Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

EL PLANETA DE LOS YUNIS. Situación fundamental de la función afín en 1º E.S.O.

Marta Serra Belmonte

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKO

ÍNDICE

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar y valorar una propuesta de ingeniería didáctica basada en el aprendizaje del álgebra.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y de los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre el paso de la aritmética al álgebra, que se ha puesto en marcha en un aula de 1º ESO en el marco del Prácticum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en una situación planteada en clase y en unas actividades realizadas *a posteriori*.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

El álgebra en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento del contenido de álgebra en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis de divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia al álgebra en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 1º ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1

El contenido algebraico en el currículo vigente

El objetivo de este capítulo es analizar los contenidos mínimos de álgebra establecidos en la normativa vigente desde el tercer ciclo de primaria hasta bachillerato, considerando las distintas opciones en 4º de ESO y los diferentes itinerarios formativos en el bachillerato.

Los textos consultados para realizar dicho estudio han sido:

- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

- Real Decreto 1631/2007 de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO.

- Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

El currículo se ha analizado basándose en los siguientes descriptores:

1. Lenguaje natural vs. Lenguaje algebraico
2. La noción de igualdad. Este descriptor se subdivide en:
    a. Equivalencias
    b. Ecuaciones
    c. Sistemas de ecuaciones
3. Proporcionalidad y función lineal
4. Funciones y gráficas.
    a. Representación
    b. Interpretación

Se han seleccionado estos descriptores teniendo en cuenta los estándares de proceso que establece el NCTM en su libro "Principios y estándares de la actividad matemática", los cuales destacan las formas para adquirir y aplicar los conocimientos matemáticos. En concreto en este trabajo se subraya la importancia de las conexiones en las matemáticas. Como se explica en el citado libro, las matemáticas no son un conjunto de de ejes temáticos separados de forma estanca entre ellos, pese a que en ocasiones en el ámbito escolar sean presentadas de esta forma. Por lo tanto, son múltiples los beneficios de la enseñanza de las matemáticas como un campo de estudio integrado: "Cuando los estudiantes relacionan las ideas matemáticas, su comprensión y entendimiento acerca de ellas se hacen profundos y son más permanentes, y pueden percibir las matemáticas como un todo coherente."

1.1 Contenidos en el tercer ciclo de Primaria

Para saber cómo se inicia la enseñanza del álgebra en la ESO, es necesario recurrir a los contenidos planteados en los últimos cursos de la enseñanza primaria.

Aunque el álgebra no se enseña como tal en estos niveles, para introducir el concepto de igualdad se trabajan las equivalencias numéricas: entre distintas unidades, entre fracciones que tienen el mismo valor…

A su vez, se comienza a trabajar la proporcionalidad para entender el concepto en su forma más básica y saber aplicar la técnica.

En cuanto a representación de funciones, únicamente se enseña la representación de puntos en las coordenadas cartesianas Este contenido está incluido en el bloque de geometría.

<table>
<tr><th colspan="2">Descriptores</th><th>Contenido tercer ciclo Primaria</th></tr>
<tr><td>C1</td><td>Lenguaje natural vs. lenguaje algebraico</td><td>Resolución de problemas aritméticos con operaciones básicas.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">C2
Noción de igualdad</td><td>Equivalencia</td><td>Bloque 2: Números
Equivalencias entre los elementos del Sistema de Numeración Decimal: unidades, decenas, centenas, etc.
Fracciones equivalentes

Bloque 3: Medida
Equivalencias entre las medidas de capacidad y volumen, entre horas, minutos y segundos.</td></tr>
<tr><td>Ecuaciones</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Sistemas de ecuaciones</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C3</td><td>Proporcionalidad</td><td>Bloque 2: Números
Proporcionalidad directa. La Regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa: ley del doble, triple, mitad.</td></tr>
<tr><td>Función lineal</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C4
Funciones y gráficas</td><td>Representación</td><td>Bloque 4: Geometría
La situación en el plano y en el espacio

Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos.</td></tr>
<tr><td>Interpretación</td><td>-</td></tr>
</table>

Tabla 01. Contenido establecido en el currículo para el tercer ciclo de Primaria

1.2 Contenidos en ESO

1er ciclo:

En este primer ciclo de ESO, los estudiantes se inician ya propiamente en el campo del álgebra. Asimismo, continúan manejando cuestiones de equivalencia.

En cuanto a la proporcionalidad, en 1º ESO ésta se sigue trabajando tanto en el ámbito numérico como en el de las funciones. En 2º ESO, se reserva para estudiarla únicamente en el apartado de funciones y gráficas.

La representación e interpretación de funciones se analiza principalmente a través de la tabla de valores y de la gráfica.

<table>
<tr><th colspan="2">Descriptores</th><th>Contenido 1º ESO</th></tr>
<tr><td>C1</td><td>Lenguaje natural vs. lenguaje algebraico</td><td>Bloque 1. Contenidos comunes
Interpretación de mensajes que contengan informaciones sobre cantidades y medidas o sobre elementos o relaciones espaciales.

Bloque 3. Álgebra
Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas.

Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos.

Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">C2 Noción de igualdad</td><td>Equivalencia</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Ecuaciones</td><td>Bloque 3. Álgebra
Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas</td></tr>
<tr><td>Sistemas de ecuaciones</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C3</td><td>Proporcionalidad</td><td>Bloque 2. Números
Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas en las que intervenga la proporcionalidad directa.</td></tr>
<tr><td>Función lineal</td><td>Bloque 5. Funciones y gráficas
Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C4 Funciones y gráficas</td><td>Representación</td><td>Bloque 5. Funciones y gráficas
Coordenadas cartesianas. Representación de puntos en un sistema de ejes coordenados. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas.

Organización de datos en tablas de valores.</td></tr>
<tr><td>Interpretación</td><td>Bloque 5. Funciones y gráficas
Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla o representadas en una gráfica.
Detección de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación</td></tr>
</table>

Tabla 02. Contenido establecido en el currículo para 1º ESO

Descriptores		**Contenido 2º ESO**
C1	**Lenguaje natural vs. lenguaje algebraico**	Bloque 1. Contenidos comunes Descripción verbal de procedimientos de resolución de problemas utilizando términos adecuados. Interpretación de mensajes que contengan informaciones de carácter cuantitativo o sobre elementos o relaciones espaciales. Bloque 3. Álgebra El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades.
C2 Noción de igualdad	**Equivalencia**	Bloque 3. Álgebra Transformación de ecuaciones en otras equivalentes
	Ecuaciones	Bloque 3. Álgebra Obtención del valor numérico de una expresión algebraica. Resolución de ecuaciones de primer grado. Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación. Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas.
	Sistemas de ecuaciones	-
C3	**Proporcionalidad**	
	Función lineal	Bloque 5. Funciones y gráficas Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales.
C4 Funciones y gráficas	**Representación**	Bloque 5. Funciones y gráficas Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla.
	Interpretación	Bloque 5. Funciones y gráficas Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica. Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.

Tabla 03. Contenido establecido en el currículo para 2º ESO

2º ciclo:

A partir del segundo ciclo de la ESO, aparecen los sistemas de ecuaciones y las ecuaciones de grado mayor que la unidad. En 4º ESO no sólo se requiere la resolución numérica, sino que también se incorpora la gráfica.

Respecto a las funciones, se trabaja tanto su representación como su interpretación. Ésta última adquiere más importancia en el último curso de la ESO.

Descriptores		Contenido 3º ESO
C1	**Lenguaje natural vs. lenguaje algebraico**	Bloque 1. Contenidos comunes Descripción verbal de relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de resolución utilizando la terminología precisa. Bloque 3. Álgebra Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.
C2 Noción de igualdad	**Equivalencia**	-
	Ecuaciones	Bloque 3. Álgebra Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales.
	Sistemas de ecuaciones	Bloque 3. Álgebra Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas
C3	**Proporcionalidad**	-
	Función lineal	Bloque 5. Funciones y gráficas Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica
C4 Funciones y gráficas	**Representación**	Bloque 5. Funciones y gráficas Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
	Interpretación	Bloque 5. Funciones y gráficas Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.

Tabla 04. Contenido establecido en el currículo para 3º ESO

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Descriptores</th><th colspan="2">Contenido 4º ESO</th></tr>
<tr><th>Opción A</th><th>Opción B</th></tr>
<tr><td>C1</td><td>Lenguaje natural vs. lenguaje algebraico</td><td colspan="2">Bloque 1. Contenidos comunes
Expresión verbal de argumentaciones, relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de resolución de problemas con la precisión y rigor adecuados a la situación.

Bloque 3. Álgebra
Manejo de expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">C2
Noción de igualdad</td><td>Equivalencia</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Ecuaciones</td><td colspan="2">Bloque 3. Álgebra
Manejo de expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos.</td></tr>
<tr><td>Sistemas de ecuaciones</td><td colspan="2">Bloque 3. Álgebra
Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones.
Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C3</td><td>Proporcionalidad</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Función lineal</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">C4
Funciones y gráficas</td><td>Representación</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Interpretación</td><td>Bloque 5. Funciones y gráficas
Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.</td><td>Bloque 5. Funciones y gráficas
Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.

Búsqueda e interpretación de situaciones reales con funciones definidas a trozos.</td></tr>
</table>

Tabla 05. Contenido establecido en el currículo para 4º ESO

1.3 Contenidos en Bachillerato

Matemáticas I y II. Bachillerato de Ciencia y Tecnología

En la siguiente tabla se presentan los contenidos establecidos para los dos cursos del Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología.

En 1º Bachillerato se introduce por primera vez el uso de las inecuaciones para resolver problemas de la realidad cotidiana. Asimismo, se inicia la enseñanza de las ecuaciones de la recta y sus posiciones relativas en el plano y el espacio.

En 2º Bachillerato aparece el lenguaje matricial como herramienta para la resolución de sistemas de ecuaciones.

No hay ningún apartado dedicado específicamente a la proporcionalidad en estos cursos.

Descriptores		Contenido 1º Bachillerato	Contenido 2º Bachillerato
C1	**Lenguaje natural vs. lenguaje algebraico**		
C2 Noción de igualdad	**Equivalencia**		
	Ecuaciones	Bloque 1: Aritmética y álgebra Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones. Utilización de las herramientas algebraicas en la resolución de problemas.	
	Sistemas de ecuaciones		Bloque 1: Álgebra lineal Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
C3	**Proporcionalidad**		
	Función lineal		
C4 Funciones y gráficas	**Representación**	Bloque 2: Geometría Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Resolución de problemas.	Bloque 2: Geometría Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas.
	Interpretación	Bloque 3: Análisis Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.	

Tabla 06. Contenido establecido en el currículo para el Bachillerato de Ciencia y Tecnología

<u>Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II.</u>

Finalmente, se presentan a continuación los contenidos para el Bachillerato de Ciencias Sociales. A diferencia de la opción anterior, no se introduce el uso de las inecuaciones. El sistema matricial se utiliza para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Al igual que en la opción anterior, no hay ningún apartado dedicado específicamente a la proporcionalidad.

En estos cursos, se profundiza en el análisis de las funciones y gráficas mediante su representación y su interpretación.

<table>
<tr><th colspan="2">Descriptores</th><th>Contenido 1º Bachillerato</th><th>Contenido 2º Bachillerato</th></tr>
<tr><td>C1</td><td>Leng. natural vs. Leng. algebraico</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">C2 Noción de igualdad</td><td>Equivalencia</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ecuaciones</td><td rowspan="2">Bloque 1: Aritmética y álgebra
Resolución de problemas del ámbito de las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss.</td><td></td></tr>
<tr><td>Sistemas de ecuaciones</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">C3</td><td>Proporcionalidad</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Función lineal</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">C4 Funciones y gráficas</td><td>Representación</td><td>Bloque 2: Análisis Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o de gráficas.</td><td>Bloque 2: Análisis
Estudio y representación gráfica de una función polinómica o racional sencilla a partir de sus propiedades globales.</td></tr>
<tr><td>Interpretación</td><td>Bloque 2: Análisis
Utilización de las funciones como herramienta para la resolución de problemas y la interpretación de fenómenos sociales y económicos.</td><td></td></tr>
</table>

Tabla 07. Contenido establecido en el currículo para el Bachillerato de Ciencias Sociales

1.4 Síntesis

En este apartado se exponen, a modo de síntesis, unas tablas donde se refleja la evolución, a lo largo de toda la enseñanza, de los dos descriptores claves del análisis del currículo: la noción de igualdad (C2) y la proporcionalidad (C3).

Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) justifican la existencia de distintas definiciones de la noción de igualdad y cómo estas definiciones condicionan la práctica matemática. No obstante afirman, que estas definiciones no determinan el significado de la noción de igualdad por sí mismas, si no que representan ciertas formas de hacer y de justificar, de operar y de elaborar el discurso.

De esta forma, para describir los sistemas de prácticas operativas y discursivas con relación a un objeto matemático, es necesario, en primer lugar, identificar las principales nociones, propiedades, lenguaje, argumentos y acciones utilizados en una clase amplia de problemas prototípicos en los diferentes contextos de uso. Las características que se exponen ahora seleccionan dos de las ocho definiciones de igualdad: la aritmética y la algebraica.

- Las nociones fundamentales asociadas a la noción de igualdad son: en el contexto aritmético, identidad y relación de orden; en el algebraico, equivalencia y función (en la mayoría de los casos, de tipo algebraico)

- En el contexto aritmético el lenguaje matemático está poco formalizado. El discurso se apoya en la manipulación de valores concretos y la argumentación se basa en propiedades de simetría y transitividad de la igualdad. En el contexto algebraico los objetos se representan mediante un lenguaje simbólico-literal, cuyo objetivo es generalizar las operaciones concretas, construir un sistema de signos fácilmente reconocible y establecer una estructura operativa y discursiva que permita reducir a expresiones canónicas los objetos matemáticos, de tal forma que “por simple observación” se puedan describir dichos objetos.

- En los contextos aritmético y algebraico un problema fundamental es la obtención de representantes canónicos y, para resolver este problema, la acción característica es la manipulación de objetos mediante equivalencias (que quedan justificadas por los axiomas de los números reales o por propiedades previamente establecidas).

En la tabla 08 se presenta la evolución, a lo largo de toda la etapa escolar, de la noción de igualdad en el contexto algebraico.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>EQUIVALENCIAS</th><th>ECUACIONES</th><th>SISTEMAS DE ECUACIONES</th></tr>
<tr><td colspan="2">3r
CICLO PRIM</td><td>Equivalencias entre los elementos del Sistema de Numeración Decimal: unidades, decenas, centenas, etc.
Fracciones equivalentes
Equivalencias entre las medidas de capacidad y volumen, entre horas, minutos y segundos.</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">1º ESO</td><td></td><td>Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">2º ESO</td><td>Transformación de ecuaciones en otras equivalentes</td><td>Obtención del valor numérico de una expresión algebraica. Resolución de ecuaciones de primer grado.
Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación.
Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas.</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">3º ESO</td><td>-</td><td>Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables
Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita
Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales.</td><td>Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4º ESO</td><td>OPCIÓN A</td><td>-</td><td rowspan="2">Manejo de expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos.</td><td rowspan="2">Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones.
Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.</td></tr>
<tr><td>OPCIÓN B</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1º
BACH</td><td>MAT I</td><td>-</td><td colspan="2">Utilización de las herramientas algebraicas en la resolución de problemas</td></tr>
<tr><td>MAT. APL. I</td><td>-</td><td colspan="2">Resolución de problemas del ámbito de las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2º
BACH</td><td>MAT II</td><td>-</td><td>-</td><td>Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.</td></tr>
<tr><td>MAT. APL. II</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

Tabla 08. Evolución del descriptor C2 Noción de igualdad

En la tabla 09 se puede observar cómo en el tercer ciclo de primaria y en 1º ESO se trabaja principalmente la proporcionalidad numérica, la idea de razón y la aplicación de la regla de tres, a través de ejercicios y problemas. En 1º ESO además, se establece un puente entre la proporcionalidad y la función lineal a través de la identificación de relaciones de proporcionalidad en el análisis de tablas de valores. Esto mismo se sigue trabajando en el siguiente curso, abandonando, por otra parte, el aprendizaje de la proporcionalidad numérica. Por último, en 3º ESO se profundiza más en el manejo de la función lineal vinculándolo a situaciones de la vida cotidiana.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">PROPORCIONALIDAD</th><th colspan="2">FUNCIÓN LINEAL</th></tr>
<tr><td>3r CICLO PRIMARIA</td><td colspan="2">Proporcionalidad directa. La Regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa: ley del doble, triple, mitad.</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1º ESO</td><td colspan="2">Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas en las que intervenga la proporcionalidad directa.</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td>-</td><td colspan="2">Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales.</td><td>-</td></tr>
<tr><td>2º ESO</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales.</td></tr>
<tr><td>3º ESO</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica</td></tr>
<tr><td>4º ESO</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td>1º BACH</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td>2º BACH</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td></tr>
</table>

Tabla 09. Evolución del descriptor C3 Proporcionalidad y función lineal

Capítulo 2
Los criterios de evaluación del álgebra en el currículo vigente

En este capítulo se analizan los criterios de evaluación que fija el currículo vigente para todas las etapas escolares desde el tercer ciclo de primaria.

A continuación se presentan estos criterios organizados en tablas y analizados según los mismos descriptores establecidos en el anterior capítulo.

2.1 Criterios de evaluación en Educación Primaria

Los criterios de evaluación en el tercer ciclo de Educación Primaria se refieren, como en el anterior capítulo, a operaciones entre unidades equivalentes, a la utilización correcta de la técnica en contextos de proporcionalidad y a saber situar puntos u objetos en el sistema de referencia cartesiano.

Descriptores		Contenido tercer ciclo Primaria
C1	**Lenguaje natural vs. lenguaje algebraico**	-
C2 Noción de igualdad	**Equivalencia**	6. Operar con los números teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones, aplicando las propiedades de las mismas, las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (algoritmos escritos, cálculo mental, tanteo, estimación, calculadora), usando más adecuado. 3. Operar con diferentes medidas. 4. Utilizar las unidades de medida más usuales, convirtiendo unas unidades en otras de la misma magnitud, expresando los resultados en las unidades de medida más adecuadas, explicando oralmente y por escrito, el proceso seguido y aplicándolo a la resolución de problemas
	Ecuaciones	-
	Sistemas de ecuaciones	-
C3	**Proporcionalidad**	7. Iniciarse en el uso de los de porcentajes y la proporcionalidad directa para interpretar e intercambiar información y resolver problemas en contextos de la vida cotidiana.
	Función lineal	-
C4 Funciones y gráficas	**Representación**	6. Interpretar representaciones espaciales realizadas a partir de sistemas de referencia y de objetos o situaciones familiares.
	Interpretación	-

Tabla 10. Criterios de evaluación en el tercer ciclo de Primaria

2.2 Criterios de evaluación en ESO

1er ciclo:

Los criterios de evaluación en el primer ciclo de la ESO se refieren al manejo y resolución de expresiones algebraicas simples, la identificación de relaciones de proporcionalidad a partir de tablas, así como su interpretación.

Descriptores		**Contenido 1º ESO**
C1	**Lenguaje natural vs. lenguaje algebraico**	3. Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números, utilizar letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas. Este criterio pretende comprobar la capacidad para percibir en un conjunto numérico aquello que es común, la secuencia lógica con que se ha construido, un criterio que permita ordenar sus elementos y, cuando sea posible, expresar algebraicamente la regularidad percibida.
C2 Noción de igualdad	**Equivalencia**	-
	Ecuaciones	3. Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números, utilizar letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas. Se pretende, asimismo, valorar el uso del signo igual como asignador y el manejo de la letra en sus diferentes acepciones. Forma parte de este criterio también la obtención del valor numérico en fórmulas simples con una sola letra.
	Sistemas de ecuaciones	-
C3	**Proporcionalidad**	Bloque 2. Números Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas en las que intervenga la proporcionalidad directa.
	Función lineal	Bloque 5. Funciones y gráficas Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales.
C4 Funciones y gráficas	**Representación**	6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.
	Interpretación	

Tabla 11. Criterios de evaluación en 1º ESO

<table>
<tr><th colspan="2">Descriptores</th><th>Contenido 2º ESO</th></tr>
<tr><td>C1</td><td>Lenguaje natural vs. lenguaje algebraico</td><td>3. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas.
Se pretende comprobar la capacidad de utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas y simbolizar relaciones […]</td></tr>
<tr><td rowspan="3">C2
Noción de igualdad</td><td>Equivalencia</td><td rowspan="2">3. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas.
Se pretende comprobar la capacidad de […] plantear ecuaciones de primer grado para resolverlas por métodos algebraicos y también por métodos de ensayo y error. Se pretende evaluar, también, la capacidad para poner en práctica estrategias personales como alternativa al álgebra a la hora de plantear y resolver los problemas. Asimismo, se ha de procurar valorar la coherencia de los resultados.</td></tr>
<tr><td>Ecuaciones</td></tr>
<tr><td>Sistemas de ecuaciones</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C3</td><td>Proporcionalidad</td><td></td></tr>
<tr><td>Función lineal</td><td>2. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana. Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Se trata, asimismo, de utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C4
Funciones y gráficas</td><td>Representación</td><td rowspan="2">5. Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado.
Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, en especial el paso de la gráfica correspondiente a una relación de proporcionalidad a cualquiera de los otros tres: verbal, numérico o algebraico. Se trata de evaluar también la capacidad de analizar una gráfica y relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.</td></tr>
<tr><td>Interpretación</td></tr>
</table>

Tabla 12. Criterios de evaluación en 2º ESO

<u>*2º ciclo:*</u>

Se evalúa a lo largo de todo el ciclo la correcta resolución de problemas en los que sea necesario el uso de ecuaciones y sistemas.

En 3º ESO se hace más hincapié en la aplicación de la técnica para la representación e interpretación de funciones, mientras que en 4º ESO adquiere más importancia la capacidad de reconocer a qué modelo corresponde una situación determinada.

