

# MATEMÁTICAS

Laura URRICELQUI ANCÍN

## ANÁLISIS Y DISEÑO DE MATERIALES FÍSICOS PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONTEO

TFG/*GBL* 2014



Facultad de Ciencias Humanas y Sociales  
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Grado en Maestro de Educación  
Primaria



**Grado en Maestro en Educación Primaria**

Trabajo Fin de Grado

***ANÁLISIS Y DISEÑO DE MATERIALES FÍSICOS  
PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONTEO***

Laura URRICELQUI ANCÍN

**FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y SOCIALES  
UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA**

**Estudiante / Ikaslea**

Laura URRICELQUI ANCÍN

**Título / Izenburua**

Análisis y diseño de materiales físicos para la comprensión del conteo

**Grado / Gradu**

Grado en Maestro en Educación Primaria / Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua

**Centro / Ikastegia**

Facultad de Ciencias Humanas y Sociales / Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea  
Universidad Pública de Navarra / Nafarroako Unibertsitate Publikoa

**Director-a / Zuzendaria**

M<sup>a</sup> Inmaculada LIZASOÁIN IRISO

**Departamento / Saila**

Matemáticas/Matematika

**Curso académico / Ikasturte akademikoa**

2013/2014

**Semestre / Seihilekoa**

Primavera / Udaberrik

## Preámbulo

El Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, modificado por el Real Decreto 861/2010, establece en el Capítulo III, dedicado a las enseñanzas oficiales de Grado, que “estas enseñanzas concluirán con la elaboración y defensa de un Trabajo Fin de Grado [...] El Trabajo Fin de Grado tendrá entre 6 y 30 créditos, deberá realizarse en la fase final del plan de estudios y estar orientado a la evaluación de competencias asociadas al título”.

El Grado en Maestro en Educación Primaria por la Universidad Pública de Navarra tiene una extensión de 12 ECTS, según la memoria del título verificada por la ANECA. El título está regido por la *Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria*; con la aplicación, con carácter subsidiario, del reglamento de Trabajos Fin de Grado, aprobado por el Consejo de Gobierno de la Universidad el 12 de marzo de 2013.

Todos los planes de estudios de Maestro en Educación Primaria se estructuran, según la Orden ECI/3857/2007, en tres grandes módulos: uno, *de formación básica*, donde se desarrollan los contenidos socio-psico-pedagógicos; otro, *didáctico y disciplinar*, que recoge los contenidos de las disciplinas y su didáctica; y, por último, *Practicum*, donde se describen las competencias que tendrán que adquirir los estudiantes del Grado en las prácticas escolares. En este último módulo, se enmarca el Trabajo Fin de Grado, que debe reflejar la formación adquirida a lo largo de todas las enseñanzas. Finalmente, dado que la Orden ECI/3857/2007 no concreta la distribución de los 240 ECTS necesarios para la obtención del Grado, las universidades tienen la facultad de determinar un número de créditos, estableciendo, en general, asignaturas de carácter optativo.

Así, en cumplimiento de la Orden ECI/3857/2007, es requisito necesario que en el Trabajo Fin de Grado el estudiante demuestre competencias relativas a los módulos de formación básica, didáctico-disciplinar y practicum, exigidas para todos los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria.

En este trabajo, el módulo *de formación básica* nos ha permitido estudiar los principales autores que han repercutido en la enseñanza de las matemáticas como es el caso de Van Hiele o Piaget. Este módulo se desarrolla a lo largo del apartado tres, el cual resulta enriquecedor porque permite conocer y tener en cuenta las características psicológicas e intelectuales del niño en sus diferentes etapas y porque, además, permite organizar adecuadamente las actividades siguiendo el esquema propuesto por Van Hiele.

El módulo *didáctico y disciplinar* se desarrolla a lo largo de todo el trabajo aunque se concreta fundamentalmente en el quinto y sexto apartados, ya que en estos se analizan los materiales físicos para trabajar el conteo y se proponen diferentes unidades didácticas con las que poner en práctica lo analizado e investigado en el resto de secciones del Trabajo Fin de Grado. Asimismo, la parte disciplinar de este módulo está presente en el marco teórico, donde se presentan los diferentes principios y técnicas del conteo. Por último, se observan referencias al currículum de Matemáticas de Educación Primaria en el primer apartado, donde se incluye todo lo relacionado con la justificación del tema de trabajo elegido.

Asimismo, el módulo *practicum* está presente en el apartado seis, en donde se presentan las diferentes unidades didácticas elaboradas en torno al conteo. Además se concreta en el apartado siete, ya que en éste se incluyen todas las sesiones prácticas llevadas a cabo en un aula concreta. Este módulo recoge la puesta en práctica una de las unidades didácticas propuestas, lo que resulta significativo para contrastar y comparar los posibles cambios que puedan haber surgido entre lo esperado y lo ocurrido en la realidad.

## Resumen

En este trabajo se proponen una serie de materiales didácticos para trabajar el conteo. Los materiales didácticos propuestos se incluyen dentro de tres unidades didácticas dirigidas respectivamente a cada uno de los tres ciclos de Educación Primaria con las que se pretende mejorar la adquisición y comprensión del conteo.

Para lograr este propósito se analizan los recursos físicos existentes, así como los aspectos que actualmente influyen en la manera de enseñar las matemáticas (teorías del aprendizaje, desarrollo intelectual del niño...). Además se analizan las actividades de los libros de texto de diferentes cursos y editoriales relacionadas con el conteo, donde se echan de menos actividades de recuento de las diferentes formas de combinar los elementos de dos conjuntos. Por este motivo, las unidades didácticas que proponemos van encaminadas a trabajar este aspecto de la multiplicación.

La puesta en práctica de una de las tres unidades didácticas elaboradas ha permitido analizar los resultados obtenidos y extraer las conclusiones oportunas.

*Palabras clave:* materiales didácticos, conteo, Educación Primaria, libros de texto, multiplicación.

## Abstract

In this document, a series of teaching materials are proposed to work the count. These materials are included in three teaching units aimed at each of the three stages of primary education in order to improve the acquisition and understanding of counting.

For this purpose it was necessary to analyze different physical resources and the aspects that influence the way of teaching mathematics (theories of learning, intellectual development of children ...). Besides the activities of different textbooks were analyzed and there weren't counting activities about combining elements of two sets. For this reason, the teaching units we propose are intended to work this aspect of multiplication.

The implementation of one of the three teaching units has made possible to analyze the results and to draw conclusions.

*Keywords:* teaching materials, count, elementary education, textbooks, multiplication.



## ÍNDICE

Introducción

<b>1. JUSTIFICACIÓN</b> .....	1
1.1 Justificación del tema elegido .....	1
1.1.1 <i>Importancia y utilidad del conteo en el niño</i> .....	1
1.1.2 <i>Presencia del conteo en el currículum</i> .....	2
1.1.3 <i>Globalidad en los bloques de matemáticas</i> .....	4
1.2 Justificación del empleo de materiales físicos .....	4
<b>2. MARCO TEÓRICO: LA IMPORTANCIA DE SABER CUANTIFICAR</b> .....	5
2.1 Necesidad del conteo .....	5
2.2 Principios del conteo .....	6
2.3 Técnicas del recuento .....	7
2.4 Los sistemas de numeración en Primaria .....	12
2.5.1 <i>Los sistemas posicionales: decimal y sexagesimal</i> .....	12
2.5.2 <i>Sistema no posicional: el sistema de numeración romano</i> .....	12
<b>3. LA ENSEÑANZA DEL CONTEO EN PRIMARIA</b> .....	13
3.1 Aspectos a tener en cuenta .....	13
3.1.1 <i>Las dos grandes teorías del aprendizaje</i> .....	13
3.1.2 <i>Desarrollo intelectual del niño</i> .....	15
3.1.3 <i>El modelo de Van Hiele: fases de aprendizaje</i> .....	17
3.2 Situación actual del conteo en las aulas .....	18
<b>4. EL CONTEO EN LOS LIBROS DE TEXTO DE PRIMARIA</b> .....	19
<b>5. MATERIALES FÍSICOS EXISTENTES PARA TRABAJAR EL CONTEO</b> .....	22
<b>6. SECUENCIAS DIDÁCTICAS PARA TRABAJAR EL CONTEO</b> .....	34
6.1 Secuencia didáctica 1º Ciclo de Primaria .....	34
6.2 Secuencia didáctica 2º Ciclo de Primaria .....	38
6.3 Secuencia didáctica 3º Ciclo de Primaria .....	43
<b>7. RESULTADOS</b> .....	49
7.1 Sesión 1. ....	49
7.2 Sesión 2. ....	50
7.3 Sesión 3. ....	52
7.4 Sesión 4. ....	54

**CUESTIONES PLANTEADAS Y CONCLUSIONES**

**REFERENCIAS**

**ANEXOS**

Anexo 1

Anexo 2

Anexo 3

Anexo 4

Anexo 5

Anexo 6

Anexo 7

Anexo 8

Anexo 9

Anexo 10

Anexo 11

Anexo 12

Anexo 13

Anexo 14

Anexo 15

Anexo 16

Anexo 17

Anexo 18

Anexo 19

Anexo 20

## Introducción

Este trabajo pertenece al área de Didáctica de las Matemáticas. De entre todas las opciones a elegir en el Trabajo Fin de Grado, quise escoger alguna propuesta que estuviera relacionada con las matemáticas, ya que es una materia que desde siempre me ha interesado y motivado. En concreto me decidí por el *Uso de materiales físicos y representaciones en la enseñanza de las matemáticas*, porque creo que los materiales físicos son una buena forma de conseguir la comprensión de ciertos contenidos matemáticos que a través de explicaciones teóricas o ejemplos no se logran entender. Además, yo no he tenido la suerte de presenciar actividades con materiales durante mis años de escolaridad. Por este motivo, me apetece además de proponer y realizar actividades con materiales, crear nuevos materiales con los que trabajar contenidos o aspectos relacionados de una u otra forma con el conteo.

Me planteo para ello una serie de objetivos, que espero cumplir durante y tras la realización de este trabajo:

- Ofrecer una visión global acerca de la importancia de cuantificar y agrupar objetos tanto dentro como fuera de la escuela.
- Analizar críticamente la metodología empleada en las escuelas y en los libros de texto de Primaria en relación con el tema del conteo.
- Analizar los materiales físicos existentes, valorando la utilidad de cada uno de ellos a la hora de trabajar el conteo.
- Proponer actividades en las que el niño tenga que contar de manera reflexiva, incluyendo en éstas aspectos de todos los bloques del área de matemáticas.
- Introducir materiales físicos y/o tecnológicos en las actividades planteadas para conseguir una mayor comprensión de conceptos vinculados con el conteo, y en concreto con la combinatoria, creando además materiales físicos para suplir las posibles necesidades del alumnado.
- Resolver o reducir las dificultades a las que tiene que hacer frente el niño en la mayoría de tareas vinculadas con la combinatoria.

Por último, termino el apartado de introducción incluyendo las diferentes cuestiones que quiero resolver una vez acabado el Trabajo Fin de Grado, a las que responderé tras la observación, el análisis y la puesta en práctica de las diferentes actividades planteadas:

1. ¿Qué significa contar? ¿Cómo se va desarrollando esta habilidad?
2. ¿Cómo se enseña el conteo en las escuelas de hoy en día? ¿Qué tipo de aprendizajes se transmiten?
3. ¿Qué tipo de actividades de conteo suelen aparecer en los libros de texto de matemáticas? ¿Corresponden solo a un bloque temático o abarcan varios bloques?
4. ¿Podemos trabajar el concepto del conteo de manera transversal a todos los bloques del área de matemáticas? De ser así, ¿qué supondría?
5. ¿Qué materiales físicos se utilizan (o existen) para trabajar el conteo en las aulas?
6. ¿Cuál es la mejor forma de emplear los materiales físicos a la hora de trabajar aspectos relacionados con el conteo?
7. ¿Qué beneficios pueden obtenerse si entendemos la multiplicación como una forma de combinar elementos? ¿Cómo entienden los niños la idea de multiplicación?

# 1. JUSTIFICACIÓN

## 1.1 Justificación del tema elegido

### 1.1.1 Importancia y utilidad del conteo en el niño

Tanto la adquisición de técnicas de recuento como el manejo de un sistema de numeración, tienen una importancia capital en el desarrollo del niño. A continuación se recogen los diferentes beneficios del conteo y las múltiples razones por las que debería tener la relevancia que merece durante los cursos de Primaria:

- Desde que el niño es pequeño observa cómo el conteo resulta útil en determinadas situaciones y además es consciente de que necesitan hacer uso del mismo: *"En sus juegos, o en otras actividades dentro de su casa, los niños separan objetos, reparten dulces o juguetes entre sus amigos, etcétera; cuando realizan estas acciones, y aunque no son conscientes de ello, empiezan a poner en juegos de manera implícita e incipiente, los principios del conteo"*. (Aguirre, 2004, 71)
- Son muchas las *habilidades* que el conteo desarrolla en el niño:
  - Habilidades visuales: cuanto más cuantifican mayor agilidad visual tienen.
  - Habilidades organizativas: El hecho de realizar equivalencias entre horas, minutos y segundos hace que sean más conscientes de las medidas de tiempo y que mejoren en la planificación de exámenes, trabajos o actividades.
- El conteo puede resultar valioso con respecto a las *nociones espacio-temporales*, ya que serán capaces de diferenciar el antes, ahora y después a través del trabajo de las horas (sistema sexagesimal).
- El conteo favorece la *consolidación* de ciertos *contenidos matemáticos*, ya que el hecho de cuantificar y/o agrupar provoca que el niño refuerce la idea de qué es un número natural y que además tenga un mayor dominio de la secuencia numérica. Asimismo permite desarrollar el pensamiento lógico

(correspondencias, equivalencias...), lo que a su vez repercute en cualquier ámbito matemático.

- Por si fuera poco, ciertos aspectos del conteo están *vinculados* con contenidos de otras *materias* como es el caso de Historia, ya que en ocasiones aparecen fechas o personajes históricos nombrados mediante números romanos. También en Ciencias Naturales han de emplear las técnicas de conteo para contar las hojas de una rama, el número de pétalos de una flor e incluso para la realización de un experimento.
- Por último, considero necesario comentar que el conteo sigue estando *presente* en los *cursos de Secundaria*: cálculo de frecuencias absolutas y relativas, la media, la moda y la mediana, la fracción como razón y la combinatoria (variaciones, permutaciones y combinaciones).

### 1.1.2 Presencia del conteo en el currículum

Tras observar y analizar el currículum de Primaria queda patente que el conteo tiene especial relevancia en cada uno de los ciclos e incluso en todos los bloques del área de matemáticas, tal y como se refleja en la siguiente tabla:

**Tabla 1.** Currículum de Matemáticas de Educación Primaria

1º Ciclo de Primaria	2º Ciclo de Primaria	3º Ciclo de Primaria
<p>Bloque 1.- Números y operaciones</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Recuento, medida, ordenación y expresión de cantidades en situaciones de la vida cotidiana.</li> <li>- Lectura y escritura de números. Grafía, nombre y valor de posición de números hasta tres cifras.</li> <li>- Utilización en situaciones familiares de la suma para juntar</li> </ul>	<p>Bloque 1.-Números y operaciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Sistema de numeración decimal. Valor de posición de las cifras. Su uso en situaciones reales.</li> <li>- Utilización en situaciones familiares de la multiplicación como suma abreviada, en disposiciones regulares y problemas combinatorios.</li> </ul>	<p>Bloque 1.-Números y operaciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Números decimales. Valor de posición y equivalencias. Uso de los números decimales en la vida cotidiana.</li> <li>- Sistemas de numeración en culturas anteriores e influencias en la actualidad.</li> </ul>

o añadir; de la resta para separar o quitar; y de la multiplicación para calcular número de veces.		
<p>Bloque 2.- La medida: estimación y cálculo de magnitudes</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Unidades de medida del tiempo: el tiempo cíclico y los intervalos de tiempo (lectura del reloj, las horas enteras, las medias).</li> </ul>	<p>Bloque 2.-La medida: estimación y cálculo de magnitudes.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Unidades de medida del tiempo: lectura en el reloj analógico y digital.</li> </ul>	<p>Bloque 2.- La medida: estimación y cálculo de magnitudes.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Equivalencias y transformaciones entre horas, minutos y segundos, en situaciones reales.</li> </ul>
	<p>Bloque 3.- Geometría.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Clasificación de polígonos. Lados y vértices.</li> <li>- Los cuerpos geométricos: cubos, esferas, prismas, pirámides y cilindros. Aristas y caras.</li> <li>- Comparación y clasificación de ángulos.</li> </ul>	<p>Bloque 3.- Geometría</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Ángulos en distintas posiciones.</li> <li>- Relaciones entre lados y entre ángulos de un triángulo.</li> </ul>
<p>Bloque 4.- Tratamiento de la información, azar y probabilidad</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos.</li> <li>- Utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos.</li> </ul>	<p>Bloque 4. -Tratamiento de la información, azar y probabilidad.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Tablas de datos. Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento de datos.</li> <li>- Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición.</li> </ul>	<p>Bloque 4.-Tratamiento de la información, azar y probabilidad.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Recogida y registro de datos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición.</li> </ul>

### *1.1.3 Globalidad en los bloques de matemáticas*

Y por último, justifico la elección del conteo como tema principal del trabajo debido a que es un elemento que aparece en los diferentes bloques del área de matemáticas, ya sea a través del uso y comprensión del sistema de numeración decimal y del sistema de numeración romano (Bloque 1) como a través de las horas (Bloque 2) y los ángulos (Bloque 3), ya que han de manejar un nuevo sistema de numeración, el sistema sexagesimal, lo que a su vez exige necesariamente que sepan contar y agrupar. Además los gráficos y estadísticas (Bloque 4) son técnicas de representación en donde el recuento es fundamental a la hora de recoger datos e interpretarlos.

Sin duda, el hecho de que el conteo esté presente en todos los bloques del área de matemáticas provoca que pueda ser trabajado de manera transversal, favoreciendo que el alumno adquiera un aprendizaje significativo y contextualizado.

La necesidad e importancia de relacionar los contenidos de matemáticas aparece incluso en el Decreto Foral 24/2007, de 19 de Marzo:

*“Los contenidos se han organizado en cuatro bloques que responden al tipo de objetos matemáticos que se manejan en cada uno de ellos: Números y operaciones, Medida, Geometría y Tratamiento de la información, azar y probabilidad. Es preciso advertir que esta agrupación es sólo una forma de organizar los contenidos, que habrán de abordarse de manera relacionada. La enseñanza de las Matemáticas atenderá a la configuración cíclica de los contenidos que están siempre relacionados y se construyen unos sobre otros.”*  
(Boletín Oficial de Navarra, 2007, 5796)

## **1.2 Justificación del empleo de materiales físicos**

Los materiales físicos permiten al alumno ver, tocar y mover, acciones que resultan imposibles de realizar con la pizarra o el libro de texto. El empleo de estos materiales lleva consigo una serie de beneficios, ya que son útiles porque fomentan la participación, la autonomía y el trabajo en equipo y también porque facilitan que el niño pueda comprobar y corregir de manera intuitiva. Por lo tanto, la utilización de

materiales manipulativos potencia y mejora la enseñanza de cualquier contenido matemático que queramos trabajar.

Además, tal como afirma Cascallana (1988), siempre es necesario partir de la manipulación de objetos concretos y físicos para después pasar a la fase representativa, la cual resultará imprescindible para llegar a una fase más abstracta y numérica. Por lo tanto, el empleo de materiales en la enseñanza puede permitir avanzar gradualmente desde la fase más concreta y manipulativa hasta la fase de abstracción.

