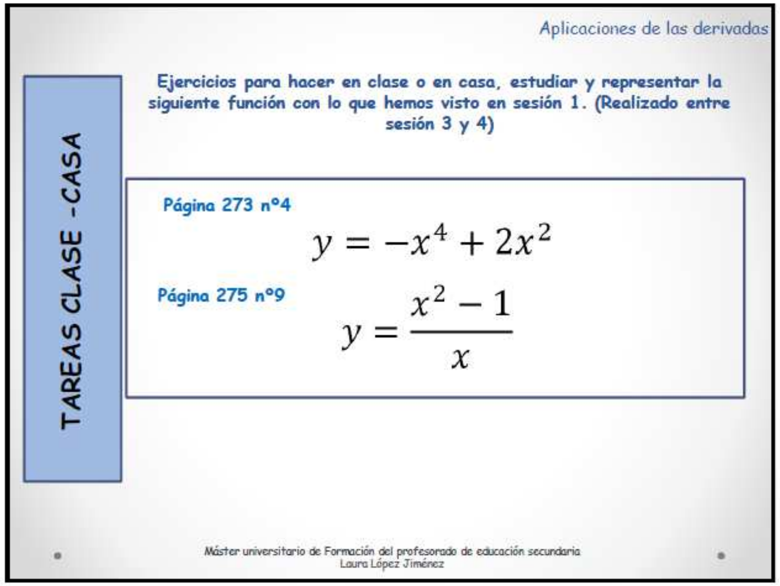
TAREA CASA

Ejercicio para hacer en casa, estudiar y representar la siguiente función con lo que hemos visto en sesión 1. (Realizado en sesión 3)

Página 273 nº2

$$y = -x^3 - 3x^2 + 2$$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

TAREAS CLASE -CASA

Ejercicios para hacer en clase o en casa, estudiar y representar la siguiente función con lo que hemos visto en sesión 1. (Realizado entre sesión 3 y 4)

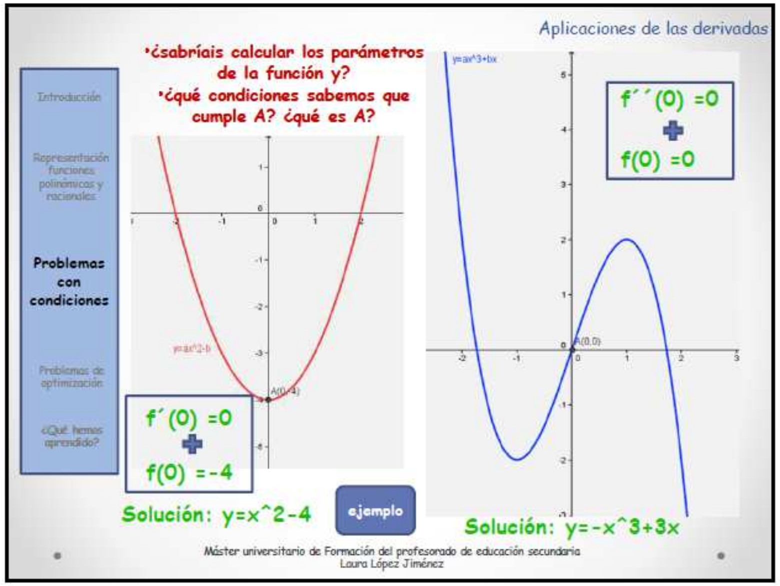
Página 273 nº4

$$y = -x^4 + 2x^2$$

Página 275 nº9

$$y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas y racionales

Problemas con condiciones

Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

•¿sabríais calcular los parámetros de la función y?
•¿qué condiciones sabemos que cumple A? ¿qué es A?

f´(0) =0
+
f(0) =-4

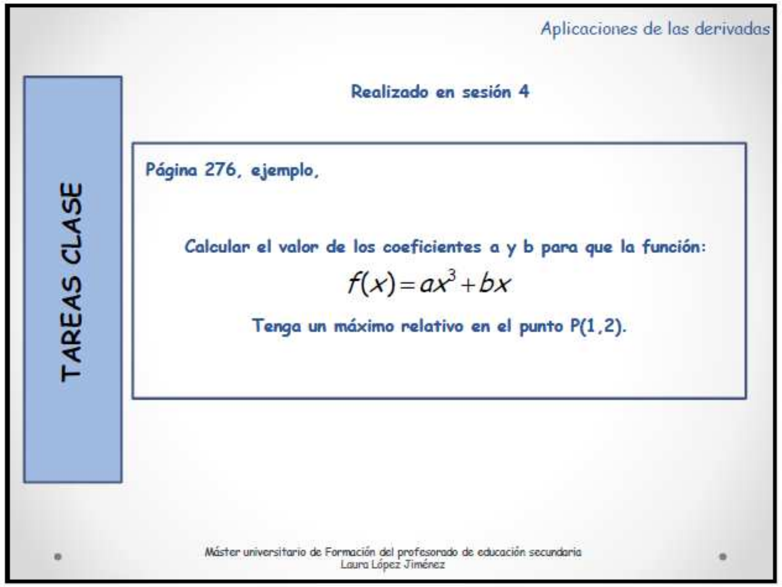
Solución: y=x^2-4

ejemplo

f´´(0) =0
+
f(0) =0

Solución: y=-x^3+3x

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

TAREAS CLASE

Realizado en sesión 4

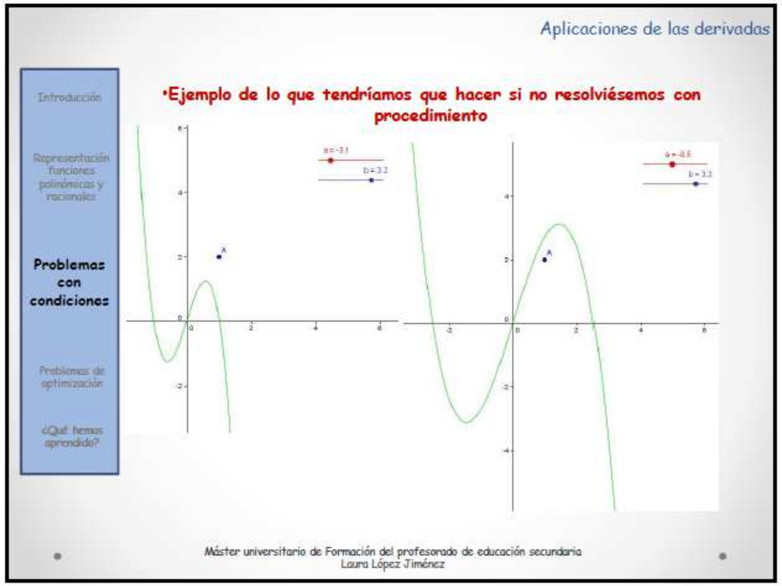
Página 276, ejemplo,

Calcular el valor de los coeficientes a y b para que la función:

$$f(x) = ax^3 + bx$$

Tenga un máximo relativo en el punto P(1,2).

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas y racionales

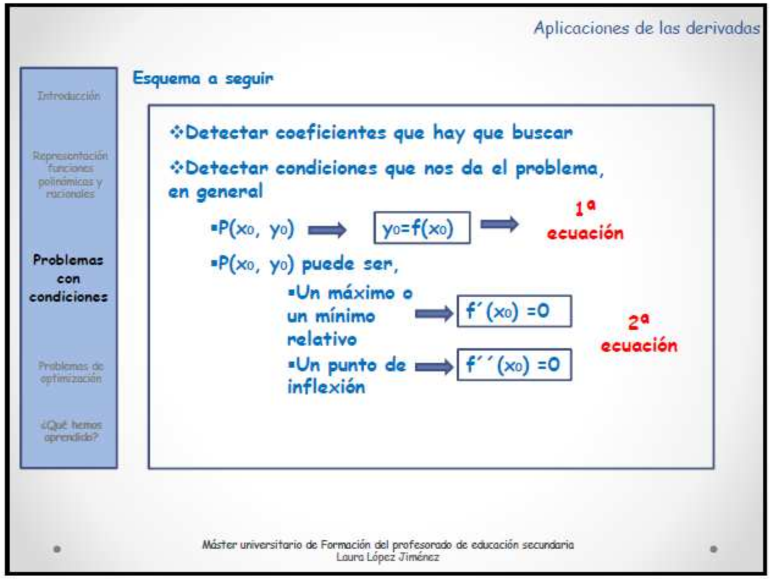
Problemas con condiciones

Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

•Ejemplo de lo que tendríamos que hacer si no resolviésemos con procedimiento

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas y racionales

Problemas con condiciones

Problemas de optimización

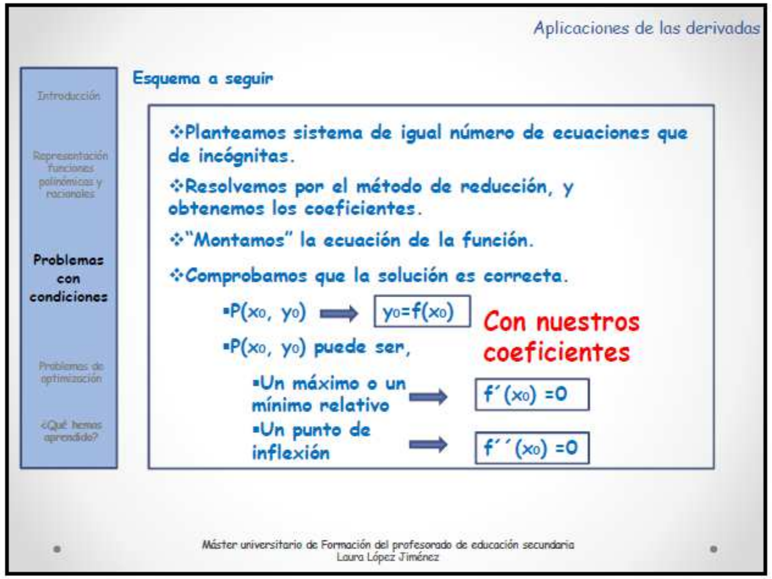
¿Qué hemos aprendido?

Esquema a seguir

- Detectar coeficientes que hay que buscar
- Detectar condiciones que nos da el problema, en general
  - $P(x_0, y_0) \Rightarrow \boxed{y_0=f(x_0)} \Rightarrow$ 1ª ecuación
  - $P(x_0, y_0)$ puede ser,
    - Un máximo o un mínimo relativo $\Rightarrow \boxed{f'(x_0)=0}$
    - Un punto de inflexión $\Rightarrow \boxed{f''(x_0)=0}$

    2ª ecuación

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas y racionales

Problemas con condiciones

Problemas de optimización

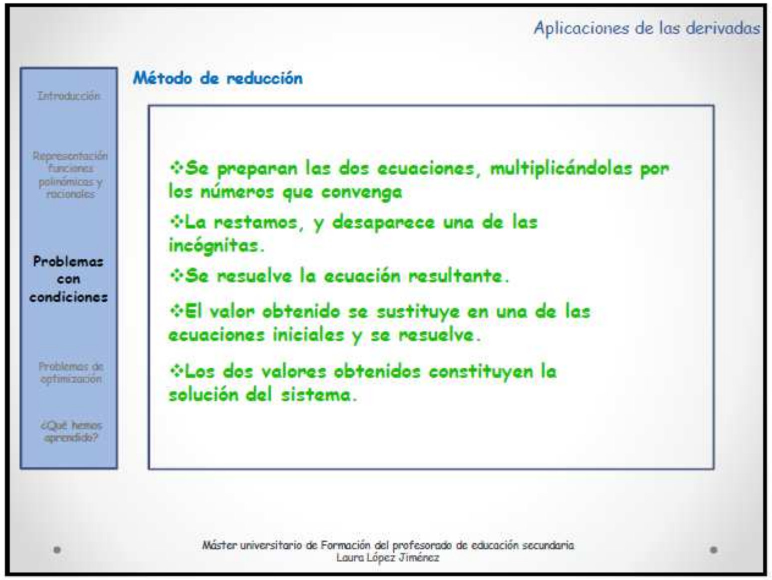
¿Qué hemos aprendido?

Esquema a seguir

- Planteamos sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas.
- Resolvemos por el método de reducción, y obtenemos los coeficientes.
- "Montamos" la ecuación de la función.
- Comprobamos que la solución es correcta.
  - $P(x_0, y_0) \Rightarrow \boxed{y_0=f(x_0)}$
  - $P(x_0, y_0)$ puede ser,
    - Un máximo o un mínimo relativo $\Rightarrow \boxed{f'(x_0)=0}$
    - Un punto de inflexión $\Rightarrow \boxed{f''(x_0)=0}$

Con nuestros coeficientes

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas y racionales

Problemas con condiciones

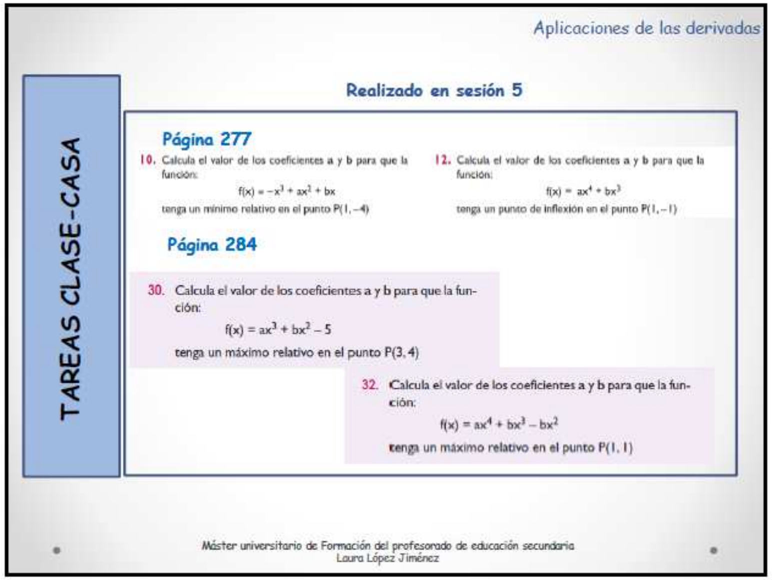
Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

Método de reducción

- Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga
- La restamos, y desaparece una de las incógnitas.
- Se resuelve la ecuación resultante.
- El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.
- Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

TAREAS CLASE-CASA

Realizado en sesión 5

Página 277

10. Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función:

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$$

tenga un mínimo relativo en el punto P(1, –4)

12. Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función:

$$f(x) = ax^4 + bx^3$$

tenga un punto de inflexión en el punto P(1, –1)

Página 284

30. Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 5$$

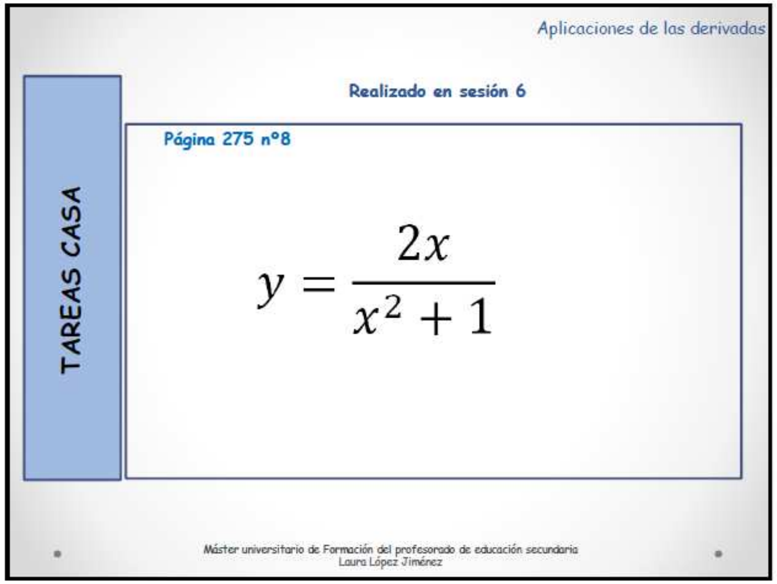
tenga un máximo relativo en el punto P(3, 4)

32. Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 - bx^2$$

tenga un máximo relativo en el punto P(1, 1)

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

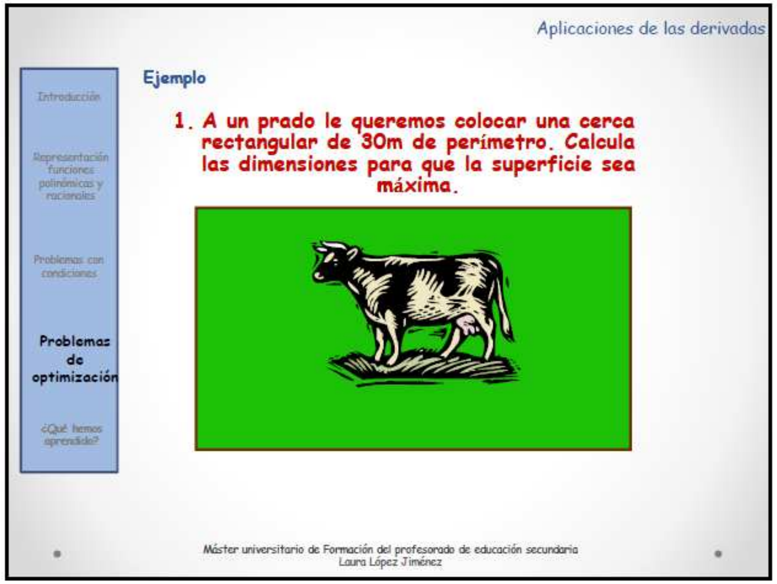
TAREAS CASA

Realizado en sesión 6

Página 275 nº8

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas y racionales

Problemas con condiciones

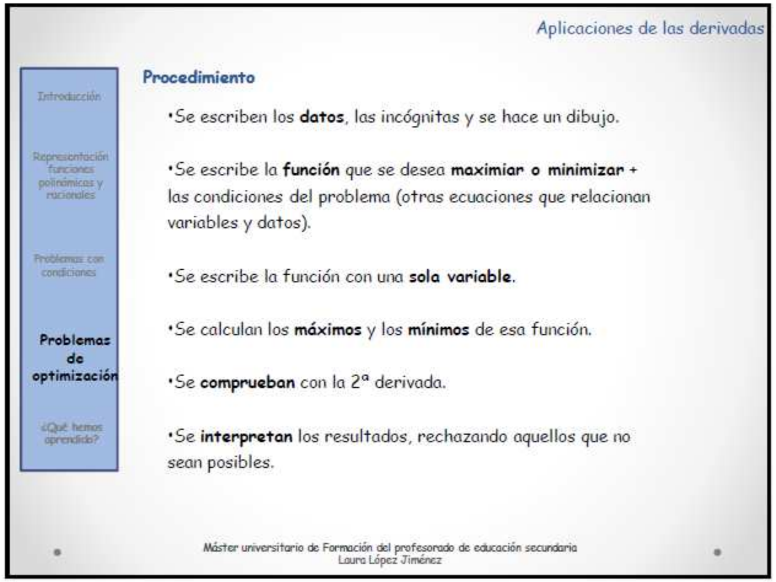
Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

Ejemplo

1. A un prado le queremos colocar una cerca rectangular de 30m de perímetro. Calcula las dimensiones para que la superficie sea máxima.

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas y racionales

Problemas con condiciones

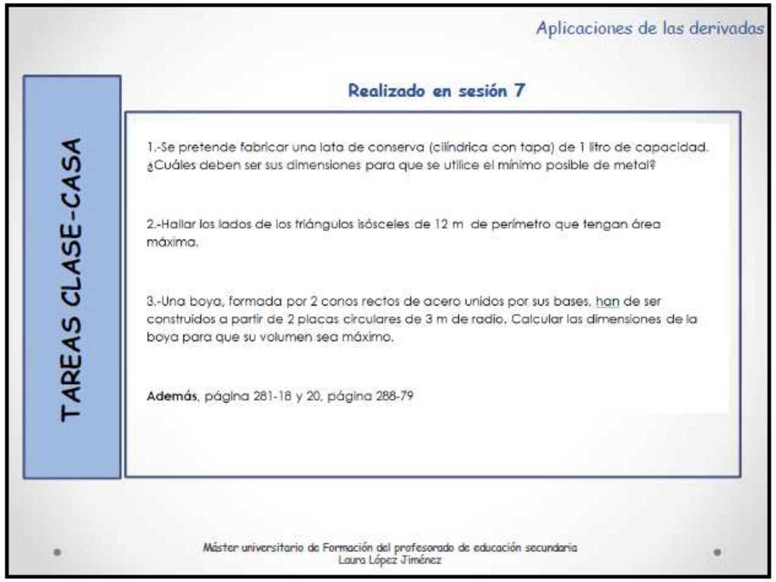
Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

Procedimiento

- Se escriben los **datos**, las incógnitas y se hace un dibujo.
- Se escribe la **función** que se desea **maximiar o minimizar** + las condiciones del problema (otras ecuaciones que relacionan variables y datos).
- Se escribe la función con una **sola variable**.
- Se calculan los **máximos** y los **mínimos** de esa función.
- Se **comprueban** con la 2ª derivada.
- Se **interpretan** los resultados, rechazando aquellos que no sean posibles.

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

TAREAS CLASE-CASA

Realizado en sesión 7

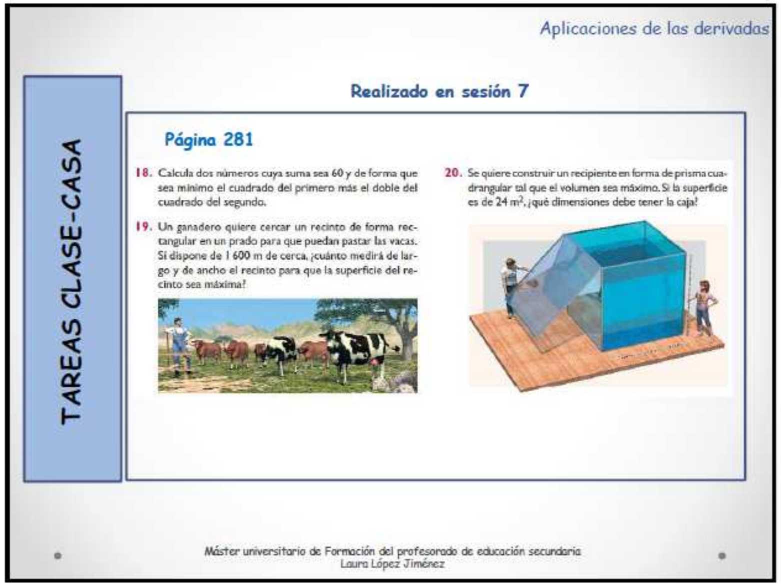
1.-Se pretende fabricar una lata de conserva (cilíndrica con tapa) de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal?

2.-Hallar los lados de los triángulos isósceles de 12 m de perímetro que tengan área máxima.

3.-Una boya, formada por 2 conos rectos de acero unidos por sus bases, han de ser construidos a partir de 2 placas circulares de 3 m de radio. Calcular las dimensiones de la boya para que su volumen sea máximo.

Además, página 281-18 y 20, página 288-79

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

TAREAS CLASE-CASA

Realizado en sesión 7

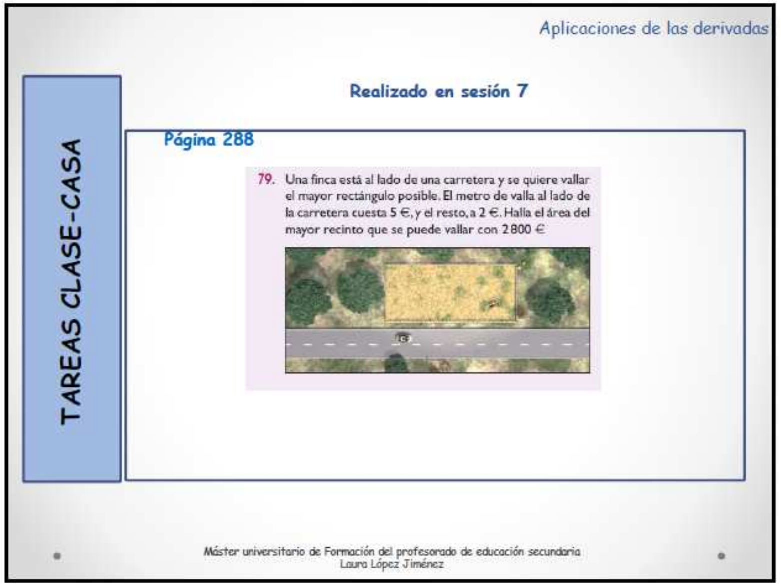
Página 281

18. Calcula dos números cuya suma sea 60 y de forma que sea mínimo el cuadrado del primero más el doble del cuadrado del segundo.

19. Un ganadero quiere cercar un recinto de forma rectangular en un prado para que puedan pastar las vacas. Si dispone de 1 600 m de cerca, ¿cuánto medirá de largo y de ancho el recinto para que la superficie del recinto sea máxima?

20. Se quiere construir un recipiente en forma de prisma cuadrangular tal que el volumen sea máximo. Si la superficie es de 24 m^2, ¡qué dimensiones debe tener la caja!

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

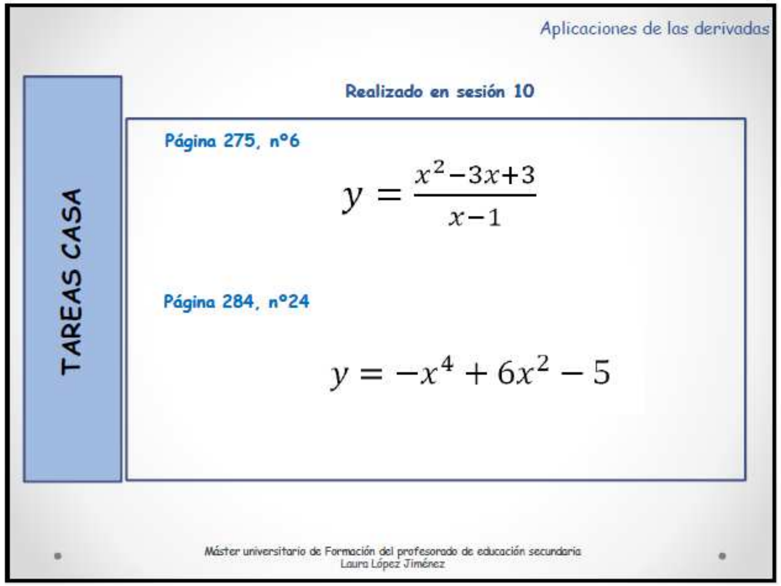
TAREAS CLASE-CASA

Realizado en sesión 7

Página 288

79. Una finca está al lado de una carretera y se quiere vallar el mayor rectángulo posible. El metro de valla al lado de la carretera cuesta 5 €, y el resto, a 2 €. Halla el área del mayor recinto que se puede vallar con 2800 €

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

TAREAS CASA

Realizado en sesión 10

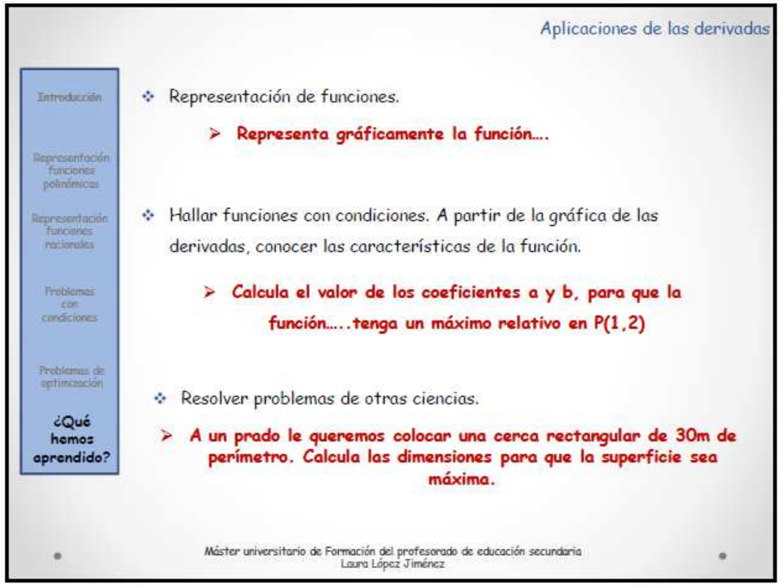
Página 275, nº6

$$y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$$

Página 284, nº24

$$y = -x^4 + 6x^2 - 5$$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Aplicaciones de las derivadas

Introducción

Representación funciones polinómicas

Representación funciones racionales

Problemas con condiciones

Problemas de optimización

¿Qué hemos aprendido?