Descriptores		Contenido 3º ESO
C1	**Lenguaje natural vs. lenguaje algebraico**	2. Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos. A través de este criterio, se pretende comprobar la capacidad de extraer la información relevante de un fenómeno para transformarla en una expresión algebraica. En lo referente al tratamiento de pautas numéricas, se valora si se está capacitado para analizar regularidades y obtener expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas
C2 Noción de igualdad	**Equivalencia**	-
	Ecuaciones	3. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente a ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos, mediante el uso adecuado de los recursos tecnológicos.
	Sistemas de ecuaciones	
C3	**Proporcionalidad**	-
	Función lineal	5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica. Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación.
C4 Funciones y gráficas	**Representación**	5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica. […]Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.
	Interpretación	

Tabla 13. Criterios de evaluación en 3º ESO

Descriptores		**Contenido 4º ESO**	
C1	**Lenguaje natural vs. lenguaje algebraico**		2. Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos y métodos algebraicos para resolver problemas. Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad de usar el álgebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas y utilizar sus métodos en la resolución de problemas mediante inecuaciones, ecuaciones y sistemas.
C2 Noción de igualdad	**Equivalencia**		
	Ecuaciones	3. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Este criterio va dirigido a comprobar que el alumno está preparado para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente en forma de ecuaciones y sistemas.	
	Sistemas de ecuaciones		
C3	**Proporcionalidad**		
	Función lineal		
C4 Funciones y gráficas	**Representación**		
	Interpretación	5. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático o exponencial, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo	

Tabla 14. Criterios de evaluación en 4º ESO

2.3 Criterios de evaluación en Bachillerato

Matemáticas I y II. Bachillerato de Ciencia y Tecnología

Se requiere el uso de ecuaciones e inecuaciones para resolver problemas extraídos de la realidad social, así como la interpretación de sus resultados. En el manejo de los sistemas de ecuaciones es necesario el empleo de matrices y determinantes.

Se profundiza en ambos cursos en el manejo de las funciones y sus gráficas, extendiéndolo al ámbito de la geometría.

Descriptores		Contenido 1º Bachillerato	Contenido 2º Bachillerato
C1	**Lenguaje natural vs. lenguaje algebraico**		
C2 Noción de igualdad	**Equivalencia**		
	Ecuaciones	1. Utilizar correctamente los números reales y sus operaciones para presentar e intercambiar información; estimar los efectos de las operaciones sobre los números reales y sus representaciones grafica y algebraica y resolver problemas extraídos de la realidad social y de la naturaleza que impliquen la utilización de ecuaciones e inecuaciones, así como interpretar los resultados obtenidos.	
	Sistemas de ecuaciones		1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices y determinantes como instrumento para representar e interpretar datos y relaciones y, en general, para resolver situaciones diversas. YA SON MATRICES
C3	**Proporcionalidad**		
	Función lineal		

Tabla 15a. Criterios de evaluación en el Bachillerato de Ciencia y Tecnología

<table>
<tr><th colspan="2">Descriptores</th><th>Contenido 1º Bachillerato</th><th>Contenido 2º Bachillerato</th></tr>
<tr><td rowspan="2">C4 Funciones y gráficas</td><td>Representación</td><td>2. Transferir una situación real a una esquematización geométrica y aplicar las diferentes técnicas de resolución de triángulos para enunciar conclusiones, valorándolas e interpretándolas en su contexto real; así como, identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos del plano, analizar sus propiedades métricas y construirlos a partir de ellas.[…] Asimismo, se pretende comprobar la adquisición de las capacidades necesarias en la utilización de técnicas propias de la geometría analítica para aplicarlas al estudio de las ecuaciones reducidas de las cónicas y de otros lugares geométricos sencillos.</td><td>3. Transcribir problemas reales a un lenguaje grafico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas especificas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto. Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida. Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en algebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente.</td></tr>
<tr><td>Interpretación</td><td>5. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente.</td><td></td></tr>
</table>

Tabla 15b. Criterios de evaluación en el Bachillerato de Ciencia y Tecnología

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II.

En lo concerniente a los criterios de evaluación para la opción de Ciencias Sociales, en el ámbito de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones, su resolución e interpretación se vinculan a realidades sociales y problemas reales.

El uso de las funciones se emplea mayormente para reconocer fenómenos económicos y sociales.

<table>
<tr><th colspan="2">Descriptores</th><th>Crit. Eval. 1º Bachillerato</th><th>Crit. Eval. 2º Bachillerato</th></tr>
<tr><td>C1</td><td>Lenguaje natural vs. lenguaje algebraico</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 16a. Criterios de evaluación en el Bachillerato de Ciencias Sociales

<table>
<tr><th colspan="2">Descriptores</th><th>Crit. Eval. 1º Bachillerato</th><th>Crit. Eval. 2º Bachillerato</th></tr>
<tr><td rowspan="3">C2
Noción de igualdad</td><td>Equivalencia</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ecuaciones</td><td rowspan="2">2. Transcribir a lenguaje algebraico o grafico una situación relativa a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas.
Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir algebraica o gráficamente una situación y llegar a su resolución haciendo una interpretación contextualizada de los resultados obtenidos, más allá de la resolución mecánica de ejercicios que solo necesiten la aplicación inmediata de una formula, un algoritmo o un procedimiento determinado.</td><td></td></tr>
<tr><td>Sistemas de ecuaciones</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">C3</td><td>Proporcionalidad</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Función lineal</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">C4
Funciones y gráficas</td><td>Representación</td><td rowspan="2">4. Relacionar las graficas de las familias de funciones con situaciones que se ajusten a ellas; reconocer en los fenómenos económicos y sociales las funciones más frecuentes e interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, graficas o expresiones algebraicas.
Se trata de evaluar la destreza para realizar estudios del comportamiento global de las funciones a las que se refiere el criterio: polinómicas; exponenciales y logarítmicas; valor absoluto; parte entera y racionales sencillas, sin necesidad de profundizar en el estudio de propiedades locales desde un punto de vista analítico. La interpretación, cualitativa y cuantitativa, a la que se refiere el enunciado exige apreciar la importancia de la selección de ejes, unidades, dominio y escalas.</td><td>2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, ecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.
Este criterio está dirigido a comprobar la capacidad de utilizar con eficacia el lenguaje algebraico tanto para plantear un problema como para resolverlo, aplicando las técnicas adecuadas. No se trata de valorar la destreza a la hora de resolver de forma mecánica ejercicios de aplicación inmediata, sino de medir la competencia para seleccionar las estrategias y herramientas algebraicas; así como la capacidad de interpretar críticamente el significado de las soluciones obtenidas.</td></tr>
<tr><td>Interpretación</td><td></td></tr>
</table>

Tabla 16b. Criterios de evaluación en el Bachillerato de Ciencias Sociales

Capítulo 3

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con el contenido algebraico en el currículo vigente.

Tras observar en los anteriores capítulos tanto los contenidos relativos al álgebra en el currículo oficial como los criterios de evaluación que de éstos se siguen, en el presente analizaremos en qué medida esto se concreta en los libros de texto.

Para ello, como nuestro trabajo se centra en el curso de 1º ESO, los libros de texto seleccionados han sido los de un curso anterior hasta dos cursos posteriores, esto es, desde 6º Primaria hasta 3º ESO. De esta manera conseguimos contextualizar el curso en cuestión y la enseñanza del álgebra en dicho momento.

Se hace una clasificación de las actividades encontradas en los libros según sean: ejercicios, problemas, cuestiones o situaciones. A continuación describimos las particularidades que caracterizan a cada una:

- Ejercicio: Tarea de la cual conocemos los pasos de la resolución (ej. Una división, una ecuación)
- Problema: Tarea de la que desconocen los pasos de la resolución; no obstante, en la resolución se aplican técnicas que se asocian con ejercicios.
- Cuestión: Formulación de una pregunta cuya respuesta no es numérica, si no que es fruto de un análisis y/o de una comprensión global. No se asocia a cálculos y técnicas sino a aspectos de fundamentación, explicación, descripción y comprensión.
- Situación: Dinámica con una serie de pautas, tareas, fases (no es una única pregunta cerrada) que marcan la evolución del aprendizaje. Hay dos fases claramente diferenciadas:
    - Fase adidáctica: los estudiantes deben ser capaces de dar respuestas fundamentadas en el conocimiento que pueden tener de la solución. Estas respuestas están basadas en su propia estrategia de base, la cual les permite actuar sobre ella.
    - Fase de institucionalización: el profesor concluye con el saber que deben adquirir los estudiantes que han participado de la situación.

  El funcionamiento de estas fases se sigue de la *Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas* (Brousseau, 1998)

3.1 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en el tercer ciclo de Primaria

Se ha analizado el libro de texto de 6º de Primaria *Matemáticas 6. Proyecto Nuevo planeta amigo* de la editorial SM. Los contenidos de este curso están distribuidos en 15 temas, de los cuales no existe ninguno dedicado específicamente al álgebra. No obstante, hay unidades que tratan los distintos aspectos y nociones de equivalencia, proporcionalidad o representaciones gráficas entre ejes.

Los siguientes ejercicios pretenden ser representativos del tipo de ejercicios propuestos en estos temas.

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Enmarcado en el tema de las fracciones, se presenta una igualdad entre dos fracciones, en las que hay que hallar el término que falta para que ésta se cumpla.

Ejemplo:

5. Completa estas fracciones en tu cuaderno para que sean equivalentes.

$\frac{2}{3}=\frac{18}{\square}$ $\frac{8}{3}=\frac{\square}{9}$ $\frac{8}{16}=\frac{\square}{2}$ $\frac{3}{5}=\frac{12}{\square}$ $\frac{15}{24}=\frac{5}{\square}$ $\frac{46}{28}=\frac{\square}{14}$

Ubicación: Tema 6 – Las fracciones; pág. 83.

Tabla 17. Actividad propuesta en 6º de Primaria

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Otra forma de trabajar la noción de igualdad es mediante la transformación a distintas unidades de una misma magnitud.

Ejemplo:

10. Completa estas igualdades en tu cuaderno.

5 dam^2 = $\square$ m^2 3 hm^2 = $\square$ dam^2 4 km^2 = $\square$ hm^2 17 dm^2 = $\square$ cm^2

9 dm^2 = $\square$ m^2 6 cm^2 = $\square$ dm^2 9 mm^2 = $\square$ cm^2 35 hm^2 = $\square$ km^2

Ubicación: Tema 9 – Medidas de magnitudes. Sistema métrico decimal; pág. 128.

Tabla 18. Actividad propuesta en 6º de Primaria

Actividad tipo: Ejercicio ☑ Problema Cuestión Situación

Descripción: En este problema, pese a estar dentro del tema de proporcionalidad, el estudiante no necesita ninguna técnica específica de la proporcionalidad para hallar el resultado; una suma es suficiente.

Ejemplo:

12. Para pintar una habitación Mónica necesita 2 botes de pintura verde y 1 de pintura blanca. Si su casa tiene 4 habitaciones de igual tamaño, ¿cuántos botes necesita para pintar todas las habitaciones? Escribe las series de números proporcionales que corresponde.

Ubicación: Tema 8 – Porcentaje y proporcionalidad; pág. 113.

Tabla 19. Actividad propuesta en 6º de Primaria

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: En este ejercicio, posterior al anterior, pero perteneciente al mismo tema, se aborda la proporcionalidad desde la técnica de la reducción a la unidad. Esta técnica se utiliza para calcular cantidades proporcionales que no están relacionadas entre sí por un número natural.

Ejemplo:

13. Completa estas tablas. Reduce primero a la unidad.

gafas	4	7
cristales	8	¿?

chocolatinas	2	5
avellanas	12	¿?

CD	3	4
precio (€)	54	¿?

Ubicación: Tema 8 – Porcentaje y proporcionalidad; pág. 114.

Tabla 20. Actividad propuesta en 6º de Primaria

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Por primera vez y en el contexto de aprendizaje de los números enteros, los alumnos se enfrentan a la representación de puntos en ejes cartesianos, sin profundizar más en ello.

Ejemplo:

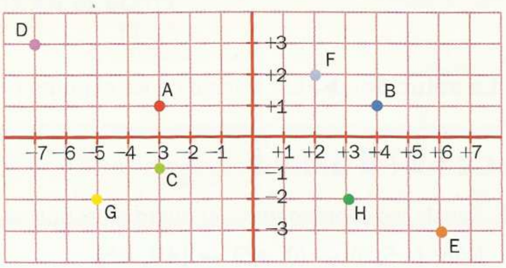
15. Escribe las coordenadas de estos puntos en tu cuaderno.

A = (,) E = (,)

B = (,) F = (,)

C = (,) G = (,)

D = (,) H = (,)



Ubicación: Tema 10 – Los números enteros; pág. 143.

Tabla 21. Actividad propuesta en 6º de Primaria

3.2 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º ESO

Se ha analizado el libro de texto de 1º ESO *Matemáticas 1º ESO. Proyecto Casa del saber* de la editorial Santillana. Los contenidos de este curso están distribuidos en 14 temas, de los cuales únicamente uno está dedicado al álgebra. Éste es el tema 6, titulado "Iniciación al álgebra". Al ser una materia totalmente novedosa en el curso, nos parece interesante enunciar los títulos de las cinco unidades que preceden a esta lección, por ver qué contenidos anteceden a la enseñanza del álgebra.

- Tema 1: Números naturales
- Tema 2: Divisibilidad
- Tema 3: Fracciones
- Tema 4: Números decimales
- Tema 5: Números enteros

En este libro el tema 6, "Iniciación al álgebra", consta de 19 páginas y contiene 105 actividades. Mostramos una clasificación de dichas actividades según su tipología.

- Ejercicios: 75%
- Problemas: 23%
- Cuestiones: 2%
- Situaciones: -

A continuación presentamos una muestra que pretende ser representativa del tipo de actividades propuestas en la lección.

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Se busca familiarizar al alumno con el lenguaje simbólico a través de la transformación de informaciones descritas en lenguaje natural.

Ejemplo:

37. ● Escribe en lenguaje algebraico las siguientes expresiones.

a) El cuadrado de un número.
b) Un número menos tres.
c) El doble de un número más tres.
d) La mitad de un número menos cinco.
e) El triple de un número más el doble del mismo número.
f) La cuarta parte de la suma de un número menos tres.
g) La quinta parte de un número menos el triple de dicho número.
h) La suma de dos números cualesquiera.
i) El triple de la suma de dos números cualesquiera.
j) La sexta parte de un número más seis.

Ubicación: Tema 6 – Iniciación al álgebra; pág. 124.

Tabla 22. Actividad propuesta en 1º ESO

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Con este tipo de ejercicios, se trata de que distingan claramente el coeficiente de la parte literal del monomio.

Ejemplo:

52. ● Efectúa estas sumas y restas de monomios.

a) $2x + 3x$
b) $-4ab + 2ab$
c) $17x^2 - 4x^2$
d) $-5x^2y^2z - (-x^2y^2z)$
e) $4a^2b + 6ab^2$
f) $7a + 5a + 3a$
g) $5x^4 - 2x^2 - 3x^2$
h) $2xy + 4xy - 8xy$
i) $2x^2 - 4x^2 + 5x^2$
j) $2xy - 2x + 2y$

Ubicación: Tema 6 – Iniciación al álgebra; pág. 125.

Tabla 23. Actividad propuesta en 1º ESO

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Se intenta reforzar el reconocimiento de los elementos de una ecuación, base para futuros procesos más complejos.

Ejemplo:

56. ● Completa la siguiente tabla.

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Términos	Incógnita
$7+s=2$				
$18=2t$				
$5x=1+x$				
$0=8-y$				
$10r=3$				

Ubicación: Tema 6 – Iniciación al álgebra; pág. 125.

Tabla 24. Actividad propuesta en 1º ESO

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Se trabaja la resolución de ecuaciones muy básicas para asentar las propiedades de la igualdad. No obstante, se suele enseñar como traslados de un miembro a otro miembro con los consiguientes cambios de signo. La introducción de números negativos en este tipo de ecuaciones propicia una resolución más propiamente algebraica por parte del alumno. Si los números únicamente son positivos, los estudiantes suelen hallar la solución correcta por tanteo.

Ejemplo:

62. ● Calcula el valor de la incógnita para que las igualdades sean ciertas.

a) $x+3=7$
b) $9+x=12$
c) $x-5=9$
d) $7+x=18$
e) $x-3=7$
f) $x+5=6$
g) $15+x=9$
h) $x-3=-5$
i) $x-10=9$
j) $2+x=15$

Ubicación: Tema 6 – Iniciación al álgebra; pág. 126.

Tabla 25. Actividad propuesta en 1º ESO

Actividad tipo: ☑ Ejercicio   Problema   Cuestión   Situación

Descripción: Se van dado pequeños saltos de dificultad en el método de resolución, introduciendo distintas operaciones o modificando los coeficientes de las incógnitas.

Ejemplos:

66. ● Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $25 - 2x = 3x - 35$
b) $4x + 17 = 3x + 24$
c) $7x - 3 = 21x - 9$
d) $1 + 8x = -64x + 46$
e) $5x - 11 = 15x - 33$
f) $2x + 17 = 3x + 2$
g) $70 - 3x = 14 + x$
h) $60 - 5x = x - 12$
i) $100 - 3x = 5x - 28$
j) $10x - 17 = 4x + 85$
k) $3x + 1 = 7x - 11$
l) $11x - 100 = 2x - 1$
m) $25 - 2x = 3x - 80$
n) $19 + 8x = 12x + 14$
ñ) $21y - 3 = 10y + 195$
o) $2 - 6y = 36y - 5$

69. ●● Halla la solución de las ecuaciones.

a) $5(x - 8) = 3(x - 6)$
b) $2(x + 5) = 9x + 31$
c) $-1(x + 3) = 2(6 + x)$
d) $-5(6 - 5x) = 5x - 10$
e) $16 + 5x = x - 3(4 + x)$
f) $-3(6 - 6x) - 3 = x - 4$
g) $-6x = 3(5x + 8) - 3$
h) $(x + 28) + 15 = 2(x + 15)$
i) $(2x + 1) = 8 - (3x + 3)$
j) $2(x - 7) = 6(x + 1)$
k) $2(x - 5) = 5(x - 4)$
l) $6(x - 4) = 3(x - 3)$
m) $3(x - 3) - 4(x - 5) = 6$
n) $6(x - 3) + 5(x + 4) = 15$

75. ●● Resuelve, simplificando todo lo que puedas.

a) $4x + \frac{1}{2} = \frac{3x - 4}{2}$
b) $\frac{4x + 4}{3} = \frac{x + 6}{2}$
c) $3(x - 2) - \frac{2x}{2} = 4(x + 3)$
d) $3(x + 1) - \frac{6(x - 2)}{3} = 5$
e) $\frac{3(x - 1)}{3} + \frac{10(x + 1)}{5} = 2x + \frac{1}{4}$
f) $\frac{2(x - 1)}{2} + \frac{3(x - 1)}{3} + \frac{8(x + 2)}{4} = 5x - 1$
g) $\frac{2(x - 3)}{5} - \frac{2(x + 2)}{7} - 5 = x + 1$

Ubicación: Tema 6 – Iniciación al álgebra; pág. 126-127.

Tabla 26. Actividad propuesta en 1º ESO

Actividad tipo: Ejercicio   ☑ Problema   Cuestión   Situación

Descripción: Se plantean problemas en los que el enunciado describe una situación próxima a la realidad del alumno, con el fin de facilitar una resolución correcta.

Ejemplo:

94. ●● En un colegio hay dos grupos de 1.º ESO con 24 alumnos cada uno.

a) Si las chicas de 1.º A son el doble que los chicos, ¿cuántas chicas hay en la clase?
b) Si el número de chicas de 1.º B supera en cuatro al número de chicos, ¿cuántos chicos hay?

Ubicación: Tema 6 – Iniciación al álgebra; pág. 129.

Tabla 27. Actividad propuesta en 1º ESO

Actividad tipo: Ejercicio ☑ Problema Cuestión Situación

Descripción: En los problemas de este tipo aumenta la dificultad, ya que técnicamente se pide el planteamiento de un sistema de ecuaciones y su resolución. En 1º de ESO no se han tratado situaciones de este tipo. Los estudiantes suelen resolver este tipo de problemas mediante el tanteo de distintas posibilidades.

Ejemplo:


97. ●●● Las gallinas y conejos de una granja suman en total 30 cabezas y 90 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?

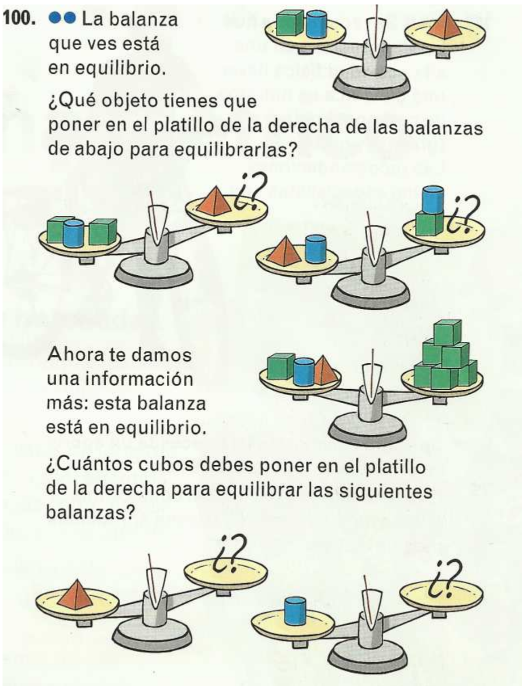
Ubicación: Tema 6 – Iniciación al álgebra; pág. 129.

Tabla 28. Actividad propuesta en 1º ESO

Actividad tipo: Ejercicio ☑ Problema Cuestión Situación

Descripción: Se presenta un problema con tres incógnitas y varias igualdades. Al contrario de lo habitual, no se trabaja la comprensión de un enunciado, sino de varias representaciones gráficas. El concepto involucrado es “sistemas de ecuaciones”, pero para los alumnos se presenta como un reto o juego. Al tratarse de equivalencias sencillas, es muy probable que los alumnos sepan resolverlo sin demasiada dificultad.