A pesar de esto, un material no realiza ninguna labor didáctica por el simple hecho de ser bonito o divertido. Es fundamental la labor del docente, quien debe extraer el máximo partido del material que quiera emplear dentro del aula. De esta manera, el material, además de bonito y divertido, resultará eficaz (Gómez Alfonso, 1989).

Es decir, la manipulación de materiales concretos no provoca un paso involuntario al concepto matemático que quiera adquirirse (Cascallana, 1988). Las ideas abstractas no llegan al niño de manera automática; es el docente quien debe desarrollar actividades eficientes con las que conseguir un proceso comprensivo que facilite el paso de un lenguaje matemático a otro.

Por último, consideramos que el empleo de materiales auxiliares permite transformar la metodología pasiva y memorística propia de los libros de texto para promover en el aula un aprendizaje significativo y comprensivo, en donde la participación del niño es fundamental.

## **2. MARCO TEÓRICO: LA IMPORTANCIA DE SABER CUANTIFICAR**

### **2.1 Necesidad del conteo**

Desde la Prehistoria, y en concreto desde que el hombre se hizo sedentario, fue necesaria la creación de un sistema numérico primitivo para poder hacer frente a sus necesidades. En realidad, hasta la aparición de ese primer sistema numérico, les era

imposible saber cuánta extensión de terreno les era propio, cuántas cabezas de ganado poseían o la cantidad de armas y herramientas de que disponían. Por otro lado, las técnicas del conteo les permitieron establecer una mejor relación con los poblados próximos, con los que entonces podrían intercambiar y negociar de una forma más rigurosa y metódica. Por ello, la creación de símbolos (muescas) con los que efectuar el conteo, resolvió la mayor parte de sus problemas de esta índole. Así, observamos que la necesidad de contar surgió hace millones de años y se sigue manteniendo hasta nuestros días.

Actualmente tenemos que ser capaces de contar para poder desenvolvemos en nuestra vida diaria, ya que esta acción tiene lugar no solamente en la escuela sino también en otros contextos y situaciones (en el mercado, en la estación de autobuses, en las tiendas de ropa y calzado...). Por este motivo, las técnicas de conteo son elementos clave en la adaptación de la persona al entorno, ya que le permitirá estar más preparada a la hora de enfrentarse a situaciones en las que su uso es imprescindible. Y por ello, la escuela ha de ser consciente de los beneficios del conteo y de las posibilidades que ofrece al ser humano tanto en el ámbito laboral como en el ámbito social.

## **2.2 Principios del conteo**

Tras esto, estableceremos los diferentes principios del conteo para reflejar cuáles son los mecanismos que empleamos a la hora de contar la cantidad de elementos de un conjunto dado. Asimismo son herramientas clave dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que a partir de ellos podemos identificar en qué nivel matemático se encuentra el alumno. Desde el punto de vista de Gelman y Gallistel (1978) son cinco los principios que se deben adquirir e interiorizar para posteriormente efectuar el conteo:

1. Principio de correspondencia uno a uno: el niño debe saber que a cada objeto le corresponde un número distinto, que todos los objetos del conjunto deben ser contados y que cada uno de ellos debe ser contado una sola vez.
2. Principio de orden estable: el niño tiene que aprender a numerar los objetos en base a una secuencia numérica estable e invariable.

3. Principio de cardinalidad: el niño debe aprender que el último número del conteo es el que representa la totalidad de objetos que han sido contados.
4. Principio de abstracción: este principio hace referencia a la universalidad de los principios anteriores, ya que afirma que pueden ser aplicados independientemente de las características del conjunto que va a ser contado (colores, tipo de objetos, tamaño...).
5. Principio de irrelevancia del orden: el niño ha de ser consciente de que el lugar por el que se empieza a contar no influye ni modifica el resultado final.

Es decir, para realizar correctamente el recuento de un conjunto de objetos, el niño tendría que conocer la secuencia numérica (1,2,3,4,5...) y recitarla en el orden correspondiente. Tras esto, debería asociar cada palabra numérica (uno, dos, tres, cuatro...) con un solo objeto, sabiendo qué objetos han sido contados y cuáles no. Y una vez haya asignado a cada objeto una palabra numérica, tendría que ser consciente de que la última palabra dicha representa a la totalidad del conjunto.

### **2.3 Técnicas del recuento**

Nuestro trabajo se centra en analizar las diferentes técnicas de recuento que se aprenden en Educación Primaria, entendiendo estas en un sentido amplio, que incluye cualquier herramienta matemática que facilite el cálculo del cardinal de un conjunto.

De esta forma, consideraremos técnicas de recuento:

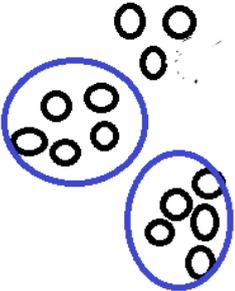
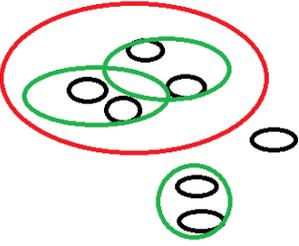
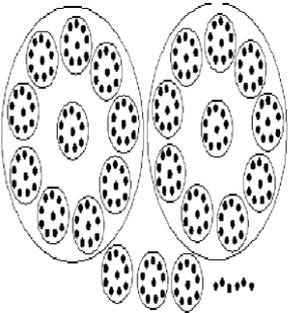
*1.- Las agrupaciones de elementos con el fin de formar una unidad superior que son propias de los sistemas de numeración.*

Cualquier sistema de numeración emplea un conjunto limitado de símbolos y reglas con las que poder agrupar los elementos de un orden determinado para formar una unidad de orden superior, representando así la infinidad de números existentes.

Podemos diferenciar los sistemas de numeración en función de la base empleada y en función del mecanismo empleado para la representación de los números (aditivo, multiplicativo, posicional...). El trabajo realizado se centra en el recuento, por este motivo, conviene ejemplificar el funcionamiento de varios sistemas de numeración con

bases distintas, para así hacer visible la manera en la que se agrupan X elementos para formar una unidad de orden superior.

**Tabla 2.** Tipos de sistemas de numeración

Sistema de numeración quinario	Sistema de numeración binario	Sistema de numeración decimal
<p>Agrupar las cantidades de cinco en cinco. Así, cada cinco unidades de un orden se forma una unidad de orden superior. Este sistema de agrupamiento se originó debido al número de dedos de manos y pies.</p>	<p>Cada dos unidades se forma una unidad de orden superior, es decir, se agrupan los elementos en pares. Es el sistema que emplean los ordenadores.</p>	<p>Existen sistemas de numeración decimales no posicionales (sistema chino o sistema egipcio) y posicionales como es el nuestro. Todos ellos agrupan los elementos de diez en diez.</p>
 <p>Figura 1: Sistema de numeración en base 5</p>	 <p>Figura 2: Sistema de numeración en base 2</p>	 <p>Figura 3: Sistema de numeración en base 10</p>

*2.- La operación suma o adición, que facilita el recuento de elementos que aparecen en varios conjuntos disjuntos, una vez que se ha calculado el cardinal de cada uno de ellos.*

La suma es una operación esencial si queremos realizar el recuento de varios conjuntos, ya que una vez obtenido el cardinal de cada uno de ellos basta con efectuar dicha operación para hallar el total de elementos.

Es decir, supongamos que queremos saber cuántos libros hay metidos en tres cajas separadas. Si sabemos que en la primera caja hay 14 libros y que en la segunda hay 4, bastará con contar los libros que hay dentro de la tercera caja y después sumar el cardinal obtenido de cada caja, evitando contar uno por uno todos los libros.

Asimismo, Ralph Grimaldi afirma que *“si una primera tarea puede realizarse de  $m$  formas, mientras que una segunda tarea puede realizarse de  $n$  formas, y no es posible realizar ambas tareas de forma simultánea, entonces, para llevar a cabo cualquiera de ellas pueden utilizarse cualquiera de  $m+n$  formas”* (Grimaldi, 1998, 4).

La frase enunciada corresponde al principio de la suma, el cual es uno de los principios fundamentales del conteo. Así, si sabemos que una biblioteca científica nos da la posibilidad de leer 44 libros diferentes y que otra biblioteca cuenta con 29 libros distintos, la persona que visite ambas bibliotecas podrá escoger entre  $44+29$  posibilidades.

De nuevo, es evidente la importancia de la suma para así evitar contar uno por uno los libros de ambas bibliotecas, ya que si se conoce el cardinal de libros de cada una de ellas, basta con efectuar una suma para hallar el total de posibilidades que tenemos a la hora de elegir un libro.

*3.- La operación producto o multiplicación, que se utiliza para contar todas las pares ordenados en los que el primer elemento pertenece a un conjunto y el segundo a otro.*

Es importante valorar la importancia de la multiplicación en la obtención del total de pares formados al combinar dos conjuntos cualesquiera. Para ello, es necesario obviar la idea de que la multiplicación es una suma reiterada de un mismo cardinal y

comenzar a entender la multiplicación como el cardinal del producto cartesiano de dos conjuntos, el cual se puede definir como: *“el conjunto formado por todas las parejas ordenadas, cuyo primer elemento de la pareja ordenada pertenece a un primer conjunto y cuyo segundo elemento pertenece a un segundo conjunto. Si A y B son dos conjuntos su producto cartesiano se denota  $A \times B$ ”* (Becerra Espinosa, 2004, 15).

Imaginemos que el conjunto A fuera {1, 2, 3, 4} y que el conjunto B fuera {rojo, verde, azul}. Si queremos contar todas las formas posibles de combinar los elementos de ambos conjuntos, tenemos que hallar el producto cartesiano  $A \times B$ . En el caso formulado el conjunto A está formado por cuatro elementos y el conjunto B por tres, siendo el cardinal de su producto cartesiano  $4 \times 3=12$ . Esto nos permite conocer el total de pares formados, que en el caso planteado se podrían representar por: {1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4}.

*4.- La combinatoria, que engloba las técnicas de recuento avanzadas que se utilizan para calcular las diferentes formas de agrupar elementos de conjuntos.*

Las técnicas de recuento avanzadas suponen un cierto grado de complejidad, ya que permiten conocer y calcular las diferentes formas de combinar los elementos de conjuntos. Conforman lo que se conoce con el nombre de combinatoria.

La combinatoria no posee un método sistemático, pero si comprendemos y empleamos adecuadamente las operaciones de adición y multiplicación, estaremos disponiendo de las primeras estrategias para hallar el número total de agrupamientos posibles (Alberto, M; Schwer, I; Cámara, V y Fumero, Y, 2005).

Además aquí es fundamental saber organizar los elementos que van a ser contados, y para ello, es necesario emplear algún procedimiento que permita ordenar dichos elementos (diagrama de árbol, tabla, dibujos representativos...).

Volviendo al ejemplo enunciado en el sub-apartado anterior, para organizar correctamente todos los elementos es necesario llevar un orden y saber emparejar los elementos del conjunto A con los del conjunto B, evitando repeticiones erróneas o

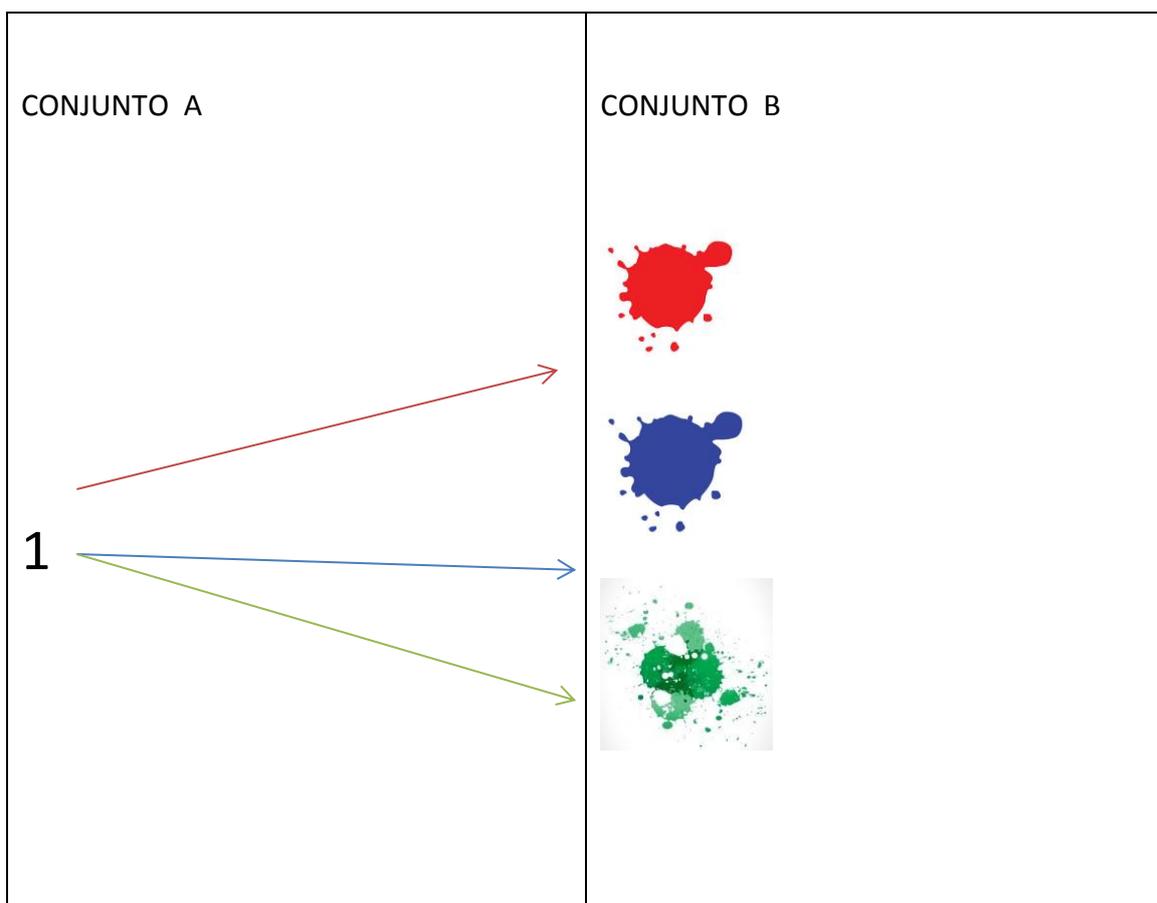
relaciones mal establecidas. Esta sería una forma de lograr hallar las múltiples combinaciones posibles:

**Tabla 3.** Procedimiento de organización de elementos de dos conjuntos

	Rojo	Verde	Azul
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4

Sea cual sea el procedimiento empleado, es fundamental que a través de éste formemos correctamente las relaciones existentes entre conjuntos:

**Tabla 4.** Formación de parejas



## **2.4 Los sistemas de numeración en Primaria**

En los diferentes cursos de Primaria no se trabaja únicamente el sistema de numeración decimal. Aprenden además el sistema de numeración romano y el sistema sexagesimal para medir el tiempo y la amplitud de los ángulos.

### *2.5.1 Los sistemas posicionales: decimal y sexagesimal*

En el primer ciclo de Primaria ya se comienza a trabajar el sistema de numeración decimal, concretamente los conceptos de unidad, decena y centena. De manera repetitiva y mecánica, van observando cómo diez unidades tienen el mismo valor que una decena, al igual que diez decenas hacen una centena. Por lo tanto, ya desde los primeros cursos descubren que el sistema numérico que emplean es decimal, y que cada diez unidades de un orden se forma una unidad del orden inmediatamente superior.

También el sistema sexagesimal utilizado en las horas y ángulos, comienza a trabajarse en el primer ciclo de Primaria, aunque no de manera exhaustiva. En realidad, es en segundo ciclo cuando empiezan a realizar equivalencias entre horas, minutos y segundos, así como a comparar ángulos en función de su amplitud. Estos conceptos se continúan trabajando durante el último ciclo de Primaria.

### *2.5.2 Sistema no posicional: el sistema de numeración romano*

Por último, el sistema de numeración romano se trabaja principalmente en tercer ciclo de Primaria, momento en el que tienen más interiorizado el concepto de número y sistema de numeración. En esta ocasión deben aprender cómo se agrupan los diferentes elementos en este sistema de numeración, aspecto que les resultará muy complicado si a lo largo de los cursos no han comprendido cómo es el funcionamiento de cualquier sistema de numeración.

## 3. LA ENSEÑANZA DEL CONTEO EN PRIMARIA

### 3.1 Aspectos a tener en cuenta

#### 3.1.1 Las dos grandes teorías del aprendizaje

En primer lugar, el *conductismo* es una teoría que “entiende que el aprendizaje es el cambio de conducta que experimentan las personas a lo largo de su vida como resultado de la adquisición de conocimientos” (Gutiérrez Rodríguez, 1991, 77). El conductismo considera que el cambio de conducta solamente puede producirse bajo la dirección de un instructor y siempre y cuando ese nuevo conocimiento quede almacenado en la memoria mediante la repetición de una misma acción. Así, esta teoría tuvo mucha influencia en la enseñanza de las matemáticas y, durante mucho tiempo, la única manera de trabajar en las aulas era a través de la repetición y la memorización de conceptos matemáticos. En la actualidad se siguen empleando algunas técnicas conductistas para trabajar ciertos aspectos matemáticos (entre ellos el conteo), ya que resulta más seguro para el profesor; basta con hacer uso del libro de texto y “recitar” lo que en él aparece.

El *cognitivismo* surge en contraposición al conductismo, asegurando que para que realmente se adquiera un aprendizaje, éste debe ser comprendido. Así, esta teoría modifica la manera de entender la enseñanza de las matemáticas, ya que su instrucción ha de estar basada en la comprensión y no en la memorización. Tal como afirma Gutiérrez Rodríguez (1991), la comprensión no puede enseñarse ni surge por sí misma, por ello, el docente ha de plantear y llevar a cabo actividades en las que la acción sea imprescindible, incluyendo objetos reales y materiales con los que el niño experimentará aquello que de manera teórica podría no entender.

Así, en función de las ideas y teorías del profesor, la metodología será muy distinta, favoreciendo un tipo de aprendizajes u otros. Imaginemos que el docente quiere trabajar con su alumnado el tema de los volúmenes de sólidos. En el primer caso, el docente leerá la información que esté en el libro de texto, les escribirá las fórmulas en la pizarra y puede que dibuje algún cuerpo geométrico (esfera, cono, cilindro...).

Después les pedirá que realicen una serie de actividades y posteriormente las corregirán. En el segundo caso, el docente traerá diferentes objetos reales (un balón, un cucurucho, una caja...) y pedirá a su alumnado que identifique las características de cada objeto para después poder definirlos, así como para poder concluir cuáles podrían ser sus respectivas fórmulas a la hora de hallar su volumen.