- Representación de funciones.
  - **Representa gráficamente la función….**
- Hallar funciones con condiciones. A partir de la gráfica de las derivadas, conocer las características de la función.
  - **Calcula el valor de los coeficientes a y b, para que la función…..tenga un máximo relativo en P(1,2)**
- Resolver problemas de otras ciencias.
  - **A un prado le queremos colocar una cerca rectangular de 30m de perímetro. Calcula las dimensiones para que la superficie sea máxima.**

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez

C. Material didáctico. Repaso

Cuestionario

GRUPO:

Integrantes:

Preguntas:

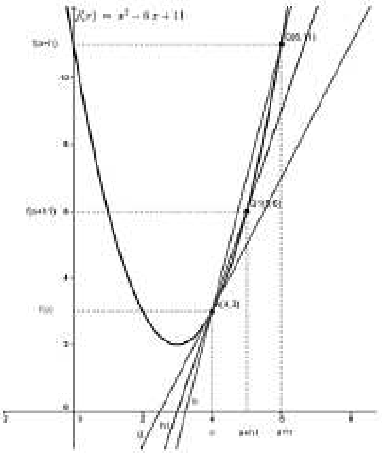
1. Interpretar la expresión:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. Calcular f(x+h) para $f(x) = 2 - x^2$

3. Escribir la expresión de la derivada en un punto:

4. Describir lo que está pasando. ¿Sabéis obtener las ecuaciones de las tres rectas? Escribirlas.



$f(x) = x^2 - 6x + 11$

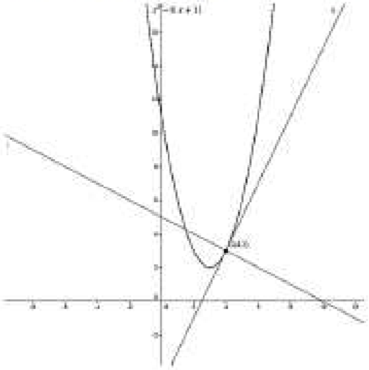
$Q(6,11)$

$Q_1(5,6)$

$A(4,3)$

Cuestionario

5. Identificar las rectas tangente y normal en el punto dado de la gráfica de la función anterior y escribir sus ecuaciones.



$$f(x) = x^2 - 6x + 11$$

$$G(4,3)$$

6. Para acostumbraros a operar con "letras" y exponenciales...obtener las funciones derivadas de las siguientes funciones desarrollándolas como derivadas de exponenciales:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{u^n}}$$

$$\boldsymbol{y = \sqrt[n]{u}}$$

7. En las tablas de las derivadas, hacemos uso de la letra "u" para designar a funciones genéricas. Poner ejemplos de "u" para cada tipo de función,

- polinómicas,
- racionales
- irracionales,
- exponencial,
- logarítmica y,
- trigonométricas

Cuestionario

8. Como hemos observado problemas a la hora de operar, tenéis que señalar en cada una de las funciones del apartado a) qué sería "u" y que sería "v" y hallar su función derivada, y en el apartado b) quitar los paréntesis y operar,u operar con fracciones cuando corresponda.

a)

$$y = \frac{3(x^2+5)}{4}$$

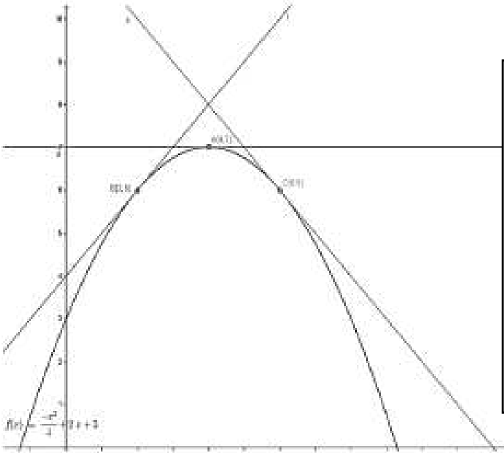
$$y = -(x^2+1)sen^2(2x)$$

b)

$$y' = \frac{2(x^2-2)-(2x+3)2x}{(x^2-2)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{senx - xLxcosx}{x}}{sen^2x}$$

9. ¿Qué abscisa maximiza la función dada?Calcular las rectas tangentes en los puntos (2,6) y (6,6) ¿Qué signo tienen sus pendientes? En el punto (4,7) ¿cuál sería la ecuación de la recta tangente?



$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + 2x + 3$$

$B(2,6)$

$A(4,7)$

$C(6,6)$

10. ¿Para qué sirven cada uno de los 4 procedimientos? Ponerel número que corresponda a cada una de las siguientes opciones:

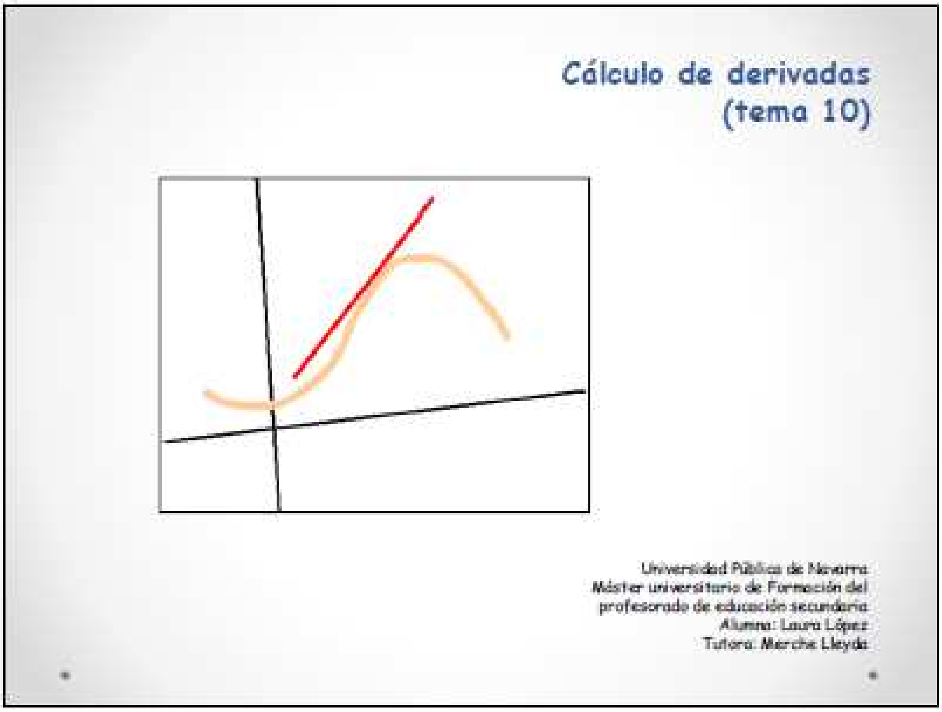
Estudio de Curvatura

Obtención Máximos y Mínimos

Estudio de Monotonía

Obtención de Puntos de inflexión

Cuestionario en powerpoint



Cálculo de derivadas (tema 10)

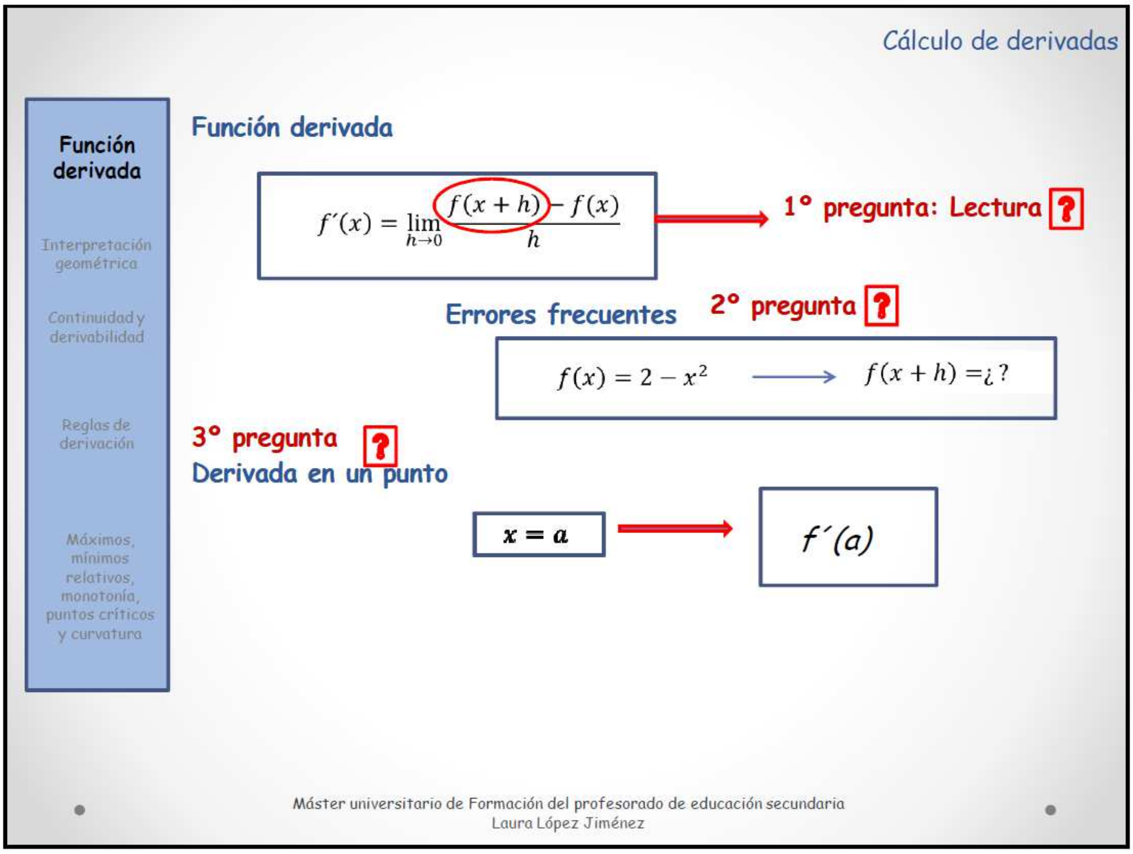
Universidad Pública de Navarra
Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Alumna: Laura López
Tutora: Merche Lleyda

Índice

- Función derivada
- Interpretación gráfica
- Reglas de derivación
- Máximos, mínimos relativos, monotonía, puntos críticos y curvatura

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez

Cuestionario en powerpoint



Cálculo de derivadas

Función derivada

Interpretación geométrica

Continuidad y derivabilidad

Reglas de derivación

Máximos, mínimos relativos, monotonía, puntos críticos y curvatura

Función derivada

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1° pregunta: Lectura ?

Errores frecuentes

2° pregunta ?

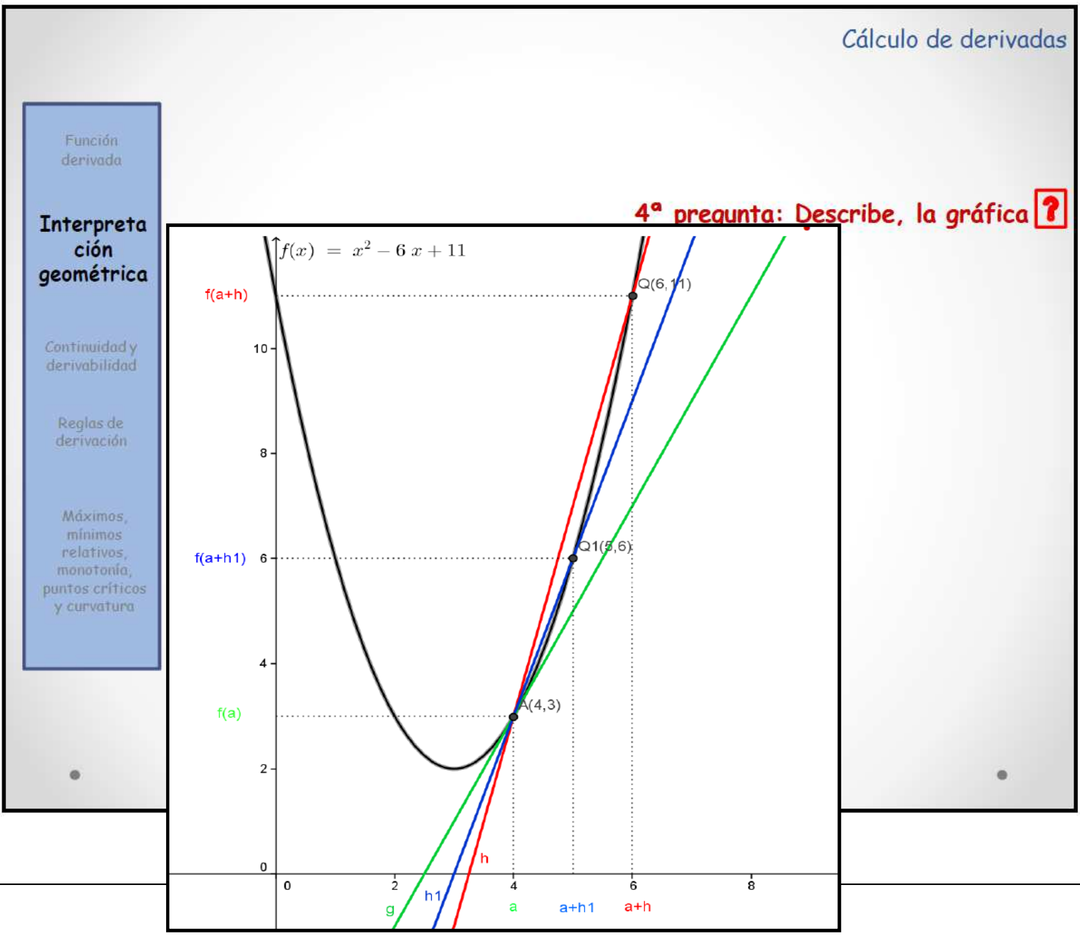
$$f(x) = 2 - x^2 \longrightarrow f(x+h) = ¿?$$

3° pregunta ?