Ejemplo:


100. ●● La balanza que ves está en equilibrio.
¿Qué objeto tienes que poner en el platillo de la derecha de las balanzas de abajo para equilibrarlas?
Ahora te damos una información más: esta balanza está en equilibrio.
¿Cuántos cubos debes poner en el platillo de la derecha para equilibrar las siguientes balanzas?

Ubicación: Tema 6 – Iniciación al álgebra; pág. 129.

Tabla 29. Actividad propuesta en 1º ESO

3.3 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º ESO

Se ha analizado el libro de texto de 2º ESO *Matemáticas 2º ESO. Proyecto Casa del saber* de la editorial Santillana. Los contenidos de este curso también están distribuidos en 14 temas, pero, en este caso, tres de ellos están dedicados al álgebra. Es el curso de todos los analizados que más temas dedica a esta materia.

Estos tres temas son:

- Tema 5: Expresiones algebraicas (18 páginas y 88 actividades).
- Tema 6: Ecuaciones de primer y segundo grado (20 páginas y 103 actividades).
- Tema 7: Sistemas de ecuaciones (16 páginas y 68 actividades).

Al igual que en el curso anterior, en la siguiente tabla mostramos una clasificación de dichas actividades según su tipología:

	Tema 5	**Tema 6**	**Tema 7**
Ejercicios	78%	58%	49%
Problemas	18%	40%	49%
Cuestiones	4%	2%	2%
Situaciones	-	-	-

Tabla 30. Porcentajes de los tipos de actividades en el libro de 2º ESO

Hay que destacar el notable incremento de los problemas en el total de actividades de cada tema, tratando cada vez más de buscar la comprensión frente a la resolución mecánica.
A continuación presentamos una muestra que pretende ser representativa del tipo de actividades propuestas en la lección.

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Este tipo de ejercicios buscan afianzar el lenguaje simbólico a través de la transformación de informaciones descritas en lenguaje natural.
Se busca la capacidad de transformación de un enunciado en lenguaje algebraico, utilizando ya sólo letras y números unidos por signos de las operaciones aritméticas.

Ejemplo:

32. Expresa en lenguaje algebraico estos enunciados.
a) El doble de un número más 5.
b) El triple de un número menos 6.
c) El doble de la suma de un número más 4.
d) La mitad de la diferencia de un número menos 8.
e) El cuadrado de la suma de un número más 7.
f) El cubo de la mitad de un número.
g) La mitad del cuadrado de un número.
h) Un número más su cuadrado.
i) El cuádruple del cuadrado de un número.
j) La mitad de un número menos 3.

Ubicación: Tema 5 – Expresiones algebraicas; pág. 106.

Tabla 31. Actividad propuesta en 2º ESO

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Con estos ejercicios se pretende que el estudiante adquiera seguridad y agilidad en las operaciones con monomios, al mismo tiempo que afiance el orden de operaciones correcto para la resolución de operaciones combinadas.

Ejemplo:

●● Opera y reduce.

a) $12x \cdot 3x^2 : x + 14x \cdot x^3 : 7x^2$
b) $16x \cdot x^3 : (-4) + 9x^5 : x^4 \cdot (-3x^3)$
c) $3x^2 \cdot (10 \cdot 5x^3) - 10x^4 \cdot 6x^2 : 2x$
d) $(5x^2 - 2x^2 + 7x^2) \cdot (4x^3 - x^3 + 6x^3)$
e) $(-4xy^2 + 9xy^2) : (3xy + 2xy)$
f) $(x^3 - 8x^3 + 4x^3) \cdot (y - 3y + 5y)$

Ubicación: Tema 5 – Expresiones algebraicas; pág. 107.

Tabla 32. Actividad propuesta en 2º ESO

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Se mide la comprensión e identificación de todos los elementos que forman parte de un polinomio, base para la resolución de ejercicios y problemas más complejos.

Ejemplo:

51. ● Identifica estos elementos de los polinomios.

a) Número de términos de $x^3 - x^2 + 4x + 5x^4 - 6$.
b) Término independiente de $y + 3y^4 - 3y^3$.
c) Grado de $R(x, y) = 5x^3y^2 + 6y^4 - 3x^4y^3 + 8x^2$.
d) Coeficientes de $\frac{7 - 2x + 10x^3}{3}$.

Ubicación: Tema 5 – Expresiones algebraicas; pág. 107.

Tabla 33. Actividad propuesta en 2º ESO

Actividad tipo: Ejercicio ☑ Problema Cuestión Situación

Descripción: Se aplican los ejercicios sobre expresiones algebraicas a situaciones reales y cotidianas.

Ejemplo:

81. ●● Si x es la edad actual de Jorge y Pedro tiene 8 años más que él, contesta a estas preguntas utilizando expresiones algebraicas.

a) ¿Cuál será la edad de Jorge dentro de 20 años?
b) ¿Qué edad tenía Jorge hace 7 años?
c) ¿Cuándo tendrá Jorge el doble de la edad que tiene ahora?
d) ¿Cuál es la edad actual de Pedro?
e) ¿Cuál será la edad de Pedro dentro de 15 años?
f) ¿Hace cuántos años Pedro tenía la mitad de la edad actual de Jorge?
g) ¿Dentro de cuántos años tendrá Jorge el doble de la edad actual de Pedro?

Ubicación: Tema 5 – Expresiones algebraicas; pág. 109.

Tabla 34. Actividad propuesta en 2º ESO

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Como en el curso anterior, se siguen proponiendo actividades que requieren la solución de ecuaciones de primer grado. El objetivo es mejorar la correcta aplicación de la técnica, superando especialmente las dificultades que plantean los signos negativos y los coeficientes fraccionarios.

Ejemplo:

51. ● Halla la solución de las ecuaciones.

a) $-5x = 45$
b) $6x = -36$
c) $3x = 2$
d) $8x = 48$
e) $-12x = -72$
f) $\frac{x}{-3} = 8$
g) $\frac{x}{4} = \frac{1}{4}$
h) $\frac{x}{15} = 1$
i) $\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$
j) $x + 4 + x = 18 + 3$
k) $x + 3x + 4x = 8$
l) $5x - 2 + 2x = 6x + 8$
m) $4x + 3x - 2x = 45$
n) $-x + 4x - 3 = 5 - 2x$

Ubicación: Tema 6 – Ecuaciones de primer y segundo grado; pág. 125.

Tabla 35. Actividad propuesta en 2º ESO

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: En este curso el alumno se enfrenta por primera vez a ecuaciones de segundo grado. En este tipo de ejercicios, tiene que ordenar las ecuaciones para poder aplicar correctamente la fórmula.

Ejemplo:

67. ●● Obtén la solución de las ecuaciones.

a) $x^2 - 3x = x - 2$
b) $x^2 - 2x = -1$
c) $x^2 + 5 = 6x$
d) $x - 12 = -x^2$
e) $2x^2 - 7x + 3 = 0$
f) $6x^2 = 5x - 1$
g) $3x^2 - 1 = -2x$
h) $5x = 3 - 2x^2$

Ubicación: Tema 6 – Ecuaciones de primer y segundo grado; pág. 127.

Tabla 36. Actividad propuesta en 2º ESO

Actividad tipo: Ejercicio ☑ Problema Cuestión Situación

Descripción: En la resolución de problemas, tras haber superado el nivel inicial de la expresión algebraica, el siguiente nivel es la traducción de problemas que suponen ecuaciones sencillas, normalmente de primer grado.

Ejemplo:

82. ●● En el zoológico hay el doble de tigres que de panteras, y sabemos que en total son 171 animales. Determina cuántos hay de cada especie.

Ubicación: Tema 6 – Ecuaciones de primer y segundo grado; pág. 128.

Tabla 37. Actividad propuesta en 2º ESO

Actividad tipo: Ejercicio ☑ Problema Cuestión Situación

Descripción: En este caso, se profundiza en la familiarización con las ecuaciones de segundo grado, tanto su planteamiento y resolución, como la discriminación de soluciones que no pueden ser aplicables al problema (en este caso, soluciones negativas para longitudes).

Ejemplo:

96. ●●● Halla la longitud del lado de una parcela cuadrada si su área, más cinco veces su lado, menos 18, es igual a 482.

Ubicación: Tema 6 – Ecuaciones de primer y segundo grado; pág. 129.

Tabla 38. Actividad propuesta en 2º ESO

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: En el tema dedicado a los sistemas de ecuaciones, la mayor parte de los ejercicios exigen la aplicación de las distintas técnicas para la resolución de los sistemas. En el presente ejercicio, además, se busca que el alumno tenga la capacidad de decidir el método de resolución más adecuado para cada caso.

Ejemplo:

●● Resuelve por el método más adecuado.

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = 4 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 2x + 5y = 11 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x + y = 9 \\ 20x - 3y = -4 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = -25 \\ 12x - 3y = 75 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} 5x - y = 23 \\ -9x + 5y = 13 \end{array}\right\}$

Ubicación: Tema 7 – Sistemas de ecuaciones; pág. 143.

Tabla 39. Actividad propuesta en 2º ESO

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Como en los ejercicios de la tabla 40, se trabaja la transformación del lenguaje natural al algebraico. En los sistemas de ecuaciones se mide la capacidad de asignar incógnitas a los datos desconocidos que nos proporcionan los enunciados, desde enunciados numéricos sencillos hasta la utilización de magnitudes cotidianas.

Ejemplo:

48. ●● **Expresa mediante una ecuación lineal con dos incógnitas estos enunciados, e indica qué representan las incógnitas.**

a) La suma de dos números es 15.

b) La mitad de un número más el doble de otro es igual a 52.

c) La diferencia entre las edades de un padre y un hijo es 28 años.

d) He recorrido 20 km más que tú.

e) Tengo 16,50 € en monedas de 1 € y 50 céntimos.

f) El precio de 2 kg de naranjas y 3 kg de manzanas es 5,80 €.

g) Dos bocadillos y tres refrescos cuestan 14 €.

h) El perímetro de un rectángulo es 32 m.

¿Cuántas soluciones tiene cada ecuación? Da una solución para cada una.

Ubicación: Tema 7 – Sistemas de ecuaciones; pág. 144.

Tabla 40. Actividad propuesta en 2º ESO

Actividad tipo: Ejercicio ☑ Problema Cuestión Situación

Descripción: Se presentan problemas con enunciados reales, donde son muy recurrentes las situaciones referentes a las edades. El alumno debe identificar correctamente las incógnitas y relacionarlas con diferentes momentos en el tiempo.

Ejemplo:

60. ●● Pablo tiene 8 años, y su hermana, 2 años. ¿Al cabo de cuántos años la edad de Pablo será el doble que la de su hermana?

Ubicación: Tema 7 – Sistemas de ecuaciones; pág. 145.

Tabla 41. Actividad propuesta en 2º ESO

3.4 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO

Se ha analizado el libro de texto de 3º ESO *Matemáticas 3º ESO. Proyecto Casa del saber* de la editorial Santillana. Al igual que los anteriores, nos encontramos 14 temas, de los cuales dos pertenecen al ámbito algebraico:

- Tema 4: Ecuaciones de primer y segundo grado (20 páginas y 100 actividades).
- Tema 5: Sistemas de ecuaciones (18 páginas y 92 actividades).

En este curso, la tipología de las actividades se desarrolla de la siguiente forma:

	Tema 4	Tema 5
Ejercicios	56%	67%
Problemas	41%	32%
Cuestiones	3%	1%
Situaciones	-	-

Tabla 42. Porcentajes de los tipos de actividades en el libro de 3º ESO

Observamos que, como en el curso anterior y a diferencia de 1º de ESO, los problemas tienen una presencia importante, casi similar al de los ejercicios. Por otra parte, mínimas actividades planteadas como cuestiones, y nula presencia de situaciones.

A continuación presentamos una muestra que pretende ser representativa del tipo de actividades propuestas en la lección:

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Como en los cursos anteriores, las actividades que requieren la resolución de ecuaciones de primer grado tienen mucho protagonismo. A lo largo del tema se recuerda los pasos a seguir para resolverlas con éxito.

Ejemplo:

57. ● Obtén la solución de estas ecuaciones.

a) $\frac{2x-10}{3} - \frac{3(x-12)}{4} = -1$

b) $\frac{-3x-3}{5} = 3 - 4(x+2)$

c) $\frac{2x-5}{5} + \frac{x+1}{4} = 20 - x$

d) $\frac{3-x}{7} - x = \frac{3+2(x-1)}{14}$

e) $\frac{4x-6}{10} + 2x = 21 - \frac{3(x+1)}{12}$

Ubicación: Tema 4 – Ecuaciones de primer y segundo grado; pág. 89.

Tabla 43. Actividad propuesta en 3º ESO

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Al igual que en la actividad anterior, se pide la aplicación de la técnica, pero en este caso con la dificultad añadida de tratarse de ecuaciones de segundo grado y, por tanto, intervenir la raíz cuadrada y la posibilidad de solución múltiple.

Ejemplo:

68. ●● Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $(x+1)(x-3)+3=0$

b) $(x+9)(x-9)=3(x-27)$

c) $x(3x-2)=65$

d) $4x-(x^2-4)=2x-4$

e) $(2x+3)(2x-3)=135$

f) $x^2 - \frac{23}{4}x = 18$

g) $x^2 - 7x + \frac{13}{4} = 0$

Ubicación: Tema 4 – Ecuaciones de primer y segundo grado; pág. 90.

Tabla 44. Actividad propuesta en 3º ESO

Actividad tipo: Ejercicio ☑ Problema Cuestión Situación

Descripción: Los problemas algebraicos siguen teniendo mucha importancia en el total de las actividades del tema. En este caso, el hecho de que deban identificar las incógnitas y situarlas correctamente en el tiempo, aporta complejidad a la cuestión.

Ejemplo:

79. ●● Miguel tiene 4 años más que su primo Ignacio y, dentro de 3 años, entre los dos sumarán 20 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Ubicación: Tema 4 – Ecuaciones de primer y segundo grado; pág. 92.

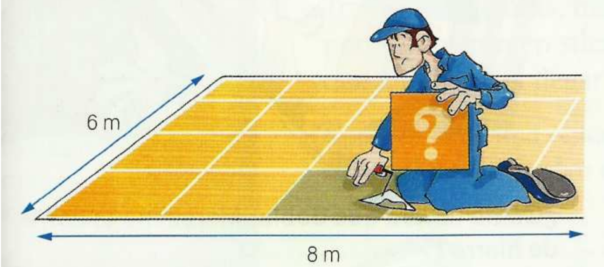
Tabla 45. Actividad propuesta en 3º ESO

Actividad tipo: Ejercicio ☑ Problema Cuestión Situación

Descripción: Son recurrentes los planteamientos en los que la geometría es utilizada para presentar problemas algebraicos.

Ejemplo:

●● Para embaldosar un salón de 8 m de largo por 6 m de ancho se han utilizado 300 baldosas cuadradas. ¿Cuánto mide el lado de las baldosas?



Ubicación: Tema 4 – Ecuaciones de primer y segundo grado; pág. 93.

Tabla 46. Actividad propuesta en 3º ESO

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Como paso previo a los sistemas de ecuaciones, se intenta afianzar la idea de que un par de valores puede tener infinitas ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Ejemplo:

3 Escribe dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tengan como solución $x = 3$, $y = -2$.

Ubicación: Tema 5 – Sistemas de ecuaciones; pág. 96.

Tabla 47. Actividad propuesta en 3º ESO

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: A través de la representación gráfica, el alumno puede comprender e interpretar el significado de la solución de un sistema de ecuaciones.

Ejemplo:

41. ● Resuelve gráficamente los sistemas de ecuaciones, e indica de qué tipo son.

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ 3x - 4y = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 \\ 6x + 3y = 6 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 5 \end{array}\right\}$

Ubicación: Tema 5 – Sistemas de ecuaciones; pág. 107.

Tabla 48. Actividad propuesta en 3º ESO

Actividad tipo: ☑ Ejercicio Problema Cuestión Situación

Descripción: Como en el curso anterior, se sigue trabajando la resolución de sistemas de ecuaciones. En este caso, el alumno debe operar para reorganizar las ecuaciones y, posteriormente, seleccionar el método más adecuado.

Ejemplo:

60. ●● Resuelve por el método que consideres más adecuado.

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x - 2) = y - 4 \\ 3y - 2x = 0 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 3(x + y) - x + 2y = 15 \\ 2x - (y + 8) = -11 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -5(y - 2) = x - 2 \\ x - 3y = -4 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} 3(x + 2) - 7(x + y) = 5 \\ 5(x + 1) - y = 14 \end{array}\right\}$

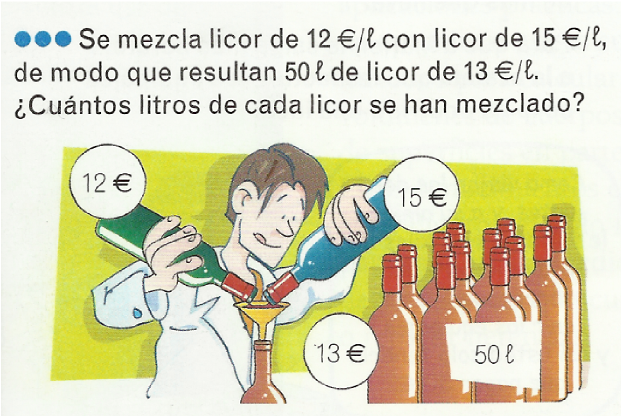
Ubicación: Tema 5 – Sistemas de ecuaciones; pág. 108.

Tabla 49. Actividad propuesta en 3º ESO

Actividad tipo: Ejercicio ☑ Problema Cuestión Situación

Descripción: Se plantean problemas en los que el alumno debe identificar las incógnitas y, sobre todo, encontrar dos igualdades que conformen un sistema a partir del cual poder obtener los valores de la solución.

Ejemplo:



Ubicación: Tema 5 – Sistemas de ecuaciones; pág. 111.

Tabla 50. Actividad propuesta en 3º ESO

Capítulo 4
Resultados

En este capítulo se establece una correspondencia entre los descriptores del currículo de cada curso y los temas que se incluyen en los libros analizados, es decir, se trata de describir cómo la normativa es efectivamente abordada en los libros. Se realiza un estudio para cada curso.

Tercer ciclo de Primaria

En el currículo del último ciclo de primaria se incluyen, dentro del bloque de Geometría, los contenidos sobre el uso de los ejes cartesianos. En el libro analizado encontramos cinco temas dedicados a la geometría, pero en ninguno de ellos hallamos referencias a los ejes cartesianos. Donde se ubica la enseñanza de este contenido es en el capítulo dedicado a los números enteros.

A su vez, la enseñanza de los números enteros no está contemplada en el currículo oficial para Primaria, sino que ésta se reserva para 1º ESO, y en Primaria se limita a exigir el aprendizaje de los números naturales. Aun así, en el libro se incluye un tema dedicado a los números enteros, donde enseñan a comparar, sumar, restar y representar en la recta real.

Por otro lado, para el aprendizaje de la proporcionalidad, a pesar de que en el libro hay un tema reservado para ello, no se ha hallado ninguna referencia a la regla de tres, pese a que en el currículo oficial se presenta esta técnica ligada a la proporcionalidad. Así pues, para resolver las cuestiones que se plantean en el tema se presenta la técnica de reducción a la unidad, que puede ser más intuitiva y hace más comprensible el proceso. Sin embargo, las dos magnitudes que se presentan siempre tienen por cociente un número natural; nunca el resultado es una fracción.

	Bizcocho para 4 per.		**Bizcocho para 1 per.**
Situación usual	4 vasos de harina	: 4	1 vaso de harina
Situación imposible	7 vasos de azúcar	: 4	7 / 4 vasos de azúcar

Tabla 51. Técnica de reducción a la unidad

1º ESO

Todos los descriptores están incluidos en el temario del libro. En este curso, se introduce al estudiante en el campo del álgebra, algo totalmente desconocido para él. Para que se familiarice con ello, en los libros de texto se encuentra un gran número de actividades que requieren la transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico. En cuanto a la resolución de ecuaciones, se platean fórmulas sencillas, en las que, a partir de la aplicación de la técnica, se obtiene el resultado.

El resto de descriptores los encontramos en otros temas. La proporcionalidad constituye un tema, “Proporcionalidad numérica”. Como establece la normativa, se hace hincapié en la resolución de problemas.

En el tema 13 – Funciones y Gráficas, se encuentran tanto los conceptos de proporcionalidad directa a partir de análisis de su tabla de valores, como lo más propiamente destinado a la organización e interpretación de informaciones diversas mediante tablas y gráficas.

Es interesante hacer notar que en la normativa, la proporcionalidad está incluida en dos bloques: por un lado, en el bloque 2 (números), bajo el concepto de razón y proporción; y por otro lado, en el bloque 5 (funciones y gráficas), donde se propone el estudio de la proporcionalidad a través de la tabla de valores. Como se expone en los párrafos anteriores, en los libros de texto se trabaja de manera similar, separando estos conceptos en dos temas distintos. No se encuentra ninguna referencia a la relación entre la proporcionalidad numérica y la función lineal o afín.

2º y 3º ESO

Los contenidos fijados en la normativa de 2º ESO y 3º ESO empiezan a profundizar en el manejo de las ecuaciones, de primer y segundo grado, y su utilización en la resolución de problemas. Los sistemas de ecuaciones están incluidos en los contenidos de 3º ESO, aunque en los libros de texto los encontramos en 2º, e incluso en 1º se propone alguna actividad aislada (Tabla 28)

En 2º ESO, la interpretación de la proporcionalidad se integra en el bloque 5 de funciones y gráficas: “Interpretación de la constante de proporcionalidad”. No obstante, en el libro de texto no se encuentra ninguna actividad que lo trabaje. Por otro lado, dentro del mismo bloque 5, también se pretende la “interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes”. Sin embargo, en los libros analizados no se han hallado actividades que hagan referencia a este tipo de relación, la cual, en el caso de las funciones lineales, es la de proporcionalidad.