Por último, la siguiente tabla resulta útil para relacionar ambas teorías con el conteo:

**Tabla 5.** Las dos grandes teorías y el conteo

	<b>¿Cómo se enseñaría todo lo referente al conteo?</b>
<b>CONDUCTISMO</b>	<p>A través de los ejercicios propuestos en el libro de texto.</p> <p>La adquisición del conteo tiene lugar en el momento en que se memorizan sus técnicas y sus principios.</p> <p>Aunque diferentes aspectos estén relacionados con el conteo, estos serán trabajados de manera independiente.</p> <p>Ejemplo: El concepto de unidad y decena se adquiere a través de ejercicios mecánicos en los que el niño debe agrupar unidades de diez en diez sin entender por qué ni para qué.</p>
<b>COGNITIVISMO</b>	<p>A través de ejemplos, materiales y objetos reales que permitieran hacer visible algún aspecto del conteo.</p> <p>La adquisición del conteo tiene lugar en el momento en que se comprenden sus principios y técnicas.</p> <p>Esta teoría busca la relación de conocimientos y experiencias, por lo que el conteo se trabajará en base a algún aspecto que forme parte del niño, tratando de vincular los apartados matemáticos en los que el conteo esté presente.</p> <p>Ejemplo: El concepto de unidad y decena se adquiere a través</p>

	de materiales físicos como los bloques multibase, observando cómo diez cubos tienen el mismo valor que una barra.
--	---

### 3.1.2 Desarrollo intelectual del niño

Según Jean Piaget y Barbel Inhelder (1997) el niño va adquiriendo conceptos en función del estadio intelectual en el que se encuentra, es decir, el conocimiento del mundo que posee el niño se modifica cuando su estructura cognitiva está preparada para adquirir la nueva información. Esto ha tenido mucha influencia en el currículum actual, ya que los contenidos han sido organizados en función de las etapas formuladas por Piaget. De la misma manera, los contenidos matemáticos se establecen en el currículum en función de lo que el niño puede o no puede asimilar.

Analizamos ahora las cuatro fases enunciadas por Piaget para así observar los avances que se producen en cada una de ellas en relación al conteo, sabiendo que solamente las tres últimas están vinculadas con algún curso de Educación Primaria:

- Periodo sensorio-motor (0-2 años): En este periodo el niño comienza a adquirir los primeros conocimientos matemáticos relacionados con la cantidad, aunque todavía su estructura cognoscitiva le impide iniciarse en el conteo.
- Periodo pre-operacional (2-7 años): Esta fase es la más importante, ya que en ella se desarrollan los diferentes principios del conteo, en primer lugar el principio de correspondencia uno a uno. Además, a los cuatro o cinco años interiorizan la secuencia numérica tan necesaria para realizar los primeros recuentos. Al final de este periodo, el niño es capaz de contar y emplear con soltura todos los principios del conteo. En esta fase la manipulación de objetos y materiales es fundamental, ya que es un momento en el que el niño necesita observar y actuar, pudiendo realizar actividades en las que el conteo se realice de manera real en el aula (ábacos, objetos, regletas...).
- Periodo de operaciones concretas (7-11 años): En esta ocasión el niño tiene la suficiente capacidad para adquirir la noción de sistema de numeración. Además, es capaz de agrupar objetos en función de sus propiedades y de realizar equivalencias sencillas (horas, minutos y segundos) así como

correspondencias relacionadas con unidades de masa, longitud... En esta ocasión, el empleo de materiales físicos no es imprescindible pero sí recomendable, ya que estos siempre van a favorecer una mayor comprensión de conceptos relacionados con el recuento. También resultaría útil la realización de actividades grupales de recuento, ya que esta fase tiene un fuerte carácter socializador, en donde la cooperación resulta beneficiosa para el niño.

- Periodo de operaciones formales (A partir de 11 años): A partir de los once años el niño es capaz de clasificar, combinar y agrupar de manera lógica, hasta que a los catorce años está preparado para introducirse en la combinatoria avanzada. En este último estadio el niño ya está preparado para realizar deducciones y abstracciones, por lo que no necesita materiales físicos para llegar a una buena comprensión de conceptos matemáticos.

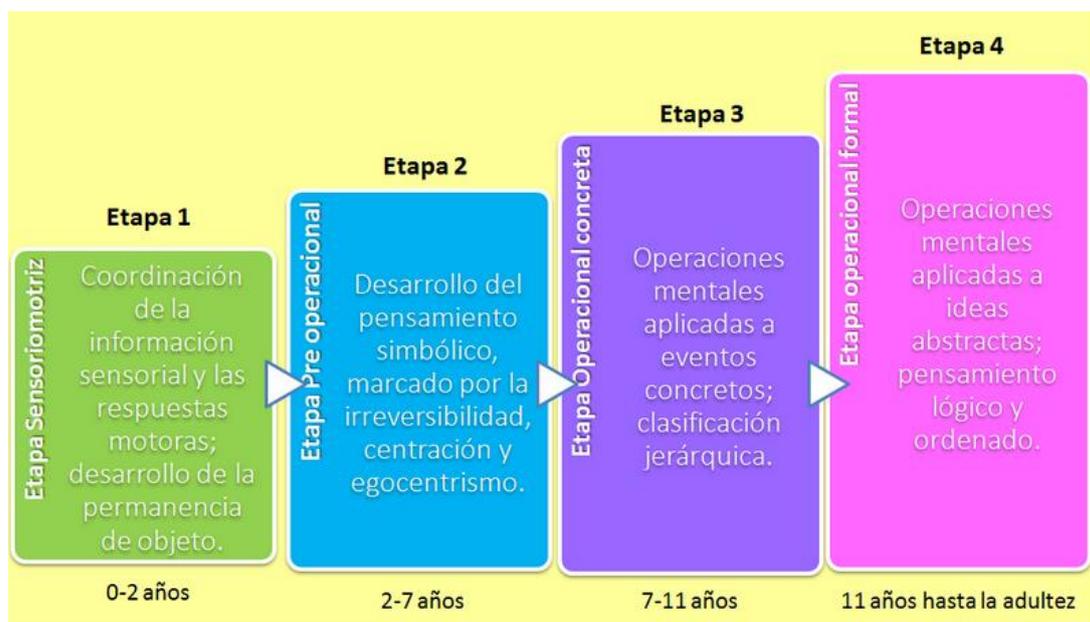


Figura 4: Las etapas del desarrollo intelectual (Piaget)

El análisis de las diferentes fases del desarrollo intelectual del niño es importante para saber cuándo conviene introducir determinados conceptos relacionados con el conteo. Además, es fundamental para la correcta realización de actividades, ya que proporciona un conocimiento de las características de los niños de cada estadio, lo que permite la creación de materiales significativos.

Análisis y diseño de materiales físicos para la comprensión del conteo

### 3.1.3 El modelo de Van Hiele: fases de aprendizaje

Por último, la enseñanza de las matemáticas podría estar influenciada por el modelo de Van Hiele (1986), quien considera que el paso de un nivel de madurez matemático a otro no se produce de manera automática, sino que es necesario proporcionar al alumno una enseñanza basada en cinco fases secuenciadas con el fin de que comprenda de manera progresiva el concepto matemático que se esté trabajando.

Aunque su teoría fue realizada en referencia a aspectos relacionados con la geometría, puede resultar útil para trabajar el conteo y los agrupamientos. Así, estas fases sirven como orientación a la hora de organizar las actividades para alcanzar el siguiente nivel matemático. Es decir, mientras que los niveles de desarrollo intelectual sirven para saber en qué periodo trabajar unos aspectos u otros (organizar el currículum), lo planteado por Van Hiele resulta esencial a la hora de secuenciar las actividades en torno a un mismo contenido matemático.

- Fase primera: Información. Su objetivo consiste en la recogida de información por parte del profesor, para conocer y valorar los conocimientos previos y experiencias de sus alumnos). Así, sabrá cuál es su situación de partida y qué dirección será la más adecuada para conseguir la adquisición y comprensión del concepto a trabajar.
- Fase segunda: Orientación dirigida. Esta fase es fundamental, ya que en ella se construyen las relaciones necesarias para alcanzar el siguiente nivel matemático. En ella el docente emplea los materiales y recursos que considere, guiando a sus alumnos para que sean ellos quienes extraigan alguna conclusión.
- Fase tercera: Explicitación. Su finalidad es que el alumno sea consciente de las características o propiedades observadas en la fase anterior. Para lograr esto es necesario que se prepare alguna actividad en la que tenga que dialogar y expresar verbalmente las ideas que ha interiorizado a través de la observación y la manipulación con los materiales.
- Fase cuarta: Orientación libre. En esta ocasión se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Ahora tendrán

que ser capaces de resolver actividades más complejas en las que tendrán que emplear nuevas estructuras basadas en los conocimientos que adquirieron previamente.

- Fase quinta: Integración. En esta última fase se debe recoger y sintetizar todo lo realizado, para que así el alumno tenga una visión general de las relaciones construidas y de los conocimientos adquiridos. Además el alumno debe ser capaz de integrar los conocimientos adquiridos en su esquema cognitivo previo.

### **3.2 Situación actual del conteo en las aulas**

En la actualidad el conteo suele adquirirse por repetición de una misma acción, de tal manera que los alumnos mecanizan los principios y técnicas del conteo. Con todo esto, los niños son capaces de realizar las actividades del libro de texto, pero se muestran inseguros cuando se les presenta alguna actividad distinta en la que tengan que reflexionar para poder realizar un recuento. Aunque es muy probable que tengan los conceptos necesarios para realizar dicha actividad, no podrán hacerlo ya que saben contar pero no saben organizarse para el recuento porque tampoco se les ha enseñado a ello.

Asimismo, algunas veces, las actividades que el profesor prepara para el alumnado no están contextualizadas y con ellas no se pretende que el alumnado entienda y sea consciente de que el recuento es algo esencial en la vida diaria. Únicamente importa que realicen correctamente las actividades y que los resultados que obtengan sean los mismos que aparecen en el libro de texto del profesorado.

Generalmente no se relacionan unos contenidos con otros ya sabidos, es decir, aunque las horas y los ángulos formen parte del sistema sexagesimal, en la clase se enseñan como si fueran dos contenidos sin ningún tipo de conexión. ¿Qué supone esto? En vez de añadir información sobre una base ya sólida, la mayoría de docentes prefieren transmitir nuevo conocimiento, formando así parcelas independientes en la mente del niño, parcelas que deberían estar vinculadas.

También es reseñable que, en muchos casos, no se introduzcan materiales físicos para que los niños comprendan el funcionamiento del sistema de numeración decimal (ábacos, bloques multibase...) o sencillamente para contar las aristas o vértices de un poliedro. Actualmente existen multitud de materiales con los que trabajar el recuento, en cambio el docente continúa trabajando de manera exclusiva con el libro de texto.

En conclusión, la mayoría de actividades planteadas por los docentes en relación al conteo se corresponden con una teoría conductista, en donde el elemento fundamental es el libro de texto y el fin máximo es que el niño obtenga los resultados previstos. Los materiales físicos no tienen cabida en la escuela actual, y si se emplean no se utilizan porque sean un elemento primordial, sino que se usan como último recurso cuando la clase se encuentra perdida y desorientada ante un nuevo concepto.

#### **4. EL CONTEO EN LOS LIBROS DE TEXTO DE PRIMARIA**

Para analizar las actividades en las que aparece el conteo he empleado libros de dos editoriales diferentes: SM (2004), (2003) y Santillana (2004), (2002).

En todos los libros analizados, desde 1º hasta 6º de Primaria, aparecen actividades en las que el conteo está relacionado con algún contenido de los cuatro bloques matemáticos, ya que encontramos ejercicios en los que tienen que:

- Contar los objetos de un dibujo (Bloque 1)
- Unir el símbolo numérico con el número de objetos representados (Bloque 1)
- Rodear diez unidades para trabajar la decena, así como rodear diez decenas para trabajar el concepto de centena (Bloque 1)
- Realizar equivalencias temporales: horas, minutos y segundos (Bloque 2)
- Contar todos los lados, ángulos o vértices de diferentes figuras geométricas (Bloque 3)
- Localizar cuántas figuras tridimensionales hay de cada tipo (Bloque 3)
- Contar diferentes elementos u objetos para hallar sus frecuencias absolutas, registrando dichos datos en tablas de información (Bloque 4)
- Contar y ordenar datos en una tabla de información para después realizar un gráfico representativo (Bloque 4)

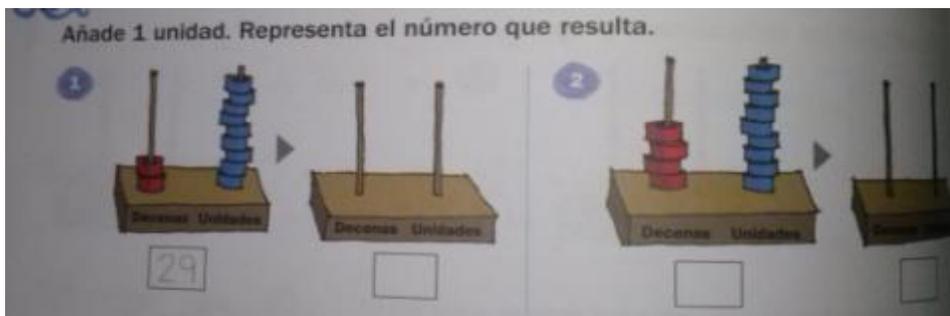
**Tabla 6.** Actividades de conteo en los libros de texto**Bloque 1. Números y operaciones**

Figura 5: Actividad 2º de Primaria (Santillana, 2004)

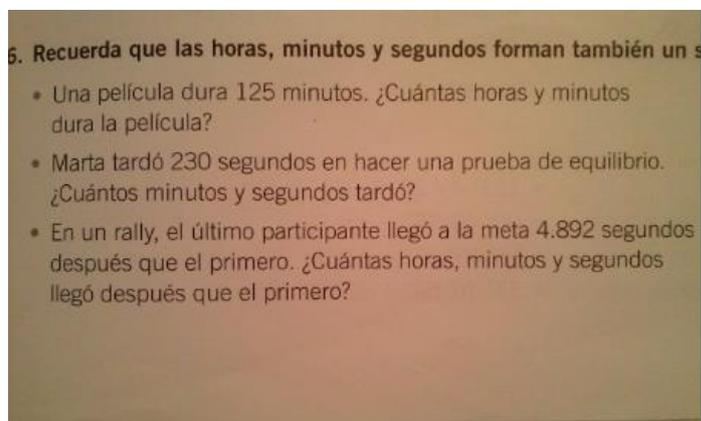
**Bloque 2. Medida**

Figura 6: Actividad 6º de Primaria (Santillana, 2002)

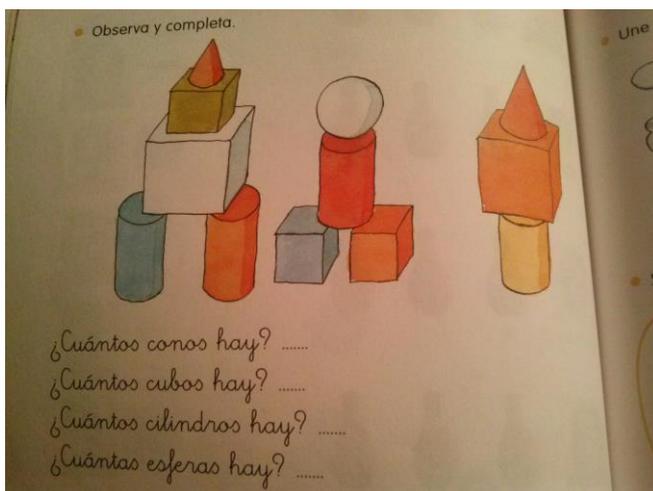
**Bloque 3. Geometría**

Figura 7: Actividad 1º Primaria (SM, 2004)

#### Bloque 4. Tratamiento de la información

Calcula la frecuencia con la que aparecen las diferentes vocales en esta frase:

Las máquinas nos ayudan a mejorar nuestra calidad de vida

Vocales	Número de registros	Frecuencia
a	un un i	11
e		
i		
o		
u		

¿Qué vocal es la que menos se repite? ¿Qué vocal representa la moda?

Figura 8: Actividad 4ª de Primaria (SM, 2003)

A pesar de esto, conforme se va aumentando el ciclo y curso de Primaria, las actividades que relacionan el conteo con los Bloques 2, 3 y 4 son cada vez menos numerosas. En todos los casos la mayoría de actividades de conteo se encuentran dentro del Bloque 1: Números y Operaciones para que adquieran conceptos relacionados con el sistema de numeración decimal principalmente.

Las actividades de contar son en su mayoría mecánicas y repetitivas, ya que el niño siempre cuenta con un ejemplo y una explicación recuadrada. Por este motivo, puede parecer que el niño sabe contar adecuadamente cuando en realidad está imitando el modelo establecido. Y, ¿qué ocurrirá cuando el niño ha de organizarse de manera autónoma para contar? ¿Qué sensaciones tendrá el niño cuando no disponga de un modelo que le muestre cómo realizar la actividad?

Por último, nos hemos fijado en las actividades de conteo y hemos observado que mientras que el concepto de sistema de numeración y la suma como operación básica para el recuento sí se trabajan y de manera bastante completa, resulta muy significativo que en la mayoría de ocasiones en las que se trabaja la multiplicación, ésta se define como suma de números iguales. Esto puede provocar cierta confusión en el alumnado en el momento en el que se trabaje la combinatoria. En cambio, si desde el principio se enseña la multiplicación como una forma de contar las posibles combinaciones de los elementos de dos conjuntos, habremos preparado el camino al aprendizaje de la combinatoria.

Esta deficiencia va a tratar de resolverse en las secuencias didácticas propuestas, a fin de que ciclo a ciclo se vaya profundizando en la idea de que multiplicar significa combinar, tratando de solventar los problemas que la mayoría de niños tienen en el último ciclo de Primaria y en los posteriores de Secundaria en relación a la combinatoria.

## 5. MATERIALES FÍSICOS EXISTENTES PARA TRABAJAR EL CONTEO

En este apartado se presentan los materiales físicos que actualmente se pueden emplear dentro del aula para trabajar algún aspecto concreto del recuento. En base a lo expuesto por Cascallana (1988) se ha realizado una síntesis de aquellos materiales más útiles y eficaces para el tema que nos compete:

**Tabla 7.** Materiales físicos para el recuento

<p><b>LOS BLOQUES LÓGICOS</b></p>	<p>Definición: Conjunto de 48 piezas de plástico o madera. Cada pieza queda definida por cuatro variables: color, tamaño, forma y grosor.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Colores disponibles: rojo, azul y amarillo.</li> <li>▪ Tamaños disponibles: grande y pequeño.</li> <li>▪ Formas disponibles: triángulo, cuadrado, círculo y rectángulo.</li> <li>▪ Grosos disponibles: grueso o estrecho.</li> </ul> <p>Utilidad para el recuento:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Practicar la secuencia numérica y aplicar los principios del conteo de manera sencilla: contar cuántos cuadrados hay, cuántas figuras rojas, cuántos círculos amarillos...</li> <li>▪ Se puede relacionar el conteo con la geometría, ya que los niños pueden contar los lados de las figuras geométricas, los vértices o pueden plantearse</li> </ul>
---------------------------------------	---

actividades en las que tengan que encontrar el número total de ángulos rectos o agudos, por ejemplo.

- Descubrir y contar las posibles parejas formadas al relacionar dos o más variables, lo que a su vez conlleva que se trabaje la multiplicación. Por ejemplo, les podemos sugerir que relacionen dos conjuntos: las figuras geométricas de tamaño grande con los colores, y que se organicen para efectuar el recuento de parejas formadas.

Tipos:

Se encuentran variedades en función de:

- El material de las piezas (madera, plástico o cartón)
- Las variables: a veces se sustituye la variable grosor por la variable textura.
- Los valores de las variables: pueden introducirse o reducir los valores de alguna variable. Por ejemplo, en algunas ocasiones se añade un color (verde) o se introduce un nuevo tamaño (mediano).
- El tamaño de las piezas: en ocasiones podemos encontrar piezas más grandes de lo habitual para facilitar el manejo de los niños más pequeños.