Derivada en un punto

$$\boxed{x = a} \longrightarrow \boxed{f'(a)}$$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Cálculo de derivadas

Función derivada

Interpretación geométrica

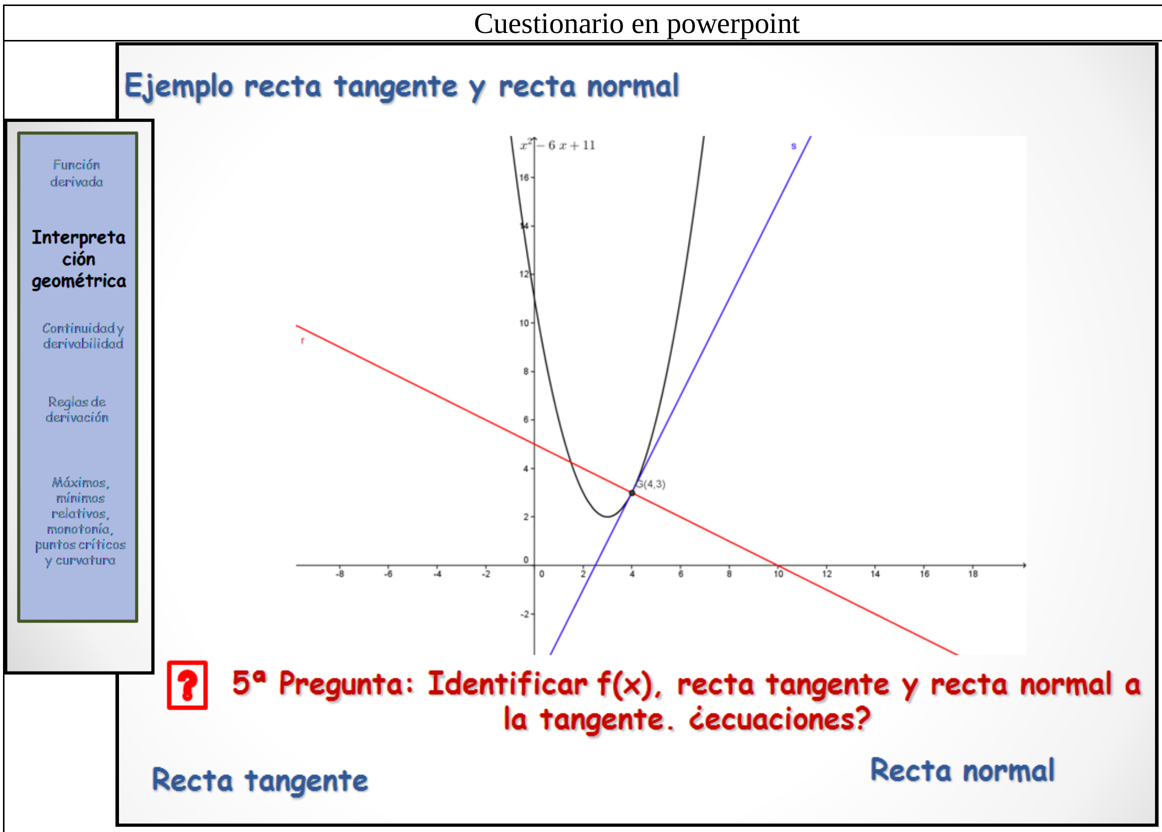
Continuidad y derivabilidad

Reglas de derivación

Máximos, mínimos relativos, monotonía, puntos críticos y curvatura

4ª pregunta: Describe, la gráfica ?

Cuestionario en powerpoint



Ejemplo recta tangente y recta normal

Función derivada

Interpretación geométrica

Continuidad y derivabilidad

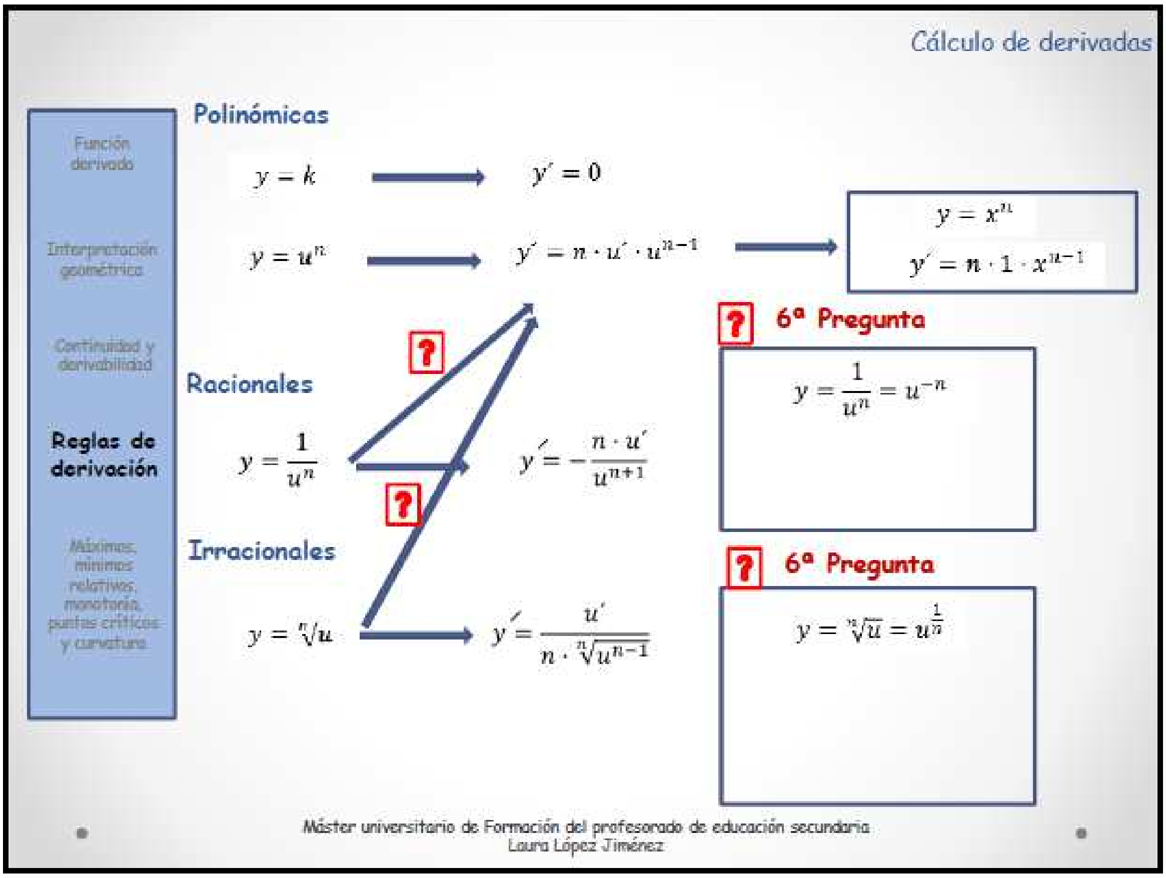
Reglas de derivación

Máximos, mínimos relativos, monotonía, puntos críticos y curvatura

? 5ª Pregunta: Identificar f(x), recta tangente y recta normal a la tangente. ¿ecuaciones?

Recta tangente

Recta normal



Cálculo de derivadas

Función derivada

Interpretación geométrica

Continuidad y derivabilidad

Reglas de derivación

Máximos, mínimos relativos, monotonía, puntos críticos y curvatura

Polinómicas

$y = k \longrightarrow y' = 0$

$y = u^n \longrightarrow y' = n \cdot u' \cdot u^{n-1} \longrightarrow$ $y = x^n$ $y' = n \cdot 1 \cdot x^{n-1}$

Racionales

$y = \frac{1}{u^n} \longrightarrow y' = -\frac{n \cdot u'}{u^{n+1}}$

Irracionales

$y = \sqrt[n]{u} \longrightarrow y' = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$

?

?

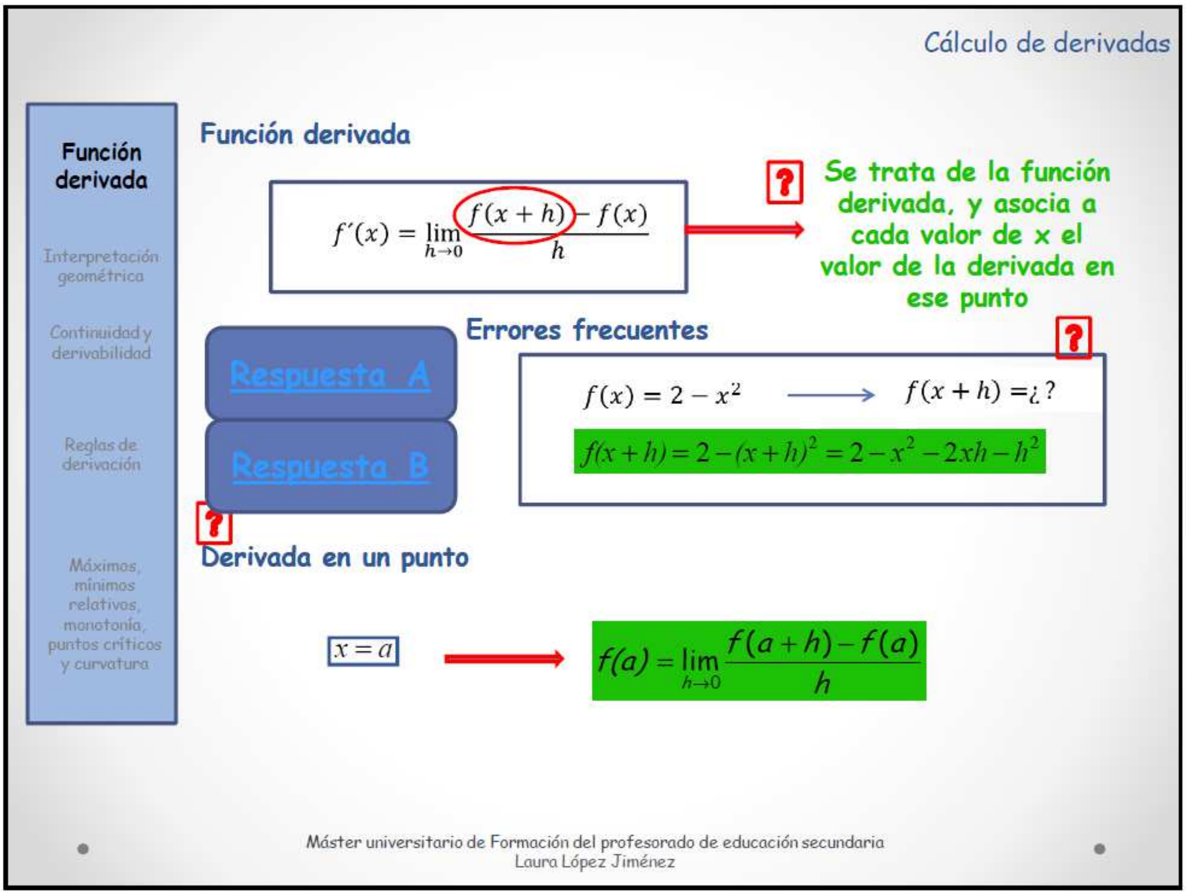
? 6ª Pregunta

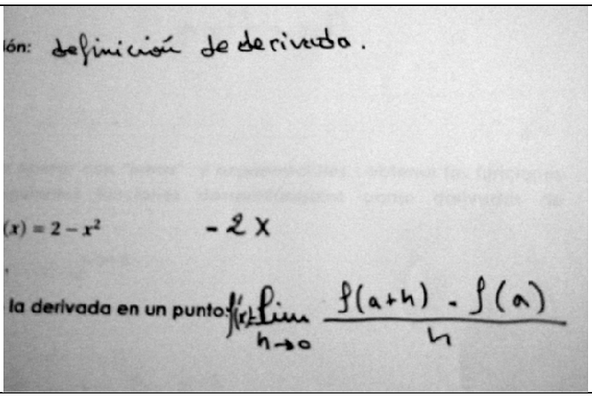
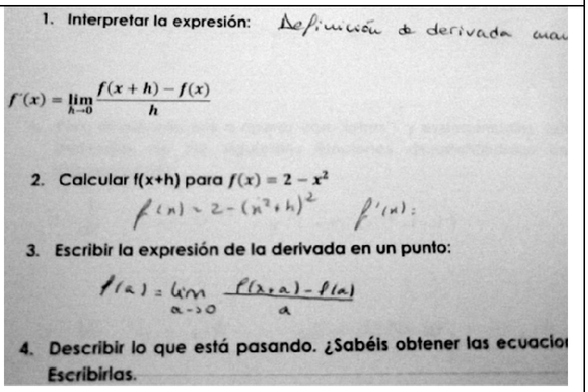
$y = \frac{1}{u^n} = u^{-n}$

? 6ª Pregunta

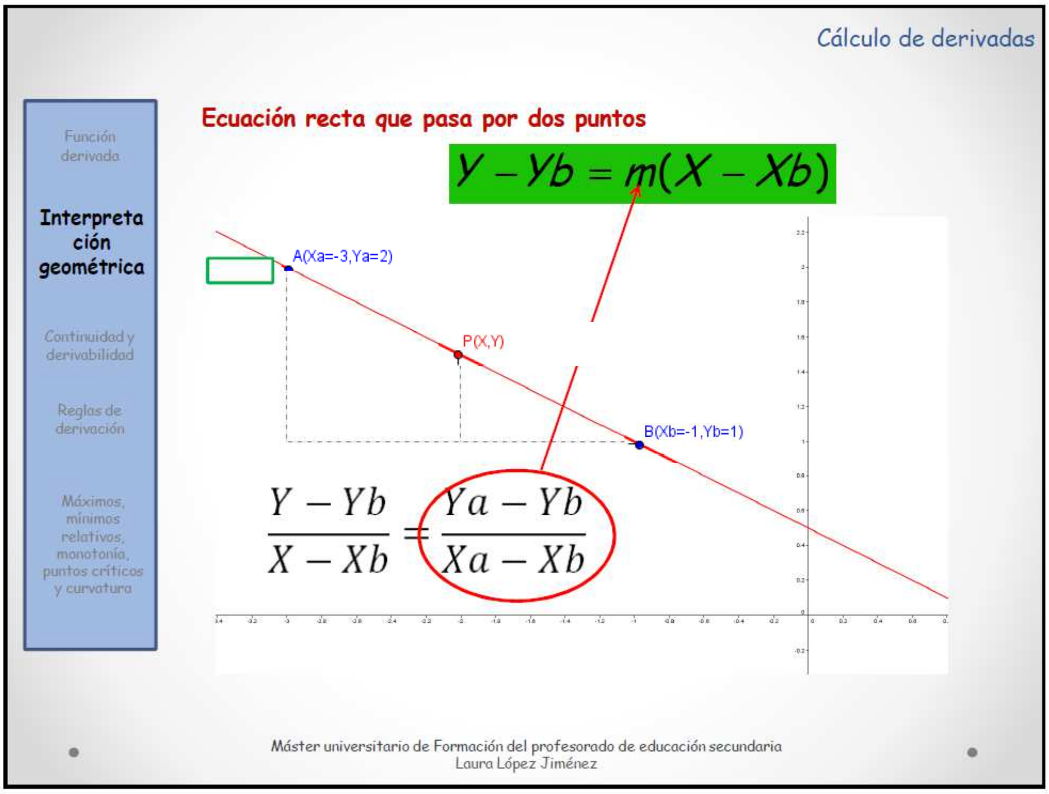
$y = \sqrt[n]{u} = u^{\frac{1}{n}}$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez

Respuestas
 Cálculo de derivadas **Función derivada** Interpretación geométrica Continuidad y derivabilidad Reglas de derivación Máximos, mínimos relativos, monotonía, puntos críticos y curvatura **Función derivada** $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$? Se trata de la función derivada, y asocia a cada valor de x el valor de la derivada en ese punto Respuesta A Respuesta B **Errores frecuentes** ? $f(x) = 2 - x^2 \longrightarrow f(x+h) = ¿?$ $f(x+h) = 2-(x+h)^2 = 2 - x^2 - 2xh - h^2$? **Derivada en un punto** $\boxed{x=a} \longrightarrow f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria Laura López Jiménez

Respuesta A	Respuesta B
 ión: definición de derivada. $(x) = 2 - x^2$ $-2x$ la derivada en un punto: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	 1. Interpretar la expresión: Definición de derivada cua $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 2. Calcular f(x+h) para $f(x) = 2 - x^2$ $f(x) = 2-(x^2+h)^2$ $f'(x):$ 3. Escribir la expresión de la derivada en un punto: $f(a) = \lim_{a\to 0} \frac{f(x+a)-f(a)}{a}$ 4. Describir lo que está pasando. ¿Sabéis obtener las ecuacio Escribirlas.