Síntesis general libros de texto

En general, del análisis realizado a los materiales se pueden resaltar las siguientes claves.

En todos los cursos estudiados destaca el importante predominio de ejercicios en el total de actividades de cada tema, con un porcentaje siempre superior al 50%.

Por otro lado, es también notable la ausencia de cuestiones que requieran al alumno argumentar o justificar, con una presencia ínfima (2-3%) y sin variación a lo largo de todos los niveles de la etapa secundaria.

En cuanto a los problemas que se proponen en los libros, se han hallado una parte de ellos que, pese a que se incluyen en el bloque “Álgebra”, pueden ser resueltos por métodos aritméticos de manera sencilla. Como ejemplo se presenta un problema propuesto en 2º ESO (ver tabla 37). Se trata de un problema típico que se presenta en el tema de “Álgebra” cuya resolución aritmética sería 171:3=57, luego hay 57 panteras y 57+57=114 tigres.

En general, del total de actividades presentadas hay que destacar la falta de tareas que supongan un desafío algebraico para los estudiantes. Esta misma conclusión se extrae del capítulo 5, donde se realiza un análisis detallado del libro de texto utilizado por los alumnos. Todo esto motiva la necesidad la necesidad de una situación que suponga un envite epistemológico para los estudiantes en el paso de la aritmética al álgebra. La situación *El planeta de los yunis* (capítulo 8) es una respuesta a esta necesidad.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio del paso de la aritmética al álgebra en 1º ESO

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de estudio que trata del paso de la aritmética al álgebra, llevado a cabo en un grupo de estudiantes de 1º ESO, en el marco de la asignatura de Matemáticas Básicas.

Para contextualizarlo, en el capítulo 5 se ha realizado un análisis de los materiales de la asignatura; y en el siguiente se prevén las dificultades y errores que pueden aparecer en el desarrollo de la experiencia. El capítulo 7 está reservado a describir el proceso de estudio: la distribución de los tiempos en el aula, y las actividades y tareas que se proponen. La situación en sí se desarrolla en el capítulo 8, comentándose los resultados generales obtenidos. Es en el siguiente y último capítulo donde se analiza un caso único de forma más pormenorizada.

La síntesis y conclusiones reflejadas en la parte final de este bloque se extraen del análisis comparativo entre las previsiones y los resultados obtenidos posteriormente.

Capítulo 5

El álgebra en el libro de texto de referencia

La asignatura donde se enmarca este proceso de estudio es una optativa de refuerzo de matemáticas que se oferta en 1º ESO (Matemáticas básicas). Los libros que se trabajan son unos cuadernillos de ejercicios y problemas de la editorial Bruño. Esto supone que el análisis derivado sea algo particular ya que no trabajamos sobre una lección usual donde se intercalan la parte teórica con las actividades.

Para nuestro tema se han analizado dos de estos cuadernillos:

- 30 ÁLGEBRA. Lenguaje simbólico y ecuaciones de primer grado
- 31 ÁLGEBRA. Ecuaciones y funciones de primer grado. Ejercicios y problemas.

En el primer apartado de este capítulo, para el análisis de la lección se ha tomado como texto de referencia el artículo *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta* (Godino, Font y Wilhelmi, 2006). Este texto analiza una lección de un libro de 5º grado de educación primaria a través del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática.

En el siguiente apartado se presenta un análisis que profundiza en las tipologías de actividades planteadas en estos materiales. En el anexo XX se incluye una tabla con los resultados puramente cuantitativos de este estudio.

5.1 Objetos matemáticos involucrados

Para examinar el contenido del cuadernillo, se han analizado los principales objetos y relaciones implicadas en la resolución de problemas de álgebra en el nivel de 1º de E.S.O., tomando como referencia el análisis realizado en el artículo *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta* antes citado.

Los elementos estudiados son: el lenguaje (verbal, gráfico y simbólico) utilizado, los conceptos o nociones presentes, las propiedades relevantes para el desarrollo del tema, las situaciones o problemas planteados y los procedimientos o acciones realizados en relación a estos problemas.

<table>
<tr><th colspan="3">LENGUAJE</th></tr>
<tr><td colspan="2">SIMBÓLICO</td><td>- Incógnitas: x, y, a, b.
- Prioridad de operaciones: [] , () jerarquía de los paréntesis
- Números enteros: - 4, + 5, - 18, 0,…
- Designación de puntos en el plano: (x, y)</td></tr>
<tr><td colspan="2">GRÁFICO</td><td>Ejes cartesianos para representar puntos o rectas</td></tr>
<tr><td rowspan="5">VERBAL</td><td>Nociones, procesos y significados algebraicos.</td><td>Expresión, valor numérico, lenguaje simbólico, fracción, igualdad, ecuación, común denominador, incógnita, solución, miembro, propiedad distributiva, operaciones, tanteo, errores, unidades, etc.</td></tr>
<tr><td>Relaciones y fórmulas geométricas, y términos relacionados.</td><td>Perímetro, lado, altura, base, área; cuadrado, triángulo equilátero, rectángulo, paralelos, ángulos, paralelogramos, segmentos, etc.</td></tr>
<tr><td>Relaciones numéricas</td><td>Opuesto, inverso, consecutivos, equivalente, mitad, triple, tercio, cuádruplo, doble, quíntuplo, cuarta parte, dos quintos, tres octavos, mayor que, pares, impares, múltiplos, etc.</td></tr>
<tr><td>Operaciones</td><td>Se diferencian, añadir, al sumarle, disminuido, su diferencia, su suma, etc.</td></tr>
<tr><td>Nociones de funciones</td><td>Coordenadas, punto, tablas de valores, gráfica, ejes de coordenadas, función, etc.</td></tr>
</table>

Tabla 52. Análisis del lenguaje en los cuadernillos

<table>
<tr><th colspan="3">CONCEPTOS</th></tr>
<tr><td rowspan="5">PREVIOS</td><td>Números naturales y enteros</td><td>- Operaciones con números enteros
- Jerarquía de operaciones
- Raíces cuadradas
- Operaciones con potencias</td></tr>
<tr><td>Decimales</td><td>- Aproximaciones y errores</td></tr>
<tr><td>Fracciones</td><td>- Operaciones con fracciones
- Fracciones equivalentes
- Fracción irreducible</td></tr>
<tr><td>Divisibilidad</td><td>- Números primos
- Múltiplos y divisores de un número
- Factorización de un número
- Mínimo común múltiplo</td></tr>
<tr><td>Geometría</td><td>- Áreas y perímetros de figuras planas
- Teorema de Pitágoras</td></tr>
<tr><td>EMERGENTES</td><td>Ecuaciones</td><td>- Lenguaje algebraico
- Elementos de las ecuaciones
- Ecuaciones equivalentes</td></tr>
</table>

Tabla 53. Análisis de los conceptos en los cuadernillos

PROPIEDADES
- Distributiva / sacar factor común - Conmutativa, asociativa y elemento neutro de la suma - Conmutativa, asociativa y elemento neutro de la multiplicación - Propiedades de la igualdad Si a = b   a+c = b+c Si a = b   a - c = b - c Si a = b   a c = b c Si a = b $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Tabla 54. Análisis de las propiedades en los cuadernillos

SITUACIONES	
Problemas descontextualizados	Traducir expresiones al lenguaje simbólico. Traducir expresiones al lenguaje simbólico y hallar su valor numérico.
Problemas contextualizados	Plantear ecuaciones de primer grado a partir de un enunciado y hallar su solución. Hallar valores desconocidos de figuras planas geométricas, aplicando los conceptos de área, perímetro y otras propiedades de las figuras (triángulo equilátero, isósceles, polígonos regulares,…)

Tabla 55. Análisis de las situaciones en los cuadernillos

PROCEDIMIENTOS	
ÁLGEBRA	Reconocer las expresiones algebraicas Hallar el valor numérico de una expresión algebraica Sumar y restar monomios Resolver ecuaciones de primer grado Solucionar problemas planteando ecuaciones de primer grado
FUNCIONES Y GRÁFICAS	Dibujar sistemas de ejes cartesianos Usar las coordenadas artesianas para representar puntos en el plano Hallar las coordenadas de un punto del plano Representar una función mediante el lenguaje simbólico, tabular y gráfico.

Tabla 56. Análisis de los procedimientos en los cuadernillos

5.2 Análisis global de la unidad didáctica

En los dos cuadernillos se encuentran un total de 416 actividades distribuidas de la siguiente forma según su tipología.

TIPO DE ACTIVIDAD	CANTIDAD	PORCENTAJE
Escribir en lenguaje algebraico	32	8%
Resolución de ecuaciones	200	48%
Comprensión de propiedades	14	3%
Problemas con ecuaciones	126	30%
Actividades algebraicas diversas	18	4%
Funciones y gráficas	26	7%
	416	**100%**

Tabla 57. Resumen cuantitativo según la tipología de la tarea

Es destacable la preeminencia de las actividades que se basan en la aplicación de la técnica. Aquí se incluyen principalmente la resolución de ecuaciones, lo que supone prácticamente la mitad de los ejercicios. En parte, este hecho no debe extrañar demasiado ya que estos materiales están seleccionados con el fin de reforzar la técnica, debido al objetivo de la asignatura en la que están enmarcados.
Por otro lado, la presencia de los problemas es también notable, por lo que más adelante los estudiaremos con más profundidad.

TIPOLOGÍA DE ECUACIONES		
COEFICIENTE = 1	COEFICIENTE ≠1	COEFICIENTE ℚ
12 $x - 3 + 17 = 16 + 3.$	62 $3x + 7 = 8x + 5.$	167 $\frac{5x}{6} + 3 = \frac{10}{9} - \frac{2x}{18}.$
14 $2 + x + 4 = 4 - 9.$	64 $-7x + 2 = -3x - 14.$	168 $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{7x}{6} - 9.$
16 $x - 3 + 8 = 12 - 3.$	65 $3x - 4 - 5x + 2 = -3x - 7.$	180 $\frac{3x-4}{2} + \frac{2x-3}{3} = \frac{5x-3}{6}.$
18 $2 + x - 5 = 8 - 1.$		

Tabla 58. Ejercicios diferenciados según el coeficiente de la incógnita “X”

La tarea necesaria para resolver las ecuaciones de la tabla 58, desde el punto de vista matemático no presenta diferencia ya que en todos los casos se trata de ecuaciones de primer grado. No obstante, las tareas desde el punto de vista cognitivo son distintas, atendiendo al coeficiente que presentan. El que la unidad sea el coeficiente supone que no hay que operar con la incógnita, y únicamente se opera entre los números enteros. Por esta simplicidad se proponen muchos ejercicios de este tipo: hasta el ejercicio número 34 no aparece la primera ecuación con coeficientes varios. El nivel de complejidad aumenta significativamente con la introducción de los números fraccionarios, y de hecho son el tipo de resoluciones donde los estudiantes presentan más dificultad y cometen más errores.

La situación que se presenta en la tabla 59 es similar. En el primer caso, la incógnita sólo aparece una vez en toda la ecuación, lo que implica que no es necesario operar con ella, a diferencia del segundo caso, en el que la incógnita está en ambos miembros por lo que hay que manipularla y operarla entre sí para obtener la solución.

INCÓGNITA EN UN SOLO MIEMBRO	INCÓGNITA EN AMBOS MIEMBROS
a) $2x = 10 \rightarrow x =$	**56** $12 - 6x = -12 + 4x.$
b) $3x - 1 = 11 \rightarrow x =$	**57** $2x - 3 = 4x - 5.$
c) $x - 6 = -3 + 5 \rightarrow x =$	**58** $-6x - 5 = 3x + 3.$
d) $10 + 5x = 15 \rightarrow x =$	**59** $-6x + 6 = -6 + 6x.$
e) $6 + 4 = 2 + 2x \rightarrow x =$	

Tabla 59. Diferenciación de ejercicios según la presencia de la "x" en uno o ambos miembros

Se han encontrado varios ejercicios en el cuadernillo puramente aritméticos, aislados entre las diversas actividades de carácter algebraico. En la tabla 60 se selecciona uno de ellos. Parece ser que la intención de este ejercicio responde a reforzar la jerarquía de las operaciones y ensayar distintas propiedades (distributiva, asociativa, etc.) con el fin de proporcionar seguridad al alumno al trasladarlo al campo algebraico.

No obstante, hay que considerar la existencia de las distintas definiciones de la noción de igualdad y como éstas condicionan la práctica matemática.

En este ejercicio se constata la enseñanza del álgebra como una aritmética generalizada. El hecho de identificar estos dos tipos de ejercicios bajo un mismo el patrón puede generar confusión en los estudiantes, la noción de igualdad es totalmente distinta en los dos casos. En el primero, la igualdad conlleva un avance unidireccional, la igualdad indica acción. En el segundo, en cambio, se trabaja por equivalencias sucesivas hasta obtener un valor para la incógnita por el que se cumple la igualdad.

ÁMBITO ARITMÉTICO	ÁMBITO ALGEBRAICO
130 Efectúa las operaciones de manera indicada:	**118** $4(x + 5) = -2x - 2.$
a) $4[3 + 2(5 - 3)] =$	**170** $2x + 3[2x - 3(2x + 3)] = 0.$
b) $2 + [3(6 + 1) - 4] =$	

Tabla 60. Ensayo de propiedades para su aplicación en las ecuaciones

Por otro lado, dentro de los ejercicios que piden explícitamente la transformación del lenguaje natural al algebraico, se muestra una clasificación según el tipo de tarea demandada (ver tabla 61): en el primer tipo, se pretende la redacción en lenguaje algebraico a partir de un enunciado en lenguaje natural. Éstos suponen la gran mayoría de ejercicios, un 88%, frente al 12% restante. Este segundo tipo de actividades exigen una acción añadida que dota de más sentido a la tarea: establecer una igualdad y hallar el resultado que la verifica.

	TIPO 1	**TIPO 2**
EJEMPLO	Escribe en lenguaje simbólico las siguientes expresiones: *a)* Dos ángulos de un triángulo se diferencian en 20°. ___ *b)* Un número menos 3. ___ *c)* Un número más 3. ___ *d)* El triplo de un número. ___ *e)* La tercera parte de un número. ___	226 Halla un número que es igual a su triple menos 16.
%	88%	12%

Tabla 61. Clasificación de ejercicios de lenguaje algebraico según la tarea exigida

Sobre los problemas formulados en los libros cabe destacar que, en general, todos siguen un mismo patrón: los enunciados son muy simples y claros, no contienen más información que la necesaria y en la gran mayoría de ellos las operaciones que se realizan son con enteros; sólo unos pocos operan con los números fraccionarios.

En la tabla 62 se muestran unos ejemplos clasificados según la extensión del enunciado. Se puede constatar que la inmensa mayoría de los problemas tienen unas directrices sumamente cortas. Esto comporta que las situaciones planteadas sean muy sencillas, ya que para contextualizar un problema en una o dos líneas, éste tiene que ser muy elemental.

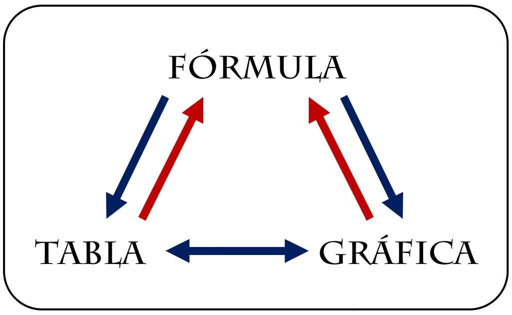
	EJEMPLO	**%**
ENTRE 1 Y 2 LÍNEAS	73 Carmina tiene 8 años más que su primo y hace 4 años tenía el doble que éste. ¿Qué edad tiene cada uno? *Solución:* 124 En el laboratorio de mi colegio hay animales de dos y de cuatro patas. Si en total cuento 68 cabezas y 184 patas, ¿cuántos habrá de cada clase? *Solución:*	87%
3 LÍNEAS	131 Un avión nodriza sale para repostar a otro que se encuentra a 450 km de distancia, que lleva una velocidad de 600 km/h y va en el mismo sentido. Si la velocidad del nodriza es de 780 km/h, ¿cuánto tiempo tardará en producirse el encuentro? *Solución:* 109 Un albañil levantó 3 tabiques con 2 850 ladrillos. En el primero gastó un tercio de ladrill más que en el segundo, y en éste, una cuarta parte de los que utilizó en el tercero. ¿Cuántos ladrillos empleó en cada tabique? *Solución:*	11%

Tabla 62a. Organización de los problemas según la extensión de su enunciado

	EJEMPLO	%
4 o MÁS LÍNEA S	92 Una pareja de dálmatas se encuentran con una jauría y preguntan al perrero cuántos son. El perrero dice: «Los que son, más tantos como los que son, más la mitad de los que son, más la mitad de la mitad de los que son, y contándoos a vosotros también, entonces seríais 101». ¿Cuántos perros tiene la jauría? *Solución:* 115 Un pastor, al morir, deja un rebaño para repartir entre sus hijos. El mayor recibe la cuarta parte del rebaño y 1 oveja; el segundo, la cuarta parte de lo que quede más 2 ovejas, y así sucesivamente. Al contar lo que les ha correspondido en el reparto observan que todas las partes son iguales. ¿Cuántas ovejas e hijos tenía el pastor? *Solución:*	2%

Tabla 62b. Organización de los problemas según la extensión de su enunciado

Al final de los materiales estudiados, hay unas actividades dedicadas a las funciones, concretamente a las transformaciones entre sus distintos lenguajes de expresión (tabular, gráfico y simbólico).



En la tabla de la izquierda, se reflejan las distintas opciones de intercambio. Las flechas de color rojo indican los procesos más complejos (inversos). De estos sólo encontramos un ejemplo de cada uno. Los ejercicios más trabajados son los que parten de la fórmula requiriendo la tabla o la gráfica (proceso directo), o las conversiones entre la tabla de valores y la gráfica de la función.

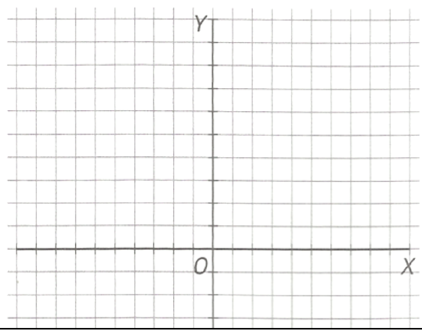
	Proporción	Ejemplo
Proceso directo	13/15	153 Representa estas funciones: $y=-x$; $y=\frac{x}{4}-2$; $x=4$; $-y=x$. 

Tabla 63a. Ejercicios de relación entre los distintos lenguajes: simbólico, tabular y gráfico

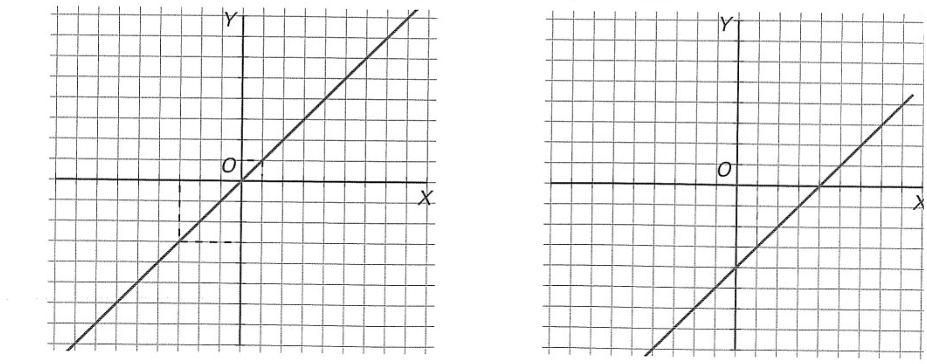
<table>
<tr><th></th><th>Proporción</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Proceso inverso</td><td rowspan="2">2/15</td><td>
150 Halla las funciones cuyas tablas de valores tienes aquí debajo:
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>–1</td></tr>
<tr><td>y</td><td>–2</td><td>2</td><td>6</td><td>–6</td></tr>
</table>
y =
<table>
<tr><td>x</td><td>3</td><td>–2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>y</td><td>7</td><td>–3</td><td>1</td></tr>
</table>
y =
</td></tr>
<tr><td>
158 Dadas las dos gráficas, ¿sabrías decir qué funciones representan?


Tabla
<table>
<tr><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Función:
Tabla
<table>
<tr><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Función:
</td></tr>
</table>

Tabla 63b. Ejercicios de relación entre los distintos lenguajes: simbólico, tabular y gráfico

Capítulo 6

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

El objetivo de este capítulo es realizar un estudio a priori de las posibles dificultades y errores previsibles en la realización de la experiencia en torno al tema del álgebra en un aula de 1º ESO. El análisis de ellos y de su posible origen puede ayudar al desarrollo de metodologías de enseñanza que tengan en cuenta estos obstáculos para evitarlos o intentar minimizarlos.

6.1 Dificultades

El aprendizaje de las matemáticas genera dificultades de diversa índole. Éstas pueden ser de origen didáctico (asociadas al método de enseñanza), epistemológico (intrínsecas al propio concepto matemático) o cognitivo (ligadas a las características del alumno).

Lacasta, Madoz y Wilhelmi (2006) analizan las dificultades que se pueden encontrar con relación a estas tres dimensiones. Desde la *dimensión didáctica*, señalan los autores, muchos libros enfocan las unidades de álgebra con un marcado carácter aritmético. Se presenta el álgebra como una ampliación de la aritmética en la que se puede actuar igual que antes, únicamente cambiando los números por letras. Esta presentación del álgebra como una aritmética generalizada provoca que los alumnos doten a los símbolos del mismo significado que tenían en la aritmética. Además, las técnicas algebraicas se rutinizan de forma que en las actividades se ensayan las propiedades de las operaciones de forma totalmente mecánica, vacías de todo significado.