Figura 9: Los bloques lógicos

**EL ÁBACO**

Definición: Está formado por un soporte de madera y una serie de varillas colocadas de manera horizontal o vertical. En cada una de éstas se colocan anillas de diferentes colores. Cada varilla representa un orden de unidades, en donde la varilla situada más a la izquierda representa las unidades de primer orden.

Utilidad para el recuento:

- Resultan útiles a la hora de hallar el cardinal de un conjunto, ya que cada varilla representa una unidad concreta, pudiendo plantear actividades en las que tengan que contar las anillas de cada varilla para hallar el cardinal representado en el ábaco o en las que tengan que contar un conjunto dado para después representar su cardinal a través de dicho material.
- Puede emplearse no solamente como herramienta para trabajar el sistema de numeración decimal, sino también otros sistemas, lo que favorecerá la comprensión del concepto de sistema numérico. De esta manera, aprenderán a agrupar determinadas unidades de un orden en una unidad inmediatamente superior.
- Aunque no se emplea para trabajar la combinatoria, sí es posible conseguir este propósito ya que el ábaco puede servir como herramienta a la hora de probar posibles combinaciones basadas en condiciones numéricas. Por ejemplo, les podemos pedir que cuenten las distintas posibilidades que hay de tener dos varillas con tres anillas, una varilla con dos anillas

	<p>y una última sin varillas.</p> <p>Tipos: Existen diferentes ábacos en función del material empleado y en función de la disposición de las varillas (vertical u horizontal). También podemos encontrar ábacos abiertos o cerrados. Además se pueden fabricar ábacos provisionales en función de nuestros objetivos didácticos.</p>  <p>Figura 10: El ábaco</p>
<p><b>LOS BLOQUES MULTIBASE</b></p>	<p>Definición: El material incluye piezas de madera que representan las unidades de primer, segundo, tercer y cuarto orden, adoptando cada unidad una forma distinta que los diferencie y represente:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Cubos: unidades de primer orden</li> <li>▪ Barras: unidades de segundo orden</li> <li>▪ Placas: unidades de tercer orden</li> <li>▪ Bloques: unidades de cuarto orden</li> </ul> <p>Utilidad para el recuento:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Resultan útiles a la hora de hallar el cardinal de un conjunto, ya que cada forma representa una unidad de un orden concreto, pudiendo plantear actividades</li> </ul>

	<p>en las que tengan que contar el número de cubos, barras, placas o bloques para hallar el cardinal representado o en las que tengan que contar un conjunto dado para después representarlo con los bloques multibase.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪ Puede emplearse para que el niño adquiriera la noción de sistema de numeración decimal, aprendiendo a agrupar de diez en diez y formando con ello unidades de orden superior.</li><li>▪ Este material puede utilizarse con el fin de realizar agrupamientos en distintas bases, lo que favorece la comprensión del concepto de sistema numérico. En concreto, este material puede resultar útil cuando los niños han interiorizado el sistema de numeración decimal, ya que puede emplearse como recurso para realizar agrupaciones en el sistema sexagesimal (horas y ángulos).</li><li>▪ Además permiten trabajar la adición como operación facilitadora del recuento, ya que una vez hayan identificado el cardinal que representan los bloques multibase, se pueden añadir algunas piezas para que identifiquen el cardinal representado por el nuevo conjunto de bloques formado, empleando para esto la operación de suma o adición.</li></ul> <p>Tipos: Normalmente todos los bloques multibase son muy similares, pudiendo diferenciarse en el tamaño de las piezas y en el material en el que está construido. Además se pueden encontrar bloques multibase con los que trabajar el concepto de sistema de numeración en diferentes bases.</p>
--	---

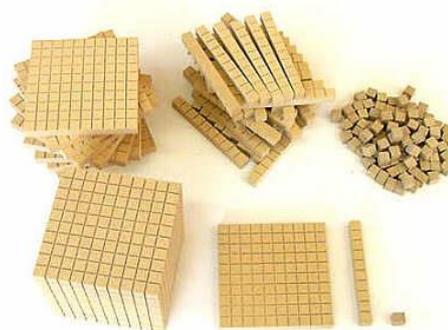


Figura 11: Los bloques multibase (base 10)

### LAS REGLETAS CUISINAIRE

Definición: Consta de un conjunto de regletas de madera de diez tamaños y colores diferentes:

- Regleta blanca de 1 cm
- Regleta roja de 2 cm
- Regleta verde de 3 cm
- Regleta rosa de 4 cm
- Regleta amarilla de 5 cm
- Regleta verde oscura 6 cm
- Regleta negra 7 cm
- Regleta marrón 8 cm
- Regleta azul 9 cm
- Regleta naranja 10 cm

Utilidad para el recuento:

- En primer lugar resulta útil para los niños ya que con este material asocian un color/tamaño con un número determinado, al igual que cuando cuentan, deben asociar adecuadamente cada conjunto con el número que corresponda a su cardinal. Se pueden plantear actividades en las que tengan que contar unos objetos, para después elegir qué regleta representa dicha cantidad, pidiendo a su vez que representen ese

	<p>conjunto con su símbolo numérico correspondiente.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Además permiten trabajar la adición como operación facilitadora del recuento, ya que una vez hayan identificado el cardinal que representan unas regletas, se pueden añadir algunas regletas más para que identifiquen el cardinal formado, empleando para esto la operación de suma o adición.</li><li>• Este material permite introducir las combinaciones desde primer ciclo de Primaria, ya que a través de las regletas podemos plantear actividades en las que tengan que hallar de cuántas formas posibles pueden formar el número 10 con dos números o formar el número 5 empleando tantos números como se quiera, por ejemplo. Así, con los materiales irán observando y manipulando las diferentes regletas hasta conseguir el propósito formulado:<ul style="list-style-type: none"><li>○ Regletas que sumen 10 empleando dos números {1+9, 2+8, 3+7, 4+6, 5+5}</li><li>○ Regletas que sumen 5 empleando tantos números como se quiera {4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 1+2+1+1, 1+1+1+1+1}</li></ul></li></ul> <p>Tipos: No hay muchas variaciones dentro de este material, aun así es posible encontrar regletas en las que se ha modificado el material o el tamaño, pudiendo encontrar regletas de mayor tamaño que las originales para favorecer la manipulación de los niños más pequeños. En el caso de no contar con este material, su construcción es muy sencilla: se puede construir cada una de las regletas con cartulinas de colores.</p>
--	---



Figura 12: Las regletas cuisinaire

### JUEGOS DE NÚMEROS

Definición: Los juegos de números sirven para favorecer la adquisición del concepto de número y para favorecer la identificación del cardinal de un conjunto. Existen juegos de números muy distintos, y por este motivo, no es posible presentar las características generales de este material. Aun así, únicamente voy a tener en cuenta tres variedades de este material: Tablillas de números, Puzzles y Dominós.

Utilidad para el recuento:

- Al igual que las regletas cuisinaire, los juegos de números sirven para que el niño se inicie en el recuento y domine el principio de correspondencia uno a uno.
- Además permiten trabajar la adición como operación facilitadora del recuento. En las tablillas de números disponemos de fichas en las que aparecen representados conjuntos de objetos, símbolos numéricos y los signos operacionales (+, -, x, :). Así, una vez hayan identificado el cardinal de una tablilla en la que aparecen objetos dibujados, se pueden

añadir otras tablillas para que identifiquen el cardinal del conjunto formado, empleando para esto la operación de suma o adición. Además, debajo de las tablillas con elementos figurativos pueden colocar la operación a realizar y los números correspondientes, obteniendo así el cardinal de dos conjuntos dados.

#### Tipos:

- Tablillas de números: están hechas de madera con números del 0 al 9 de color rojo o negro. También consta de otras tablillas en las que se incluyen los diferentes signos para realizar las cuatro operaciones básicas e incluso dispone de tablillas con el símbolo =. Suelen incluir tablillas con dibujos de varios elementos, para así poder realizar la actividad de forma figurativa y después de manera simbólica.



Figura 12: Juegos de números (Tablillas de números)

- Puzzles: consta de una tablilla rectangular de madera, plástico o cartón dividida en dos partes, en una aparece la cifra y en la otra el conjunto de objetos que represente dicha cifra. Cada cifra se podrá encajar con su conjunto correspondiente.



Figura 13: Juegos de números (Puzzles)

- Dominós: son rectángulos similares a las fichas de dominó, en la que cada ficha está dividida en dos partes: en una hay un número escrito y en la otra aparecen representados un conjunto de objetos. Así, el juego consiste en asociar correctamente cada número con el conjunto de objetos al que representa hasta colocar todas las fichas en su sitio.



Figura 14: Los juegos de números (Dominós)

## GEOPLANO

Definición: Consiste en un tablero cuadrado de madera, el cual ha sido cuadrículado y en cada vértice se ha introducido un clavo. Todos los clavos sobresalen del tablero y sobre estos se colocan gomas elásticas con las que se forman diferentes formas geométricas.

Utilidad para el recuento: Aunque el geoplano se considera que es un material de uso exclusivo para trabajar elementos geométricos, también pueden introducirse actividades en las que el recuento y la organización para el recuento sea fundamental.

- Se puede emplear de manera sencilla como recurso para afianzar en los niños los principios del recuento. Podemos presentarles un geoplano con diferentes figuras ya realizadas y que las cuenten, distinguiendo o no cada una de las figuras geométricas observadas. De la misma manera, podemos pedir que posteriormente cuenten el número total de lados que suman entre todas las figuras o el número de lados de todos los triángulos, por ejemplo. Esto mismo puede realizarse con los vértices y ángulos, pidiéndoles que cuenten los ángulos agudos, los obtusos o los rectos.
- Además se puede trabajar la adición como operación facilitadora del recuento, ya que podemos emplear dos geoplanos, ambos con diferentes figuras geométricas. Así, si les pedimos que hallen el cardinal total de cuadrados, tendrán que contar los cuadrados del primer geoplano y los del segundo, para después sumarlos y saber cuántos cuadrados hay en total. Esto también lo pueden hacer en parejas, representando cada niño de la pareja diferentes figuras geométricas en su respectivo geoplano. Tras esto, cada uno de los miembros de la pareja le preguntará al otro alguna cuestión relacionada con la cantidad: ¿cuántos triángulos hay? ó ¿cuántos cuadriláteros hay?, para lo cual han de realizar una suma.

- También se pueden trabajar las técnicas avanzadas de recuento, ya que el geoplano consta de gomas elásticas de diferentes colores, pudiendo representar una figura geométrica de varios colores distintos. Así, si representamos tres tipos de triángulos (equilátero, isósceles, escaleno) de cinco colores diferentes, les podemos pedir que organicen todas las combinaciones formadas. Ellos mismos tendrán elaborar una tabla en la que relacionen los colores con los tipos de triángulos representados. Este proceso puede realizarse a la inversa, siendo ellos quienes deben representar las agrupaciones sobre el geoplano.

Tipos: Existen diferentes geoplanos además del cuadrangular, pudiendo encontrar recursos como el geoplano circular y el bigeoplano. De todos ellos podemos encontrar variedades en función del tamaño y del material utilizado.



Figura 14: El geoplano cuadrado

## 6. SECUENCIAS DIDÁCTICAS PARA TRABAJAR EL CONTEO

- En todas las secuencias aparecen contenidos de diferentes bloques matemáticos, pudiendo incluir aspectos de otras asignaturas como Lengua o Conocimiento del medio.
- Todas las secuencias didácticas cuentan con alguna actividad que sirva para conocer los conocimientos previos del alumnado.
- En una de las actividades se emplea algún material físico existente y/o han de construir un material que sirva para trabajar algún aspecto de la combinatoria.
- Una vez han construido el material y lo han utilizado en una actividad de combinatoria, se plantea una actividad de mayor dificultad que les haga reflexionar.
- Todas las secuencias didácticas acaban con una actividad que integre todo lo trabajado durante la secuencia, incluyendo preguntas o cuestiones que sirvan para valorar el grado de comprensión o satisfacción de los alumnos.

### 6.1 Secuencia didáctica 1º Ciclo de Primaria

#### *Actividad 1. Conocimientos previos*

Duración: 30 minutos

Materiales: Anexo 1, Anexo 2

Desarrollo: Suponemos que la secuencia didáctica comienza en las fechas de Semana Santa, para así trabajar el tradicional juego de los huevos de pascua. En primer se contará un pequeño cuento (Anexo 1) que sirva para que sepan en qué consiste el tradicional juego de los huevos de pascua. Tras esto, les preguntaremos de manera oral una serie de cuestiones relacionadas con el tema para ver cuáles son sus conocimientos previos y para introducirles en diferentes aspectos relacionados con los colores y decoraciones del huevo de pascua. Por último, les mostraremos diferentes huevos de pascua (Anexo 2) para que observen la variedad de colores y decoraciones posibles.

*Actividad 2. ¿Por qué pueden diferenciarse los huevos de pascua?*

Duración: 30 minutos

Materiales: Anexo 3, pinturas de colores

Desarrollo: En esta ocasión les daremos una ficha (Anexo 3) en la cual aparezcan seis huevos de pascua dibujados, todos ellos sin colorear y todos ellos con la misma forma y decoración. Les diremos que cada huevo está formado por dos colores y que deben colorearlos todos de manera que ningún huevo se repita. Únicamente dispondrán de los colores verde, rojo y azul. Cuando hayan acabado les preguntaremos si creen que además del color podríamos cambiar algo del huevo para hacerlo distinto, para que así vean que se puede modificar el tamaño o lo que hay dibujado en el huevo, es decir, los aspectos decorativos.

*Actividad 3. ¿Cómo queremos decorar los huevos de pascua?*

Duración: 60 minutos

Materiales: Anexo 4, pizarra, lápices

Desarrollo: En esta actividad decidiremos cómo queremos que sean los huevos de pascua que vamos a crear en la siguiente actividad. Para ello, pediremos que cada niño diga de manera oral su color preferido. En la pizarra iremos apuntando los colores que vayan eligiendo. Una vez todos hayan expresado su color favorito, les pediremos que cuenten y organicen todos esos colores en una tabla que les entregaremos (Anexo 4). Cuando lo hayan hecho, tendrán que buscar los tres colores que más votos hayan obtenido, y les explicaremos que serán estos los colores que tendremos que utilizar para decorar nuestros huevos de pascua. Suponemos que salieron: azul, rojo, verde, rosa.

Tras esto, volveremos a realizar el mismo proceso. Esta vez, tendrán que elegir qué cara o expresión quieren que tenga el huevo de pascua, proporcionándoles cuatro opciones a elegir: alegría, tristeza, enfado y asombro. Irán diciendo su elección de uno en uno y en esta ocasión, iremos dibujando pequeñas caras en la pizarra que reflejen cada expresión elegida. De nuevo, tendrán que completar otra tabla situada en la ficha entregada en la que tendrán que reflejar también el número de votos para cada expresión. Por último, les pediremos que digan las dos emociones que más votadas han sido, las cuales servirán para personificar los huevos de pascua. Suponemos que salieron: alegría y asombro.

*Actividad 4: Construimos nuestros huevos de pascua*

Duración: 60 minutos

Materiales: globos de colores, arena o sal, rotulador negro

Desarrollo: Comenzaremos la sesión recordando los colores y las expresiones que salieron en la sesión anterior. Tras esto, les enseñaremos a construir un huevo de pascua, primero inflando un globo para agrandarlo y luego dejándolo reposar para meter suficiente sal o arena dentro hasta conseguir una forma ovalada. Los dividiremos en grupos de cuatro personas, encargando a cada niño del equipo que escoja un color y que se encargue de construir los huevos de pascua que puedan hacerse únicamente de ese color. Tendrán que ser conscientes de que cada niño necesitará dos globos, para así poder representar las dos expresiones faciales para cada color.

*Actividad 5. ¿Cuántas combinaciones se han formado?*

Duración: 60 minutos

Materiales: Anexo 5, hueveras, lápices

Desarrollo: Les entregaremos una huevera de ocho huevos a cada uno de los grupos formados anteriormente. Les pediremos que coloquen todos los huevos de pascua que hayan creado dentro de la misma y que lo hagan de manera organizada, colocando en una fila los huevos que expresen lo mismo y en donde, además, en cada columna coincida el color. Tras esto les preguntaremos: ¿Cuántos huevos distintos de pascua hemos hecho? La respuesta será 8. Pero, además de que cuenten uno por uno todos los huevos, queremos lograr que entiendan que también se puede calcular de otra forma. Para ello, les entregaremos una ficha (Anexo 5) que les servirá para comprender que la multiplicación puede emplearse como operación facilitadora del recuento: 4 (colores) x 2 (expresiones faciales).

*Actividad 6. ¡Llega un huevo con otra expresión!*

Duración: 60 minutos

Materiales: Anexo 6, lápices

Desarrollo: Una vez hayan comenzado a entender que la multiplicación se puede emplear para contar con mayor rapidez las combinaciones formadas, trataremos de realizar con ellos una

actividad más compleja. Les diremos que hemos encontrado un huevo con una expresión facial que no habíamos elegido (tristeza) y se lo enseñaremos. Este huevo que les mostraremos será de uno de los cuatro colores que anteriormente han elegido. Les preguntaremos: “Si hacemos ahora los huevos de pascua de los tres colores que faltan con esa expresión, ¿cuántos huevos de pascua tendremos? ¿qué hemos añadido para que haya más huevos distintos?”.

Por último, se les proporcionará una ficha (Anexo 6) para que coloreen todos los huevos que salen tras esa nueva expresión añadida. En la ficha también se tratará de que aprendan a ver que el número total de huevos se puede calcular con una multiplicación.

#### *Actividad 7. Ponemos en práctica lo aprendido*

Duración: 60 minutos

Materiales: Anexo 7, hueveras, lápices

Desarrollo: Esta actividad servirá para integrar todo lo visto durante la secuencia didáctica formulada. Además se pretenderá conocer qué han aprendido los niños y qué no. Para ello, se cogerán todas las hueveras de todos los grupos, dentro de las cuales estarán los ocho huevos creados por cada equipo. Les preguntaremos dos cuestiones:

- ¿cuántos huevos hay en estas hueveras?
- ¿cuántos huevos *distintos* hay en estas hueveras?

Por grupos tendrán que conversar y pensar para dar la respuesta a esas dos preguntas. Cuando hayan acabado de hablar, se les pedirá que digan sus respuestas y las apuntaremos todas en la pizarra. Una vez hecho esto, abriremos todas las hueveras para ir contando los huevos. Dejaremos abiertas todas las hueveras, y las entregaremos a sus respectivos grupos. Les pediremos que saquen de la huevera todos sus huevos de pascua, y les diremos que los metan dentro si la descripción que damos coincide con alguno de los suyos. Así, verán que aunque hay muchos huevos, solo ocho son distintos. Tras esto, se entregará a cada niño una ficha (Anexo 7) en donde tendrán que demostrar qué han entendido y qué no. Por último, cogeremos todos los huevos creados y los esconderemos por el patio, bien para la clase o bien para que participen varios cursos de la escuela.