Respuestas



Cálculo de derivadas

Función derivada

Interpretación geométrica

Continuidad y derivabilidad

Reglas de derivación

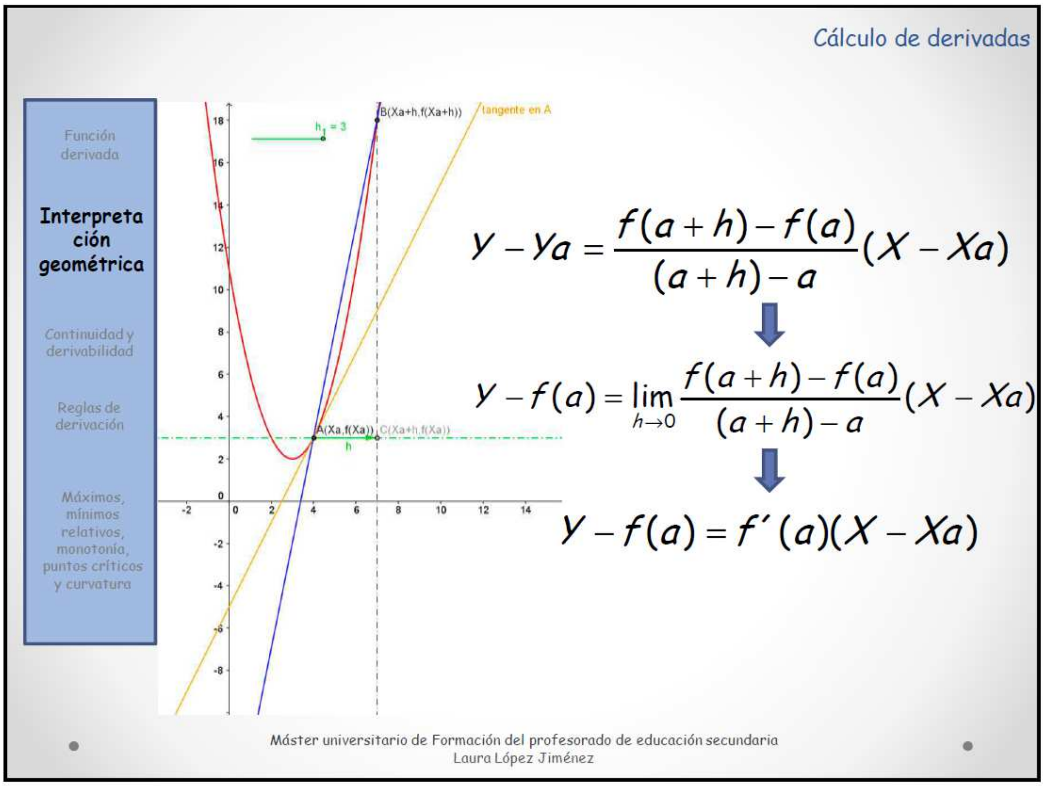
Máximos, mínimos relativos, monotonía, puntos críticos y curvatura

Ecuación recta que pasa por dos puntos

$$Y - Yb = m(X - Xb)$$

$$\frac{Y - Yb}{X - Xb} = \frac{Ya - Yb}{Xa - Xb}$$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Cálculo de derivadas

Función derivada

Interpretación geométrica

Continuidad y derivabilidad

Reglas de derivación

Máximos, mínimos relativos, monotonía, puntos críticos y curvatura

$$y - ya = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}(X - Xa)$$

$$\Downarrow$$

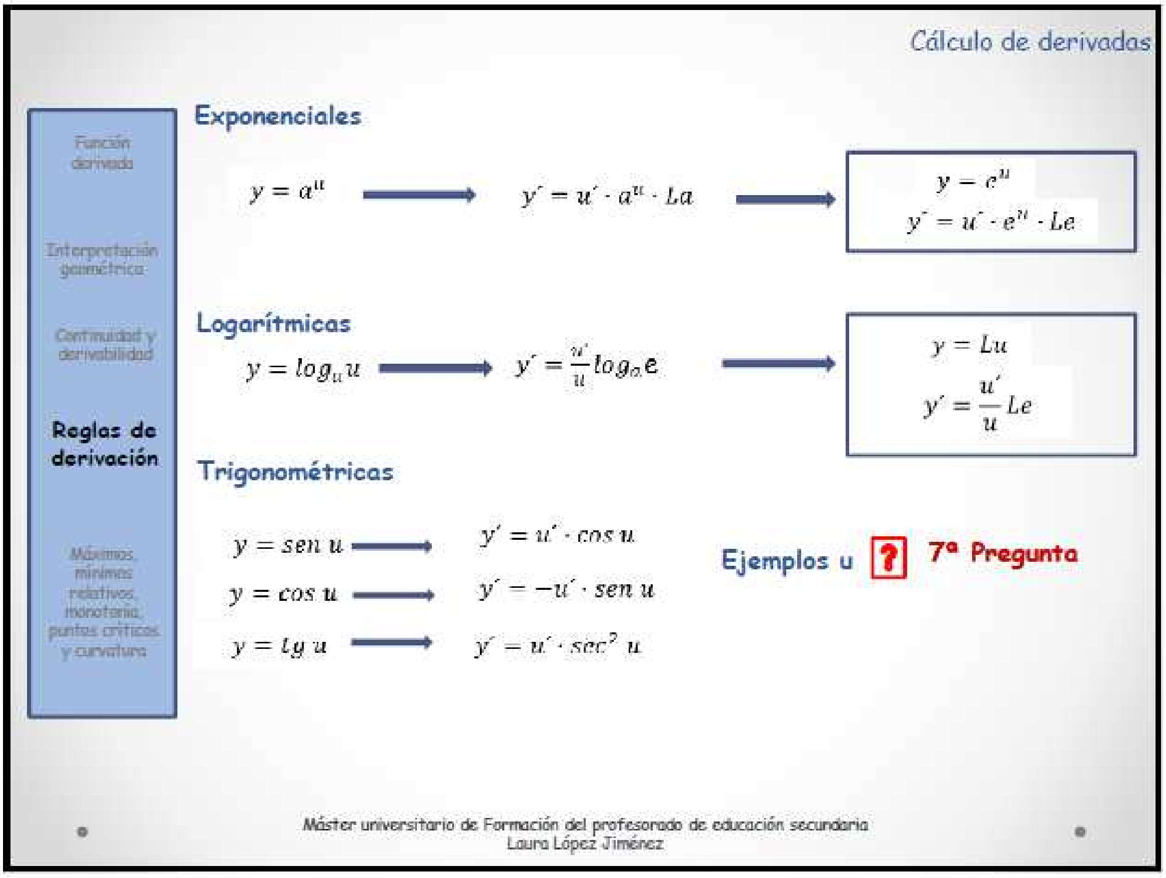
$$y - f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}(X - Xa)$$

$$\Downarrow$$

$$y - f(a) = f'(a)(X - Xa)$$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez

Cuestionario en powerpoint



Cálculo de derivadas

Función derivada

Interpretación geométrica

Continuidad y derivabilidad

Reglas de derivación

Máximos, mínimos relativos, monotonía, puntos críticos y curvatura

Exponenciales

$y = a^u \longrightarrow y' = u' \cdot a^u \cdot La \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} y = e^u \\ y' = u' \cdot e^u \cdot Le \end{array}}$

Logarítmicas

$y = log_u u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u} log_a e \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} y = Lu \\ y' = \frac{u'}{u} Le \end{array}}$

Trigonométricas

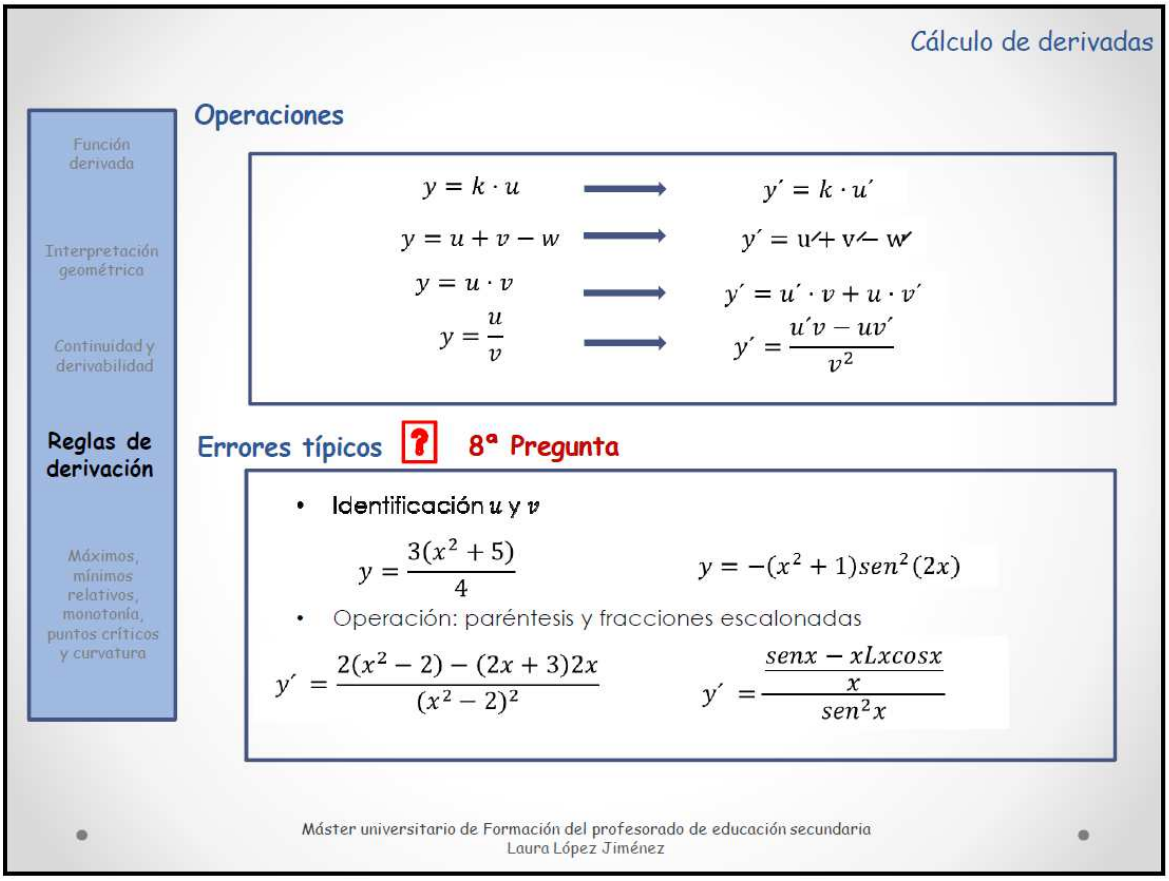
$y = sen\,u \longrightarrow y' = u' \cdot cos\,u$

$y = cos\,u \longrightarrow y' = -u' \cdot sen\,u$

$y = tg\,u \longrightarrow y' = u' \cdot sec^2\,u$

Ejemplos u ? 7ª Pregunta

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Cálculo de derivadas

Función derivada

Interpretación geométrica

Continuidad y derivabilidad

Reglas de derivación

Máximos, mínimos relativos, monotonía, puntos críticos y curvatura

Operaciones

$y = k \cdot u \longrightarrow y' = k \cdot u'$

$y = u + v - w \longrightarrow y' = u' + v' - w'$

$y = u \cdot v \longrightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$y = \frac{u}{v} \longrightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Errores típicos ? 8ª Pregunta