La razón de que se imparta la materia con este enfoque puede encontrar respuesta en el hecho de que es una forma rápida de llegar a todos los estudiantes del aula, los cuales tienen distintos niveles de conocimiento entre sí, en el tiempo limitado que establece el contexto escolar. No obstante resulta un instrumento útil a corto plazo ya que a largo plazo dificulta el acceso a un álgebra más avanzada.

Respecto a la *dimensión epistemológica*, hay que considerar la existencia de las distintas definiciones de la noción de igualdad y como éstas condicionan la práctica matemática. En un contexto aritmético, la noción fundamental que acompaña a la idea de igualdad es la de identidad y relación de orden, la igualdad indica acción. En el contexto algebraico la igualdad actúa como equivalencia y función.

En cuanto a la *dimensión cognitiva*, el grupo con el que se ha trabajado está compuesto por 15 alumnos de 1º ESO en el contexto de la asignatura de Matemáticas Básicas. Podríamos definir este contexto con los siguientes aspectos: por un lado, todos los alumnos han asistido a clase de las correspondientes unidades didácticas de álgebra en la asignatura de Matemáticas; por otro, en la propia asignatura de Matemáticas Básicas también lo han recibido. Además es interesante hacer notar que los estudiantes que eligen esta asignatura lo hacen en detrimento de un segundo idioma (Francés o Alemán). Así, el perfil de alumno que recibe esta asignatura es habitualmente aquel que necesita reforzar las Matemáticas troncales. Esto ocasiona que un porcentaje moderadamente alto de alumnos presenten una resistencia a la práctica matemática y, en nuestro caso particular, al uso del álgebra. Así que en este campo, algunas de las dificultades que cabe esperar por parte de los alumnos son:

- Que presenten inseguridad al afrontar el álgebra, frente a la familiaridad que tienen con los métodos de resolución aritmética.
- Que el proceso de transformación del lenguaje natural al planteamiento de ecuaciones les resulte costoso.
- Que la falta de dominio de las técnicas de resolución de ecuaciones les impida avanzar correctamente.

Por otro lado, es de prever que no tengan la suficiente seguridad a la hora de representar puntos en los ejes cartesianos (por no haber recibido estos contenidos en la asignatura de matemáticas). Para que esto no suponga un obstáculo de aprendizaje en el momento de institucionalizar el conocimiento pretendido con la situación, se trabaja con los alumnos previamente unos ejercicios de representación cartesiana.

Al tratar las funciones y las transformaciones entre sus distintos modos de representación, los estudiantes presentaran mucha más dificultad en aquellos ejercicios que les requieran un proceso de generalización, es decir, la obtención de la fórmula a partir de la tabla de valores o de la representación gráfica.

6.2 Errores y su posible origen

Tras presentar las dificultades estudiadas, exponemos los errores que se cree pueden surgir en el transcurso del proceso de enseñanza-aprendizaje de este tema. Lo hacemos analizando los tres polos que intervienen en la actividad: el profesor, las matemáticas y los alumnos.

Los aspectos relacionados con la planificación, la gestión de aula y la reacción ante las intervenciones tienen que ver con la figura del *profesor*.

Se considera, dadas las circunstancias particulares del grupo descritas en el apartado anterior, que grupos de más de tres alumnos sería perjudicial para la participación de cada uno de ellos, por lo que el tamaño ideal de la unidad de trabajo es entre dos y tres personas.

Durante el transcurso de la situación, si dos alumnos no se ponen de acuerdo en un resultado, el profesor debe abstenerse de validar cualquiera de ellos. Como posible solución puede anotarlos en la pizarra a la espera de la aclaración final. El mismo comportamiento debe tener el profesor si advierte que alguno de los resultados dados es erróneo.

Sobre el *contenido matemático* de la situación, la proporcionalidad aparece como un obstáculo epistemológico. Esto es porque la base de la proporcionalidad es la función lineal, mientras que el contenido matemático de la situación va hacia la función afín y a trozos.

El error principal que se espera en los *alumnos* es el abuso de la linealidad. La creciente familiaridad y experiencia de los estudiantes con los modelos proporcionales puede conducirles a la tendencia de aplicar los modelos lineales en cualquier situación, incluso en las que no es aplicable en absoluto (Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2005). Es habitual referirse a este abuso de la generalización de la linealidad como "ilusión de la linealidad". A pesar de que se sugiere que hay una tendencia natural a razonar proporcionalmente (y que ésta se manifiesta desde edades muy tempranas), en el estudio de Van Dooren y otros (2005) se muestra que hay una amplia evidencia de que la educación matemática tiene un impacto significativo en su posterior desarrollo. En este estudio se descubrió que había un aumento considerable del número de respuestas proporcionales ilícitas desde tercero de primaria a quinto, es decir, durante el periodo en el que se produce una atención extensiva a la adquisición del esquema de linealidad. Para algunos problemas se llegó incluso a constatar que los estudiantes de tercero de primaria daban más respuestas correctas que los de quinto y sexto, debido a la tendencia en éstos últimos cursos a utilizar el razonamiento lineal en "cualquier" situación.

En cuanto a los alumnos que van a realizar la situación (esta situación se presenta detallada en el capítulo 8), en el anterior trimestre han tratado los conceptos de proporcionalidad directa e inversa en la asignatura de matemáticas, y han resuelto múltiples ejercicios utilizando la regla de tres, en los que había que detectar el tipo de relación planteada. Es previsible que a la hora de utilizar esta técnica les genere confusión el hecho de tener que decidir el aplicar una u otra.

También es posible que los estudiantes yerren cuando el profesor les presente la segunda consigna, en la que se atribuye al paquete de 0,150 kg un precio de 3 Yunis. Es probable que no tengan en cuenta el primer intervalo de la tabla de precios y que tomen el valor de 0,250 kg como único.

Es posible que se equivoquen en los cálculos. En la medida de lo posible intentar evitarlos haciéndoles conscientes de ello. Por ejemplo, en las actividades posteriores a la situación, cuando tengan que representar rectas, en la tabla de valores hallaran 3 puntos. Si al dibujarlos no están alineados sabrán que se han equivocado en el cálculo de alguno de ellos. Del mismo modo, si no lo están el propio ejercicio les devuelve la información de que es altamente probable que el resultado sea correcto.

Capítulo 7

El proceso de estudio

En este capítulo se presenta cómo se ha planificado la experimentación en el aula, distribuyendo los tiempos y exponiendo los tipos de actividades presentadas a los alumnos.

La experiencia se ha llevado a cabo en un grupo de estudiantes de 1º ESO, en el marco de la asignatura de Matemáticas Básicas.

Por el alto número de adaptaciones curriculares que hay en el grupo, las que tienen que ver con el nivel curricular han sido excluidos de la experimentación por no dominar las técnicas básicas (reglas de tres, tablas de multiplicar, divisiones, etc.). Se han incluido en la experiencia a dos alumnos con adaptación curricular a los que se les han adaptado los materiales, uno por desconocimiento del idioma y otro por baja visión.

Como materiales, se han seleccionado una serie de ejercicios de los cuadernillos de la asignatura que encajaban en las necesidades del aprendizaje. Por otro lado, se ha llevado a cabo la situación elaborada por Madoz (2006) en el marco de su trabajo de investigación tutelado (TIT). Además, se han utilizado unas fichas elaboradas por la profesora para trabajar la situación y otras para trabajar las actividades previstas a priori y a posteriori.

7.1 Distribución del tiempo de la clase

Las sesiones empleadas para el desarrollo de la práctica han sido un total de 9, distribuidas a lo largo de 6 semanas, por anulación de sesiones previstas desde un principio (Hubiera resultado más adecuado realizar la experiencia más “concentrada” en el tiempo, con una duración ideal de 2 semanas).

El tiempo efectivo por sesión con el que se ha contado ha sido de 40 minutos de media, ya que las particularidades de un centro asociado incluyen los desplazamientos de los alumnos de un centro a otro en las asignaturas optativas, con las consiguientes pérdidas de tiempo.

La distribución de los tiempos en cada sesión no sigue un esquema uniforme por lo que en la tabla 64 presentamos la planificación general detallada del proceso de estudio. Se incluyen además los materiales que se han utilizado en cada sesión.

Las sesiones 1 y 2 se dedican a realizar las actividades a priori de la situación. La situación se lleva a cabo durante las tres sesiones siguientes; y las últimas cuatro sesiones se dedican a las actividades previstas a posteriori.

SESIÓN		DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD	MATERIAL
Actividades a priori	1	Repaso de la técnica de la regla de tres directa. Planteamiento de situaciones en las que es necesaria su aplicación. Resolución individual de ejercicios de regla de tres	Cuadernillo 34 Proporcionalidad y regla de tres Ed. Bruño
		Explicación sobre cómo se representan puntos en los ejes cartesianos. Trabajo individual de representación de puntos.	Pizarra y cuaderno
	2	Corrección ejercicios de regla de tres y de representación de puntos en los ejes. Actividad de representación de puntos contextualizada (una magnitud en cada eje) Trabajo individual de los alumnos con los ejes y tablas de valores.	Pizarra y cuaderno
Situación	3	Inicio de la situación. Fases 1 y 2.	Fichas proporcionadas por el profesor
	4	Continuación de la situación. Fases 3 y 4.	
	5	Final del desarrollo de la situación: institucionalización.	
Actividades a posteriori	6	Explicación del profesor sobre las tres formas de representación de funciones: a través de la fórmula, de la tabla y de la representación gráfica. Trabajo individual de los alumnos: ejercicios varios del cuadernillo relacionados con el tema.	Cuadernillo 31 Ecuaciones y funciones de 1ºgrado Ed. Bruño
	7	Corrección de los ejercicios de la sesión anterior. Trabajo individual de los alumnos: ejercicios varios del cuadernillo relacionados con el tema. Corrección de estos ejercicios.	Cuadernillo 31 Ecuaciones y funciones de 1ºgrado Ed. Bruño
	8	Planteamiento y resolución de un problema en el aula.	Fichas proporcionadas por el profesor
	9	Planteamiento y resolución de un problema en el aula. Tarea para casa.	

Tabla 64. Planificación de las actividades y materiales utilizados en cada sesión

En las sesiones de las actividades a priori hay explicación magistral del profesor y realización de ejercicios por parte de los alumnos de forma autónoma.

En las sesiones en las que discurre la situación, el aprendizaje es fundamentalmente constructivista, pudiendo exceptuar la última fase en la que el profesor institucionaliza el conocimiento buscado, de forma magistral.

En las actividades previstas a posteriori de la situación, realizadas entre las sesiones 6 y 9, el tipo de docencia alterna momentos donde hay explicación magistral del profesor, ejercicios autónomos, actividades resueltas de forma dialógica,…

7.2 Actividades adicionales planificadas

Actividades a priori

El objetivo principal de las dos sesiones iniciales es el de reforzar los contenidos que ahora describimos para que los alumnos tengan un manejo fluido de las técnicas y así, la falta de ello no suponga un obstáculo a la hora de adquirir el aprendizaje esperado.

En estas sesiones dedicadas a trabajar a priori de la situación las actividades que se realizan están extraídas prácticamente todas de sus cuadernillos de trabajo (ver anexo A), tanto las que trabajan la regla de tres como las de representación de puntos en los ejes. Únicamente cuando el profesor está explicando el apartado de representación de puntos, y para afianzar el aprendizaje, se les pide a los alumnos que dibujen unos ejes cartesianos en una hoja cuadriculada y anoten los puntos que dicta el profesor.

En cuanto a la distribución del tiempo de las sesiones, en la primera sesión el profesor se dedica de forma magistral a recordar los conceptos y técnicas asociados a la regla de tres. Después los alumnos realizan varios ejercicios de su cuadernillo relacionados con el tema de forma autónoma. Por otro lado se les recuerda cómo se representan los puntos en los ejes cartesianos realizando el ejercicio en la pizarra. En la siguiente sesión se sigue trabajando este contenido, añadiendo magnitudes a los ejes cartesianos. Las magnitudes asignadas son similares a las que luego se presentan en la situación (por ejemplo kg/€) con el propósito de que los alumnos ya estén familiarizados con ello. En esta última sesión también se corrigen las actividades realizadas en clase y las del día anterior.

Actividades a posteriori

La finalidad de las dos sesiones siguientes a la situación (6º y 7º sesión) buscan reforzar los contenidos de funciones y mejorar el manejo de sus distintas formas de expresión.

Para la labor de estos dos días se requiere el uso del cuadernillo de la asignatura (ver anexo A). Los estudiantes realizan unos ejercicios en los que se trabajan las formas de representación de funciones: simbólica, tabular y gráfica. En especial, ejercicios que requieren los traslados de una forma a otra. Se muestra un ejercicio tipo en la siguiente figura.

153 Representa estas funciones:

$y = -x$; $y = \frac{x}{4} - 2$; $x = 4$; $-y = x$.

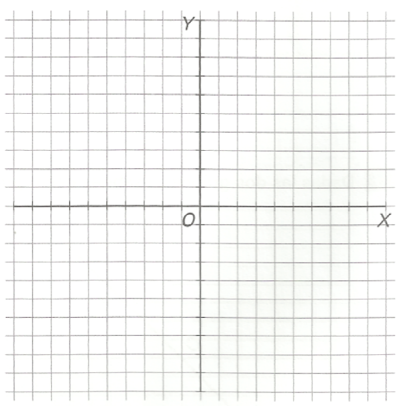


Figura 01. Ejercicio tipo de los cuadernillos. Apartado de funciones y gráficas

En cuanto a la distribución del tiempo de las sesiones, primero se explica a los alumnos cómo se deben realizar los ejercicios que se les presentan, mostrando un par de ellos en la pizarra. Después los estudiantes realizan las actividades de su cuadernillo relacionadas con el tema de manera individual y finalmente se ponen en común y se corrigen.

Las últimas dos sesiones se plantea a los alumnos unos ejercicios de desarrollo y ampliación de los conocimientos dados hasta ahora.

Para ello se han preparado tres fichas, una para cada ejercicio. De éstos, dos se desarrollan en el aula y el otro lo realizan los estudiantes fuera de ella. Para la realización de ambas actividades, el trabajo del aula se apoya con el programa informático de geogebra, por la precisión que aporta y por la versatilidad de su manejo.

En la ficha A (ver anexo C) se presenta a los alumnos un ejercicio ya conocido: la representación gráfica de dos rectas en unos ejes cartesianos. Para ello deben asignar unos valores, representar los puntos y trazar la recta. Se les pide que marquen tres puntos de la recta para que así la misma actividad les devuelva la confirmación de su resolución correcta.

Tras realizar esto se les pregunta en qué punto creen que se cortan las dos rectas. Éstas están planteadas de forma que las coordenadas del punto no sean números enteros. Se les indica que respondan con la máxima precisión posible. Al poner los resultados en común se espera que salgan distintas soluciones porque gráficamente el punto no es exacto. Se busca que mediante una docencia del tipo mayéutica, los alumnos lleguen a la conclusión de que la igualación de las fórmulas es el único método posible para resolver con éxito la actividad.

La ficha B (ver anexo C) presenta unos ejes cartesianos y cuatro funciones iguales en las que el valor de la y está sustituido por cuatro valores distintos, de modo que pasan a ser cuatro ecuaciones:

$$3x + 2 = 0$$

$$3x + 2 = 5$$

$$3x + 2 = -4$$

$$3x + 2 = 9$$

La tarea inicial que deben llevar a cabo los estudiantes es obtener las soluciones de cada ecuación. Al obtenerlos, se les desvela la forma inicial de la función:

$$3x + 2 = y$$

Por lo que pueden comprender que han hallado cuatro valores para la variable x, obteniendo así cuatro puntos. Al representarlos se refuerza el conocimiento de que todos pertenecen a la misma recta.

7.3 La tarea: actividad autónoma del alumnado prevista

En la última sesión se entrega a los estudiantes una hoja de tarea, que presentamos a continuación:

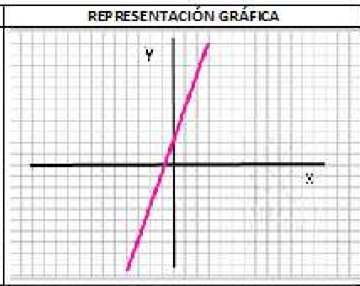
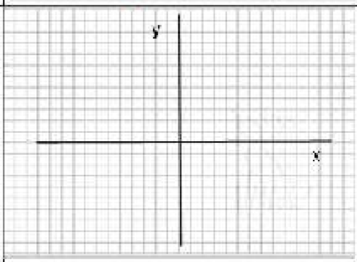
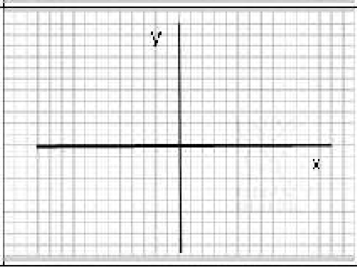
ECUACIÓN	FÓRMULA	TABLA	REPRESENTACIÓN GRÁFICA	VALORES
3x + 2 = 0 3x = -2 x = - 2/3	y = 3x + 2	x | y 0 | 2 1 | 5 -2 | -4		(0 , 2) (-?, 0)
2x + 5 = 0				
	y = -x + 4			

Figura 02. Hoja de funciones trabajada en el aula

La figura 02 corresponde a la primera hoja, que se realiza en el aula de forma individual. La hoja siguiente, que tiene el mismo formato que la mostrada, se realiza en casa y se entrega como tarea. El diseño de las hojas es en forma de tabla buscando la sencillez y claridad de lo que se solicita. Sin embargo la tarea provocará previsiblemente conflictos en los alumnos según cuál de los elementos venga dado y cuál haya que hallar. Como se espera que el pasar de los valores particulares a la fórmula general sea lo más complicado de llevar a cabo, únicamente se incluye un caso de este tipo, presentado el último (fig. 03).

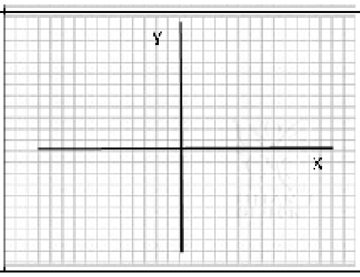
		x | y 0 | 3 2 | 5 -3 | -0		

Figura 03. Actividad de generalización propuesta en la hoja de tarea del alumno

Capítulo 8

Experimentación

En este capítulo, tras haber realizado el análisis a priori, en este capítulo se desarrolla la fase de experimentación y el análisis a posteriori. Las conclusiones de este trabajo se obtienen tras contrastar el análisis a priori con los resultados de la experimentación, realizando una valoración de los mismos teniendo en cuenta las expectativas previas.

8.1 Muestra de la experimentación

La muestra utilizada para realizar esta experiencia ha sido, como ya se ha comentado en el apartado anterior, un grupo de 15 estudiantes de 1º ESO. Para el planteamiento de la situación didáctica se han formado grupos de dos o tres personas. Estos grupos se han realizado buscando que fuesen homogéneos entre sí, aunque heterogéneos en su interior. Para ello se ha hecho una clasificación de los alumnos en función de: sus calificaciones en las dos anteriores evaluaciones, tanto de Matemáticas, como de Matemáticas Básicas; su dominio de los temas de proporcionalidad y álgebra (según la observación de la profesora); y otros factores tales como conducta, adaptaciones curriculares, casos singulares, etc.

La situación que se ha realizado en el aula, y que se expone en el siguiente apartado, es la reproducción de la propuesta elaborada por Madoz (2006) en el Trabajo de Investigación Tutelado titulado *"El paso de la aritmética al álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria"*. Tanto este trabajo que mencionamos como el presente son el resultado de un planteamiento basado en la Ingeniería didáctica, la cual consta de cuatro fases diferenciadas:

1. Los análisis preliminares. Se analizan, teniendo en cuenta los objetivos de la investigación, los contenidos matemáticos, la enseñanza tradicional y las concepciones de los estudiantes; así como las dificultades que obstaculizan su evolución.
2. El análisis a priori. Se establecen las hipótesis del trabajo.
3. Experimentación. Se lleva a cabo la situación en el aula y las actividades adicionales previstas llevando un registro de los resultados que permiten contrastar las hipótesis planteadas.
4. El análisis a posteriori y evaluación. Se confrontan los datos obtenidos con las hipótesis planteadas para llegar a las conclusiones.

Lo que a continuación se presenta es una transcripción literal e íntegra de la situación propuesta por Madoz (2006). La intención de este trabajo es pues el contraste experimental, que contribuya a validar o refutar la fundamentación. El desarrollo se realiza en la sección 8.3.

8.2 La situación didáctica y su desarrollo

8.2.1 Situación didáctica

Proponemos al estudiante una cuestión inicial de la que esperamos que, guiado por el profesor, llegue a deducir una ley del tipo $y = ax + b$ con $a,b \in \mathbb{R}$. Enmarcamos este problema en el marco de la teoría de situaciones didácticas. Para ello tendremos en cuenta:

1) Los *conocimientos de base* de los alumnos: son el campo numérico de los racionales y las operaciones aritméticas.
2) Las *estrategias de base*: Los estudiantes usarán como modelo la regla de tres y seguirán el método del ensayo-error mediante comprobaciones aritméticas.
3) *Interacción con el medio*: El estudiante se enfrenta a la situación a través de transformaciones aritméticas formuladas en lenguaje natural y validadas o falseadas mediante casos particulares la mayoría de las ocasiones.
4) *Papel del profesor*:
   a) Decisiones relativas al *contrato pedagógico*[1]. Formación de grupos según los siguientes criterios:
      1. Que el tamaño de los grupos sea adecuado de forma que el número de grupos total permita mantener el control de clase y el número de alumnos por grupo sea adecuado para que puedan trabajar.
      2. Formación heterogénea de los grupos de forma que queden nivelados en lo que a conocimientos, liderazgo, actitud…se refiere.
      3. Proponer un reparto de tareas eficiente.
   b) Decisiones relativas al *contrato didáctico*[2].
      1. Plantear la situación y dar la *consigna*[3].
      2. *Devolver*[4] la responsabilidad de la resolución del problema a los estudiantes cuando acuden al profesor en busca de la solución.
      3. Gestión de las *variables didácticas*[5] relacionadas con:
         - Estructura de tablas.
         - Valores (enteros, decimales, fraccionarios…) y forma (diferencia proporcional o no entre datos…) en la que son dadas dichas tablas.
         - Coeficientes a y b a utilizar en la función afín $y = ax + b$.
      4. *Institucionalización*[6] de los saberes.