## 6.2 Secuencia didáctica 2º Ciclo de Primaria

### *Actividad 1. Conocimientos previos*

Duración: 30 minutos

Materiales: Anexo 8, pizarra electrónica

Desarrollo: Esta actividad servirá para saber cuáles son los conocimientos previos del alumnado y para introducir las señales de tráfico más representativas, con las que se pretende profundizar en las características principales de algunas formas geométricas. Se les mostrará a través de la pizarra digital, una serie de señales de tráfico de tres formas distintas: rombo, cuadrado, círculo (Anexo 8). Tras la visualización de estas señales se les preguntará de manera oral una serie de cuestiones, primero relacionadas con la geometría y después relacionadas con el significado de las señales seleccionadas:

- ¿Qué formas geométricas aparecen? ¿Por qué las identificáis? ¿Habéis visto por la calle señales de tráfico de otras formas? ¿Cuáles? Además del cuadrado y del rombo, ¿qué otros cuadriláteros podrían utilizarse para crear señales de tráfico?
- ¿Alguna vez habéis visto estas señales de tráfico? ¿Cuáles? ¿Cuáles no? ¿Conocéis sus significados? ¿Qué pueden simbolizar?

Tras las cuestiones, les haremos ver que todas las figuras de una forma determinada siempre aparecen representadas por el mismo color, es decir, se pretenderá que sean conscientes de que todas las señales cuadradas son azules, por ejemplo. Para ello, sacaremos a tres niños a la pizarra y les pediremos que agrupen y rodeen aquellas señales que presentan rasgos comunes.

Por último, se les pedirá que traten de identificar el mensaje que esconde cada señal y en caso de observar que les resulta complicado, les diremos que las azules son informativas, que las rojas expresan prohibición y que las amarillas indican peligro o advertencia. Así, tendrán que expresar el mensaje de cada señal y comprender que el color y la forma de la señal se vinculan.

Análisis y diseño de materiales físicos para la comprensión del conteo

## *Actividad 2. Empleo de bloques lógicos.*

Duración: 30 minutos

Material: Bloques lógicos

Desarrollo: Se les dividirá en seis grupos y cada grupo será conocido con un nombre de animal distinto: tigres, elefantes, leones, águilas, dinosaurios y delfines. A cada grupo se le proporcionará unos minutos para que interactúe con los bloques lógicos que habremos creado. Todos los grupos dispondrán de figuras de distintas formas y colores sobre la mesa. Tras esto, les preguntaremos si relacionan alguna de esas figuras con las señales de tráfico trabajadas en la actividad anterior. Suponemos que señalarán el rombo amarillo, el círculo rojo y el cuadrado azul. De no ser así, les volveremos a mostrar las señales del Anexo 8.

Una vez introducido el material, le daremos a cada niño seis figuras de tres formas distintas: cuadrado, rombo y círculo. En esta ocasión, no contarán con ninguna figura que cumpla todos los requisitos de las señales de tráfico trabajadas, es decir, no dispondrán de figuras en las que coincida la forma con el color de alguna señal mencionada. Así, las seis figuras que cada niño tendrá sobre la mesa serán: cuadrado rojo, cuadrado amarillo, rombo rojo, rombo azul, círculo amarillo, círculo azul.

Por último, les haremos unas preguntas para que sean conscientes de que una señal de tráfico se compone de forma y color:

- Queremos poner una señal de prohibido... ¿de qué forma tendría que ser? Tienen que levantar alguna figura circular. No encontrarán un círculo de color rojo y por lo tanto, serán conscientes de que en este caso, el color no importa. Tendrán que levantar una figura circular o bien de color azul o bien de color amarillo ya que solo disponen de esas dos figuras circulares.
- Queremos poner una señal de peligro... ¿de qué color tendría que ser? Tendrán que levantar una figura amarilla no importa la forma. No tendrán la figura romboidal de color amarillo, y por lo tanto, tendrán que descubrir que cualquier figura amarilla sirve, ya sea circular o cuadrangular.

### *Actividad 3. Creación de señales*

Material: Cartulinas, pinturas, tijeras, lápices y reglas.

Duración: 60 minutos

Desarrollo: Esta actividad será realizada por grupos. Cada grupo tendrá que realizar tres señales en las que siempre aparezca mencionado el animal que da nombre a su grupo. Una debe indicar prohibición, otra debe ser informativa y una última debe expresar precaución. En todas ellas importa la forma y el color, y por lo tanto, deberán poner en práctica lo aprendido y saber relacionar correctamente cada forma con su color correspondiente. Antes de empezar a crear las señales deben pensar en el significado y mensaje que va a transmitir cada señal.

Por ejemplo, el grupo de los tigres podría crear tres señales con estos significados:

- “Prohibido pasear tigres” – hacer señal
- “Cuidado tigres en libertad” – hacer señal
- “Gire a la derecha para llegar a un Zoo con tigres albinos” – hacer señal

Les explicaremos que dentro de la señal siempre debe aparecer el animal al que hace referencia y que además, han de dibujarse los símbolos necesarios para que se logre entender. Esto es importante en el caso de la señal informativa, ya que si quieren indicar dirección o distancia han de poner flechas, números y todo aquello que consideren necesario.

### *Actividad 4. ¿Cuántas señales se han formado?*

Material: Señales creadas, mural grande, cuaderno, lápices

Duración: 30 minutos

Desarrollo: En primer lugar pediremos a cada grupo que muestren y expliquen cada señal al resto de grupos, y una vez hayan terminado, les preguntaremos cuántas señales distintas se han formado. Es posible que esto lo calculen contando una por una

todas las señales. Por este motivo, trataremos de introducir el diagrama de árbol como elemento facilitador del recuento.

Para ello, realizaremos estas cuestiones:

- De entre todas las señales creadas, ¿cuántos animales distintos podemos encontrar? Mientras van respondiendo a estas cuestiones, dibujaremos escribiremos el nombre de cada uno de los animales sobre un mural colgado en la pizarra.
- ¿Y cuántas formas diferentes hay para cada animal? Cuando respondan dibujaremos tres flechas que salen de cada animal y les iremos pidiendo que salgan y que coloquen las señales creadas donde consideren.

Así, les haremos ver que se han formado señales con seis animales distintos y que para cada animal tenemos tres formas diferentes. Este mismo diagrama tendrán que realizarlo en su cuaderno de matemáticas.

#### *Actividad 5. La multiplicación nos ayuda a contar combinaciones*

Duración: 30 minutos

Materiales: Anexo 9

Desarrollo: Continuaremos trabajando en base al diagrama de árbol creado en la actividad anterior. A través de esta actividad se pretende transformar el contenido presente en el diagrama de árbol en una operación:  $6 \times 3$ . Para ello, se les entregará una hoja (Anexo 9) en la que deben dibujar las señales de tráfico que han creado en tres parcelas. Encima de cada parcela aparecerá una de las tres formas geométricas de sus señales, dentro de las cuales tendrán que dibujar las seis señales con cada forma mencionada. Entre una parcela y otra habrá un signo que indica suma. Así, verán que eso se puede traducir a una operación:  $6+6+6$ , lo cual puede transformarse en multiplicación  $6 \times 3$ .

### *Actividad 6. Profundizando en la combinatoria*

Duración: 60 minutos

Materiales: Anexo 10, Anexo 11, cuaderno, pizarra, lápices

Desarrollo: En esta actividad se pretende trabajar los aspectos combinatorios trabajados anteriormente pero añadiendo más dificultad. En esta ocasión tendrán que trabajar de manera autónoma y ser ellos quienes elaboren otro diagrama de árbol. En esta ocasión les haremos una pregunta: ¿Qué pasaría si pudiéramos colorear cada una de las señales de los tres colores? ¿Tenemos las mismas combinaciones?

Para facilitar la tarea, les proporcionaremos una ficha (Anexo 10) en la que deben responder diferentes cuestiones, las cuales les servirán para después organizar correctamente todos los conjuntos en su diagrama.

De nuevo, les daremos otra ficha (Anexo 11) que ayude a comenzar el diagrama. Cuando hayan terminado, un niño tendrá que salir a la pizarra y elaborar el diagrama que haya hecho. El resto de la clase puede opinar acerca del mismo, para así encontrar los posibles errores hasta realizar el diagrama eficazmente. Así, tendrán que realizar el mismo proceso que en la actividad 5, el cual les permitirá descubrir que el número total de señales puede traducirse en una operación:  $3 \times 3 \times 6$ .

### *Actividad 7. ¿Qué hemos aprendido?*

Duración: 30 minutos

Materiales: Anexo 12, Anexo 13, lápices

Desarrollo: Esta última actividad servirá para sintetizar y comprobar qué han aprendido los niños a lo largo de las actividades. Se les entregará una ficha (Anexo 12) en la que tendrán que dar solución a un problema similar al trabajado en el aula, en el cual tienen que organizarse para calcular el número total de combinaciones. Por último, responderán a un cuestionario (Anexo 13) para valorar el grado de interés que ha suscitado en ellos la unidad didáctica que hemos puesto en práctica.

Análisis y diseño de materiales físicos para la comprensión del conteo

### 6.3 Secuencia didáctica 3º Ciclo de Primaria

#### *Actividad 1. Conocimientos previos*

Duración: 60 minutos

Materiales: Anexo 14, Anexo 15, lápices

Desarrollo: Esta actividad nos servirá para conocer qué saben y qué no saben. Para ello, les entregaremos una ficha (Anexo 14) que tendrán que rellenar individualmente. Servirá para saber si dominan o no las propiedades de la multiplicación a través de ejercicios en los que tienen que rellenar huecos o en los que tienen que elegir verdadero o falso. No importa que ya conozcan las propiedades de la multiplicación; esta secuencia didáctica servirá para lograr que los alumnos realmente comprendan y hagan visible el significado de cada una de las tres propiedades a trabajar (conmutativa, asociativa y distributiva). Tras esto, se les entregará una segunda ficha (Anexo 15) en la cual tendrán que rellenar diferentes recuadros relacionados con algunos medios de transporte, para también saber cuáles son sus conocimientos, ya que estos tendrán cierta importancia en la unidad didáctica elaborada.

#### *Actividad 2. Investigamos acerca de nuestros medios de transporte*

Duración: 30 minutos

Materiales: Ordenadores, lápices

Desarrollo: Suponemos que los niños no han sabido responder a todas las cuestiones planteadas en el Anexo 15, ya que algunas de éstas son de bastante complejidad. Por ello, les pediremos que investiguen y lleven a cabo una búsqueda de información de aquellos apartados que desconocían. Iremos al aula de informática y dispondrán de unos veinte minutos para completar o corregir los aspectos que consideren. Tras esto, dispondremos de diez minutos para que así los alumnos pongan en común la información que hayan encontrado, aprendiendo los unos de los otros.

*Actividad 3. ¡Viajamos por el mundo!*

Duración: 30 minutos

Materiales: Anexo 16, lápices o bolígrafos

Desarrollo: Se le proporcionará a cada niño un mapa de Europa (Anexo 16). Se les dirá que diseñen un trayecto desde España hasta el país que decida el docente. En el mapa tendrán que elaborar el recorrido que consideren más adecuado, señalando en cada punto del recorrido el empleo de uno u otro medio de transporte a través de un dibujo. Esto servirá para que después, los niños sean conscientes de que se pueden emplear dichos medios de manera muy diversa, ya sea empleando el avión como único medio de transporte o utilizando diferentes medios de transporte en un único viaje, pudiendo llegar hasta un país en tren y de ahí desplazarse en barco o bien empleando el coche para después usar el barco y por último el tren, además de otras muchas posibilidades.

*Actividad 4. ¿De cuántas maneras podemos viajar?*

Duración: 60 minutos

Materiales: Vasos de plástico, Anexo 17, lápices

Desarrollo: Les diremos que tres chicos (Juan, Alberto y Santiago) participan en un concurso y que alguno de ellos puede ser el ganador de un viaje. El ganador puede elegir el medio de transporte que prefiera. Así, primero tendrán que calcular de manera intuitiva todas las posibilidades, sabiendo que son tres chicos los que participan y que disponen de cinco medios de transporte (avión, tren, autobús, coche, barco) a elegir para para llegar a su destino. Cuando hayan terminado, les pediremos que digan cuántas posibilidades distintas les han salido y las apuntaremos en la pizarra.

Tras esto, le entregaremos a cada niño dos vasos de plástico. En el extremo abierto de uno de los vasos tendrán que pegar cinco dibujos, representando cada uno de los medios de transporte trabajados. En el extremo abierto del otro vaso tendrán que pegar tres etiquetas con el nombre de los tres chicos que quieren viajar. Así, les pediremos que pongan un vaso sobre el otro, colocando el vaso con los dibujos de los

medios de transporte en la parte de abajo. Tras esto, tendrán que ir girando el vaso con los nombres de los chicos, para así visibilizar todas y cada una de las parejas formadas al combinar los cinco medios de transporte con los tres nombres de chicos.

Les comentaremos que para hallar el total de combinaciones, tendrán que girar el vaso tantas veces como necesiten, hasta que el niño que emparejaron en primer lugar regrese hasta su posición inicial. Si lo necesitaran, haríamos una pequeña demostración con los vasos de plástico. Apuntarán todas las parejas formadas y las ordenarán, agrupándolas en función del pasajero que viaja (Juan, Alberto y Santiago). Así, primero escribirán todas las combinaciones de uno de los chicos, después las de otro chico y por último las combinaciones del chico restante.

Entre todos rellenaremos una pequeña ficha relacionada con el problema planteado (Anexo 17). Esta ficha servirá para que entiendan y recuerden que las parejas formadas se pueden hallar con una multiplicación ( $5 \times 3$ ).

#### *Actividad 5. ¿Entendemos la propiedad conmutativa?*

Duración: 30 minutos

Materiales: Vasos de plástico, lápices

Desarrollo: En esta actividad volveremos a utilizar los vasos de plástico que ya construimos con los alumnos. Ésta vez les pediremos que coloquen los vasos al revés, situando en la parte de abajo los nombres de los tres chicos. De nuevo, tendrán que buscar todas las parejas formadas.

Observarán que se vuelve a obtener el mismo resultado, lo que nos servirá para demostrar la propiedad conmutativa de la multiplicación:  $5 \times 3 = 3 \times 5$ . No enunciaremos ni recitaremos la propiedad conmutativa, sino que serán ellos, a partir de lo observado en las dos últimas actividades, los que expliquen por qué una de las propiedades de la multiplicación es la conmutativa y qué significado tiene esto.

*Actividad 6. ¡Ahora viajaremos con una acompañante!*

Duración: 30 minutos

Materiales: Vasos de plástico, Anexo 18

Desarrollo: Para demostrar y hacer visible la propiedad asociativa es necesario tener tres factores y por lo tanto, les entregaremos un tercer vaso de plástico. Les explicaremos que ahora el chico que gane el sorteo podrá ir acompañado de una chica. Y que por lo tanto, necesitamos otro vaso de plástico en el que aparezcan etiquetas con el nombre de dos chicas, ya que no sabemos si la acompañante será Clara o Andrea. Tras esto, dividiremos a la clase en dos grupos diferenciados, cada grupo tendrá que calcular todas las combinaciones de manera distinta, empleando dos vasos de plástico:

- Grupo A: cada niño de este grupo calculará primero las parejas formadas al relacionar cada una de las dos chicas que quieren viajar con los diferentes medios de transporte disponibles. (2x5)
- Grupo B: cada niño de este grupo calculará primero las posibles parejas de chicos y chicas formadas. (2x3)

Cuando hayan hecho esto, a cada alumno le entregaremos una ficha distinta (Anexo 18) en función del grupo al que ha sido adjudicado. En ella tendrán que colocar las primeras parejas formadas. Después, tendrán que completar la ficha ayudándose del tercer vaso de plástico que les falta para así poder calcular el total de combinaciones distintas al relacionar los cinco medios de transporte, las dos chicas y los tres chicos. A todos les tendrá que salir el mismo resultado aunque hayan empezado de diferente manera. Así, serán conscientes del significado de la propiedad asociativa de la multiplicación, ya que verán que:

$$(5 \times 2) \times 3 = 5 \times (2 \times 3)$$

*Actividad 7. ¡Vamos a demostrar la propiedad distributiva!*

Duración: 60 minutos

Materiales: Anexo 19, Pizarra

Desarrollo: En esta ocasión no utilizaremos los vasos de plástico, sino que escribiremos una igualdad en la pizarra:  $5 \times (3+4) = 5 \times 3 + 5 \times 4$ . Les diremos que el número 5 representan los cinco medios de transporte estudiados, y que el número 3 representa a tres chicas cualesquiera y el número 4 a cuatro chicos cualesquiera. Así, les pediremos que traten de demostrar dicha igualdad, facilitándoles mediante una ficha que les sirva como guía (Anexo 19). Cuando terminen, tres niños saldrán a la pizarra y cada uno demostrará por su cuenta la igualdad para el resto de la clase. El resto de la clase puede opinar y criticar algún aspecto de la demostración. Así, al final tendrán que aparecer unas tablas (o diagramas de árboles) en donde por un lado estén juntas las siete personas (3+4) que van a viajar con sus cinco respectivos medios de transporte y por el otro lado estén separados los chicos de las chicas en forma de suma con sus cinco respectivos medios de transporte.

*Actividad 8. ¿Somos capaces de poner en práctica lo aprendido?*

Duración: 60 minutos

Materiales: Anexo 20

Desarrollo: Por último, se les entregará una ficha (Anexo 20) con varios problemas en donde deben emplear la multiplicación para hallar el número total de combinaciones formadas, y en donde, además, deben demostrar alguna de las propiedades de la multiplicación. Podrán usar los vasos de plástico si lo necesitan o podrán hacer uso de los diagramas de árboles/tablas también empleados durante la unidad didáctica elaborada. Cuando terminen de resolver los problemas y demostrar las propiedades de la multiplicación, se les pedirá que cada niño elija una de las tres propiedades demostradas y estudiadas y que invente un problema en donde su compañero tenga que hacer uso de dicha propiedad, además de demostrarla. Así, serán también los niños los que valoren después la actividad realizada por otro alumno de la clase.

*Actividad 9. Profundizando en combinatoria (con o sin repetición)*

Duración: 60 minutos

Materiales: Pizarra electrónica

Desarrollo: Tras demostrar y trabajar las propiedades de la multiplicación, les formularemos dos preguntas más, relacionadas con los tres chicos de la actividad anterior (Santiago, Juan y Alberto), para que aprendan a calcular el total de combinaciones de diferentes situaciones dadas:

- ¿Cuántas combinaciones distintas tenemos si el ganador del viaje puede elegir uno de los chicos restantes como acompañante? (En este caso, no tenemos en cuenta el medio de transporte elegido). Tendrán que ser conscientes de que el premio lo pueden ganar cualquier de los tres, pero luego al elegir acompañante solamente quedan dos chicos ( $3 \times 2$ ). Juntos haremos un pequeño diagrama de árbol, en donde aparezcan los nombres de los tres chicos y de cada chico salgan dos flechas con los chicos restantes que no han sido premiados. Tras esto, les haremos apuntar las seis parejas formadas y les haremos ver que hay parejas que se repiten y que las estamos contando dos veces. Así, descubrirán que en realidad el total de combinaciones distintas son:  $(3 \times 2)/2$
- ¿Cuántas combinaciones distintas tenemos si entregamos un viaje a Cuba al primer ganador y un viaje a Francia al segundo? En este caso volveremos a realizar de manera conjunta un diagrama de árbol, en donde aparezca Cuba a la izquierda y de donde salgan tres flechas para así escribir el nombre de los tres chicos. Por último, de cada uno de los chicos tendrán que salir dos flechas, con el nombre de los dos chicos restantes que, aunque no vayan a Cuba, sí pueden viajar a Francia. Tras esto, tendrán que escribir todas las parejas formadas ( $3 \times 2$ ). En este caso tendrán que darse cuenta de que todas las parejas son distintas, ya que aunque les hayan aparecido dos parejas en las que aparecen, por ejemplo, Santiago y Alberto éstas no significan lo mismo. Mientras que en una de las parejas Santiago recibe como premio un viaje a Cuba por ser el primer ganador y Alberto se va a Francia por resultar segundo, en la otra pareja ocurre lo contrario, siendo Alberto quien va a Cuba y Santiago a Francia.