- Identificación u y v

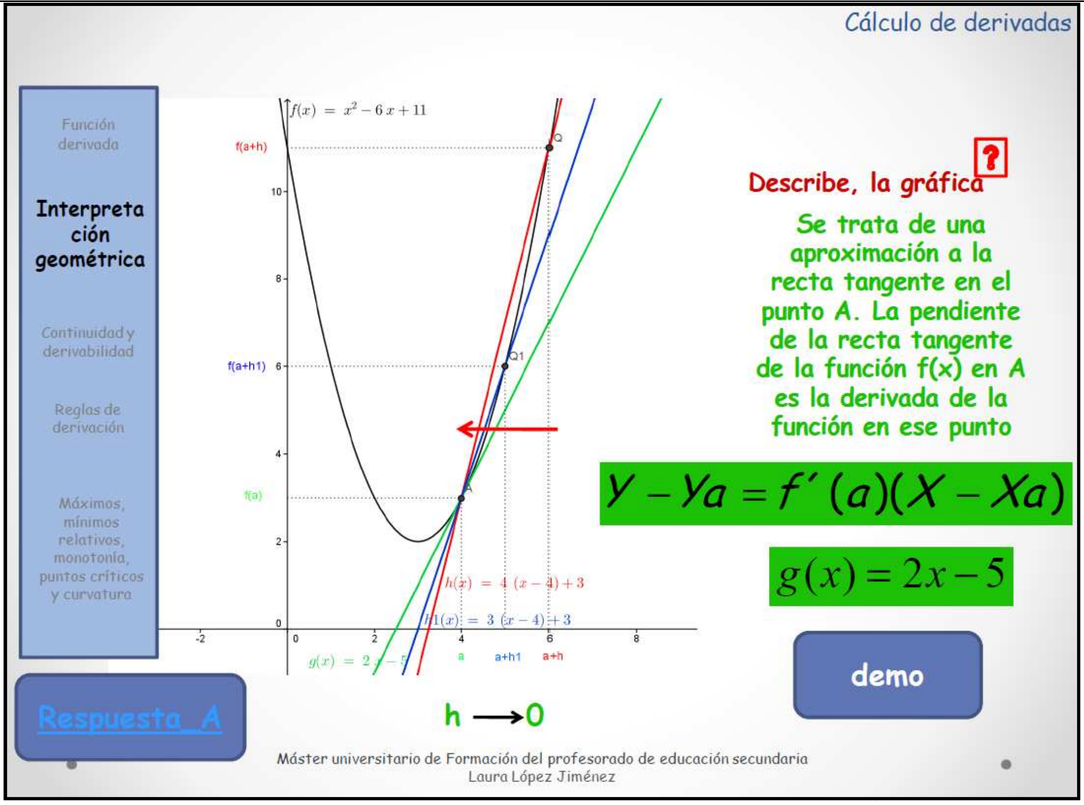
$y = \frac{3(x^2 + 5)}{4}$ $\quad y = -(x^2 + 1)sen^2(2x)$

- Operación: paréntesis y fracciones escalonadas

$y' = \frac{2(x^2 - 2) - (2x + 3)2x}{(x^2 - 2)^2}$ $\quad y' = \frac{\frac{senx - xLxcosx}{x}}{sen^2x}$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez

Respuestas



Cálculo de derivadas

Interpretación geométrica

Describe, la gráfica

Se trata de una aproximación a la recta tangente en el punto A. La pendiente de la recta tangente de la función f(x) en A es la derivada de la función en ese punto

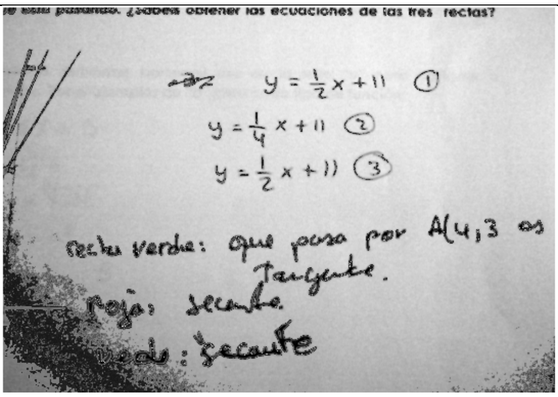
$$Y - Ya = f'(a)(X - Xa)$$

$$g(x) = 2x - 5$$

$h \longrightarrow 0$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez

Respuesta A



está pasando. ¿Sabéis obtener las ecuaciones de las tres rectas?

$y = \frac{1}{2}x + 11$ ①

$y = \frac{1}{4}x + 11$ ②

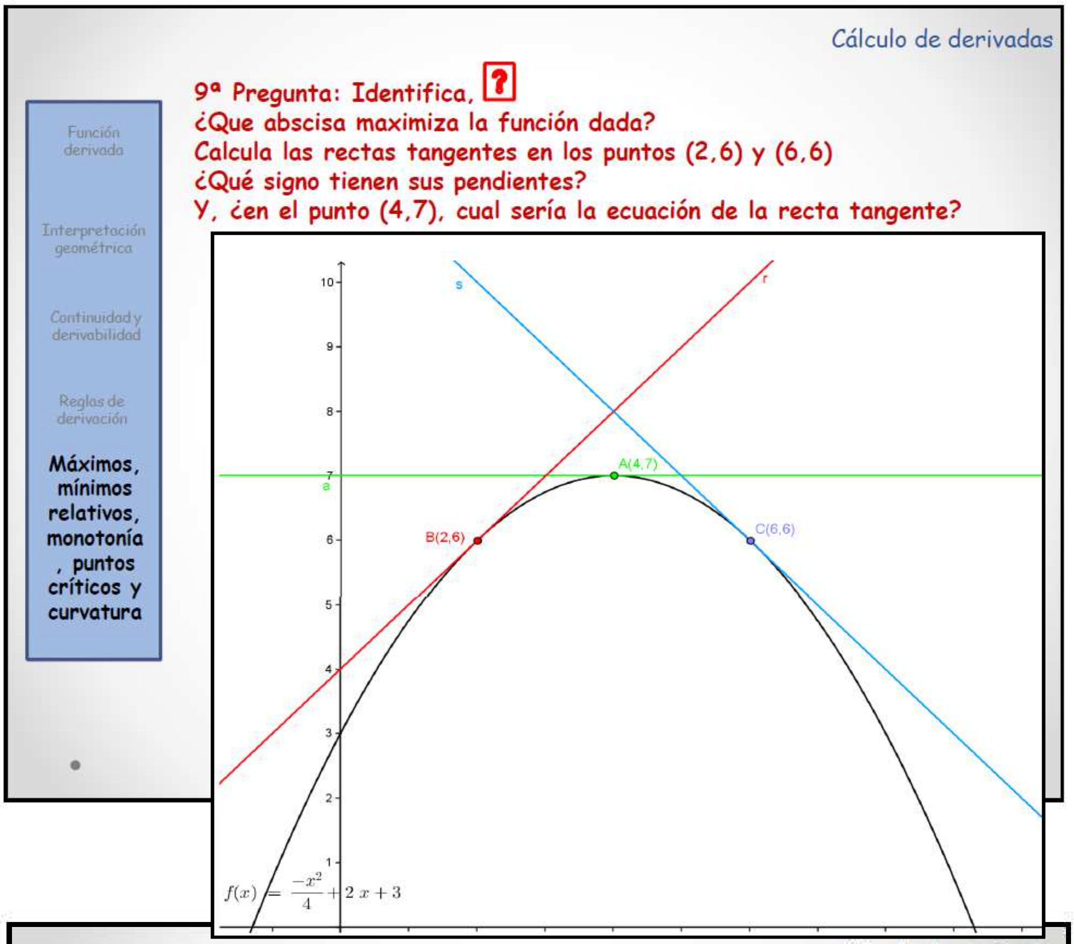
$y = \frac{1}{2}x + 11$ ③

recta verde: que pasa por A(4,3 es Tangente.

roja: secante.

verde: secante

Cuestionario en powerpoint



Cálculo de derivadas

Función derivada

Interpretación geométrica

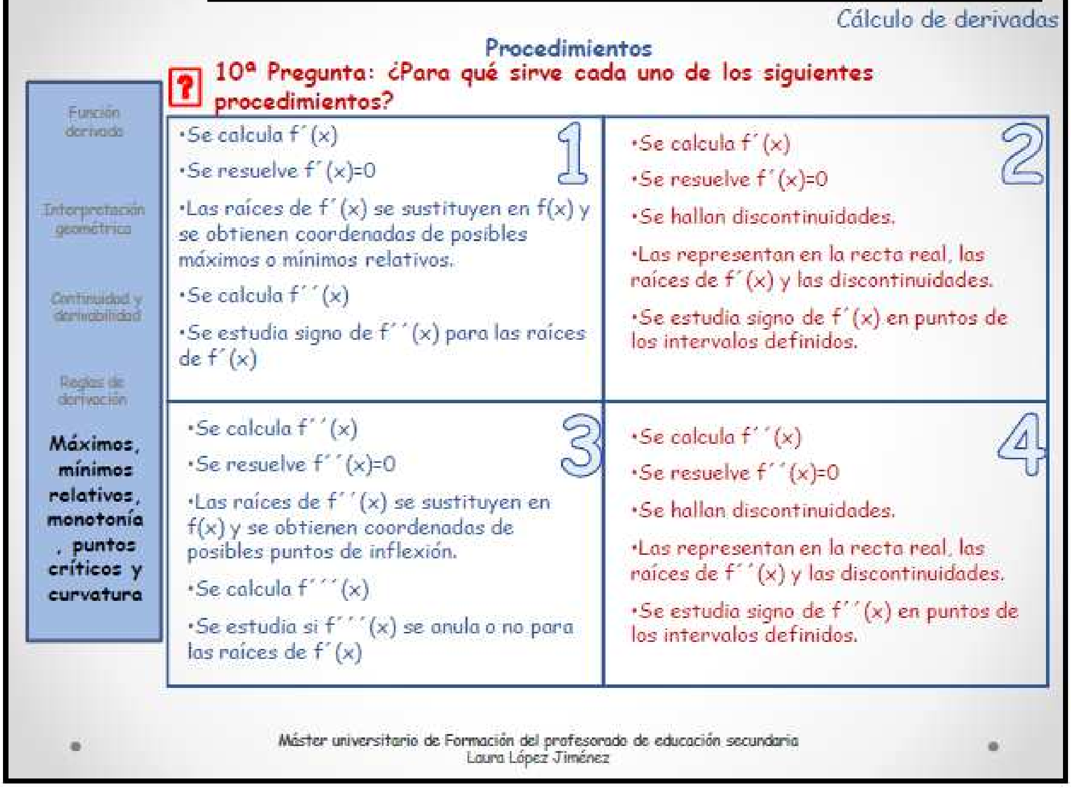
Continuidad y derivabilidad

Reglas de derivación

Máximos, mínimos relativos, monotonía , puntos críticos y curvatura

9ª Pregunta: Identifica, ?
¿Que abscisa maximiza la función dada?
Calcula las rectas tangentes en los puntos (2,6) y (6,6)
¿Qué signo tienen sus pendientes?
Y, ¿en el punto (4,7), cual sería la ecuación de la recta tangente?

$f(x) = \frac{-x^2}{4} + 2\,x + 3$



Cálculo de derivadas

Función derivada

Interpretación geométrica

Continuidad y derivabilidad

Reglas de derivación

Máximos, mínimos relativos, monotonía , puntos críticos y curvatura

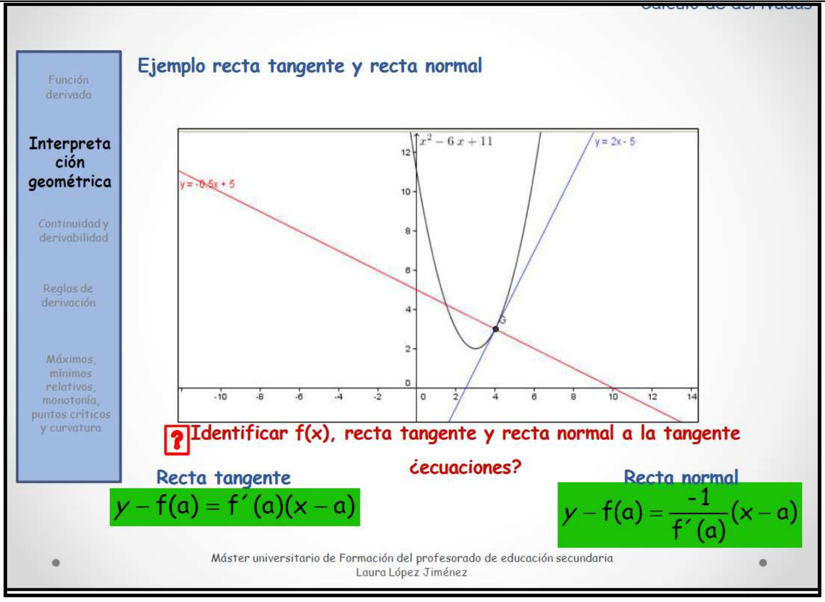
Procedimientos

? 10ª Pregunta: ¿Para qué sirve cada uno de los siguientes procedimientos?

1 •Se calcula f´(x) •Se resuelve f´(x)=0 •Las raíces de f´(x) se sustituyen en f(x) y se obtienen coordenadas de posibles máximos o mínimos relativos. •Se calcula f´´(x) •Se estudia signo de f´´(x) para las raíces de f´(x)	2 •Se calcula f´(x) •Se resuelve f´(x)=0 •Se hallan discontinuidades. •Las representan en la recta real, las raíces de f´(x) y las discontinuidades. •Se estudia signo de f´(x) en puntos de los intervalos definidos.
3 •Se calcula f´´(x) •Se resuelve f´´(x)=0 •Las raíces de f´´(x) se sustituyen en f(x) y se obtienen coordenadas de posibles puntos de inflexión. •Se calcula f´´´(x) •Se estudia si f´´´(x) se anula o no para las raíces de f´(x)	4 •Se calcula f´´(x) •Se resuelve f´´(x)=0 •Se hallan discontinuidades. •Las representan en la recta real, las raíces de f´´(x) y las discontinuidades. •Se estudia signo de f´´(x) en puntos de los intervalos definidos.

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez

Respuestas



Ejemplo recta tangente y recta normal

Identificar f(x), recta tangente y recta normal a la tangente

¿ecuaciones?