---

[1] *Contrato pedagógico*: regula las interacciones entre alumnos y profesores que no dependen del saber. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997)
[2] *Contrato didáctico*: conjunto de cláusulas que rigen en cada momento las obligaciones recíprocas de los alumnos y el profesor respecto al proyecto de estudio que tienen en común y que evolucionan a medida que el proceso didáctico avanza. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997)
[3] *Consigna*: Indicaciones explícitas para la realización de una tarea.
[4] *Devolución del problema*: el profesor busca que el alumno se apropie, responsabilice o haga suya una situación adidáctica. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997)
[5] *Variable didáctica*: Es una variable de una situación adidáctica cuyos valores pueden ser manipulados (fijados o cambiados) por el profesor. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997)
[6] *Institucionalización*: Es responsabilidad del profesor y se lleva a cabo mediante la elección de algunas cuestiones de las que se saben responder, colocándolas en el núcleo de una problemática más amplia y relacionándolas con otras cuestiones y saberes. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997)

8.2.2 Desarrollo

Fase I (15 min):

1) Se forman los grupos y se reparten las tareas.
2) Se acuerda usar una calculadora por grupo. Conviene hacer un comentario sobre la jerarquía de las operaciones en las calculadoras científicas y en las que no lo son.
3) El profesor presenta la situación y da la primera consigna:

   Consigna 1:

   Has viajado con tu nave espacial al planeta de tu amigo Yu-2 para devolverle la visita que te hizo el verano pasado. En el plante de Yu-2 nadie habla tu idioma y sólo puedes comunicarte con él gracias a la radiación que recibió al llegar a Tierra cuando os conocisteis. A los pocos días de llegar, tu amigo tiene que salir con mucha prisa de viaje y tienes que sustituirle en el trabajo. Yu-2 trabaja en una oficina de correos de su planeta y se dedica a la recepción y cobro de paquetes para enviar. Ha tenido que salir de viaje de forma tan urgente que no ha podido explicarte nada pero como el sistema de numeración y las unidades de medida en el planeta son los mismos que los de la Tierra, decides ir a sustituirle sin tener mucha información. Cuando llegas allí sólo tienes una tabla con los siguientes datos:

Kg	Yunis (moneda del planeta)
0-0,250 kg	3 yunis
0,5 kg	6 yunis
0,75 kg	7,5 yunis
1 kg	9 yunis

Tabla A. Tabla de tarifas 1.

   Antes de que lleguen los clientes deberías conseguir la manera que te permita saber cuánto debes cobrarles según el peso de los paquetes. Para ello tendrás que responder a preguntas del tipo:

   1. ¿Cuánto le cobrarías a un cliente que quisiera enviar un paquete de 0,4 kg?
   2. ¿Cuánto pesará un paquete de un cliente al que se le han cobrado 8 Yunis?

4) Los alumnos se ponen a trabajar en sus correspondientes grupos para tratar de averiguar cómo el precio se relaciona con el peso. El trabajo de los estudiantes se estructura según las siguientes fases:

   a) *situación adidáctica de acción*[7]: Los estudiantes relacionan peso y precio por un procedimiento que no formulan ni validan de forma explícita.

[7] *Situación adidáctica de acción*: toda situación adidáctica de acción propone al alumno un problema en unas condiciones tales que puede actuar sobre la situación y hacer elecciones durante esa acción, al tiempo que la situación le devuelve información sobre las consecuencias de esa acción. Una buena

b) *situación adidáctica de formulación*[8]

c) situación *adidáctica de validación*[9]: Entre los compañeros se plantean unos a otras posibles soluciones y rebaten los razonamientos según los datos del problema.

Esta tarea se desarrolla durante 10 minutos.

5) Durante 5 minutos, cada grupo expone el procedimiento que ha seguido y, en su caso, los resultados obtenidos y se debate en clase. El profesor debe evitar la tentación de dar la solución al problema limitándose a devolver la responsabilidad matemática a los estudiantes. El profesor recoge en la pizarra los resultados que sean más relevantes a juicio de los estudiantes.

Fase II (10 minutos):

1) El profesor presenta la segunda consigna:

Consigna 2:

De pronto, entra en la oficina un cliente enfadado y que te entrega una factura con la que no está de acuerdo. Miras la factura y aparecen los siguientes pagos:

Kg	Yunis
0,150 kg	3 yunis
0,350 kg	5,1 yunis
0,650 kg	8 yunis

Tabla B. Tabla de tarifas 2.

¿Tiene el cliente razones para estar enfadado? Sí o no. ¿Por qué?

2) Los alumnos se ponen a trabajar en sus correspondientes grupos para tratar de resolver la tarea. El trabajo se estructura en fases similares a la tarea anterior. Los estudiantes no formularán cantidades numéricas sino que razonarán por comparación de precios y pesos en las tablas y validarán los argumentos de la misma forma. Esta tarea se desarrolla durante 5 minutos.

situación adidáctica de acción debe permitir al alumno juzgar el resultado de su acción y ajustar esta acción, sin la intervención del profesor, gracias a la retroacción por parte del medio de la situación. La situación adidáctica provoca un aprendizaje por adaptación. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997)

[8] *Situación adidáctica de formulación*: en una situación adidáctica de formulación el alumno intercambia información con una o varias personas. Se intercambian mensajes escritos u orales que son redactados en lenguaje matemático según las posibilidades de cada emisor. El resultado de esta dialéctica permite crear un modelo explícito que puede ser formulado con la ayuda de signos y de reglas conocidos o nuevos. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997)

[9] *Situación adidáctica de validación*: una situación adidáctica de validación es la ocasión para un alumno (proponente) de someter el mensaje matemático (modelo implícito de la situación) como una aseveración a un interlocutor (oponente). El proponente debe probar la exactitud y la pertinencia de su modelo y proporcionar, si es posible, una validación semántica y una validación sintáctica. El oponente puede pedir explicaciones suplementarias, rechazar las que no comprende o aquéllas con las que no está de acuerdo (justificando su desacuerdo). (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997)

3) Durante 5 minutos cada grupo expone el procedimiento que ha seguido y, en su caso, los resultados obtenidos y se debate en clase. La función del profesor se restringe, de igual manera que antes, a dirigir el debate generado.

Fase III (15 minutos):

1) El profesor presenta la tercera consigna:

Consigna 3:

Una vez detectado el error empiezas a preocuparte porque sabes que tienes que devolverle los Yunis que le has cobrado de más, pero no sabes cuántos son. Por fortuna, en ese momento el cliente saca un listado de precios más completo que el que tú tienes y en el que aparece el precio correcto. Le das los cambios y se marcha. El cliente deja en la oficina la lista que te ha mostrado:

Kg	Yunis
0-0,250 kg	3 yunis
0,400 kg	5,4 yunis
0,500 kg	6 yunis
0,650 kg	6,9 yunis
0,75 kg	7,5 yunis
0,900 kg	8,4 yunis
1 kg	9 yunis

Tabla C. Tabla de tarifas 3.

1. ¿Los resultados obtenidos hasta ahora son correctos?

2. ¿La forma de pago que habías usado se ajusta a los datos de la tabla? Si no es así, ¿puedes encontrar una forma de pago más correcta?

2) Los estudiantes se ponen a trabajar en sus correspondientes grupos para tratar de resolver la tarea. La dinámica de trabajo en grupo sigue las mismas pautas que en las fases anteriores. Esta tarea se desarrolla durante 10 minutos.

3) Durante 5 minutos cada grupo expone el procedimiento que ha seguido y, en su caso, los resultados obtenidos y se debate en clase. La función del profesor se restringe, de igual manera que antes, a dirigir el debate generado.

Fase IV. Juego entre grupos (15 minutos):

1) El profesor presenta la cuarta consigna:

Consigna 4:

Por fin consigues dar con una forma de cobrar que parece que funciona y la utilizas el resto del día. Casi al finalizar la jornada te llega un mensaje de tu amigo Yu-2 en el que te explica que al día siguiente cambian las tarifas y que te encontrarás una nueva lista de precios por la mañana en la oficina. Te vas a casa sin preocuparte mucho porque crees que ya le has cogido el truco y encontrarás la forma de cobro correspondiente enseguida. A la mañana siguiente te encuentras con la nueva lista de precios:

Kg	Yunis
0-0,250 kg	3,5 yunis
0,400 kg	5,9 yunis
0,500 kg	6,75 yunis
0,600 kg	7,4 yunis
0,700 kg	8,05 yunis
0,900 kg	9,35 yunis
1 kg	10 yunis

Tabla D. Tabla de tarifas 4.

¿Puedes encontrar la forma que te ayude a cobrar a los clientes?

2) En este momento cambiamos la dinámica del trabajo y se propone un juego entre equipos. A cada miembro del grupo se le asigna un número y el profesor elige un número al azar y dos grupos. Los estudiantes a los que se les había asignado dicho número salen a competir a la pizarra. Uno de ellos hace de cliente y el otro de empleado de la oficina. El cliente puede proponer mandar un paquete con un determinado peso y aceptar o no lo que le cobren o también decir que tiene un determinado número de Yunis y aceptar o no el peso que le permiten enviar. Mientras ellos compiten, el resto de los compañeros no pueden hablar y se limitan a observar la situación. Se sacan a miembros de varios equipos durante 15 minutos. El profesor ejerce de árbitro al final de cada competición para asignar 1 punto al equipo ganador (sin explicar por qué).

Fase V (20 minutos). *Institucionalización*:

- Relaciona valores numéricos (expresados en forma tabular) con la fórmula de una función afín.
- Formular la noción de función afín en forma general, interpretando los coeficientes en términos de la situación propuesta y observando la bidireccionalidad de las mismas.
- Resalta la importancia del lenguaje algebraico para una comunicación más precisa.
- Introducir el concepto de variabilidad.

En la figura 04 están trazadas las dos funciones que se tratan a lo largo de la situación. La de color verde corresponde a la función principal de la actividad, y para la que los alumnos reciben dos tablas de valores. La gráfica de color rosa corresponde a la “Nueva tarifa de precios” de la cual los alumnos reciben una tabla de valores al final y la que, como se puede observar, supone un incremento de precio en los envíos.

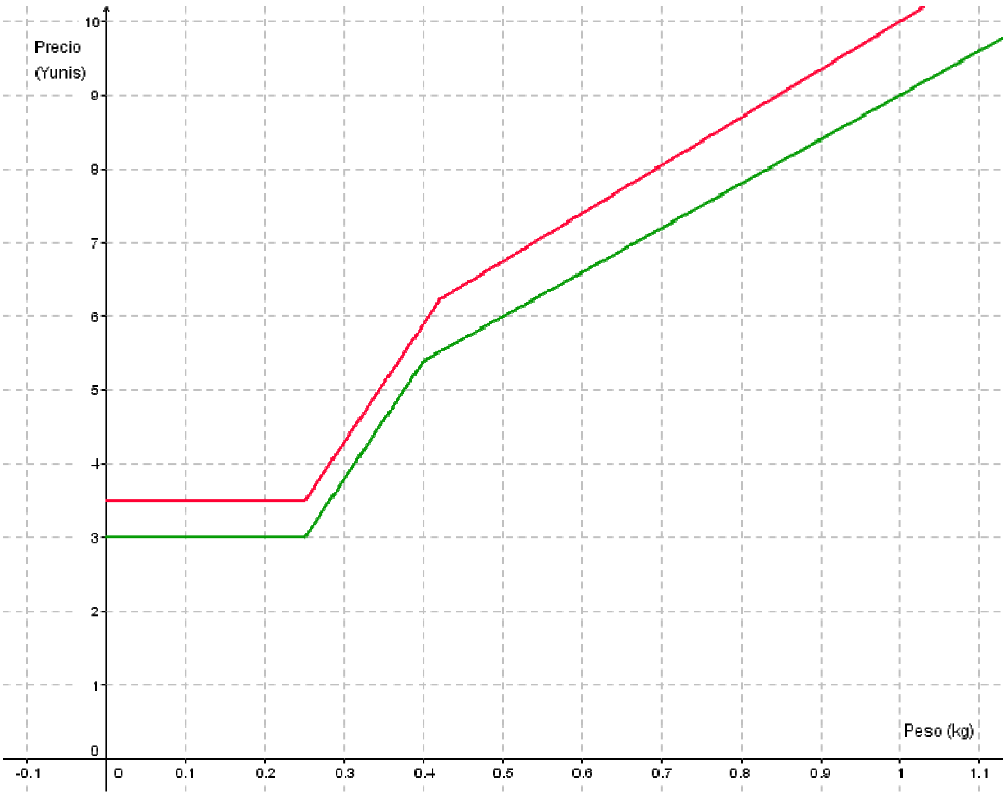


Figura 04. Funciones que se enuncian en la situación

Para formular la noción de función afín, en el momento de la institucionalización, se presenta la figura 05 pretendiendo que sea un apoyo visual para los estudiantes.

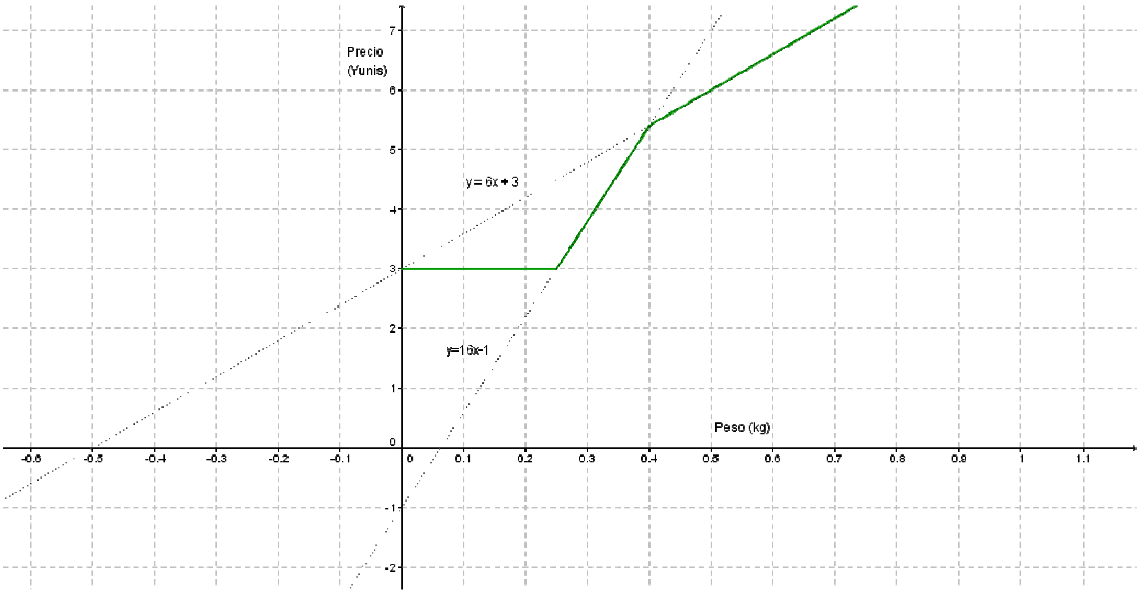


Figura 05. Trazo y formulación de las funciones afines que forman la función a trozos

8.3 Cuestiones y comportamientos esperados

<u>Fase 1</u>

Ante la presentación inicial de la situación se espera que, desde un primer momento, los alumnos muestren interés por el traslado a este escenario ficticio que despierta su imaginación.

Se prevé que la tabla que relaciona los kilogramos con los Yunis sea interpretada desde un principio como una proporcionalidad. Esto puede ser debido a que la proporcionalidad se presenta en múltiples ocasiones en forma de tabla y es algo que les resulta familiar. Por lo tanto, las respuestas a las preguntas de esta fase probablemente las resolverán mediante reglas de tres y no supondrán excesiva dificultad.

En el momento de exponer los resultados a todo el grupo pueden aparecer las primeras contradicciones. No obstante, es fácil que cada alumno se encuentre confiado en su método, seguro de su cálculo y encuentre la explicación a las divergencias en el error de los resultados ajenos.

Fase 2

Al presentar la factura del cliente enfadado se espera que los estudiantes se percaten de que el precio del último paquete está equivocado. Esta conclusión surge de la comparación entre la tarifa de precios y la factura del cliente, sin la necesidad de realizar ningún cálculo ya que en la tabla de precios un paquete que pesa más, tiene un precio menor que éste último.

Para el paquete de 0,150 kg es posible que los estudiantes no consideren que el intervalo entre 0 y 0,250kg tiene un precio único de 3 Yunis, y busquen su precio proporcional respecto al máximo.

Para el peso intermedio de 0,350 kg se espera que actúen de la misma forma que en la fase anterior para intentar dar con el precio adecuado, esto es, realizando una regla de tres tomando como referencia cualquier valor de la tabla.

Cuando por segunda vez se ponen en común las respuestas, ya deben empezar a advertir que los procedimientos que siguen no encajan en lo que esperan de ellos.

Fase 3

Al intentar responder a la primera pregunta, se darán cuenta de las divergencias entre sus respuestas anteriores y la tabla actual, de modo que es previsible que se encuentren confundidos.

Llegados a este punto, lo más probable es que pongan en cuestión el método utilizado hasta ahora. De los alumnos se espera que, a raíz de la observación detenida de la tabla, se aproximen al concepto de variabilidad. Se prevé que lleguen a afirmaciones tales como: “Cada 0,100 kg hay que pagar 0,6 Yunis más”

Fase 4

Al tener que responder a la pregunta, “¿Puedes encontrar la forma que te ayude a cobrar a los clientes?”, no se confía en que los alumnos pasen de su resolución hasta ahora habitual a un contenido de funciones y su representación gráfica. La opción que pueden tomar es la de, entendiendo el incremento constante de la función, hallar valores intermedios para obtener una tabla más completa.

Ante el nuevo sistema de actuación, con un componente de competición y de exposición ante el resto de la clase, se espera que aumente el interés a nivel individual y de grupo.

8.4 Resultados y discusión

En este punto expondremos los resultados obtenidos del análisis cuantitativo. En el siguiente capítulo haremos un estudio de caso único más pormenorizado.

En las tablas de resultados se exponen los datos por columnas. Las letras que encabezan estas columnas (A, B, C, D, E, F) corresponden a los distintos grupos de trabajo en el aula. Las siglas AC1 y AC2 corresponden a los casos particulares de las adaptaciones. El perfil AC1 corresponde a una alumna con baja visión a la cual se le han adaptado los materiales ampliando las tablas y el tamaño de letra. El segundo perfil es el de un alumno extranjero que tiene muy poco control sobre el idioma español, por lo que los enunciados se han descrito de forma más esquemática, incluso gráfica. Estos dos casos, aunque se encuentran acogidos dentro de un grupo, responden de manera individual a las cuestiones.

La siguiente tabla recopila los resultados de todas las fases, a continuación de ésta comentamos cada una por separado.

FICHA 1

	C	**B**	**A**	**F**	**D**	**E**	**AC1**	**AC2**
Preg. 1 (Yunis)	4,8	4,8	4,8	4,8	4,8	4,8	-	4,8
Preg. 2 (kg)	0,65	0,8	0,8	0,88	1,12*	0,88	-	0,85

* error cálculo

FICHA 2

<table>
<tr><th></th><th>C</th><th>B</th><th>A</th><th>F</th><th>D</th><th>E</th><th>AC1</th><th>AC2</th></tr>
<tr><td>Preg. 1</td><td rowspan="3">Sin cálculo</td><td>1,8</td><td rowspan="3">Sin cálculo</td><td>P</td><td>P</td><td>P</td><td rowspan="3">Sin cálculo</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Preg. 2</td><td>4,2</td><td>4,2</td><td>4,2</td><td>4,2</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Preg. 3</td><td>7,8</td><td></td><td>5,85</td><td>5,85</td><td>-</td></tr>
</table>

E: hace el cálculo de lo que le tienen que devolver.

AC1: razonamiento según tabla. Si 0,75 kg son 7,5 yunis, no puede ser que 0,65 kg sean 8 yunis.

FICHA 3

	C	**B**	**A**	**F**	**D**	**E**	**AC1**	**AC2**
0,800 kg	-	8	8	7,46	7,46	8	-	8
0,135 kg	-	1,3	1,62	1,62	1,62	3	-	1,62

0,300 kg	-	4,4, ó 5	3,6	4,05	4,05	3,6	-	4,05
0,350	-	4,9	4,2	4,72	4,72	4,2	-	4,725

B: para el 0,300 kg también tiene una regla de 3 con el resultado 4,05.

Fase 1

Pregunta 1: ¿Cuánto le cobrarías a un cliente que quisiera enviar un paquete de 0,4 kg?

Pregunta 2: ¿Cuánto pesará un paquete de un cliente al que se le han cobrado 8 yunis?