## 7. RESULTADOS

En este apartado se hará una reflexión y un análisis con respecto a la puesta en práctica de la unidad didáctica elaborada para 2º Ciclo de Primaria, y en concreto para una clase de 3º de Primaria. Nos centraremos en el comportamiento e interés mostrado por dicho alumnado, así como en los resultados de las diferentes actividades, mostrando especial interés en la prueba final e individual que se les presentó, para así valorar cuánto y qué aprendieron, comparando y reflejando gráficamente las posibles diferencias y similitudes entre los niños de dicha clase.

La clase contaba con un total de 28 alumnos, algunos de ellos de diferentes nacionalidades, procedentes de Alemania, Ucrania u otros países de Sudamérica. Se caracterizaba por ser una clase bastante heterogénea y con necesidades educativas variadas, pudiendo encontrar dos niños con TDAH, un niño con altas capacidades y otros con problemas de diferentes índoles (disfonías nerviosas, problema de pronunciación...).

Era una clase acostumbrada a trabajar en equipo, ya que la docente trabaja con una metodología basada en el aprendizaje cooperativo. Por este motivo, ideé actividades en las que tuvieran que resolver problemas de combinatoria en grupo, aspecto que les motivó e interesó. Aun así, quise que respondieran un cuestionario y una pequeña prueba individual para tener materiales sólidos con los que evaluar y analizar de manera más eficiente los resultados obtenidos.

### 7.1 Sesión 1.

En esta primera sesión introduje los conceptos matemáticos básicos para que después pudieran realizar las actividades de combinatoria. Entre todos construimos un mapa conceptual sobre una cartulina DIN3 en donde aparecían las principales formas geométricas. La mayoría de los niños ya conocían el nombre de las figuras geométricas principales y no les resultó complicado. Se mostraban participativos y atentos, disfrutando siempre que tenían que salir a la pizarra a colocar cada figura geométrica en el lugar que correspondía.

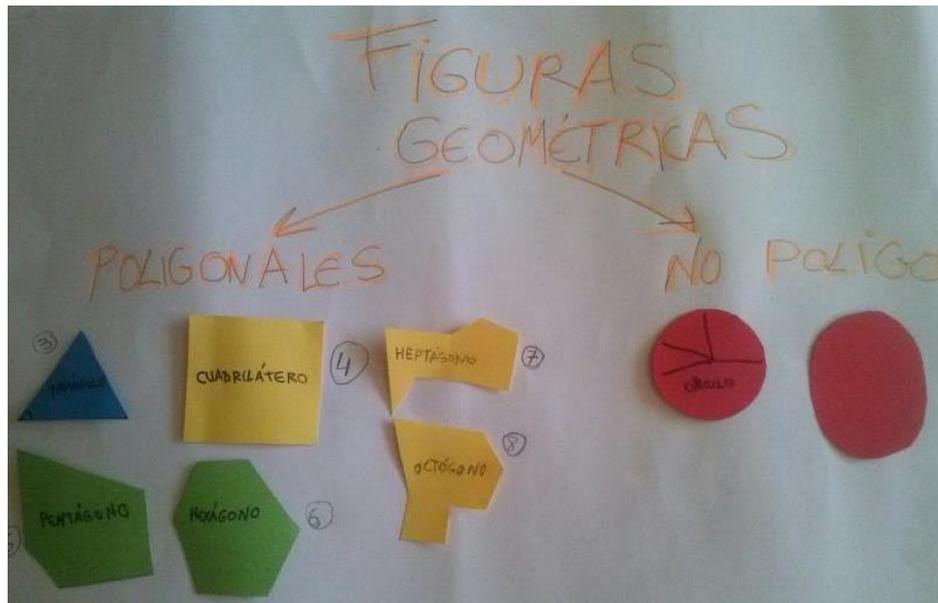


Figura 15: Mapa conceptual de las formas geométricas

Tras esto, les mostré diferentes señales de tráfico (Anexo 8). Pedí voluntarios y tres niños de la clase salieron a la tarima. Uno por uno, les iba preguntando si conocían alguna de las señales de tráfico que les mostraba y que trataran de decir cuál era su significado. De nuevo, no tuvieron mucha dificultad en identificar cada señal con su significado, aunque sí tuve que hacerles ver que el color y la forma de cada señal eran determinantes a la hora de descubrir su mensaje.

## 7.2 Sesión 2.

En esta ocasión les pedí que por grupos, inventaran tres señales de tráfico. Formé seis grupos de cinco o cuatro personas. Tenían que elegir un animal que les representara como equipo (no podían elegir dos grupos o más grupos el mismo animal). Después tuvieron que idear y dibujar una señal que expresara prohibición (círculo rojo), otra que expresara atención (rombo amarillo) y una última que indicara información (cuadrado azul). En todas ellas tenía que aparecer el animal de su equipo, para así conseguir tres señales distintas por cada grupo.

Fue la actividad que mejor resultó de todas, ya que era una clase que disfrutaba mucho plásticamente. Aunque la mayoría de equipos entendió y comprendió qué es lo que tenían que hacer, hubo un grupo que realizó incorrectamente las señales. Mientras el resto reflejaron en sus tres señales el animal que les representaba, el

grupo mencionado no siguió el mismo patrón e inventó tres señales en donde aparecían tres animales distintos que nada tenían que ver con el animal de su equipo. Pensaron que bastaba con elaborar señales de tráfico relacionadas con animales.

Tras esto, un encargado de cada grupo salió a la tarima y sobre otra cartulina DIN3 tuvo que ir colocando sus señales de tráfico, explicando para la clase el significado de cada una de ellas. Una vez colocadas todas en la cartulina les hice una pregunta: “¿Cuántas señales distintas tenemos?”



Figura 16: Organización de las señales en disposición rectangular

En un primer momento no lo entendieron y hubo respuestas erróneas, ya que algunos decían que había tres señales distintas fijándose únicamente en las formas. Para que fueran conscientes de que no solamente había tres señales distintas les hice una segunda pregunta: “¿Solamente hay tres señales distintas?”. Se fijaron de nuevo y descubrieron que en realidad había 18 señales distintas, ya que el interior de unas y otras variaba aunque tuvieran la misma forma.

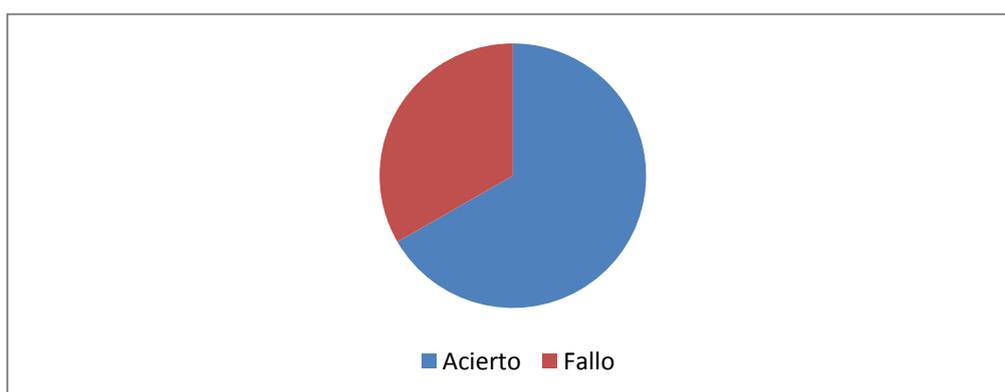
Es en este momento cuando quise que entendieran que podían calcular el número total de señales distintas a través de una suma:  $6 + 6 + 6$ . Algunos de los niños no necesitaron ese paso y directamente expresaron que se podía calcular a partir de una multiplicación  $6 \times 3$ .

### 7.3 Sesión 3.

En esta ocasión preparé una actividad más compleja que la anterior. Por grupos tenían que completar un diagrama de árbol (Anexo 11). Antes de que empezaran a rellenarlo les hice dos preguntas: “¿Qué pasaría si pudiéramos pintar cada señal de tres colores y no solo de uno?” “¿Habría más o menos señales distintas?”. Una vez dicho esto quise que fueran autónomos y que, sin ayuda, fueran completando dicho diagrama. Dentro del mismo tenían que aparecer los seis animales diferentes, las tres formas distintas de las señales y los tres colores con los que esta vez podían pintar cada una de las tres formas. Debajo de dicho diagrama aparecía una multiplicación con huecos, dentro de los que tenían que colocar los números adecuados para hallar el total de señales distintas que tenían en la nueva situación presentada.

Reflejo a través de un gráfico los resultados de dicha actividad, para mostrar el grado de comprensión y entendimiento que se produjo en los niños de 3º de Primaria:

**Tabla 8.** Aciertos y errores en el diagrama de árbol



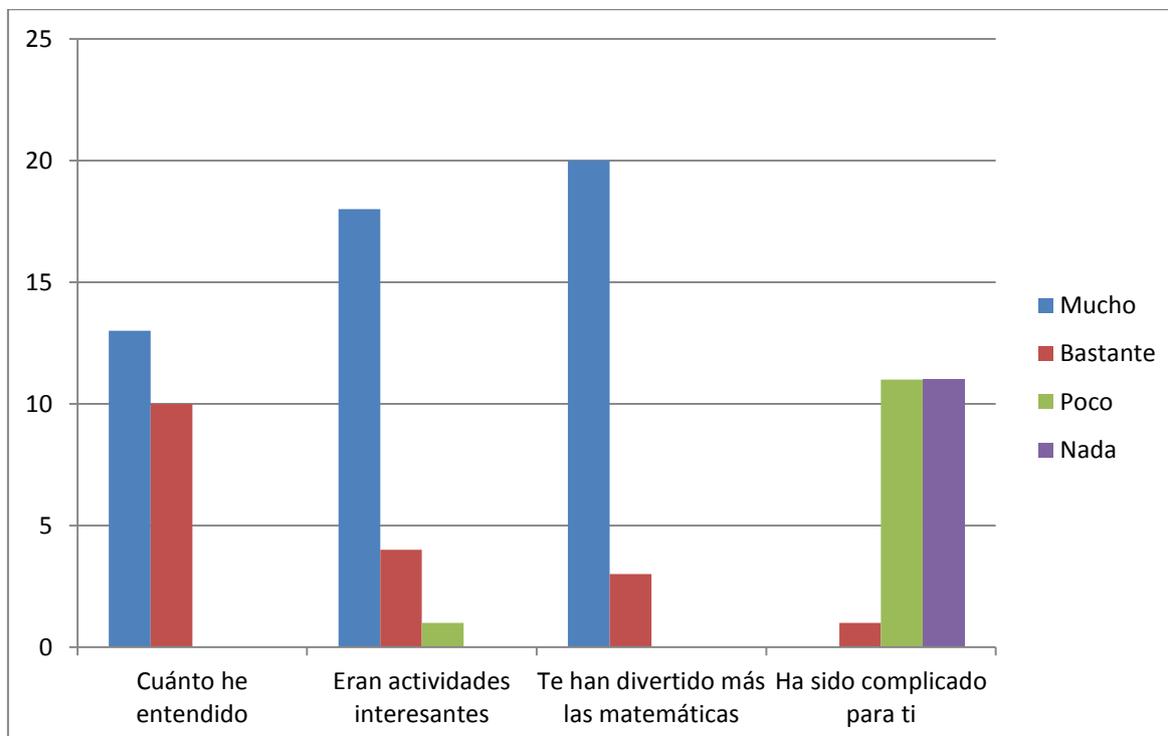
*Este gráfico ha sido realizado teniendo en cuenta los seis grupos que participaron, cuatro de ellos realizaron correctamente la actividad y en cambio dos cometieron errores, no en la realización del diagrama de árbol pero sí a la hora de rellenar los huecos que faltaban en la multiplicación para calcular el total de señales distintas.*

Minutos antes de acabar la tercera sesión les entregué un cuestionario (Anexo 13) para saber qué aspectos eran los que más valoraban de las diferentes actividades puestas en práctica, para conocer las cosas que cambiarían o para descubrir si esta manera de trabajar las matemáticas les resultaba más divertida y motivadora.

Este cuestionario fue respondido por 23 niños, ya que el resto no se encontraban en el aula. Todos escribieron que no cambiarían nada, en cambio, con respecto a la cuestión de qué es lo que más les ha gustado salieron diferentes opiniones. Bastantes niños dijeron que lo mejor de la unidad didáctica fue la actividad en la que tenían que crear sus propias señales de tráfico. También hubo dos niños que dijeron que lo que más les había gustado había sido la explicación de cada una de las actividades y conceptos matemáticos e incluso un niño expresó que lo mejor fue el momento de descubrir que se podían calcular el total de señales distintas con una multiplicación.

Tras esto, muestro diferentes gráficos con los que evaluar los demás aspectos del cuestionario:

**Tabla 9.** Resultados del cuestionario



#### **7.4 Sesión 4.**

En esta última sesión les entregué una prueba final (Anexo 12) para comprobar qué habían aprendido, ya que hasta el momento habían trabajado por grupos y equipos y quería ver el grado de comprensión de cada uno de los niños.

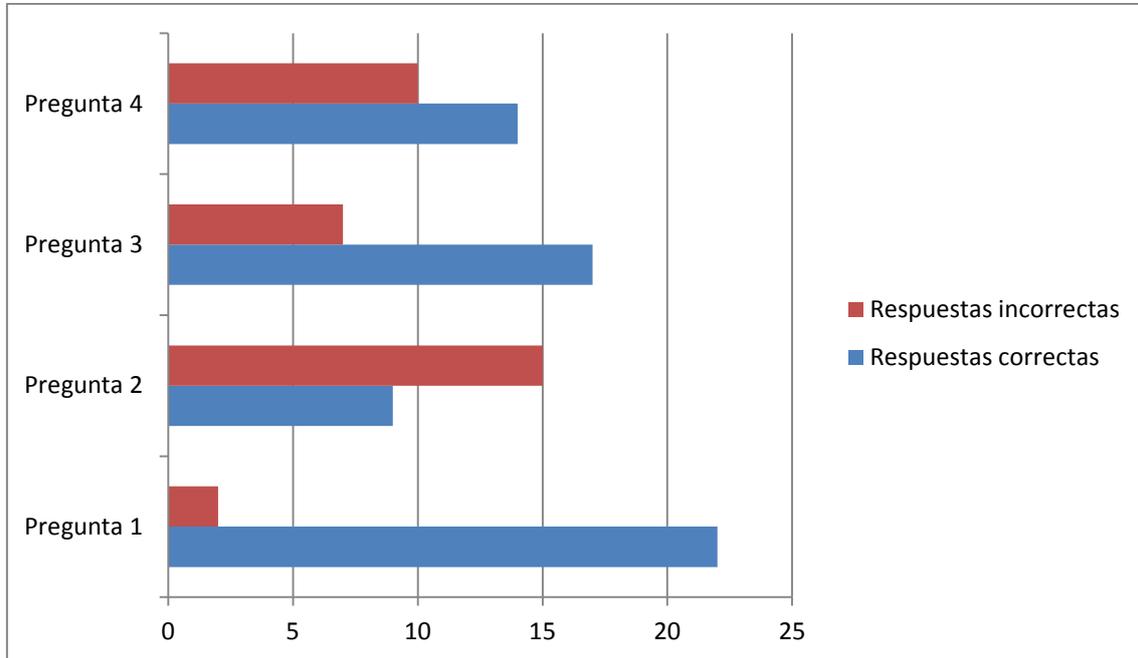
La prueba consistía en cuatro preguntas y disponían de media hora para realizarla. Antes de observar los resultados, consideré que no iban a tener excesiva dificultad en realizar la última cuestión, ya que estaba bastante organizada y pautaada. En cambio, pensé que la tercera actividad iba a resultar bastante más difícil para los niños. Tras recoger la prueba, descubrí que sucedió lo contrario y que la tercera pregunta tuvo mayor número de aciertos. En la mayoría de ocasiones, si tenían la tercera actividad bien elaborada, también la cuarta estaba correctamente hecha. Solo en unos pocos casos realizaban bien la tercera actividad y cometían algún error en la última.

Por otro lado, la primera de las preguntas fue respondida adecuadamente por prácticamente toda la clase, exceptuando a dos niños. En cambio, la gran mayoría de niños no respondió correctamente la segunda cuestión “En las actividades que hemos hecho, ¿para qué servía la multiplicación?”. Con esta pregunta quería comprobar cuántos niños habían sido conscientes, tras poner en práctica la unidad didáctica, de que la multiplicación puede utilizarse para hallar el conjunto de combinaciones al relacionar diferentes aspectos (colores, tamaños, formas...). Muchos contestaban a la pregunta particularizando la respuesta, es decir, respondiendo que la multiplicación servía para calcular el total de señales distintas, mientras que un niño del aula sí supo decir que la multiplicación servía para hallar el total de combinaciones.

Es destacable que únicamente los niños con las actividades 3 y 4 bien hechas eran capaces de responder con acierto a esta cuestión de la multiplicación. Desde mi punto de vista, es algo lógico ya que se trata de una pregunta abstracta, por lo que el niño ha de comprender, entender y realizar actividades de combinatoria de manera adecuada para después ser consciente del significado de la multiplicación y saber expresarlo de manera escrita.

Por último, voy a reflejar a través de un gráfico la cantidad de niños que acertaron cada una de las cuatro preguntas señaladas anteriormente:

**Tabla 10.** Prueba final de combinatoria



*Estos datos fueron extraídos a partir de 24 niños de la clase.*

Considero que los resultados podrían haber sido bastante mejores si hubiera dispuesto de más tiempo y siempre y cuando se iniciaran actividades de combinatoria desde primer curso de Primaria, logrando de esta manera una mayor consolidación y comprensión de los conceptos vinculados a dicha rama de la matemática, consiguiendo así superar los obstáculos que en la mayoría de ocasiones tienen los chicos en Secundaria a la hora de trabajar las variaciones, las permutaciones y las combinaciones.



## CUESTIONES PLANTEADAS Y CONCLUSIONES

Al principio de este trabajo se formularon una serie de preguntas que, tras el estudio realizado, es posible responder, reflejando las conclusiones extraídas y recogiendo también los aspectos más importantes que dan significado a todo lo expuesto en los diferentes apartados:

*¿Qué significa contar? ¿Cómo se va desarrollando esta habilidad?*

Contar consiste en calcular de forma ordenada el total de objetos o elementos de un conjunto. Desde muy pequeños y de manera casi inconsciente, los niños van adquiriendo las nociones básicas del conteo, sus principios y sus técnicas auxiliares. Así, aprenden a determinar el cardinal de un conjunto dado para después resolver ciertos problemas o situaciones de su vida diaria. No obstante, es en la escuela, y en concreto en Primaria, donde se van adquiriendo conceptos más complejos relacionados con el recuento, ya que se trabajan diferentes técnicas de recuento como las agrupaciones (sistema de numeración decimal o sexagesimal), además de la adición como operación facilitadora del recuento, que evita tener que contar uno por uno todos los elementos. En cambio, la habilidad para contar no se continúa desarrollando a través de la multiplicación, ya que ésta suele definirse y trabajarse como operación matemática con la que sumar un número tantas veces como indica el otro, que aunque también implica contar, no permite que los alumnos sean conscientes de otras posibilidades que la multiplicación ofrece a la hora de calcular el total de formas de combinar elementos de dos conjuntos, aspecto que será determinante para después resolver actividades de combinatoria.