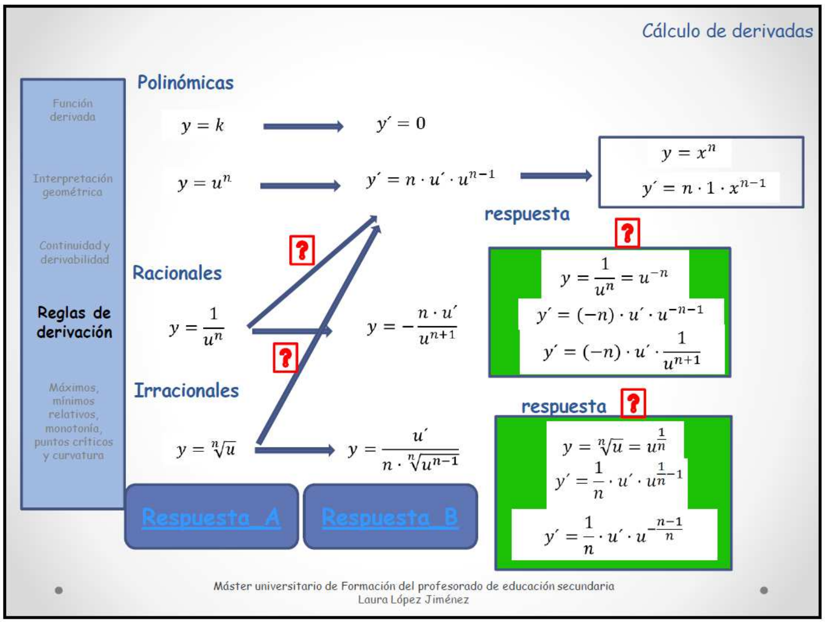
Recta tangente

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

Recta normal

$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez



Cálculo de derivadas

Polinómicas

$y = k \longrightarrow y' = 0$

$y = u^n \longrightarrow y' = n \cdot u' \cdot u^{n-1} \longrightarrow \boxed{y = x^n \quad y' = n \cdot 1 \cdot x^{n-1}}$

Racionales

$y = \frac{1}{u^n} \longrightarrow y = -\frac{n \cdot u'}{u^{n+1}}$

respuesta

$y = \frac{1}{u^n} = u^{-n}$

$y' = (-n) \cdot u' \cdot u^{-n-1}$

$y' = (-n) \cdot u' \cdot \frac{1}{u^{n+1}}$

Irracionales

$y = \sqrt[n]{u} \longrightarrow y = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$

respuesta

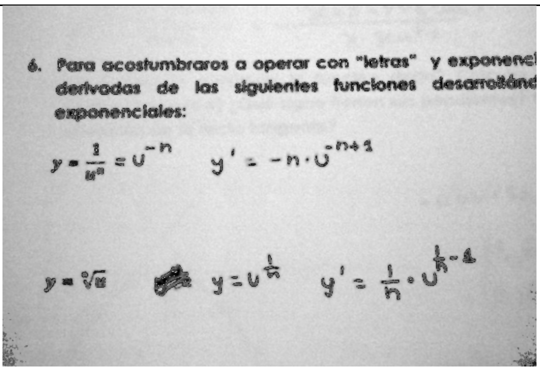
$y = \sqrt[n]{u} = u^{\frac{1}{n}}$

$y' = \frac{1}{n} \cdot u' \cdot u^{\frac{1}{n}-1}$

$y' = \frac{1}{n} \cdot u' \cdot u^{-\frac{n-1}{n}}$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez

Respuesta A

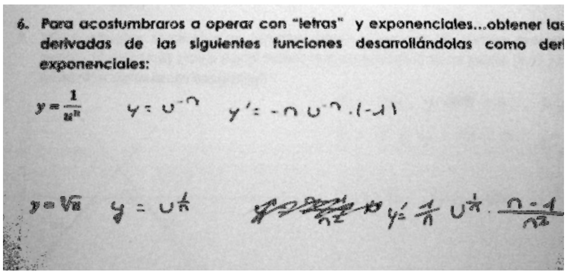


6. Para acostumbraros a operar con "letras" y exponenc
derivadas de las siguientes funciones desarrollánd
exponenciales:

$y = \frac{1}{u^n} = u^{-n} \qquad y' = -n \cdot u^{-n+1}$

$y = \sqrt[n]{u} \qquad y = u^{\frac{1}{n}} \qquad y' = \frac{1}{n} \cdot u^{\frac{1}{n}-1}$

Respuesta B

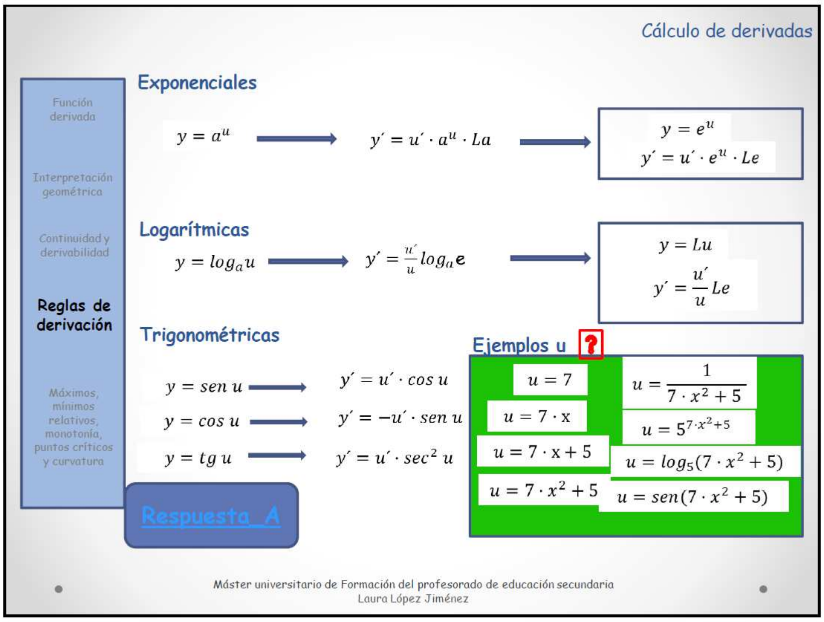


6. Para acostumbraros a operar con "letras" y exponenciales...obtener las
derivadas de las siguientes funciones desarrollándolas como der
exponenciales:

$y = \frac{1}{u^n} \qquad y = u^{-n} \qquad y' : -n\, u^{-n} \cdot (-1)$

$y = \sqrt[n]{u} \qquad y = u^{\frac{1}{n}} \qquad y' = \frac{1}{n}\, u^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n-1}{n^2}$

Respuestas



Cálculo de derivadas

Función derivada

Interpretación geométrica

Continuidad y derivabilidad

Reglas de derivación

Máximos, mínimos relativos, monotonía, puntos críticos y curvatura

Exponenciales

$y = a^u \longrightarrow y' = u' \cdot a^u \cdot La \longrightarrow \boxed{y = e^u \quad y' = u' \cdot e^u \cdot Le}$

Logarítmicas

$y = log_a u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u} log_a e \longrightarrow \boxed{y = Lu \quad y' = \frac{u'}{u} Le}$

Trigonométricas

$y = sen\ u \longrightarrow y' = u' \cdot cos\ u$

$y = cos\ u \longrightarrow y' = -u' \cdot sen\ u$

$y = tg\ u \longrightarrow y' = u' \cdot sec^2\ u$

Ejemplos u ?

$u = 7$

$u = \frac{1}{7 \cdot x^2 + 5}$

$u = 7 \cdot x$

$u = 5^{7 \cdot x^2 + 5}$

$u = 7 \cdot x + 5$

$u = log_5(7 \cdot x^2 + 5)$

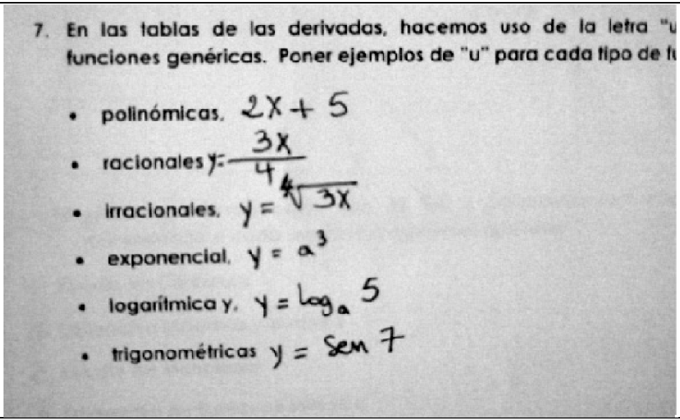
$u = 7 \cdot x^2 + 5$

$u = sen(7 \cdot x^2 + 5)$

Respuesta_A

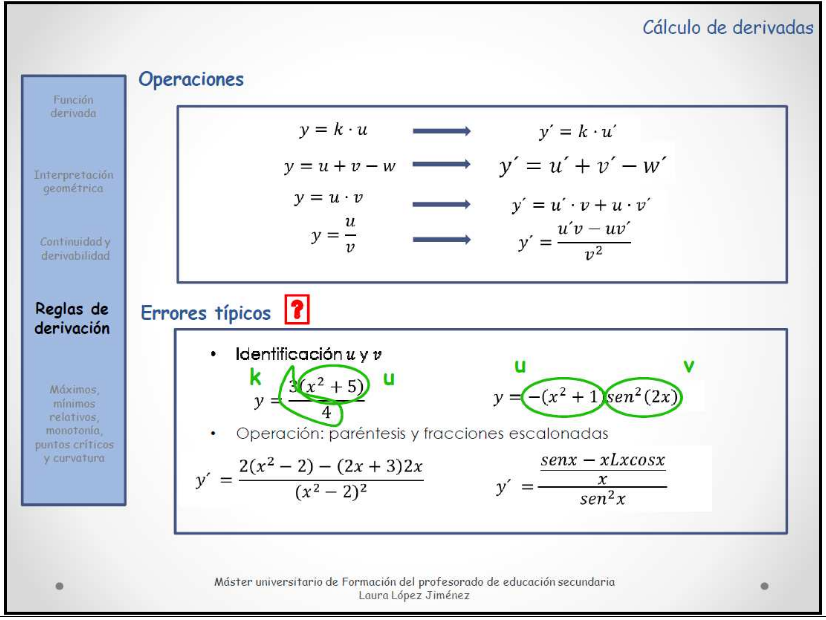
Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez

Respuesta A



7. En las tablas de las derivadas, hacemos uso de la letra "
funciones genéricas. Poner ejemplos de "u" para cada tipo de

- polinómicas. $2X + 5$
- racionales $y = \frac{3X}{4}$
- irracionales. $y = \sqrt[4]{3X}$
- exponencial. $y = a^3$
- logarítmica y. $y = \log_a 5$
- trigonométricas $y = Sen\ 7$



Cálculo de derivadas

Función derivada

Interpretación geométrica

Continuidad y derivabilidad

Reglas de derivación

Máximos, mínimos relativos, monotonía, puntos críticos y curvatura

Operaciones

$y = k \cdot u \longrightarrow y' = k \cdot u'$

$y = u + v - w \longrightarrow y' = u' + v' - w'$

$y = u \cdot v \longrightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$y = \frac{u}{v} \longrightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Errores típicos ?

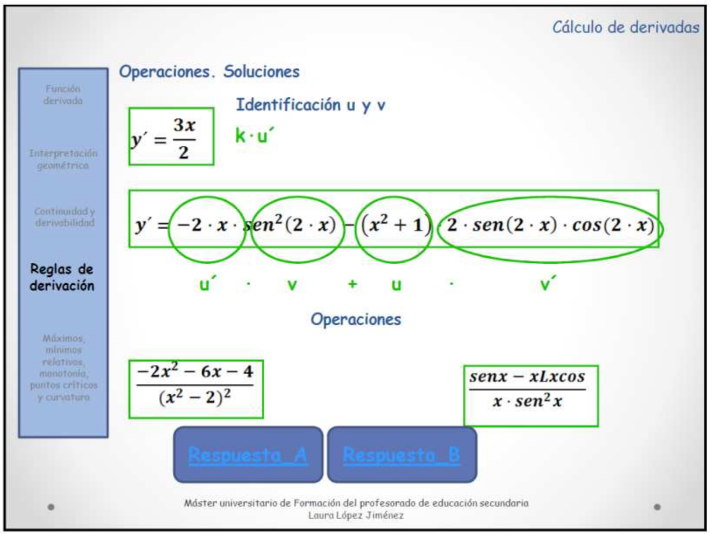
- Identificación u y v

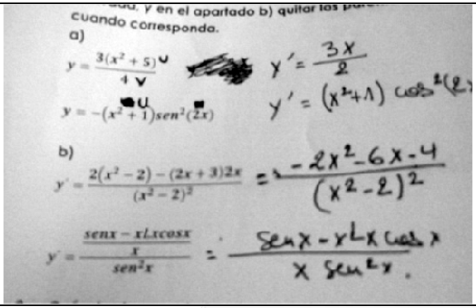
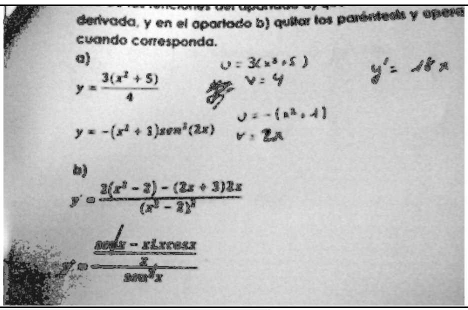
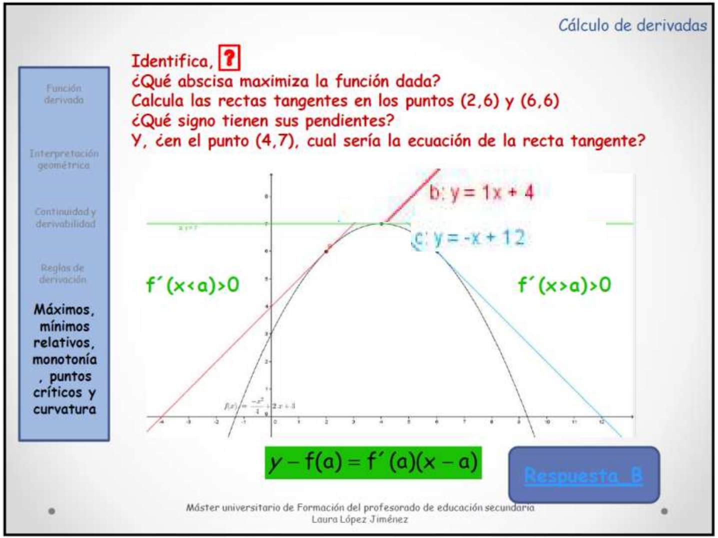
$y = \frac{\overset{k}{3}\overset{u}{(x^2+5)}}{4} \qquad y = \overset{u}{-(x^2+1)}\overset{v}{sen^2(2x)}$

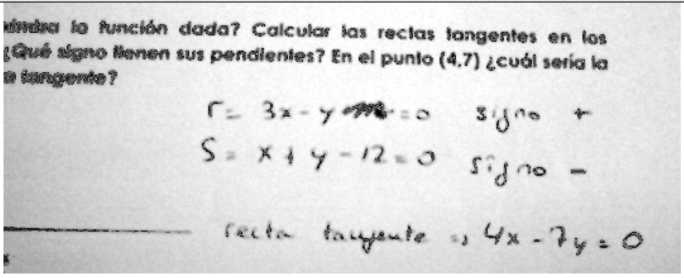
- Operación: paréntesis y fracciones escalonadas