	A	B	C	D	E	F	AC1	AC2
Preg. 1	4,8 yun	4,8	4,8	4,8	4,8	4,8	-	4,8
Preg. 2	0,8 kg	0,8	0,65	1,12	0,88	0,88	-	0,85

Tabla 65. Resultados de todos los grupos a las preguntas de la fase 1

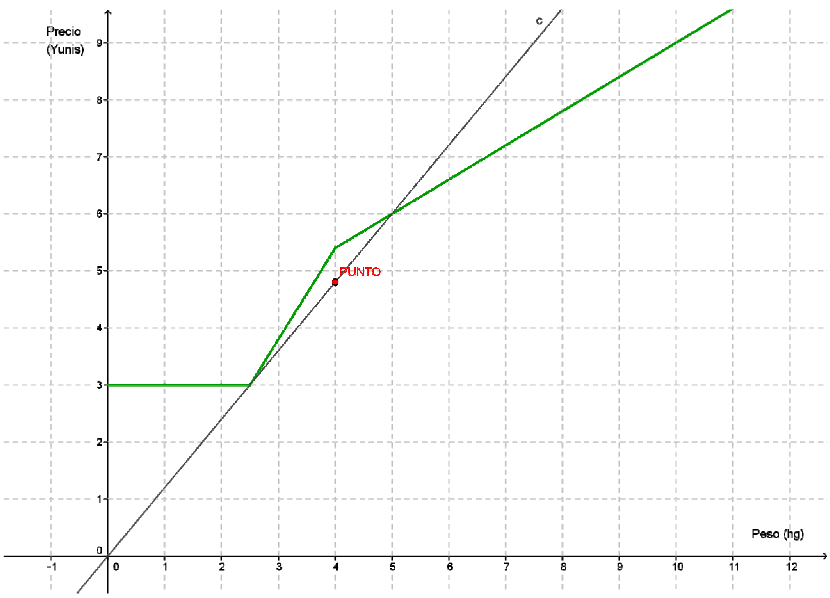


Figura 06. Respuesta Fase 1-Pregunta 1

Todas las respuestas a la pregunta 1 coinciden ya que todos los alumnos han cogido como referencia alguno de los dos valores contiguos al paquete de 400 g. En el gráfico XX de la izquierda se puede observar cómo tanto el valor de 0,250 kg como el de 0,500 kg pertenecen a la misma función lineal.

Suponíamos que podía haber alguna variación en las respuestas debido a la elección de otro paquete pero no ha sido así.

Las respuestas de la pregunta 2, por el contrario, ocurren según lo esperado.

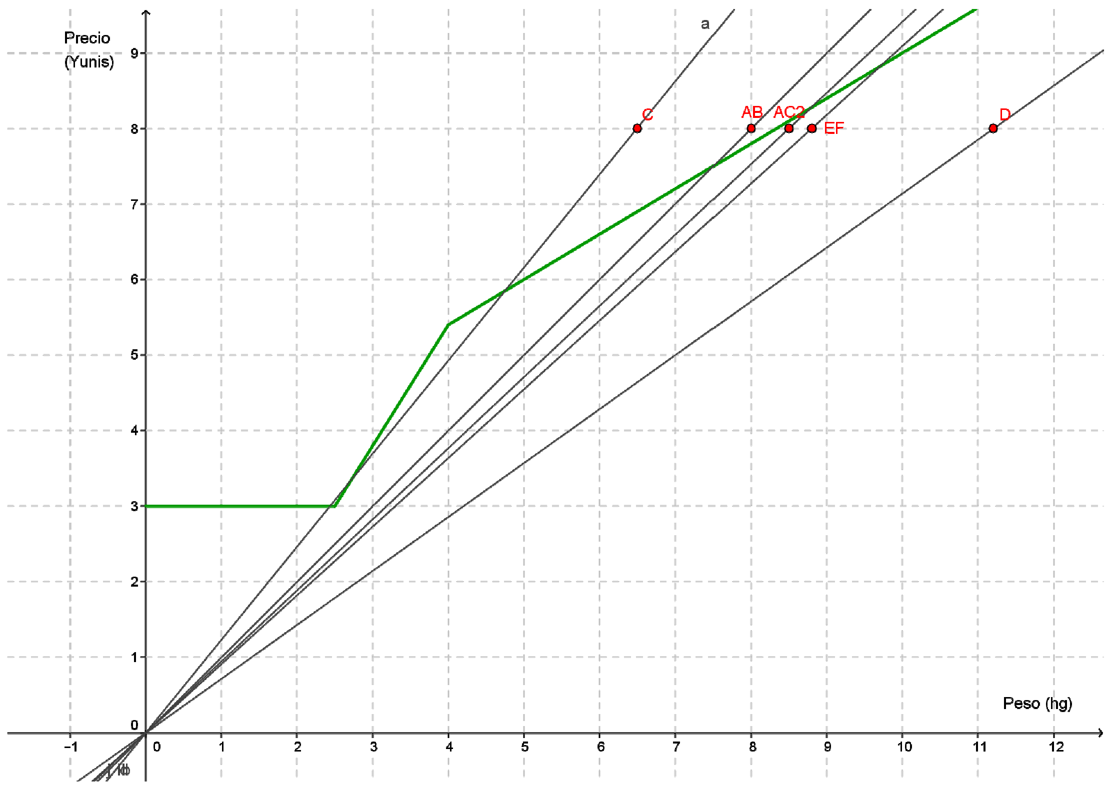


Figura 07. Respuesta Fase 1-Pregunta 2

A excepción del grupo D, que ha cometido un error de cálculo, el resto presentan diferentes resultados, consecuencia de haber elegido distintos paquetes. Curiosamente, todos podrían haber seleccionado los mismos valores para hacer la regla de tres que en la pregunta 1, pero no lo han hecho. La mayoría escoge el caso más cercano en la tabla al consultado.

Si la pregunta 1, al exponerla públicamente, les valida su método; la segunda ya empieza a generar confusión al ver que coinciden con unos grupos pero con otros no, los que a su vez, también coinciden con otros.

<u>Fase 2</u>

¿Tiene razones el cliente para estar enfadado? ¿Por qué?

	Kg	**Yunis**
1	0,150 kg	3 yunis
2	0,350 kg	5,1 yunis
3	0,650 kg	8 yunis

<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>AC1</th><th>AC2</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="3">Respuesta sin cálculo</td><td>1,8</td><td rowspan="3">Respuesta sin cálculo</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td rowspan="3">Respuesta sin cálculo</td><td>-</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4,2</td><td>4,2</td><td>4,2</td><td>4,2</td><td>-</td></tr>
<tr><td>3</td><td>7,8</td><td>5,85</td><td>5,85</td><td></td><td>-</td></tr>
</table>

Tabla 66. Resultados de todos los grupos a las preguntas de la fase 2

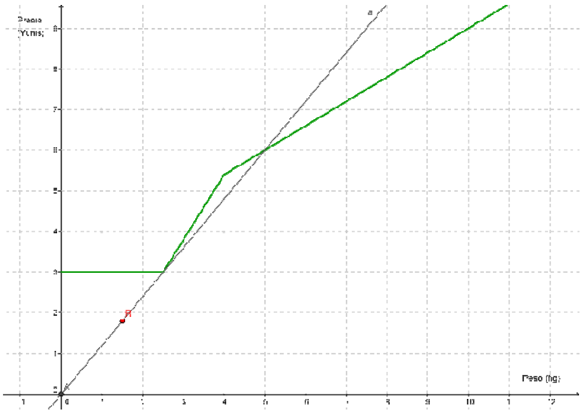


Figura 08. Respuesta Fase 2-Pregunta 1

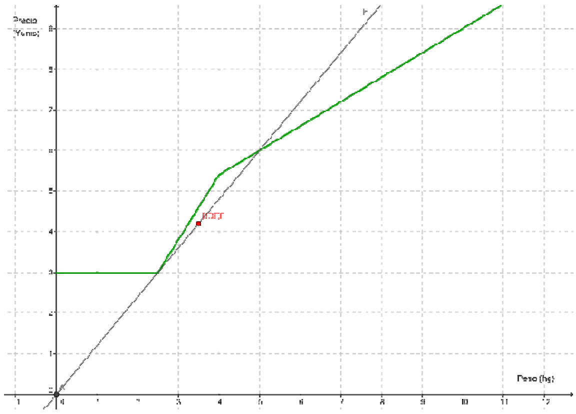


Figura 09. Respuesta Fase 2-Pregunta 2

En el primer caso, el grupo B no se da cuenta del intervalo del primer tramo de la tabla de precios, y asigna un precio proporcional al paquete de 0,150 kg. Este hecho ya se había contemplado en las previsiones.

Para el caso 2, de los que responden numéricamente, coinciden todos en el mismo valor ya que todos han elegido el mismo dato de referencia para hacer la regla de tres.

En el último, es muy remarcable el hecho de que todos a excepción de uno hayan optado por la regla de tres sin percatarse del planteamiento lógico que sale de la comparativa de las tablas. En el apartado anterior preveíamos que por lo general se deberían dar cuenta de que un paquete de 0,65 kg nunca puede ser más caro que uno de 0,75 kg. Sin embargo, únicamente hay una persona (AC1) que responde de la forma prevista con el razonamiento siguiente: “Está enfadado porque le hemos cobrado de más, en el último como mucho le deberíamos haber cobrado 7,5 yunis”

También es de hacer notar que tres grupos no respondan numéricamente a las cuestiones, lo cual hace replantearse la manera de plantear la pregunta. Las respuestas que dan son del tipo: “Sí tiene razones porque se le cobra más que la tarifa de precios de correos. Tampoco no tiene ninguna relación entre la factura y la tarifa”.

Por otro lado y en último lugar, el grupo E no se ha remitido a darle la razón o no, sino que incluso ha calculado la devolución que le corresponde según sus cálculos.

Fase 3

Pregunta 1: ¿Los resultados hasta ahora obtenidos son correctos?

Pregunta 2: ¿La forma de pago que habías usado se ajusta a los datos de la tabla? Si no es así, ¿puedes encontrar una forma de pago más correcta? Calcula el precio de los siguientes paquetes: 0,800 kg; 0,135 kg; 0,300 kg; 0,350 kg.

		A	B	C	D	E	F	AC1	AC2
Pregunta 1		SÍ	NO	SÍ	NO	NO	NO	-	-
Preg 2 (Y)	0,800	8	8	-	7,46	8	7,46	-	8
	0,135	1,62	1,3	.	1,62	3	1,62	-	1,62
	0,300	3,6	4,05	.	4,05	3,6	4,05	-	4,05
	0,350	4,2	4,9	.	4,72	4,2	4,72	-	4,725

Tabla 67. Resultados de todos los grupos a las preguntas de la fase 3

La consecuencia directa de no haber realizado cálculos en la fase 2 es que estos grupos responden a la pregunta 1 afirmativamente. El grupo C se da cuenta de que el peso de 0,650 kg tiene un precio asignado distinto al de la factura anterior, mientras que el grupo A ni lo comenta, simplemente explica que es una lista de precios ampliada.

A la pregunta 2 se ha añadido la petición de cálculo del precio de cuatro paquetes que no figuran en la tabla. Esto es debido a que las respuestas que se observaban a la pregunta 2 eran excesivamente simples y carentes de profundidad en el razonamiento.

En el momento de la exposición común, se generó un debate muy participativo ya que las diferencias entre resultados eran ya muy evidentes, y ya ni siquiera un grupo coincidía con el otro en todos los supuestos.

<u>Fase 4</u>

“Los estudiantes salen a competir a la pizarra. Uno de ellos hace de cliente y otro de empleado de la oficina. El cliente puede proponer mandar un paquete con un determinado peso y aceptar o no lo que le cobren, o también decir que tiene un determinado número de Yunis y aceptar o no el peso que permiten enviar”

Los puntos de este juego se han asignado en función de quién salía beneficiado con la negociación. Las puntuaciones de los grupos en el juego de la fase 4 son las siguientes:

A	B	C	D	E	F	AC1	AC2
2	2	-	3	5	3	-	-

Tabla 68. Puntuaciones de todos los grupos en el juego de la fase 4

Se ha dado la situación de que la aceptación o rechazo de precios o pesos, en algunos casos ha sido tomada de forma intuitiva, incluso en momentos algo aleatoria e irreflexiva. La presión ante el resto del aula ha podido influir en ello.

En otros casos, el razonamiento ha sido más medido, aunque siempre desde el uso de la regla de tres para la obtención de los resultados.

Capítulo 9

Análisis de caso único

Se toma la decisión de realizar un análisis de caso único debido a la falta de datos suficientes para elaborar una estadística relevante.

Hemos escogido para este análisis a una estudiante que cumple los siguientes requisitos:

- Realiza la experiencia en su totalidad.
- Ha asimilado correctamente los conocimientos previos.
- Tiene una serie de actitudes necesarias: muestra interés, reflexiona las cuestiones, razona sus respuestas…

Las actividades a priori las realiza correctamente, tanto la representación de puntos en los ejes cartesianos como los diversos problemas de proporcionalidad directa.

Desarrollo de la situación

<u>Fase 1</u>

TARIFA DE PRECIOS OFICINA DE CORREOS

Kg	Yunis (moneda del planeta)
0 - 0,25 kg	3 yunis
0,5 kg	6 yunis
0,75 kg	7,5 yunis
1 kg	9 yunis

1. ¿Cuánto le cobrarías a un cliente que quisiera enviar un paquete de 0,4 kg?

0,5kg —— 6 yunis.
0,4kg —— x

$x = \frac{0{,}4 \cdot 6}{0{,}5} = 4{,}8$ yunis

2. ¿Cuánto pesará un paquete de un cliente al que se le han cobrado 8 yunis?

1kg —— 9 yunis
X —— 8 yunis

$x = 1{,}12$ Kg

La alumna responde a las dos preguntas realizando sendas reglas de tres. En ambos casos toma como referencia los valores más cercanos a los demandados. Al poner en común los resultados obtenidos con el resto del grupo, es consciente de su error en la segunda pregunta. En la primera pregunta, sin embargo, coinciden todos en la misma respuesta como hemos comentado en el anterior análisis de grupo.

Fase 2

FACTURA DEL CLIENTE

Kg	Yunis
0,15 kg	3 yunis
0,35 kg	5,1 yunis
0,65 kg	8 yunis

1. ¿Tiene el cliente razones para estar enfadado? Sí o no. ¿Por qué?

0,5 Kg —— 6 yunis
0,35 Kg —— x
x = 4,2 yunis

1 kg —— 9 yunis
0,65 kg —— x
x = 5,85 yunis

Si. Porque le han cobrado más dinero de lo que valían los paquetes.

Respecto al primer paquete, la alumna no realiza ninguna operación, ya que comprende que, por el intervalo de paquetes de 0-0,250 kg, siempre se paga lo mismo: 3 yunis. No obstante, en la fase 3 veremos que deja de considerar el intervalo y, a un paquete de peso similar, le asigna un valor proporcional.

Para los dos siguientes envíos, realiza la comprobación mediante una regla de tres, cogiendo como valores de referencia los mismos que ha utilizado en la pregunta anterior. No advierte que el paquete de 0,65kg no puede tener ese precio al compararlo con la tabla de precios, pese a que se había previsto a priori que sucedería.

Fase 3

LISTA DE PRECIOS AMPLIADA

Kg	Yunis
0 - 0,250 kg	3 yunis
0,400 kg	5,4 yunis
0,500 kg	6 yunis
0,650 kg	6,9 yunis
0,75 kg	7,5 yunis
0,900 kg	8,4 yunis
1 kg	9 yunis

1. ¿Los resultados obtenidos hasta ahora son correctos?

El tercer pedido vale 6,9 yunis.

0,400kg —— 5,4 yunis

0,350kg —— x yunis.

$x = 4'725$ yunis.

"El tercer pedido vale 6,9 yunis" La alumna identifica que el peso de 0,650 kg está en la tabla y por tanto, constata que su cálculo era erróneo.
A su vez, calcula el precio para el paquete de 0,350 kg, cogiendo como referencia el valor superior a éste (0,400 kg → 5,4 yunis). El resultado difiere algo del calculado en la fase anterior: 4,725 frente a 4,2 yunis.

2. ¿La forma de pago que habías usado se ajusta a los datos de la tabla? Si no es así, ¿puedes encontrar una forma de pago más correcta?

No, no se ajusta. Habría que hacer una regla de tres para averiguar el precio del paquete.

0,900k —— 8,4yunis

0,800 —— x

$$x = \frac{0,800 \cdot 8,4}{0,900} = \boxed{7,46\ \text{yu}}$$

0,250k —— 3 yunis

0,135k —— x

0 – 250 = 3 yunis.

$$\cancel{x = \frac{0,135 \cdot 3}{0,250} = \boxed{1,62\ \text{yunis}}}$$

0,400k —— 5,4 yunis

0,300k —— x

$$x = \frac{0,300 \cdot 5,4}{0,400} = \boxed{4,05\ \text{yunis}}$$

0,400k —— 5,4 yunis

0,350k —— x

$$x = \frac{0,350 \cdot 5,4}{0,400} = \boxed{4,72\ \text{yunis}}$$

A pesar de ser consciente de los errores pasados, la estudiante sigue confiando en el recurso a la operación y vuelve a utilizar la regla de tres como método para hallar los valores que se requieran. Es posible que el tener ahora una nueva tabla más completa, aumente la confianza en ello: el tener más datos, significa que está todo más acotado por lo que puede haber menos margen de error.

Por otro lado, como comentábamos en la fase anterior, al paquete de 0,135 kg le asigna un valor proporcional a su peso; obviando que en el intervalo entre 0 y 250 g la función es constante.

Al ponerlo todos en común en clase se evidencia la disparidad de resultados (ver tabla 67).

Fase 4

NUEVAS TARIFAS DE PRECIOS

Kg	Yunis
0 - 0,250 kg	3,5 yunis
0,400 kg	5,9 yunis
0,500 kg	6,75 yunis
0,600 kg	7,4 yunis
0,700 kg	8,05 yunis
0,900 kg	9,35 yunis
1 kg	10 yunis

1. ¿Puedes encontrar la forma que te ayude a cobrar a los clientes?

0,900 K —— 9,35 yunis.
0,800 kg —— x

$$x = \frac{0{,}800 \cdot 9{,}35}{0{,}900} = \boxed{8{,}31 \text{ yunis}}$$

0'135 kg = 3,5 yunis.

0,400 kg —— 5,9 yunis
0,300 kg —— x

$$x = \frac{0{,}300 \cdot 5{,}9}{0{,}400} = \boxed{4{,}42 \text{ yunis}}$$

0,400 kg —— 5,9 yunis
0,350 kg —— x

$$x = \frac{0{,}350 \cdot 5{,}9}{0{,}400} = \boxed{5{,}16 \text{ yunis}}$$

La respuesta que presenta la alumna ante esta última pregunta consiste en volver a recalcular los precios para los mismos paquetes de la pregunta anterior. Esta vez comprende que el envío de 0,135 kg pertenece al intervalo de 3,5 yunis y no opera con la regla de tres.

Aunque este sistema parece que le proporciona seguridad en el juego, se muestra en la figura 10 la persistencia del error debido al uso del método proporcional.

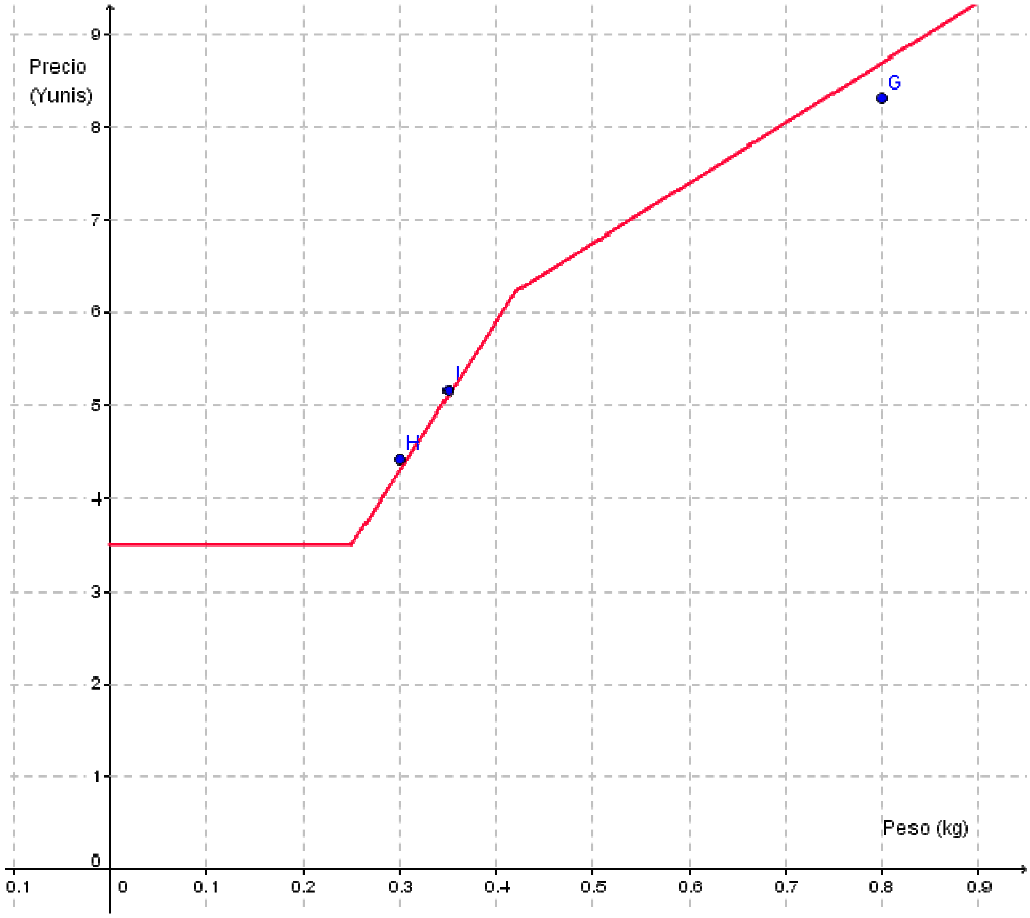


Figura 10. Respuestas caso único en la fase 4

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Breve síntesis

En este trabajo se ha llevado a cabo una propuesta de ingeniería didáctica basada en el aprendizaje del álgebra con componente adidáctico. La razón de esta elección ha sido motivada por el modo habitual de presentación del álgebra en el primer curso de la educación secundaria. Este modo consiste en la enseñanza del álgebra como una aritmética generalizada que, pese a ser un instrumento útil en primera instancia, a largo plazo dificulta el acceso a un álgebra más avanzada.