*¿Cómo se enseña el conteo en las escuelas de hoy en día? ¿Qué tipo de aprendizajes se transmiten?*

Tras el periodo de observación dentro de una escuela, puedo afirmar que la mayor parte del tiempo se trabaja en base a una metodología conductista, ya que el libro de texto es la herramienta básica y fundamental para enseñar matemáticas. El conteo no es un caso excepcional, y al igual que el resto de apartados de dicha materia, éste se enseña a partir de los recuadros teóricos y ejercicios que el libro ofrece.

Así, la instrucción del conteo consiste en verter los conocimientos necesarios para que después el alumno memorice dicha información y con ella sea capaz de realizar los ejercicios correspondientes. Con todo ello el niño aprende a imitar y a copiar, así como a corregir los posibles errores sin que esto suponga haberlos comprendido.

¿Qué consecuencias tiene todo esto? El principal problema es que el alumno deja de hacerse preguntas, tan importantes e imprescindibles en las matemáticas, y comienza a responder mecánicamente.

Así, cuando se proponen ejercicios en los que deben pensar y reflexionar para hallar el total de elementos de un conjunto, los niños no saben actuar e incluso los alumnos con mejores resultados en matemáticas tampoco son capaces de dar solución al problema planteado. En general, se sienten perdidos cuando no encuentran una señal que indique el camino hacia la respuesta acertada.

*¿Qué tipo de actividades de conteo suelen aparecer en los libros de texto de matemáticas? ¿Corresponden solo a un bloque temático o abarcan varios bloques?*

La gran parte de las actividades de conteo que aparecían en los libros de texto analizados:

- Promovían aprendizajes memorísticos y cerrados.
- Eran repetitivas y poco motivadoras.
- No estaban relacionadas con la vida de los alumnos, sus intereses y experiencias.
- Siempre contaban con un ejercicio resuelto que facilitaba la copia e imitación del ejemplo en el resto de actividades a realizar.
- No trabajaban la multiplicación como técnica de recuento, necesaria para hallar el número de pares de elementos de dos conjuntos distintos.

Por otro lado, tal y como queda demostrado en este Trabajo Fin de Grado, el conteo aparece relacionado con todos y cada uno de los bloques matemáticos en los diferentes libros de texto analizados. A pesar de esto, el porcentaje de actividades de recuento que relacionan contenidos de distintos bloques es menor conforme aumenta la edad de los niños a los que van dirigidas, fragmentando en parcelas aspectos de las matemáticas que en la vida real aparecen siempre relacionados.

Análisis y diseño de materiales físicos para la comprensión del conteo

*¿Podemos trabajar el concepto del conteo de manera transversal a todos los bloques del área de matemáticas? De ser así, ¿qué supondría?*

A través de las unidades didácticas propuestas en este trabajo, queda demostrado cómo es posible relacionar diferentes bloques matemáticos en torno al conteo. Por ejemplo, en una de las unidades se relacionan las técnicas del conteo con las formas geométricas. Además, en todas las unidades aparecen tablas o diagramas de árboles en las que deben aprender a organizar los datos, adquiriendo así contenidos del último bloque del área de matemáticas. Por último, en estas unidades se observa cómo también el conteo permite introducir contenidos de otras materias (Educación vial, Lengua...).

Esta relación entre bloques, no solo en lo que se refiere al conteo, responde a la afirmación de Piaget sobre que resulta significativo para el alumno que se establezca alguna relación entre los conocimientos que ya posee con los nuevos que va adquirir; así el niño comprenderá y entenderá, evitando tener que aprender el nuevo conocimiento desde cero.

*¿Qué materiales físicos se utilizan (o existen) para trabajar el conteo en las aulas?*

Aunque existen muchos y variados materiales (ábaco, bloques lógicos, regletas...) con los que trabajar el conteo, no suelen emplearse en las aulas, bien por falta de tiempo o por desconocimiento. Estos materiales permiten que el niño recorra un camino enriquecedor y valioso hasta lograr el aprendizaje deseado, ya que si se utilizan correctamente, le hacen pasar desde lo manipulativo hasta lo simbólico de manera comprensiva. En esta memoria, se prueba que, además de los materiales físicos ya existentes, los docentes pueden innovar y crear sus propios materiales físicos, adaptados a sus objetivos. Además, pueden preparar actividades en las que sean sus propios alumnos los autores de los materiales que más tarde van a emplear para adquirir algún conocimiento relacionado con el conteo.

*¿Cuál es la mejor forma de emplear los materiales físicos a la hora de trabajar aspectos relacionados con el conteo?*

Para emplearlos correctamente, es necesario saber para qué se van a emplear así como el momento más adecuado para ello. No es lo mismo usarlos antes o después de una explicación. Los materiales resultan más efectivos durante las primeras sesiones, como introductores de nuevos conceptos y estructuras matemáticas. Además, estos materiales han de emplearse de manera colectiva, permitiendo que surjan debates, opiniones y pensamientos a partir de la observación común de los mismos. Tampoco debemos olvidar la importancia de proporcionar cierto periodo de tiempo para que los niños se familiaricen con el material empleado, siendo necesario que se elaboren actividades donde ellos sean libres para manipular y experimentar con éste.

*¿Qué beneficios pueden obtenerse si entendemos la multiplicación como una forma de combinar elementos? ¿Cómo entienden los niños la idea de multiplicación?*

La temprana resolución de actividades de combinatoria puede resultar útil para que, más adelante, esos niños comprendan y resuelvan con soltura los ejercicios de combinaciones, variaciones y permutaciones que deben realizar en Secundaria.

Además, trabajar la combinatoria desde edades tempranas permite desarrollar el pensamiento divergente ya que, de manera indirecta, han de ser capaces de buscar alternativas y posibilidades creativas para resolver el problema planteado. El docente les puede mostrar diferentes caminos y mecanismos que pueden emplear para calcular el total de combinaciones que se obtienen (disposiciones rectangulares, diagramas de árbol...). Sin embargo, son ellos los que deben emplear distintos y variados procedimientos para adaptarse a la infinidad de problemas de combinatoria que se les pueden plantear.

En la mayoría de casos la escuela ofrece una única visión de la multiplicación, ya que ésta se emplea principalmente para resolver problemas del tipo: “Metemos en una caja 7 vasos de cristal, si llenamos 4 cajas ¿cuántos vasos hay en total?”.

Esto último se refleja en los resultados obtenidos tras poner en práctica la unidad didáctica, ya que todos los niños de la clase se mostraron sorprendidos al descubrir por primera vez que la multiplicación servía para algo más que para resolver ese tipo de problemas matemáticos. E incluso un niño se mostró curioso y satisfecho de haber descubierto otro uso y función de esta operación matemática.

Este Trabajo Fin de Grado me ha resultado muy instructivo, ya que he adquirido mayor formación gracias a los apartados teóricos realizados. Por otro lado, la deficiencia encontrada en los libros de texto de Primaria en relación a la multiplicación, fue lo que me impulsó a plantear unidades didácticas en las que se trabajaran aspectos de combinatoria, ampliando con ello el significado habitual de la multiplicación. También valoro la importancia de haber analizado los diferentes materiales físicos existentes para trabajar el conteo, ya que son estos los que me dieron ideas para la creación de nuevos materiales. Para finalizar, me gustaría comentar que los resultados obtenidos me han permitido observar la dificultad de gran parte de los niños para comprender las actividades de combinatoria, ya que es un aspecto que no tiene relevancia en el currículum de Primaria, y por tanto en las aulas. Además, los resultados me han parecido útiles para mejorar como docente, ya que de sus valoraciones he extraído los aspectos positivos y negativos de las actividades realizadas, las explicaciones teóricas o la metodología empleada.



## REFERENCIAS

Aguirre Esteban (2004). *Programa de educación preescolar 2004*. Edit. México: Offset.

Alberto, M; Schwer, I; Cámara V y Fumero, Y. (2005). *Matemáticas discreta: con aplicaciones a las ciencias de la programación y de la computación*. Santa Fe, Argentina: UNL. [Se encuentra disponible en (16/03/2014) [http://books.google.es/books?id=X7gGqkoSDKoC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs\\_ge\\_summary\\_r&cad=0#v=onepage&q&f=false](http://books.google.es/books?id=X7gGqkoSDKoC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false)]

Becerra Espinosa, J.M (2004). *Matemáticas V...El placer de dominarlas sin complicaciones*. México: ENP-UNAM. [Se encuentra disponible en (14/03/2014) [http://books.google.es/books?id=gZu\\_FRMy2cEC&printsec=frontcover&dq=Jose+manuel+espinosa+matematicas+v&hl=es&sa=X&ei=NnojU5CfAsrK0QXD64GwDw&ved=0CDEQ6AEwAA#v=onepage&q=Jose%20manuel%20espinosa%20matematicas%20v&f=false](http://books.google.es/books?id=gZu_FRMy2cEC&printsec=frontcover&dq=Jose+manuel+espinosa+matematicas+v&hl=es&sa=X&ei=NnojU5CfAsrK0QXD64GwDw&ved=0CDEQ6AEwAA#v=onepage&q=Jose%20manuel%20espinosa%20matematicas%20v&f=false)]

B.O. Navarra - Número 64 (2007). Decreto Foral 24/2007. [Disponible en (28/02/2014) <http://www.maristaspamplona.es/system/files/df%2024-2007.pdf>]

Cascallana, M.T (1988). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid: Santillana.

Celamín, M y Equipo de Educación Primaria de Ediciones SM (2004). *Matemáticas 1º Primaria. Proyecto Duendes*. Madrid: SM

García Fresnedo, F; Martínez Cabeza, M.J; Santiago Espejo, M y Villarino Fernández, J.A (2003). *Matemáticas 4º Primaria*. Madrid: SM.

García, P y Garín, M (2004). *Matemáticas 2º Primaria. Proyecto Un paso más*. Madrid: Santillana.

García, P; Uriondo, J.L y Rodríguez, M (2002). *Matemáticas 6º Primaria. Entre amigos*. Madrid: Santillana.

Gelman, R. y Gallistel, C. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Gómez, Alfonso B. (1989). *Numeración y cálculo*. Matemáticas: cultura y aprendizaje nº 3. Madrid: Síntesis.

Grimaldi Ralph, P. (1998). *Matemáticas Discreta y Combinatoria: Una introducción con aplicaciones*. México: Addison Wesley Longman.

Gutiérrez, Rodríguez A. (Ed.) (1991). *Área de conocimiento didáctica de la Matemática*. Matemáticas: cultura y aprendizaje nº 1. Madrid: Síntesis.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1997). *Psicología del Niño*. Madrid: Ediciones Morata, S. L [Se encuentra disponible (4/03/2014) en <http://saludypsicologia.com/wp-content/uploads/2011/10/Psicologia-del-ni%C3%B1o--piaget-e-inhelder.doc>]

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight: A theory of Mathematics Education*. London: Academic Press.

# **ANEXOS**

## Anexo 1

### TINA, LEO Y LOS HUEVOS DE PASCUA

¡Por fin ha llegado Pascua! A Tina y Leo les gusta mucho esta fiesta. Empiezan pintando los huevos para decorar la casa y después buscan los huevos de chocolate que papá y mamá esconden en el jardín... ¡y que están buenísimos!

Así que se han puesto las batas del cole y han cogido un pincel cada uno. Tina ha empezado a pintar un huevo rojo con puntos verdes, Leo uno amarillo con rayas naranjas... Papá y mamá les han ayudado. Después de un rato de pintura, ¡tenían un montón de huevos!

Una vez que la pintura se ha secado, los han colocado por toda la casa. ¡Qué bonito ha quedado toda llena de colores!

Entonces ha llegado el momento de comenzar con la parte más dulce de la fiesta.

- ¿Queréis huevos de chocolate?, ha preguntado papá

- ¡Síííí! ¡Síííí!, han gritado los mellizos.

- Tenéis cuatro huevos cada uno, todos escondidos en el jardín. ¡Que empiece la búsqueda!

Tina y Leo han comenzado a revisar locos de emoción cada rincón de jardín. Y han ido encontrando un huevo... dos huevos... Al cabo de un rato tenían tres huevos cada uno, pero ni rastro de los que faltaban. "Creo que necesitáis que Atila os eche una mano", ha sugerido papá.

"¿Pero dónde está Atila?", ha preguntado Leo.

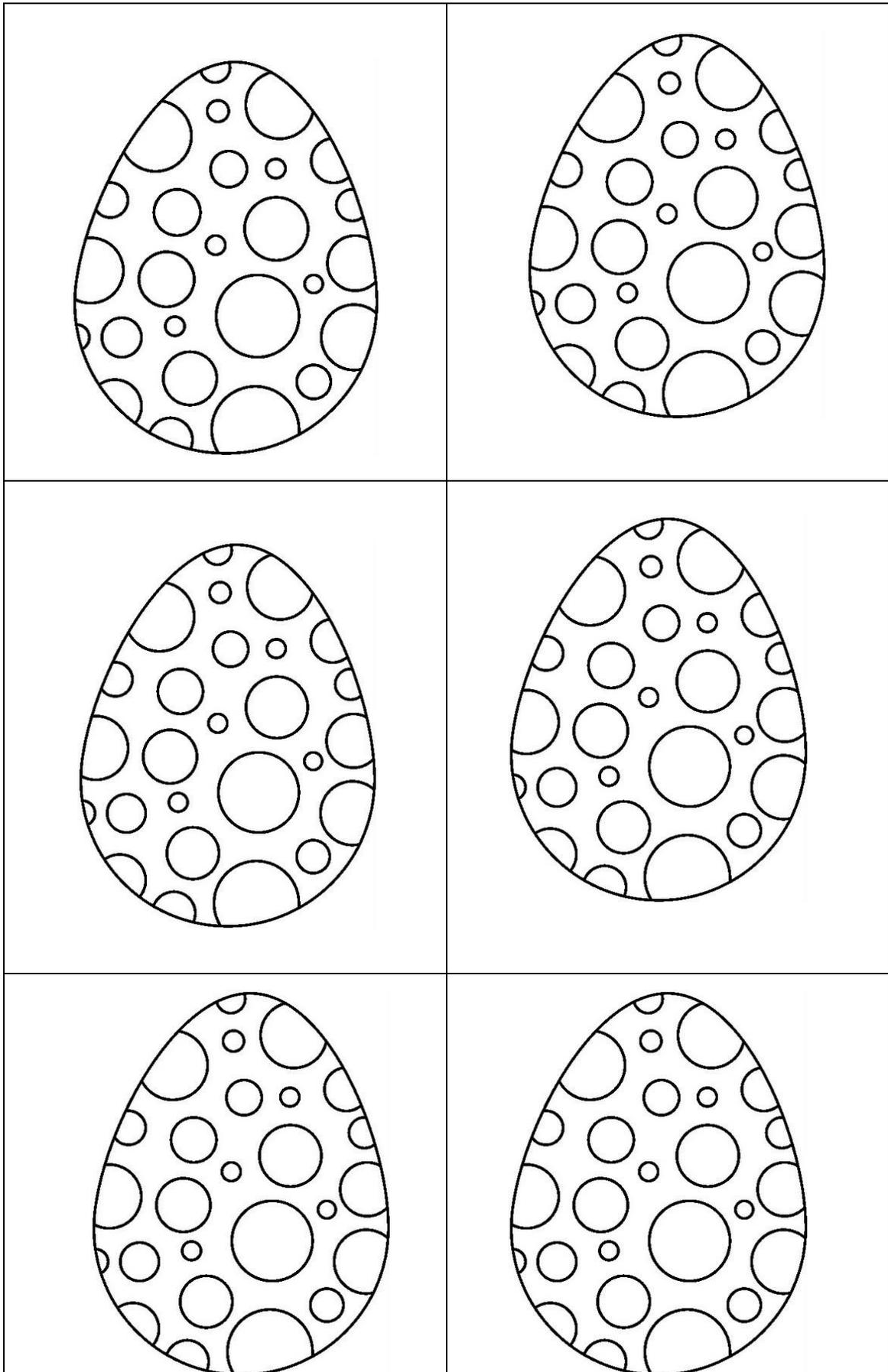
"¡Se está comiendo los huevos!", ha gritado Tina.

Ahí estaba Atila, al fondo del jardín, relamiéndose y con los bigotes llenos de chocolate. Los mellizos han corrido hacia él y Atila ha empezado a jugar con ellos. ¡Han acabado todos llenos de chocolate!

Anexo 2



Anexo 3

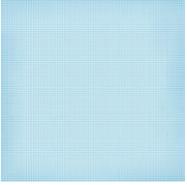
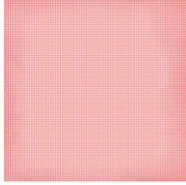


**Anexo 4**

COLORES	NÚMEROS DE VOTOS

EMOCIONES	NÚMEROS DE VOTOS

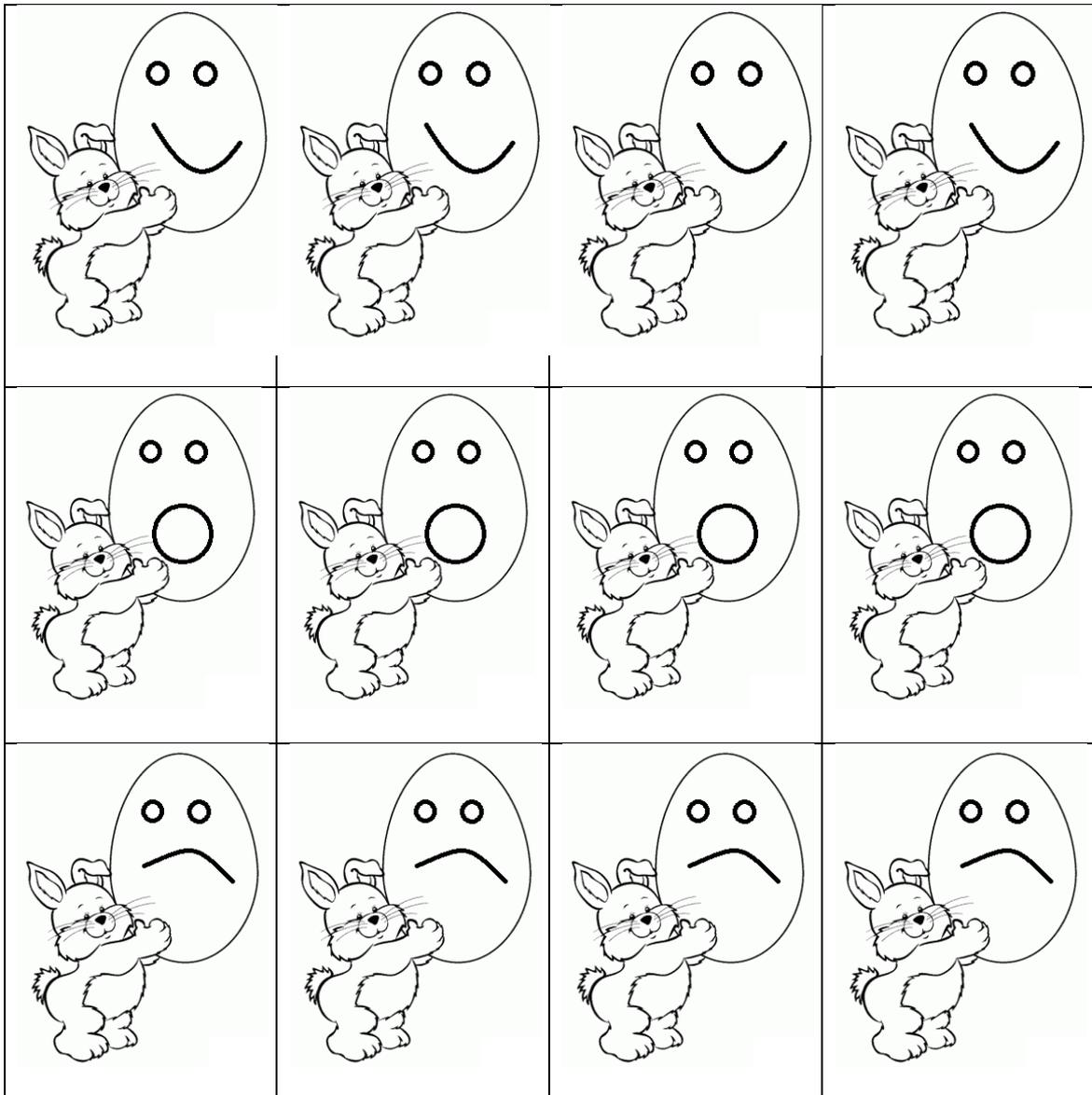
Anexo 5

↓                      ↓                      ↓                      ↓

	+		+		+	
--	---	--	---	--	---	--

Anexo 6



¿Qué emoción hemos añadido? \_\_\_\_\_

¿Cuántos huevos nuevos salen? \_\_\_\_\_

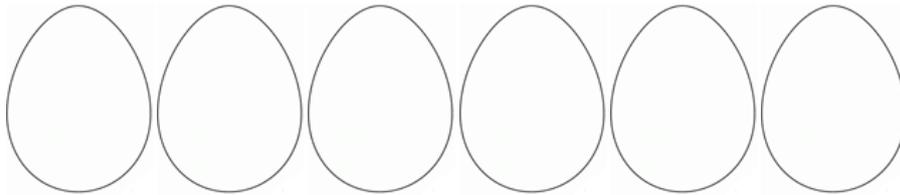
¿Cuántos huevos distintos tenemos en total? \_\_\_\_\_

Lo podemos calcular con una operación:  $\_ + \_ + \_ = \_ \times \_$

## Anexo 7

Los huevos de gallina pueden ser marrones, blancos o amarillos. Coloréalos para conseguir el mayor número de huevos distintos.