$y' = \frac{2(x^2-2) - (2x+3)2x}{(x^2-2)^2} \qquad y' = \frac{\frac{senx - xLxcosx}{x}}{sen^2 x}$

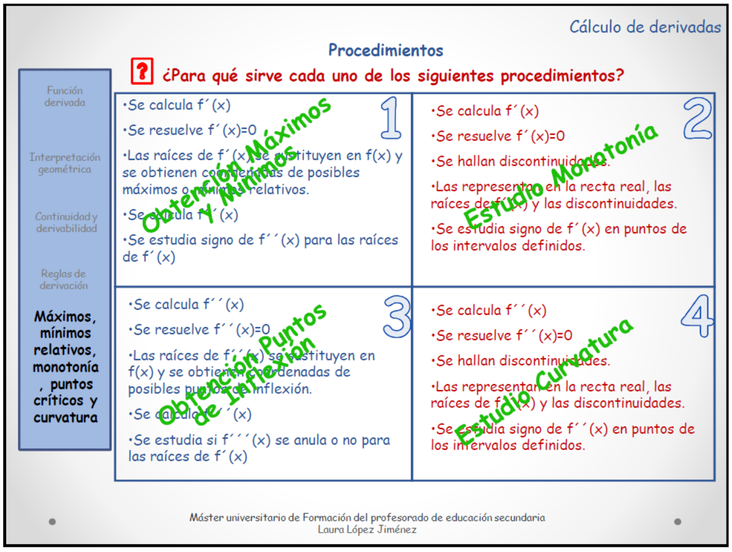
Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez

<table>
<tr><th colspan="2">Respuestas</th></tr>
<tr><td colspan="2">

Cálculo de derivadas
Operaciones. Soluciones
Identificación u y v
$y' = \frac{3x}{2}$
k·u´
$y' = -2\cdot x\cdot sen^2(2\cdot x) - (x^2+1)\, 2\cdot sen(2\cdot x)\cdot cos(2\cdot x)$
u´ · v + u · v´
Operaciones
$\frac{-2x^2-6x-4}{(x^2-2)^2}$
$\frac{senx - xLxcos}{x\cdot sen^2x}$

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez
</td></tr>
<tr><th>Respuesta A</th><th>Respuesta B</th></tr>
<tr><td>

…, y en el apartado b) quitar los par…
cuando corresponda.
a)
$y = \frac{3(x^2+5)}{4}$ u v $y' = \frac{3x}{2}$
$y = -(x^2+1)sen^2(2x)$ u $y' = (x^2+1)\cos^2(2…$
b)
$y' = \frac{2(x^2-2)-(2x+3)2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-2x^2-6x-4}{(x^2-2)^2}$
$y' = \frac{\frac{senx - xLxcosx}{x}}{sen^2x} = \frac{Sen x - xLx \cos x}{x\, Sen^2 x}.$
</td><td>

derivada, y en el apartado b) quitar los paréntesis y opera…
cuando corresponda.
a)
$y = \frac{3(x^2+5)}{4}$ $u = 3(x^2+5)$ $v = 4$ $y' = 18x$
$y = -(x^2+1)sen^2(2x)$ $u = -(x^2+1)$ $v = 2x$
b)
$y' = \frac{2(x^2-2)-(2x+3)2x}{(x^2-2)^2}$
$y' = \frac{\frac{senx - xLxcosx}{x}}{sen^2x}$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Cálculo de derivadas
Identificación, ?
¿Qué abscisa maximiza la función dada?
Calcula las rectas tangentes en los puntos (2,6) y (6,6)
¿Qué signo tienen sus pendientes?
Y, ¿en el punto (4,7), cual sería la ecuación de la recta tangente?

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$
Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

…imiza la función dada? Calcular las rectas tangentes en los …
¿Qué signo tienen sus pendientes? En el punto (4,7) ¿cuál sería la …
… tangente?
$r = 3x - y \ldots = 0$ signo +
$S = x + y - 12 = 0$ signo −
recta tangente ⇒ $4x - 7y = 0$
</td></tr>
</table>

Respuestas



Cálculo de derivadas

Procedimientos

¿Para qué sirve cada uno de los siguientes procedimientos?

1

- Se calcula f´(x)
- Se resuelve f´(x)=0
- Las raíces de f´(x) se sustituyen en f(x) y se obtienen coordenadas de posibles máximos o mínimos relativos.
- Se calcula f´´(x)
- Se estudia signo de f´´(x) para las raíces de f´(x)

Obtención Máximos y Mínimos

2

- Se calcula f´(x)
- Se resuelve f´(x)=0
- Se hallan discontinuidades.
- Las representan en la recta real, las raíces de f´(x) y las discontinuidades.
- Se estudia signo de f´(x) en puntos de los intervalos definidos.

Estudio Monotonía

3

- Se calcula f´´(x)
- Se resuelve f´´(x)=0
- Las raíces de f´´(x) se sustituyen en f(x) y se obtienen coordenadas de posibles puntos de inflexión.
- Se calcula f´´´(x)
- Se estudia si f´´´(x) se anula o no para las raíces de f´(x)

Obtención Puntos de Inflexión

4

- Se calcula f´´(x)
- Se resuelve f´´(x)=0
- Se hallan discontinuidades.
- Las representan en la recta real, las raíces de f´(x) y las discontinuidades.
- Se estudia signo de f´´(x) en puntos de los intervalos definidos.

Estudio Curvatura

Máster universitario de Formación del profesorado de educación secundaria
Laura López Jiménez

D. Prueba Corta. EVALUACIÓN

1. Aplica la definición de derivada y calcula:
   a) La derivada de la función $f(x) = x^2 + 4x - 1$ en x=1. (1pto)
   b) Las ecuaciones de la recta tangente y normal en el punto de abscisa x=1.

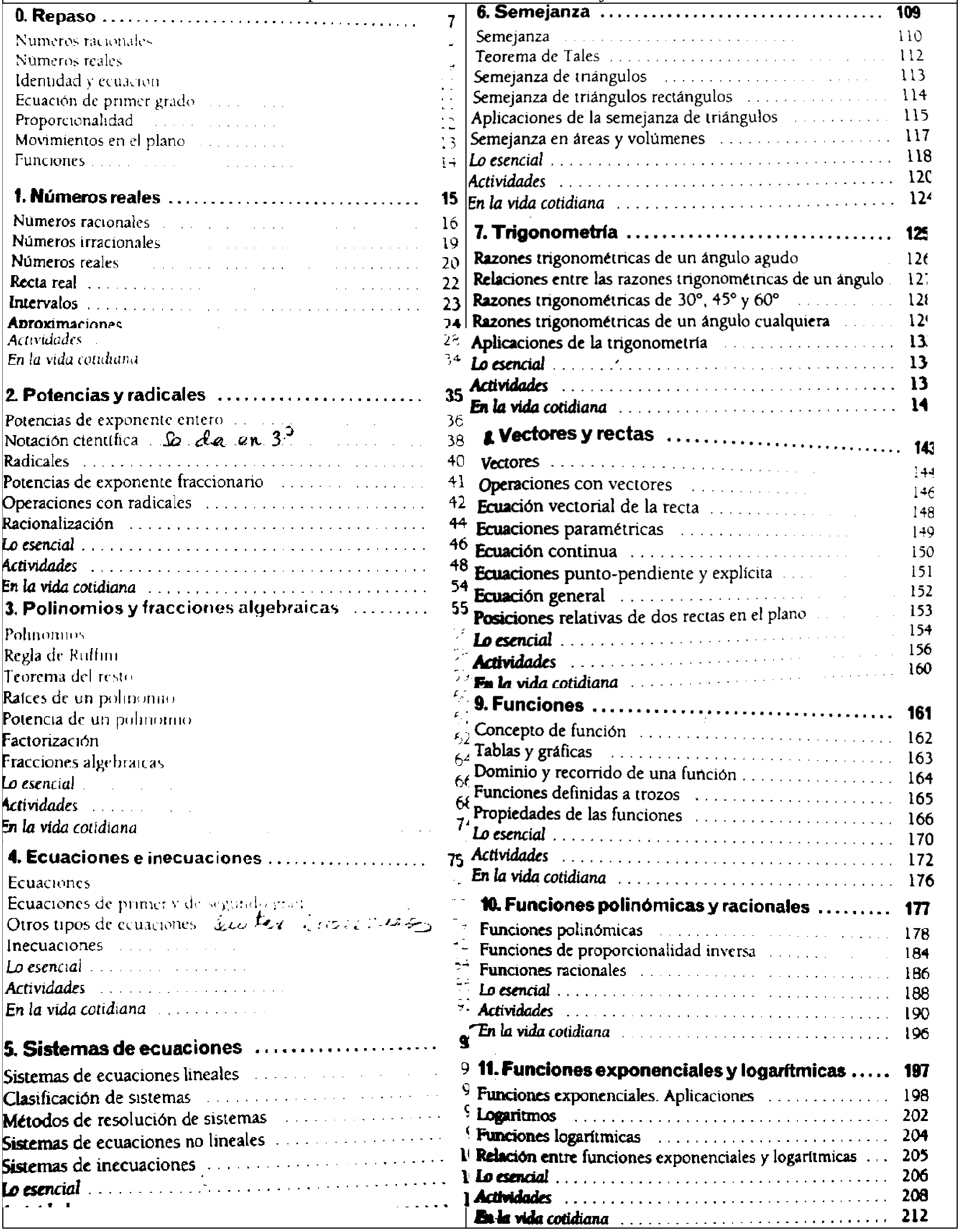
2. Calcula la función derivada mediante la fórmula de la derivada de una potencia: (1pto)
   a) $f(x) = \frac{5}{x^5}$
   b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
   c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
   d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
3. Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación. Simplifica, si puedes la expresión resultante. (2.6ptos)
   a) $f(x) = \frac{x^3+2}{3}$
   b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
   c) $f(x) = (x^2 + 3x - 2)^4$
   d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$
   e) $f(x) = \sqrt[4]{x^5 - x^3 - 2}$
   f) $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$
   g) $f(x) = e^{3-x^2}$
   h) $f(x) = 3^{2x^2}\sqrt{x}$
   i) $f(x) = L(e^x + 1)$
   j) $f(x) = \cos(7 - 2x)$
   k) $f(x) = 3tg2x$
   l) $f(x) = sen^3 3x$
   m) $f(x) = Lsenx$
4. Representa la siguiente función completando el formulario $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$ (3 ptos)

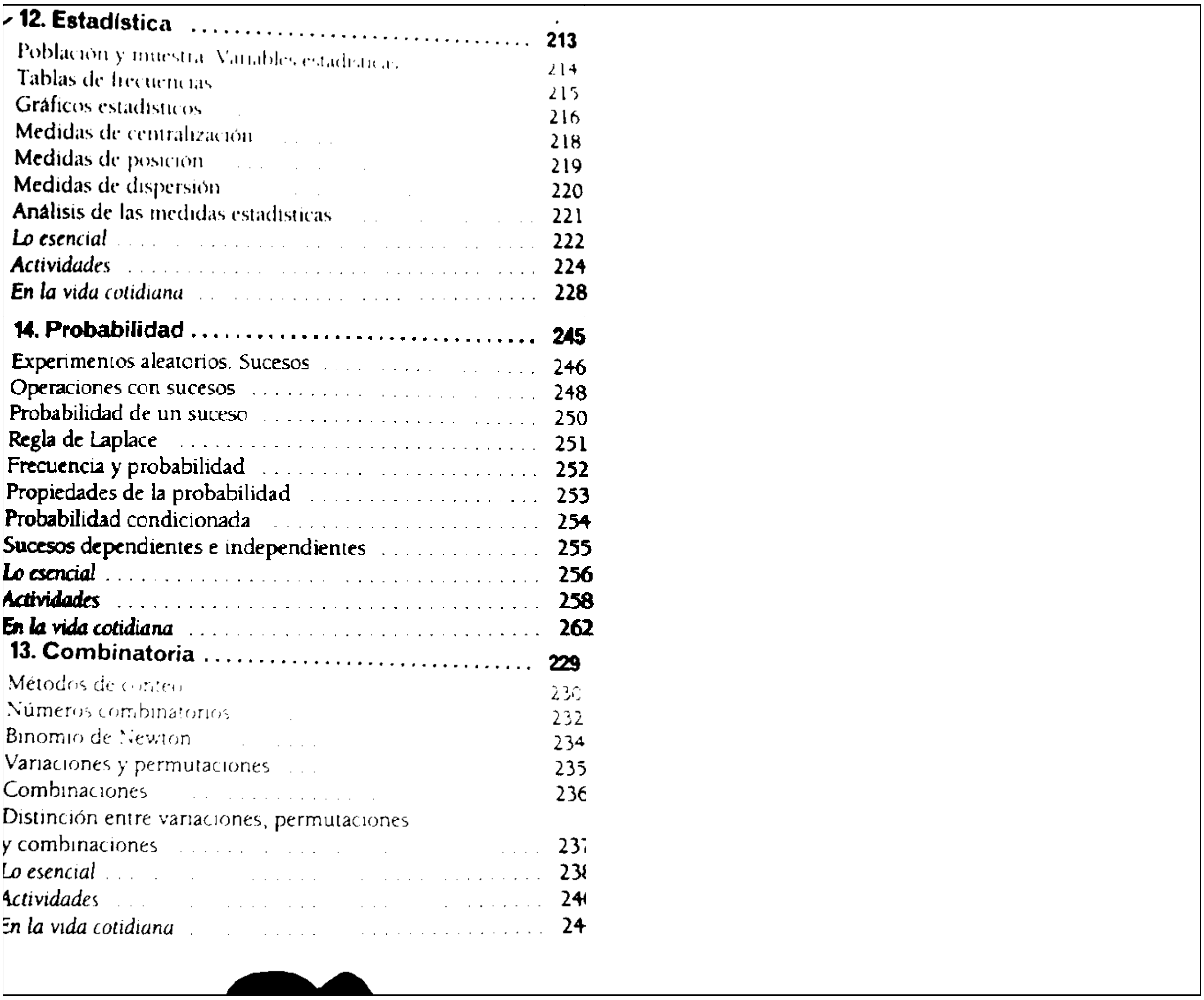
5. La suma de los catetos de un triángulo rectángulo mide 12 cm. Halla las longitudes de los catetos para que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa sea mínima.

   (2 ptos)

E. Índice 4º ESO

Índice 4º ESO Opción B. Editorial Santillana. Proyecto la casa del Saber





Índice 4º ESO Opción A. Editorial Santillana. Proyecto la casa del Saber