Con este objetivo, en la primera parte del trabajo se ha analizado el contexto institucional (los contenidos y criterios de evaluación del currículo y los libros de texto) intentando establecer las relaciones matemáticas propias del conocimiento del álgebra.

La segunda parte, siguiendo el esquema de la ingeniería didáctica, se presenta en primer lugar un análisis de los materiales de la asignatura y una previsión de los errores y dificultades que nos encontraremos. Posteriormente se explica detalladamente la situación que se ha planteado en clase y las actividades que se preparan. Por último, se han analizado los resultados generales del proceso de estudio así como los de un caso concreto.

Conclusiones generales del trabajo

> *Si en la enseñanza se enfatizan las conexiones matemáticas, entonces los estudiantes aprenden las matemáticas como una herramienta útil en contextos diversos.*

La situación de los Yunis ha permitido trabajar con los alumnos diferentes campos de actuación de las matemáticas relacionándolos entre ellos.
En este proceso de estudio, gracias a la situación planteada, se ha conseguido que lo alumnos trabajen las conexiones entre las ecuaciones y las equivalencias entre números; la proporcionalidad y la función lineal; las funciones y sus distintas formas de representación, etc.

> *El orden en un proceso de estudio puede invertir la introducción clásica que antepone la enseñanza de técnicas, procedimientos, algoritmos,… a su uso y contextualización.*

El orden clásico para la enseñanza de las matemáticas de, en primer lugar, enseñar las técnicas y después aplicar las técnicas, no es un orden necesario. Con la situación didáctica se muestra que primero puede haber una parte discursiva de análisis, de comprensión, de movilización de conocimientos; y en segundo lugar, una introducción de técnicas con su posterior aplicación.

Cuestiones abiertas

- Aplicación en un grupo de alumnos regular.
- Hacer un estudio estadístico de los resultados obtenidos. La aplicación en un grupo regular permitiría realizar un análisis con un carácter más cuantitativo, y no cualitativo.
- Optimizaría el estudio, el poder aplicar la situación en un periodo de tiempo más concentrado (en dos semanas y no en seis, como ha sucedido) y el disponer de sesiones completas de 50 minutos.

Referencias

Brousseau G. (1997) *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Dordtrecht: Kluwer.

Chevallard, Y. Bosch, M., Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona: ICE-Horsori.

Godino J. D., Font V., Wilhelmi M. R. (2006) Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (Especial), 131-155.

Godino J. D., Ake, L. Gonzatto, M., Wilhelmi M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las ciencias* 32(1), 199-219.

Lacasta E., Madoz E. G., Wilhelmi M. R. (2006). El paso de la aritmética al álgebra en la educación secundaria obligatoria. Indivisa, *Boletín de estudios e investigación*, Monografía IV, 79-90.

LOE. Ley Orgánica de Educación. Madrid: BOE
Real Decreto 126/2014
Real Decreto 1631/2007
Real Decreto 1467/2007

Madoz E. G. (2006) *El paso de la aritmética al álgebra en la enseñanza secundaria obligatoria*. Diploma de Estudios Avanzados (sin publicar). Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad andaluza de educación matemática Thales.

Van Dooren, W., De Bock, D., Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de la linealidad. Indivisa, *Boletín de estudios e investigación*, Monografía IV, 115-135.

Wilhelmi M. R., Godino J. G., Lacasta E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques.*Vol. 27, nº 1, 77-120.

Libros de texto

Aranzubía V., Santaolalla E., Roldán J., Ruiz E. (2009) *Matemáticas 6. Proyecto Nuevo planeta amigo*. Ediciones SM

Redal E. J. (2007) *Matemáticas 1º ESO. Proyecto Casa del saber.* Madrid: Santillana

Redal E. J. (2008) *Matemáticas 2º ESO. Proyecto Casa del saber.* Madrid: Santillana

Redal E. J. (2007) *Matemáticas 3º ESO. Proyecto Casa del saber.* Madrid: Santillana

Cuadernos de matemáticas (2011) Madrid: Grupo Editorial Bruño

30. ÁLGEBRA. Lenguaje simbólico y ecuaciones de primer grado

31. ÁLGEBRA. Ecuaciones y funciones de primer grado. Ejercicios y problemas.

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto

B. Análisis cuantitativo de la tipología de ejercicios en los cuadernillos

C. Ficha A de las actividades a posteriori

D. Ficha B de las actividades a posteriori

A. Unidad didáctica del libro de texto

Matemáticas 30

Resuelve estas dos ecuaciones:

75 $4x + 3 = 6 + 2x$.

76 $-7 + 5x = 4 + 2x$.

77 Dada la ecuación $4x - 8 = 12 - 6x$, resta dos unidades al primer miembro de la misma. Después resuelve las dos ecuaciones. ¿Cómo son los resultados?

Resuelve:

78 $5 + 4x - 6 + x = -3x - 3 + 2 + 2x - 2x$.

79 Une cada expresión de la columna de la izquierda con su correspondiente reducida de la columna de la derecha.

a) $4x + 4 - 3x + 6 - 5$	*1)* $4 - 6b$
b) $3x + 12 - 4x + 2 + 10 + 5x$	*2)* $15 - 15x$
c) $2 + 3b - 6 - 4b + 8 - 5b$	*3)* $4x + 24$
d) $20 - 3x + 5 - 2x - 10x - 10$	*4)* $x + 5$
e) $3b - 5 - 5b - b + 2b - 3$	*5)* $-8 - b$

Resuelve:

80 $7x - 35 = 8x - 42$.

81 $5x + 25 = -3x - 17$.

Halla el valor de x para que se cumplan las siguientes igualdades:

98 $3(x - 5) = 6 + 2(x - 7)$.

99 $2(x - 3) + 4 = 5 - 3x$.

100 $-4x - 7 + 3x = 7x$.

101 $2(3x - 3) = 3(5 + x)$.

102 Aplicando la propiedad distributiva, realiza de manera indicada las operaciones:

a) $3 + 2(5 - 6) =$

b) $5 - (3 + 4) =$

c) $2 - 3(4 + 3) =$

d) $8 - 2(3 - 5 - 4) =$

Resuelve las ecuaciones de los ejercicios 103 a 108 y comprueba los resultados:

103 $1 - (4 - x) = 3x + 1$.

104 $5 + 3x = 2(2x + 6)$.

105 $8x - 7 = 9 + 2x - 4$.

106 $5x + 4 = 3(5 - 2x)$.

209 Traduce al lenguaje simbólico las siguientes expresiones:

a) La tercera parte de un número más 3 unidades. ______

b) El triple de un número menos 3 unidades. ______

c) El triple de un número más su tercera parte. ______

d) La tercera parte de un número menos 3. ______

e) El triple de un número menos su tercera parte. ______

210 Halla un número que sumado a 15 nos dé el triple de 23.

Solución:

Respuesta: ______

211 $\frac{6x+2}{20} - \frac{x+7}{5} = \frac{4+2x}{10} - \frac{5x+1}{8}$.

212 $\frac{3x-5}{4} + \frac{1-2x}{3} = \frac{1-x}{6}$.

213 Halla un número tal que al restarle 31 nos dé como resultado 13.

Solución:

Respuesta: ______

214 Al llegar 32 personas a una reunión se observa que ahora el número de asistentes es igual al triple de los que había menos catorce. ¿Cuántas personas había inicialmente en la reunión?

Solución:

Respuesta: ______

53 Halla tres números consecutivos tales que, tres veces el primero más cuatro veces el segundo, excedan en 38 unidades a cinco veces el último.

Solución:

Respuesta: ____________

54 Si la suma de las edades de dos personas es de 98 años y su diferencia es de 26 años, ¿qué edad tiene cada una?

Solución:

Respuesta: ____________

55 Dos amigos juntan sus tebeos y así tienen entre ambos 14 *Mortadelos*, 9 *Zipi y zape* y 8 *DDT*. ¿Cuántos tebeos aportó cada amigo, si uno tenía 7 más que el otro?

Solución:

Respuesta: ____________

56 ¿Cuánto valen los ángulos de un triángulo, sabiendo que el primero es doble que el segundo y éste es triple que el tercero?

Solución:

Respuesta: ____________

57 Se desea distribuir 630 manzanas en dos cajas de modo que una tenga una tercera parte menos que la otra. ¿Cuántas manzanas contendrá cada caja?

Solución:

Respuesta: ____________

58 $4 - \frac{5x+3}{4} + \frac{2x+3}{3} - \frac{3x}{2} = \frac{1}{12}$

59 $\frac{2x-3}{2} - \frac{3x+4}{5} = \frac{6x-18}{4}$

91 Halla tres números pares consecutivos, sabiendo que el triple del segundo más el primero es menor en 20 unidades a cinco veces el último.

Solución:

Respuesta: ______________________

92 Una pareja de dálmatas se encuentran con una jauría y preguntan al perrero cuántos son. El perrero dice: «Los que son, más tantos como los que son, más la mitad de los que son, más la mitad de la mitad de los que son, y contándoos a vosotros también, entonces seríais 101». ¿Cuántos perros tiene la jauría?

Solución:

Respuesta: ______________________

93 Una madre compra 3 pantalones y 2 camisetas por 176 €. Si cada pantalón cuesta el doble que una camiseta, ¿cuánto vale cada prenda?

Solución:

Respuesta: ______________________

94 Un conejo corre a 6 m/s perseguido por un zorro que se encuentra a 360 m. Si el zorro corre a 15 m/s, ¿cuánto tardará en darle alcance?

Solución:

Respuesta: ______________________

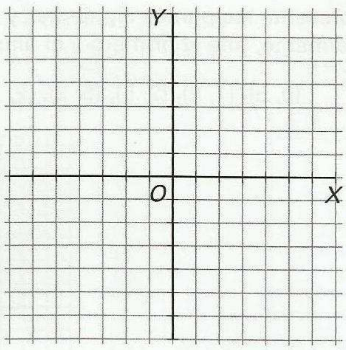
95 La madre de Fernando tiene triple edad que éste, y dentro de 10 años tendrá el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

Solución:

Respuesta: ______________________

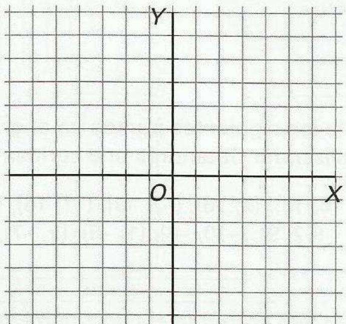
136 Representa los siguientes puntos:

A)	(3, 2)	*F)*	(2, 0)
B)	(5, –1)	*G)*	(–4, 3)
C)	(0, 0)	*H)*	(0, 3)
D)	(–2, 4)	*I)*	(–2, –2)
E)	(1, 2)	*J)*	(3, –6)



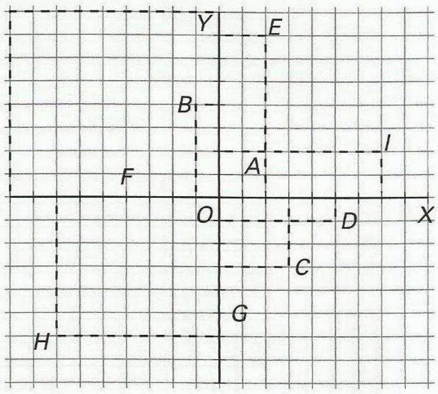
137 Sitúa los siguientes puntos en el eje de coordenadas y utiliza diferentes colores según el cuadrante en el que están situados:

A)	(4, 2)	*I)*	(–2, 3)
B)	(–1, 3)	*J)*	(–2, –1)
C)	(–3, –4)	*K)*	(0, 3)
D)	(–4, 0)	*L)*	(–3, –3)
E)	(0, 0)	*M)*	(0, –2)
F)	(2, –1)	*N)*	(1, 1)
G)	(5, 0)	*Ñ)*	(0, –4)
H)	(2, 0)	*O)*	(–3, 2)



138 Escribe las coordenadas de los puntos siguientes:

A =	*F* =
B =	*G* =
C =	*H* =
D =	*I* =
E =	



139 Sin representarlos gráficamente, indica en qué eje o cuadrante se encuentran los siguientes puntos:

a)	(2, 4)	*d)*	(0, –4)	*g)*	(–2, 2)	*j)*	(0, 0)
b)	(–1, –1)	*e)*	(3, –2)	*h)*	(3, 3)	*k)*	(3, –1)
c)	(0, 2)	*f)*	(–2, –4)	*i)*	(–4, 0)	*l)*	(2, 4)

140 ¿Son el mismo punto los pares (4, 6) y (6, 4)? ¿Qué relación existe entre ellos?

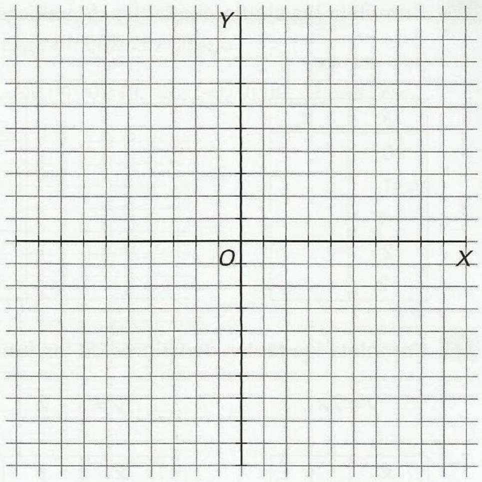
147 Representa las funciones $y = -3$, $y = -4x$ e $y = 4x - 3$ en los mismos ejes de coordenadas, después de realizar las tablas de valores correspondientes:

$y = -4x$

x	y

$y = 4x - 3$

x	y



148 Completa las tablas de valores siguientes:

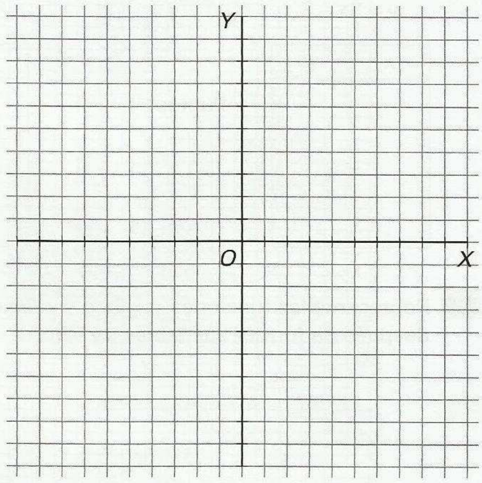
x	2	3	0		−1	4
y	4	6		2		

x	0	1	−1	3		2
y	2	3	1		5	

x	3	6		0	−1	
y	1		2	0		−6

x	1	−2	0		3	
y	4	4		4		4

149 Representa las funciones $y = -2$, $-x = 3$ e $y = x + 1$ después de hacer las correspondientes tablas de valores.



150 Halla las funciones cuyas tablas de valores tienes aquí debajo:

x	0	1	2	−1
y	−2	2	6	−6

$y =$

x	3	−2	0
y	7	−3	1

$y =$

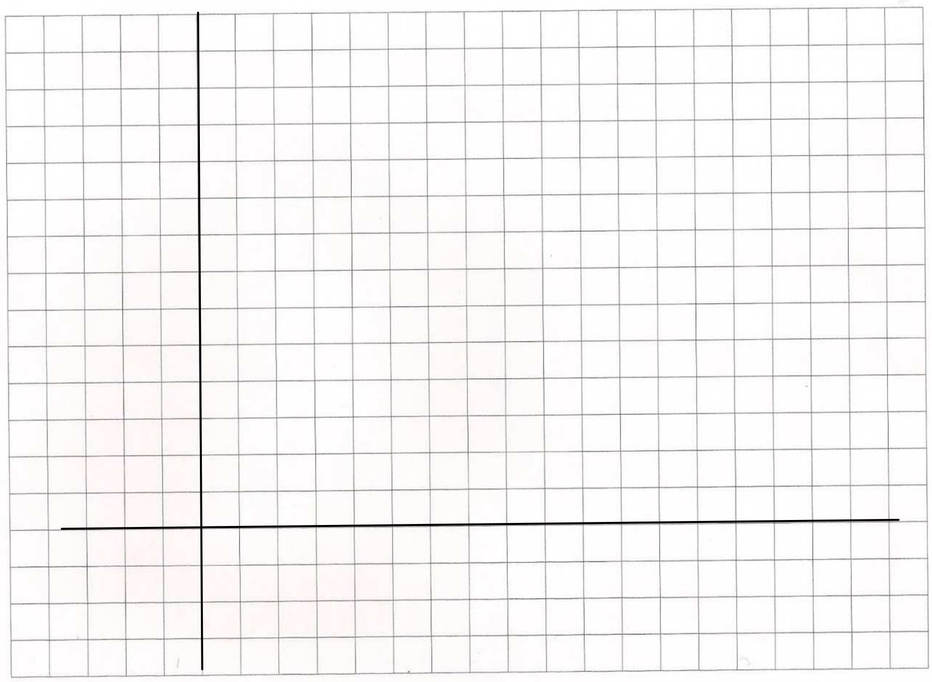
B. Análisis cuantitativo de la tipología de ejercicios en los cuadernillos

		CUADERNILLO 30	CUADERNILLO 31	SUMA	TOTAL
Por tanteo	Una incógnita	1, 2-9, 11		10	12
	Varias incógnitas	22		1	
	Denominador	134		1	
Resolver	Una incógnita	1, 2-19, 34, 35		21	200
	Varias incógnitas	23-32, 36, 37-40, 42, 43, 45, 46, 48-53, 56-59, 61-66, 68-71, 74, 75, 76, 78, 80-83, 85, 86		49	
	Paréntesis	90, 93-96, 98-101, 103-108, 110, 111, 113-118, 123-129, 131-132, 155, 156, 159, 182, 195, 203, 216, 230, 231, 245	1, 12, 21, 45, 50, 64	48	
	Denominador	135-142, 144-149, 151, 154, 157, 158, 160, 162-173, 177-180, 182, 184-187, 189-192, 194, 197, 198, 202, 205-208, 211, 212, 215, 219, 220, 224-225, 228, 229, 238-241, 246-248.	2, 11, 16, 17, 22, 29, 36, 37, 44, 51, 58, 59, 71, 72	82	
Hallar errores		47, 109, 122, 181		4	4
Comprensión propiedades	Teoría	41, 67		2	7
	Con un nº multiplicando	55, 60, 73, 77, 121		5	
Equivalentes		84, 112, 119		3	
Prioridad operaciones		89, 92, 102, 130		4	
Averiguar el valor numérico		10, 21		2	
Lenguaje algebraico	Directo	120, 133, 150, 176, 183, 193, 199, 204, 209, 217, 223, 233, 242	4, 9, 18, 25, 31, 45	19	32
	Problemas	200, 201, 210, 213, 218, 221, 226, 232, 237, 249, 251, 252, 254		13	
Problemas contextuados		174, 175, 188, 196, 214, 222, 227, 234, 235, 236, 243, 244, 250, 253	112 (total problemas)	126	126
Representación puntos ejes			136-142	7	7
Tablas de valores			143, 144, 145, 148	4	4
Representación funciones			146, 147, 149, 151, 153, 156, 157, 159, 160, 161, 162, 163.	13	13
Hallar la función a partir de la tabla o la gráfica			150, 158	2	2

C. Ficha A de las actividades a posteriori

Haz la tabla y representa las siguientes rectas.

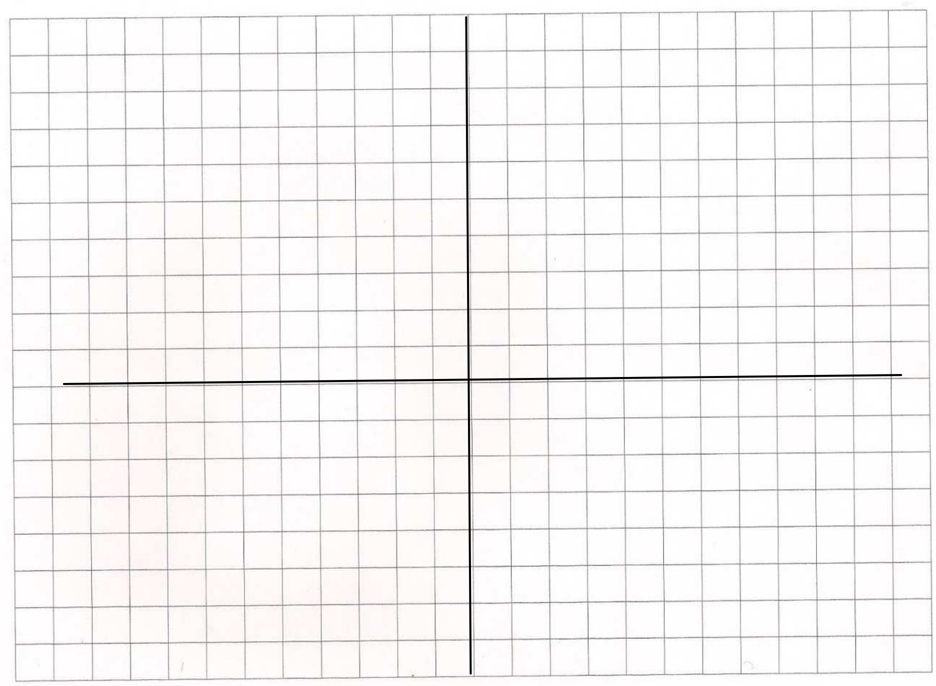
r:	$y = x - 1$
s:	$y = -3x + 8$



A) ¿En qué punto se cortan estas dos rectas? (…………. , ……………)

B) ¿Cómo podríamos hallar el punto exacto?

D. Ficha B de las actividades a posteriori



Resuelve	$3x + 2 = 0$	$3x + 2 = 5$	$3x + 2 = -4$	$3x + 2 = 9$
¿Cuánto vale la x?				
Escribe la fórmula GENERAL de la función				
¿Cuánto vale la y?				
¿Puedes escribir los puntos de la función?				