- Primer grupo de huevos:

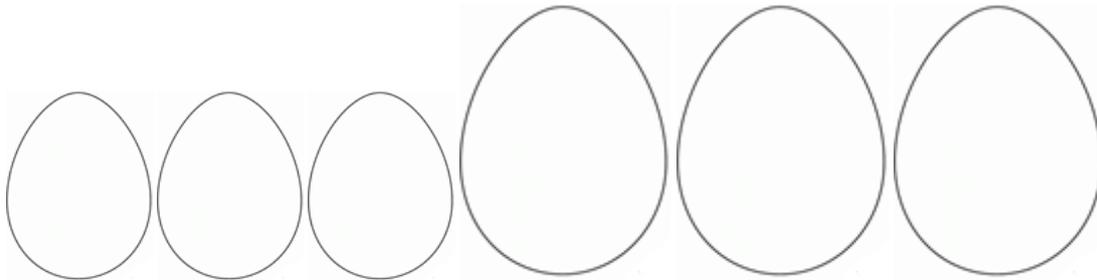


Número de **colores**:     

Número de **tamaños** diferentes:     

¿Cuántos huevos tenemos?      ¿Cuántos huevos **distintos** tenemos?      **x**      =

- Segundo grupo de huevos:



Número de **colores**:     

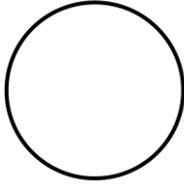
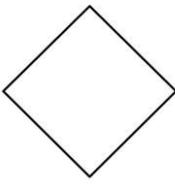
Número de **tamaños** diferentes:     

¿Cuántos huevos tenemos?      ¿Cuántos huevos distintos tenemos?      **x**      =

Anexo 8



Anexo 9

			
ELEFANTES			
DELFINES			
DINOSAURIOS			
LEONES			
ÁGUILAS			
TIGRES			



	+		+	
--	---	--	---	--

## Anexo 10

1. ¿Cuántas formas geométricas distintas tienen las señales de tráfico creadas? Cuáles.

---

---

2. En esta ocasión, ¿de cuántos colores podemos pintar cada forma? Cuáles.

---

---

3. ¿Cuántos animales distintos pueden aparecer en cada señal? Cuáles.

---

---

4. ¿Crees que saldrán más o menos señales distintas que antes? ¿Por qué?

---

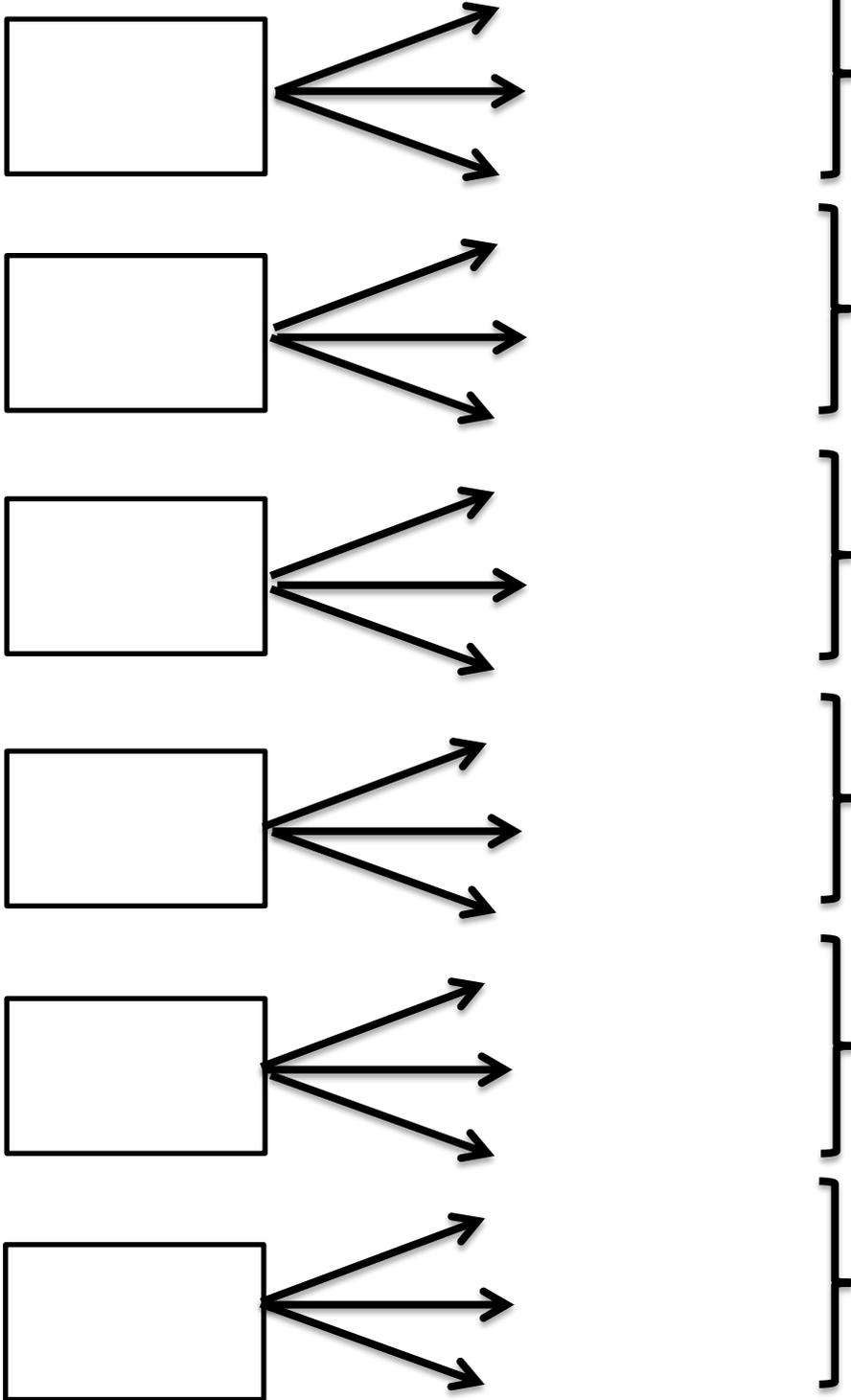
---

Anexo 11

ANIMALES

FORMAS

COLORES



## Anexo 12

1. Hemos visto tres tipos de señales de tráfico. Relaciona cada forma con su significado:

ROMBO

PROHIBICIÓN

CUADRADO

PRECAUCIÓN

CÍRCULO

INFORMACIÓN

2. En las actividades que hemos hecho, ¿para qué servía la multiplicación?

---

---

3. En un museo hay cuadros con dos formas distintas: **circulares y triangulares**. Cada cuadro puede ser de tres tamaños: **pequeño, mediano o grande**. ¿Cuántos cuadros distintos podemos encontrar?

4. Imagina que **podemos pintar** cada cuadro anterior **de color azul o de color rojo**. ¿Cuántas combinaciones tenemos ahora?

¿Número de formas distintas?: \_\_\_\_\_

¿Número de tamaños distintos?: \_\_\_\_\_

¿Número de colores distintos?: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ (formas) x \_\_\_\_\_ (tamaños) x \_\_\_\_\_ (colores) =

### Anexo 13

	<b>Mucho</b>	<b>Bastante</b>	<b>Poco</b>	<b>Nada</b>
¿Cuánto he entendido?				
¿Eran actividades interesantes?				
¿Te han divertido más las matemáticas?				
¿Ha sido complicado para ti?				

¿Qué es lo que más te ha gustado?	
¿Qué cambiarías?	
¿Qué puntuación le darías al tema de combinaciones? (Del 1 al 10)	

## Anexo 14

### 1. Completa los huecos con las palabras: conmutativa, asociativa o distributiva.

- $(4 \times 3) \times 2 = 4 \times (3 \times 2)$  es la propiedad \_\_\_\_\_.
- $4 \times 6 = 6 \times 4$  es la propiedad \_\_\_\_\_.
- $5 \times 8 = 8 \times 5$  es la propiedad \_\_\_\_\_.
- $3 \times (7 + 2) = 3 \times 7 + 3 \times 2$  es la propiedad \_\_\_\_\_.
- $(4 \times 4) \times 5 = 4 \times (4 \times 5)$  es la propiedad \_\_\_\_\_.

### 2. Completa con verdadero o falso.

Dos propiedades de la multiplicación se llaman conmutativa y asociativa \_\_\_\_\_

La propiedad distributiva afirma que si multiplicamos dos números, da igual el orden de ambos factores, es decir, da igual que multipliquemos  $3 \times 2$  que  $2 \times 3$  \_\_\_\_\_

La propiedad conmutativa la podemos encontrar en la suma, la multiplicación y la resta \_\_\_\_\_

### 3. Pon un ejemplo de:

Propiedad conmutativa \_\_\_\_\_

Propiedad asociativa \_\_\_\_\_

Propiedad distributiva \_\_\_\_\_

Anexo 15

	<p>Es un vehículo: aéreo/ acuático/ terrestre</p> <p>Tiene _____ ruedas</p> <p>Es de tamaño pequeño/mediano/grande</p> <p>Puede alcanzar una velocidad de ___ km/h</p> <p>El primer coche apareció en el año _____</p> <p>Lo mejor: _____</p> <p>Lo peor: _____</p>
	<p>Es un vehículo: aéreo/ acuático/ terrestre</p> <p>Tiene _____ ruedas</p> <p>Es de tamaño pequeño/mediano/grande</p> <p>Puede alcanzar una velocidad de ___ km/h</p> <p>El primer tren apareció en el año _____</p> <p>Lo mejor: _____</p> <p>Lo peor: _____</p>
	<p>Es un vehículo: aéreo/ acuático/ terrestre</p> <p>Tiene _____ ruedas</p> <p>Es de tamaño pequeño/mediano/grande</p> <p>Puede alcanzar una velocidad de ___ km/h</p> <p>El primer barco apareció en el año _____</p> <p>Lo mejor: _____</p> <p>Lo peor: _____</p>



Es un vehículo: aéreo/ acuático/ terrestre

Tiene \_\_\_\_\_ ruedas

Es de tamaño pequeño/mediano/grande

Puede alcanzar una velocidad de \_\_\_ km/h

El primer avión apareció en el año \_\_\_\_\_

Lo mejor: \_\_\_\_\_

Lo peor: \_\_\_\_\_



Es un vehículo: aéreo/ acuático/ terrestre

Tiene \_\_\_\_\_ ruedas

Es de tamaño pequeño/mediano/grande

Puede alcanzar una velocidad de \_\_\_ km/h

El primer bus apareció en el año \_\_\_\_\_

Lo mejor: \_\_\_\_\_

Lo peor: \_\_\_\_\_

## Anexo 16

MAPA.DISEÑO.COM/PEX

### EUROPA



Anexo 17



SOY

Puedo viajar en...



SOY

Puedo viajar en...



SOY

Puedo viajar en...



¿Cuántos chicos distintos quieren viajar? \_\_\_\_\_

¿Cuántos transportes distintos tienen para viajar? \_\_\_\_\_

¿Cuántas combinaciones distintas hay? \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ x \_\_\_\_\_

# Anexo 18

## Grupo A:

Chica: _____ Transporte: _____






\_\_\_ (chicas) x \_\_\_ (transportes) = \_\_\_



\_\_\_ x \_\_\_ (chicos) =

**Grupo B:**

Chico: _____ Chica: _____




**Grupo B:**



\_\_\_ (chicas) x \_\_\_ (chicos) = \_\_\_



\_\_\_ x \_\_\_ (transportes) =

Anexo 19

5= transportes \_\_\_\_\_

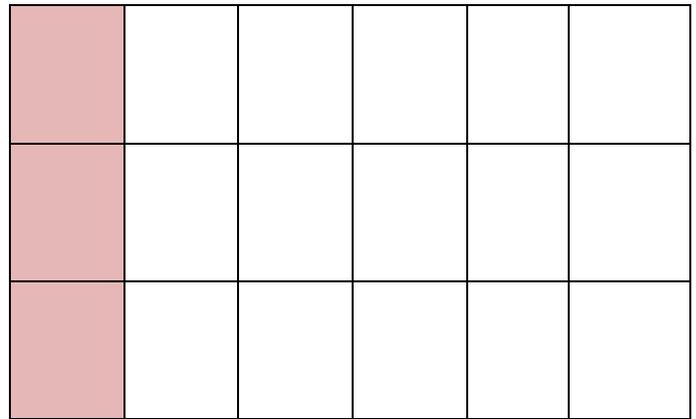
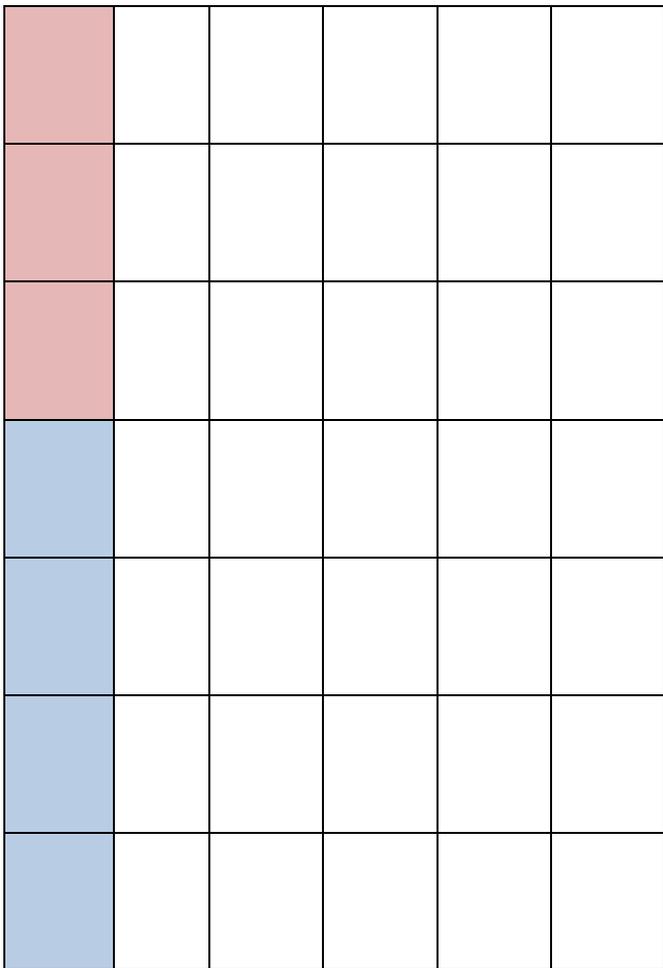
3= chicas \_\_\_\_\_

4 = chicos \_\_\_\_\_

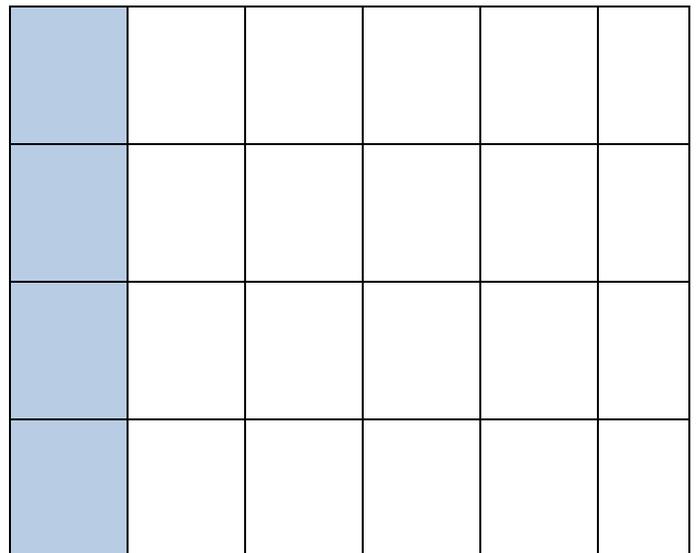
$$5 \times (3 + 4)$$

=

$$5 \times 3 + 5 \times 4$$



+





4. Imagina que **los chicos** (Juan, Mario, Ernesto, Santiago y Carlos) **se juntan con las chicas** (Luisa, Miriam, Lucía, Carol) de los problemas anteriores y van juntos a una tienda de coches con **4 colores distintos** (azul, rojo, verde y negro). ¿Cuántas combinaciones distintas hay?

Número de chicos: \_\_\_\_\_

Número de chicas: \_\_\_\_\_

Número de colores: \_\_\_\_\_

$$\underline{\quad} \times (\underline{\quad} + \underline{\quad}) = \boxed{\quad}$$

5. Imagina que otro día **van solas las 4 chicas**. Y que otro día van **solos los 5 chicos**. ¿Cuántas combinaciones hay?

Número de chicos: \_\_\_\_\_

Número de chicas: \_\_\_\_\_

Número de colores: \_\_\_\_\_

$$\begin{array}{l} \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \\ \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \\ \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \end{array}} \right\} \boxed{\quad}$$

6. Fíjate en estos dos últimos problemas. De nuevo, se cumple una propiedad de la multiplicación. ¿Cuál? Demuéstrala.

Se cumple la propiedad \_\_\_\_\_.

